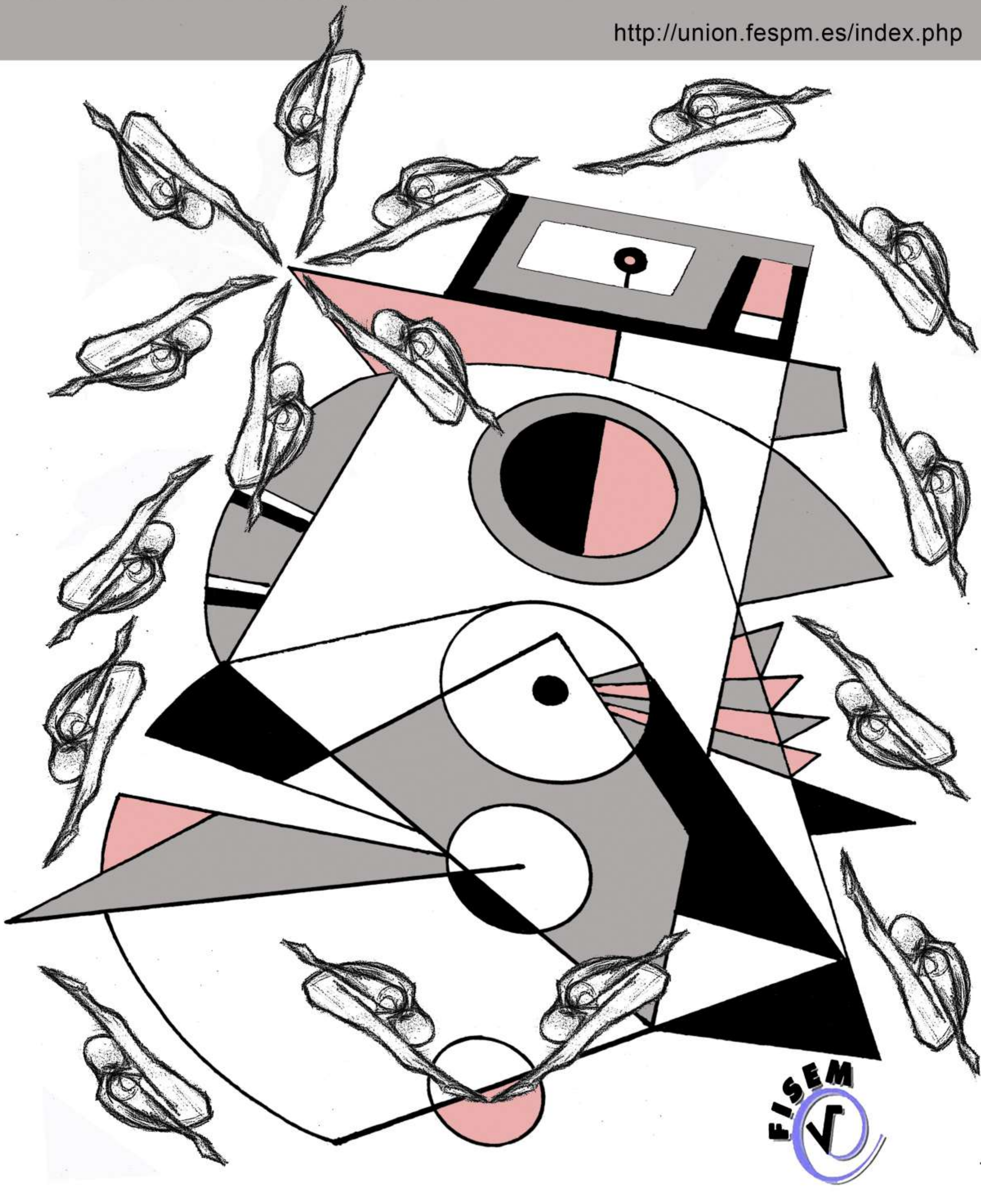
UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0604
Año XVII - Número 62
Agosto 2021

http://union.fespm.es/index.php



FISEM

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XVII – Número 62 – Agosto 2021

http://union.fespm.es/index.php

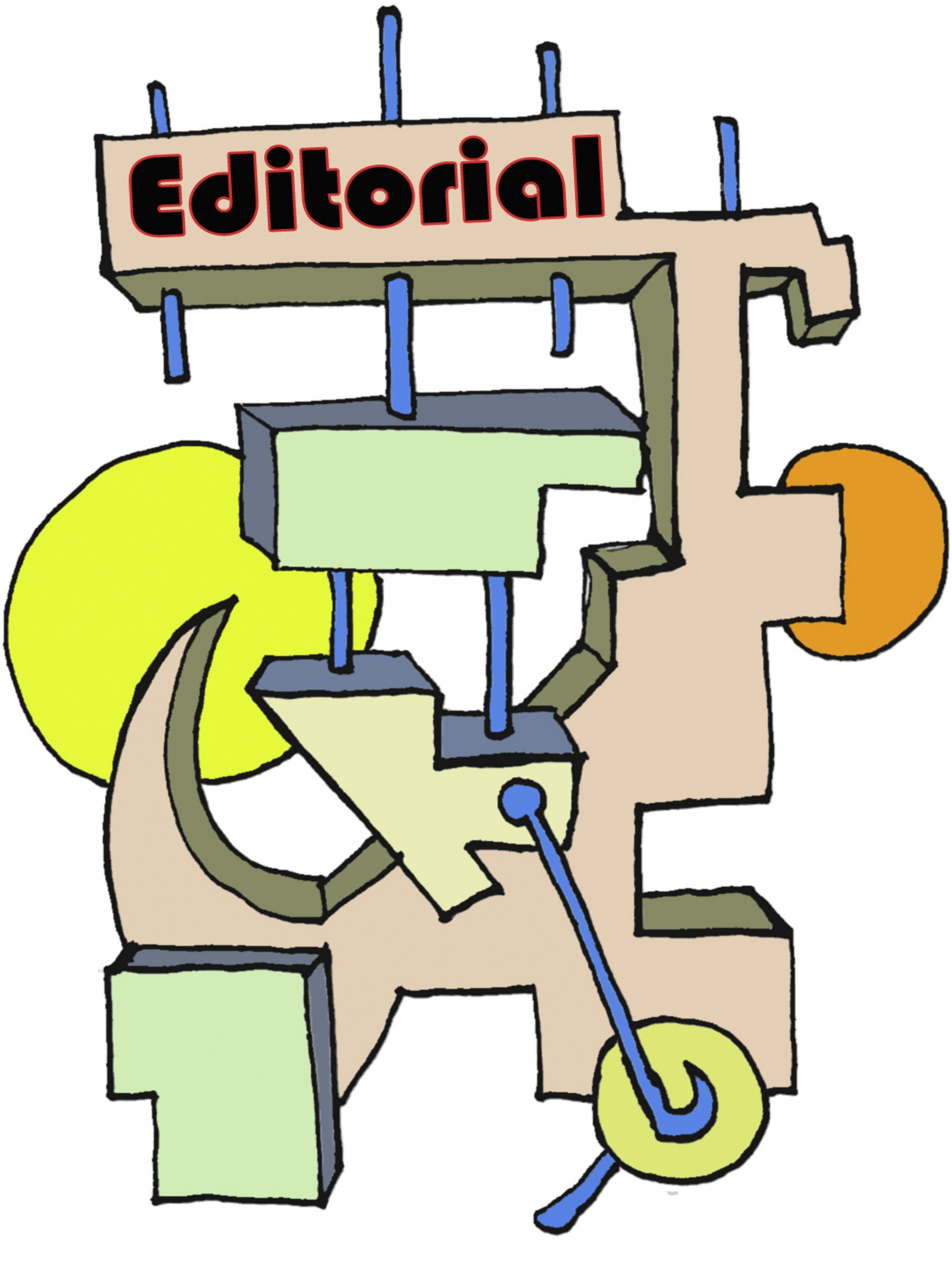
ÍNDICE

PROPUESTAS ÁULICAS

EL RINCÓN DE LOS PROBLEMAS

GEOGEBRA EN UNIÓN

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
http//union.fespm.es/index.php



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640

Número 62. Agosto 2021

Páginas 1-3

Editorial

Estimados lectores

¡Hoy tenemos el placer de publicar el segundo número del año 2021!

En esta oportunidad, tenemos el agrado de comunicarles que contamos con Fabián Vitabar como nuevo director de la FISEM, él es de nuestro querido país vecino Uruguay y en este número, nos complace con un artículo que se puede leer en la sección de "Firma Invitada".

Hemos de destacar también que ya se encuentra habilitado el espacio de "Novedades" en nuestro sitio y que durante todo este período se fueron publicando diversos eventos, entre ellos, el IV Día GeoGebra de Argentina y el IX Día GeoGebra Latinoamericano, cuyas memorias pueden ser vistas en http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/121426. También está publicado y continúa vigente el evento FotoGebra y las actividades que en ese marco se realizan se encuentran disponibles en el canal de Youtube https://www.youtube.com/c/FotoGebraRizzoK y en la página web del concurso www.fotogebra.org.

Asimismo, se ha mejorado el formulario al que se accede desde botón **Aportes del Lector,** mediante el cual el usuario podrá enviar información detallada acerca de actividades y eventos relacionados con la Educación Matemática que deseen difundir, para luego, ser compartida en la pestaña de Novedades.

En relación con el sitio web, se ha incorporado un tutorial en "Envíos" para subir artículos al sistema OJS, además de un acceso directo al registro de ORCID, desde la barra lateral de la página, y se están recuperando los números anteriores de la revista que se encontraban alojados en una plataforma anterior de modo que además tengan un mismo formato. Además, mencionar que se ha actualizado la página web de la FISEM para una mejora visual y de interfaz.

En cuanto a la organización de la revista mantenemos las **secciones**:

- Editorial
- Firma Invitada: destinada a la publicación del material de una persona que represente a la Educación Matemática en cada uno de los países miembro de FISEM y de otros lugares.

●Artículos: destinada a la publicación de artículos de investigación y de experiencias educativas, en Educación Matemática en todos los niveles educativos.

●Propuestas áulicas: en la que se ofrecen recursos motivadores para utilizar en forma creativa que surgen de las aportaciones recibidas.

●El Rincón de los Problemas: en este espacio a cargo del profesor Uldarico Malaspina Jurado (Pontificia Universidad Católica del Perú) se ofrece en cada número una situación problemática y sus formas de abordarlo.

● GeoGebra en UNIÓN: donde se comparte el avance y el progreso que ha tenido el software en todo el mundo como recurso educativo, con la colaboración de Alejandro Gallardo, y la publicación de un artículo en esta temática mediante la invitación de especialistas en el tema.

En este número de la Revista, incluimos una nueva portada y una especial para cada sección, todas producciones de Leandro Tomasetti. Además, estamos reorganizando el Equipo Asesor de la Revista UNIÓN (órgano de asesoramiento, observador, consultivo y externo al Equipo Editorial, constituido por investigadores de reconocido prestigio de diferentes áreas, países y especialidades del campo de la Educación Matemática) con el objetivo de mejorar y analizar la evolución de la revista, evaluar su interés y calidad científica.

En este número, el 62, se publican dieciséis trabajos cuyos autores representan a los países: Argentina, Brasil, Colombia, Chile, España, Italia, Perú y Uruguay. De estos, nueve corresponden a la sección **Artículos**, que refieren a investigaciones que comparten resultados e instrumentos de investigación utilizados, vinculadas en un gran porcentaje con la utilización de las tecnologías y, en particular, con GeoGebra y algunos de ellos abordan temáticas inusuales, como la educación inclusiva donde se explora el aprendizaje de probabilidades de un estudiante ciego.

En **Propuestas Áulicas** encontramos tres experiencias que el lector podrá adaptar y trabajar en el aula, y servirle de referencial teórico.

En la sección **Rincón de los Problemas**, el profesor Uldarico Victor Malaspina Jurado relata una propuesta titulada: Creación de problemas sobre triángulos, jugando con varillas.

Y, por último, en la sección **GeoGebra en UNIÓN** se comparte el avance y el progreso que ha tenido el software en todo el mundo como recurso educativo, con la colaboración de Alejandro Gallardo y la publicación de un artículo titulado: Flores: del jardín a GeoGebra, a cargo de los invitados Débora Pereiro Carbajo y Javier Cayetano Rodríguez.

Para futuras publicaciones, reiteramos nuestro pedido de recibir artículos que presenten resultados, experiencias y/o evaluaciones de lo sucedido durante la pandemia por Covid-19 en los distintos espacios educativos, que permitan reflexionar sobre la educación actual y a futuro: ¿Cuáles aspectos de la modalidad virtual perdurarán? ¿Qué otros saberes están desarrollando los estudiantes con la educación a distancia? ¿Qué competencias necesitan los docentes para desarrollar en estos nuevos escenarios? ¿Los estudiantes están desarrollando las competencias y/o habilidades que se espera desarrollen según las currículas? ¿Qué ocurre en estas nuevas modalidades de enseñanza con la adquisición de los saberes: *saber, saber ser y saber hacer*? Y tantas otras que los colegas podrán investigar. El objetivo es proporcionar nuevas herramientas para abordar los distintos escenarios que estamos transitando y poder advertir cuáles son las buenas prácticas que han surgido con el paso a la virtualidad, para sostenerlas a futuro. Invitamos a reflexionar sobre su práctica y a compartir aquí sus aportes, ya que estimamos que serán de interés para la sociedad actual.

Deseando tengan buena lectura, agradecemos la labor invaluable de los revisores de los artículos y a los autores que han elegido esta revista para difundir sus trabajos.

Karina y Viviana

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640

Número 62. Agosto 2021

Páginas 1-3

Editorial

Queridos leitores

Hoje temos o prazer de publicar o segundo número do ano de 2021!

Nesta ocasião, temos o prazer de informar que temos Fabián Vitabar como novo diretor da FISEM, ele é do nosso querido país vizinho, o Uruguai e, neste número, estamos contentes com um artigo que pode ser lido no "Assinatura do Convidado "Seção".

Devemos ressaltar também que o espaço "Notícias" já está habilitado em nosso site e que ao longo desse período diversos eventos foram publicados, entre eles o IV Día GeoGebra de Argentina y el IX Día GeoGebra Latino-americano, cujas memórias podem ser Visualizações em http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/121426. O evento FotoGebra também é publicado e continua válido e as atividades realizadas neste âmbito estão disponíveis no canal do YouTube https://www.youtube.com/c/FotoGebraRizzoK e no site do concurso www.fotogebra.org .

Da mesma forma, foi aprimorado o formulário acessado a partir do botão Contribuições do Leitor, por meio do qual o usuário pode enviar informações detalhadas sobre as atividades e eventos relacionados à Educação Matemática que deseja divulgar, para depois serem compartilhados na aba Novedades (Notícias).

Em relação ao site, foi incorporado um tutorial em "Envíos" para fazer upload de artigos para o sistema OJS, bem como um acesso direto ao registro ORCID, a partir da barra lateral da página, e os números anteriores da página estão sendo recuperado. revistas que foram hospedadas em uma plataforma anterior para que também tenham o mesmo formato. Além disso, menciona que o site da FISEM foi atualizado para uma melhoria visual e de interface.

Quanto à organização da revista, mantemos as seções:

- Editorial
- Assinatura do Convidado: destinada à publicação do material de uma pessoa que represente a Educação Matemática em cada um dos países membros do FISEM e em outros lugares.
- Artigos: destina-se à publicação de artigos de pesquisa e experiências educacionais em Educação Matemática em todos os níveis de ensino.

● Propostas de sala de aula: nas quais são oferecidos recursos motivadores para serem usados criativamente, oriundos das contribuições recebidas.

● O Canto dos Problemas: neste espaço do professor Uldarico Malaspina Jurado (Pontificia Universidad Católica del Perú), cada questão apresenta uma situação problemática e suas formas de lidar com ela.

● GeoGebra na UNIÓN: onde se compartilham os avanços e avanços que o software tem feito em todo o mundo como recurso educacional, com a colaboração de Alejandro Gallardo, e a publicação de um artigo sobre o assunto a convite de especialistas na matéria.

Nesta edição da Revista, incluímos uma nova capa e uma especial para cada seção, todas produções de Leandro Tomasetti. Além disso, estamos reorganizando a Equipe Consultiva da Revista UNIÓN (assessora, observadora, consultiva e externa à Equipe Editorial, composta por renomados pesquisadores de diferentes áreas, países e especialidades da área da Educação Matemática) com o objetivo de aprimorar e analisar a evolução da revista, avaliar seu interesse e qualidade científica.

Neste número, 62, dezesseis trabalhos são publicados cujos autores representam os países: Argentina, Brasil, Colômbia, Chile, Espanha, Itália, Peru e Uruguai. Destes, nove correspondem à seção de Artigos, que se referem a investigações que compartilham os resultados e instrumentos de pesquisa utilizados, vinculados em grande parte ao uso de tecnologias e, em particular, ao GeoGebra e alguns deles abordam temas inusitados, como educação inclusiva onde é explorada a aprendizagem de probabilidades de um aluno cego.

Em **Propostas** Clássicas encontramos três experiências que o leitor poderá adaptar e trabalhar em sala de aula, servindo de referencial teórico.

Na seção **Canto dos Problemas**, o professor Uldarico Victor Malaspina Jurado relata uma proposta intitulada: Criando problemas em triângulos, brincando com varetas.

E, finalmente, na seção **GeoGebra da UNIÓN** se compartilham os avanços e avanços que o software tem feito no mundo como recurso educacional, com a colaboração de Alejandro Gallardo e a publicação de um artigo intitulado: Flores: do jardim ao GeoGebra, pelos convidados Débora Pereiro Carbajo e Javier Cayetano Rodríguez.

Para futuras publicações, reiteramos nosso pedido de receber artigos que apresentem resultados, experiências e / ou avaliações do ocorrido durante a pandemia de Covid-19 nos diferentes espaços educacionais, que nos permitam refletir sobre a educação atual e futura: Quais aspectos da modalidade virtual vai durar? Que outros conhecimentos os alunos estão desenvolvendo com a educação a distância? Que habilidades os professores precisam desenvolver nesses novos ambientes? Os alunos estão desenvolvendo as competências e / ou habilidades que se espera que desenvolvam de acordo com o currículo? O que acontece nessas novas modalidades de ensino com a aquisição de conhecimentos: saber, saber ser e saber fazer? E tantos outros que os colegas poderão investigar. O objetivo é fornecer novas ferramentas para enfrentar os diferentes cenários pelos quais estamos passando e poder perceber quais são as boas práticas que surgiram com a passagem para a virtualidade, para sustentá-las no futuro. Convidamos você a refletir sobre sua prática e compartilhar aqui suas contribuições, pois acreditamos que serão do interesse da sociedade atual.

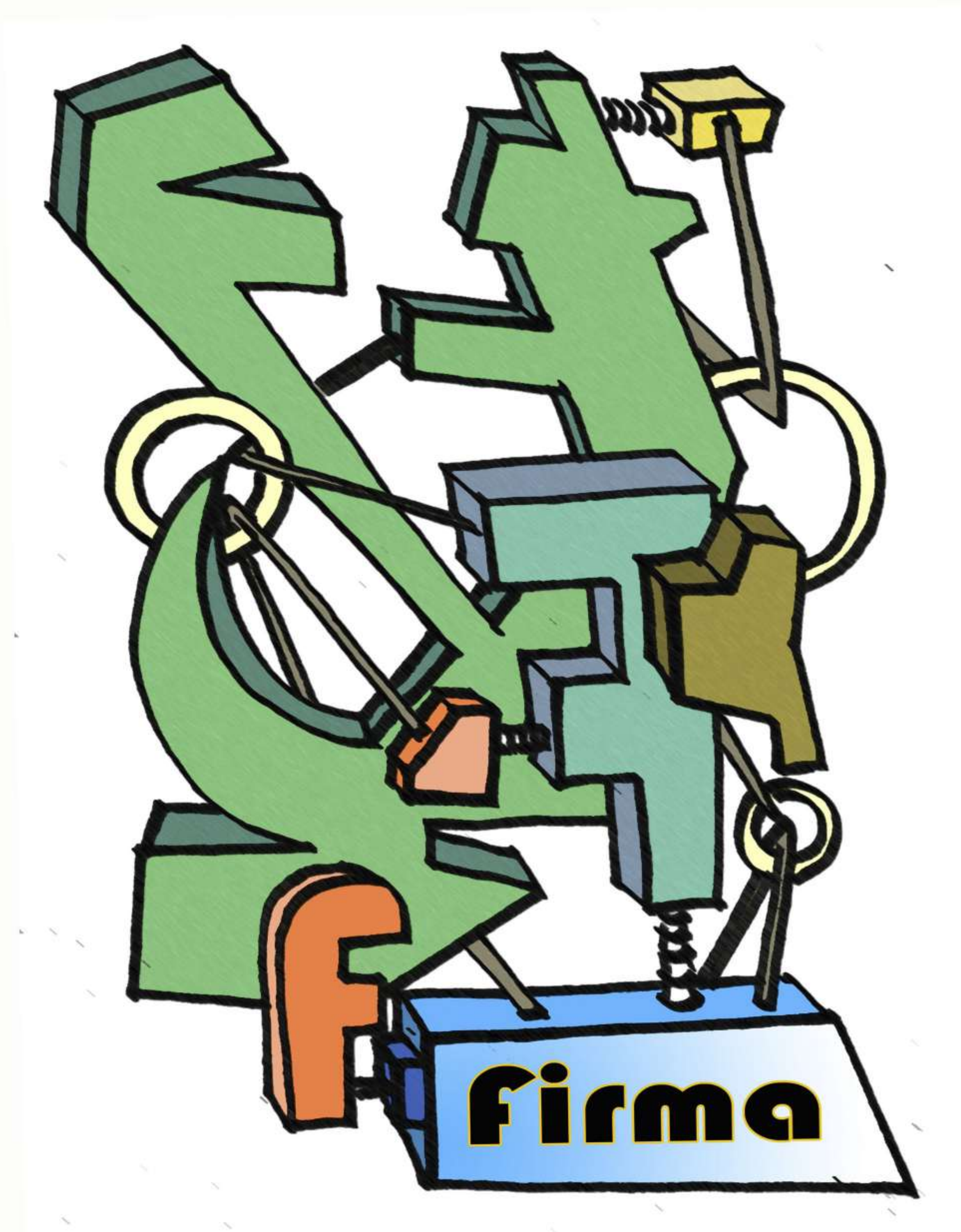
Desejando uma boa leitura, agradecemos o inestimável trabalho dos revisores dos artigos e dos autores que escolheram esta revista para divulgar seus trabalhos.

Karina y Viviana

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-6

¿Vale la pena ludificar el aula de matemática?

Firma invitada: Fabián Vitabar

Resumen	El concepto de ludificación está invadiendo la reflexión didáctica, pero con frecuencia se confunde con el uso de juegos didácticos o la incorporación de herramientas tecnológicas de aspecto simpático. En esta breve reflexión aclaramos estos aspectos, ofrecemos una referencia teórica para considerar la ludificación en el aula de matemática y otras instancias de educación formal, y facilitamos algunos ejemplos de abordaje. **Palabras clave**: ludificación, didáctica, motivación, juegos.
Abstract	Gamification concepts are being observed by education researchers. Frequently, there is a blurry line between gamification, games and digital technologies. In this paper we explain these terms briefly, we state a few theoretical guidelines to understand gamification and we share some concrete examples. **Keywords**: gamification, educaction, motivation, games.
Resumo	O conceito de gamificação está invadindo a reflexão didática, mas muitas vezes é confundido com o uso de jogos didáticos ou a incorporação de ferramentas de tecnologia de aparência amigável. Neste breve artigo esclarecemos esses aspectos, oferecemos um referencial teórico para considerar a gamificação na sala de aula de matemática e outras instâncias da educação formal, e damos alguns exemplos de abordagem. **Palavras-chave:** gamificação, didática, motivação, jogos.

1. Introducción

Hace unos días tuve la oportunidad de presenciar una clase de matemática para alumnos de secundaria, como parte de un programa de capacitación de docentes. La clase fue todo lo que uno está acostumbrado a esperar en un aula de matemática. El profesor trabajó varios aspectos relacionados con el álgebra, los alumnos participaron, se manejaron ejemplos y finalmente algunas tareas. En cierto momento me descubrí a mí mismo mirando a través de la ventana y apreciando la arquitectura de algunos edificios que podía ver. Fue cuando caí en la cuenta de que la clase me estaba aburriendo

Lamentablemente, presenciar clases aburridas es algo a lo que todos estamos acostumbrados, o peor aún: nos parece normal. A tal punto que si una clase fuera divertida, es posible que uno comenzara a dudar de su valor educativo. Como si aquello de que "la letra con sangre entra" implicara que el padecimiento fuera el único camino para lograr aprendizajes. Creo que la mayoría de nosotros podríamos acordar que, a partir de la experiencia personal, una propuesta divertida sería bienvenida siempre y cuando se mantuviera un tratamiento digno de los contenidos abordados. Pero, ¿qué tan relevante es la diversión en una clase de matemática? Más ampliamente: ¿es importante pasarlo bien en la clase? ¿Qué tanto puede influir esa sensación de disfrute en los aprendizajes? ¿Es algo que el profesor pueda facilitar, o simplemente depende de las preferencias de los alumnos?

2. El juego

Aunque históricamente quizás no haya estado muy ligado al aula, el juego sí que ha tenido un lugar valorado en los aficionados a la matemática desde hace mucho tiempo. Las reflexiones y recopilación histórica que realizó Miguel de Guzmán a propósito del juego y las matemáticas es un material valiosísimo que les invito a conocer o releer, porque verdaderamente no tiene desperdicio (De Guzmán, 1984).

Varias publicaciones se hicieron populares en el siglo pasado, cuya característica principal era plantear la matemática de una manera divertida, que no tenía el aspecto de la misma matemática que se aprendía en las escuelas. Desde los acertijos de Sam Lloyd a las matemáticas recreativas de Yakov Perelman, o desde los divertimentos matemáticos de Brian Bolt a los juegos de Martin Gardner, todos han resaltado la importancia de disfrutar el contacto con la matemática. Muchos de estos libros han liberado sus derechos y pueden accederse gratuitamente; hay una fantástica recopilación en la web librosmaravillosos.com (Barros & Bravo, s.f.).

En mi experiencia como estudiante de profesorado, recuerdo lo motivador que fue el momento en que descubrí la geometría dinámica. Mi gusto por la geometría se intensificó y pasaba horas jugando con aquellas nuevas herramientas. Si bien no se trataba de un juego, la experiencia alrededor del uso de esta herramienta tenía las mismas características que me hacían desear perder el tiempo de esa manera.

3. La motivación

Afortunadamente, los descubrimientos científicos de los últimos años —especialmente los relacionados con la neurociencia— nos arrojan luz sobre la importancia del disfrute y el buen humor a la hora de aprender. Vamos a profundizar aquí en estos aspectos. Pero mencionemos que estos asuntos vienen siendo objeto de estudio de la psicología desde hace varios años más, si bien no hace tanto que han logrado abrirse camino significativamente en el campo de la educación.

La teoría del estado de flujo (Csikzentmihaly, 2014) ha indagado, especialmente a partir del estudio de la conducta de los adolescentes, cómo incide la motivación en las personas. Se ha definido así ese estado de flujo como la conjunción de todas las condiciones para que un aprendizaje se dé óptimamente. Refiere a esa sensación tal de concentración y disfrute de una tarea en la que nada puede distraernos, rendimos al máximo y tenemos la impresión de que el tiempo no transcurre.

El estado de flujo se alcanza cuando el individuo encuentra un punto de equilibrio entre sus habilidades y el desafío ante el cual se enfrenta. Cuando el desafío es demasiado grande, entonces se genera un estado de ansiedad. Por otra parte, cuando las habilidades están más desarrolladas que lo que el desafío requiere, se provoca el aburrimiento. Seguramente, si los docentes fuéramos capaces de ofrecer consignas que tuvieran en cuenta estas características, promoveríamos el estado de flujo en nuestros estudiantes.

Naturalmente, no sólo la educación ha prestado atención a esta y otras teorías que refieren a la motivación. De hecho, sin demasiada sorpresa, la educación ha llegado tarde a la reflexión, pero aun así podemos aprender mucho de otros ámbitos en los que esto se viene teniendo en cuenta desde hace años.

La industria del juego, por ejemplo, ha dado pasos considerables en el favorecimiento de la motivación y la atención. En particular los videojuegos han logrado imponerse en esta batalla. Casi todas las personas disfrutan "perder el tiempo" con algún juego (a veces de apariencia muy simple) que han descargado en su teléfono celular. Por más que suene ridículo, deberíamos hacernos la pregunta: ¿qué tienen los juegos del teléfono móvil que no tenga la clase de matemática?

4. La ludificación

A esta altura de la reflexión convendría que nos situemos desde una postura más general. Desde hace unos años se oye hablar de los procesos de ludificación (*gamification* en inglés), últimamente relacionado con la educación, pero presentes en otros ámbitos desde hace mucho tiempo. La definición más aceptada de ludificación hace referencia a la utilización de elementos y mecánicas propias de los juegos en ambientes no lúdicos. Pensemos en tantos aspectos de nuestra vida cotidiana que han dado lugar a la ludificación: recolectar puntos al realizar compras en determinado comercio, o al utilizar cierta tarjeta de crédito, u obtener una medalla virtual luego de haber completado una encuesta de satisfacción por un producto comprado. Esta incorporación de elementos de los juegos a estas experiencias cotidianas nos llevan, en general, a desarrollar conductas que quizás no tendríamos de no existir esta motivación externa (Deterding et al, 2011; Stieglitz et al, 2017).

La ludificación ha llegado también a la reflexión educativa, pero muchas veces se la confunde con el uso de dinámicas lúdicas, o la integración de juegos en el aula. En realidad, es algo un poco más complejo. Los procesos de ludificación pueden no tener aspecto de juego, por eso es importante reflexionar con cuidado. La asignación de puntajes, crear tableros u otro indicador de progreso, realizar tablas de posición, intercambiar algún tipo de bien simbólico por cierto beneficio, otorgar medallas como signo de reconocimiento, habilitar el acceso a ciertas tareas una vez se han realizado otras, dar la posibilidad de optar por un camino u otro, ambientar las tareas en el contexto de cierta narrativa, favorecer la socialización a través de las actividades, son algunos ejemplos de elementos y dinámicas que hacen al proceso de ludificación.

¿En qué sentido sería beneficioso ludificar el aula de matemática? La respuesta es la misma que en otros casos: para propiciar ciertas conductas que son importantes, pero que a los estudiantes les cuesta promover voluntariamente. Ya sean actitudes a desarrollar en el tiempo del aula, o tareas individuales que deben ser realizadas como tarea domiciliaria, o mantener un comportamiento en particular, son todas conductas que podrían ser el foco de una experiencia ludificada. Son varios los aspectos del aula de matemática que se redimensionan al concebir la clase desde esta perspectiva, o al menos una parte de ella. De hecho, la ludificación puede dar lugar a algunas características muy valiosas que no se logran fácilmente con las técnicas didácticas tradicionales (por llamarlas de algún modo). Reflexionemos al respecto.

Por ejemplo, una característica de los juegos es la claridad de sus reglas, que hace que sea sencillo visualizar el objetivo, pero también permite controlar que los contrincantes cumplan el reglamento (para no ser engañados). Los objetivos se fraccionan en pequeñas etapas a superar, de modo que el jugador puede concentrarse en un desafío cercano, alcanzable. Esto favorece la sensación de superación personal, puesto que en cortos periodos de tiempo el jugador es capaz de reconocer su propio proceso, y las pequeñas satisfacciones lo mantienen comprometido con el juego.

Estas metas alcanzables y con una descripción clara deberían hacernos pensar en las técnicas de evaluación que utilizamos en el aula. Si las consignas de evaluación tienen todas estas características podrán adecuarse a una experiencia similar a un juego; o, dicho de otro modo, hacer una buena ludificación nos obligará a explicitar los objetivos de cada evaluación, identificar etapas y dar devoluciones sencillas e inmediatas. El uso de rúbricas, por ejemplo, puede asociarse a la obtención de pequeños puntajes al superar un nivel de un videojuego (y obtener de cero a tres estrellas por superarlo).

Existen experiencias muy serias y completas acerca del uso de la ludificación para manejar procesos de evaluación complejos. Vale la pena explorar y darle lugar a estas ideas, aunque puedan parecer ridículas o infantiles. No olvidemos que a todos nos gusta jugar.

La teoría en torno a la ludificación (y a los juegos en general) ha buscado detectar las características sobresalientes de quienes participan en el juego —los «jugadores»— y relacionarlas con los elementos y dinámicas de los juegos. A mí me gusta una categorización que identifica cuatro grandes perfiles de jugador, que podemos entender como jugadores teóricos que en los hechos nunca se dan en estado puro. Es decir, que todos tenemos algo de cada uno de ellos. Estos son los «guerreros» (quienes quieren ganar a toda costa), los «exploradores» (que encuentran satisfacción en conocer todas las variantes que el juego ofrece), los «socializadores» (que prefieren las características del juego que los hacen entrar en contacto y compartir con otros jugadores) y los «triunfadores» (que son perfeccionistas y desean completar todas las opciones, aunque vayan más lento) (Bartle, 1996). Básicamente, si un juego es diseñado con la intención de agradar e involucrar a estos jugadores teóricos, entonces seguramente cualquier jugador mixto encontrará motivación para seguir jugando. He aquí la estrategia que debe seguirse para planificar clases ludificadas: ponerse en el lugar de cada uno de estos cuatro jugadores para comprobar que sus intereses hayan sido tenidos en cuenta.

Las investigaciones también muestran que hay muchos preconceptos en el ámbito educativo al momento de considerar estos elementos lúdicos. Profesores, alumnos, padres y directivos, quizás piensen que estas estrategias didácticas puedan restar seriedad a la propuesta educativa. Lo cierto es que una propuesta didáctica que sea capaz de contemplar tanto los objetivos disciplinares como las características psicológicas de la motivación seguramente será exitosa desde el punto de vista de los aprendizajes.

Dado que hoy en día los videojuegos son uno de los mejores ejemplos de consideración de estas teorías psicológicas de la motivación, mucha gente asocia erróneamente los conceptos de ludificación y uso de la tecnología. Dejemos en claro que la tecnología no es necesaria para generar una propuesta ludificada.

Existe mucha bibliografía para profundizar en este tema, y hay numerosas investigaciones en curso que a medida que se vayan concretando nos irán dando mayores elementos para aprovechar estos resultados en la planificación didáctica. No obstante, yo los invito a que hagan experiencias ludificadas en sus aulas, aunque sean muy sencillas y de aplicación reducida. No hace falta hacer una ludificación completa para comenzar, sino que basta dar pequeños pasos y ludificar una jornada, una evaluación, un ciclo de tareas. Las dos preguntas claves que habrá que contestar serán: ¿qué actitudes se desean promover en los estudiantes para mejorar sus aprendizajes? y ¿la propuesta ludificada contempla las diversas variedades de «jugador»?

5. Conclusión

Hay una diferencia muy grande entre el alumno que logra motivarse y quien sufre tediosamente lo que proponemos en clase. Cuando uno logra percibir que sus alumnos lo pasan bien, disfrutan, tienen ganas de estar en la clase y realizan las tareas, difícilmente vuelva sobre sus pasos para proponer clases como lo hacía antiguamente. Les deseo que logren sentir la misma satisfacción que yo percibo al trabajar de esta manera, y que ningún alumno vuelva a sentir que las clases de matemática son aburridas.

Referencias bibliográficas

Barros, P., & Bravo, A. (s.f.). Libros maravillosos. Retrieved August 19, 2021. http://www.librosmaravillosos.com

Bartle, R. (1996). Hearts, clubs, diamonds, spades: Players who suit MUDs. Journal of MUD Research, 1(1), 19. https://www.researchgate.net/profile/Richard_Bartle/publication/247190693_Hearts_clubs_diamonds_spades_Players_who_suit_MUDs/links/540058700cf2194bc29ac4f2.pdf

Csikszentmihalyi, M. (2014). Applications of Flow in Human Development and Education. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9094-9

de Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. Actas de Las IV Jornadas Sobre Aprendizaje y Enseñanza de Las Matemáticas; Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton. http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/05edumat/remediosfracasouniv/laboratorio99/tercera%20parte/juemat/juemat.htm

Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R., & Nacke, L. (2011). From game design elements to gamefulness. Proceedings of the 15th International Academic MindTrek Conference on Envisioning Future Media Environments - MindTrek '11, 9. https://doi.org/10.1145/2181037.2181040

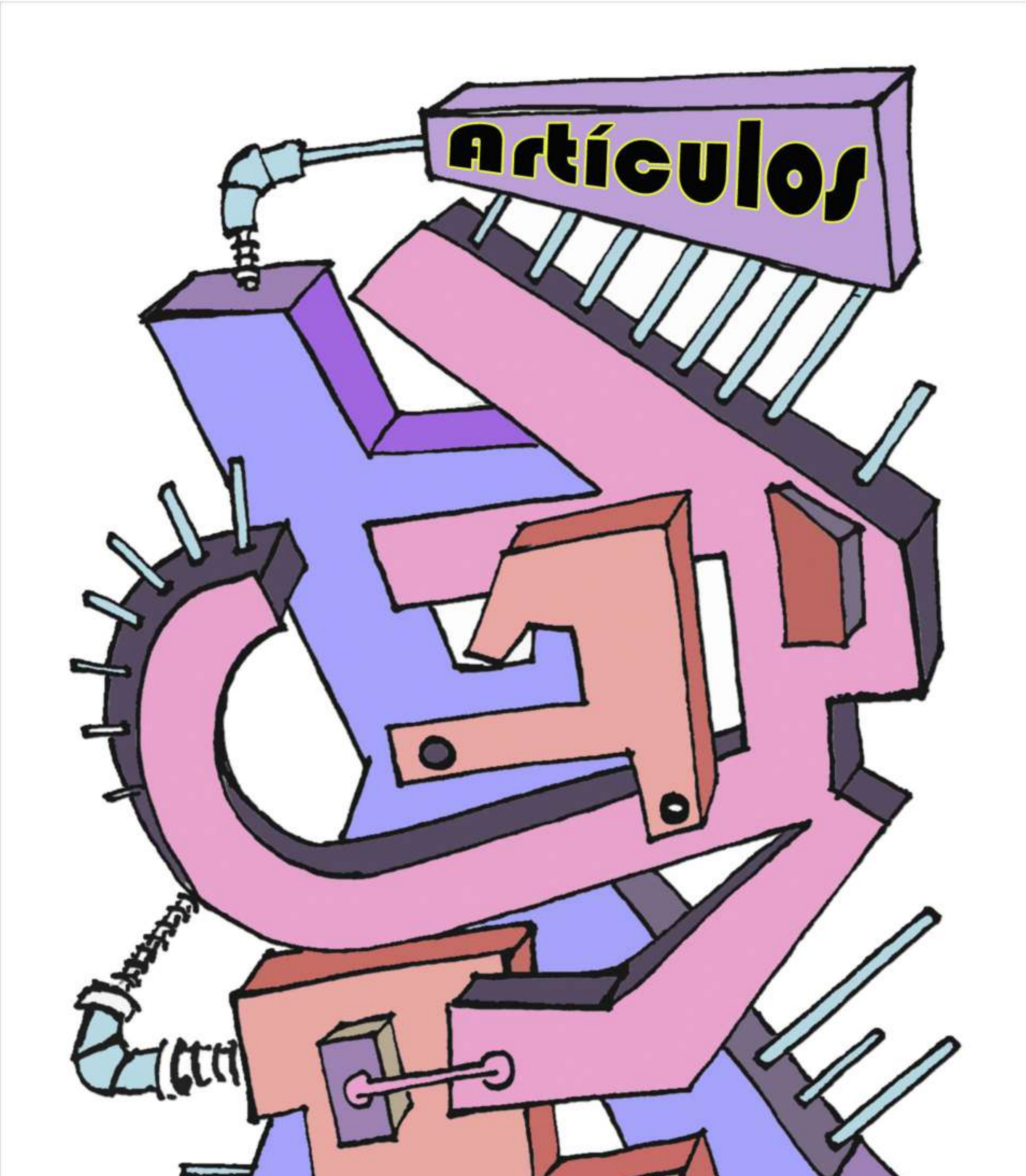
Stieglitz, S., Lattemann, C., Robra-Bissantz, S., Zarnekow, R., & Brockmann, T. (2017). Gamification (S. Stieglitz, C. Lattemann, S. Robra-Bissantz, R. Zarnekow, & T. Brockmann, Eds.). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45557-0

Fabián Vitabar (Uruguay): Profesor de Matemática y Didáctica de la Matemática. Especializado en los procesos de enseñanza y aprendizaje mediados por tecnologías digitales y en diseño curricular y de evalución. Asesor en Matemática de las Escuelas Salesianas de Uruguay. Presidente de la Sociedad de Educación Matemática Uruguaya. fvitabar@maturana.edu.uy

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-17

https://union.fespm.es

Propuesta de enseñanza mediada por TIC en la asignatura Álgebra Lineal desde APOE: Tesis de Maestría en carreras de Ingeniería en Informática

Fabiana Montenegro, Lorena Podevils

Fecha de recepción: 31/05/2020
Fecha de aceptación: 15/02/2021

Resumen	El presente trabajo reporta resultados de una investigación cuyo objetivo es la implementación de una propuesta de enseñanza que conjuga los aportes de APOE y TIC en el aprendizaje de transformaciones lineales en carreras de ingeniería de Santa Fe, Argentina. La propuesta partió de representaciones dinámicas empleando GeoGebra. Del estudio se deriva la validación de que, para el caso de R^2 y R^3, el tratamiento gráfico de las condiciones de linealidad refuerza el Esquema de las operaciones binarias presentes en el concepto. Se presentan los instrumentos de investigación y los resultados obtenidos en el primero de ellos. **Palabras clave**: TIC, APOE, Álgebra Lineal
Abstract	The present work reports results of an investigation whose objective is the implementation of a teaching proposal that combines the contributions of APOE and ICT in the learning of linear transformations in engineering careers in Santa Fe, Argentina. The proposal started from dynamic representations using GeoGebra. The study derives the validation that, for the case of R^2 and R^3, the graphic treatment of the linearity conditions reinforces the Scheme of the binary operations present in the concept. The research instruments and the results obtained in the first one are presented. **Keywords:** ICT, APOS, linear algebra
Resumo	O presente trabalho relata os resultados de uma investigação cujo objetivo é a implementação de uma proposta de ensino que combina as contribuições da APOE e das TIC na aprendizagem das transformações lineares nas carreiras de engenharia em Santa Fé, Argentina. A proposta partiu de representações dinâmicas utilizando o GeoGebra. O estudo deriva a validação de que, para o caso de R^2 e R^3, o tratamento gráfico das condições de linearidade reforça o Esquema das operações binárias presentes no conceito. São apresentados os instrumentos de pesquisa e os resultados obtidos na primeira. **Palavras-chave:** TIC, APOE, Algebra Linear

1. Introducción

El presente artículo exhibe algunos resultados de una investigación desarrollada con alumnos de 18-19 años, en el programa de la Maestría en Didácticas Específicas de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, en la ciudad de Santa Fe, Argentina. Las autoras del presente escrito, maestranda y directora de tesis respectivamente, somos docentes de la cátedra Algebra Lineal de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (en adelante, FICH) de la Universidad antes mencionada

En el ciclo inicial de todas las carreras de grado de nuestra Facultad -Ingeniería en Informática, en Agrimensura, en Ambiental y en Recursos Hídricos- se encuentra la asignatura Álgebra Lineal, integrando el área de Ciencias Básicas en el segundo cuatrimestre del primer año con una carga horaria de cinco horas semanales. El programa analítico de la misma comprende los tópicos: espacios vectoriales, espacios con producto interno, transformaciones lineales, valores y vectores propios y diagonalización de matrices. Para cursar la asignatura, el régimen de correlatividades exige al alumno haber alcanzado la condición de alumno regular en la asignatura del primer cuatrimestre denominada Matemática Básica.

En los últimos veinte años, distintos grupos de investigadores en educación matemática se han abocado a la didáctica del álgebra lineal: un grupo francés integrado, entre otros, por Dorier, Aline Robert, Artigue y Alves Días; uno canadiense liderado por Sierpinska; un grupo estadounidense conformado por Harel, Dubinsky y un grupo mexicano liderado por Oktaç, Trigueros y colaboradores.

Durante los últimos años diversas investigaciones se han enmarcado en la Teoría APOE como referente teórico y metodológico. En este sentido, los trabajos de Roa-Fuentes y Oktac (2010, 2012), Romero Félix y Oktac (2015), Ramírez Sandoval y Oktaç (2012), Trigueros Gaisman, Maturana Peña, Parraguez González y Rodríguez Jara (2015), Romero Félix (2016) y Oktac (2019) tuvieron como objeto la construcción de conceptos vinculados con las transformaciones lineales desde la teoría APOE.

Interesadas en la didáctica del álgebra, nos propusimos esbozar e implementar una propuesta de enseñanza que reúna los aportes que ha desarrollado la Teoría APOE y las posibilidades actuales de las Tecnologías de la Comunicación e Información (TIC), a fin de enriquecer el aprendizaje de las transformaciones lineales (en adelante TL).

En la sección 2) se presenta el problema que originó la presente investigación; en la 3) el marco teórico y metodológico sobre el que se basó la misma; en la 4) se muestran algunas decisiones referidas a la primera componente del ciclo de investigación de la Teoría APOE; en la 5) se describe el diseño y aplicación de los instrumentos de investigación; en la 6) se presentan datos obtenidos de la implementación de la primera actividad de la propuesta y, finalmente, en la 7) se exponen reflexiones parciales sobre el presente estudio.

2. Planteo del problema de la tesis

Como mencionamos, distintos investigadores se abocaron al estudio de las TL por ser un tópico que se vincula con conceptos importantes del Álgebra Lineal tales como: espacio vectorial, combinación lineal, base, valores y vectores propios, etc. Además, las TL desarrollan capacidades para analizar, organizar y modelizar matemáticamente problemas relacionados con situaciones propias de la actividad humana y de otras ciencias (físicas, económicas, sociales, etc.).

Entre las definiciones de TL que pueden emplearse en la enseñanza, es posible establecer una distinción atendiendo a las condiciones que mencionan como requisito para que las funciones entre espacios vectoriales reciban tal denominación. Por un lado, definiciones como las que aparecen en Grossman (2012), Gerber (1992), Gareth (2002), Kozak, Pastorelli y Vardanega (2007) clasifican como lineal a las funciones entre espacios vectoriales que satisfacen dos condiciones, que en adelante identificaremos como condiciones de linealidad, cada una de las cuales está asociada a una de las operaciones binarias involucradas en los espacios vectoriales: suma de vectores y multiplicación por un escalar. Y por otro lado, existen definiciones como en Hoffman & Kunze (1971) que establecen como propiedad definitoria de las TL a una única condición que involucra combinaciones lineales de elementos del espacio dominio de la TL.

Sean V y W espacios vectoriales reales. Una **transformación lineal** T de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface, para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V y cada escalar α,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} \qquad (7.1.1)$$

y

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v} \qquad (7.1.2)$$

Figura 1. Definición de TL
Fuente: Grossman (2012)

Sean ***V*** y ***W*** dos espacios vectoriales sobre un campo ***F***. Una transformación lineal de ***V*** en ***W*** es una función ***T*** de ***V*** en ***W***, tal que $T(c\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = cT(\boldsymbol{\alpha}) + T(\boldsymbol{\beta})$ para todos los vectores $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ de ***V*** y todos los escalares c de ***F***.

Figura 2. Definición de TL.
Fuente: Hoffman y Kunze (1971)

En ambos tipos de definiciones, por su carácter general de referirse a dos espacios vectoriales cualesquiera, la/as condición/nes de linealidad están desarrolladas en el marco algebraico. No obstante, para el caso de los espacios vectoriales R^2 y R^3, la interpretación gráfica de dichas condiciones contribuye a reforzar el Esquema de las operaciones binarias presentes en los espacios vectoriales y, al mismo tiempo, aporta a la caracterización de las propiedades gráficas de los objetos involucrados.

La carencia de un procedimiento gráfico de las condiciones de linealidad en dichos espacios vectoriales en la mayoría de los libros de texto, motivó este trabajo de investigación con el objetivo de desarrollar e implementar una propuesta de enseñanza mediada por la implementación de las TIC y que aporte al fortalecimiento del aprendizaje del concepto de TL en los espacios vectoriales R^2 y R^3.

Sin negar la complejidad intrínseca del concepto de TL como un factor en su aprendizaje, guiadas por el marco teórico adoptado y considerando los reportes de otros investigadores (Romero, 2016; Soto, Romero e Ibarra, 2012), nos arraigamos en la presunción de que la ausencia de coordinación entre los procedimientos gráficos y algebraicos influye en los aprendizajes conceptuales y que, de no llevarse a cabo tal coordinación, la comprensión conceptual de este tópico podría converger tarde o temprano en un fracaso.

Se decidió que era conveniente iniciar la construcción del concepto partiendo de Acciones, que utilicen procedimientos gráficos y dinámicos en un ambiente diseñado con GeoGebra. Sin embargo, a lo largo de toda la propuesta de enseñanza, también se pedía a los estudiantes valerse de su representación algebraica para describir y definir las condiciones de las TL o para justificar sus respuestas. Por medio de esta articulación de los procedimientos se buscaba facilitar la coordinación de las construcciones mentales independientes de su representación (gráfica o algebraica) y, finalmente, lograr la construcción del Proceso TL.

La propuesta implementada en la investigación se plantea como innovadora en la enseñanza en la facultad a la que pertenecemos en tanto el concepto de TL y los relacionados con él sólo se abordaban algebraicamente.

En la investigación se consideró como definición de TL a la presentada por Grosssman (2012) por constituir ésta la bibliografía básica de la asignatura y se identificó con 1) a la condición $T(\propto.\vec{u}) = \propto.T(\vec{u})$ y con 2) a la condición $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$.

3. Marco teórico y metodológico

3.1. Conceptos básicos

La propuesta de Piaget sobre el proceso de abstracción reflexiva como el constructo clave, para la construcción de los conceptos lógicos-matemáticos; influyó a Dubinsky en 1991 para el desarrollo de la teoría APOE. Ésta es una teoría constructivista y cognitiva que se centra en la manera en que los estudiantes construyen los conceptos a partir de sus estructuras matemáticas previas, las cuales evolucionan conformando otros saberes. De esta manera, APOE se propone manifestar las construcciones mentales necesarias para que dicha evolución se produzca. El término *concepción* es utilizado dentro de esta corriente de la didáctica de la matemática “para referirse a la comprensión o idea que un individuo puede tener sobre algún concepto” (Campos, 2017, p. 40).

Según la Teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: Acciones, Procesos y Objetos. Un estudiante está en una concepción Acción de un determinado concepto matemático si no es capaz de realizar las transformaciones sobre el concepto por sí solo, sino que necesita estímulos o instrucciones externas que le indiquen paso a paso como llevarlas a cabo. De algún modo, el objeto matemático es percibido por el individuo como algo externo. Una Acción es por naturaleza, algorítmica. Por ejemplo, en Roa Fuentes y Oktac (2012) se menciona que un estudiante está a nivel Acción de TL si determina la imagen de vectores particulares dada la función y, con ello, considera que las operaciones suma vectorial y producto por un escalar se preservan para todos los vectores del espacio dominio. En Roa-Fuentes y Oktac (2010) se indica que un alumno que está en esta etapa necesita de una expresión algebraica explícita de la función acompañada de la pregunta prototipo que cuestione si dicha transformación es lineal o no, provocando así la repetición de un algoritmo y la notación de los objetos, sin la consciencia de la naturaleza de los mismos.

> Aunque la concepción de acción es muy limitada, las acciones marcan el principio crucial del entendimiento de un concepto. Por lo tanto, el acercamiento pedagógico de la teoría APOE basada en una teoría de aprendizaje comienza con actividades diseñadas para ayudar a los estudiantes a construir acciones (Dubinsky, 1996, p. 34).

Por otra parte, se dice que un estudiante está en una concepción Proceso de un concepto matemático cuando es capaz de reflexionar sobre el mismo y realiza transformaciones sobre él pero sin la necesidad de que se le indiquen acciones específicas, esto es, realiza una construcción interna para ejecutar la misma Acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. A diferencia de una Acción, el individuo percibe el Proceso como algo interno, y bajo su control. En el caso de TL, una evidencia de que el estudiante tiene una concepción Proceso es que pueda verificar las condiciones de linealidad para elementos genéricos del espacio vectorial dominio o que puede reconocer si es o no una TL al verificar mentalmente tales condiciones.

Como mencionan Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews y Thomas (1996) cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un Proceso, toma conciencia del Proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean Acciones o Procesos) que pueden actuar sobre él y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este Proceso como un Objeto. Manifestaciones de la concepción Objeto del concepto de TL se encuentran en Roa-Fuentes y Oktac (2010).

> En el caso del concepto transformación lineal, al realizar preguntas específicas sobre esta función, como si T es una transformación lineal, ¿es siempre T^{-1} una transformación lineal?, o al considerar L(U,V) como el conjunto de transformaciones lineales definidas entre los espacios vectoriales U y V, donde cada función g definida entre los espacios vectoriales es una transformación lineal y conforma un vector del espacio vectorial L(U,V), las transformaciones lineales son consideradas como Objetos (Roa-Fuentes y Oktac, 2010, p. 95)

El paso por las etapas de Acciones, Procesos y Objetos no es necesariamente lineal, y la concepción de un estudiante puede estar en una etapa en ciertos aspectos de un determinado concepto y en otra en otros aspectos.

En la teoría APOE, un Esquema se define como la colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que están vinculados de manera consciente o no en la mente de un individuo en una estructura coherente y que están disponibles para la resolución de una situación problemática.

La teoría APOE da cuenta de los siguientes mecanismos mediante los cuales se logran las construcciones mentales de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas:

- Interiorización: construcción mental de un Proceso relativa a una serie de Acciones sobre objetos cognitivos.
- Coordinación: a partir de dos o más Procesos se construye un nuevo Proceso.
- Inversión: deshacer un Proceso para construir uno nuevo inverso del primero.
- Encapsulación: transformación de un Proceso en un Objeto
- Generalización: se refiere al uso de un determinado Esquema en una situación distinta a las inicialmente consideradas.
- Tematización: reflexión de un Esquema considerado como un todo y siendo capaz de realizar Acciones sobre dicho Esquema (González Astudillo y Bermudez, 2010, p. 5)

3.2. Ciclo de investigación

La teoría que enmarca el presente trabajo, posee un ciclo metodológico de investigación propio compuesto por tres componentes que se repiten cíclicamente: 1) análisis teórico caracterizado por la adopción de la descomposición genética hipotética o preliminar (en adelante DGp), 2) diseño y aplicación de instrumentos y 3) recolección y análisis de datos.

A partir de la aplicación de dicho ciclo es posible obtener una descripción detallada de las acciones que se realizan sobre los objetos, al tiempo que se observa cómo se construyen nuevas construcciones mentales, mediante su repetición. En consecuencia, el análisis teórico y los instrumentos se refinan y mejoran a partir del análisis de los datos empíricos obtenidos en el desarrollo de la tercera componente.

El objetivo de la primera componente del ciclo de investigación estriba en partir del análisis teórico sobre el concepto matemático considerando los libros de texto y la experiencia de los investigadores a fin de determinar un camino viable para la construcción de tal concepto, llamada descomposición genética. Este análisis permite la descripción de las construcciones mentales por las cuales se puede acceder a la construcción adecuada de un concepto. Una descomposición genética es “un modelo hipotético que describe las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico” (Arnon, 2014, p. 27). Para realizar una DGp deben establecerse, en primera instancia, las supuestas construcciones previas necesarias para alcanzar la concepción deseada. La descomposición genética de un concepto no es única, ya que depende de los caminos de construcción del concepto según lo interprete el investigador.

Una vez determinada la DGp, APOE propone diseñar y aplicar instrumentos que permitan identificar las construcciones mencionadas en tal descomposición.

Finalmente, el análisis y verificación de datos es una fase muy importante para este marco teórico pues permite comprobar o refutar empíricamente la descomposición genética adoptada. Se ha de responder aquí a cuestiones del tipo: ¿Los estudiantes realizan las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Los estudiantes pudieron comprender el concepto de

TL?

Como fue mencionado, los resultados de un ciclo de investigación ofrecen la posibilidad de ser refinados mediante una nueva aplicación de dicho ciclo.

En las secciones siguientes se detallan las decisiones asumidas en esta investigación en cada componente del clico de investigación de APOE.

4. Análisis Teórico: Descomposición Genética

4.1. Construcciones previas

Antes de exponer la DGp adoptada para la construcción del concepto bajo estudio, se describen las construcciones mentales previas: función y espacio vectorial.

Función: De manera análoga a lo expuesto en Roa-Fuentes y Oktaç (2010, 2012) las TL se visualizan como un caso particular de la noción de función. Por lo tanto, se necesita a la función como un Objeto, permitiendo ser desencapsulado en un Proceso que genere un Objeto de salida a partir de un Objeto de entrada. (Romero, 2016). Al respecto de las construcciones mentales asociadas al concepto de función, este estudio no profundiza en ellas ya que los estudiantes que participaron de la propuesta de enseñanza, ya habían cursado Matemática Básica y se encontraban cursando en simultáneo Cálculo I y, en ambas asignaturas, se trabaja con este concepto.

Espacio Vectorial: Se requiere que el Esquema de función asimile el Esquema espacio vectorial de modo que pueda verificar el cumplimiento de las condiciones de linealidad como el resultado de transformar los elementos de un espacio vectorial en otro. A su vez, el Esquema de espacio vectorial demanda una concepción Objeto de vector y una concepción Proceso de las operaciones involucradas en los espacios vectoriales: suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar.

4.2. Descomposición Genética preliminar

En la DGp propuesta se planeó iniciar la construcción del concepto TL con el establecimiento de funciones entre espacios vectoriales. El Esquema de espacio vectorial R^2 y de R^3 es asimilado por el Esquema de función para verificar el cumplimiento de las condiciones de linealidad: a los vectores se les pueden aplicar Acciones o Procesos de función. Se producen, aquí, las primeras dos bifurcaciones en la descomposición genética preliminar (Figura 3). Las Acciones del Esquema de función incluyen Acciones de ambos tipos: gráficas y algebraicas. Por lo tanto, para el análisis de la imagen de cada operación con vectores se tiene un par de caminos según la representación utilizada.

Se pretende desarrollar paralelamente concepciones Acción y Proceso de ambas condiciones de linealidad para los procedimientos gráficos y algebraicos. Posteriormente, obtenidos los cuatro Procesos, éstos se coordinan en pares para obtener las concepciones Proceso de cada condición.

A su vez, la coordinación de las concepciones Proceso permite la abstracción de las condiciones de las transformaciones. En otras palabras, las concepciones Proceso de cada condición de linealidad, serán coordinadas para obtener la concepción Proceso de TL.

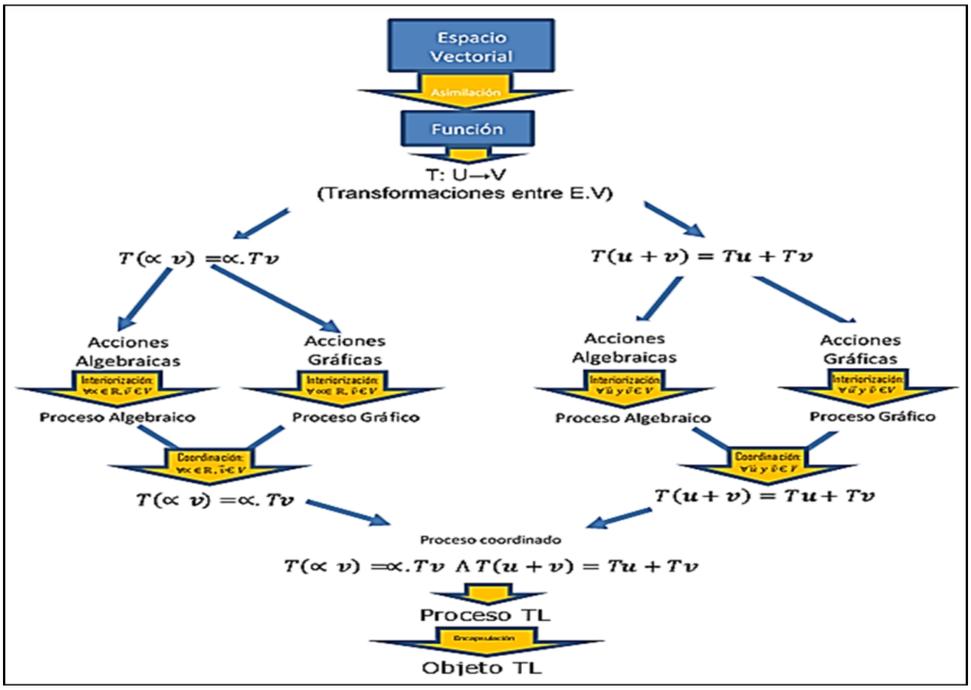


Figura 3. Descomposición Genética Preliminar. Fuente: Elaboración propia (2018)

Cabe destacar que, aunque la Teoría APOE considera tres etapas básicas en la construcción de un concepto matemático, por limitaciones provenientes del currículo de la asignatura en donde se desarrolla esta investigación - carga horaria, ser una asignatura cuatrimestral, contenidos que comprende y que excluye- somos conscientes que la implementación de la propuesta de enseñanza que se propuso posibilitó que los alumnos alcancen una concepción Proceso de TL a través de la coordinación de los Procesos algebraicos y gráficos de las dos condiciones de linealidad.

5. Diseño y aplicación de instrumentos

La propuesta de enseñanza fue aplicada a 20 estudiantes de la carrera Ingeniería en Informática que integraban la comisión de práctica de la tesista durante el 2018.

La propuesta de enseñanza planificada se desarrolló a través de tres actividades: una actividad de familiarización, la actividad principal y un cuestionario post instrucción.

5.1. Actividad de familiarización

Esta primera actividad de la propuesta estuvo ligada a applets disponibles en el siguiente sitio de la web. https://tinyurl.com/yabnkeku

La elección la herramienta Google Sites se apoyó en diversas razones: permite a los alumnos realizar las actividades en un entorno familiar similar a la Wikipedia, con libertad de horarios fuera de la clase, con la posibilidad de acceder a diferentes tipos de materiales audiovisuales además del texto escrito y al docente le ofrece la opción de marcar tareas para su realización de manera individual o grupal, puede evaluar de igual manera e incluso recibir un informe de los resultados, lo que le garantiza mantener un seguimiento del desarrollo de la asignatura y de la realización de las actividades por alumno.

A través de los ejercicios propuestos, esta actividad buscaba familiarizar a los alumnos con las representaciones y tratamientos del ambiente dinámico de GeoGebra y contribuir a consolidar las construcciones previas a las de la descomposición genética preliminar mencionadas en 4.1. Cada ejercicio se acompañó de un cuestionario; para atender algunas cuestiones sin restricción de tiempo.

5.2. Actividad Principal

Esta instancia de la propuesta se desarrolló en el laboratorio de informática de la facultad y se destinaron tres horas para su desarrollo. Cada estudiante tenía disponible una computadora y se permitía el trabajo en parejas. En esta oportunidad se presentó una hoja de trabajo impresa a cada alumno a fin de que consignara en ella las respuestas a las cuestiones planteadas. Cada actividad se encontraba ligada a un applet disponible en https://tinyurl.com/yabnkeku

Los applets de Geogebra fueron diseñados a partir de la DGp y utilizados en exploración libre para observar, mediante su manipulación, las manifestaciones de las condiciones de linealidad en el registro gráfico, para definir a las condiciones de linealidad por separado y para clasificar las transformaciones presentadas.

Los applets fueron construidos con las siguientes características: representan por separado los planos del dominio y contra-dominio (o espacio de llegada) de las transformaciones a manera de dynagraph, se puede manipular un vector del dominio mientras GeoGebra calcula la imagen de tal vector bajo alguna transformación, mostrando la imagen en el contra-dominio y, opcionalmente, mostrando el rastro del vector manipulado así como el de su imagen o la imagen de alguna región del dominio.

Goldenberg, Lewis & O'Keefe (1992, en Romero (2016)) define las representaciones tipo dynagraph como "herramientas de visualización de funciones que tienen como características que 1) la variable del dominio puede ser manipulada dinámicamente […] y 2) la variable del dominio y su imagen son representadas cada una en su propio espacio" (p. 244).

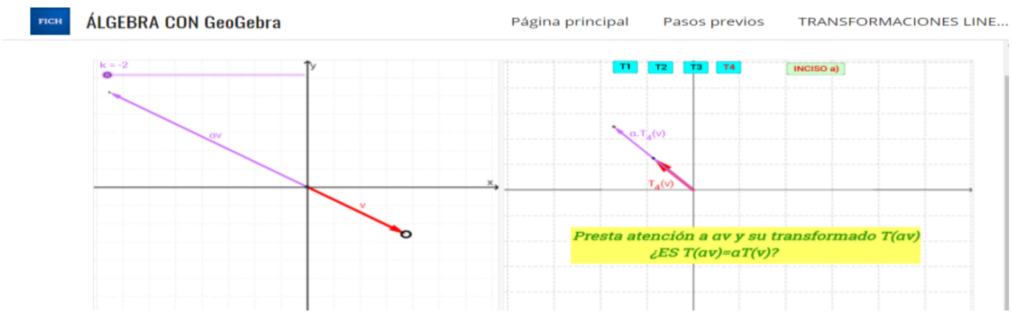


Figura 4. Ejercicio 1 de la Actividad Principal
Fuente: Elaboración propia (2018)

A modo de ejemplo presentamos una imagen de una de las actividades. En ella se presentaban cuatro transformaciones, que aparecen en la imagen como T1; T2; T3 y T4. La definición algebraica de éstas es inaccesible para los alumnos a fin de evitar que trabajen en el registro algebraico para el cumplimiento de las condiciones de linealidad.

El ejercicio está relacionado con la operación producto de un vector del plano R^2 y un escalar real. Se pretendía que los alumnos relacionen las TL con aquellas que cumplen las siguientes dos características gráficas:

- Las imágenes de vectores colineales son también vectores colineales.
- El cociente de las normas de los vectores T($\alpha\vec{v}$) y T($\vec{v}$) es igual al valor absoluto del escalar α.

Si el alumno comprueba la condición para casos concretos; es decir, si sólo considera un vector particular $\vec{v}$ y un real específico α que verifica tal condición, se concluirá que el alumno está en concepción Acción de la condición de linealidad 1), pues sólo considera el cumplimiento de la misma sobre elementos particulares. Cuando pueda pensar en el vector $\vec{v}$ como un representante cualquiera de todos los vectores de R^2 y compare la imagen de $\alpha\vec{v}$ y α por la imagen de $\vec{v}$, estableciendo si se cumplen o no las propiedades de colinealidad y proporcionalidad anteriormente mencionadas, diremos que el alumno está en una concepción Proceso de la condición, que le permite pensar que se comprueba para todo elemento de R^2. Gracias al carácter dinámico de GeoGebra es posible que el alumno manipule un vector como representante de todos los elementos de un espacio vectorial pero, sin embargo, no pueda generalizar el cumplimiento de esta condición para todos los elementos de R^2. Diremos, en este caso, que está transitando entre la concepción Acción y la concepción Proceso de la condición de linealidad pues no puede considerar el cumplimiento de la condición mediante el cuantificador universal.

En cuanto a la interpretación de la condición de linealidad 2) se pretendía que los alumnos relacionen las TL con aquellas que cumplen que la diagonal del paralelogramo cuyos lados son T($\vec{u}$) y T($\vec{v}$) coincide con el vector imagen de $\vec{u}+\vec{v}$ a través de la transformación.

5.3. Cuestionario Post-instrucción

Posterior a la actividad principal de la propuesta se implementó un cuestionario post instrucción, buscando documentar la aparición de las construcciones mentales hipotetizadas en la DGp.

En esta oportunidad, los alumnos sólo tuvieron acceso al cuestionario en formato papel y en cada actividad podían visualizar del lado izquierdo los vectores dados y, del lado derecho, las imágenes bajo una transformación. Los estudiantes debían evaluar la linealidad de las transformaciones propuestas considerando la suficiencia o carencia de los datos presentados. La lista de actividades presentada a los estudiantes incluyó preguntas para que los estudiantes analizasen las condiciones de linealidad con procedimientos algebraicos y/o gráficos.

A continuación, presentamos el dispositivo que permite describir la progresión entre las etapas Acción y Proceso y que permitirán clasificar las construcciones de los alumnos en este cuestionario Post-Instrucción.

Teniendo en cuenta la DGp en la progresión hipotética del concepto TL se reconocen las etapas Acción y Proceso, la cual puede ser abreviada como: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{P}$. Pero, además, hay que considerar también las distintas coordinaciones supuestas. Por lo tanto, la progresión completa ideal buscada será abreviada como:

$$\text{Condición1. } [(Aa1 \to Pa1) \wedge (Ag1 \to Pg1)] \to P1$$

$$\text{Condición2. } [(Aa2 \to Pa2) \wedge (Ag2 \to Pg2)] \to P2$$

$$\text{Coordinación de Procesos: } P1 \ \wedge P2 \to P$$

En lo anterior, Ag1 y Ag2 denotan, correspondientemente, una Acción geométrica asociada a la condición de linealidad 1 y 2. Análogamente, $Aa1$ y A$a2$ denotan, respectivamente, una Acción algebraica asociada a la condición 1 y 2. Correlativamente, $Pg1$, $Pa1$, $Pg2$, $Pa2$ expresan los Procesos geométricos y algebraicos de las condiciones 1 y 2.

A continuación, se describen los criterios para cada estadio

Criterios para definir la progresión en términos de la DGp		
Progresión		**Criterios**
PROPIEDAD 1		
A1	Aa1	Suponiendo que se cumple la propiedad, considera un vector, un escalar y una transformación, todos fijos, y opera con ellos algebraicamente para generar las respectivas imágenes. Algebraicamente puede evaluar el cumplimiento de la igualdad T(α.v) = α.T(v) en una situación particular; comparar la imagen del múltiplo con el múltiplo de la imagen
	Ag1	Suponiendo que se cumple la propiedad, considera sólo un vector, un escalar y una transformación dada, todos fijos, para generar las respectivas imágenes. Puede evaluar la conservación de colinealidad y proporcionalidad sólo para los vectores que observa (en papel o en la pantalla)
P1	Pa1	Valida el cumplimiento de la propiedad incluyendo en sus expresiones el cuantificador universal α, para declarar explícitamente el cumplimiento de la ecuación para todos los escalares y todos los vectores del espacio vectorial
	Pg1	Averigua el cumplimiento de la propiedad para un vector arbitrario. Muestra que interpreta al vector arbitrario como todos los vectores o representante de todo el dominio. Utiliza la universalidad de la propiedad. Usa, por ejemplo, como parte de sus argumentos que debe ser cumplida por todo el dominio, o utilizando

		explícitamente cuantificadores universales
PROPIEDAD 2		
A2	Aa2	Suponiendo que se cumple la propiedad, considera algebraicamente dos vectores fijos para generar la imagen de su suma como la suma de sus imágenes. Comprueba, algebraicamente, la ecuación T(u+v) = T(u)+T(v) para una T específica y vectores u y v fijos
	Ag2	El estudiante puede evaluar, sólo para un par de vectores del plano o del espacio, que las imágenes de vectores que forman un paralelogramo y su diagonal también forman un paralelogramo con su diagonal. Puede intentar probar la conservación de las propiedades gráficas para algunos vectores fijos, o eventualmente llega a afirmar que existe algún par de vectores para los que no se cumpla la propiedad.
P2	Pa2	Implica el rechazo de datos finitos como criterio suficiente para afirmar que se cumple la propiedad 2. Logra establecer la universalidad de los invariantes. Algebraicamente, verifica la igualdad de la imagen de una suma de dos vectores con la suma de sus imágenes, para cualquier par de vectores del dominio.
	Pg2	Gráficamente, averigua el cumplimiento de la propiedad para un par de vectores arbitrarios, esto significa poder comprobar que la imagen de cualquier par de vectores que forman un paralelogramo y su diagonal, también forman un paralelogramo con su diagonal

Tabla 1. Fuente: Elaboración propia

Una vez construido el Proceso geométrico y el Proceso algebraico de cada condición se espera que los estudiantes coordinen estos Procesos en un par de Procesos que se puedan utilizar en cualquiera de sus representaciones: $P1$ y $P2$. Así, el Proceso de TL comprende la conjunción de las condiciones de linealidad.

6. Recolección y análisis de datos

Se presentan a continuación los resultados de la primera actividad junto a la intencionalidad didáctica de cada ítem.

6.1. Descripción de la Actividad de Familiarización

En el ítem a) del primer ejercicio se solicitaba a los estudiantes que explicasen cómo se altera un vector al ser multiplicado por un escalar, en términos de módulo, sentido y la dirección. Mientras que el ítem 1b) se les preguntaba cuál el conjunto que forman todos los múltiplos escalares de un vector fijo.

El segundo ejercicio se abocó a la suma de dos vectores del plano. En primer lugar, dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de R^2 se pedía a los estudiantes que desplazándolos observaran y determinaran el comportamiento de $\vec{u}+\vec{v}$ considerando el caso de que ambos vectores fueran colineales y del mismo sentido y, en segundo lugar, colineales y de sentidos opuestos. En el último ítem de este ejercicio se pretendía que los estudiantes pudiesen concluir que $\vec{u}-\vec{v}$ se puede resolver gráficamente cómo $\vec{u}+(-1)\vec{v}$, es decir, que interpretaran la resta como una "suma modificada".

El tercer ejercicio refería a vectores del espacio. En el inciso i) se solicitaba a los estudiantes que observen el comportamiento del vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores cualesquiera de R^3. Se esperaba que, aunque los vectores a considerar estuviesen en el espacio, los estudiantes pudieran asegurar que, en el plano que ellos determinan, el vector suma coincide con la diagonal del paralelogramo que tiene por lados a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Esta presunción se fundamentaba en que la Regla del Paralelogramo, tal como se conoce a esta propiedad, es presentada a los alumnos en Matemática Básica. En el inciso ii) se pedía identificar el conjunto gen$\{\vec{u}, \vec{v}\ \ \vec{u}+\vec{v}\}$ considerando el caso en que los vectores fueran colineales y en el caso en que no lo fueran.

Aprovechando el carácter dinámico de GeoGebra, en el último ejercicio de esta actividad, se solicitaba a los alumnos la determinación de los valores de los parámetros α y β en tres combinaciones lineales dadas. En todos los casos, se presentó a los alumnos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no colineales en R^2 y un vector $\vec{w}_i$ con i=1, 2,3. Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores linealmente independientes siempre es posible escribir la combinación lineal $\vec{w}_i = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$ encontrando los escalares α y β en forma gráfica.

6.2. Análisis de la Actividad de Familiarización

En el análisis de la actividad de familiarización se encontraron evidencias de alumnos que mostraron poseer las concepciones previas requeridas por la DGp. Para la presentación de los resultados, se adopta por denotar como E1, E2, E3…E20 a los estudiantes bajo estudio.

En la actividad 1, E12 describe claramente las características de α$\vec{u}$ con $\alpha \in R$ y $\vec{u}$ un vector del plano.

Respuesta de un estudiante		
	Modificando el vector $\vec{u}$ y el escalar α ¿cómo se altera $\vec{u}$ al multiplicarlo por α? Explica brevemente (no olvides especificar que sucede con el módulo, el sentido y la dirección del vector $\overrightarrow{\alpha u}$)	**Observa y responde ¿qué conjunto tomen todo los múltiplos escalares de un vector fijo?**
E12	Al multiplicar el vector $\vec{u}$ por el escalar α, el mismo se altera de la siguiente forma: el sentido del vector cambia dependiendo del signo del escalar. La magnitud se modifica (se expande o se contrae) cuando el escalar aumenta o disminuye respectivamente. La dirección no cambia porque el vector modificado sigue estando contenido en la misma recta original	Todos los múltiplos escalares de un vector fijo forman un conjunto Linealmente independiente

Tabla 2. Fuente: Elaboración propia

El mismo alumno, en la actividad 2, respondió correctamente en relación al sentido, módulo y dirección del vector suma y resta de vectores, advirtiendo además que, en caso de ser $\vec{u}$ y $\vec{v}$ colineales, el vector $\vec{u}+\vec{v}$ es también colineal y de módulo igual a la suma de los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Asimismo registra que, en caso de estos vectores colineales pero de sentido opuesto, el vector $\vec{u}+\vec{v}$ es también colineal a ellos, de sentido igual al de mayor longitud y de módulo equivalente a la resta de los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Finaliza el ejercicio concluyendo que $\vec{u}-\vec{v}$ se comporta como la suma modificada, argumentando que "puede representarse como la suma de dos vectores colineales de sentido opuesto".

En la actividad 3, hace mención a la colinealidad, a la independencia y dependencia lineal relacionándolos con el espacio generado. Lo anterior da cuenta que E12 ha encapsulado los Procesos de identificación de múltiplos de vectores y sumas de vectores como Objetos. Además, ha construido una concepción Objeto de vector, pues es capaz de trabajar con él como una entidad, puede identificar la necesidad de usar vectores en las aplicaciones y explica con claridad las propiedades de los mismos, por ejemplo, la posibilidad de que generen un subespacio vectorial de R^3.

Posteriormente, en la actividad 4, al igual que otros estudiantes, E12 determina cada uno de los valores de α y β requeridos en cada inciso. Señala que, en todos los casos, es posible expresar a $\vec{w_i}$ como como combinación lineal de los vectores dados ya que éstos son vectores linealmente independientes y que dos vectores con esa propiedad en R^2 generan a dicho espacio vectorial.

De manera similar, en la actividad 3 de E6 puede leerse "En el caso que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean colineales gen{$\vec{u}, \vec{v}\ \ \vec{u}+\vec{v}$}=gen{$\vec{u}$}=gen{$\vec{v}$} ya que al ser colineales se encuentran en la misma recta" y "si no fueran colineales el conjunto $gen\{\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{u+v}\} = gen\{\vec{u},\vec{v}\}$,, se ignora $\vec{u}+\vec{v}$ ya que es una combinación lineal de ambos vectores".

En términos de APOE, los comentarios anteriores evidencian que E12 y E6 poseen, entre las construcciones previas mencionadas en 4.1, la concepción Objeto de vector y Proceso de la suma de vectores.

Más adelante, en la actividad 4, E6 hace referencia a la colinealidad, al paralelismo de vectores, a la dilatación de un segmento dirigido, a la conservación del sentido y la dirección asociados a la dependencia lineal.

Estu-diante	**Con respecto a $\overrightarrow{w_1}$**	**A $\overrightarrow{w_2}$**	**Y a $\overrightarrow{w_3}$**
E6	Sí, es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con $\alpha = 2$ y β=1, entonces $\vec{w}$=2$\vec{u}$+1$\vec{v}$	Sí, es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con $\alpha = 1$ y β= -1, entonces $\vec{w}$=1$\vec{u}$-1$\vec{v}$	Sí, es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con $\alpha = 2$ y β=0, entonces $\vec{w}$=2$\vec{u}$. $\vec{w}$ es un vector paralelo a $\vec{u}$, con módulo igual al doble que el de $\vec{u}$ ($\|w\| = 2.\|u\|$)

Tabla 3. Respuesta de un estudiante. Fuente: Elaboración propia

Lo anterior hace suponer que E6 ha logrado la encapsulación del concepto operación binaria al evidenciar que puede hacer acciones sobre los vectores dados, comparando espacios generados correspondientes a distintos grupos de vectores y determinar sus propiedades, como, por ejemplo, su dimensión.

En conclusión, la estrategia didáctica seguida permitió observar en algunos de los estudiantes las concepciones Objeto de vector y una concepción Proceso de las operaciones involucradas en los espacios vectoriales.

7. Reflexiones provisorias

En esta propuesta de enseñanza, enfrentar a los alumnos a situaciones sin la ecuación de las transformaciones para decidir si son o no lineales se ajusta a la observación de Roa Fuentes y Oktac (2010) "El razonamiento que logre hacer el estudiante sobre cierta situación depende del tipo de preguntas que se le planteen, orientándolas al objetivo de que generen un nuevo conocimiento que se integre al conjunto de construcciones previas" (p 92).

Los resultados de la primera actividad de la propuesta permiten inferir, desde la teoría APOE, que algunos de los estudiantes bajo estudio poseen las construcciones y mecanismos mentales que inciden en la construcción cognitiva del concepto espacio vectorial para R^2 y R^3.

Si bien los tópicos vinculados con las operaciones suma de vectores en R^2 y R^3 y multiplicación por un escalar se desarrollaron en Matemática Básica privilegiando el tratamiento algebraico de las mismas, algunos alumnos que participaron en esta propuesta, en la actividad de familiarización, han manifestaron vinculaciones tanto algebraicas como gráficas, de dichas operaciones con otros conceptos del algebra lineal como independencia lineal, subespacios vectoriales de R^2 y de R^3, etc. Conjeturamos que estas evidencias contribuyeron al logro de la coordinación de los procedimientos algebraicos y gráficos en las condiciones de linealidad en la actividad principal y en el cuestionario post-instrucción.

Los primeros resultados de esta investigación, expuestos en el apartado 6, contribuyen a interpretar el estado de construcción de las condiciones de linealidad en los espacios euclídeos R^2 y R^3 y evidencian que el empleo de las estructuras de la teoría APOE permite determinar las construcciones que subyacen a las dificultades de estudiantes universitarios en relación a la definición de TL.

Un primer análisis de las actividades de esta propuesta de enseñanza muestra que algunos estudiantes evocan razonamientos, observables a través de sus argumentos, que corresponden a la concepción Proceso TL en el modelo APOE. Sin embargo, al mismo tiempo, otros alumnos emplearon ideas erróneas relacionadas con las construcciones previas mencionadas en 4.1. Actualmente estamos abocadas a la elaboración de otras conclusiones.

8. Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science Estados Unidos

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E, Mathews, D. y Thomas K. (1996). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds.)

Research in collegiate mathematics education (pp. 1-32). American Mathematical Society. Estados Unidos.

Campos, V. F. (2017). Los conceptos Valor Propio y Vector Propio en un texto de Algebra Lineal: una mirada desde la teoría APOE (Tesis de Maestría). Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática 8 (3), 25-41.

Gareth, W. (2002). *Algebra Lineal con Aplicaciones*. Mc. Graw-Hill. México.

Gerber, H. (1992). *Algebra Lineal*. Grupo Editorial Iberamericana. México.

Goldenberg, P., Lewis P. & O'Keefe, J. (1992). *Dynamic representation and the development of an understanding of function*. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds), The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp. 235-260). Mathematical Association of America. Estados Unidos.

González Astudillo, M. T y Bermudez, E. A. (2010). *Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE*. En A. Contreras de la Fuente y L. Ordóñez Cañada (Eds.). Jornadas de investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Baeza, España.

Grossman, S. (2012). *Algebra Lineal* (Séptima edición). Mc Graw Hill. México.

Hoffman, K. & Kunze, R. (1971). *Algebra Lineal*. Prentice Hall Hispanoamericana. México.

Kozak, A. M, Pastorelli, S. y Vardanega, P. (2007). *Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal*. McGraw-Hill Interamericana. Argentina

Maturana Peña, I., Parraguez González, M. Trigueros Gaisman, M. (2015). Matriz Asociada a una Transformación Lineal. Una Mirada desde la Teoría APOE. En A. Ruiz (Presidencia), XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México. Recuperado el 15 de enero de 2020, de http://xiv.ciaem-edumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/501/226

Molina, G. y Oktaç, A. (2007). *Concepciones de la Transformación Lineal en Contexto Geométrico*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (2), 241-273.

Parraguez, M. (2009). *Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial* (Tesis doctoral). Instituto Politécnico Nacional, México.

Ramírez Sandoval, O. and Oktaç, A. (2012). *Modelos intuitivos sobre el concepto de transformación lineal*. *Actes du Colloque Hommage à Michèle Artigue*, Université Paris Diderot- Paris 7, Paris, Francia.

Roa-Fuentes, S. y Oktac, A. (2010). *Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(1), 89-112.

Roa-Fuentes, S. y Oktac, A. (2012). *Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15*(2), 199-232.

Rodriguez Jara, M. R, Parraguez González, M y Trigueros Gaisman, M. (2018). Construcción cognitiva del espacio vectorial R^2. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 21*(1), 57-86.

Romero Félix, C. y Oktac, A. (2015). *Representaciones dinámicas como apoyo para la interiorización del concepto de transformación lineal*. Ponencia de la XIV *Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática XIV CIAEM-IACME*, Chiapas, México.

Romero Félix, C. F. (2016). *Aprendizaje de Transformaciones Lineales mediante la Coordinación de Representaciones Estáticas y Dinámicas* (Tesis doctoral). Centro de investigaciones y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Soto, J. L., Romero, C. F. e Ibarra, S. E. (2012). El concepto de transformación lineal: una aproximación basada en la conversión Gráfico-Algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt & C. Cortés (Eds). Formation à la recherche en didactique des mathématiques (pp. 38-49). Loze-Dion. Canadá

Trigueros Gaisman, M., Maturana Peña, I., Parraguez González, M y Rodríguez Jara, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación lineal. Educación Matemática 27(2), 95-124. Recuperado el 15 de enero de 2020, de http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v27n2/1665-5826-ed-27-02-00095.pdf

Podevils Lorena es Profesora de Matemática, Actualmente maestranda en Didáctica Específica. Profesora en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral y Profesora titular en escuelas secundarias del sector público de la provincia de Santa Fe, Argentina. Se dedica a la investigación en Matemática, ocupándose en especial de las dificultades de enseñanza y aprendizaje de los conceptos del álgebra. podevilslorena@gmail.com. Tel. Móvil: 54-9-342-4083410.

Montenegro Fabiana es Profesora de Matemática, Licenciada en Matemática Aplicada y Magister en Matemática. Actualmente doctoranda en Educación. Profesora adjunta en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral y Profesora titular en el Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de la Escuela Normal Superior N° 32. Santa Fe– Argentina. montenegrofg@gmail.com. Tel. Móvil: 54-9-342-5337389.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-19

https://union.fespm.es

Prácticas de docentes universitarios que fomentan la autorregulación del aprendizaje en las matemáticas

Diana Hidalgo-Moncada, Sinaí Paillalef Valencia, Javier Díez-Palomar, Yuly Vanegas Muñoz

Fecha de recepción: 16/09/2020
Fecha de aceptación: 13/02/2021

Resumen	La formación universitaria ha requerido que el rol del docente y del estudiante cambie para enfrentar los desafíos de la sociedad actual. Esta investigación analiza las prácticas que promueven la autorregulación del aprendizaje de un grupo de docentes que imparte clases en la carrera de Pedagogía en Matemática de una universidad chilena. Se registró la percepción de los docentes y la de sus estudiantes mediante el Cuestionario de Formas de Estudio. Los resultados muestran que los docentes manifiestan fomentar con mayor frecuencia prácticas orientadas a desarrollar un enfoque profundo de aprendizaje. Mientras que sus estudiantes expresan percibir mayormente prácticas que promueven evitar el enfoque superficial de aprendizaje. **Palabras clave**: Autorregulación, formación docente, estrategias de aprendizaje, enfoques de aprendizaje
Abstract	University education has required the teachers' and students' role to change in order to face the challenges of today's society. This research analyzes the practices that promote learning self-regulation in a group of teachers who teach in the Pedagogy in Mathematics career of a Chilean university. The teachers' and their students' perception was registered using the Study Forms Questionnaire. The results show that teachers more frequently promote practices aimed at developing a deep approach to learning. While their students manifest to more frequently perceive practices that promote avoiding the learning superficial approach. **Keywords**: self-regulation, teacher training, learning strategies, learning approaches
Resumo	A formação universitária exige mudanças no papel do professor e do estudante para enfrentar os desafios da sociedade atual. Esta pesquisa analisa as práticas que promovem a autorregularão da aprendizagem de um grupo de professores que lecionam no curso de Pedagogia da Matemática em uma universidade chilena. A percepção dos professores e de seus alunos foi registrada por meio de um "Questionário de Formas de Estudo". Os resultados analisados mostram que os professores manifestam que promovem com mais frequência práticas destinadas a desenvolver uma abordagem profunda sobre aprendizagem, enquanto seus alunos expressam, em sua maioria, uma percepção positiva sobre

práticas que promovem aprendizagem, evitando abordagens superficiais
Palavras-chave: Auto-regulação, formação de professores, estratégias de aprendizagem, abordagens de aprendizagem.

1. Introducción

Desde hace ya varias décadas en el contexto educativo se discute sobre la necesidad de transformar los modelos de enseñanza y aprendizaje. Tal y como lo plantean Cerezo, Núñez, Fernández, Suárez-Fernández y Tuero (2011), inicialmente la mirada se centró en el profesor y los contenidos. Luego dicha mirada se focalizó en el alumno y en sus habilidades para construir su propio conocimiento. Si bien estas investigaciones y reflexiones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje han abordado diversos aspectos, es claro que todas han puesto de manifiesto la necesidad de cambio en las prácticas educativas, particularmente las relacionadas con los procesos de evaluación y con el desarrollo de competencias como el aprender a aprender (Sanmartí y Jorba, 1995; Sanmartí, 2019). Indagar sobre el desarrollo de competencias que fomenten en los estudiantes la autonomía en sus procesos de aprendizaje, es clave en las propuestas cuyo objetivo es conseguir que todos aprendan de forma significativa (Perrenoud, 2004; Sanmartí, 2019).

Enfrentar los desafíos globales del siglo XXI ha implicado en el contexto de la formación universitaria cambios en los roles de docentes y estudiantes. Se considera que el papel del docente no es sólo el de promotor de aprendizajes a través de la enseñanza de conocimientos, sino también el de alguien que impulsa la autonomía, el pensamiento crítico y ayuda en la construcción de una actitud reflexiva (Perrenoud, 2005). Desarrollar un sistema de aprendizaje que permita aprender a aprender, conlleva necesariamente el desarrollo de estrategias de autorregulación (Salmerón y Gutierrez-Braojos, 2012).

Diversas investigaciones han confirmado que estudiantes con un alto grado de autorregulación poseen un mayor éxito académico (Alegre, 2014; Cueli, García, y González-Castro, 2013; Onemli y Yondem, 2012; Sertel y Münire, 2013; Valle et al., 2009). Estas investigaciones también muestran que la autorregulación aumenta la motivación de los estudiantes y potencia la autoeficacia en el aprendizaje (Lavasani, Mirhosseini, Hejazi, y Davoodi, 2011).

El objetivo de este artículo es describir de qué manera y con qué frecuencia docentes universitarios que enseñan a futuros docentes de matemáticas (en adelante “estudiantes”) realizan actuaciones para promover la autorregulación del aprendizaje. También se indaga sobre la percepción que tienen estos estudiantes sobre dicho tema. Por otra parte, se comparan las diferentes perspectivas, tanto de profesores como de estudiantes, lo que se considera que puede retroalimentar a los docentes sobre cómo enseñan este tipo de estrategias y si éstas son percibidas por sus estudiantes. Finalmente, se discute y reflexiona sobre la importancia y necesidad de la promoción de estrategias de autorregulación en el contexto de la formación de docentes.

2. Marco teórico

2.1. Autorregulación del aprendizaje

Tal y como lo plantea Sanmartí (2019) un estudiante competente no es aquel que hace todo bien, sino aquel que sabe autorregularse. Esto implica ser capaz de reconocer sus errores y dificultades, saber reconocer cuáles han sido los obstáculos para aprender y encontrar caminos para superarlos. Pero ¿cómo promover dicha autorregulación? Según Pintrich (2000) el aprendizaje autorregulado es un proceso activo en el cual los estudiantes establecen metas para su aprendizaje y monitorizan, regulan y controlan su cognición, motivación y conducta, guiados por sus metas (de aprendizaje) y por aspectos contextuales. Los estudiantes que llevan a cabo este proceso de autorregulación observan cambios favorables en su rendimiento académico.

Diversos estudios como el desarrollado por Cueli, García y González-Castro (2013) han analizado la relación entre el rendimiento académico, el conocimiento de las estrategias de autorregulación y la aplicación de estas en las matemáticas de estudiantes entre 10 y 13 años. En este estudio consideraron el modelo de Zimmerman (2000) para el análisis de los datos. Los resultados indicaron que los estudiantes con mejor rendimiento son quienes muestran un mayor conocimiento de las estrategias autorregulatorias y sobre todo aquellas dirigidas a la planificación de tareas en matemáticas.

Otras investigaciones como la planteada por Rosario et al. (2009) se centraron en el poder predictivo de variables motivacionales como la autorregulación del aprendizaje en el rendimiento académico del área de matemáticas. El estudio se llevó a cabo con estudiantes portugueses de educación primaria (10-11 años). En este caso los resultados indicaron que el rendimiento en matemáticas se relaciona con las variables motivacionales y sobre todo con la autorregulación.

A nivel universitario, Elvira-Valdés y Pujol (2012) afirman que la gran mayoría de los estudiantes que comienzan estudios superiores no se encuentran preparados para lo que se espera de ellos en la universidad, ya que no son capaces de autorregular su proceso de aprendizaje. Estudios internacionales (Hofer, Yu y Pintrich, 1998; Hofer y Yu, 2003; Solano, 2006; Weinstein, Husman, y Dierking, 2000) insisten en la importancia de desarrollar las competencias de autorregulación del aprendizaje también en la universidad.

Por otra parte, Cerezo et al. (2011) recopilan y analizan una serie de programas de intervención para la mejora de competencias de aprendizaje autorregulado en educación superior. Todos ellos aportan datos empíricos sobre sus resultados. Estos coinciden con que los estudiantes que se sometieron a los programas tuvieron un rendimiento significativamente mayor que el obtenido antes de la formación (Nückles, Hübner, y Renkl, 2009; Schloemer y Brenan, 2006; Tuckman, 2003).

2.2. Estrategias de autorregulación del aprendizaje

La autorregulación incluye la puesta en acción de una serie de procedimientos que el estudiante utiliza de forma consciente, regulada, intencional y flexible para enfrentarse a situaciones problemáticas y para aprender de forma significativa (Díaz-Barriga y Hernández, 2005). Estos procedimientos también llamados, estrategias de aprendizaje, facilitan la adquisición, almacenamiento y utilización del nuevo conocimiento (Pérez, Valenzuela, Díaz, González-Pienda y Núñez, 2013).

El proceso de aprendizaje está constituido de una serie de estrategias que se llevan a cabo para cada tarea. Estas estrategias se desarrollan en fases cíclicas de planificación, ejecución y evaluación (Pintrich, 2004; Rosário et al., 2007; Ruban y Reis, 2006; Torrano y González, 2004; Zimmerman, 2002). De las cuales se desprenden tres dimensiones de estrategias de autorregulación del aprendizaje: (1) Estrategias de disposición al estudio, como parte de la fase de planificación, (2) Estrategias cognitivas, correspondientes a la fase de ejecución y (3) Estrategias metacognitivas relevantes en la fase en la que el estudiante evalúa los resultados de su proceso de estudio (Rosário et al., 2007; Torrano y González, 2004; Valle, González, Cuevas, y Fernández, 1998; Zimmerman, 2005).

2.2.1. Estrategias de disposición al estudio

Las estrategias de disposición al estudio son procedimientos que se plantean y fomentan antes o al iniciar el estudio y el proceso cognitivo de aprendizaje (Pérez, Valenzuela, Díaz, González-Pienda y Núñez, 2011). Estas estrategias incluyen entre otras, la organización del tiempo, el manejo del ambiente y la regulación del esfuerzo. El manejo del tiempo implica programar los momentos de estudio, proponerse metas realistas y hacer uso eficaz del tiempo. El manejo del ambiente refiere a determinar un lugar apropiado de trabajo. La regulación del esfuerzo alude a la habilidad del estudiante para persistir en la tarea a pesar de las distracciones o falta de interés en ellas (Chiecher, Donolo, y Rinaudo, 2009).

2.2.2. Estrategias cognitivas de aprendizaje

Las estrategias cognitivas involucran el proceso de conocimiento propiamente tal y normalmente están asociadas a la calidad del aprendizaje. Se componen de procesos específicos para cada tarea, relacionados con conocimientos y habilidades precisas (Pérez, Díaz, González-Pienda y Núñez, 2011). Estrategias de este tipo son, las de repaso, elaboración y organización, las dos últimas comprenden formas de procesamiento profundo, reestructuración y conexión entre el conocimiento previo y el nuevo (Chiecher et al., 2009; Pérez, Díaz et al., 2011). Las estrategias de repaso son procedimientos simples que ayudan a recordar la información mediante la repetición o recitación. Las estrategias de elaboración permiten la transformación de la información, como elaborar un resumen, parafrasear una idea, explicar un texto a otro, etc. Por último, las estrategias de organización son de complejidad mayor, ya que implica reformar los conocimientos previos del estudiante. Por ejemplo, elaborar mapas conceptuales, gráficos, tablas o diagramas que permitan comprender, relacionar y clasificar la información extraída del material de aprendizaje (Chiecher et al., 2009).

2.2.3. Estrategias metacognitivas de aprendizaje

Las estrategias metacognitivas son procedimientos de planificación, supervisión y evaluación de acciones cognitivas, de forma que conocen y regulan los procesos mentales. Cuando un estudiante se encuentra ante una tarea de aprendizaje, su autosupervisión le permite darse cuenta de lo que sabe sobre la tarea y su nivel de dificultad. Lo que le permitirá decidir cuáles son las estrategias más pertinentes para desarrollar la tarea, así como también el ambiente más adecuado (Pérez et al., 2013). Estas estrategias son transversales a todo el proceso de autorregulación, pero fundamentalmente en la fase final del aprendizaje, en la cual el estudiante evalúa sus resultados (Pérez, Valenzuela et al., 2011).

2.3. Enfoques de aprendizaje

Según la percepción que el estudiante tenga sobre la tarea académica, desplegará determinados procesos cognitivos, los que implicarán un determinado enfoque de aprendizaje (Valle et al., 2000). Se distinguen dos tipos de enfoque: uno hacia la reproducción (enfoque de orientación superficial) y otro hacia la comprensión (enfoque de orientación al significado o profundo) (Pérez, Valenzuela et al., 2011).

El enfoque superficial se basa en una motivación extrínseca del estudiante. Está dirigido al cumplimiento mínimo de una tarea. No posibilita resultados de alta calidad; solo pone en marcha un aprendizaje simple, mecánico y memorístico (Rosário et al., 2007). Acorde a esa motivación el estudiante despliega las estrategias oportunas, a saber, estudiar sólo lo esencial y reproducir de memoria. Por su parte, el enfoque profundo parte de un interés intrínseco por los contenidos. Se caracteriza por un alto interés y grado de implicación en lo que se está aprendiendo. Está orientado a descubrir el significado de lo que se va a aprender, estableciendo relaciones con experiencias y conocimientos previos (Rosário et al., 2007).

Los estudiantes que autorregulan su aprendizaje poseen un enfoque de profundo, dirigido a la comprensión o dominio del conocimiento. Sin embargo, la persona que inicia el estudio con un determinado enfoque puede variarlo debido al contexto de aprendizaje, incluyendo la percepción de los criterios de evaluación, del tipo de contenido, del estilo de enseñanza y las características de la tarea (Pérez, Valenzuela et al., 2011). En este sentido, el docente juega un rol clave, ya que puede fomentar un enfoque profundo, con acciones tales como: mostrar de forma explícita la estructura del tema, enseñar considerando los conocimientos previos de los estudiantes, o utilizando métodos de enseñanza y evaluación que vayan en la misma dirección de los objetivos de la asignatura (Díaz, Alvarino y Carrascal, 2011).

2.4. Enseñanza y promoción del aprendizaje autorregulado

Para un desempeño eficiente del estudiante de primer año de universidad, es fundamental el rol del docente y la comunicación que establece con sus estudiantes a través de la disciplina que imparte. Esta constituye un importante espacio de adquisición de saberes de la profesión en la que ese estudiante se inicia, pero al mismo tiempo, en una oportunidad para instaurar las competencias necesarias para alcanzar aprendizajes en el transcurso de su formación profesional.

Según Rosario et al., (2009) es necesario que los docentes desarrollen durante las actividades de aprendizaje las competencias de autorregulación para promover el éxito académico. Aunque los resultados de investigaciones apoyan firmemente la importancia del uso de los procesos de autorregulación de los alumnos, pocos profesores preparan efectivamente a los estudiantes a aprender de forma autónoma (Zimmerman, 2002).

Algunos docentes universitarios consideran que los alumnos por el solo hecho de iniciar los estudios en este nivel, en forma casi automática e independiente, desarrollan la capacidad para autorregular sus aprendizajes. Sin embargo, como sostienen, Gairín, Feixas, Guillamón, y Quinquer (2004), son muchos los estudiantes que inician una carrera de grado sin tener habilidades para regular su aprendizaje y que necesitan recibir una orientación por parte de otros más experimentados. Desde esta perspectiva es el profesor quien debe plantearse promover la autorregulación al mismo tiempo que enseña su disciplina, siendo mediador del desarrollo metacognitivo e impulsor de estrategias de autorregulación del aprendizaje. Esto requiere que en su tarea educativa considere enseñar directamente estas estrategias y, por ende, deben ser parte del planteamiento y planificación explícita en la organización de la clase (Fuentes, 2012).

Algunos autores proponen pautas generales para el diseño de la instrucción, basada en la influencia positiva de la autorregulación en el aprendizaje, orientadas a ayudar a los alumnos a ser más estratégicos y autorregulados.

En el caso de las estrategias orientadas a la disposición del estudio, el profesor puede recomendar a sus alumnos registrar actividades específicas de sus horas de estudios, establecer periodos de estudio regulares, proponerse metas realistas y orientar a sus alumnos a priorizar tareas (Ley y Young, 2001).

En cuanto a promover el uso de estrategias cognitivas en el estudio, algunas iniciativas concretas por parte del profesor para que el alumno se acerque lo más posible al tipo de pensamiento estratégico serían: pensar en voz alta a la hora de resolver un problema, estimular que los alumnos se hagan preguntas sobre los distintos aspectos implicados y mecanismos utilizados al llevar a cabo una tarea, como también, analizar y comparar en clase los distintos materiales de elaboración personal de los alumnos (García, 2012).

Para la promoción de estrategias metacognitivas por parte del docente, éste puede en un momento inicial, exponer situaciones problemáticas, diseñando instrumentos o actividades que permitan valorar los conceptos previos del estudiante relacionados con la solución, aportando una mirada consciente y crítica frente a los propios procesos (Tovar-Gálvez, 2008). Además, crear instancias para que los estudiantes evalúen la calidad de sus trabajos, por medio de la revisión de pruebas y discutiendo con ellos la manera correcta de responder cada ítem (Ley y Young, 2001).

3. Metodología

Para responder al objetivo de analizar la promoción de la autorregulación del aprendizaje por parte de docentes universitarios y la percepción de sus estudiantes, se diseña un estudio de tipo cuantitativo de corte transversal, exploratorio y descriptivo.

3.1. Participantes

Participaron en el estudio 30 docentes y 220 estudiantes de una carrera de Pedagogía en Matemática, de una Universidad de la Región del Biobío, Chile. De esta población de docentes y estudiantes, se tomó una muestra representativa de 13 docentes y 117 estudiantes, dependiendo de la disponibilidad a participar en este estudio. La participación de docentes y estudiantes fue voluntaria. Se resguardaron las normas éticas de CONICYT/FONDECYT.

3.2. Instrumento

Se utilizó una adaptación del *Cuestionario de Formas de Estudio* de Pérez, Valenzuela et al., (2011), el cual está dirigido a preguntar a los estudiantes sobre sus formas y hábitos de estudio. Dicha adaptación fue realizada y validada por Arévalo, Hidalgo, Paillalef y Díaz (2014) y se centró en la redacción de dos versiones: una para docentes y otra para estudiantes. Además, este cuestionario considera cinco dimensiones: (1) Promoción de enfoque profundo, (2) Evitación del enfoque superficial, (3) Estrategia de disposición al estudio, (4) Estrategias cognitivas, y (5) Estrategias metacognitivas. Estas dimensiones se han definido a partir de los planteamientos de Pintrich (1999) y Pérez, Valenzuela, Díaz, González-Pienda, y Núñez (2011) sobre tipos de estrategias y enfoques de aprendizaje, respectivamente.

Ambos cuestionarios están compuestos por 47 ítems, los cuales contemplan las cinco dimensiones de estudio mencionadas. Los ítems se presentan con una escala tipo Likert de cinco categorías: Nunca = 1, Pocas Veces = 2, Algunas veces = 3, Muchas Veces = 4, Siempre = 5.

A continuación, en la Tabla 1 se definen las cinco dimensiones, y se presentan ejemplos de ítems asociados a cada una de éstas, considerados en los cuestionarios.

Dimensión	**Definición**	**Ejemplo ítem cuestionario docente**	**Ejemplo ítem cuestionario estudiante**
Promoción del Enfoque Profundo	Recomendaciones efectuadas por el docente, dirigidas a incentivar en el estudiante una preocupación por comprender lo que se le enseña, adoptando de este modo estrategias que llevan al significado inherente de la tarea (García, 2005)	Recomiendo a los estudiantes que cuando estudien intenten comprender y decir con sus palabras lo que está escrito en libros /apuntes	El profesor nos recomienda que cuando estudiemos intentemos comprender y decir con nuestras palabras lo que está escrito en libros/ apuntes

Dimensión	Definición	Ejemplo ítem cuestionario docente	Ejemplo ítem cuestionario estudiante
Evitación del enfoque Superficial	Recomendaciones efectuadas por el docente, dirigidas a incentivar al estudiante a que evite satisfacer los requisitos de una tarea con el mínimo esfuerzo (García, 2005)	Recomiendo a los alumnos que estudien continuamente, no sólo durante los días anteriores a los exámenes	El profesor nos recomienda que estudiemos continuamente, no sólo durante los días anteriores a los exámenes
Estrategias de Disposición al estudio	Recomendaciones efectuadas por el docente, dirigidas al establecimiento de metas y objetivos y al uso de estrategias relacionadas con el manejo del tiempo, del ambiente de estudio y la regulación del esfuerzo (Pérez, Díaz, González-Pienda y Núñez, 2011).	Aconsejo a los alumnos que tengan un plan antes de comenzar a hacer un trabajo escrito, piensen lo que van a hacer y lo que necesitan para conseguirlo	El profesor nos aconseja tener un plan antes de comenzar a hacer un trabajo escrito, pensar lo que vamos a hacer y lo que necesitamos para conseguirlo
Estrategias Cognitivas	Recomendaciones efectuadas por el docente, dirigidas al proceso de conocimiento propiamente tal, se componen de procesos específicos para cada tarea relacionados con conocimientos y habilidades precisas (Pérez et al., 2011).	Sugiero a los estudiantes que cuando estudien, intenten relacionar las distintas ideas que van extrayendo del texto	El profesor nos sugiere que cuando estudiemos, intentemos relacionar las distintas ideas que vamos extrayendo del texto
Estrategias Metacognitivas	Recomendaciones efectuadas por el docente, dirigidas a la utilización de métodos autoevaluativos durante el proceso de estudio y el proceso evaluativo formal, incluyendo reflexionar sobre resultados obtenidos y dificultades en el proceso para realizar cambios en las estrategias a utilizar (Pérez, Valenzuela, Díaz, González-Pienda y Núñez, 2013).	Cuando entrego una evaluación, invito a los estudiantes a pensar respecto de las medidas que deben tomar para mejorar su aprendizaje	Cuando el profesor nos entrega una evaluación nos invita a reflexionar respecto de las medidas que debemos tomar para mejorar nuestro aprendizaje

Tabla 1. Dimensiones del Cuestionario Formas de estudio y ejemplos de items

3.3. Instrumento para docentes

El análisis estadístico realizado en la prueba piloto al cuestionario para docentes arroja que todas las dimensiones presentan índices muy altos de consistencia interna (Alfa de Cronbach 0,81 a 1), excepto la medición de aprendizaje profundo, que muestra un índice de consistencia sólo alto (0,61 a 0,8), lo que no deja de ser un buen indicador (Ruiz Bolívar, 2002) (Tabla 2).

Dimensión	Alfa de Cronbach
E. Profundo	.76
Ev. Superficial	.89
Es. Disposición al estudio	.97
Es. Cognitiva	.82
Es. Metacognitiva	.93

Tabla 2. Consistencia interna instrumento para docentes según dimensiones

3.4. Instrumento para estudiantes

Se puede observar que en función de la cantidad de alumnos que evaluaron a cada docente, los puntajes promedios obtenidos tienen un alto nivel de fiabilidad (Tabla 3). Esto nos indica que, si se toma otra muestra de alumnos, elegida al azar, los puntajes promedio obtenidos serían muy similares a los obtenidos.

Dimensión	Acuerdo absoluto		Consistencia interna	
	k= 1	k=16	k=1	k= 16
E. Profundo	.32	.88	.32	.89
Ev. Superficial	.30	.88	.31	.88
Es. Disposición al estudio	.31	.88	.34	.89
Es. Cognitiva	.38	.90	.40	.92
Es. Metacognitiva	.40	.92	.44	.93

Tabla 3. Acuerdo absoluto y consistencia en instrumento de estudiantes según dimensiones

3.5. Recogida de datos

Tanto los docentes como los estudiantes respondieron de manera individual a los cuestionarios. Dos de las investigadoras registraron las respuestas dadas por cada uno de los participantes a los ítems de cada uno de los cuestionarios. Dichos registros, posteriormente fueros sistematizados en EXCEL para facilitar el análisis inicial de los datos.

3.6. Análisis de datos

Los datos fueron analizados con el software R 3.0.2, usando la biblioteca “Psych”. Respecto del instrumento aplicado a los estudiantes, como medida de fiabilidad se analizó el grado de acuerdo absoluto (correlación entre dos medidas) y de consistencia (correlación entre medidas una vez controladas las diferencias individuales) de los juicios de dos estudiantes cualquiera, elegidos al azar, y del promedio de un número determinado de estudiantes. Para este último caso, se ocupó un k=16, correspondiente a la mediana del número de estudiantes que respondieron por cada docente. Para esto, se utilizaron ICC (2,1) e ICC (2k) de Shrout y Fleiss.

Para el instrumento aplicado a los docentes se utilizó una medida de consistencia interna, específicamente el alfa de Cronbach. Para preservar su anonimato, se les asignó una codificación alfanumérica de 1 a 13, acompañado de la letra D. (ej. D1, D2, D3, etc.).

Para obtener las frecuencias totales en cada dimensión se calculó el promedio de las frecuencias reportadas, tanto de los docentes como de los estudiantes. En este último caso se analizó, además, la desviación estándar para las respuestas por cada docente.

4. Resultados

De acuerdo con los objetivos de investigación, a continuación, se presentan los resultados. Se muestra en primera instancia un resultado general, para luego distinguir por un lado lo reportado por los docentes y por otro lo reportando por sus estudiantes.

En la Figura 1 se indican las frecuencias promedio en las cinco dimensiones sobre la promoción de la autorregulación del aprendizaje, tanto de los docentes como de sus estudiantes.

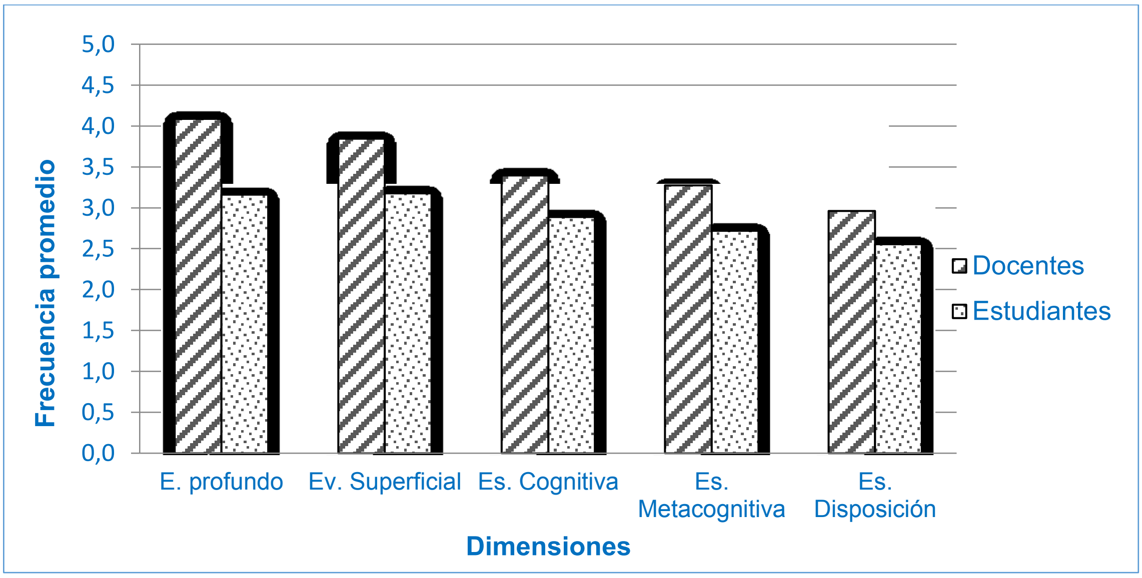


Figura 1. Frecuencia de prácticas docentes, según profesores y sus estudiantes

En los resultados obtenidos se observa que las frecuencias promedio en las cinco dimensiones son más bajas en el reporte de estudiantes que en el reporte de docentes.

Por otra parte, es relevante mencionar que tanto profesores como alumnos en sus reportes, indican que la mayor frecuencia de prácticas tiene relación con aquellas que promueven un enfoque profundo de aprendizaje, y las que menos se practican son aquellas que promueven estrategias de disposición al estudio.

4.1. Percepción docente

En la Tabla 4 se presentan las frecuencias promedio reportadas por cada docente en la promoción de la autorregulación del aprendizaje en las cinco dimensiones en estudio.

D	E. Profundo	Ev.E. Superficial	Es. Cognitivas	Es. Metacognitivas	Es. Disposición	Total
1	4,50	4,83	4,18	4,00	4,14	4,33
2	3,83	4,33	3,73	3,00	3,21	3,62
3	3,00	4,33	3,18	3,30	3,29	3,42
4	4,33	4,17	3,55	3,80	4,14	4,00
5	4,50	3,00	2,82	2,10	1,64	2,81
6	4,67	3,17	3,82	2,90	1,79	3,27
7	4,67	4,50	4,64	4,60	4,71	4,62
8	3,83	3,67	2,36	2,40	2,14	2,88
9	3,83	3,67	3,00	4,20	2,93	3,53
10	4,67	4,83	3,82	3,90	3,57	4,16
11	3,67	4,33	3,27	3,60	3,07	3,59
12	2,83	1,00	1,91	1,00	1,00	1,55
13	4,83	4,17	3,91	3,80	2,86	3,91
Total	4,09	3,85	3,40	3,28	2,96	

Nota. D= docente; E = enfoque; Ev. = evitación; Es.= estrategia

Tabla 4. Frecuencia promedio de prácticas docentes, según percepción de docentes

Según el reporte, la totalidad de los profesores expresa realizar prácticas en la promoción del aprendizaje autorregulado en al menos dos de las cinco dimensiones de interés (Tabla 4), en un rango de promedios que varían entre 1,55 a 4,62 por docente. En cuanto a las variables, el promedio más bajo fue de 2,96, correspondiente a la promoción de estrategias de disposición al estudio y 4,09 correspondiente a la promoción de un enfoque profundo de aprendizaje, siendo este el promedio más alto entre las cinco dimensiones.

En la realización de prácticas que promueven en los estudiantes un determinado enfoque de aprendizaje, se obtuvieron los siguientes resultados: la frecuencia de recomendaciones dirigidas al incentivo de un enfoque profundo de aprendizaje reportada por los docentes es en promedio 4,09. Por otro lado, en cuanto a las prácticas orientadas a evitar un enfoque superficial de aprendizaje los docentes reportaron una frecuencia promedio de 3,85.

En la dimensión de estrategias de disposición al estudio los docentes D5, D6 y D12 presentaron las frecuencias promedio más bajas (1,64; 1,79; 1,00 respectivamente), lo que indica que pocas veces promovieron este tipo de prácticas en el aula.

Cabe destacar el caso particular del docente D12, quien reporta realizar una baja frecuencia de prácticas para promover la autorregulación del aprendizaje, siendo nula (Nunca = 1) en las dimensiones de: Evitación del Enfoque Superficial, Estrategias Metacognitivas y Estrategias de Disposición al Estudio. Por el contrario, ninguno de los profesores reportó tener un promedio de prácticas con frecuencia 5

(Siempre)en alguna de las dimensiones; los casos más cercanos a esto fueron el docente D13 en la promoción de estrategias del enfoque profundo (4,83) y los docentes D1 y D10 en la promoción de prácticas que evitan en sus estudiantes el uso de un enfoque superficial de aprendizaje (4,83 ambos).

4.2. Percepción de estudiantes

En la Tabla 5 se muestran las frecuencias de las prácticas docentes que los estudiantes perciben que sus docentes promueven en relación con la autorregulación del aprendizaje.

	E. Profundo		Ev.E. Superficial		Es. Cognitiva		Es. Metacognitiva		Es. Disposición	
D	M	DE	M	DE	M	DE	M	DE	M	DE
1	3,39	1,04	3,53	1,12	3,16	0,99	3,00	0,96	2,92	0,99
2	3,33	1,02	3,53	0,93	3,20	0,90	2,78	0,96	2,83	0,97
3	3,23	1,02	3,16	1,05	2,97	1,02	2,91	0,94	2,84	1,01
4	3,14	0,81	3,23	1,00	3,14	0,82	2,55	0,81	2,61	0,78
5	3,85	0,65	3,57	0,90	3,24	0,80	3,14	0,60	2,75	0,76
6	2,42	0,75	2,27	0,92	**1,70**	0,52	**1,73**	0,59	**1,48**	0,42
7	3,37	0,92	3,45	0,72	3,20	0,74	2,83	0,89	2,72	0,91
8	2,50	1,12	2,42	1,19	2,25	1,04	2,03	0,85	1,99	0,93
9	**4,35**	0,41	**4,45**	0,47	**4,05**	0,46	**4,34**	0,43	3,65	0,59
10	3,25	0,96	3,30	0,95	2,94	0,91	2,79	0,97	2,76	0,91
11	2,44	0,94	2,50	0,89	2,17	0,82	2,39	0,86	2,05	0,86
12	2,02	0,91	2,14	0,85	**1,86**	0,72	**1,59**	0,53	**1,59**	0,60
13	3,81	0,86	3,75	1,00	3,66	0,79	3,32	0,90	3,06	0,88
Total	3,16	0,66	3,18	0,67	2,89	0,69	2,72	0,72	2,56	0,61

Nota. D = docente; M = media aritmética; DE = desviación estándar; E = enfoque; Ev. = evitación; Es.= estrategia

Tabla 5. Frecuencia de prácticas docentes, percibida por los estudiantes, en cada dimensión

Los 117 estudiantes reportan que la totalidad de sus profesores realizan recomendaciones para promover la autorregulación del aprendizaje (Tabla 5).

Las prácticas docentes que los estudiantes consideran que son menos promovidas por sus profesores son las relacionadas con la promoción de estrategias de disposición del estudio, con un promedio de 2,56. Por otro lado, las que reportan percibir en mayor medida son aquellas relacionadas con evitar un enfoque superficial de aprendizaje (3,18). Cabe señalar, que el caso de esta última se diferencia en 2 centésimas con el promedio resultante en la frecuencia de prácticas que promueven un enfoque profundo (3,16).

En este reporte, algunos casos que llaman la atención son los docentes D6 y D12, cuyos estudiantes reportan percibir una baja promoción de la autorregulación del aprendizaje, señalando frecuencias promedio bajo 2 en tres de las cinco dimensiones, más específicamente en aquellas relacionadas con la promoción de estrategias cognitivas (1,70 y 1,86), metacognitivas (1,73 y 1,79) y de disposición al aprendizaje (1,48 y 1,59). Por otro lado, sólo un docente (D9) obtuvo frecuencias promedio sobre cuatro en casi todas las dimensiones, excepto disposición al estudio (3,65), lo que parece indicar que sus alumnos perciben en él una alta frecuencia de prácticas que promueven la autorregulación del aprendizaje en sus clases.

4.3. Análisis de correlación entre reporte de estudiantes y docentes

En general, dado que el índice de correlación de la información reportada por estudiantes comparada con la reportada por profesores es mayor a 0, para todas las variables, se puede decir que existe correlación positiva. Sin embargo, los datos muestran que existe una correlación moderada entre la percepción de estudiantes y profesores respecto de prácticas de promoción de aprendizaje autorregulado en las dimensiones de Estrategias Cognitivas, Enfoque Profundo y Evitación del Enfoque Superficial de aprendizaje.

La correlación es estadísticamente significativa entre los reportes de estudiantes y docentes en la promoción de Estrategias de Disposición al Estudio y Estrategias Metacognitivas como muestra la siguiente tabla:

Dimensión	Índice de correlación	Probabilidad
E. Profundo	.40	p=.17
Ev. E. Superficial	.47	p=.11
Es. Cognitivas	.36	p=.23
Es. Metacognitivas	.59	p=.03
Es. Disposición al estudio	.54	p=.04

Nota. E = enfoque; Ev = evitación; Es = estrategia

Tabla 6. Índice de correlación entre percepción de docentes y sus estudiantes por dimensión

5. Discusión y Conclusiones

Los estudios sobre autorregulación se han realizado principalmente en los niveles de primaria y secundaria de la educación escolar y pocos en el nivel universitario, centrándose mayormente en analizar el aprendizaje autorregulado de los estudiantes, sin considerar un foco importante como lo es la enseñanza de la autorregulación por parte de los docentes y docentes en formación. Este estudio contribuye en ese aspecto, dando a conocer tanto la percepción que tienen docentes universitarios en la promoción del aprendizaje autorregulado, como la de sus estudiantes quienes son futuros profesores de matemáticas.

Desde una visión general, se aprecia que los docentes manifiestan realizar prácticas para promover la autorregulación del aprendizaje, sin embargo, al comparar el reporte de docentes y estudiantes, los primeros perciben realizarlas con una frecuencia mayor que la que perciben sus alumnos. Esto es coincidente con lo encontrado por Cazden (1991), quien al preguntar por el objetivo de una cierta actividad a docentes y estudiantes encontró que sus percepciones no eran coincidentes.

Una posible interpretación de estos resultados es que, efectivamente los profesores hacen recomendaciones con la frecuencia que señalan, sin embargo, es posible que lo hagan de manera poco clara y precisa, dificultando que los estudiantes puedan darles sentido y hacerlas propias; por tanto, estos las perciben con menor frecuencia. He aquí la importancia de que los profesores estén atentos a mostrar mayor coherencia entre lo que dicen a los estudiantes y lo que hacen ante ellos y, más aun, a lo que pueden estar entendiendo y observando sus alumnos, ya que esto es lo que en definitiva determinará su percepción y por tanto sus acciones en relación con su proceso de aprendizaje.

Adicionalmente, en las respuestas de los docentes puede haber influido el fenómeno de “deseabilidad social”, moviendo a los docentes participantes a responder sobrestimando la frecuencia con que realizan prácticas que promueven la autorregulación. Al respecto Sanmartí (2019) afirma que está comprobado que el alumnado enfrenta diversas tareas, pero que pocas veces tiene claro qué es lo que aprenderán con ellas y por qué las realiza. Si el profesor no comparte con el alumnado los objetivos de aprendizaje y no recoge sus percepciones de lo que están aprendiendo, es poco probable que los estudiantes puedan autorregularse.

Tal y como lo plantean Kramarski (2008) y Putnam y Borko (2000) la autorregulación del aprendizaje no se adquiere de forma espontánea, por ello es necesario que en la formación de profesores se discuta sobre este proceso, se analice la necesidad de considerarlo en el contexto escolar y se permita a los futuros docentes vivenciar la autorregulación en sus procesos formativos.

Respecto a las dimensiones, se observa el compromiso de los docentes en cuanto a utilizar métodos de enseñanza que apoyen las metas y objetivos de las asignaturas (Torres, 2010), ya que estos reportan promover con alta frecuencia un Enfoque Profundo de aprendizaje, así como también, una alta frecuencia en la dimensión de Evitación del Enfoque Superficial. Sin embrago, la estrategia de Disposición al Estudio es la que aparece con menor frecuencia según la percepción de docentes y estudiantes. En este sentido, Zimmerman (2000) afirma que pocos profesores animan a los estudiantes a establecer metas específicas para su trabajo académico. A pesar que investigaciones muestran que los estudiantes con mejores rendimientos académicos, son aquellos con un mayor conocimiento de estrategias autorregulatorias y sobre todo aquellas dirigidas a la planificación de tareas en matemáticas (Cueli et al., 2013). Además, algunos docentes consideran que el solo hecho de iniciar los estudios en un nivel universitario, implica que los estudiantes cuentan con las competencias requeridas para planificar su proceso de aprendizaje (Gairín et al., 2004).

Finalmente, queremos remarcar que es necesario incluir la enseñanza de la autorregulación en los procesos formativos universitarios y que esta sea considerada por los docentes de matemáticas. Es fundamental que se profundice en su estudio, para así poder generar pautas o ciclos de formación que consideren la autorregulación como elemento clave.

6. Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto "Uso del lesson study y la noción de idoneidad didáctica para el desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica en la formación de profesores de matemáticas" (PGC2018-098603-B-I00) MINECO. Además, bajo el proyecto "Impacto de un programa de docencia para facilitar la autorregulación del aprendizaje mediante TIC" (1120694, FONDECYT). La autora Diana Hidalgo Moncada agradece el apoyo de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID)/ Programa becas/ Doctorado becas Chile/ 2019-72200072.

7. Bibliografía

Alegre, A. (2014). Autoeficacia académica, autorregulación del aprendizaje y rendimiento académico en estudiantes universitarios iniciales. *Propósitos y representaciones*, *2*(1), 79–120. doi:10.20511/pyr2014.v2n1.54

Arévalo, T., Hidalgo, D., y Paillalef, S. (2014). *Prácticas de docentes universitarios en la promoción de la autorregulación del aprendizaje.* (Tesis de grado no publicada). Universidad de concepción, Chile.

Cazden, C. (1991). *El discurso en el aula. El lenguaje de la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: Paidós-MEC.

Cerezo, R., Núñez, J. C., Fernández, E., Suárez-Fernández, N., y Tuero, E. (2011). Programas de intervención para la mejora de las competencias de aprendizaje autorregulado en educación superior. *Perspectiva Educacional*, *50*(1), 1-30.

Chiecher, A., Donolo, D., y Rinaudo, M. C. (2009). Regulación y planificación del estudio. Una perspectiva comparativa en ambientes presenciales y virtuales. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, *7*(1), 209-224. doi: 10.25115/ejrep.v7i17.1311

Corte, E., Verschaffel, L., y Eynde, P. O. (2000). Chapter 21 - Self-Regulation: A Characteristic and a Goal of Mathematics Education. En M. Boekaerts, P. R. Pintrich, y M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-Regulation* (pp. 687-726). doi: 10.1016/B978-012109890-2/50050-0

Cueli, M., García, T., y González-Castro, P. (2013). Autorregulación y rendimiento académico en Matemáticas. *Aula abierta*. *41*(1), 39-48.

Daura, F. T. (2011). La asesoría académica universitaria: Un espacio propicio para la promoción del aprendizaje autorregulado. *Revista de orientación educacional*, *25*(47), 49-63.

De la Fuente, J., y Justicia, F. J. (2003). Regulación de la enseñanza para la autorregulación del aprendizaje en la Universidad. *Aula abierta*, (82), 161-172. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?Codigo=1012077

De la Fuente, J., Pichardo, M. C., Justicia, F., y Berbén, A. (2008). Enfoques de aprendizaje, autorregulación y rendimiento en tres universidades europeas. *Psicothema*, *20*(4), 705-711.Recuperado de http://www.psicothema.com/pdf/3544.pdf

Díaz-Barriga, F., y Hernández, G. (2005). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. *McGraw Hill, 6*(12), 397-403. doi:10.35362/rie5831441

Díaz, E., Alvarino, G. y Carrascal, N. (2011). *Enfoques de aprendizaje y niveles decomprensión*. Monteria, Colombia: Universidad de Córdoba.

Elvira-Valdés, M. A., y Pujol, L. (2012). Autorregulación y rendimiento académico en la transición secundaria-universidad. *Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales, Niñez y Juventud*, *10*(1), 367-378. Recuperado dehttp://revistaumanizales.cinde.org.co/rlcsnj/index.php/Revista-Latinoamericana/article/view/612

Fernández, A. (2011). La evaluación orientada al aprendizaje en un modelo de formación por competencias en la educación universitaria. *REDU. Revista de Docencia Universitaria*, *8*(1), 11-34.doi:10.4995/redu.2010.6216

Fuentes, S. (2012). *Competencias percibidas para el aprendizaje autónomo en la universidad: Una mirada desde estudiantes y docentes de primer año en Chile*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Fuentes, S., y Rosário, P. (2013). *Mediar para la Autorregulación del Aprendizaje*. Santiago: Instituto Internacional para el Desarrollo Cognitivo, INDESCO, Universidad Central de Chile.

Gairín, J., Feixas, M., Guillamón, C., y Quinquer, D. (2004). La tutoría académica en el escenario europeo de la Educación Superior. *Revista Interuniversitaria de Formación del profesorado*, *18*(1), 61-77. Recuperado de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27418105

García, A. B. (2005). Estudio de los enfoques de aprendizaje en estudiantes de Magisterio y Psicopedagogía. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, *3*(6), 109-126. doi:10.25115/ejrep.v3i6.1163

García, M. (2012). La autorregulación académica como variable explicativa de los procesos de aprendizaje universitario. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *16*(1), 203-221. Recuperado de https://www.ugr.es/~recfpro/rev161ART12.pdf

Gómez, J. G., y Romero, A. R. (2019). Enfoques de aprendizaje, autorregulación y autoeficacia y su influencia en el rendimiento académico en estudiantes universitarios de Psicología. *European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education*, *9*(2), 95-107. doi:10.30552/ejihpe.v9i2.323

Hofer, B., y Yu, S. L. (2003). Teaching Self-Regulated Learning Through a «Learning to Learn» Course. *Teaching of Psychology*, *30*(1), 30-33. doi:10.1207/S15328023TOP3001_05

Hofer, B., Yu, S. L., y Pintrich, P. R. (1998). Teaching college students to be self-regulated learners. En. DH Schunk y BJ Zimmerman (Eds.)*, Self-regulated learning: From teaching to self-reflective practice* (pp. 57-83). New York: The Guilford Press.doi:10.1207/S15328023TOP3001_05

Lavasani, M. G., Mirhosseini, F. S., Hejazi, E., y Davoodi, M. (2011). The Effect of Self-regulation Learning Strategies Training on the Academic Motivation and Self-efficacy. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *29*, 627-632. doi: 10.1016/j.sbspro.2011.11.285

Ley, K., y Young, D. B. (2001). Instructional principles for self-regulation. *Educational Technology Research and Development*, *49*(2), 93-103.doi:10.1007/bf02504930

López, O., Hederich-Martínez, C., y Camargo, Á. (2012). Logro en matemáticas, autorregulación del aprendizaje y estilo cognitivo. *Suma Psicológica*, *19*(2), 39-50. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=134225567002

Nückles, M., Hübner, S., y Renkl, A. (2009). Enhancing self-regulated learning by writing learning protocols. *Learning and instruction*, *19*(3), 259-271. doi: 10.1016/j.learninstruc.2008.05.002

Onemli, M., y Yondem, Z. D. (2012). The Effect of Psychoeducational Group Training Depending on Self Regulation on Students' Motivational Strategies and Academic Achievement. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *12*(1), 67-73. Recuperado de https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ978433.pdf

Ortega, E. M. (2008). Aprender a aprender: Clave para el aprendizaje a lo largo de la vida. *Tribuna Abierta. CEE Participación Educativa*, *9*, 72-78. Recuperado de https://pdfs.semanticscholar.org/bee3/b402f8f7cfe565 3f90b08dc1e013e9b1c1d6.pdf

Pérez, M. V., Díaz, A., González-Pineda, J., y Núñez, J. (2011). Autorregulación del Aprendizaje en Educación Superior. En J. Catalán (Ed.), *Psicología Educacional: Proponiendo Rumbos, Problemática y Aportaciones* (pp. 49-80). La Serena: Universidad de la Serena.

Pérez, M., Valenzuela, M., Díaz, A., González-Pienda, J. A., y Núñez, J. C. (2011). Disposición y enfoques de aprendizaje en estudiantes universitarios de primer año. *Universitas Psychologica*, *10*(2), 441-449. doi: 10.11144/Javeriana.upsy10-2.deae

Pérez, M., Valenzuela, M., Díaz, A., González-Pienda, J. A., y Núñez, J. C. (2013). Dificultades de aprendizaje en estudiantes universitarios de primer año. *Atenea*, *508*, 135-150.doi:10.4067/S0718-04622013000200010

Perrenoud, P. (2004). Diez nuevas competencias para enseñar. *Educatio*, (23), 223-229.

Perrenoud, P. (2005). *Escola e cidadania: o papel da escola na formação para a democracia*. Porto Alegre: Artmed.

Pintrich, P. R. (1999). The role of motivation in promoting and sustaining self-regulated learning.*International Journal of Educational Research, 31*(6), 459-470.doi:10.1016/S0883-0355(99)00015-4

Pintrich, P. R. (2000). Multiple goals, multiple pathways: The role of goal orientation in learning and achievement. *Journal of educational psychology*, *92*(3), 544-555. doi:10.1037/0022-0663.92.3.544

Pintrich, P. R. (2004). A Conceptual Framework for Assessing Motivation and Self-Regulated Learning in College Students. *Educational Psychology Review*, *16*(4), 385-407. doi:10.1007/s10648-004-0006-x

Pintrich, P. R., McKeachie, W. J., y Lin, Y.-G. (1987). Teaching a course in learning to learn. *Teaching of Psychology*, *14*(2), 81–86. doi: 10.1207/s15328023top1402_3

Rosario, P., Mourão, R., Baldaque, M., Nunes, T., Núñez, J. C., González-Pienda, J. A., y Cerezo, R. (2009). Tareas para casa, autorregulación del aprendizaje y rendimiento en matemáticas. *Revista de Psicodidáctica*,*14*(2), 179-192.

Rosário, P., Mourão, R., Núñez, J. C., González-Pienda, J., Solano, P., y Valle, A. (2007). Eficacia de un programa instruccional para la mejora de procesos y estrategias de aprendizaje en la enseñanza superior. *Psicothema*, *19*(3), 422-427.doi: 2007-10908-010

Ruban, L., y Reis, S. M. (2006). Patterns of self-regulatory strategy use among low-achieving and high-achieving university students. *Roeper Review*, *28*(3), 148-156.doi:10.1080/02783190609554354

Ruiz Bolívar, C. (2002). Instrumentos de Investigación Educativa. Venezuela: Fedupel

Salmerón, H., y Gutierrez-Braojos, C. (2012). La competencia de aprender a aprender y el aprendizaje autorregulado. Posicionamientos teóricos. Editorial. P*rofesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *16*(1), 5-13.

Sanmartí, N. (2019). Avaluar la competència, avaluar per ser més competent. *Anuari de l'Educació de les Illes Balears*, (2019), 16-27.

Sanmartí, N., y Jorba, J. (1995). Autorregulación de los procesos de aprendizaje y construcción de conocimientos. *Alambique*, *4*, 59-77.

Schloemer, P., y Brenan, K. (2006). From students to learners: Developing self-regulated learning. *Journal of Education for Business*, *82*(2), 81-87.

Sertel, A., y Münire, E. (2013). Self-regulation based Learning Strategies and Self-efficacy Perceptions as Predictors of Male and Female Students' Mathematics Achievement. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *106*, 2354-2364. doi: 10.1016/j.sbspro.2013.12.270

Solano, P. (2006). *Elaboración y evaluación de un programa de mejora de la competencia en estrategias de autorregulación*. Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo.

Torrano, F., y González, M. (2004). El aprendizaje autorregulado: Presente y futuro de la investigación. *Electronic journal of research in educational psychology*, *2*(1), 1-33.doi:10.25115/ejrep.3.120

Torres, N. C. (2010). *Integración de tareas" SOLO" para el desarrollo de competencias básicas en primer semestre de educación superior*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Tovar-Gálvez, J. C. (2008). Modelo metacognitivo como integrador de estrategias de enseñanza y estrategias de aprendizaje de las ciencias, y su relación con las competencias. *Revista iberoamericana de educación*, *46*(7), 1-9.doi: 10.35362/rie4671916

Tuckman, B. W. (2003). The effect of learning and motivation strategies training on college students achievement. *Journal of College Student Development*, *44*(3), 430-437.doi: 10.1353/csd.2003.0034

Valle, A., González, R., Cuevas, L., y Fernández, A. (1998). Las estrategias de aprendizaje: Características básicas y su relevancia en el contexto escolar. *Revista de psicodidáctica*, (6), 53-68.

Valle, A., González, R., Núñez, J., Suárez, J., Piñeiro, I., y Rodríguez, S. (2000). Enfoques de aprendizaje en estudiantes universitarios. *Psicothema, 12(3)*, 368-375.

Valle, A., Rodriguez, S., Cabanach, R., Nuñez, J., González-Pienda, J., y Rosário, P. (2009). Diferencias en rendimiento académico según los niveles de las estrategias cognitivas y de las estrategias de autorregulación. *Summa Psicológica UST*, *6*(2), 31-42.doi:10.18774/448x.2009.6.60

Weinstein, C., Husman, J., y Dierking, D. (2000). Chapter 22—Self-Regulation Interventions with a Focus on Learning Strategies. En M. Boekaerts, P. R. Pintrich, y M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-Regulation* (pp. 727-747). doi:10.1016/B978-012109890-2/50051-2

Zimmerman, B. J. (2000). Self-efficacy: An essential motive to learn. *Contemporary educational psychology*, *25*(1), 82-91. doi:10.1006/ceps.1999.1016

Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory into practice*, *41*(2), 64-70.doi:10.1207/s15430421tip4102_2

Zimmerman, B. J. (2005). Attaining Self- regulation a social cognitive perspective. En M. Boekaerts, P. R. Pintrich, y M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-Regulation* (pp. 13-39). doi:10.1016/B978-012109890-2/50031-7

Autores:

Hidalgo-Moncada, Diana: Profesora de Matemática y Computación, por la Universidad de concepción, Chile. Máster en Didáctica de la matemática, por la Universidad de Granada, España. Doctoranda del programa Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades de la Universidad de Barcelona, España. diana.mat.comp@gmail.com

Paillalef Valencia, Sinaí: Profesora de Matemática y Computación, por la Universidad de Concepción, Chile. Profesora de Matemáticas en Colegio Nuevo Horizonte, Chile. sinaipaillalef@gmail.com

Vanegas Muñoz, Yuly: Profesora Lectora Serra Húnter de didáctica de las matemáticas. Universidad de Lleida. Coordinadora del grupo IEMI de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Miembro del Grupo de investigación en práctica educativa y actividad matemática (GIPEAM). Líneas de investigación: enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado. yuly.vanegas@udl.cat

Díez-Palomar, Javier: Profesor agregado de didáctica de las matemáticas. Universidad de Barcelona. Presidente de AMIE: Asociación Multidisciplinar de Investigación Educativa, España. Miembro de CREA, Community of Research for Excellence for All. Miembro de CIEAEM, The International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching. jdiezpalomar@ub.edu

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-17

O que é $\sqrt{-1}$?
Uma perspectiva semiótica com o uso dos Experimentos Mentais no estudo dos números complexos

Willian José da Cruz

Fecha de recepción: 5/4/2021
Fecha de aceptación: 8/6/2021

Resumen	Este texto trae algunas reflexiones teóricas, resultado del proyecto de investigación teórico que trata sobre "Semiótica y Experimentos Mentales en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas". Esta investigación tiene como objetivo general investigar la existencia de una relación cognitiva entre las habilidades para interpretar un texto matemático y semiótico y las acciones necesarias para comprender ciertos elementos y/u objetos matemáticos. Nuestra intención es mostrar cómo es posible entender la existencia de $\sqrt{-1}$, de tres formas semióticas diferentes, a saber: 1 - punto en el plano coordinado; 2 - como un par ordenado; 3 - asociado a una matriz cuadrada de orden 2. **Palabras clave**: Números complejos. Transformaciones geométricas. Sistemas de representación.
Abstract	This text brings some theoretical reflections, result of the theoretical research project that deals with “Semiotics and Thought Experiments in teaching and learning in Mathematics”. This research has the general objective of investigating the existence of a cognitive relationship between the abilities to interpret a mathematical and semiotic text and the actions necessary to understand certain elements and / or mathematical objects. Our intention is to show how it is possible to understand the existence of $\sqrt{-1}$, in three different semiotic ways, namely: 1 - point in the coordinated plane; 2 - as an ordered pair; 3 - associated with a square matrix of order 2. **Keywords:** Complex numbers. Geometric transformations. Systems of representation.
Resumo	Este texto traz algumas reflexões teóricas, resultado do projeto de pesquisa teórica que trata sobre “a Semiótica e os Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática”. Esta pesquisa tem por objetivo geral investigar a existência de relação cognitiva entre as habilidades de interpretação de um texto matemático e semiótica e as ações necessárias à compreensão de certos elementos e/ou objetos matemáticos. Nossa intenção é mostrar como é possível entender a existência da $\sqrt{-1}$, por três maneiras semióticas distintas, a saber: 1 –

ponto no plano coordenado; 2 – como par ordenado; 3 – associado a uma matriz quadrada de ordem 2.
Palavras-chave: Números complexos. Transformações geométricas. Sistemas de representação.

1. Introdução

Construir um conceito é mostrar uma intuição não empírica, que seja de um único objeto, expressando a percepção de universalidade para todas as possíveis intuições que pertencem ao mesmo conceito. Intuições aqui são interpretadas como formas de representação de um dado conceito ou objeto.

Para Vygotsky, a "formação de um conceito se dá com uma operação intelectual que é guiada pelo uso das palavras que servem para concentrar ativamente a atenção, para abstrair certos conceitos, para sintetizá-los e simbolizá-los por meio de um signo" (D'Amore, 2007, p.204).

> A formação dos conceitos é resultado de uma complexa atividade em que todas as funções intelectuais fundamentais participam. No entanto, este processo não pode ser reduzido à associação, à tendência, à imagética, à inferência ou às tendências determinantes. Todas estas funções são indispensáveis, mas não são suficientes se não se empregar o signo ou a palavra, como meios pelos quais dirigimos as nossas operações mentais, controlamos o seu curso e o canalizamos para a solução do problema com que nos defrontamos. (Vygotsky,1896-1934, p. 61)

Os conceitos representam perspectivas sobre uma determinada realidade. Eles são como visões de possibilidades e essas visões são possibilitadas pela aplicação dos Experimentos Mentais na Matemática e no ensino de uma forma geral.

D'Ambrosio, no prefácio do livro Experimentos Mentais na Educação Matemática: uma analogia com provas matemática formais, argumenta que uma das críticas que muitos educadores matemáticos fazem aos programas de prática escolar é a apresentação formal, fria e acrítica da matemática acadêmica e pouco ou nenhum espaço é dado à criatividade e ao imaginário dos alunos (Cruz, 2018). D'Ambrosio continua afirmando que o verdadeiro ato de aprender é resultado do exercício do imaginário e da criatividade, pois foi desta forma, que a ciência progrediu ao longo da história (Cruz, 2018).

Este texto traz algumas reflexões teóricas, resultado do projeto de pesquisa teórica que trata sobre a Semiótica e os Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática. Este projeto se ancora na ideia de que "todo pensamento acontece por meio de signos" (Cruz, 2018, p.21). A Semiótica é a ciência responsável por estudar as relações dos signos com os seus objetos e com outros signos. Esta pesquisa tem por objetivo geral investigar a existência de relação cognitiva entre as habilidades de interpretação de um texto matemático e a semiótica e as ações necessárias à compreensão de certos elementos e/ou objetos matemáticos.

No que tange a esta apresentação, nossa intenção é mostrar como é possível entender a existência da $\sqrt{-1}$, por três maneiras semióticas distintas, com o uso do processo de experimentação mental. Essas maneiras entende os números complexos como: 1 – ponto no plano coordenado; 2 – como par ordenado; 3 – associado a uma matriz quadrada de ordem 2.

Os aspectos metodológicos que aportam esta apresentação têm por base a semiótica sob a perspectiva de Peirce (1958, 2010) e o uso dos Experimentos Mentais na Educação Matemática de Cruz (2015, 2018, 2019, 2020).

2. Matemática numa perspectiva semiótica

A realidade do conhecimento é um processo semiótico que envolve o próprio sujeito. Conceituamos a semiótica como a "ciência que estuda os signos e como eles se referem aos seus objetos e a outros signos" (Cruz, 2018, p.26.).

Signo é tudo "aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém" (Peirce, 2010, p. 46). "Uma palavra, um grito, uma pintura, um desenho, uma biblioteca, uma pessoa, uma mancha, uma quadra, um campo, são exemplos de signos" (Cruz,2018, p.31). Por exemplo, a palavra palmo é um signo que pode significar para alguns a distância que vai do dedo polegar ao mínimo. Ou pode significar uma unidade de medida inglesa que equivale a 22 cm ou a 8 polegadas.

"Conhecer é construir uma representação" (Otte, 2012, p. 14). E representação é a "característica de uma coisa em virtude da qual, para a produção de um certo efeito mental, pode ser colocada no lugar de outra coisa" (Cruz, 2018, p. 31). Não podemos transformar algo em cognição sem um símbolo. De forma geral, "a unidade do pensamento é apenas a unidade de simbolização" (Otte, 2012, p.14).

O signo é conscientemente reconhecido pelo sujeito cognoscente e, para isto, o sujeito tem de criar outros signos e interpretações do primeiro signo. Portanto, significado tem dois componentes: *objetos*, chamados de componentes extensionais e *interpretantes* dos signos chamados de componentes intensionais, ou componentes de coerência. Em consequência podemos considerar que nunca existe um significado definitivo das coisas.

Cruz, explicando os significados dos termos extensão e intensão, escreve:

> "Extensão como o objeto (caso exista) ao qual signo refere-se e intensão como o conteúdo ou sentido do signo que, às vezes, é considerado como significado do signo. Um exemplo ocorre quando a pessoa fala de água, por um lado, e H_2O por outro, que são duas intensões para mesma extensão". (Cruz, 2018, p. 46-47)

Para explicar o processo semiótico, apresentamos a figura 1. Nela, o signo (ou representâmen) é aquilo que representa algo para alguém. Quando é dirigido a alguém, cria na mente um signo equivalente, gerando um efeito interpretativo (interpretante). "O signo representa alguma coisa, o seu objeto" (Peirce, 2010, p. 46).

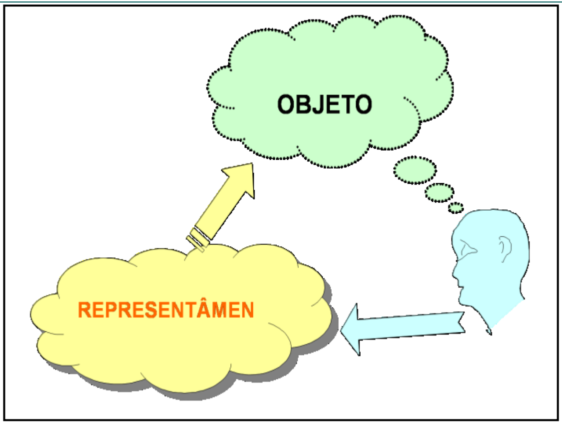


Figura 1*:* O processo semiótico

Fonte: (Cruz, 2015, p.37)

Segundo Santaella (2005, p.114) “o que define signo, objeto e interpretante, portanto, é a posição lógica que cada um desses três elementos ocupa no processo representativo”. Essa mesma autora afirma que:

> Todo signo, segundo Peirce, está encarnado em alguma espécie de coisa, quer dizer, todo signo é também um fenômeno, algo que aparece à nossa mente. Por isso, todas as coisas podem funcionar como signos sem deixarem de ser coisas. Agir como signos é um dos aspectos das coisas ou fenômenos. (Santaella, 2005, p. 33)

Todo raciocínio é uma interpretação de signos de algum tipo. E a interpretação de um signo é apenas a construção de um novo signo. Este ato interpretativo é chamado de semiose. Por exemplo: dizemos que todo número da forma $z = a + bi, a \in R, b \in R \; e \; i = \sqrt{-1}$ é um número complexo. Este mesmo número é interpretado como ponto de um plano coordenado, como pode ser visualizado na figura 2.

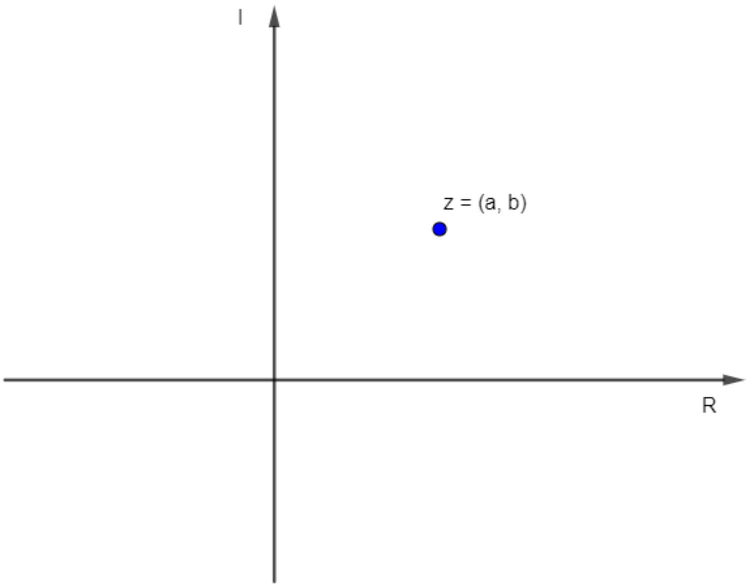


Figura 2: Ponto no plano coordenado
Fonte: O próprio autor

Semiose para Peirce (1958, 5.484) é uma ação que envolve a cooperação de três assuntos, como um sinal, seu objeto e sua influência interpretante. Santaella apresenta a análise de uma semiose dissertando que:

> Quando, na análise de uma semiose, chegamos na etapa do interpretante dinâmico, estaremos explicitando os níveis interpretativos que as diferentes facetas do signo efetivamente produzem em um intérprete, no caso, o próprio analista. Os níveis interpretativos efetivos distribuem-se em três camadas: a camada emocional, ou seja, as qualidades de sentimento e a emoção que o signo é capaz de produzir em nós; a camada energética, quando o signo nos impele a uma ação física ou puramente mental; e a camada lógica, esta a mais importante quando o signo visa produzir cognição. (Santaella, 2005, p.40)

Otte (2012) conceitua cognição como a contradição dialética entre o sujeito cognoscente e a realidade objetiva. Esta realidade refere-se a um objeto e nele busca ter "significado e sentido, o objeto deve poder ser dado de um modo qualquer" (Abbagnano, 2007, p.180). Toda cognição avança por meio da construção de uma representação adequada. Essa construção resolve a oposição entre o sujeito e o objeto dando a esta oposição uma forma. Por exemplo: O que é uma fração? Ou melhor, o que é a fração $\frac{1}{2}$? Uma resposta é dada pela representação na figura 3, isto é, o segmento AC que é a metade de um segmento AB.

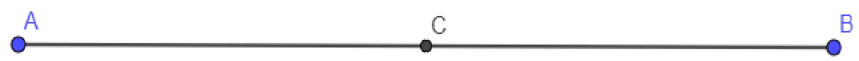


Figura 3: Fração em um segmento unitário AB.
Fonte: O próprio autor

O objeto do conhecimento é apenas uma representação. Kant (B74, B75) chamou isto de intuição. Para esse autor, a intuição e os conceitos constituem os elementos do nosso conhecimento. Esta intuição é estabelecida pela relação entre o sujeito e a realidade, se manifestando pela objetividade, mas também pela interrupção deste processo, isto é, pela resistência contra os nossos esforços de entender algo. "Um objeto matemático não existe independente de todas as suas possíveis representações, mas não deve ser confundido com alguma representação particular" (Otte, 2012, p. 16).

A ideia de signo nos ajuda a melhor compreender que as diferentes caracterizações da matemática não são tão distintas quanto pode parecer a uma primeira vista. Na verdade, elas representam aspectos complementares do pensamento matemático, pois os signos são usados referencialmente, isto é, usados para determinar coisas (ícones) e atributivamente, para indicar coisas que o sujeito pensa (índice). Também eles fornecem meios para descrições das coisas (símbolos).

Peirce, escreve que:

> um sinal tem dois graus de degeneração. Um sinal degenerado em menor grau é um obsistente ou índice, que é o sinal cujo significado de seu objeto é devido à sua condição de ter uma relação genuína com esse objeto, independente do interpretante. Um exemplo é a exclamação "Oi!" como indicativa de perigo presente, ou uma batida na porta como um indicativo

> de visitante. Um sinal degenerado em maior grau é um signo originaliano, ou ícone, que é um sinal cuja virtude significativa é devido simplesmente à sua qualidade. Tais, por exemplo, são as imaginações de como eu agiria sob certas circunstâncias, como me mostrando como outro homem seria suscetível a agir. (Peirce, 1958, 2.92 – tradução nossa)

Por exemplo: a equação $x + y = 0$ refere-se a uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano ortogonal, ou seja, é o ícone dessa reta. A equação $x^2 + 2xy + y^2 = 0$ indica que a reta de equação $x + y = 0$ é uma cônica.

3. Os Experimentos Mentais uma visão geral

Os Experimentos Mentais são realizados quando não é possível ter acesso físico aos objetos considerados. Esses experimentos de um modo especial são factíveis no desenvolvimento da Matemática e de outras ciências. Por esse motivo, mereceu um olhar especial por diversos estudiosos no ramo da Filosofia da Ciência, na Matemática e, em estudos recentes, na Educação Matemática. Faremos um arrazoado sobre alguns autores que tratam sobre o tema.

Thomas Kuhn (2011), um dos mais importantes estudiosos no ramo da filosofia da ciência, conceitua Experimentos Mentais como um “instrumento analítico que auxilia os cientistas a encontrarem contradições e/ou erros conceituais, permitindo chegar a leis ou teorias diferentes daquelas que eles sustentavam anteriormente” (Cruz, 2020 p. 132). Esse mesmo autor coloca os Experimentos Mentais como uma ferramenta capaz de auxiliar na reformulação ou na compreensão de reajuste de conceitos já existentes, ajudando na percepção de dados antigos em uma nova forma de conceituação, isto é, “os Experimentos Mentais podem gerar uma mudança de paradigmas (Cruz, 2018, p.79).

Kuhn disserta que:

> Todo experimento mental bem-sucedido inclui em seu esboço alguma informação prévia sobre o mundo, essa informação não está em questão no experimento. Reciprocamente, se estivéssemos com um experimento mental real, os dados empíricos sobre os quais ele se baseia seriam bem conhecidos e amplamente aceitos antes de o próprio experimento ser ao menos concebido. Como então, baseado exclusivamente em dados familiares, um experimento mental é capaz de conduzir a novos conhecimentos ou compreensão da natureza? (Kuhn, 2011, p. 258)

O filosofo Canadense James Robert Brown, militante na filosofia da ciência, argumenta que os Experimentos Mentais estabelecem algum fenômeno e busca alguma teoria para explicá-lo (Brown, 2005). Esse autor considera que os Experimentos Mentais criam conjecturas, uma vez que estamos conjecturando, na aplicação de tais experimentos, uma explicação para os acontecimentos vividos na atividade.

Brown (2005) escreve que para entender a Matemática, por meio dos Experimentos Mentais, “temos que assumir um certo tipo de platonismo” (Cruz, 2018, p. 79), isto é, tem que haver uma certa crença na existência de objetos na Matemática, da mesma forma que acreditamos na existência de objetos na Física.

Bendegem (2003), matemático e filosofo da ciência, argumenta que os

Experimentos Mentais permitem explorar fatos imaginários, buscando entender melhor os fatos reais e as teorias que incorporam esses fatos. Esse mesmo autor sugere a substituição do termo fato por provas em Matemática. Logo, os Experimentos Mentais podem ajudar na compreensão das provas matemáticas que estamos procurando desenvolver ou descobrir (Cruz, 2020).

Mueller (1969), um estudioso da filosofia grega antiga, analisando as provas no livro "Os Elementos de Euclides", enfatiza que as "derivações euclidianas são Experimentos Mentais e esses experimentos têm a intenção de mostrar se certo tipo de objeto tem uma determinada propriedade" (Cruz, 2020 p. 133) ou se uma determinada operação é possível de ser realizada. Os Experimentos Mentais, neste caso, são considerados um espaço de meras possibilidades.

Mueller argumenta que há obstáculos em interpretar os argumentos matemáticos como Experimentos Mentais, escrevendo que:

> Em particular, pode-se perguntar como a consideração de um único objeto pode estabelecer uma afirmação geral sobre todos os objetos de um determinado tipo. Parte da dificuldade se deve, eu acho, ao fracasso em distinguir duas maneiras de interpretar declarações gerais como "Todos os triângulos isósceles têm ângulos da base iguais". Sob uma interpretação, o estado mental refere-se a (falar sobre, pressupõe) uma totalidade definida, isto é, a classe de todos os triângulos isósceles e diz algo sobre cada um deles. Sob a outra interpretação, tal totalidade definida é pressuposta e a frase tem um caráter muito mais condicional "Se um triângulo é isósceles, seus dois ângulos da base são iguais". Uma pessoa que interpreta uma generalização na segunda maneira pode sustentar que a frase "a classe de todos os triângulos isósceles" não têm sentido porque o número de triângulos isósceles é absolutamente indeterminado. (Mueller, 1969, p. 299, 300 – tradução nossa)

Esta forma de pensar nos leva a considerar que não há uma existência absoluta que possa envolver "nem a caracterização relacional dos objetos matemáticos e nem as provas matemáticas. A Matemática opera apenas com existência relativa" (Otte, 2003, p. 29).

4. Os Experimentos Mentais na Educação Matemática

Passaremos agora a conceituação dos Experimentos Mentais no campo da Educação Matemática. Cruz (2018), buscando construir uma conceituação para os Experimentos Mentais, classifica essas formas de experimentação como práticas desempenhadas pelo sujeito cognoscente, de colocar seu próprio pensamento, considerando um contexto bem definido (sistema de representação), como objeto de consideração, por meio de uma representação.

Os Experimentos Mentais na Educação Matemática servem a um duplo papel complementar: "o primeiro, mostrando a coerência do próprio conceito do ponto de vista do conteúdo; e o segundo, permitindo uma melhor compreensão das possibilidades de aplicação de tal conceito" (Cruz, 2018, p. 164).

As principais características de um Experimento Mental elencadas por Cruz (2018) são descritas como: i) - um sistema de atividades supostas, no qual as coisas são implicitamente assumidas; ii) permite o uso da intuição (representação), combinando em si, experiências e conhecimentos; iii) poderoso instrumento no aprimoramento e na compreensão sobre a natureza do conhecimento matemático; iv) serve como fatos ou formas de estabelecer algum fenômeno, permitindo buscar algumas hipóteses para explicá-lo. Esse mesmo autor dissertando sobre os Experimentos Mentais escreve que:

> A importância de sua utilidade revela-se por ser uma reflexão à base de dados conhecidos, ajudando-nos a resolver confusões em nosso modo de pensar. As verdades são consideradas sintéticas, do ponto de vista de Kant, e estão relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio diagramático, na concepção de Peirce, na busca de generalidade. (Cruz, 2018, p.167)

A possibilidade de aplicação dos Experimentos Mentais no ensino da Matemática, em especial, na compreensão do que poderia ser $\sqrt{-1}$, vem da crença de que a Matemática é uma atividade semiótica, ou seja, uma atividade de construção de diagramas, de experimentação sobre esses diagramas e de verificação dos resultados.

Para Peirce,

> diagrama é um representâmen que é predominantemente um ícone de relações e é ajudado a ser assim por convenções. Índices são também mais ou menos usados. Isto deve ser realizado sobre um sistema perfeitamente consistente de representações fundada sobre uma ideia simples e facilmente inteligível. (Peirce, 1958, 4. 418)

Este sistema de representação vai além de consistência, isto é, eles por um lado são essenciais para a construção de uma representação e por outro lado desempenham um papel normativo (Hoffmann, 2006).

Segundo Cruz,

> esse sistema de representação é caracterizado por um conjunto de convenções, cuja intenção é representar proposições e relações lógicas entre essas proposições, e indicar um conjunto de regras para a transformação de gráficos. Não há dúvida de que é preciso um sistema perfeitamente consistente de representação para mostrar implicações lógicas, e o mesmo é verdade para sistemas de representações em Matemática. (Cruz, 2019, p. 19)

Para o desenvolvimento dos Experimentos Mentais, as informações disponíveis devem permitir ao experimentador "utilizar como parte integrante de seu conhecimento aquilo que seu próprio conhecimento lhe tornara inacessível" (Kuhn, 2011, p. 281). É nesse sentido que esse processo condiciona uma nova compreensão da natureza dos objetos matemáticos ou a um novo conhecimento.

5. Existe $\sqrt{-1}$? O uso dos Experimentos Mentais

Existe $\sqrt{-1}$? Não existe número real tal que o quadrado seja igual a -1. E esta é a razão para dizermos que $\sqrt{-1}$ não existe no conjunto dos números reais. Mesmo assim buscaremos trazer a sua existência, de alguma forma. De um ponto de vista semiótico, apresentaremos, por meio de Experimentos Mentais, três maneiras distintas de fazer isto.

A maneira mais simples apresentada nas escolas de ensino médio define o número i como quantidade que obedece a leis aritméticas e algébricas, excetuando $i^2 = -1$. Se desejar pode chamá-lo de símbolo, o que, por definição, satisfaz a $i^2 = -1$. Neste caso, i é tratado algebricamente como qualquer letra ou indeterminado, que pode ser adicionado ou multiplicado. Essas operações e suas inversas obedecem às propriedades comutativa, distributiva e associativa como no campo dos números reais. A única diferença é $i^2 = -1$.

Números reais multiplicados por i como $3i$ ou $-2i$ são chamados de números imaginários ou imaginários puros. Os números da forma $z = a + bi$, sendo a e b números reais, são chamados de complexos; a é chamado de parte real e b é chamado de parte imaginária. Tanto a como b podem ser nulos. Se $a = 0$, temos um número imaginário e se $b = 0$ temos um número real, portanto, podemos concluir que números imaginários e números reais são números complexos. Esta compreensão não parece ser estranha, pois, por exemplo, todo número inteiro positivo e negativo é um tipo de número racional. Quando nós ampliamos um sistema numérico, queremos que os números que construímos se integrem aos números que já conhecemos.

Mas, uma vez que não existem números reais que satisfaz a solução da equação $x^2 = -1$, legitimamos a simples introdução de um quadrado cujo resultado é -1? Não seria uma trapaça? Parece que algum número como $\frac{1}{0}$ nos causa estranheza. “Se $\frac{1}{0}$ é estranho, como podemos ter certeza de que $\sqrt{-1}$ está ok?” (Hersh, 1997, p.275). Uma primeira resposta seria que os números complexos apresentam uma teoria poderosa que não tem sido contraditada. Isto seria o mesmo que dizer que “nunca tivemos problemas até agora e nunca teremos problemas” (Hersh, 1997, p. 275). Uma defesa dúbia, afirma Hersh (1997).

Para resolver tal problema, vamos renunciar a “introduzir ou criar” o quadrado de um número igual a -1. Ao invés disso, vamos encontrá-lo, por três maneiras distintas, como anunciado anteriormente. Cada uma dessas maneiras é um aspecto semiótico que envolve processos extensivos e intensivos, isto é, leva em consideração o contexto e as atividades ou ações desenvolvidas nesse mesmo contexto.

Destacamos as três maneiras, apoiando-se em Hersh (1997, p. 275) como: 1 – Um ponto em um plano de coordenadas x e y, o qual indicaremos por “x O y”. 2 – Um par ordenado de números reais; 3 – Uma matriz 2 por 2 de números reais;

5.1. Um ponto em um plano de coordenadas x e y, o qual indicaremos por “x O y”.

Após séculos de ceticismo, os matemáticos aceitaram os números complexos como pontos no plano “x O y”, afirma Hersh (1997). O complexo $2 + 3i$, por exemplo, é associado ao ponto com coordenadas $x = 2$ e $y = 3$. Desta forma, qualquer número complexo pode ser determinado por uma coordenada no plano e qualquer ponto no plano pode ser indicado por um número complexo. Aplicaremos uma experimentação mental, cujas representações e atividades serão desenvolvidas com o software de geometria dinâmica GeoGebra.

Adição: Para exemplificar, vamos adicionar os números complexos $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = -3 + 2i$. Começamos por representar os complexos z_1 e z_2 como pontos do plano coordenado e na caixa de entrada do GeoGebra, indicamos a soma. O resultado é o ponto que nomeamos como $z_1 + z_2$, na figura 4.

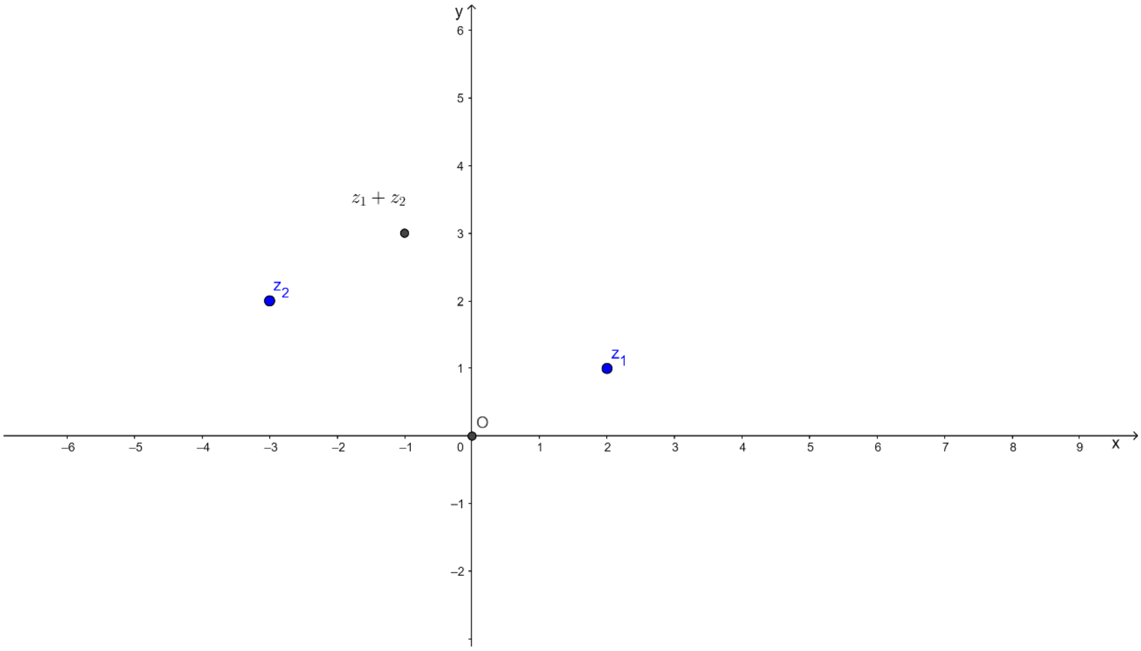


Figura 4: Adição de complexos
Fonte: O próprio autor

Tomamos o vetor $\overrightarrow{Oz_2}$ e verificamos na figura 5 que $z_1 + z_2$ é o resultado da translação de z_1 segundo o vetor $\overrightarrow{Oz_2}$. Isto acontece da mesma forma, se tomarmos o vetor $\overrightarrow{Oz_1}$ e transladarmos z_2 segundo esse vetor.

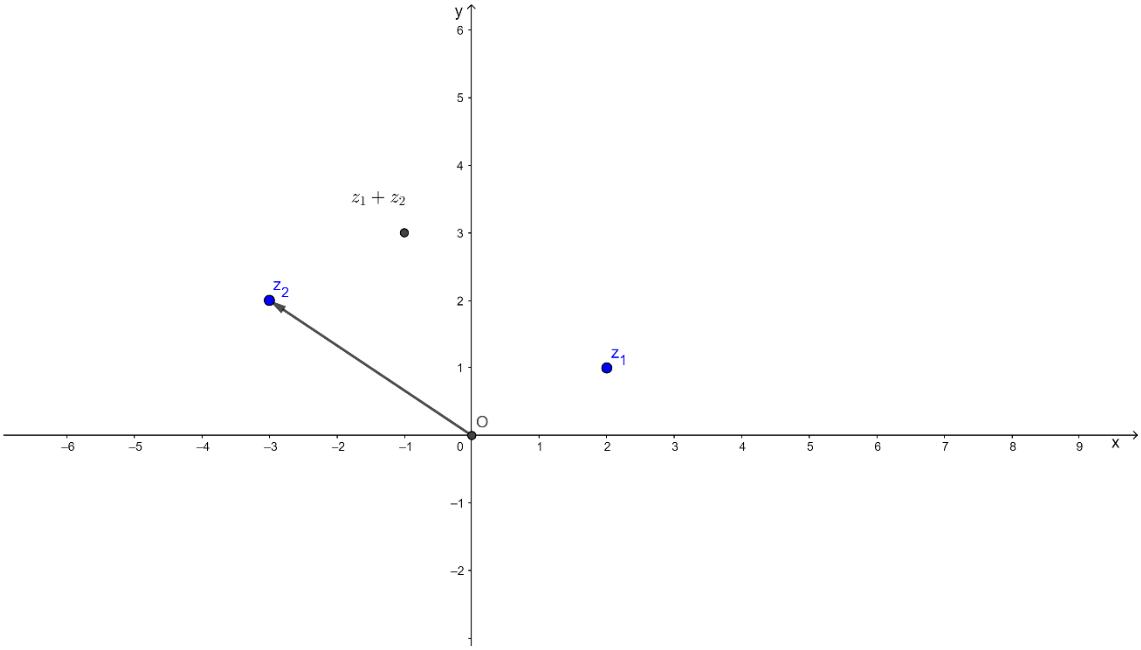


Figura 5: Translação
Fonte: O próprio autor

Portanto, adição é deslocamento. Se movimentarmos z_1 ou z_2, vamos perceber que a mesma operação será válida, quaisquer que sejam z_1 e z_2. Isto significa que para somar um número complexo z_1 com um número complexo z_2, deslocamos ou transladamos z_1 segundo o vetor com origem na origem do plano coordenado e extremidade em z_2, ou vice-versa.

Multiplicação: Para a multiplicação, procedemos inicialmente, da mesma forma que a adição, isto é, marcamos os complexos z_1 e z_2 no GeoGebra e em seguida, na caixa de entrada indicamos a multiplicação desses dois números. Vamos multiplicar, por exemplo, os números complexos $z_1 = 2 + i \; e \; z_2 = -3 + 2i$. O resultado está apresentado na figura 6.

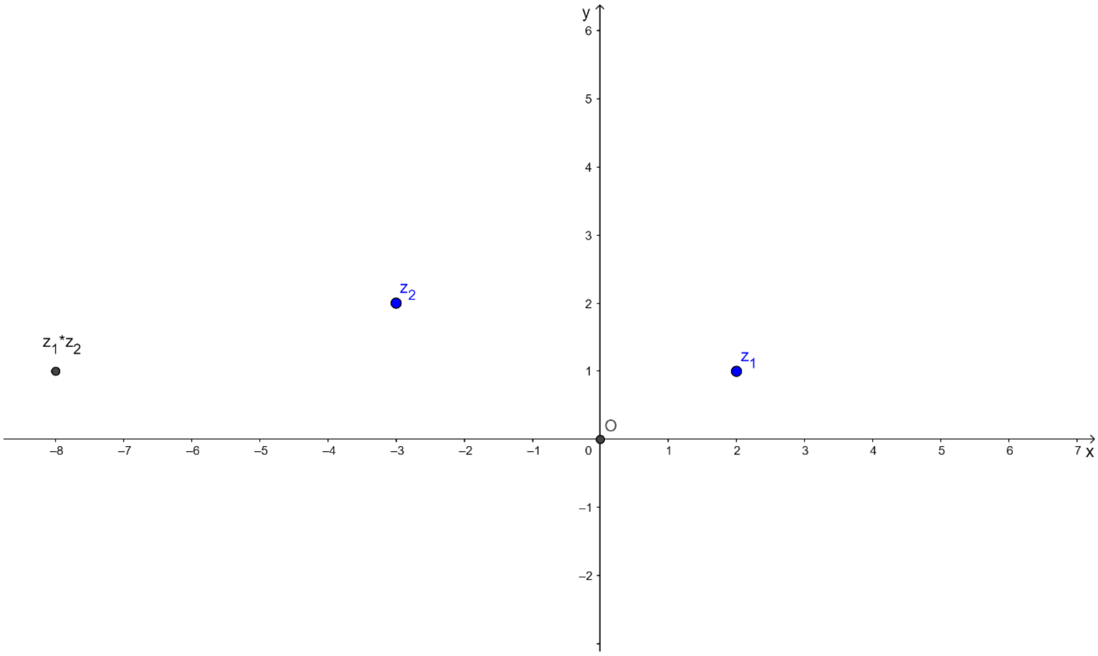


Figura 6: Multiplicação de complexos
Fonte: O próprio autor

Um dado interessante que percebemos, na figura 7, é que o ângulo formado entre os vetores $\overrightarrow{Oz_1}$ e $\overrightarrow{Oz_1 \cdot z_2}$ é igual ao ângulo formado pelo eixo Ox (positivo) e o vetor $\overrightarrow{Oz_2}$. Consideramos esses ângulos sempre no sentido anti-horário.

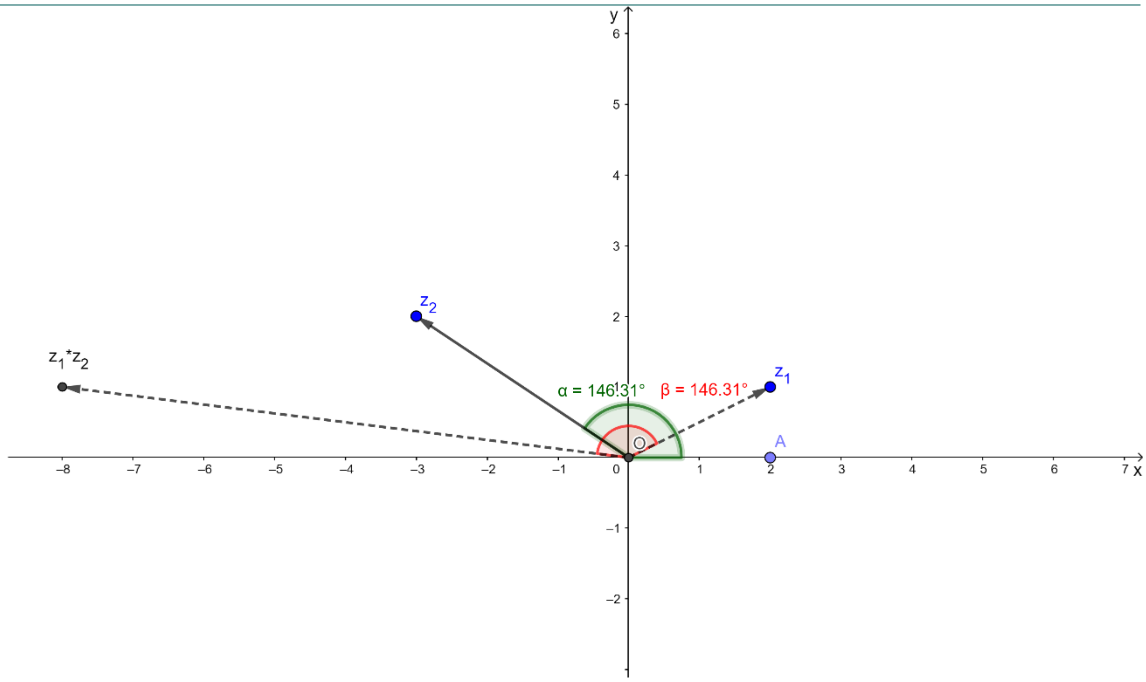


Figura 7: Rotação
Fonte: O próprio autor

Portanto, de z_1 para a linha do resultado $z_1 \cdot z_2$ houve uma rotação em torno da origem cujo ângulo de rotação formado pela parte positiva do eixo Ox e o vetor $\overrightarrow{Oz_2}$. Mas para chegar à multiplicação de fato, percebemos que em relação ao resultado da rotação, o ponto foi deslocado a partir da origem, uma quantidade de vezes correspondente à norma do vetor $\overrightarrow{Oz_2}$. Esta transformação, apresentada na figura 8, chamamos de homotetia.

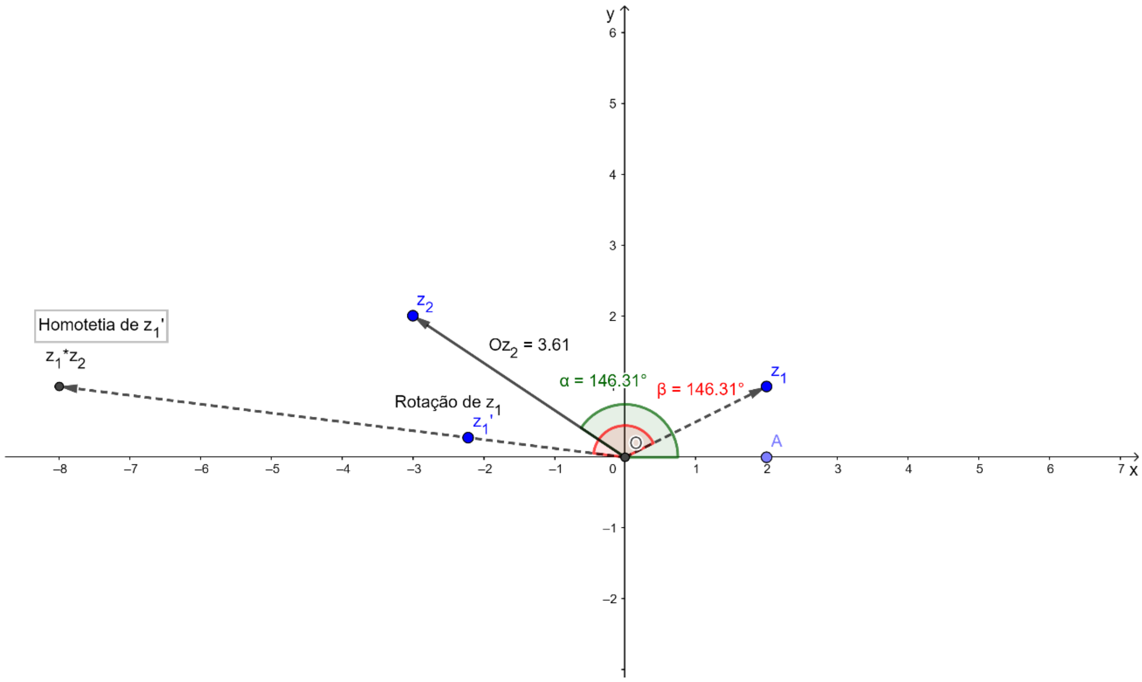


Figura 8: Homotetia
Fonte: O próprio autor

Portanto, multiplicar significa esticar e girar. Essas transformações acontecem mesmo se movimentarmos no GeoGebra z_1 e z_2. Isto quer dizer que fazemos uma rotação em torno da origem do plano coordenado e uma homotetia[1] do resultado da rotação com centro na origem do plano coordenado e razão de homotetia igual ao módulo do vetor formado por um dos complexos considerados.

As características dos Experimentos Mentais estavam presentes em todo o processo, desde a representação dos números complexos como ponto no plano coordenado, passando pela suposição da ideia de vetores, na intuição em representar as ações desenvolvidas nas duas operações, na verificação dos resultados, no aprimoramento do nosso conhecimento matemático e no estabelecimento do fenômeno que nos permitiu pensar as operações dos números complexos como operações geométricas. As operações de adição e multiplicação de números complexos passaram a ser operações geométricas elementares, por meio de transformações isométricas (translação e rotação) e homotetia, sempre com base na origem do plano coordenado.

Passamos agora a discutir, com base na operação e nas conceituações dadas, a multiplicação do número complexo $z_3 = i$, por ele mesmo. Note que $i = 0 + 1i$, evidenciando que $x = 0$ e $y = 1$. O ponto correspondente a i está localizado no eixo y. Podemos chamar o eixo y de eixo imaginário. A unidade imaginária i está lá, acima da origem. O eixo x é chamado de eixo real.

A norma do vetor que vai da origem ao ponto i é igual a 1 e o ângulo que ele faz com eixo real (parte positiva do eixo real) é 90°. Multiplicando $i \times i$, faremos uma rotação do vetor de extremidade em i sob um ângulo de 90° em torno da origem do sistema coordenado e uma homotetia de razão igual a 1 e vamos verificar o resultado desta transformação vetorial na figura 9.

---

[1] Uma homotetia é uma transformação do plano em si mesmo que associa cada ponto P do plano, em relação a um centro O e uma razão K (k diferente de zero) a um ponto P' em que: a)se k>0 então P'pertence à semirreta OP e OP'=k.OP; b)se k<0 então P'pertence à semirreta oposta de OP e OP'= |k| OP; Se k>1 dizemos que houve uma **ampliação**. Se 0<k<1 dizemos que houve uma **redução**. Se k=1 temos a transformação identidade. Se k<0 temos uma homotetia inversa. Um caso particular de homotetia inversa é a simetria central (rotação de 180º) de fator k= -1.

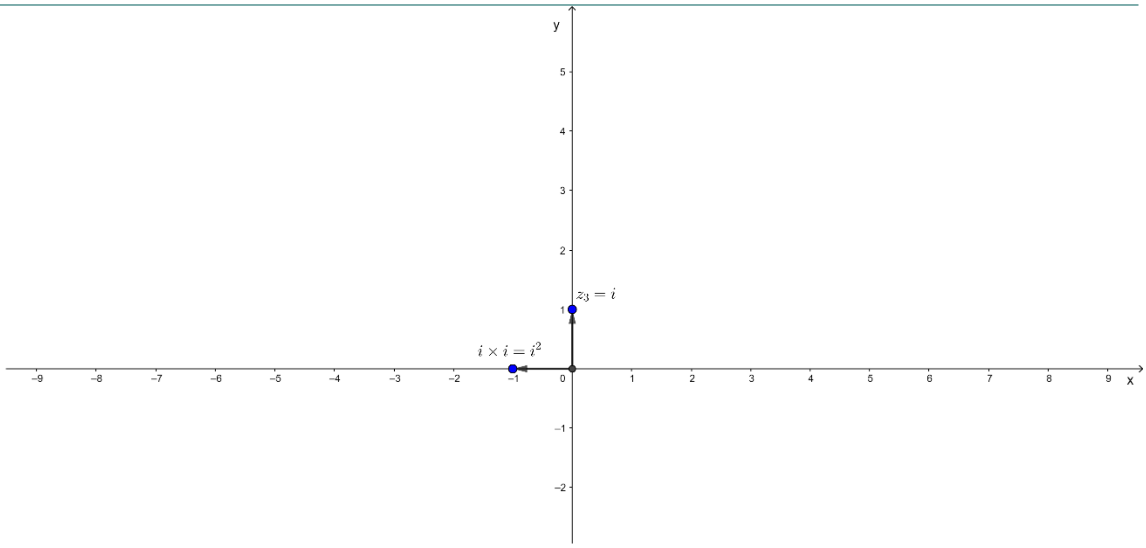


Figura 9: $i \times i$
Fonte: O próprio autor

O experimento nos indica que $i \times i = i^2$ está no eixo real a uma unidade à esquerda da origem. Isto mostra que o resultado é o ponto de coordenadas $(-1{,}0)$. Portanto, o número complexo resultado desta multiplicação é $-1 + 0i$, ou simplesmente -1. Mostramos então, geometricamente que $i^2 = -1$. Hersh (1997) afirma que a geometria era a parte mais venerada da matemática. Esse mesmo autor complementa dizendo que a identificação dos números complexos por meio da geometria, tornou esses números mais respeitáveis.

5.2. Um par ordenado de números reais

Pode-se considerar que os números complexos são definidos por leis de operações aritméticas, formando assim, como afirma Hersh (1997, p.276), "um sistema algébrico independente, definido a priori por sua interpretação geométrica".

> A associação dos números complexos aos pontos do plano foi enfatizada por Gauss como por nenhum outro matemático antes dele, mas o passo decisivo para que o estatuto dos números complexos fosse firmemente estabelecido foi dado com a introdução da noção de vetor. Esse conceito apareceu na Inglaterra, no século XIX, nos trabalhos de W.R. Hamilton. (Roque, 2012, p. 410)

O matemático Irlandês William Rowan Hamilton, tratando da construção dos números complexos, define esses números como pares ordenados de números reais (Hersh, 1997). Hamilton definiu igualdade de pares ordenados, soma e multiplicação, das seguintes formas: Dados dois pares ordenados (a, b) e (c, d).

Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \text{ e } b = d$.

Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Multiplicação: $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Hamilton não tirou essa forma de multiplicar do nada, ele deve ter pensado na multiplicação dos números $a + bi$ e $b + di$ e levou o resultado para sua forma de par ordenado. Tudo isto parece trivial. No entanto, Hamilton "se livra do suspeito i e substitui pelo inocente (0,1)" (Hersh, 1997, p. 277). Desta forma, o quadrado de i será igual a $(0,1) \times (0,1)$, isto é:

$$(0,1) \times (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0).$$

Portanto,

$$i^2 = (-1,0).$$

Deve-se verificar as leis aritméticas que os números complexos compartilham com os números reais. As leis comutativas da adição e multiplicação, as leis associativas para adição e multiplicação e a lei distributiva da multiplicação em relação a soma. Essas verificações são desenvolvidas por cálculos diretos, de acordo com o interesse de quem quiser realizar.

Note que no par ordenado, quando o segundo componente do par é 0, esse par se comporta como um número real. O zero na segunda posição não atrapalha, por exemplo, a identidade multiplicativa para os números complexos na forma de par ordenado é $(1,0)$, pois $(a, b) \times (1,0) = (a, b)$ e o 1 é a identidade multiplicativa para os números reais, portando $(1,0) = 1$. O par (-1,0), é algebricamente o mesmo que o número real -1, assim como a identidade aditiva (0,0) é algebricamente o mesmo que o número real zero. Logo, podemos concluir que $i^2 = (-1,0) = -1$.

Um detalhe importante a ser percebido nesta forma de apresentar $i^2 = -1$, apesar de ser uma maneira semiótica interessante, é que esta ação não se qualifica como um Experimento Mental, pois não mostra algum aspecto característico desse tipo de experimento. Consideramos, apesar de importante, que são calculações apenas, que respeitam o que foi previamente definido para as operações com pares ordenados.

5.3. Uma matriz 2 por 2 de números reais

Uma outra maneira de construir $i^2 = -1$ é usando matrizes quadradas de ordem 2 de números reais. Este outro aspecto semiótico, nos traz outras interpretações. Por exemplo, o complexo $a + bi$ corresponderá a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, isto é, os elementos da matriz serão os números reais a e b.

A soma de dois números complexos neste caso, será dada pela soma de matrizes e a multiplicação da mesma forma. Isto quer dizer que o papel usual da álgebra matricial corresponde ao papel usual da adição e multiplicação de números complexos, ou seja, se considerarmos os números complexos $a + bi$ e $c + di$, podemos associá-los respectivamente às matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$.

Adição: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{pmatrix}$ que corresponde ao número complexo $(a + c) + (b + d)i$.

Multiplicação: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix}$ que corresponde ao número complexo $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

Neste caso, aplicamos um Experimento Mental, que olha para a estrutura matricial e busca analogias com os números complexos. As características dos

Experimentos Mentais se mostram na suposição de considerar um número complexo associado a uma matriz e no desenvolvimento do raciocínio diagramático por meio do sistema de representação das matrizes, isto é, baseamo-nos na estrutura operacional e conceitual das matrizes. Logo, representando os números complexos na forma matricial, estabelecemos um fenômeno e buscamos explicações que nos deram condições de pensar os números complexos e os respectivos resultados das operações de adição e multiplicação. Construída esta ideia, vamos pensar agora na multiplicação de $i \times i$.

O número complexo $i = 0 + 1i$ corresponde a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. O nosso objetivo é encontrar $i^2 = i \times i$. Este resultado será dado pela multiplicação da matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ por ela mesma, logo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A matriz que é resultado deste produto de matrizes corresponde ao número complexo $-1 + 0i = -1$. Portanto $i^2 = -1$. Desta forma encontramos a $\sqrt{-1}$ interpretando -1 como uma matriz quadrada de ordem 2. O que podemos dizer sobre a existência de $\sqrt{-1}$?. “Isso existe se interpretarmos -1 de alguma maneira” (Hersh, 1997, p. 278).

6. Conclusão

Entendemos que Matemática não é um jogo de xadrez, pois sempre leva à construção de generalizações. Generalizações, neste caso, são as ações desenvolvidas em uma proposição particular, para se chegar a uma proposição mais geral. Mas só é possível tal generalização se pudermos representar o imaginário, o impossível ou o irracional (no sentido de não existir na razão imediata). E isto fortalece a nossa convicção de que “todo pensamento acontece por meio de signos” (Cruz, 2018, p.21).

Cruz (2018) afirma “que a visão que se tem hoje da Matemática a caracteriza como um determinado tipo de raciocínio, expressando-a como um amontoado de fórmulas, sendo a matemática consistida de afirmações”. Mas não foi sempre assim. Na verdade, as provas matemáticas até o final do século XVIII eram algum tipo de Experimentos Mentais. Toda epistemologia Kantiana é baseada neste fato.

Esses experimentos estão relacionados com o nosso aparato conceitual e uma realidade objetiva, por isto a crença de que os Experimentos Mentais desempenham um papel importante no processo de pensamento matemático e na aprendizagem também.

Analisando as três formas distintas de apresentar $i^2 = -1$, podemos fazer um contraste entre a aplicação dos Experimentos Mentais com a forma de apresentar os números complexos como um par ordenado de números reais. A construção dos “pares ordenados”, por exemplo, usou uma estrutura algébrica criada especificamente para a construção dos números complexos. Não qualificamos esta forma de apresentação como um Experimento Mental, pois os dados já estavam todos explícitos na apresentação do problema e não conseguimos identificar as características dos Experimentos Mentais neste processo.

No Experimento Mental "ponto no plano coordenado", construímos a referência à base de um argumento especulativo, isto é, os números complexos se transformaram em vetores e as operações se transfizeram em isometrias e/ou homotetia. No Experimento Mental "Matrizes de ordem 2", a construção de números complexos por matrizes utilizou algo já conhecido, uma das características dos Experimentos Mentais, adequando esses números a um caso particular de matrizes, com o detalhe de ter os elementos da diagonal principal iguais e os elementos da diagonal secundária simétricos.

O fato essencial, é que a Matemática não é simplesmente um conhecimento de algoritmos. A Matemática tem a necessidade de idealização e de generalização. Temos que criar novos conceitos e novas ideias (Cruz, 2018).

Na Matemática construir diagramas permite ganhar uma intuição das coisas, que de outra maneira não seria possível. O pensamento diagramático se traduz na dinâmica de aplicação dos Experimentos Mentais responsáveis por permitir a produção de novas ideias.

7. Referências bibliográficas

Abbagnano, N. (2007). *Dicionário de Filosofia*. 5ª ed. São Paulo: Martins Fontes.

Bendegem, J. P. V. (2003). Thought experiments in mathematics: anything but proof. *Philosophical, p. 9 – 33.*

Brown, J. R. (2005). *The Laboratory of the mind: Thought experiments in the natural sciences*. This edition published in the Taylor & Francis e- Library.

Cruz, W. J. (2015). Experimentos Mentais e provas matemática formais. São Paulo: *UNIAN, 2015, 233 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós Graduação, Universidade Anhanguera de São Paulo*.

Cruz, W. J. (2018). *Experimentos Mentais na Educação Matemática: uma analogia com provas matemáticas formais*. Curitiba: Appris.

Cruz, W. J. (2019). O raciocínio diagramático e os experimentos mentais numa perspectiva semiótica*. Educação Matemática em Revista, Brasília, v. 24, n. 62, p. 6-28.*

Cruz, W. J. (2020). Matemática é criação ou descoberta? A importância dos Experimentos Mentais*. UNIÓN [en línea], 15(57), 121-137. Recuperado el 05 de abril de 2021, de https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/70*

D'Amore, B. (2007). *Elementos da didática da matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Hersh, R. (1997*). What is Mathematics really*? Oxford University Press, Inc.

Hoffmann, H. G. M. (2006). Seeing problems, seeing solutions. Abduction and diagrammatic reasoning in a theory of scientific discovery. *Georgia Institute of Technology: School of Public Policy.*

Kant, I. (2013). *Crítica da razão pura.* Tradução e notas de Fernando Costa Mattos, 3 ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes.

Kuhn, T. S. (2011). *A tensão essencial*. São Paulo: Editora UNESP, p. 257 – 282.

Mueller, I. (1996). Euclid's Elements and the Axiomatic Method. *Brit. F. Phil. Sci. 20 (1969), Printed in Great Britain,* p. 289-309.

Otte, M. (2012). *A realidade das Idéias*: Uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática. Cuiabá: EDUFMT.

Otte, M. F. (2003). Análise de prova e o desenvolvimento do pensamento geométrico. São Paulo: Educação Matemática Pesquisa*: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, n.1, pp. 13 – 55.

Peirce, C. S. (1958). CP = *Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Volumes I-VI, ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiß, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1931-1935, Volumes VII-VIII, ed. by Arthur W. Burks, Cambridge, Mass. (Harvard UP).*

Peirce, C. S. (CP). (2010). *Semiótica*. Trad. Jose Teixeira Coelho Neto. 4ª ed. São Paulo: Perspectiva.

Roque, T. (2012). *História da Matemática*: Uma visão crítica desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar.

Santaella, L. (2005). *Semiótica aplicada*. São Paulo: PioneiraThomson Learning.

Vygotsky, L. S. (1896 – 1934). *Pensamento e Linguagem*. Edição: Ridendo Castigat Mores. Fonte Digital www.jahr.org.

Autor:

Willian José da Cruz é Professor efetivo do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora - MG (UFJF - Brasil). Doutor em Educação Matemática pela Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN); Mestre em Educação Matemática pela UFJF. Coordenador do curso de Matemática Integral da UFJF. Contatos:
williancruz990@gmail.com ou willian.jose.cruz@ice.ufjf.br ...

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-20

https://union.fespm.es

A Transposição Didática por meio do GeoGebra como suporte ao ensino de Geometria Analítica

Renata Teófilo de Sousa, Italândia Ferreira de Azevedo, Francisco Régis Vieira Alves

Fecha de recepción: 12/10/2020
Fecha de aceptación: 30/12/2020

Resumen	Este trabajo presenta una relación entre la transposición didáctica y GeoGebra en la enseñanza de la Geometría Analítica, utilizando conceptos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), vinculados a la Ingeniería Didáctica (ED). El objetivo es presentar dos propuestas didácticas para la enseñanza de la Geometría Analítica, en la enseñanza de la intersección entre líneas y la ecuación de la circunferencia, utilizando el software GeoGebra en el teléfono celular. Para la elaboración de esta investigación, se utilizaron solo las dos primeras fases del ED (Análisis preliminar y análisis a priori). **Palabras clave**: Geometría Analítica. Transposición Didáctica. GeoGebra.
Abstract	This work presents a relationship between didactic transposition and GeoGebra in the teaching of Analytical Geometry, using concepts from the Theory of Didactic Situations (TSD), linked to Didactic Engineering (ED). The objective is to present two didactic proposals for the teaching of Analytical Geometry, in the teaching of the intersection between lines and the equation of the circumference, using the GeoGebra software on the cell phone. For the elaboration of this research, we used only the first two phases of DE (Preliminary analysis and a priori analysis). **Keywords**: Analytical Geometry. Didactic Transposition. GeoGebra.
Resumo	Este trabalho apresenta uma relação entre a transposição didática e o GeoGebra no ensino de Geometria Analítica, utilizando conceitos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), articulados à Engenharia Didática (ED). O objetivo é apresentar duas propostas didáticas para o ensino de Geometria Analítica, no ensino de intersecção entre retas e equação da circunferência, com o uso do *software* GeoGebra no celular. Para a elaboração desta pesquisa utilizamos apenas as duas primeiras fases da ED (Análise preliminar e Análise *a priori*). **Palavras-chave:** Geometria Analítica. Transposição Didática. GeoGebra.

1. Introdução

A Geometria Analítica é uma área da Matemática que permite a resolução de problemas geométricos utilizando métodos algébricos. Seu estudo tem grande importância na solução de situações diversas, sendo aplicada na Física, Engenharia e servindo como base para áreas mais modernas, como: Geometria Discreta, Geometria Computacional, Geometria Diferencial e Geometria Algébrica.

O conteúdo de Geometria Analítica, geralmente, aparece nos livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) apenas no volume 3, o que corresponde ao conteúdo do 3º ano do Ensino Médio e este assunto, em muitas obras, aparece com uma abordagem mais técnica, com pouca contextualização, onde "observa-se a fragmentação do conteúdo em diversos tópicos e, assim, o desenvolvimento do conteúdo de Geometria Analítica é linear. Poucas vezes são retomados conceitos ou propriedades estudados anteriormente [...]" (Halberstadt, 2015, pp. 62). Ou seja, a abordagem dos livros aparece desvinculada dos tópicos que o estudante aprendeu em séries anteriores, o que pode ocasionar dificuldades na associação entre o conhecimento prévio do estudante acerca da Geometria e outros assuntos como equações e funções.

Halberstadt (2015) afirma ainda que uma possível dificuldade epistemológica acerca do aprendizado da Geometria Analítica deve-se ao fato de que esta tem caráter bidimensional, sendo necessário o conhecimento prévio tanto da Álgebra quanto da Geometria. Além desta, uma outra dificuldade encontrada é a compreensão geral do assunto, tendo em vista que seus conceitos e propriedades são abstratos. Portanto, entendemos que isto pode ser um entrave na aprendizagem do aluno, visto que as aulas correm o risco de se tornarem enfadonhas, causando desinteresse e, consequentemente prejudicando o desempenho do aluno.

A partir disso, percebemos que existe uma necessidade de adaptação do conhecimento para que este seja ensinado ao aluno de forma mais clara, possibilitando uma reflexão e trazendo uma contextualização para que este se familiarize e compreenda o assunto. Por isso, relacionamos neste trabalho o uso de recursos digitais como forma de promover estratégias de ensino e aprendizagem eficazes, possibilitando ao docente uma organização de situações didáticas por meio da tecnologia, proporcionando o desenvolvimento das habilidades dos alunos em Geometria Analítica.

Partindo dessa premissa, este trabalho une a transposição didática e o GeoGebra no ensino de Geometria Analítica, utilizando os conceitos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau, norteado por pressupostos da Engenharia Didática (ED). Segundo Camilo, Alves e Fontenele (2020) a composição destas situações didáticas, com uma envoltura dinâmica e consolidada proporciona à tríade do processo de ensino e aprendizagem, professor, aluno e saber, um contributo para o desenvolvimento do ensino da Matemática, sobretudo da Geometria.

O uso da Teoria das Situações Didáticas se deve ao fato de que ela fortalece a relação entre professor, aluno e saber, possibilitando o desenvolvimento da autogestão do estudante, por meio de um *milieu* pré-estabelecido intencionalmente pelo professor, para provocar o aluno, despertar sua curiosidade e motivá-lo a buscar o conhecimento de forma autônoma, tornando-o protagonista dentro do seu processo de aprendizagem. Já a Engenharia Didática demonstra um método que traz "a opção por uma perspectiva sistemática de preparação, de concepção, de planejamento, de modelização e, possivelmente, a execução e/ou replicação de sequências estruturadas de ensino" (Alves e Dias, 2019, pp. 2).

Este trabalho tem como objetivo apresentar duas propostas didáticas para o ensino de Geometria Analítica, mas especificamente no ensino de intersecção entre duas retas e equação da circunferência, com o uso do *software* GeoGebra a partir das dialéticas da Teoria das Situações Didáticas. Para assim, proporcionar ao estudante uma visualização mais ampla e dinâmica, por meio de uma atividade que transforma a abstração da Geometria Analítica em algo aplicado, permitindo-o interpretar os problemas e chegar a conclusões ao fazer os manuseios das construções no GeoGebra. Para isso usaremos a versão do GeoGebra para smartphone, por ser mais acessível aos alunos.

Para construir as propostas didáticas, buscamos questões da prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) que abordassem os tópicos de intersecção entre duas retas e equação da circunferência, sendo temas contidos dentro da área investigada.

Assim, este trabalho tem como alicerce as duas primeiras fases da Engenharia Didática (ED), Análises preliminares e Análise *a priori*, sendo ela uma metodologia de pesquisa e usada em muitos trabalhos na área da Educação Matemática.

2. Teoria das Situações Didáticas

A maneira como os estudantes compreendem os conteúdos escolares foi objeto de pesquisa ao longo dos anos. Grandes nomes dentro das teorias educacionais, como Vygotsky, Piaget, Wallon, Brousseau, entre outros, buscavam formas de compreender e aprimorar as técnicas de ensino e aprendizagem por meio da didática. Neste trabalho utilizamos como base a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, um dos pioneiros da Didática da Matemática Francesa.

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) traz uma forma de compreendermos a relação existente entre aluno, professor e o saber, bem como o meio (*milieu*) em que a situação didática ocorre. Neste método, o trabalho realizado pelo aluno aproxima-se ao de um investigador/pesquisador, capaz de formular hipóteses, teorias e conceitos, ao passo que o professor fornece as situações favoráveis para que este, ao agir, transforme aquela informação em conhecimento para si mesmo.

Para criar o modelo da TSD, Brousseau elaborou o triângulo didático, que tem em seus vértices os pilares das relações entre professor, aluno e o saber. "As relações entre professor-saber, saber-aluno e professor-aluno são estabelecidas no triângulo, a partir de seus vértices, sendo estas assimétricas e conflituosas" (Santos e Alves, 2017, pp. 6), o que nos permite compreender que a TSD possibilita uma reflexão acerca das relações entre professor, aluno e o saber estabelecidas, visando um *milieu* formulado propositalmente pelo professor para instigar o aluno a buscar o conhecimento, à medida que este se adapta às situações propostas. A autonomia do aluno é desenvolvida nesse sentido, por meio da tomada de decisões, da reflexão, da organização de ideias e estratégias com base em seus conhecimentos prévios.

Segundo Teixeira e Passos (2013) a mediação (interação) entre professor e aluno é essencial para que a aprendizagem ocorra, ou seja, o professor enquanto mediador por suas atitudes vêm a provocar de forma intencional o aluno, incentivando a autonomia, o que por consequência ocasiona o seu desenvolvimento.

Brousseau (2008) argumenta que cada conhecimento está ligado, por meio da interação entre duas ou mais pessoas, a um tipo de situação e essas interações ocorrem por meio de um jogo, problema/desafio ou dispositivo com suas próprias regras de interação, onde o desenvolvimento da situação ocasiona a apreensão do conhecimento pelo aluno. O autor define que "uma 'situação' é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado" (Brousseau, 2008, pp. 20).

Neste caso, o termo "situações didáticas" remete aos modelos que descrevem as relações das atividades entre aluno, professor e o *milieu*. De forma ampla temos que "o termo '*milieu*' indica o meio a-didático, um sistema antagonista, sem intenção didática explícita e exterior ao aluno, que pode abranger, dentre outros, situações-problema, jogos, os conhecimentos dos colegas e professor" (Pommer, 2008, pp. 5).

Para Brousseau (2008) o planejamento de uma situação didática requer fases em que o aluno, por si só, está diante do problema e o resolve sem a intervenção direta do professor. Neste caso, temos o que ele chama de situação adidática, em que o aluno estabelece relação com o problema e, sem nenhum tipo de resposta ou ajuda dada pelo professor, o resolve a partir de seus próprios conhecimentos. Assim, é importante ressaltar que as situações adidáticas são formuladas para que coexistam com as situações didáticas, caracterizando e obedecendo a um processo didático pré-determinado por objetivos, métodos, recursos e conceitos.

Deste modo, Pommer (2008) sintetiza claramente quando fala que este modelo rompe com o padrão de ensino tradicional, de aulas com papéis pré-determinados, onde o professor encarrega-se de ensinar e o aluno de aprender de forma passiva, sendo o objeto de estudo apresentado de forma unilateral pela figura do professor.

A criação de uma situação didática envolve a elaboração de circunstâncias em que o aluno realmente desenvolva suas habilidades e construa o conhecimento. O estímulo à cooperação entre aluno e professor é uma relação que promove a integração e desenvolve capacidades importantes para a apreensão do saber. Essas relações são estabelecidas pelo que se denomina contrato didático.

Gálvez (1996) define contrato didático como sendo uma relação negociada entre professor e aluno, com componentes explícitos e implícitos, que definem princípios para o andamento da situação didática, distribuição de responsabilidades, permissões ou não para determinados recursos. Assim, o contrato didático auxilia na interpretação das relações professor, aluno e saber.

Então, para Brousseau "Cada um – o professor e o aluno – imagina o que o outro espera dele e o que cada um pensa do que o outro pensa ... e essa ideia cria as possibilidades de intervenção, de devolução da parte a-didática das situações e de institucionalização” (Brousseau, 2008, pp. 74). Este autor afirma ainda que devolução entra como um dos componentes essenciais do contrato didático, sendo definida como o ato pelo qual o professor conduz o aluno a aceitar a sua responsabilidade dentro da situação de aprendizagem (adidática) fazendo com que este se comprometa a tentar resolver os problemas de respostas ainda inexploradas.

A TSD organiza o processo de aprendizagem do aluno a partir das dialéticas/situações de ação, formulação, validação e institucionalização. Sendo as três primeiras consideradas situações adidáticas. A seguir, apresentamos uma descrição de cada situação segundo as ideias de Brousseau (2008).

Situação de ação: é o momento da tomada de posição, onde o estudante tem o primeiro contato com o problema, assim ele coloca os seus conhecimentos prévios em ativa e busca encontrar elementos necessários para solucionar o problema.

Situação de formulação: nesta etapa há troca de informação entre o meio e o aluno; é o momento de expor as ideias de forma clara e verbalizada, onde o aluno traça estratégias e começa a se apropriar do conhecimento.

Situação de validação: o aluno demonstra a estratégia para os demais, para convencê-los com seus argumentos e validar sua resposta dentro do sistema previamente estabelecido.

Situação de institucionalização: o momento em que o professor sintetiza de forma significativa tudo o que foi exposto nas etapas anteriores, formalizando o caráter matemático do que foi validado pelos alunos.

A situação didática é pensada pelo professor para que o aluno desenvolva o saber, onde além de possibilitar a participação efetiva dos alunos em suas aulas, oferece a oportunidade para que os estudantes desenvolvam sua autonomia, construam o conhecimento, formulem estratégias e resolvam problemas de forma criativa, o que propicia sua evolução intelectual. Portanto, percebemos a situação didática como uma situação em que prevalece a dialética da circunstância e do contexto, sendo essencial que o professor faça o elo entre suas etapas e a transposição didática como forma de garantir que os objetivos sejam atingidos na aula planejada.

3. Transposição Didática usando o GeoGebra

A transposição didática permite a transformação do saber científico em saber escolar (Polidoro e Stigar, 2010), possibilitando uma mediação entre esses conhecimentos para facilitar a compreensão do aluno. As diferentes formas como tais transformações podem ocorrer possibilitam um leque de possibilidades metodológicas ao professor. Chevallard (1991), nos apresenta a seguinte definição para transposição didática:

> Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O ‘trabalho’ que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (Chevallard, 1991, pp. 39, tradução dos autores).

A busca por métodos que facilitem a compreensão e aprendizagem do aluno tem sido pauta de muitos trabalhos acadêmicos. A transposição didática por meio de tecnologias já vem sendo estudada por diversos autores, sendo alguns deles: Silva e Abar (2016), Díaz-Urdanetta, Kalinke e Motta (2019), Abar (2020a; 2020b).

Silva e Abar (2016) trazem em sua pesquisa que a construção de atividades com o GeoGebra possibilita uma modernização do saber escolar, visto que o *software* oferece recursos visuais e manipuláveis.

Díaz-Urdanetta, Kalinke e Motta (2019) reforçam que o GeoGebra é uma ferramenta de matemática dinâmica e por sua acessibilidade e pouca complexidade no uso de suas ferramentas torna-se um recurso que permite uma abordagem diferenciada, possibilitando a apresentação de vários tópicos de Matemática em uma única interface. Isto permite uma experimentação e visualização da Matemática com grande potencial para desenvolver o conhecimento do aluno.

Há um desafio grande para a escola no que diz respeito a atingir os objetivos da aprendizagem em Matemática. Apesar da evolução ao longo dos anos, ainda há um longo caminho a percorrer, principalmente no que diz respeito ao uso da tecnologia em sala de aula. O GeoGebra é um recurso que vem para agregar ao professor e facilitar sua prática, principalmente na apresentação de conteúdos de complexa assimilação, no entanto, muitos professores ainda têm dificuldades no manuseio desta ferramenta. Uma justificativa para isso, segundo Abar (2020a), é que para elaborar estratégias inovadoras por parte do professor exige uma dedicação maior ao seu desenvolvimento profissional, demandando mais tempo para que este consiga absorver todas as informações, estudar e transpor essas ideias para a sua prática.

Vale salientar que os recursos computacionais devem ser explorados no âmbito escolar de forma mais ativa e com maior frequência para que acompanhem a evolução tecnológica da sociedade. Partindo dessa óptica, Abar enfatiza que “o desenvolvimento das tecnologias da informação e comunicação, bem como sua introdução nas escolas e nos ambientes de formação, é acompanhando de fenômenos da mesma ordem que os da transposição didática” (Abar, 2020a, pp. 33). Ou seja, a compreensão do aluno é facilitada uma vez que o suporte tecnológico tem grande dinamismo, fornecendo subsídios para que a transposição didática ocorra.

Para que o recurso do GeoGebra proporcione uma aprendizagem significativa, sugere-se que o docente esteja ciente da melhor forma de realizar a transposição didática do conteúdo associado a este recurso. Assim, “é importante a compreensão do complexo processo de transformação pelo qual passa a matemática até tornar-se um elemento a ser ensinado” (Abar, 2020b, pp. 2).

Por fim, o GeoGebra oferece múltiplos recursos para que a transposição didática seja realizada e proporcione uma aprendizagem significativa para o aluno. Em particular neste trabalho, exploraremos dois tópicos da Geometria Analítica com uma proposta diferenciada do que se costuma abordar nos livros didáticos, pois pretendemos sair da abstração e apresentar os tópicos de forma mais visual e compreensível ao estudante, visando uma melhor apreensão do conteúdo.

Para tentar explorar essas teorias (TSD e Transposição Didática) dentro da proposta didática e elaboração das situações didáticas, a seção a seguir, apresenta a organização da metodologia de pesquisa deste trabalho.

4. Engenharia Didática

A Engenharia Didática (ED) é considerada uma metodologia oriunda de pesquisas relacionadas à Didática da Matemática Francesa, tendo como principal criadora a Michele Artigue. Esta metodologia pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um conteúdo e, em particular, a “elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito” (Almouloud e Coutinho, 2008, pp. 66).

Ainda, segundo estes autores, esta metodologia:

> [...] caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. (Almouloud e Coutinho, 2008, pp. 66).

Para Artigue (1996), a Engenharia Didática caracteriza-se como um esquema experimental baseado sobre as realizações didáticas em sala de aula, ou seja, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino. “Essa metodologia pode ser entendida tanto como uma metodologia de pesquisa específica, quanto como uma sequência de aulas ou atividades concebidas e organizadas de forma coerente” (Leivas e Gobbi, 2014, pp. 184).

Diante dessa metodologia, o planejamento e execução de uma ED é preciso seguir quatro fases: i) Análises preliminares, ii) Concepção e análise *a priori* das situações didáticas, iii) Experimentação e iv) Análise *a priori* e validação. A seguir, descrevemos cada uma dessas fases.

i) Análises preliminares, nesta fase é feito um estudo bibliográfico sobre o quadro teórico didático, isto é, uma análise epistemológica dos conteúdos e do ensino atual, levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos e uma análise do campo onde vai situar-se a realização didática.

ii) Concepção e análise *a priori*, em que o pesquisador delimita as variáveis (globais e locais) sobre as quais o ensino pode atuar, a fim de guiar a pesquisa e propor um plano de ação. “As variáveis globais têm por finalidade direcionar as escolhas da pesquisa, enquanto as variáveis locais são direcionadas à previsão dos possíveis comportamentos e entraves dos alunos, mediante as situações didáticas”. (Santos e Alves, 2017, pp. 450)

iii) Experimentação, é a fase da aplicação das situações didáticas ou sequência didática que foram construídas na fase anterior, aqui é firmado o contrato didático e que acontece a coleta dos dados relativos à pesquisa.

iv) Análise *a posteriori* e validação, é a fase que se apoia sobre todos os dados coletados durante a experimentação. Após fazer a análise dos dados, se faz necessário sua confrontação com a análise a priori realizada, para assim, fazer a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação, pois "O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados" (Almouloud e Coutinho, 2008, pp. 68).

Cabe esclarecer que cada fase pode ser retomada e aperfeiçoada no decorrer do trabalho de pesquisa, pois cada uma está sempre em processo de complementação. Ressaltamos que, para a construção deste trabalho utilizamos apenas as duas primeiras fases da ED (Análise preliminar e Análise a *priori*), devido ser um trabalho em andamento, mas que tem como intenção apresentar propostas didáticas para o professor de Matemática trabalhar o assunto de Geometria Analítica.

5. Análise Preliminar

Para a escolha do assunto de Geometria Analítica, foi importante fazermos uma análise dos livros didáticos e nas matrizes de referência do ENEM e do SAEB, verificando o que eles abordam de intersecção entre duas retas e equação da circunferência, a fim de fazermos uma avaliação dos conhecimentos prévios dos alunos sobre o conteúdo escolhido e como são abordados nas avaliações externas (ENEM e SAEB). Assim, selecionamos dois livros didáticos e duas matrizes de referências descritos no Quadro 1. Eles foram escolhidos a partir da sua relevância dentro do contexto da educação e formação do professor.

Livro	Autores	Ano	Volume	Editora
Fundamentos de Matemática Elementar	Gelson Iezzi	2013	7	Atual Editora
Conexões com a Matemática	Fabio Martins de Leonardo (Org.)	2016	3	Moderna
Matriz ENEM	Brasil	2009	-	-
Matriz do SAEB	Brasil	2002	-	-

Quadro 1. Livros selecionados para análise
Fonte: Elaborado pelos autores

A escolha do livro da coleção Fundamentos de Matemática Elementar se deve ao fato de que esta obra tanto é utilizada por estudantes do Ensino Médio quanto da graduação em Matemática e áreas afins, por possibilitar a construção de uma base sólida, explorando o assunto de modo a desafiar o estudante, como por exemplo, quando o livro traz questões em que pede a demonstração de teoremas.

Já o livro Conexões com a Matemática foi selecionado por ter uma linguagem mais simples, com exercícios além dos tradicionais, que também exploram a capacidade reflexiva, o trabalho em grupo, a autoavaliação e sugere o uso de recursos tecnológicos como calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de construção de gráfico de geometria interativa.

Exploramos nessas obras a abordagem de dois tópicos específicos da Geometria Analítica que são intersecção entre duas retas e equação da circunferência, devido ser nosso objeto de pesquisa neste trabalho. Nos próximos parágrafos faz-se uma análise de cada uma dessas obras, destacando as possibilidades de cada um para o ensino de Geometria Analítica.

5.1 Livro 1: Fundamentos de Matemática Elementar

Este livro pertence a uma coleção que oferece ao estudante os principais tópicos de Matemática Elementar, sendo este volume referente especificamente ao conteúdo de Geometria Analítica. Algumas escolas e instituições adotam esta coleção como livro didático, outras sugerem essa bibliografia como livro de apoio para estudos extra classe.

Na figura 1 temos um recorte sobre intersecção entre duas retas, objeto do nosso estudo em questão, mostrando a abordagem didático-matemática deste livro.

II. Interseção de duas retas

35. Todo ponto de interseção de duas retas tem de satisfazer as equações de ambas as retas. Portanto, obtemos o ponto comum $P(x_0, y_0)$ a duas retas concorrentes resolvendo o sistema formado pelas suas equações:

$$(S)\begin{cases} r: a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0 \\ s: a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0 \end{cases}$$

36. Exemplo:

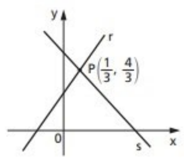
Obter a interseção das retas:

$r: x - y + 1 = 0$ e $s: 2x + y - 2 = 0$

Vamos resolver o sistema pelo método da adição:

$$\begin{array}{rl} & x - y + 1 = 0 \quad (1) \\ + & 2x + y - 2 = 0 \quad (2) \\ \hline & 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$(1) \quad \frac{1}{3} - y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$



Logo, a interseção de r com s é $P\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Figura 1. Intersecção entre duas retas - abordagem
Fonte: Iezzi (2013, pp. 35).

O autor desta obra aborda o tópico de intersecção entre duas retas de forma objetiva, exemplificada não de forma generalizada, mas com duas equações dadas especificamente para que se observe o comportamento gráfico das retas, o que pode facilitar a compreensão do aluno.

Já no que diz respeito ao tópico de equação da circunferência, o livro faz uma abordagem direta sobre a equação reduzida da circunferência (Figura 2), definindo-a a partir de seu centro e de seu raio, seguindo com a demonstração da equação normal a partir da equação reduzida e apresentando formas de reconhecimento de uma equação da circunferência e as relações entre ponto, reta e circunferência.

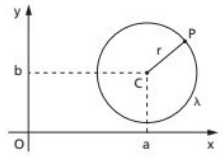
I. Equação reduzida

99. Definição

Dados um ponto C, pertencente a um plano α, e uma distância r não nula, chama-se **circunferência** o conjunto dos pontos de α que estão à distância r do ponto C.

circunferência $= \{P \in \alpha \mid PC = r\}$

100. Consideremos a circunferência λ de centro C(a, b) e raio r.



Um ponto P(x, y) pertence a λ se, e somente se, a distância PC é igual ao raio r.

$$\boxed{P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r}$$

Figura 2. Equação reduzida da circunferência - abordagem matemática
Fonte: Iezzi (2013, p. 118).

Neste volume apresenta-se uma abordagem didática com a teoria detalhada e demonstrada de maneira fácil e clara, seguida de exercícios de aplicação elementares que evoluem em seu grau de dificuldade gradativamente. As questões ao longo dos capítulos apresentam pouca contextualização, sendo perguntas de comando direto. Entretanto tais exercícios oferecem ao estudante variados modelos de situação para a prática do assunto.

Ao final do volume são oferecidos testes de vestibulares selecionados de diversas instituições e organizados de acordo com a sequência de tópicos estudados no livro, acompanhados das respostas correspondentes.

5.2. Livro 2: Conexões com a Matemática

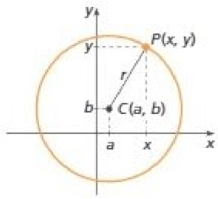
Este livro didático foi apresentado como proposta para o PNLD, sendo adotado por diversas escolas públicas para o triênio 2018-2020. Seu *layout* é mais dinâmico, a abertura de seus capítulos faz uma breve ilustração do conteúdo matemático associado à realidade, o que proporciona ao estudante um momento de leitura e reflexão. Na Figura 3 trazemos um recorte do tópico de equação reduzida da circunferência, mostrando a forma como o livro descreve o assunto.

A Figura 3 traz um recorte da abordagem sobre o tópico de Equação da Circunferência, onde esta inicia apresentando a circunferência enquanto lugar geométrico e segue com sequência parecida com a obra analisada anteriormente, mostrando a equação reduzida da circunferência por meio de seu centro e raio, seguindo para o desenvolvimento da equação geral e das posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e entre circunferências. Ao final do capítulo sobre circunferência o livro traz um texto sobre a Matemática do GPS, descrevendo de forma simples como se localiza uma pessoa sobre uma superfície esférica imaginária, seguido de um exercício de compreensão.

1.1 Equação reduzida da circunferência

Assim como no capítulo anterior obtivemos a equação da reta, podemos determinar a equação da circunferência.

A partir de sua definição como lugar geométrico, vamos estabelecer uma relação para um ponto qualquer $P(x, y)$ que pertence à circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r.



O ponto $P(x, y)$ pertence à circunferência se, e somente se, $d_{C,P} = r$.

Logo: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

A equação descrita acima é a **equação reduzida da circunferência** de centro $C(a, b)$ e raio r.

Figura 3. Equação reduzida da circunferência
Fonte: Leonardo (2016, pp. 138).

A abordagem didático-metodológica segue a sequência: demonstrações - exercícios resolvidos - exercícios propostos, onde suas atividades seguem uma ordem no nível das questões - das mais elementares às mais complexas, no entanto com pouca contextualização ou relação do assunto com a realidade. As demonstrações dos conceitos matemáticos são curtas e objetivos. Há uma seção no final de cada capítulo com exercícios complementares, onde algumas das questões são de vestibulares tradicionais e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Apesar da nota do editor declarar que esta coleção apresenta propostas de projeto e pesquisa, estas não aparecem em todos os capítulos. No volume 3, em particular, apareceu apenas em 3 de seus 9 capítulos e estas propostas não contemplam o conteúdo de Geometria Analítica.

Uma observação positiva é que o site da Editora Moderna disponibiliza a versão digital do livro, onde o professor ou o aluno pode folhear a obra, ler e fazer suas considerações. No entanto, o arquivo não está disponível para download. Outra observação referente a esta obra é o fato de o tópico sobre intersecção entre retas não aparecer no capítulo que se refere aos conceitos básicos e o estudo da reta e em nenhuma outra seção referente a este conteúdo. Verificamos que nos volumes anteriores este assunto também não se faz presente, sendo uma lacuna tanto no estudo da Geometria Analítica quanto no estudo de Funções do 1º grau.

Observou-se em ambas as obras que não há sugestão metodológica ao professor para implementar o uso da tecnologia no ensino de Geometria Analítica. Partindo desse ponto, trazemos o GeoGebra como ferramenta facilitadora para o ensino de Geometria Analítica, tendo em vista a abstração matemática presente neste conteúdo. A proposta é que o aluno possa construir, visualizar, manusear e verificar o comportamento das equações e entes geométricos dentro de um ambiente de geometria dinâmica.

5.3. Matrizes de referência: ENEM e SAEB

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) são avaliações de larga escala que permitem verificar os indicadores educacionais dos estudantes das escolas brasileiras; fazer análises sobre a qualidade da educação básica no país e nortear as políticas públicas para a educação com base em seus resultados. Destes exames, o ENEM tem o diferencial de possibilitar o acesso dos estudantes à universidade.

As matrizes de referência para a disciplina de Matemática, tanto do ENEM quanto do SAEB, reúnem um conjunto de competências e habilidades (descritores) que projetam conhecimentos esperados dos alunos em determinadas séries escolares, avaliando seu desempenho por meio de um teste padronizado.

Para a realização da prova do SAEB, no que tange ao tópico de Geometria Analítica, os descritores solicitam que os alunos saibam identificar os coeficientes de uma equação da reta, relacionem a determinação do ponto de intersecção de duas ou mais retas e reconheçam equações que representem circunferências.

Com relação ao ENEM, a Geometria Analítica aparece de forma sutil e interligada a outros tópicos da Matemática, devido ao caráter de inter-relação entre conteúdos e interdisciplinar do exame. As competências e habilidades deste tópico referem-se ao uso do conhecimento geométrico de espaço e forma para realizar a leitura e a interpretação da realidade e utilizar conhecimentos algébricos para a resolução de problemas.

A Geometria Analítica aparece nessas matrizes em problemas envolvendo espaço e forma unindo conceitos de álgebra e geometria dentro de um sistema de coordenadas, sendo a maioria de seus problemas concentrados em quatro tópicos: retas, circunferências, cálculo de distâncias e áreas. Neste trabalho abordamos dois desses tópicos que são retas e circunferências.

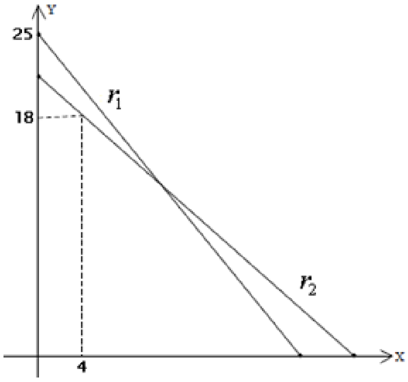
6. Análise a priori

Após a análise dos livros didáticos e das matrizes de referências, selecionamos dois itens aplicados nas avaliações externas (ENEM e SAEB), que utilizamos para construir as Situações didáticas 1 e 2, respectivamente, envolvendo o conteúdo de intersecção entre duas retas e equação da circunferência, com a utilização do *software* GeoGebra.

Como esta fase da ED permite elaborar as variáveis globais e locais, já definidas anteriormente, neste trabalho estamos interessados em investigar apenas as variáveis locais. Logo, focamos nos possíveis comportamentos e obstáculos que os alunos podem sentir durante as aplicações das situações didáticas. A seguir, apresentamos duas situações com os objetos matemáticos investigados neste estudo.

6.1. Situação Didática 1: Item da prova do SAEB

(SAEB) Um caixa eletrônico disponibiliza cédulas de R$ 20,00 e R$ 50,00. Um cliente sacou neste caixa um total de R$ 980,00, totalizando 25 cédulas. Essa situação está representada pelo gráfico abaixo.



Sabendo que r1 representa a reta de equação x + y = 25 e r2 a reta de equação 20x + 50y = 980, onde x representa a quantidade de cédulas de R$ 20,00 e y a quantidade de cédulas de R$ 50,00, a solução do sistema formado pelas equações de r1 e r2 é o par ordenado:

A. (8, 17) B. (9, 16). C. (7, 18). D. (11, 14). E. (12, 13).

Contexto: A situação proposta traz de forma contextualizada um problema que pede ao aluno que determine o ponto de interseção de duas retas dentro de um problema.

Objetivo do problema: O aluno precisa perceber que para resolver o problema ele precisará saber que o ponto de intersecção entre duas retas pode ser encontrado por meio da resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

Hipótese didática: O aluno precisa construir as retas dentro do plano cartesiano utilizando o GeoGebra e, em seguida, manuseá-las na busca da visualização do ponto de intersecção, a fim de solucionar o problema.

Situação de ação: O aluno terá o primeiro contato com o problema, onde fará uma leitura atenta do enunciado e do gráfico apresentado, buscando em seus conhecimentos prévios uma forma de solucioná-lo.

A partir da análise do problema, espera-se que o aluno relacione as equações das retas fornecidas com o esboço do gráfico, percebendo a associação entre as variáveis em questão. Ou seja, ele deve notar que a variável “x” representa a quantidade de notas de R$ 20,00 e a variável “y” representa a quantidade de notas de R$ 50,00 por meio da inferência dos dados presentes no enunciado.

Situação de formulação: Esta fase destaca-se pela troca de informações (escritas ou orais) entre os alunos e o meio, formulando suas ideias e expondo-as de modo verbal associada à construção de estratégias para solucionar o problema. Sugere-se que o professor, por meio da mediação, oriente a construção de cada reta utilizando o aplicativo do GeoGebra no celular, como mostra a Figura 4.

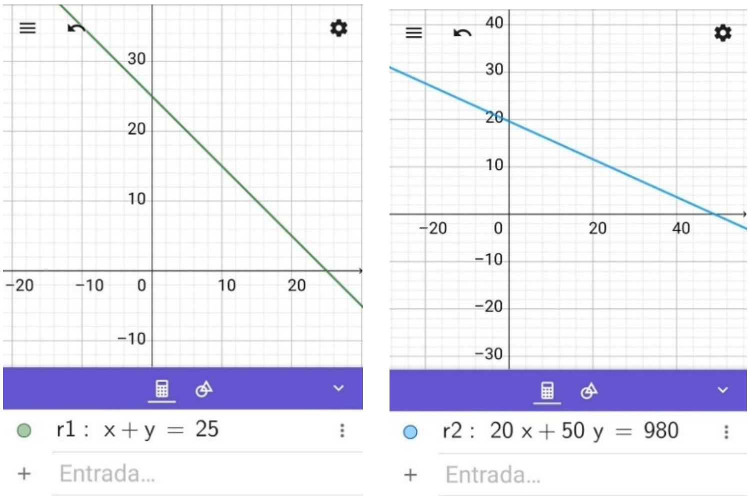


Figura 4. Construção das retas r1 e r2.
Fonte: Elaborado pelos autores.

Situação de Validação: Esta é a fase em que o aluno expõe as estratégias construídas nas etapas anteriores e busca validar a solução do problema proposto. Então, a partir da construção no GeoGebra, esperamos que os alunos movimentem as retas e visualizem o ponto de intersecção entre elas. Isto é, que eles manuseiem esta construção em prol de encontrar o par ordenado que representa o ponto em comum. Na Figura 5, encontramos uma possível solução encontrada pelos alunos.

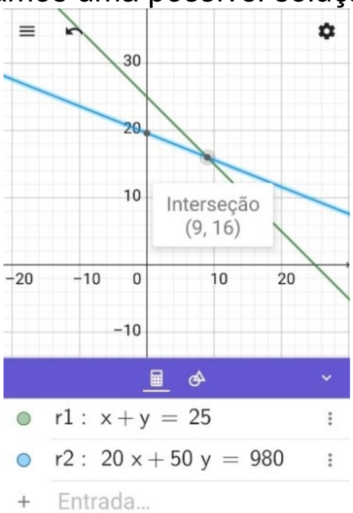


Figura 5. Ponto de intersecção entre as retas r1 e r2.
Fonte: Construído pelos autores.

A Figura 5 traz a representação gráfica das retas e seu ponto de intersecção, a lei de formação dessas equações e seus coeficientes lineares, trazendo possibilidades de visualização e, consequentemente interpretação desses elementos. Acreditamos que neste momento ocorrerá a transposição didática do assunto, pois, de acordo com Silva e Abar, “O processo da transposição didática se desenvolve em diferentes etapas, pois se inicia com o conhecimento científico, caminha para os textos pedagógicos e finaliza com o conhecimento da prática pedagógica” (Silva e Abar, 2016, pp. 5). Outra forma de validação da solução seria o aluno apresentar seu raciocínio de forma algébrica. Assim, o aluno, pode fazer uso da relação:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 20x + 50y = 980 \end{cases}$$

E encontrar como possível desenvolvimento os passos a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 20x + 50y = 980 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 25 \quad .(-20) \\ 20x + 50y = 980 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -20x - 20y = -500 \\ 20x + 50y = 980 \end{cases}$$

Ao solucionar este sistema pelo Método da Adição, obter:

$$30\,y = 480 \;\therefore y = 16$$

E ao continuar sua resolução, substituindo o valor de y em qualquer das duas equações (optaremos pela equação de r1), ter como resultado:

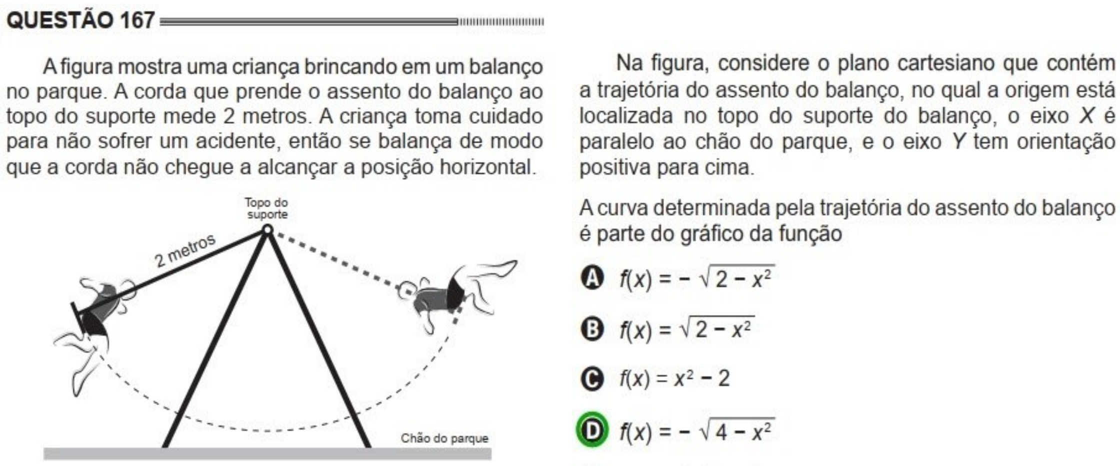
$$x + y = 25 \;\therefore x + 16 = 25 \;\therefore x = 9$$

Portanto, o aluno deverá encontrar como ponto de intersecção entre as retas r1 e r2, a solução do sistema que corresponde ao par ordenado (9, 16).

Situação de institucionalização: Momento em que os objetivos do professor com esta atividade se tornam claros. Com base nas situações encontradas pelos alunos, o professor deve apresentar o conceito formalizado presente no livro didático, que neste caso, usaremos a definição do livro Fundamentos da Matemática Elementar[1].

> Todo ponto de intersecção de duas retas tem de satisfazer as equações de ambas as retas. Portanto, obtemos o ponto comum P(x0, y0) a duas retas concorrentes resolvendo o sistema formado pelas suas equações.

6.2. Situação didática 2: ENEM 2014 - prova amarela



QUESTÃO 167

A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.

Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo *X* é paralelo ao chão do parque, e o eixo *Y* tem orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função

A. $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$

B. $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

C. $f(x) = x^2 - 2$

D. $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

E. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Figura 6. Questão 167, ENEM 2014, prova amarela
Fonte: Prova do ENEM 2019, prova amarela - segundo dia.

[1] Esta definição se encontra em (Iezzi, 2013, pp. 35).

Contexto - A situação proposta traz um modelo de balanço que descreve uma trajetória que pode ser representada pela equação de uma circunferência, a partir da hipótese de que a trajetória completa forma um arco de 360º.

Objetivo do problema - O objetivo da questão é que o aluno reconheça os elementos gráficos presentes no desenho para que ele formule um modelo matemático que descreve essa trajetória.

Hipótese didática - O aluno precisa construir a equação da circunferência que representa a trajetória do balanço utilizando o GeoGebra e, em seguida, manuseá-la na busca da visualização do intervalo solicitado a fim de solucionar o problema.

Situação de ação: O aluno fará uma leitura minuciosa do problema, buscando em seu entendimento reconhecer os elementos apresentados, por meio de associações entre conhecimentos previamente estudados, tentando enxergar que a trajetória do balanço forma parte de uma circunferência.

Situação de formulação: Nesta fase, o estudante deve identificar as variáveis (o centro e o raio da circunferência) que compõem graficamente o problema apresentado, trocando informações com o meio e com os colegas e estabelecendo hipóteses para solucionar o problema de forma organizada. Então, esperamos que os alunos interpretem o desenho e façam um rascunho da circunferência em seu caderno ou usando o GeoGebra.

Um resultado possível para representar a trajetória completa do balanço no GeoGebra é mostrado na Figura 7.

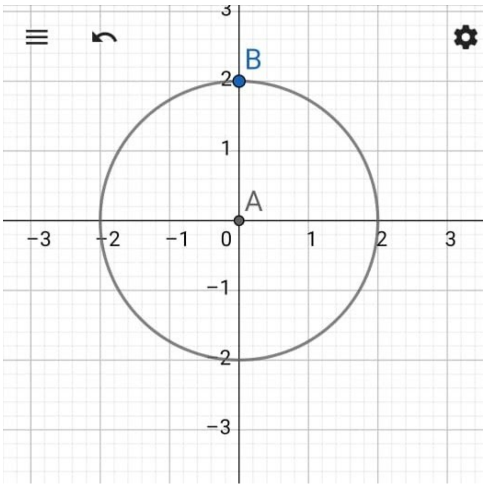


Figura 7. Esboço da trajetória completa do balanço
Fonte: Construído pelos autores.

A partir desta construção esperamos que o aluno identifique o topo do suporte como a origem do plano cartesiano (0,0) e o eixo das abscissas (x) sendo a linha imaginária que passa por aquele ponto em posição horizontal, e, da mesma forma, uma linha vertical passando pelo topo do suporte sendo o eixo das ordenadas (y).

Ainda de acordo com a Figura 7, almejamos que o aluno identifique a equação geral da circunferência, sendo ela: $x^2 + y^2 = 4$, para que ele possa ir além, pois a trajetória é delimitada por apenas uma parte dessa circunferência, ou seja, um arco que compreende o 3º e o 4º quadrantes do plano cartesiano.

Após a visualização da circunferência e a verificação de que para solucionar o problema é necessário apenas um arco, o aluno tem a possibilidade de construir a função referente à trajetória, como está sendo solicitado na questão.

Situação de validação: Neste momento, o estudante chega à construção de um modelo matemático que representa a solução do problema, mas cabe a ele apresentar este modelo e justificar o porquê dessa criação, com argumentos algébricos e geométricos que comprovem que sua resposta é válida. Como resultado geométrico, o aluno pode usar o GeoGebra para representar essa trajetória pois "com o auxílio do software GeoGebra há ênfase declarada pela visualização e percepção visual de propriedades e de elementos importantes para o desenvolvimento da heurística resolutiva em cada situação didática" (Alves e Dias, 2019, pp. 3) e, deste modo, observar que o intervalo que a descreve, encontra-se em quadrantes com pontos do tipo $(-x, -y)$ e $(x, -y)$, conforme a Figura 8.

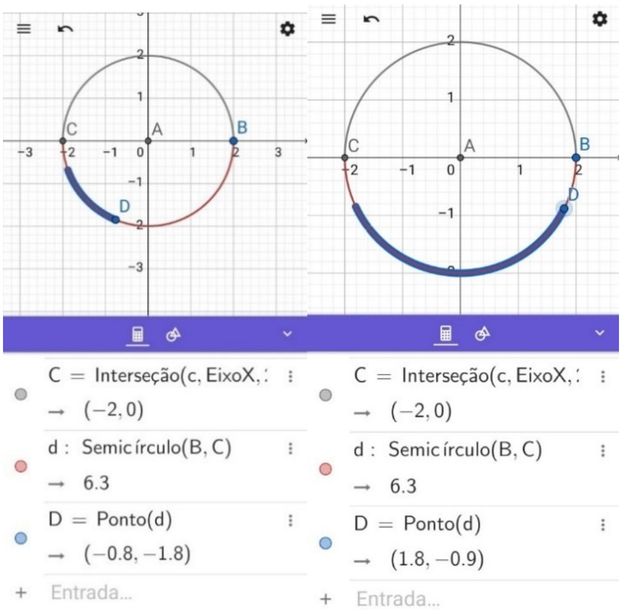


Figura 8. Esboço da trajetória do balanço
Fonte: Construído pelos autores.

A linha vermelha que forma o arco do ponto B ao ponto C descreve um esboço da trajetória do balanço, ao passo que o ponto D poderia ser interpretado como o próprio balanço. Portanto, observa-se que no decorrer da trajetória do ponto D, tanto no 3º quanto no 4º quadrante, a ordenada do ponto (y) tem sempre sinal negativo. A função que representa esta trajetória poderia ser escrita da seguinte forma:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

E com base na observação do sinal da variável y, que seria $f(x)$, temos que a função que descreve a trajetória no percurso descrito é dada pela lei de formação:

$$f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

Situação de institucionalização: Neste ponto, o professor apresenta aos estudantes a definição matemática acerca do objeto proposto no problema, que no caso é a equação da circunferência. Então, usaremos a definição apresentada no livro Fundamentos da Matemática Elementar[2].

Dados um ponto C, pertencente a um plano, e uma distância r não nula, chama-se circunferência os pontos de que estão à distância r do ponto C.

7. Considerações finais

Com base neste estudo percebemos que a utilização da Engenharia Didática associada a Teoria das Situações Didáticas nos possibilitou uma organização para uma pesquisa condizente com nossos objetivos, sendo constatada a relevância da articulação de metodologias para o ensino de Geometria Analítica com o software GeoGebra, possibilitando a construção de situações didáticas que pode melhorar o desenvolvimento deste tópico em sala de aula.

Vale ressaltar a importância das duas primeiras fases da ED (Análise preliminar e Análise a priori), pois estas nos permitiram elaborar propostas de situações didáticas com propriedade, permitindo-nos elaborar previsões atitudinais do aluno, o que serve suporte ao trabalho do professor, reduzindo as dificuldades e possíveis bloqueios cognitivos, epistemológico e didáticos presentes no ensino deste assunto.

Entendemos que é por meio da transposição didática que o trabalho do professor se norteia, desde a escolha do assunto, o recorte, suas partições e todo o formato de sua aula, bem como a relevância de subtemas do conteúdo, avaliando a viabilidade, contextualizando de forma eficiente e até pressupondo sobre como o aluno constrói o conhecimento. Para tanto, vimos como a Teoria das Situações Didáticas serve como uma bússola, tanto para o professor, que se torna um investigador em sua práxis e mediador da aprendizagem, quanto para o aluno, que passa a ser também um pesquisador, desenvolver a autonomia e construir seu conhecimento a partir das fases das situações adidáticas.

Deparamo-nos com dificuldades em encontrar propostas metodológicas para o conteúdo abordado com viés tecnológico nos livros analisados, o que nos mostra a relevância do uso do GeoGebra no ensino de Geometria Analítica. Deste modo, esta pesquisa pode ser utilizada pelos professores como uma ferramenta para otimizar o ensino de Matemática, fornecendo suporte ao professor.

O uso de tecnologia para o ensino de Geometria Analítica é uma proposta relevante para a melhoria da assimilação deste conteúdo, visto que há a possibilidade do uso do celular, que pode ser utilizado em diversos ambientes, inclusive como atividade domiciliar. Também vale ressaltar a facilidade no manuseio do *software* GeoGebra, o que torna a aprendizagem significativa, proporcionando o desenvolvimento de habilidades para que o aluno se aproprie do conteúdo de forma autônoma e eficiente.

[2] Esta definição se encontra em (Iezzi, 2013, pp. 118).

Bibliografía

Abar, C A. A. P. (2020). A Transposição Didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo,* 9(1), 59-75.

Abar, C. A. A. P. (2020). Teorias da Transposição Didática e Informática na criação de estratégias para a prática do professor com a utilização de tecnologias digitais. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 5(1), 29-45.

Almouloud, S. A.; Coutinho, C. Q. S. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, 3(1), 62-77.

Alves, F. R. V.; Dias, M. A. (2019) Engenharia Didática para a Teoria do Resíduo: Análises Preliminares, Análise a Priori e Descrição de Situações-Problema. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas,* 10(1), 2-14.

Artigue, M. (1996). Engenharia didáctica. In: BRUN, Jean (Org.). *Didáctica das matemáticas***.** Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, pp. 193-217.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas:* conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática.

Camilo, A. M. S.; Alves, F. R. V.; Fontenele, F. C. F. (2020). A Engenharia Didática articulada à Teoria das Situações Didáticas para o ensino da Geometria Espacial. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*,16(59), 64-82.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique:* du savoir savant au savoir enseigné. Paris: Ed. La pensée Sauvage.

Díaz-Urdanetta, S.; Kalinke, M. A.; Motta, M. (2019). A transposição didática na elaboração de um objeto de aprendizagem no GeoGebra. *#tear - Revista de Educação, Ciência e Tecnologia*, 8(2), 1-12.

Gálvez, G. (1996). A Didática da Matemática. In: Parra, Cecília.; Saiz, Irma. (Orgs.). *Didática da Matemática:* Reflexões Psicopedagógicas. Tradução de: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed.

Halberstadt, F. F. (2015). *A aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio e suas representações semióticas no Grafeq.* (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física), Universidade Federal de Santa Maria - UFSM, Santa Maria, 2015.

Iezzi, G. (2013). *Fundamentos de Matemática Elementar 7***.** 6. ed. São Paulo: Atual Editora.

Leivas, J. C. P.; Gobbi, J. A. (2014). O software GeoGebra e a Engenharia Didática no estudo de áreas e perímetros de figuras planas. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologias*, Curitiba, 7(1), 182-199.

Leonardo, F. M. (Org.). (2016). *Conexões com a Matemática***.** 3. ed. São Paulo: Moderna.

Polidoro, L. F.; Stigar, R. (2010). A Transposição Didática: a passagem do saber científico para o saber escolar. *Ciberteologia - Revista de Teologia & Cultura,* São Paulo, 27, 153-159.

Pommer, W. M. (2008). *Brousseau e a ideia de Situação Didática*. Seminários de Ensino de Matemática/ FEUSP.

Santos, A. A.; Alves, F. R. V. (2017). A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. *Revista Acta Scientiae*, Canoas, 19(3), 447-465.

Silva, H. N.; Abar, C. A. A. P. (2016). A utilização do GeoGebra na reconstrução de atividades do imagiciel. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2016. *Anais…* São Paulo. Recuperado em 21 julho, 2020, de http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6064_2835_ID.pdf.

Teixeira, P. J. M.; Passos, C. C. M. (2013). Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. *Revista Zetetiké*, FE/Unicamp, 21(39), 155-168.

Autores:

Renata Teófilo de Sousa: Especialista em Ensino de Matemática (UVA), Qualificação em Ensino de Matemática no Estado do Ceará (UFC) e Didática e Metodologias Ativas na aprendizagem (UniAmérica). Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). E-mail: rtsnaty@gmail.com.

Italândia Ferreira de Azevedo: Mestre em Ensino de Matemática pelo Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE). Professora da rede estadual de ensino do Ceará. E-mail: italandiag@gmail.com.

Francisco Régis Vieira Alves: Mestre em Matemática Pura pela Universidade Federal do Ceará (UFC) e em Educação, com ênfase em Educação Matemática, pela UFC. Doutor, com ênfase no ensino de Matemática pela UFC. Professor Titular do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do IFCE. E-mail: fregis@ifce.edu.br.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-14

Comprensión de los conceptos probabilísticos de un estudiante ciego: contribuciones de herramientas de mediación e interacción

Jaqueline A. Foratto Lixandrão Santos y Rute Elizabete S. Rosa Borba

Fecha de recepción: 07/07/2020
Fecha de aceptación: 18/05/2021

Resumen	En este trabajo, de educación inclusiva, abordamos el aprendizaje de probabilidad de un estudiante ciego. Se le presentaron dos situaciones problemáticas que involucran herramientas de mediación y probabilidad; además, hubo interacción entre el estudiante y la investigadora. Esta investigación confirma un estudio preliminar en el que se muestra que el estudiante tiene nociones de aleatoriedad y capacidad de definir elementos del espacio muestral, cuantificar y comparar probabilidades en situaciones simples y compuestas. La intervención didáctica presentada indica que la construcción del espacio muestral es un desafío para el estudiante, sin embargo, las herramientas de mediación y la intervención de la investigadora contribuyen a que se realice las tareas. **Palabras clave**: educación matemática inclusiva, discapacidad visual, probabilidad, intervención didáctica.
Abstract	In this paper, on inclusive education, we address the probability learning of a blind student. He was presented to two probability problems and to mediation tools and, in addition, there was interaction between the student and the researcher. This research confirms a preliminary study in which it is shown that the student has notions of randomness and the ability to define elements of the sample space, quantify and compare probabilities in simple and compound situations. The didactic intervention presented indicates that the construction of the sample space is a challenge for the student, however, the mediation tools and the intervention of the researcher contributed to the tasks being carried out. **Keywords**: inclusive mathematics education, visual impairment, probability, didactic intervention.
Resumo	Neste trabalho, sobre educação inclusiva, abordamos a compreensão de probabilidade de um aluno cego. Ele foi apresentado a duas situações problemas de probabilidade e ferramentas mediadoras; além disso, houve interação entre o aluno e a pesquisadora. Esta pesquisa confirma um estudo preliminar em que se mostra que o aluno possui noções de aleatoriedade e capacidade de definir elementos do espaço amostral, quantificar e comparar probabilidades em situações simples e compostas, utilizando ferramentas de mediação. A intervenção didática apresentada indica que a construção do espaço amostral é um desafio para o aluno, porém, as ferramentas de mediação e a intervenção da

pesquisadora contribuíram com a realização das tarefas propostas.
Palavras-chave: educação matemática inclusiva, deficiência visual, probabilidade, intervenção didática.

1. Introducción

Los debates han ido ganando terreno en diferentes sectores de la sociedad mundial y han provocado un movimiento hacia la inclusión, ya que la igualdad de derechos y acceso es de todas las personas (ONU, 1948). La "Declaración Mundial sobre Educación para Todos" (UNESCO, 1990) define que "es necesario tomar medidas para garantizar la igualdad de acceso a la educación para las personas con cualquier tipo de discapacidad, como parte integral del sistema educativo"; Para ello, la "Declaración de Salamanca" (ONU, 1994) presenta lineamientos relacionados con los principios, políticas y prácticas de la Educación Especial a nivel regional, nacional e internacional. En Brasil, país donde se realiza esta investigación, la "Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência", conocida como el Estatuto para las Personas con Discapacidad (Senado Federal, 2015), el "Plano Nacional de Educação" (Presidência da República, 2014), la "Base Nacional Comum Curricular - BNCC" (Ministério da Educação, 2017), así como los decretos, resoluciones, leyes y otros documentos tratan sobre la educación inclusiva y sus demandas en el país. En el artículo 27 del Estatuto para las Personas con Discapacidad se reconoce el derecho de las personas con discapacidad a la educación y aclara que es deber del Estado, la familia, la comunidad escolar y la sociedad asegurar el sistema educativo inclusivo "en todos los niveles y el aprendizaje permanente, para lograr el máximo desarrollo posible de sus talentos, habilidades físicas, sensoriales, intelectuales y sociales, de acuerdo con sus características, intereses y necesidades de aprendizaje" (Senado Federal, 2015, p. s/n, traducción nuestra).

Para garantizar el aprendizaje de las personas con discapacidad, también se crearon pautas para cursos de profesorado en Educación Básica (Senado Federal, 2015) que indican la necesidad de estudios relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de estudiantes con discapacidad en cursos como la formación inicial y continua del profesorado y el estudio obligatorio de la Lengua de Signos Brasileña (Libras), lengua utilizada en la comunicación con personas sordas.

La investigación desarrollada por Alves (2015) encontró que los estudiantes con discapacidad visual, enfoque de este estudio, indica que estamos avanzando hacia un contexto más equitativo, pero parece que la exclusión sigue presente, especialmente con las bajas expectativas de la sociedad sobre sus capacidades.

Una investigación realizada por Lambert, Sampaio, Mauss y Scheiber, (2004) indica que las personas ciegas, influenciadas por las experiencias táctiles, pueden generar imágenes mentales, así como las personas sin discapacidad visual. Los estudios de Gil (2000) indican que es a través del lenguaje y la exploración táctil que personas con discapacidad visual obtiene información para formar conceptos. Así, los sistemas háptico, fonatorio y auditivo son sentidos mediadores.

En general, las normas son importantes para el contexto educativo, ya que es a través de ellas que se desarrollan y organizan acciones inclusivas, sin embargo, su ejecución no garantiza que la educación sea de calidad y que todos los estudiantes estén efectivamente incluidos en los programas, procesos de enseñanza y aprendizaje. Para esto, es importante que las investigaciones se desarrollen y se difundan, de modo que contribuyan al trabajo inclusivo en el aula. Según Vieira (2010), la práctica de la inclusión “implica el reconocimiento de las diferencias de los estudiantes y la concepción de que el aprendizaje se construye en cooperación desde la actividad del sujeto frente a las demandas del entorno, con el sujeto del conocimiento como sujeto autónomo” (p 66 – traducción nuestra).

Según Borba (2019, p. 08 – traducción nuestra), la BNCC

> “afirma su compromiso con los estudiantes con discapacidad y aboga por prácticas pedagógicas inclusivas y diferenciación curricular. Existe un amplio acuerdo con respecto a la diversidad, pero las instituciones y entidades comprometidas con una escuela inclusiva y democrática rechazan el uso de este concepto de diferenciación. De hecho, lo que se busca es la implementación de adaptaciones y ajustes curriculares, cuando sea necesario, y no currículos diferentes (recortados y empobrecidos) para quienes tienen necesidades educativas específicas. Estos deben tener garantizado el acceso al currículum común, pero basados en estrategias que respondan a sus especificidades, y no en un currículo diferenciado que deje espacio para actividades facilitadas, infantilizadas, segregadas y otras formas de didáctica excluyente” (Borba, 2019, p. 08 – traducción nuestra).

La probabilidad es un concepto presente en la BNCC (Minstério da Educação, 2017) y su estudio en la Escuela Primaria se centra en desarrollar la noción de aleatoriedad, en realizar

> “experimentos aleatorios y simulaciones para confrontar los resultados obtenidos con probabilidad teórica y probabilidad frecuentista. La progresión del conocimiento se realiza mejorando la capacidad de enumerar los elementos del espacio muestral, que también se asocia a los problemas de conteo” (Minstério da Educação, 2017, p. 274 – tradución nuestra).

La BNCC (Minstério da Educação, 2017) también enfatiza que los estudiantes “comprenden que existen ciertos eventos, eventos imposibles y eventos probables” (p. 274 – traducción propia). Se destaca la importancia de que los estudiantes verbalicen, eventos que involucran azar, los resultados que pudieron haber sucedido en oposición a lo que realmente sucedió, iniciando la construcción del espacio muestral. Según la investigación ya realizada (Santos, 2010), los estudiantes tienen muchas dificultades para aplicar nociones probabilísticas, una de ellas está relacionada con palabras y expresiones utilizadas en la vida cotidiana que “están cargadas de significados y medidas, (re) interpretadas y entendidas de diferentes formas en un mismo contexto” (Santos, 2010, p. 112, traducción propia). Comprender la probabilidad es muy importante, ya que se utiliza para tomar de decisiones, comprender la realidad, formar un pensamiento crítico, entre otras habilidades (Santos, Borba, 2019). La necesidad de desarrollar el pensamiento probabilístico también se aplica a los estudiantes con discapacidad, ya que tienen derechos y deberes como cualquier otro ciudadano (ONU, 1948) y necesitan esta forma de pensar para su plena inclusión en la sociedad.

Considerando lo expuesto anteriormente, organizamos nuestro trabajo basado en discusiones sobre educación matemática inclusiva, la enseñanza de la matemática a estudiantes ciegos y la enseñanza de la probabilidad. Por lo tanto, nuestro objetivo es analizar nociones de aleatoriedad, definición de espacio muestral, cuantificación y comparación de probabilidades de un estudiante ciego, de 16 años, alumno cursando noveno grado de una escuela pública regular[1] en Brasil.

2. Marco teórico

En los últimos años, hemos notado un aumento en el número de investigaciones relacionadas con la educación matemática inclusiva. Entre las investigaciones, destacamos a, Fernandes y Healy (2008), Healy y Fernández (2011), Fernandez del Campo (1997), Marcone (2015), López-Mojica y Sandoval (2019), Vita, Magina y Cazorla (2015) y Santos y Borba (2019). Estas nos proporcionan diferentes puntos de vista, incluidos normativos, como el señalado por Marcone (2015) quien considera la discapacidad como "un invento con un ideal de normalidad como parámetro, a menudo impuesto por la violencia simbólica" (p. 30, traducción nuestra). El autor antes mencionado piensa que la discapacidad es una experiencia, "como un lugar donde todos estamos sujetos a pasar, no una condición a priori" (p. 30, traducción nuestra).

Los estudios de Vygotski (1997), otrora, proporcionaran informaciones importantes sobre el aprendizaje de los estudiantes con discapacidades. Para el investigador, son las implicaciones sociales y culturales las que determinan la individualidad de los niños, no la discapacidad; entonces, el problema no es biológico sino social. Afirma que el deseo de superación impulsa a la persona con discapacidad y, en consecuencia, los desarrolla. También critica los parámetros de análisis del desarrollo cuantitativo de las personas con discapacidad. Para el autor, la discapacidad sensorial, la falta de sentido, no es un obstáculo para el aprendizaje escolar, sino más bien el uso de formas inapropiadas de la enseñanza. Afirma que la relación del hombre con el mundo no es directa, sino mediada y compleja. Considera que el lenguaje no solo tiene la función comunicativa, sino también la organización y el desarrollo de procesos de pensamiento, que están mediados por instrumentos y signos. Por lo tanto, sugiere que el trabajo pedagógico deba explorar varios sentidos.

Según Fernández del Campo (1996) “la falta .de visión no cierra las puertas a los aspectos matemáticos de la realidad” (p. 68). Sin embargo, esta situación modifica las rutas de acceso, pero no excluye la posibilidad de comprenderlos.

Los estudios de Fernandes y Healy (2008); Healy y Fernandes (2011) abordan la apropiación del pensamiento geométrico por estudiantes que no pueden recurrir a experiencias visuales con el uso de herramientas materiales. Las autoras señalan que el tacto puede contribuir más al aprendizaje de los estudiantes ciegos que al de los videntes, ya que la manipulación de manera gradual permite la identificación de propiedades matemáticas que puedan ocultarse cuando solo se visualiza el todo. También observaron que, al realizar actividades matemáticas con el uso de herramientas materiales, los estudiantes ciegos no pueden copiar directamente estrategias y gestos utilizados por videntes; pero la comunicación entre ellos les permite entender y procesar los problemas matemáticos.

[1] La escuela regular en Brasil es aquella que sigue la educación común, con niveles educativos y grupos de edad establecidos, alumnos con y sin discapacidad estudian juntos.

López-Mojica y Sandoval (2019) realizó un experimento para introducir temas de probabilidad en niños con discapacidad de segundo grado (8-10 años) de educación especial. Para ello, utilizaron situaciones problemáticas extraídas del libro de texto y utilizaron diversos materiales, como dados, fichas, tarjetas con numerales y otros. Los autores concluyen que "no solo es posible tratar la probabilidad en la educación especial, sino que es necesario brindar una formación matemática integral, es necesario promover el uso de esquemas compensatorios, ya que permiten desarrollar el pensamiento de los niños con discapacidades" (p. 100).

En Brasil hay pocos estudios realizados con la probabilidad y los estudiantes ciegos. Vita, Magina y Cazorla (2015) en una propuesta inclusiva relacionada con la probabilidad para estudiantes ciegos, encontraron que, usando un modelo táctil, los estudiantes ciegos pueden desarrollar conocimiento probabilístico. Similar, Santos y Borba (2019) indican que "los estudiantes ciegos pueden desarrollar conceptos de probabilidad, [...] cuando se insertan en un contexto dialógico, mediado por situaciones de enseñanza y herramientas materiales apropiadas" (p. 9, traducción nuestra).

Las investigaciones presentadas nos hacen reflexionar acerca de que los estudiantes ciegos pueden aprender matemáticas, así como los que pueden ver, siempre y cuando dispongan de los recursos didácticos accesibles. También indicaron que el lenguaje tiene un papel importante en la formación de conceptos. Además, algunos estudios relacionados con la enseñanza de la probabilidad apuntaron la necesidad de variación en contextos y herramientas materiales. Por lo tanto, también basados en datos del estudio anterior (Santos y Borba, 2019), presentamos en este texto una propuesta de intervención para profundizar los problemas referidos anteriormente.

3. Aspectos metodológicos

Este trabajo es parte de un estudio que tiene como objetivo analizar la comprensión de probabilidad por parte de un estudiante ciego a partir de intervenciones didácticas con el uso de herramientas materiales para resolver situaciones problemáticas. El estudiante que participa en este estudio, llamado ficticiamente Guilherme, es ciego congénito, tiene 16 años y es alumno del noveno grado de una escuela pública regular en una ciudad del interior del estado de Pernambuco (Brasil). En la clase, Guilherme generalmente participa como oyente y usa una regleta (instrumento de escritura a mano Braille) para sus notas.

En un estudio anterior (Santos y Borba, 2019), trabajamos con cuatro situaciones problemáticas y observamos que Guilherme tiene nociones de aleatoriedad y puede definir elementos del espacio muestral, cuantificar y comparar probabilidades en situaciones problemáticas utilizando herramientas de mediación, que se muestra en el Cuadro 1 y la Figura 1.

1. Sí colocamos una mini pelota de básquet y una de fútbol dentro de una bolsa, usando un guante para que no puedas diferenciarlas, ¿existe la posibilidad de sacar una pelota de básquet? Y ¿una de fútbol? ¿Cuál de las dos crees que retirará? ¿Cuál crees que es el más probable de irse?

Demanda: Aleatoriedad / **Herramientas materiales:** mini pelota de básquet, mini pelota de fútbol, bolsa y guantes.
2. Con dos mini pelotas de básquet y una de fútbol en una bolsa, ¿cuál es la probabilidad de correr una pelota de básquet al azar? ¿Y cuál es la probabilidad de retirar una pelota de fútbol?
Demanda: Cuantificación de probabilidades / **Herramientas materiales**: dos mini pelotas de básquet, una mini pelota de fútbol y una bolsa.
3. En el escaparate de una tienda de deportes hay unos contenedores con mini pelotas de básquet y de fútbol. Analiza las pelotas de cada recipiente.
Contenedor 1: una mini pelota de básquet y una de fútbol.
Contenedor 2: dos mini pelotas de básquet y una de fútbol.
Contenedor 3: una mini pelota de básquet y dos de fútbol.
Contenedor 4: dos mini pelota de básquet y dos de fútbol.
A. Suponiendo que retiras, sin identificar, una bola del contenedor 3. ¿Qué pelota probablemente retirarías? ¿Por qué?
B. ¿En cuál de los 4 contenedores tienes más posibilidades de retirar una pelota de futbol? Justifica tu respuesta.
C. ¿Sería más fácil sacar una pelota de básquet del contenedor 1 o del contenedor 2? Explica tú respuesta.
Demanda: Comparación de probabilidades / **Herramientas materiales:** contenedores, mini pelotas de básquet y de fútbol.
4. Si hay dos niñas, Ana y Bia, y dos niños, Carlos y Daniel, participando en un juego y dos de ellos se eligen al azar para iniciarlo, ¿qué es más probable que se junten dos niñas, dos niños o una niña y un niño?
Demanda: Espacio de muestreo y comparación de probabilidades / **Herramientas materiales:** círculos que representan las niñas y cuadrados que representan los niños. Ambas formas tenían recortes para diferenciar un niño de otro.

Cuadro 1. Situaciones problemáticas. **Fuente:** Santos y Borba (2019).

Figura 1. Herramientas materiales. **Fuente:** Santos, Braz y Borba (2020).

En las primeras situaciones problemáticas, relacionadas con las posibilidades de sacar las pelotas usando un guante, para no identificar las pelotas, Guilherme las realizó sin grandes dificultades. Sin embargo, para resolver la última situación problemática, en el que tuvo que determinar las posibilidades de dibujar parejas de estudiantes en un total de cuatro utilizando como material los círculos y cuadrados con diferentes marcas, notamos dificultad por parte del alumno para construir el espacio muestral con los materiales presentados. Incluso delante de las dificultades, el estudiante resolvió el problema con la intervención de la investigadora en un momento de interacción entre ambos.

> **Investigadora:** Las parejas que se formaron fueron: Ana y Bia, Ana y Carlos, Bia y Daniel. Centrémonos en un niño, por ejemplo, Ana, e ella se junto con Bia y con Carlos, ¿Ana podría ser parejae unir de otro niño?
>
> **Guilherme:** ¿Ana se junto con Carlos?
>
> **Investigadora:** Sí.
>
> Guilherme estaba manejando los materiales y dijo que estaría con Daniel.
>
> **Investigadora:** ¿Podría unierse con alguien más o yá se ha emparejado todos?
>
> **Guilherme:** Se ha emparejado con todos.
>
> **Investigadora:** Pensemos ahora en Bia, solo se ha unido con Ana. ¿Podria emparejarse con otro niño?
>
> **Guilherme:** Sí, con Carlos.
>
> **Investigadora:** ¿Todavía puede juntarse con otros niños?
>
> Con la ayuda de la investigadora, Guilherme tocó las parejas de niños que ya se habían agrupado, pero aun así, no respondió. La investigadora preguntó:
>
> **Investigadora:** Bia se juntó con Ana, Carlos y Daniel. ¿Había alguien más?
>
> **Guilherme:** No.
>
> **Investigadora**: ¿Vamos a pensar en Carlos? (Santos, Borba, 2019, p. 08)

Así, Guilherme y la investigadora siguieron hablando hasta agotar todas las posibilidades y se construyó el espacio de muestreo necesario para el análisis probabilístico, que luego se realizó sin mayores dificultades.

Este hecho indica que, además de las tareas y las herramientas de mediación, también es necesario analizar las interacciones entre los participantes, ya que puede ser un factor fundamental para que el alumno comprenda el concepto matemático propuesto.

Tales observaciones nos llevaron a pensar en ampliar la investigación, con situaciones problemáticas relacionadas con otros contextos, pero con las mismas características que el estudio anterior; con otras herramientas mediadoras (esferas, cubos y tableros formados con cajas de huevos) y con interacciones que involucraron preguntas hechas por la investigadora a partir de las respuestas y acciones presentadas por el estudiante.

Esta investigación involucra dos situaciones problemáticas en un contexto relacionado con la vida cotidiana de las personas y la escuela. Además, se contemplan las siguientes demandas de probabilidad presentadas por Bryant y Nunes (2012): la comprensión *de la aleatoriedad,* que significa comprender su naturaleza, consecuencias y uso en la vida cotidiana; la *encuesta del espacio muestral*, que busca lograr el análisis/reconocimiento del espacio muestral (conjunto de todos los eventos posibles) antes de calcular las probabilidades; la *cuantificación de probabilidades*, a través de la representación decimal, fracciones o tasa de porcentaje; y la *comparación de probabilidades*, al comparar las probabilidades de dos o más eventos e identificar cuál es el más probable.

En secuencia, presentamos en el Cuadro 1 y la Figura 1 las situaciones-problema de este estudio y las herramientas de mediación utilizadas para su resolución.

1. ¿Si una pareja quiere tener dos hijos, ¿cuál es la probabilidad de que sea un niño y una niña o ambos del mismo sexo?
2. Una mujer está embarazada de trillizos ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean del mismo sexo?

Cuadro 2. Situaciones problemáticas del estudio **Fuente.** Elaboración propia.

Figura 2. Herramientas de mediación del estudio. **Fuente.** Material de la investigadora

Las herramientas de mediación tienen características multimodales y multisensoriales. Se pensó en una manera fácil para que el estudiante pueda diferenciar el género masculino (cubos) del género femenino (esferas), que están relacionadas con las figuras utilizadas en el estudio de la genética (círculos y cuadrados). Para su organización, se utilizaron cajas de huevos, que contribuyen con la identificación y el conteo de posibilidades; además, se colocó la mayor cantidad de objetos (cubos y esferas) y celdas (cajas de huevos) para que el alumno pueda reflexionar sobre el agotamiento, o no, de las posibilidades, por tener en cuenta que todavía hay objetos y celdas disponibles. Al usar materiales en la cantidad exacta, corremos el riesgo de que el estudiante se quede sin posibilidades para reflexionar o no esté seguro de que estas son realmente todas las posibilidades.

La interacción se desarrolla con el alumno a lo largo del proceso:

(1) Presentación de herramientas materiales: antes de comenzar a resolver los problemas, se le presentaron los materiales al alumno y se le pidió que describiera sus características, similitudes y diferencias entre ellos. Este momento es importante para ver que la herramienta material contribuye para que el alumno pueda comprender el problema y reflexionar sobre él;

(2) Lectura de situaciones problemáticas: las situaciones problemas se presentan oralmente a los estudiantes, se puede escribir en Braille (sistema de lectura y escritura táctil para personas ciegas inventado por el francés Louis Braille).

(3) Diálogos establecidos entre la investigadora y el estudiante: a partir de las respuestas y construcciones del estudiante, la investigadora propone preguntas, con el objetivo de intermediar y compartir conceptos probabilísticos.

4. Desarrollo de la propuesta

Guilherme no tuvo dificultades para identificar los materiales, incluso describió la cantidad de líneas y columnas que estaban en las bandejas (cajas de huevos) y entendió la situación-problema que se le presentó. Cuando se enfrentó al primer problema, Guilherme dijo que no era posible identificar el sexo de los niños antes del nacimiento sin someterse a pruebas. También dijo que podrían ser mujeres u hombres. Cuando se le preguntó "Si una pareja quiere tener dos hijos ¿cuáles son las posibilidades?", respondió que podrían ser "dos niñas", "dos niños" y "un niño y una niña", en este momento la investigadora le preguntó:

Investigadora	*¿No hay otras posibilidades?*
Guilherme	*No.*
Investigadora	*Una niña y un niño ¿no es una posibilidad diferente que un niño y una niña?*
Guilherme	*Sí, podría [parecía no estar convencido].*
Investigadora	*Imaginemos la siguiente situación: el niño es el primer hijo y la niña la segunda, por lo que el niño es el "mayor" y la niña es la menor y la situación opuesta, la niña es la "mayor" y el niño es el menor. ¿Estas no son otras posibilidades?*
Guilherme	*Si es.*

Tabla 1. Transcripción 1. Estudio anterior

Cada posibilidad mencionada por el estudiante fue registrada usando la caja de huevos. Al final, la investigadora le pidió a Guilherme que describiera todas las posibilidades registradas para comenzar la discusión sobre las probabilidades. Incluso habiendo identificado las posibilidades (niña/niña, niño/niño, niño/niña y niña/niño), Guilherme tuvo dificultades para responder a la siguiente pregunta: "si una pareja quiere tener dos hijos, ¿es probable que sean un niño y una niña o ambos del mismo sexo? La investigadora realizó nuevas intervenciones:

Investigadora	*Pensemos en las siguientes afirmaciones: "es más probable que sea un niño y una niña", "es más probable que ambos sean del mismo sexo" o "las probabilidades son las mismas" ¿Cuál crees que se aplica a esta situación?*
Guilherme	*Es lo mismo.*
Investigadora	*¿Cuántas son las posibilidades de que sean del mismo sexo?*
Guilherme	*Tengo dos de cuatro.*
Investigadora	*Sí.*
Guilherme	*Entonces, tengo el 50%.*

Tabla 2. Transcripción 2. Problema-situación 1

Las herramientas de mediación demostraron ser extremadamente importantes para la construcción y el registro del espacio muestral, construido con el apoyo del razonamiento de la investigación combinatoria. Así como los estudios realizados por Vita, Magina y Cazorla (2015). La intervención realizada por la investigadora, a través del cuestionamiento y la recuperación de ideas, se consolidó como un instrumento mediador en el desarrollo de conceptos probabilísticos y solución de conflictos. Dichos resultados concuerdan con los estudios de Gil (2000) que indican que la persona con discapacidad visual obtiene información para formar conceptos a través del lenguaje y exploración táctil.

En segunda situación-problema se agregó un niño más al contexto, sin embargo, el hecho de que Guilherme haya experimentado un contexto similar en la situación anterior fue un facilitador. Mostró mayor seguridad al dar sus respuestas al momento en que se le preguntó sobre las posibilidades de este problema, dijo que podrían ser "tres niños, tres niñas, dos niños/ una niña y dos niñas/ un niño". Cuando se le preguntó acerca de otras posibilidades quedó en dudas. La investigadora comenzó la intervención dirigiendo las manos del estudiante sobre la última posibilidad mencionada (dos niñas y un niño).

Investigadora	*Cuando presentaste esta posibilidad, entiendes que las dos niñas nacieron primero y el niño después, ¿verdad?*
Guilherme	*Si.*
Investigadora	*¿El orden podría haber sido diferente?*
Guilherme	*No lo sé.*
Investigadora	*¿El niño podría haber nacido primero y luego las dos niñas?*
Guilherme	*Sí.*
Investigadora	*Entonces, ¿esta posibilidad es diferente a la anterior o no?*
Guilherme	*Sí.*
Investigadora	*Ya hemos registrado dos niñas y un niño, un niño y dos niñas. ¿Hay otra forma de organizar esta combinación?*
Guilherme	*Sí: una niña, un niño y otra niña.*
Investigadora	*¿Hay otras posibilidades con esta combinación?*

Guilherme	*Creo que no.*
Investigadora	*Volvamos a analizar esta otra posibilidad que se registró "dos niños y una niña". ¿Hay otras posibilidades? [Pasó algún tiempo jugando con las combinaciones, hasta que se formaron otras posibilidades].* *¿Cuántas posibilidades construimos al total?*
Guilherme	*Ocho.*

Tabla 3. Transcripción 3. Problema-situación 2

Después de determinar el espacio muestral, Guilherme pudo responder que la probabilidad de que los niños fueran del mismo sexo era dos de ocho (25%) y que eran de diferentes sexos 75% y por lo tanto se concluyó que lo más probable es que sean de diferentes sexos.

Las discusiones mostraron que la construcción del espacio muestral era un desafío para Guilherme, sin embargo, las herramientas de mediación y la intervención de la investigadora contribuyeron a que él realizara esta tarea. En cuanto a la cuantificación y comparación de probabilidades, esta tarea le pareció más fácil, ya que no tenía dificultades para realizar cálculos mentales, como el porcentaje. Así, como señalan Fernandes y Healy (2008); Healy y Fernandes (2011) el tacto puede contribuir al aprendizaje de los estudiantes ciegos, pero cuando no es suficiente, la comunicación se vuelve importante para comprender y procesar los problemas.

Lo expuesto muestra algunas dificultades de aprendizaje por parte del alumno, por ejemplo, el sesgo de la equiprobabilidad; los casos niño-niña y niña-niño se consideran por separado. Pero se vuelve a presentar la dificultad para el caso de ocho combinaciones posibles en el cual tampoco se logra el conteo de casos de manera adecuada sin la intervención de la investigadora.

5. Conclusiones y recomendaciones

Como se mencionó anteriormente, hay pocos estudios referentes a las probabilidades con estudiantes ciegos (López-Mojica Sandoval (2019); Vita, Magina y Cazorla (2015); Santos y Borba (2019). Sin embargo, este sesgo de equiprobabilidad en niños ha sido encontrado por investigadores (Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, 2001), pero no con discapacidad. Nuestro estudio sugiere que el concepto de espacio del museo y la probabilidad asociada pueden superarse junto con los estudiantes videntes y con discapacidad visual.

En línea con el estudio ya realizado (Santos y Borba, 2019), las herramientas de mediación utilizadas en este demostraron ser significativas para la construcción del espacio muestral por parte del estudiante ciego. La funcionalidad del material para el estudiante ciego también fue algo que observamos, considerando que el estudiante podía construir y deconstruir su registro rápidamente, lo que no sería posible si se hiciera en una regleta. Este registro escrito podría hacerse en un segundo momento, después de la encuesta con el material disponible.

Las observaciones sobre las interacciones llevadas a cabo reflejan que no es posible predecir con seguridad qué debates se desarrollarán en la interacción, pero es importante que el investigador/maestro tenga en cuenta el enfoque que pretende discutir y los objetivos que pretende alcanzar. El diálogo debe llevarse a cabo de tal forma que el alumno no solo resuelva el problema, sino que también refleje y comprenda los conceptos involucrados en los debates llevados a cabo.

Tenemos la intención, en futuros estudios, de realizar un trabajo con la interacción entre estudiantes ciegos y videntes en contextos similares a los desarrollados en este estudio, considerando que pueda ayudar no solo al aprendizaje de los estudiantes ciegos, sino también al de otros estudiantes, ya que contribuye para que la educación sea verdaderamente inclusiva.

Respecto a la comprensión de los conceptos probabilísticos por parte de un estudiante ciego, creemos que la propuesta logró alcanzar los objetivos - analizar la comprensión de las demandas probabilísticas en intervenciones didácticas -, también resaltamos que el alumno tiene nociones de aleatoriedad y capacidad de definir elementos del espacio muestral, cuantificar y comparar probabilidades en situaciones simples y compuestas, pero tiene dificultad en la equiprobabilidad, por lo tanto, salientamos la importancia de estudios que involucren diferentes situaciones que favorezcan reflexiones e interpretaciones relacionadas con la probabilidad y con el uso de herramientas materiales.

6. Referencias bibliográficas

Alves, E. (2018). *Nenhum a menos na aula de matemática: representações sociais de inclusão de estudantes com deficiência visual e seus impactos na aprendizagem de razões trigonométricas.* Tese de doutorado. Universidade federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil.

Borba, R. (2019). A BNCC e outros documentos curriculares: reflexões e propostas de ensino de combinatória e de probabilidade na educação básica. In: *XIII Encontro Nacional de Educação Matemática.*1-13. https://docplayer.com.br/198193303-A-bncc-e-outros-documentos-curriculares-reflexoes-e-propostas-de-ensino-de-combinatoria-e-de-probabilidade-na-educacao-basica.html

Bryant, P., Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: a literature review.* Nuffield Foundation.

Cañizares, M., Batanero, C., Ortiz, J., Serrano, L. (2001). Influencia de la edad y rendimiento matemático sobre el sesgo de equiprobabilidad. *Zetetiké – CEMPEM - Unicamp*, 9 (1-2). 99-118.

Conselho Nacional da Educação. (2015). *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena* (RESOLUÇÃO Nº 2/2015). http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=17719-res-cne-cp-002-03072015&category_slug=julho-2015-pdf&Itemid=30192

Fernandes, S., Healy, L. (2008). Educação matemática e inclusão: abrindo janelas teóricas para a aprendizagem de alunos cegos. *Educação e Cultura Contemporânea,* 5 (10), 91-105.

Fernandez Del Campo, J. E. (1997). *La enseñanza de la Matemática a los ciegos*. (2a ed.). Madrid: ONCE.

Gil, M. (2000). *Deficiência visual.* Brasília: MEC/SEED.

Healy, L., Fernandes, S. (2011). *Relações entre atividades sensoriais e artefatos culturais na apropriação de práticas matemáticas de um aprendiz cego. Educar* *em Revista,* n.se1, 227-244. http://dx.doi.org/10.1590/S0104-40602011000400015 .

Lambert, S., Sampaio, E., Mauss, Y., Scheiber, C. (2004). Blindness and brain plasticity: contribution of mental imagery? An fMRI study. En: *Cognitive Brain Research,* 20 (1),1-11.

López-Mojica, J. M., Sandoval, C. (2019). Enseñanza de estocásticos a niños con discapacidad: Un acercamiento Epistemológico. *Tangram – Revista de Educação Matemática.* 2 (2) 87-101.

Marcone, R. (2015). *Deficiencialismo: a invenção da deficiência pela normalidade*. Tese de Doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/124073.

Ministério da Educação. (2017). *Base Nacional Curricular Comum: versão final.* http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

ONU. (1948). *Declaração Universal dos Direitos Humanos.* Paris: Assembleia Geral das Nações Unidas.

Presidência da República. (2014). *Plano Nacional de Educação. Lei nº 13.005/2014.* http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/l13005.htm

Santos, J. (2010). *O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado. Universidade São Francisco, Itatiba, SP, Brasil.

Santos, J., Borba, R. (2019). Relações entre ferramentas materiais e mediação na construção de conhecimento probabilístico de um estudante cego. In: Contreras, J; Gea, M.; López-Martín, M.; Molina-Portillo E. (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/santos_borba.pdf

Santos, J., Braz, F., Borba, R. (2020). Materiais usados em uma perspectiva inclusiva no ensino de combinatória e de probabilidade. *Revista Educação Inclusiva - REIN*, 4 (01 - Edição Especial), 39-58.

Senado Federal. (2015). *Estatuto da pessoa com deficiência.* Coordenação de Edições Técnicas. http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13146.htm

UNESCO. (1990). *Declaração mundial sobre educação para todos e plano de ação para satisfazer as necessidades básicas de aprendizagem.* Jomtien, Tailândia: UNESCO.

Vieira, R. (2010). A escola de atenção às diferenças. In: Vieira, R.; Bonetl, L.; Polin, J-R. *Novas luzes sobre a inclusão escolar.* Fortaleza: Edições UFC.

Vita, A., Magina, S., Cazorla, I. (2015). A probabilidade, a maquete tátil, o estudante cego: uma teia inclusiva construída a partir da análise instrumental. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 8, 55-97.

Vygotski, L. (1997). Obras escogidas – V: Fundamentos da defectología. Tradução: Blank, J.G.. Madrid: Visor, 1997.

Autores:

Primer autor: **Santos, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão.**
Tiene licenciatura en Ciencias/Matemáticas y Pedagogía (1997/1999), especialización en Educación Infantil (2004) y Educación Especial (2020), maestría y doctorado en Educación (2010/2015) y postdoctorado por la Universidad Federal de Pernambuco (2020). Profesora de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Federal de Pernambuco (UFPE). Tiene experiencia en Educación y Educación Matemática en diferentes niveles de educación, trabaja en investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, Formación Docente y Educación Inclusiva. Forma parte del Grupo de grupos de investigación: Geração/UFPE y GEPeMI/UFPE.
Dirección Electrónica: jaqueline.lixandrao@ufpe.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0375-5081

Segundo autor: **Borba, Rute Elizabete de Souza Rosa.**
Tiene licenciatura en Matemáticas (1985), Maestría en Psicología Cognitiva (1993), Doctorado de la Universidad de Oxford Brookes (2002) y Postdoctorado de la Universidad Federal de Mato Grosso do Sul (2016). Profesora de la Universidad Federal de Pernambuco. Investiga y orienta estudios en Educación Matemática, trabajando principalmente en los siguientes temas: desarrollo conceptual (estructuras aditivas y multiplicativas, en particular el razonamiento combinatorio, y el papel de significados, propiedades, relaciones y representaciones simbólicas en el aprendizaje matemático), análisis de libros de texto y formación de profesores que enseñan Matemáticas. Líder del Grupo de Estudio sobre Razonamiento Combinatorio en el Centro de Educación de la UFPE (Geração).
Dirección Electrónica: resrborba@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5098-4461

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-21

https://union.fespm.es

Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria

María Elena Markiewicz, Silvia Catalina Etchegaray, Bettina Aylén Milanesio

Fecha de recepción: 26/11/2020
Fecha de aceptación: 11/07/2021

Resumen	En este trabajo se indaga en los procesos de validación que logran estudiantes del último año de la escuela secundaria, a través de herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. A partir de la propuesta de problemas que exigen la validación de propiedades matemáticas, se realiza un estudio de casos, analizando objetos y procesos que influyen y condicionan las prácticas argumentativas de los estudiantes. También se determinan los niveles de algebrización donde se sitúan dichas prácticas y conflictos semióticos efectivos que obstaculizan el avance hacia el tipo de validación deductiva pretendida en los primeros años de la universidad. **Palabras claves:** validación de propiedades, análisis ontosemiótico, conflictos semióticos, niveles de algebrización.
Abstract	This work investigates the validation processes achieved by students in the last year of high school, through theoretical tools of the Ontosemiotic Approach to mathematical knowledge and instruction. From the proposal of problems that require the validation of mathematical properties, a case study is carried out, analyzing objects and processes that influence and condition the argumentative practices of the students. The levels of algebrization where these practices and effective semiotic conflicts that hinder progress towards the type of deductive validation sought in the first years of university are also determined. **Keywords**: property validation, ontosemiotic analysis, semiotic conflicts, levels of algebrization.
Resumo	Este artigo investiga os processos de validação alcançados por alunos do último ano do ensino médio, por meio de ferramentas teóricas da Abordagem Ontosemiótica para o conhecimento e ensino matemático. A partir da proposição de problemas que requerem a validação de propriedades matemáticas, é realizado um estudo de caso, analisando objetos e processos que influenciam e condicionam as práticas argumentativas dos alunos. Também são determinados os níveis de algbrização onde essas práticas e conflitos semióticos efetivos que dificultam o avanço para o tipo de validação dedutiva buscada nos primeiros anos de universidade. **Palavras-chave**: validação de propriedade, abordagem ontosemiótica, conflitos semióticos, níveis de algbrização.

1. Introducción

La problemática sobre la validación en matemática ha suscitado gran preocupación e interés en la investigación en educación matemática. Tal como lo expresan Barreiro, Carnelli, Falsetti y Leonián (2012) el término validación adquiere importancia, en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, a partir de los trabajos de la Escuela Francesa, fundamentalmente los llevados a cabo por Brousseau (1995) y Balacheff (1987). En este contexto la validación consiste en “la utilización de recursos de tipo técnicos, teóricos disciplinares y argumentativos - por parte del que aprende - para garantizar la validez de un resultado formulado” (Barreiro et al, 2012, p. 149). Podemos entender así la validación como la actividad tendiente a justificar la eficacia o corrección de un procedimiento o un resultado, o a justificar el carácter de verdadero de una propiedad. En este trabajo de investigación nos centramos en la validación entendida en este último sentido, es decir, en la justificación de propiedades, como una actividad inherente y fundamental en el quehacer matemático.

En las últimas décadas se han realizado diversos estudios en torno a esta temática (Balacheff, 2000; Sowder y Harel, 1998; Mariotti, 2006; Recio y Godino, 2001; Boero, Douek, Morselli y Pedemonte, 2010; Stylianides, Bieda y Morselli, 2016; entre tantos otros). Estas investigaciones abordan diferentes aspectos relacionados a la validación, algunas de ellas caracterizando distintos tipos de argumentación y otras analizando la relación entre la argumentación y la prueba. En Argentina también se han realizado diversos trabajos (Panizza, 2005; Duarte, 2010; Barreiro et al, 2012; Mántica y Carbó, 2016), en los cuales se plantean cuestiones referidas a las validaciones de tipo no deductivas y a los procesos de formulación y validación de conjeturas en estudiantes de secundario e ingresantes a la universidad.

En nuestra investigación partimos de un problema didáctico vinculado a las grandes dificultades que manifiestan estudiantes que ingresan a la universidad en relación a la posibilidad de validar proposiciones matemáticas a las que se enfrentan en este nivel educativo superior, y en particular, de emplear modos deductivos de validación. Esto nos llevó a indagar en los procesos de validación que desarrollan estudiantes que cursan el último año de la escuela secundaria (6to.año, 17-18 años). Para ello decidimos realizar un estudio de campo que nos permitiera lograr una mayor comprensión de las prácticas validativas que despliegan dichos estudiantes. Se pretende, de este modo, aportar a un reconocido problema de articulación entre la escuela secundaria y la universidad, en lo referido a la justificación de propiedades matemáticas.

En el currículum de nivel medio, particularmente en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios de nuestro país, se plantea que el alumno del Ciclo orientado pueda lograr:

> -La identificación de los límites del trabajo empírico a partir de la confrontación de diferentes tipos de pruebas en función de su valor explicativo y su generalidad.
> -La interpretación de algunas formas de pruebas características de esta disciplina, tales como la referida al rol del contraejemplo para probar la invalidez de una afirmación y la demostración por el absurdo.
> -La producción e interpretación de conjeturas, admitiendo que es posible acudir a ejemplos o a dibujos para elaborarlas, pero que no es suficiente para validarlas.

> -La validación de conjeturas y afirmaciones de carácter general mediante propiedades matemáticas, acercándose así a las demostraciones. (Ministerio de Educación de la Nación, 2012, p.13-14)

Tomando como marco de referencia institucional lo proyectado en el currículum, nos planteamos algunos primeros interrogantes: ¿qué tipo de pruebas utilizan/desarrollan los estudiantes del último año del secundario?, ¿qué factores influyen y determinan sus procesos de validación?, ¿qué dificultades manifiestan en dichos procesos?, ¿desde qué lugar y cómo se pueden explicar dichos factores y dificultades? Tratar de dar respuesta a estas cuestiones es crucial para tensionar, recuperar y transformar problemáticas referidas a la validación en el necesario proceso de articulación entre el secundario y la universidad.

Es por todo lo anterior que nos propusimos, como objetivo central de nuestra investigación, explorar algunas características de los procesos de validación que pueden lograr estudiantes de 6to. año de la escuela secundaria, pero desde una perspectiva diferente a la de otros autores (tales como los ya mencionados), debido a que, en este trabajo, realizamos un análisis de las producciones de los estudiantes a partir del uso de herramientas didácticas que aporta el *Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS).* Consideramos que estas herramientas son potentes para llevar a cabo un análisis microscópico de la actividad matemática que nos permita explicar y valorar, desde una perspectiva ontosemiótica dichas producciones personales.

Para realizar esta exploración se plantearon a estudiantes de 6to. año de tres escuelas secundarias de nuestra ciudad un conjunto de problemas que exigen la validación de propiedades matemáticas inherentes a contenidos curriculares del nivel. Se analizaron las producciones de los estudiantes, identificando en ellas los distintos *objetos* matemáticos que ponen en funcionamiento y diferentes *procesos cognitivos* por los que transitan en sus prácticas, a fin de estudiar cómo los mismos influyen o condicionan los procesos de validación logrados. Esto nos permitió también indagar en los *niveles de algebrización* donde se sitúan sus prácticas argumentativas e identificar dificultades por las que atraviesan en las mismas, que explicamos en términos de *conflictos semióticos.* Para profundizar en el “tipo” de argumentación propuesta en cada caso, recurrimos también a la clasificación aportada por Balacheff (2000) en relación a los diferentes modos de prueba.

Las reflexiones que intentaremos presentar aquí, basadas en estudio de casos, nos permiten delinear respuestas a los interrogantes planteados anteriormente y comenzar a pensar en cuestiones claves para atender a la problemática de la articulación entre la escuela secundaria y la universidad.

En el apartado 2 de este trabajo describiremos algunas de las herramientas teóricas y metodológicas que se han utilizado en esta investigación. En el apartado 3 presentaremos dos de los problemas planteados, las resoluciones de cuatro grupos de estudiantes a estos problemas y el análisis efectuado a cada una de dichas resoluciones. Finalmente, en el punto 4, esbozaremos algunas reflexiones finales.

2. Marco teórico y metodológico

Para abordar nuestra investigación, tal lo mencionado, hemos adoptado como marco teórico y metodológico el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2017), el cual constituye un sistema teórico para la Didáctica de la matemática que intenta articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje.

En el marco de este enfoque se introduce la noción de *práctica matemática* y de *significado* (personal e institucional) de un objeto matemático como un emergente de los *sistemas de prácticas* (que realiza una persona o compartidas en el seno de una institución) donde este objeto es determinante para su realización. Dichos *sistemas de prácticas* están constituidos por redes de relaciones en las que intervienen, a su vez, diferentes tipos de *objetos o entidades primarias*:

- *Situaciones-problemas* (tareas, ejercicios...)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo…)
- *Conceptos-definiciones*
- *Propiedades* (proposiciones o enunciados sobre conceptos)
- *Argumentos* (usados para validar o explicar las propiedades y procedimientos, deductivos o de otro tipo)
- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos)

Los problemas son el origen o 'razón de ser' de la actividad matemática y promueven la puesta en funcionamiento de ciertos procedimientos, definiciones y propiedades, como así también de argumentos para justificar los procedimientos y propiedades utilizadas. El lenguaje representa a las demás entidades y es instrumento para la acción, por lo que resulta en elemento esencial en la transformación de los significados tanto institucionales como personales.

Por otra parte, tanto los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas como los emergentes de las mismas pueden ser considerados, según el juego de lenguaje en el que participan, desde diferentes facetas duales. Estas, a su vez, dan lugar a *procesos cognitivos duales* que se consideran fundamentales en la actividad matemática, entre los que destacamos, a los fines de este trabajo, los siguientes:

- *Proceso de materialización-idealización* (asociado a la dualidad ostensivo-no ostensivo): un objeto ostensivo es utilizado para representar, evocar o visualizar un objeto no ostensivo o ideal. A su vez un objeto no ostensivo puede ser materializado mediante un ostensivo.
- *Proceso de particularización-generalización* (dualidad extensivo-intensivo): el pasaje de la consideración de un objeto particular (extensivo) a un objeto general (intensivo) y viceversa.
- *Proceso de descomposición-reificación* (dualidad sistémico-unitario): el problema global puede descomponerse en problemas elementales, es decir, los objetos (unitarios) intervinientes deben ser tratados como sistémicos. Pero, tras el proceso de estudio, los conceptos y propiedades emergentes deben ser reificados, es decir, vistos como objetos unitarios a fin de ser aplicados a la resolución de nuevos problemas.

- *Proceso de representación-significación* (dualidad expresión-contenido): consiste en atribuir contenido a una expresión, a través del establecimiento de *funciones semióticas* (relaciones entre un significante y un significado según un cierto criterio de correspondencia). Estos procesos son "densos" en la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la actividad matemática.

Los procesos antes mencionados pueden, a su vez, ser fuente de *conflictos semióticos*, es decir, de "disparidades o desajustes entre significados atribuidos por dos sujetos, ya sean estos personas o instituciones" (Godino et al, 2007, p.16), los cuales permiten anticipar/explicar las dificultades que podrían surgir (o las que efectivamente surgen) en el transcurso de los procesos de instrucción.

Además, al reconocer la existencia del proceso de algebrización producido en el desarrollo de la ciencia matemática que va transformado el significado de los objetos, el EOS ha avanzado en la categorización de diferentes *niveles de algebrización* para el análisis de la actividad matemática que se despliega en las prácticas personales (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015).

Los criterios para la determinación de dichos niveles están vinculados con la presencia de objetos intensivos de diferentes grados de generalidad, con el tratamiento que se aplica a dichos objetos y con el tipo de lenguaje utilizado.

En este sentido, se han determinado siete niveles de algebrización de los cuales, para los fines de nuestra investigación, describiremos los siguientes:

-Nivel 1: Intervienen objetos intensivos de grado dos (es decir, clases de intensivos de primer grado, como lo son los números), cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos objetos.

-Nivel 2: Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal.

-Nivel 3: Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia.

Por otra parte, tal como lo hemos mencionado, para poder caracterizar el tipo de argumentos planteados por los estudiantes, tomamos como marco referencial las investigaciones de Balacheff (2000). Este autor define los *procesos de validación* como la actividad (razonamiento) que tiene como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una *explicación*, una *prueba* o una *demostración.* Aporta una tipología de pruebas, en la que distingue entre *pruebas pragmáticas* (íntimamente ligadas a la acción y a la experiencia) y *pruebas intelectuales* (se toma distancia de la acción y se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones). Entre los tipos de prueba que caracteriza podemos mencionar:

-El *empirismo ingenuo*: consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos.

-La *experiencia crucial:* consiste en verificar la proposición en un caso para el cual se asume que "si funciona en dicho caso, entonces funcionará siempre".

-El *ejemplo genérico*: consiste en la explicación de las razones de validez de una aserción a través de la validación de operaciones o transformaciones de un objeto en calidad de representante característico de determinada clase.

-La *experiencia mental:* interioriza la acción, separándola de su ejecución sobre un representante en particular. Las operaciones y relaciones que inician la prueba no son escogidas por el resultado de su puesta en práctica.

El paso a la experiencia mental marca la transición de las pruebas pragmáticas a las intelectuales. Este aspecto es de especial interés en nuestra investigación dado que consideramos que el avance a este tipo de pruebas intelectuales es clave para lograr la mencionada articulación entre el trabajo en la escuela secundaria y en la universidad.

La metodología empleada en esta investigación (esencialmente descriptiva e interpretativa) es inherente y emergente del EOS (Godino, 2002, Godino et al, 2007; Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014). Más específicamente, realizamos un *estudio de casos,* técnica de investigación cualitativa que resulta pertinente cuando se desean analizar la singularidad y profundidad de casos particulares. A través del mismo se pretende detallar situaciones, recopilar, seleccionar, describir y analizar datos, observar minuciosamente las prácticas y experiencias de las personas consideradas como sujetos de investigación. Para llevar adelante el estudio de los casos considerados se utiliza la técnica de *análisis ontosemiótico* en sus dos primeros niveles: análisis de objetos primarios y de procesos duales.

3. Situaciones problemas y análisis de las resoluciones

En este apartado desplegaremos el estudio de casos realizado. Las tres escuelas secundarias seleccionadas tienen la particularidad de que los estudiantes, en su mayoría, continúan estudios universitarios. Consideramos esta característica muy significativa como criterio de selección de los casos, teniendo en cuenta el problema didáctico que nos llevó a realizar esta investigación.

Se plantearon a grupos de estudiantes de 6to. año cuatro problemas de gran fortaleza epistémica respecto de la problemática que pretendemos abordar. En efecto, los mismos comparten algunas características comunes: exigen la validación de ciertas proposiciones/propiedades matemáticas (en algunos casos son los propios estudiantes los que tienen que elaborar dichas propiedades) e involucran temáticas/objetos que están presentes en la enseñanza escolar previa (números enteros, suma y producto de números enteros, múltiplos, rectángulos, cuadrados, área y perímetro de los mismos, etc). Temáticas que, además, se retoman en las primeras asignaturas de matemática de la universidad.

En este trabajo presentaremos dos de dichos problemas, tomando como criterio de selección el cambio de contexto. En efecto, uno de ellos (Problema 1) está planteado en un contexto aritmético y el otro (Problema 2), en un contexto geométrico.

Problema 1 a) ¿Será cierto que siempre el producto de dos múltiplos de 5 es un múltiplo de 5? Justifica tu respuesta. b) La suma de un múltiplo de 4 y un múltiplo de 12, ¿es un múltiplo de 4?, ¿es un múltiplo de 12? En caso de que tu respuesta sea afirmativa, justifica. En caso de que sea negativa, da condiciones para que ocurra, justificando.
Problema 2 Si a un rectángulo se le triplica su base y su altura: a) ¿Es cierto que el área también se triplica? ¿Por qué? b) ¿Es cierto que el perímetro también se triplica? ¿Por qué? c) Si el rectángulo fuera un cuadrado, ¿qué pasaría con su área y su perímetro al triplicar el lado? d) ¿Cómo varía el área de un rectángulo cuando uno de sus lados se duplica y el otro se reduce a la mitad?

Tabla 1. Presentación del Problema 1 y Problema 2. Fuentes: Problema 1: reformulado de Saiz y Etchegaray, 2015, p.3. Problema 2: Illuzi y Sessa, 2014, p. 83)

Para este trabajo, seleccionamos las resoluciones de dos grupos de alumnos para cada uno de los problemas, que se diferencian tanto por la red de relaciones planteadas entre diferentes objetos como por la puesta en funcionamiento de distintos procesos duales.

3.1. Resoluciones y análisis del Problema 1

A continuación presentaremos las dos resoluciones del Problema 1, seguidas de sus correspondientes análisis.

Resolución Grupo 1

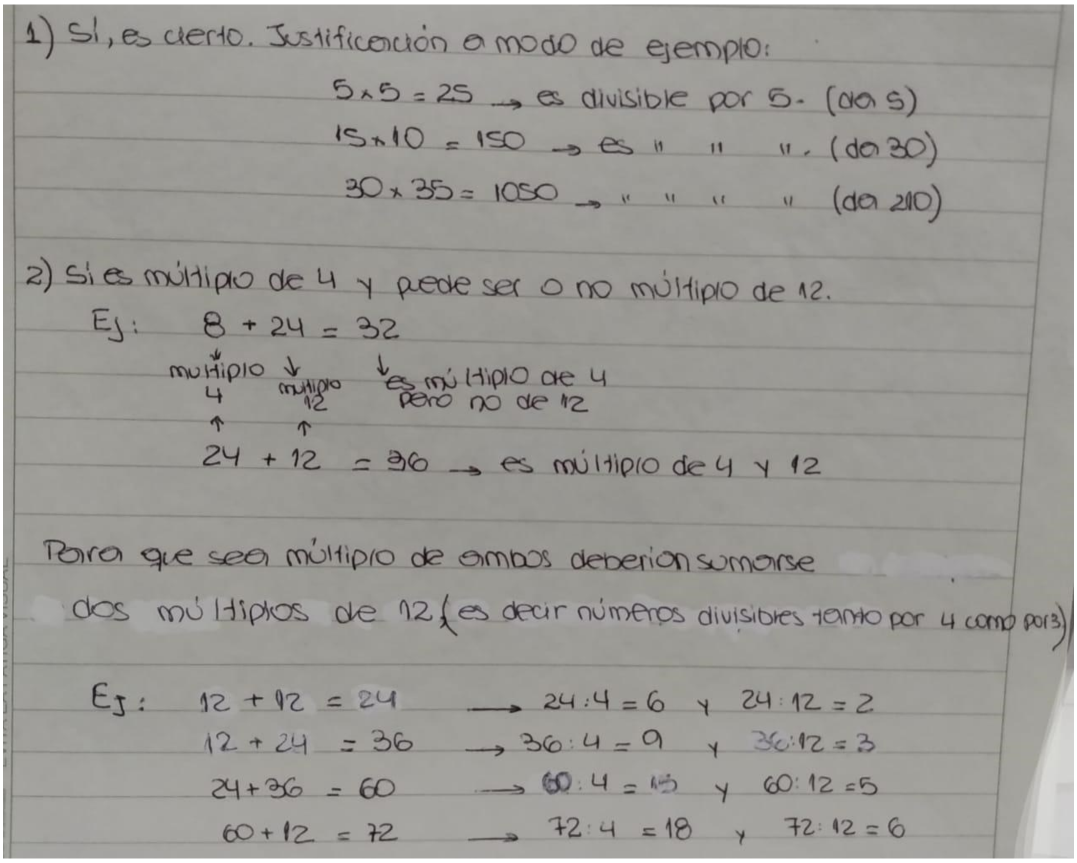


Figura 1. Resolución Grupo 1

Para realizar el *análisis ontosemiótico* de esta producción hemos considerado dos unidades de análisis, que se corresponden con las prácticas realizadas para dar respuesta al inciso a) de la tarea (identificado por los estudiantes con 1) y aquellas realizadas para el inciso b) (punto 2 para los estudiantes). En la tabla siguiente se consignan los objetos primarios y los procesos duales en cada unidad de la práctica.

PRÁCTICAS	OBJETOS PRIMARIOS	PROCESOS DUALES
1)	• Propiedad emergente: “si, es cierto” (que el producto de dos múltiplos de 5 es múltiplo de 5) • Argumento: mediante ejemplos particulares (empirismo ingenuo) • Procedimientos: Se multiplican múltiplos de 5. Se divide el resultado por 5. • Definiciones: -De “múltiplo” de un número como aquel que es divisible por dicho número, es decir, que el dividirlo por el número de cociente exacto.	• Particularización-Generalización: Se utilizan ejemplos particulares para justificar la propiedad general. • Representación-significación: Significan a la representación “múltiplo de 5” como un número que al dividirlo por 5 da cociente exacto. • Materialización-idealización: Ostensivos tales como “5x5 = 25… es divisible por 5 (da 5)” materializan la idea de que el producto de dos múltiplos de 5 es múltiplo de 5 ya que al dividirlo por 5 el cociente da exacto.

	• Lenguaje: simbólico-aritmético	
2)	• Propiedad emergente: "si es múltiplo de 4 y puede ser o no múltiplo de 12" • Procedimientos: Se suman múltiplos de 4 y de 12. Se dividen los resultados por 4 y por 12 . • Argumento: Se argumenta la propiedad emergente a partir de la observación de los dos casos particulares, viendo que en el primer caso la suma es múltiplo de 4 pero no de 12, y en el segundo caso (*) la suma es múltiplo de 4 y también de 12 (*empirismo ingenuo*) • Propiedad emergente: "Para que sean múltiplos de ambos deberían sumarse dos múltiplos de 12 (es decir números divisibles tanto por 4 como por 3)" • Procedimientos: Se suman múltiplos de 12 Se dividen por 4 y por 12 los resultados obtenidos. • Argumentos: Se argumenta la propiedad emergente a partir de la observación del caso particular previamente observado (*) (el cual permite la emergencia de la nueva propiedad) y con la observación de nuevos casos particulares que permiten contrastarla (*empirismo ingenuo)* . • Lenguaje: -Coloquial, por ejemplo al dar algunas condiciones: "para que sean múltiplo de ambos deberían sumarse dos múltiplos de 12" -Simbólico aritmético: al realizar las cuentas con los casos particulares.	• Particularización-Generalización: Se utilizan ejemplos particulares (8 + 24 =32, 24 + 12 =36) para justificar una propiedad general (la suma de un múltiplo de 4 y un múltiplo de 12 "si es múltiplo de 4 y puede ser o no múltiplo de 12"). A partir del segundo ejemplo se conjetura una propiedad general (Para que sean múltiplos de ambos deben sumarse dos múltiplos de 12) y se la verifica luego en otros casos particulares. • Materialización-idealización: Los ostensivos "8+24= 32" acompañados de flechas señalando al 8 como múltiplo de 4, al 24 como múltiplo de 12 y al 32 como múltiplo de 4 pero no de 12, y "24+12=36", indicando que este último si es múltiplo de 4 y de 12, materializa la idea de que la suma de un múltiplo de 4 más un múltiplo de 12 es múltiplo de 4 y puede ser o no múltiplo de 12. Se materializan de manera coloquial las propiedades emergentes. • Representación-significación: Significan al múltiplo de un número como aquel que dividido ese número da un cociente exacto. Significan al "24" (presente en la cuenta "8 +24") como un número que, no sólo es múltiplo de 4, sino también de 12. A los números "24, 36, 60 y 72" se los significan como múltiplos tanto de 4 como de 12. • Descomposición-reificación: Las explicaciones proporcionadas y el trabajo con los ejemplos, necesitan reificarse para lograr la emergencia de las propiedades mencionadas.

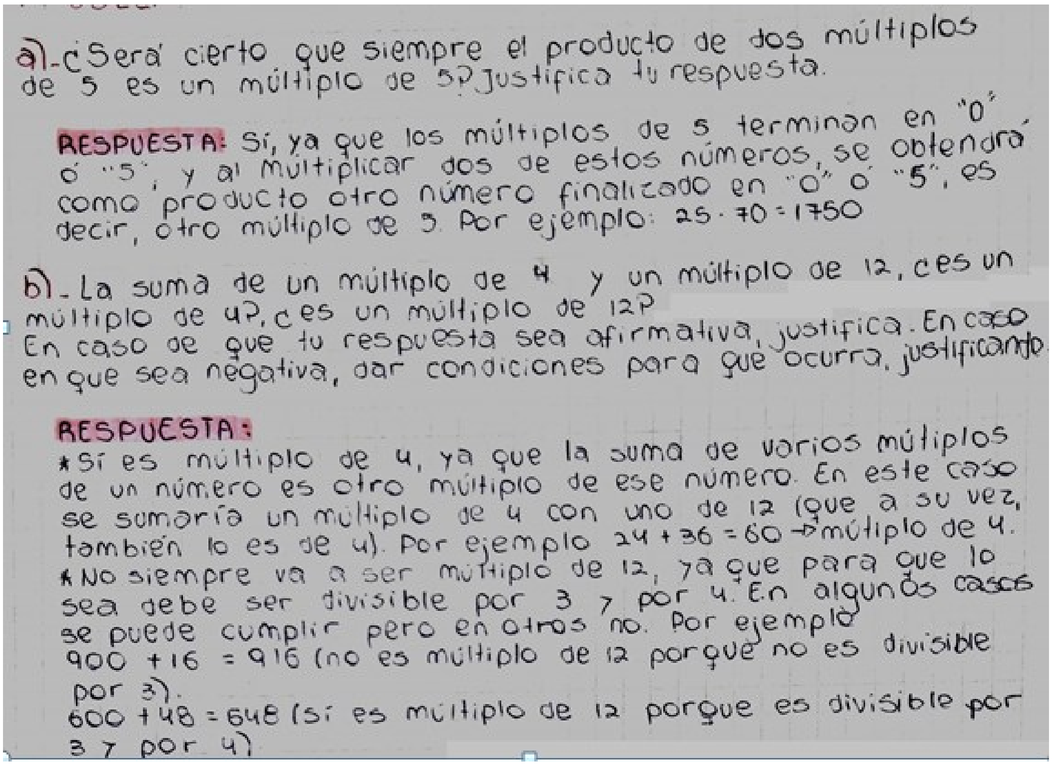
Tabla 2. Análisis de objetos primarios y procesos de la resolución del Grupo 1.

El principal *conflicto semiótico* en esta resolución está ligado al proceso de particularización-generalización, que se evidencia en la utilización de casos particulares para validar una propiedad general. El mismo, a su vez, está atravesado por conflictos vinculados al proceso de representación-significación, dado que no se logra significar a un múltiplo de 5, por ejemplo, como un múltiplo de 5 "cualquiera". También está influenciado por el significado que se le otorga a la definición de múltiplo, ligado a la división exacta, sin poder realizar la necesaria transformación de este significado que habilitaría la emergencia de una prueba de tipo intelectual. Este conflicto se vuelve a manifestar cuando a los múltiplos de 12 se los menciona teniendo en cuenta su descomposición multiplicativa (3.4) pero luego, para comprobar que un número es múltiplo de 12 se recurre al significado de múltiplo asociado a la división exacta.

Respecto al *nivel de algebrización*, la actividad matemática se puede situar en un nivel 1 dado que intervienen objetos intensivos de grado dos en un lenguaje coloquial y numérico, por ejemplo se entiende a los múltiplos de un número como aquellos que al ser divididos por dicho número dan cociente exacto, o al número 36 como múltiplo de 4 y múltiplo de 12. Además emergen otros intensivos, propiedades generales tales como: “la suma de dos múltiplos de 4 si es múltiplo de 4 y puede ser o no múltiplo de 12”, “Para que sean múltiplos de ambos deben sumarse dos múltiplos de 12…”, a partir de procesos de generalización, materialización, significación y reificación puestos a funcionar en dichos objetos particulares como se deja plasmado en la tabla 1.

La descripción del juego de lenguaje de esta práctica personal nos aporta información importante, en particular, sobre cuáles son los objetos que hay que transformar y cuál es el lenguaje que hay que construir para avanzar en una prueba intelectual que exige un trabajo de algebrización superior.

Resolución Grupo 2


a).¿Será cierto que siempre el producto de dos múltiplos de 5 es un múltiplo de 5? Justifica tu respuesta.

RESPUESTA: Sí, ya que los múltiplos de 5 terminan en "0" ó "5", y al multiplicar dos de estos números, se obtendrá como producto otro número finalizado en "0" ó "5", es decir, otro múltiplo de 5. Por ejemplo: 25 · 70 = 1750

b). La suma de un múltiplo de 4 y un múltiplo de 12, ¿es un múltiplo de 4?, ¿es un múltiplo de 12? En caso de que tu respuesta sea afirmativa, justifica. En caso en que sea negativa, dar condiciones para que ocurra, justificando.

RESPUESTA:
* Sí es múltiplo de 4, ya que la suma de varios múltiplos de un número es otro múltiplo de ese número. En este caso se sumaría un múltiplo de 4 con uno de 12 (que a su vez, también lo es de 4). Por ejemplo 24 + 36 = 60 → múltiplo de 4.
* No siempre va a ser múltiplo de 12, ya que para que lo sea debe ser divisible por 3 y por 4. En algunos casos se puede cumplir pero en otros no. Por ejemplo
900 + 16 = 916 (no es múltiplo de 12 porque no es divisible por 3).
600 + 48 = 648 (sí es múltiplo de 12 porque es divisible por 3 y por 4)

Figura 2. Resolución Grupo 2.

Si bien no vamos a desplegar, en el cuerpo de este artículo, la descripción minuciosa de objetos y procesos que se ponen a funcionar en esta práctica, esbozaremos una síntesis del análisis que dicha descripción nos permitió realizar.

Este grupo propone un argumento para la propiedad dada en el enunciado del inciso a), en el cual utiliza la definición de múltiplo de 5 como "aquel número que termina en 0 o en 5" y una propiedad que parecen tener disponible: "el resultado de un producto de dos números terminados en 0 o en 5 siempre terminará en 0 o en 5", la cual no justifican. El significado dado a la expresión "múltiplo de 5" y la utilización de propiedades les permite avanzar hacia un tipo de prueba intelectual (*experiencia mental*), no obstante lo cual los estudiantes consideran necesario la verificación de la propiedad en un ejemplo particular.

En el inciso b) proponen un argumento para justificar por qué la suma de un múltiplo de 4 más un múltiplo de 12 es múltiplo de 4 utilizando también propiedades disponibles: "la suma de varios múltiplos de un número, es múltiplo de ese número" y "un múltiplo de 12 también es múltiplo de 4". Argumentan también que la suma "no siempre va a ser múltiplo de 12", a partir de la propiedad: "para que un número sea múltiplo de 12 debería ser divisible por 3 y por 4" y explicando que eso puede ocurrir o no. Aquí es preponderante el uso de un lenguaje coloquial. Si bien en ambos casos luego recurren a ejemplos particulares (en un lenguaje simbólico-aritmético) para ejemplificar o apoyar sus argumentos, consideramos que las argumentaciones planteadas tienen las características de una *experiencia mental,* dado que en una primera instancia el razonamiento se realiza para múltiplos cualesquiera, no circunscribiéndose a la acción sobre un representante en particular.

Aunque estos estudiantes, a diferencia del grupo anterior, no parten de casos particulares, hay *conflictos semióticos* ligados a los procesos de significación y materialización, dado que, al no poder dar contenido ni hacer uso de un ostensivo que materialice la idea de múltiplo como un producto de ese número por otro natural, no pueden avanzar en la comunicación de otro tipo de argumentación, más cercana a una demostración.

Esta actividad matemática bascula entre un *nivel 1 y 2 de algebrización*. Posee características de un nivel 1 ya que intervienen objetos intensivos de grado dos en un lenguaje natural y numérico, por ejemplo, se entiende al múltiplo de 5 a partir de su propiedad de terminar en 0 o en 5. Al igual que se entiende a los múltiplos de 12 como aquellos que son divisibles por 3 y por 4 (haciéndose uso efectivo de esta propiedad para determinar si un número es múltiplo de 12 o no). Asimismo, emergen otros intensivos, propiedades generales, a partir de procesos de generalización, materialización, significación y reificación puestos a funcionar en dichos objetos. Posee características de un nivel 2 ya que intervienen indeterminadas y se establecen generalizaciones comprensivas que emergen de las relaciones establecidas entre las acciones realizadas sobre los objetos y se asocian a validaciones que superan la verificación empírica (Barallobres, 2017).

Como primeras conclusiones de los análisis realizados a las producciones de ambos grupos podemos mencionar que la puesta en relación de diferentes objetos primarios (procedimientos, definiciones, propiedades, argumentaciones, lenguaje), está regulada esencialmente por el significado de "múltiplo" puesto a funcionar en cada práctica. En sus producciones, los grupos de estudiantes transitan por diferentes procesos de particularización-generalización (dado que este proceso se realiza a partir de distintos particulares: ejemplos en un caso / particulares arbitrarios en el otro), de materialización-idealización (ya que utilizan diferentes ostensivos para representar, por ejemplo, la idea de múltiplo y las argumentaciones propuestas), de representación-significación (ya que, como hemos mencionado, otorgan distinto contenido a ciertas expresiones, particularmente a la de múltiplo). En ambos casos han transitado por procesos de reificación (en las dos producciones, de un modo u otro, han tenido que unificar lo realizado, sean las observaciones en casos particulares o las justificaciones dadas para lograr el reconocimiento de nuevas propiedades y de su validación). Todo esto permite la emergencia de diferentes tipos de argumentaciones situadas en distintos niveles de algebrización.

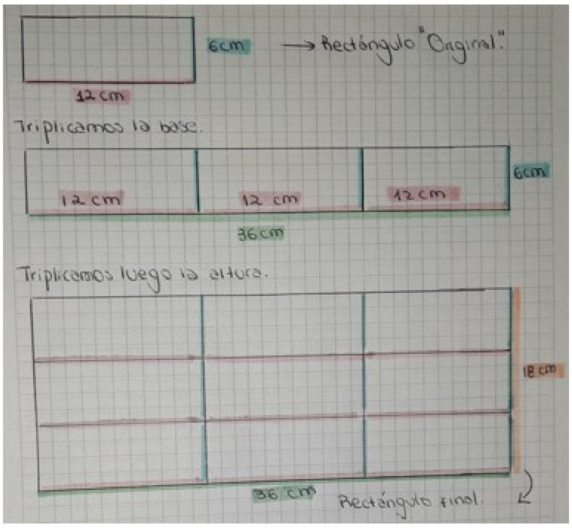
3.2. Resoluciones y análisis del Problema 2

En este apartado mostramos las resoluciones de dos grupos al Problema 2 y sus correspondientes análisis.

Resolución Grupo 3

a) ¿Es cierto que el área también se triplica? ¿Por qué?

Podemos afirmar que cuando se triplica no solamente un lado sino dos (base y altura) no se triplica el área, sino que se da lugar a que existan nueve veces el rectángulo, tal como se muestra en la imagen.



Área de Rect. "Original" = 12cm x 6cm = 72 cm^2
Área de Rect. "Final" = 36cm x 18cm= 648 cm^2 → 9 veces A= 72 cm^2

b) ¿Es cierto que el perímetro también se triplica? ¿Por qué?

El perímetro afirmamos que Sí se triplica, este (perímetro) es la suma de los lados del rectángulo. Los lados del rectángulo son cuatro, uno es la altura que se multiplica por 3 y como el lado opuesto es de la misma medida también se triplica; y los dos lados restantes es la base que también se multiplica por tres, por ende, el lado opuesto también lo hace. De esta manera se demuestra que todos los lados se triplican sus medidas, que sería lo mismo que al perímetro del rectángulo original se multiplicara por tres:

P Rect. "Original" = 6cm + 6cm + 12cm + 12cm = 36cm
P Rect. "final" = 36cm + 36cm + 18cm + 18cm = 108 cm → 3 x 36cm

c) Si el rectángulo fuera un cuadrado, ¿qué pasaría con su área y su perímetro al triplicar el lado?
Si se cambia la figura de un rectángulo a un cuadrado, sucedería lo mismo, debido a lo único que cambian son las medidas, no obstante las fórmulas de Área (base x altura) y Perímetro (suma de los lados) no cambian.

d) ¿Cómo varía el área de un rectángulo cuando uno de sus lados se duplica y el otro se reduce a la mitad? Justifica.
Si a un rectángulo se duplicara un lado ,la base, por ejemplo y se le cortara la mitad de otro lado, la altura, el área no varía en nada ya que el rectángulo va a seguir ocupando el mismo espacio. Se procede a explicar mediante un ejemplo:

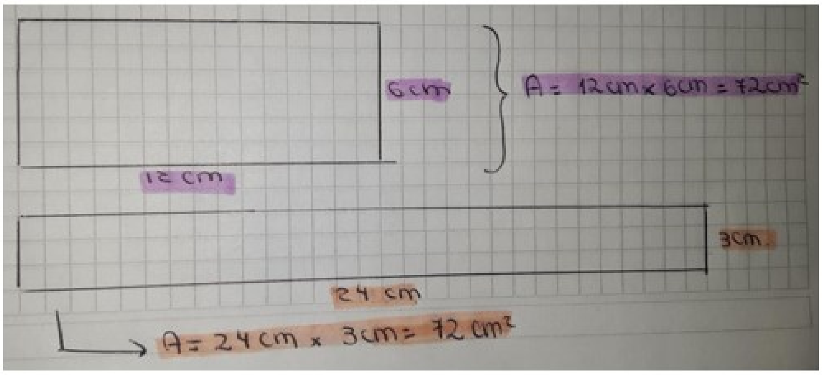


Figura 3. Resolución Grupo 3

Análisis ontosemiótico de la resolución del Grupo 3:

PRÁC-TICAS	OBJETOS PRIMARIOS	PROCESOS
a)	• Propiedad (emergente): "Cuando se triplica, no solamente un lado, sino dos (base y altura) no se triplica el área sino que se da lugar a que existan nueve veces el rectángulo" • Procedimientos: Se dibuja un rectángulo particular de base 12 y altura 6. Se le adosan a la derecha dos rectángulos iguales y se multiplica 12 por 3. Se le adosan a esta figura dos figuras iguales arriba, multiplicando 6 por 3. Se calcula el área del rectángulo original (12x6) y la del rectángulo final (36x18), comparando los resultados. • Argumentos: Se argumenta a través de la secuencia de procedimientos mencionados anteriormente. La argumentación utilizada es de tipo *ejemplo genérico.* • Definiciones:	• Particularización-generalización: Se particulariza con el ejemplo de un rectángulo de base 12 y altura 6, para argumentar la propiedad general emergente. • Representación-significación: Al área de una figura se la significa como el espacio que ocupa, lo cual se pone de manifiesto cuando expresan "se da lugar a que exista 9 veces el rectángulo" y también como el producto de la base por la altura. Se significa al 36 como el triple de 12 y a 18 como el triple de 6. A 648 se lo significa como "9 veces el 72" y a esta última expresión como 9 x 72. • Materialización-idealización: La idea de triplicar la base de un rectángulo se evoca adjuntando dos rectángulos de la misma base a la derecha del rectángulo origina (y también a través de la multiplicación de su base por 3). De similar manera la idea de triplicar la altura. Se materializa el área del rectángulo original con la expresión: 12cmx6cm =72 cm y con la expresión: 36cm x 18 cm = 648 cm el área del rectángulo con la base y la altura

	-Base y altura de un rectángulo. -Área de una figura (como el espacio que ocupa una figura y como base por altura). -Definición de "triplicar" como multiplicar el número por 3. • Lenguaje: Gráfico (es el que mayormente regula esta práctica) y simbólico aritmético. También se utiliza lenguaje coloquial	triplicada. El ostensivo: 648cm → 9 veces A=72 cm evoca la idea de que el área del rectángulo con base y altura triplicada es nueve veces el área del rectángulo original. • Descomposición-reificación: Lo expresado coloquialmente, lo observado gráficamente, y los cálculos realizados en el ejemplo considerado se ratifican para dar lugar a la propiedades emergentes como objetos unitarios
b)	• Propiedades: -"El perímetro afirmamos que si se triplica" (emergente) Propiedades disponibles: -Los lados opuestos del rectángulo tienen la misma medida -Si la altura del rectángulo se multiplica por 3 entonces el lado opuesto también se triplica. • Definiciones: Perímetro de un rectángulo (como la suma los lados), lados opuestos. • Argumento: Se plantea una justificación para un rectángulo en general que, por el uso que realiza de las propiedades disponibles, la convierte en una *experiencia mental.* También verifican con un ejemplo. • Lenguaje: Predomina el lenguaje coloquial en la argumentación planteada, aunque se recurre a un lenguaje simbólico aritmético cuando se verifica.	• Representación-significación: Significan el perímetro como la suma de los lados del rectángulo, a uno de los lados como la base (y a su opuesto como un lado de la misma medida) y a otro como la altura. Significan el 36 como el triple de 12 y el 18 como el triple de 6 Al "108" se lo significa como "3x36", es decir el triple de 36. • Materialización-idealización: Se materializa la propiedad emergente de manera coloquial al igual que el argumento propuesto. Se materializa con la expresión: 6cm+6cm+12cm+12cm = 36 cm el perímetro de un rectángulo de base 6 y altura 12 y con la expresión: 36cm+36cm+18cm+18cm = 108 cm el perímetro del rectángulo con los lados triplicados. Se evoca la idea de que 108 es el triple de 36 con el ostensivo: 108 cm → 3x36 cm
c)	• Propiedad emergente: "Si se cambia la figura de un rectángulo a un cuadrado sucedería lo mismo…" (en referencia a que el área no se triplica sino que aumenta 9 veces y el perímetro si se triplica) • Argumento: Dan una *explicación* expresando que lo único que cambian las medidas pero no las fórmulas. • Definiciones -De cuadrado -Área de un cuadrado: base x altura -Perímetro de un cuadrado: suma de los lados • Lenguaje: coloquial	• Representación. significación: Se significa a un cuadrado como un rectángulo con medidas de lados iguales • Materialización-idealización: Se materializan a través de un lenguaje coloquial la propiedad emergente y su argumentación.

d)	• Propiedad emergente: Si a un rectángulo se le duplicara un lado y se le cortara a la mitad el otro, el área no varía. • Procedimientos: Dibujan un rectángulo particular y calculan el área, Dibujan otro rectángulo, con las condiciones pedidas. Calculan el área de este nuevo rectángulo. • Argumentos: Expresan que la propiedad vale porque el rectángulo "va a seguir ocupando el mismo espacio". Luego proponen un ejemplo particular, apoyándose en gráficos (*ejemplo genérico*) • Definiciones: -"reducir a la mitad" como "cortar la mitad de un lado" y también como dividir por 2. -"duplicar" como multiplicar por 2. . • Lenguaje: Coloquial, gráfico y simbólico aritmético.	• Representación-significación: Al área de una figura se la significa como el espacio que ocupa, lo cual se pone de manifiesto cuando expresan que los rectángulos van a seguir ocupando el mismo espacio. También como el producto de la base por la altura. Se significa al 24 como 12 x 2 y al 3 como la mitad de 6 (6 dividido 2) • Materialización-idealización: Se materializa la idea de duplicar la base de un rectángulo y reducir a la mitad la altura, con otro rectángulo cuya base es la del original multiplicada por 2 y su altura es la del original dividida por 2. • Descomposición-reificación:: Lo expresado coloquialmente, lo observado gráficamente, y los cálculos realizados en el ejemplo considerado se reifican para dar lugar a la propiedad emergente como objeto unitario

Tabla 3. Análisis de objetos primarios y procesos del Grupo 3.

Intervienen en la práctica objetos intensivos de manera coloquial, aritmética y gráfica, por ejemplo se entiende al 648 como nueve veces el 72 y a un rectángulo se lo entiende tal como se lo materializa en la figura. Además, emergen otros intensivos, en este caso se ratifican propiedades generales como objetos unitarios, tales como las mencionadas en la segunda columna de la Tabla 3. Dado que la contextualización que realizan los estudiantes les permite generalizar y transformar ciertos objetos particulares en objetos generales, como el rectángulo y el cuadrado, podemos concluir que esta práctica bascula entre *un nivel 1 y un nivel 2 de algebrización.*

Con respecto a los *conflictos semióticos*, se visualizan aquí algunos asociados al proceso de particularización-generalización ya que, por ejemplo en a), la producción se basa en el uso del ejemplo genérico, al cual no se lo hace funcionar como generador del caso general sino que se lo muestra como el elemento que justifica el razonamiento. Además, se advierten dificultades para materializar, por ejemplo, la base y la altura de un rectángulo con símbolos, lo cual habilitaría la realización de transformaciones y operaciones con los mismos, y permitiría avanzar en una validación de un nivel superior de algebrización. .

Resolución Grupo 4

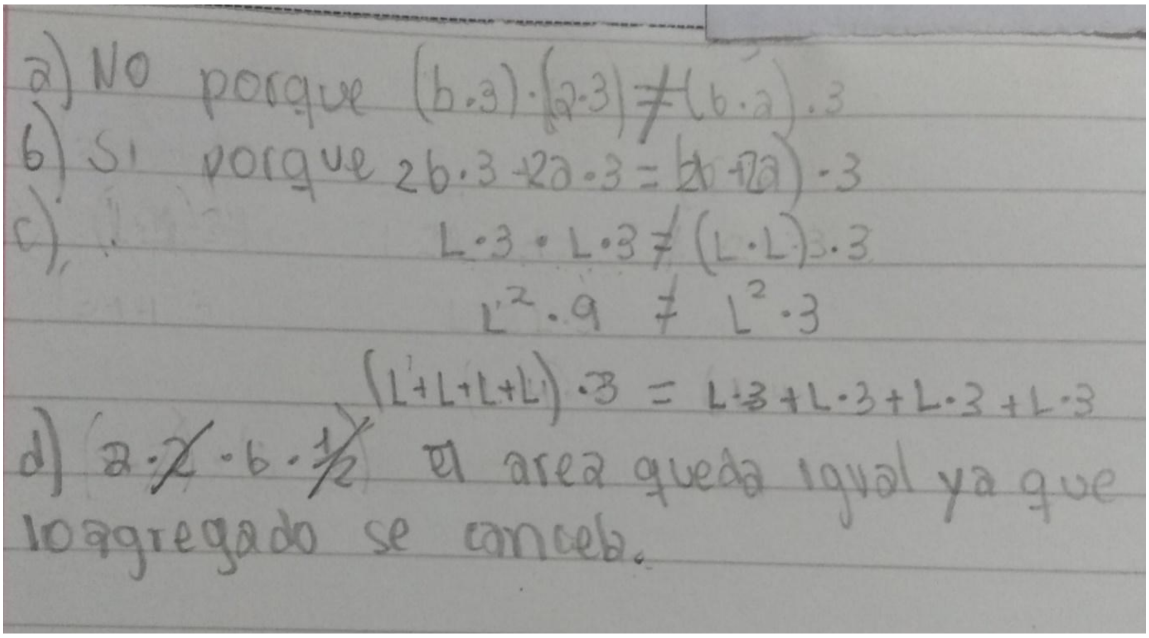


Figura 4. Resolución Grupo 4

Análogamente a lo realizado en el caso del Grupo 2 con el Problema 1, no desplegaremos la tabla que explicita objetos y procesos llevados adelante por los estudiantes sino que expondremos una síntesis de dicho análisis ontosemiótico.

Esta producción se caracteriza por el uso casi exclusivo de lenguaje simbólico algebraico, evocando con “b” a la base y con “a” a la altura. Las definiciones de área y perímetro de un rectángulo y de un cuadrado están implícitas, aunque se manifiesta que se entienden ligadas a sus fórmulas. También observamos que, en general, no explicitan las propiedades disponibles que les permiten realizar las transformaciones de las expresiones algebraicas utilizadas.

Es de destacar que en esta práctica no se particulariza a través de ejemplos, ni siquiera para refutar algunas de las afirmaciones. Se transitan por diferentes procesos de materialización y significación, por ejemplo, en el inciso a), a partir de significar el área de un rectángulo como el producto de la base por la altura y el triple de un número como dicho número multiplicado por 3, logran materializar el área de un rectángulo con los lados triplicados con la expresión “(b.3).(a.3)” y plantean que la misma es diferente de la expresión “(b.a).3” (que evoca el triple del área del rectángulo original). De este modo argumentan que al triplicar los lados el área no se triplica.

Toda la práctica se caracteriza por argumentaciones próximas a demostraciones, y aunque se utiliza un lenguaje simbólico-algebraico que permite atrapar la generalidad no se explicita el razonamiento que lleva a plantear las igualdades (o desigualdades) ni las definiciones y/o propiedades que las justifican.

En esta actividad matemática se generan, mediante un lenguaje algebraico, objetos intensivos de grado dos, por ejemplo, “a” representa la altura de un rectángulo, "a.b" se entiende como el área del rectángulo original, y se opera con ellos conservando la equivalencia de las expresiones por ejemplo: "$L.3.L.3 = L^2.9$". Emergen, aunque de manera implícita, propiedades generales (nuevos intensivos) tales como: "si se triplica la base y altura de un cuadrado, el perímetro también se triplica". Lo cual nos lleva a reconocer en esta práctica rasgos esenciales de un *nivel 3 de algebrización*.

Los análisis realizados nos permiten ver que, en este problema, ambos grupos de estudiantes utilizan las mismas definiciones de base, altura, lado, pero el modo de significar al área como el espacio que ocupa la figura le permite al Grupo 3 lograr un tipo de argumentación más cercana al ejemplo genérico, que podría constituirse en un avance en la transición entre una pruebas pragmática y una intelectual. Por otra parte, el establecimiento de funciones semióticas que permitieron poner en relación la forma de calcular el área y el perímetro con una simbolización que atrapa estos objetos, permitió al Grupo 4, operar con estos representaciones utilizando (implícitamente) definiciones y propiedades, acercándose así a demostraciones de las propiedades generales.

Más allá de la complejidad ontosemiótica que exige un trabajo matemático personal de mayor algebrización (que se pone de manifiesto en el análisis de la práctica del último grupo), observamos cómo el establecimiento de determinadas funciones semióticas, que permiten reconocer pertinentes simbolizaciones que atrapen los rasgos estructurales de los objetos y operativizar transformaciones de los mismos, resultan factores necesarios para avanzar en los tipos de pruebas.

4. Reflexiones finales

La investigación realizada nos permite poner en evidencia que los objetos primarios disponibles (puestos en escena a través de los significados que se les asignan) y los procesos duales transitados son factores que influyen y condicionan fuertemente el tipo de validación lograda por los estudiantes de la escuela secundaria.

En ambos problemas, los significados personales atribuidos a los objetos intervinientes (esto es, el funcionamiento personal de los procesos de representación-significación), el uso de ejemplos o de particulares arbitrarios para validar una propiedad general (es decir, las características personales que adquiere el proceso dual de particularización-generalización), el lenguaje utilizado para representar y evocar los objetos ideales (es decir, el modo de haber transitado los procesos de materialización), se constituyeron en factores determinantes del tipo de prácticas argumentativas logradas.

En particular, se pudo observar cómo el proceso de generalización está influenciado, no sólo por el tipo de particulares "de los que se parte" sino también por los avances o limitaciones en el funcionamiento de los otros procesos: de materialización, significación y reificación.

Las diferentes redes de relaciones de objetos y procesos generaron una variedad de prácticas validativas (pragmáticas e intelectuales), situadas en distintos niveles de algebrización, algunas de ellas claramente en un nivel 1, otras que basculan entre un nivel 1 y un nivel 2 y otras más cercanas a la demostración situadas en un nivel 3 de algebrización. Esto nos coloca, como docentes, ante la necesidad de recuperar las distintas prácticas de los estudiantes, no solo como “diferentes procedimientos” sino teniendo en cuenta toda la trama de objetos y procesos que se ponen en funcionamiento.

Los conflictos semióticos efectivos vinculados a cada uno de los procesos duales permitieron explicar ciertas dificultades recurrentes que obstaculizaron el avance en el tipo de validación. Esto nos permite, a su vez, delimitar algunos aspectos que serían necesarios movilizar a fin de destrabar dichos conflictos y permitir el avance en el tipo de prueba y en el nivel de algebrización. Entre los más relevantes podemos mencionar: la transformación del significado de los elementos de los que se parte, que requieren ser entendidos como “elementos cualesquiera”, la construcción de un lenguaje algebraico que permita materializar esos elementos generales (lo cual apunta a la generación de intensivos de grado dos expresados en lenguaje simbólico literal) y la utilización de definiciones y propiedades que permitan transformar y operar con esos intensivos.

Los análisis realizados en nuestra investigación ponen al descubierto la complejidad ontosemiótica de los procesos de validación de los estudiantes y proporcionan un marco de referencia para pensar cómo afrontar el tema de la validación en un escenario educativo muy especial como lo es la entrada a la universidad, generando criterios para seleccionar tipos de problemas que nos permitan recuperar las prácticas de los estudiantes, sus significados personales y que nos posibiliten trabajar con ellos sobre los aspectos que mencionamos anteriormente.

Por último, cabe destacar que este estudio nos permite afirmar que la validación es un “mega-proceso”, así como lo son la resolución de problemas o la modelización matemática, en tanto involucra el complejo funcionamiento de una serie de procesos que la atraviesan y condicionan. Consideramos que el conocimiento de esta complejidad, respecto al desarrollo de uno de los procesos más relevantes del hacer matemático por parte de los profesores tanto de secundaria como de los primeros años de la universidad, tendría que ser tenida en cuenta para repensar actividades de articulación entre ambos subsistemas educativos.

5. Referencias

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*. 18 (2), 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los alumnos de matemática*. Colombia: Una empresa docente.

Barallobres, G. (2017). Ciertos fenómenos didácticos que caracterizan las dificultades de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51, 27-47. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2017/51/01.pdf

Barreiro, P., Carnelli, G., Falsetti, M., Leonián, P. (2012). Acercamiento a la validación en Matemática de estudiantes de pre-grado en clases ordinarias *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología*, 3 (2) Recuperado el 1 de junio de 2021 de: http://www.exactas.unca.edu.ar/riecyt/VOL%203%20NUM%202/Archivos%20Digitales/RieCyT%20V3%20N2%20Set%202012%20Doc%20-7-.pdf

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M. M. Pinto, y T. F. Kawasaky (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* 1, 179-204. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Brousseau, G. (1995). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publisher.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Duarte, Betina (2010). *Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en matemática. La Función Exponencial, el Razonamiento Matemático y la Intervención Docente en la Escuela Media*. [Tesis Doctoral. Universidad de San Andrés. Buenos Aires. Argentina]

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2-3), 237-284. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: https://revue-rdm.com/2002/un-enfoque-ontologico-y-semiotico/

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico. del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Recuperado el 1 de junio de 2021 de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino.pdf

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32 (1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J.D., Batanero, C., y Font, V (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. Versión ampliada en español recuperada el 1 de junio de 2021 de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/JDGodino_CBatanero_VFont_sintesis_EOS%202009.pdf

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8,177-142. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_RAE-PRI-SEC.pdf

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34* (2/3), 167-200. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_ID- EOS_31mayo2014.pdf

Illuzi, A. y Sessa, C. (2014) Aportes para la enseñanza. Nivel secundario. Ministerio de educación. Buenos Aires Ciudad. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/matematica_cuadratica_13_06_14.pdf

Mantica, A.M. y Carbó, A.L. (2016). Estudio de procesos de formulación y validación de conjeturas con estudiantes de secundaria en interacción con pares . *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 48* ,79-102. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2016/48/146-706-4-Corrigido.pdf

Mariotti, M. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez, & P. Boero, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future.* 173-204. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: http://math.unipa.it/~grim/YESS-5/PMEbook_MariottiNew.pdf

Ministerio de Educación. (2012) Núcleos de aprendizaje prioritarios. Campo de Formación general. Ciclo orientado Educación Secundaria. Matemática. http://entrama.educacion.gob.ar/uploads/nap/6-Matem%C3%A1tica%20OR_%20completa.pdf

Panizza, M. (2005). *Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Recio, A. y Godino, J.D. (2001). Institucional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48,83-99. https://doi.org/10.1023/A:1015553100103

Saiz, I y Etchegaray, S. C. (2915) Módulo: Enseñanza de la aritmética.Nuestra Escuela. Programa Nacional de Educación Permanente. Ministerio de Educación y deportes. Argentina. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: https://docplayer.es/74002050-Modulo-ensenanza-de-la-aritmetica-y-enteros.html

Stylianides, A., Bieda, K. y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. En: A.,Gutiérrez; G. Leder y P. Boero, (eds). *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, Rotterdam*, The Netherlands: Sense Publishers , 315-351, http://dx.doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6

Sowder, L. y Harel, G. (1998). Types of Students' justifications.*The Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Autores:

Markiewicz, María Elena. Profesora Adjunta en la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina). Magister en Didáctica de la Matemática. (UNRC). Docente investigadora en el área de Didáctica de la Matemática. Co-directora de proyecto de investigación. Cuenta con publicaciones sobre temas del área. Email: mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar

Silvia Catalina Etchegaray Profesora titular en la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina). Magister en Didáctica de la Matemática. (UNRC). Ha dirigido numerosos proyectos de investigación en Didáctica de la Matemática. Cuenta con publicaciones sobre temas relacionadas al dicha área de conocimiento. Email: setchegaray@exa.unrc.edu.ar

Bettina Aylén Milanesio. Profesora en Matemática por la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina). Se desempeña como Becaria de Conicet para el Doctorado en Cs. De la Computación. Ha realizado cursos de posgrado y una beca de investigación, vinculados a la Didáctica de la Matemática. Email:bettinamilanesio@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-25

Se os Egípcios tivessem o GeoGebra?

Um passeio na história da raiz quadrada

Liliana da Costa, João Domingos Junior, Daniele Alves

Fecha de recepción: 27-08-2020
Fecha de aceptación: 22-04-2021

Resumen	En este artículo daremos un paseo por algunos métodos utilizados a lo largo de los siglos para calcular la raíz cuadrada, destacando aquellos que valoran su representación geométrica. El método egipcio es el objeto central de la investigación. A partir de ella, con la ayuda de GeoGebra, se formulan algunas conjeturas que luego se demuestran. La aplicabilidad de estas ideas en el aula puede hacerse en varios momentos de la educación básica y se hace posible con el uso de GeoGebra como facilitador en el proceso de enseñanza-aprendizaje. **Palabras clave**: Raíz cuadrada, Historia de las matemáticas, egipcios, GeoGebra
Abstract	This paper will take a walk through some methods used throughout the centuries to calculate the square root, highlighting those that value its geometric representation. The Egyptian method is the central object of the research. From it, with the help of GeoGebra, some conjectures are formulated and later proved. The applicability of these ideas in classroom can be done in several moments of the basic education and becomes possible with the use of GeoGebra as a facilitator in the teaching-learning process. **Keywords**: Square Root, Mathematics History, Egyptians, GeoGebra.
Resumo	Neste artigo será feito um passeio por alguns métodos utilizados ao longo dos séculos para o cálculo de raiz quadrada, destacando aqueles que valorizam sua representação geométrica. O método Egípcio é o objeto central da pesquisa. Partindo dele, com a ajuda do GeoGebra, algumas conjecturas são formuladas e, posteriormente, provadas. A aplicabilidade dessas ideias em sala de aula poderá ser feita em diversos momentos da educação básica e se torna possível com a utilização do GeoGebra como um facilitador no processo de ensino-aprendizagem. **Palavras-chave:** Raiz quadrada, História da Matemática, Egipcios, GeoGebra.

1. Introdução

No atual currículo de Matemática da Educação Básica a referência à raiz quadrada de um número surge apenas no âmbito do estudo dos números reais. A acessibilidade ao uso de calculadoras e outros recursos computacionais fez com que se deixasse de sentir a necessidade do ensino de algoritmos que permitam o cálculo de valores aproximados de raízes quadradas irracionais.

Para um jovem estudante que, para calcular $\sqrt{k}$ (para algum número real k), apenas precisa apertar uma sequência bem simples de teclas da calculadora do seu celular, este cálculo é um processo que lhe aparece pronto e que lhe dá a falsa ideia de que a matemática é algo instantâneo. Devemos instigar no aluno a curiosidade pelos processos que foram utilizados em outros tempos e por outros povos, e estabelecer um paralelo com o que a tecnologia nos permite fazer, nos dias de hoje.

Ao levar a História da Matemática para a sala de aula, permite-se a criação de momentos em que os processos particulares da construção do conhecimento matemático por diversos povos ao longo dos séculos são explicados e interpretados, numa perpectiva humanista e humanizadora. Assim, a Matemática revela-se uma prática coletiva, de trocas constantes, dinâmina e dialética e que permite e inspira uma atividade colaborativa tanto no que se refere ao domínio próprio como com outras áreas do conhecimento e da vida quotidiana.

Segundo D'Ambrosio,

> As idéias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D'AMBROSIO, 1999, p. 97)

E, tendo presente esta ideia, elaborou-se este artigo que poderá dar origem ao desenvolvimento de propostas de atividades a serem aplicadas em sala de aula para alunos que estejam tanto nos anos finais do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

Na próxima seção, *Representações*, iremos apresentar parte da discussão feita por Duval do que se entende por representação e da utilização da tecnologia para explorar diferentes representações de um mesmo objeto matemático. Na seção seguinte, *Processos de determinação da raiz quadrada*, faz-se uma viagem no tempo, elencando vários métodos que foram utilizados por diferentes povos, em diferentes momentos, para o cálculo de valores aproximados de raízes quadradas, dando especial destaque àqueles que utilizam processos de pensamento geométrico. Na penúltima seção, *Como os Egípcios calculavam raízes quadradas*, é dado especial destaque ao processo utilizado pelos egípcios para o cálculo de algumas raízes quadradas, que está registrado no papiro de Rhind, e colocamos algumas questões que serão comentadas na última seção, *Complementando os cálculos dos egípcios*. Aqui, o uso do método dos egípcios em simultâneo com a utilização do software GeoGebra conduziu a vários questionamentos no sentido de melhorar as aproximações obtidas. Algumas desses questionemnetos deram origem a conjeturas e a proposições que são por nós provadas. Finalmente, o artigo termina com *Algumas considerações finais*.

2. Representações

Tanto a significação como a representação estão associadas, e dependem, não só do sujeito/objeto em si, mas de conceitos, caraterísticas e propriedades, de crenças e convicções . Segundo Ribeiro (2008), na literatura, encontramos referência a vários tipos de representação: mental, social, visual, espacial, etc. Mas, todas elas são, a priori, mentais.

> Etimologicamente, 'representação' provém da forma latina '*repraesentare*' – fazer presente ou apresentar de novo. Fazer presente alguém ou alguma coisa ausente, inclusive uma idéia, por intermédio da presença de um objeto. (…)a representação é um processo pelo qual institui-se um representante que, em certo contexto limitado, tomará o lugar de que representa (Makowiecky, 2003, p.3-4)

Neste sentido, e ainda de acordo com Mackowiecky, pode pensar-se a representação como algo que substitui o *outro*, como a tradução mental de algo exterior e que está diretamente relacionada ao processo de abstração, sendo uma forma de expressar a percepção do *outro* (seja objeto, imagem, palavra). Assim, ela é o produto do resultado de uma prática simbólica ou não. "A representação do real, ou o imaginário é, em si, elemento de transformação do real e de atribuição de sentido ao mundo".

As primeiras representações feitas pelo homem terão resultado de conhecimentos que ele foi adquirindo e que terão surgido da sua vivência e da utilização dos sentidos associados a objetos reais, de conceitos que assim iam sendo construídos e de saberes reusultantes da prática, sobretudo no que respeita à forma e ao tamanho. Por isso, desde a antiguidade, as representações são utilizadas para resolução de problemas do quotidiano.

Muitas dessas representações eram registradas em diversos suportes que se desgastaram e deterioraram e, por esse motivo, bastante informação foi perdida ao longo do tempo. Alguns exemplos conseguiram chegar aos nossos dias, com qualidade suficiente para poderem ser interpretados. Isso ocorreu com as placas de cerâmica da Mesopotâmia, gravadas em escrita cuneiforme (c.1700 a.C), que eram um instrumento de contabilidade, e também com os papiros egípcios escritos em hieroglifos, nomeadamente os Papiros Matemáticos de Rhind e de Moscow, que apresentam alguns problemas aritméticos e outros relacionados à arquitetura e construção das pirâmides.(Katz, 2010, p. 4-36)

De acordo com Bastos (2016), o homem, já com posse de um maior conjunto de ferramentas foi percebendo que as representações seriam fruto de "uma combinação entre o real e a imaginação". Já não existiam "apenas problemas soltos a respeito das necessidades humanas, mas um conjunto de características que permitiam estruturar conhecimentos"(Bastos, 2016, p.5).

No Renascimento, com a mudança de olhar sobre a importância e o papel do homem no mundo, as representações começam a ter uma maior relevância. Flores indica que

> (…) anteriormente o conhecimento do mundo e dos homens estava sob o poder das entidades religiosas, (...) com a descoberta da razão o sujeito do conhecimento passa a conhecer e a representar os objetos do

> conhecimento. A questão da representação passa, então, a ser problematizada enquanto expressão iconográfica da relação entre o sujeito do conhecimento e o objeto dado a conhecer, criando princípios da representação sob o aspecto de fundamento teórico, epistemológico.(Flores, 2003, p.116)

Mudado o paradigma, houve também uma mudança de atitude, o homem renascentista procura construir o conhecimento, relacionando e explicando fenômenos e, também, representando-os. A representação passa a ter várias manifestaões e a sua importância vai sendo reconhecida.

Na matemática, a intuição geométrica e o discurso deixam de ser as referências para o conhecimento.

> O que se percebe é a presença de uma organização de signos que traz para o saber o que seria uma linguagem, os discursos e descrições em diferentes línguas (por conta de inúmeros povos e culturas) são traduzidos por uma uniformidade de símbolos e operações" (BASTOS, 2016, p.7).

No campo da geometria, novas definições surgiram, e com elas o aparecimento de novas geometrias que iam para além da percepção e das representações imediatas. Com a formalização e teorização da matemática, novas axiomáticas foram sendo propostas e, desse modo, novos campos de construção do conhecimento foram surgindo, alguns dos quais propiciam representações que vão para além da intuição. Assim, o papel das representações em matemática ultrapassa a mera estruturação do conhecimento, contribuindo para avanços e criação de novas áreas de estudo e pesquisa. Contudo, certamente elas possuíam estreita e importante relação com o desenvolvimento do raciocínio matemático visto que seu papel no processo de ensino-aprendizagem e compreensão da Matemática foi, e sempre será, estimulado e valorizado.

Assim, usando representações de um dado objeto matemático, é possível reconhecer e estudar as suas características e indicar propriedades por ele satisfeitas e, consequentemente, estruturar novos conhecimentos e, também, elencar novas representações. No entanto, as representações mais apropriadas para servir de base aos raciocínios matemáticos têm sido para muitos um grande problema.

É reconhecido que a prática de um ensino virado para a automatização e mera compreensão de noções, recorrendo a uma única representação, se tem mostrado inadequada para que haja uma aprendizagem efetiva. O professor precisa criar contextos que priveligiem conexões e, também, fomentar o recurso a diferentes registros de representação. Essa coordenação surge como condição fundamental para todas as aprendizagens de base. Por isso, é impossível falar em matemática sem referir as diferentes representações de conceitos e objetos e, ponto fundamental para a compreensão da matemática, na distinção estes e suas representações.

Para Duval (2012) torna-se imperioso distinguir a conceitualização que se pode ter sobre um objeto, das produções que dele se fazem, ou seja as representações mentais das semióticas. Exemplificando, prossegue

> Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. Consideram-se, geralmente, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, este ponto de vista é enganoso. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento. (Duval, 2012, p. 269)

Um aspeto de primordial importância ao ensinar um conceito, e que o professor deve ter sempre presente, é que não se confundam as representações com os objetos matemáticos e que estes possam ser identificados por cada uma das suas possíveis representações, tornando-se para isso necessária a utilização de um conjunto de vários registros de representação semiótica, destacando: figuras, diagramas, gráficos, escritas simbólicas e a língua natural. Duval salienta a importância de "que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis." (Duval, 2012, p. 270).

Para que um sistema semiótico seja considerado um registro de representação é necessário reconhcer nele três atividades cognitivas fundamentais, a saber: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. A conversão, sendo uma transformação externa ao registro inicial, e que inclui a representação de uma representação lingística (natural ou simbólica) em uma representação figural (ilustração, gráfico, diagrama) é de primordial importância.

Mas não podemos deixar de ter presente que uma representação apenas refere parte do conhecimento do objeto representado. Assim, "as figuras e, de maneira geral, todas as representações analógicas, podem representar somente estados, configurações ou produtos de operações, não ações ou transformações" (Bresson, 1987, *apud* Duval, 2012, p. 280). Mas, "as figuras permitem representar a totalidade de relações entre os elementos que constituem o objeto ou a situação" (Larkin & Simon, 1987, *apud* Duval, 2012, p. 280).

Entre as várias conexões que se podem estabelecer e que privilegiam a formação da representação de um objeto no registro figurativo, destaca-se o recurso a figuras geométricas para ensinar conceitos como frações e raízes quadradas, tradicionalmente associados ao campo numérico. Ao proceder desta forma, atribui-se novo significado às diversas unidades figurais, subordinando-as aos conceitos que estão presentes nos objetos em análise. Deste modo, as figuras geométricas saem do seu campo particular e são apropriadas por outros campos, tornando-se, assim, em figuras matemáticas, momento em que a denotação se sobrepõe à significação.

O avanço das tecnologias ocorrido nas últimas décadas facilitou a inclusão de mídias e softwares no processo de ensino-aprendizagem. Assim sendo, as representações e as visualizações geométricas atingiram um patamar nunca antes alcançado, não só na qualidade, como também na facilidade de manipulação e construção de determinados objetos geométricos. Como exemplo temos o

GeoGebra[1] que é um software livre criado em 2001 por Markus Hohenwarter e que traz aos usuários a possibilidade de combinar geometria, álgebra, gráficos e cálculos em um único ambiente. Este software possui em sua interface três áreas para diferentes representações dos objetos matemáticos: área algébrica, área de cálculo e área gráfica. Estas éreas estão interligadas, permitindo ao usuário observar, em simultâneo, diferentes representações de um mesmo objeto. Um objeto criado pode ser modificado após a sua criação, o que por sua vez acarreta a mudança de outros objetos interligados a este. Essa dinâmica permite ao usuário observar como as mudanças feitas em determinada representação modificam as outras representações e assim relacioná-las.

Muitos pesquisadores se têm debruçado sobre as potencialidades e vantagens de usar o GeoGebra, entre eles, Petla que afirma

> O GeoGebra é um programa bastante intuitivo e autoexplicativo, adequado a usuário com conhecimentos avançados em informática ou para iniciantes, sendo que o conhecimento matemático é o ponto fundamental de sua utilização. Por ser um software livre há colaboração de vários programadores inclusive brasileiros os quais disponibilizaram uma versão totalmente em português, o que facilita muito sua utilização em nosso país. (PETLA, 2008, p. 21)

Com tantos recursos, e ainda sendo um software livre e colaborativo, o Geogebra tem conquistado um espaço cada vez maior no meio acadêmico, se tornando assim um grande facilitador no processo de aprendizagem. Por ser um software dinâmico é no contexo de facilitador que o GeoGebra auxília na visualização geométrica dos métodos de cálculo da raiz quadrada. Além disso, este software possui grande potencial para a elaboração de conjucturas pela sua relativa facilidade de manipulação.

Atendendo à genialidade de determinadas propostas de resolução de problemas sugeridas por matemáticos das civilizações antigas, alguns questionamentos nos ocorrem, meramente como exercício de imaginação: Se nossos antepassados tivessem uma ferramenta poderosa como o GeoGebra, como teriam resolvido alguns desses problemas e que desdobramentos poderiam ter surgido perante alguns impedimentos? Como os diversos conceitos matemáticos evoluiriam e seriam desenvolvidos com a presença desse software? Qual teria sido o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem em matemática?

Um dos conceitos matemáticos em que o recurso a diferentes representações se revela facilitador de aprendizagem é o de “*raiz quadrada de um número”.*

Em língua natural, diz-se que a “raiz quadrada de um número não negativo é um outro número cujo quadrado é igual ao primeiro”. Este mesmo conceito pode ser representado por recurso à escrita simbólica própria da matemática “dado $A \geq 0$, $\sqrt{A} = b$ desde que $b^2 = A$ ”. Esta última igualdade pode ser interpretada como a representação da área, A, de um quadrado de lado de medida igual a b. Assim, a raiz quadrada de um número A $(A \geq 0)$ pode ser considerada como a medida, b, do lado de um quadrado cuja área é A,e isto conduz a uma representação geométrica daquele conceito. Como refere Pitombeira (2010) “a extração de raízes quadradas

[1] www.geogebra.org

sempre despertou grande interesse. Essa operação tem nítida importância geométrica, pois permite calcular efetivamente o lado de um quadrado cuja área é conhecida".

O cálculo explícito de uma raiz quadrada, comparada às restantes operações elementares que conhecemos, é algo bem mais complicado e elaborado. Ao longo do tempo, não só os métodos para o cálculo aproximado de raízes quadradas, como também para o cálculo exato desses valores, foram desenvolvidos por diversos povos.

3. Processos de determinação da raiz quadrada

Nesta seção serão apresentados, de forma sucinta e não necessariamente em ordem cronológica, alguns métodos presentes na literatura, para o cálculo de raiz quadrada. Antes de se iniciar a descrição dos métodos, vale a pena relembrar que determinar a raiz quadrada de um número real $r \geq 0$, é encontrar um número real p tal que $p^2 = r$. Além disso, se x e y são números reais não negativos, então $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$. Para maiores detalhes sobre os métodos apresentados abaixo sugerimos Lima (2013), Carvalho (2010), Silva (2013) e Katz (2010).

3.1. Algoritmo fundamental

Dado $n > 0$, começa-se por procurar dois quadrados perfeitos: o maior quadrado perfeito que lhe seja inferior e o menor quadrado perfeito que lhe seja superior. Deste modo é possível localizar $\sqrt{n}$ entre dois números naturais consecutivos a e b. Seja $m = \frac{a+b}{2}$ o centro do intervalo $[a, b]$. Temos três casos a considerar:

- Se $m^2 < n$, tem-se que $\sqrt{n}$ pertence ao intervalo $[m, b]$ e repete-se o procedimento até ao nível de aproximação desejado.
- Se $m^2 > n$, tem-se que $\sqrt{n}$ pertence ao intervalo $[a, m]$ e repete-se o procedimento até ao nível de aproximação desejado.
- Se $m^2 = n$, o valor desejado foi encontrado, ou seja, $\sqrt{n} = m$.

Observa-se que em cada passo, uma cota superior do erro cometido é a metade da amplitude do intervalo anterior.

3.2. Método da fatoração

Este método baseia-se no Teorema Fundamental da Aritmética[2]. Seja n um número real positivo para o qual se deseja calcular a sua raiz quadrada.

[2] Teorema Fundamental da Aritmética: Todo número natural maior que 1 ou é primo ou se escreve de modo único como o produto de números primos. Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em HEFEZ (2011).

Inicialmente, fatora-se o número n, ou seja, escreve-se o número n como um produto de fatores primos.

Note que se n é um quadrado perfeito, então os expoentes de seus fatores primos são todos pares e nesse caso a raiz quadrada de $n, \sqrt{n},$ é um número cujos fatores primos são os mesmos do número n com os expoentes divididos por 2:

$$n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k}$$

com p_i número primo e α_i número natural, para todo $i = 1, \dots, k$. Assim,

$$\sqrt{n} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

Caso n não seja um quadrado perfeito a raiz quadrada de n será representada como um produto de um número natural multiplicado por uma raiz quadrada de um número menor que o inicial e formado pelo produto dos fatores primos cujos expoentes eram ímpares.

$$n = p_1^{2\alpha_1+1} p_2^{2\alpha_2+1} \dots p_k^{2\alpha_k+1}$$

com p_i número primo e α_i número natural, para todo $i = 1, \dots, k$. Assim,

$$\sqrt{n} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \sqrt{p_1 p_2 \dots p_k}$$

Para prosseguir o cálculo terá que se recorrer ao processo anterior. No entanto, os cálculos resultantes serão mais simples do que se esse procedimento fosse aplicado diretamente ao número n.

3.3. Método das Subtrações

Rampazzo (1985) sugere este processo que é baseado no fato, já conhecido dos pitagóricos, de que "podemos formar quadrados adicionando números ímpares sucessivos a 1. (...) Os números ímpares adicionados encontravam-se na forma em L geralmente chamada de gnómon" (Katz, 2010, p. 63). Assim, a soma dos n primeiros números ímpares é um quadrado perfeito. Ou seja,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

A prova da igualdade anterior pode ser feita por recurso ao princípio de indução finita ou, como ilustrado na Figura 1, por via geométrica.

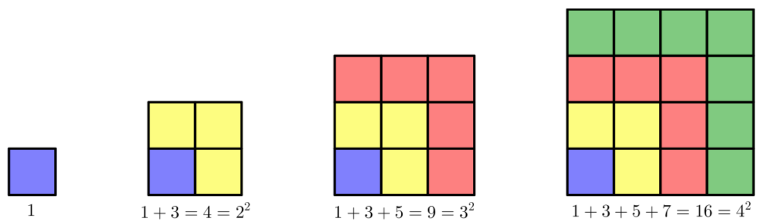


Figura 1. Representação dos 4 primeiros quadrados perfeitos como soma de números ímpares consecutivos. Fonte: Os autores (2020).

O recurso a este algoritmo só permite encontrar a raiz quadrada quando o número é um quadrado perfeito. Quando tal não acontece, ele fornece-nos a sua parte inteira. No entanto, desenvolvimentos posteriores, que podem ser vistos em Melo (2016), dão uma forma de se obterem aproximações da raiz quadrada de um número utilizando o método das subtrações.

De acordo com o método original e com o que foi apresentado acima, para verificar se um número natural é ou não quadrado perfeito basta subtrair dele a sucessão de números ímpares $(1, 3, 5, 7, \ldots)$. Isto é, calculando sucessivamente:

$$\begin{gathered} n_1 = n - 1 \\ n_2 = n_1 - 3 \\ n_3 = n_2 - 5 \\ \vdots \\ n_k = n_{k-1} - (2k - 1) \end{gathered}$$

O algoritmo termina quando $n_k \leq 0$ e conclui-se da seguinte forma:

- Se $n_k = 0$, o número n é um quadrado perfeito e k, número de subtrações realizadas, é a sua raiz quadrada, ou seja, $\sqrt{n} = k$.
- Se $n_k < 0$, o número n não possui raiz quadrada exata, ou seja, $\sqrt{n} \in]k - 1, k[$. Contudo, sabe-se que a parte inteira de $\sqrt{n}$ é $k - 1$.

3.4. Métodos Gregos

3.4.1. Método de Euclides

Este método aparece na literatura associado ao nome de Descartes. No entanto, Katz (2010, p.93) atribui-o a Euclides, estando presente no Livro II dos Elementos e sendo referenciado como proposição II-14: *Construir um quadrado igual a uma determinada figura retilínea dada*. Em terminologia algébrica, Euclides gostaria de obter a solução para a seguinte equação $x^2 = k$.

Observando geometricamente esta proposição, seja k o valor do qual se gostaria de obter a raiz quadrada. Numa reta considere os pontos A, B e C, por esta ordem, tais que $\overline{AB} = k$ e $\overline{BC} = 1$. Em seguida trace uma semicircunferência de diâmetro $\overline{AC}$. Por B, traça-se a perpendicular ao segmento de reta $\overline{AC}$ até esta intersectar a semicircunferência, determinando assim o ponto R (Figura 2).

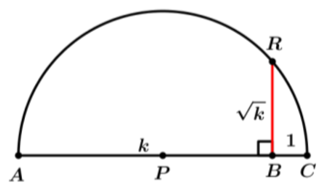


Figura 2. Representação geométrica da raiz quadrada. Fonte: Os autores (2020).

Note que o segmento $\overline{BR}$ é a altura do triângulo retângulo ACR, retângulo em R. Das relações métricas do triângulo retângulo resulta que $\overline{BR}$ representa a $\sqrt{k}$.

Ressalta-se que este método permite-nos construir um segmento cujo comprimento, numa dada unidade, tem medida $\sqrt{k}$, e não calcular seu valor.

3.4.2. Método de Heron

Heron de Alexandria (sec I d.C) se destacou pelos seus trabalhos em Matemática aplicada, seus escritos mostram e enfatizam com maior frequência as aplicações práticas em comparação ao embasamento teórico. Heron desenvolveu um método iterativo para o cálculo da raiz quadrada de um número k, e que consiste nos seguintes passos:

i) Seja a^2 o quadrado perfeito mais próximo de k.

ii) Calcular o quociente de k por a. $\frac{k}{a}$

iii) Calcular a média aritmética entre a e o quociente obtido em (*ii*), obtendo $\frac{a+\frac{k}{a}}{2}$

iv) $\sqrt{k}$ é o valor obtido em *(iii)*

Repara-se que $\frac{k}{a} = a + \frac{k-a^2}{a}$, pelo que de (*iii*) resulta em $\frac{a+\frac{k}{a}}{2} = a + \frac{k-a^2}{2a}$

Elevando ao quadrado o segundo membro desta igualdade resulta

$$\left(a + \frac{k-a^2}{2a}\right)^2 = a^2 + k - a^2 + \left(\frac{k-a^2}{2a}\right)^2 = k + \left(\frac{k-a^2}{2a}\right)^2$$

Assim, uma aproximação para $\sqrt{k}$ é dada por $\sqrt{k} \cong a + \frac{k-a^2}{2a}$

Note que o erro máximo cometido nesse processo é tal que

$$\left|\left(a + \frac{k-a^2}{2a}\right) - \sqrt{k}\right| \leq \frac{|k-a^2|}{2a}$$

O pensamento de Heron, segundo Carvalho (2010), "menciona explicitamente a ideia de repetir o cálculo, a partir do valor obtido anteriormente, a fim de aproximar tanto quanto quisermos a raiz quadrada procurada." Deste modo obtém-se uma sequência recursiva $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right)$ que converge para $\sqrt{k}$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{k}$ e cujos termos são sucessivas aproximações de $\sqrt{k}$.

3.4.3. A escada de Theon

Theon de Smirna apresentou um algoritmo para o cálculo da raiz quadrada de 2, que foi generalizado para o cálculo de raiz quadrada de um número natural qualquer. Tal generalização é apresentada por Carvalho (2010).

O método consiste na definição de duas sequências definidas recursivamente, a saber: $x_{n+1} = x_n + y_n$ e $y_{n+1} = x_{n+1} + (k-1)x_n$

sendo k, o número cuja raiz quadrada se pretende encontrar e $x_1 = y_1 = 1$.

É imediato que $y_{n+1} = kx_n + y_n$.

Considere para cada n a razão $r_n = \frac{y_n}{x_n}$.

A sequência r_n é convergente para um número r. Ora,

$$r_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{kx_n + y_n}{x_n + y_n} = \frac{k + \frac{y_n}{x_n}}{1 + \frac{y_n}{x_n}} = \frac{k + r_n}{1 + r_n} \to \frac{k+r}{1+r}, \text{ quando } n \to \infty$$

Como $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ e $\lim_{n\to\infty} r_n = \frac{k+r}{1+r}$ temos que $r = \frac{k+r}{1+r}$ e, portanto, $r = \sqrt{k}$. Os termos da sequência (r_n) são sucessivas aproximações de $\sqrt{k}$.

3.5. Método Hindu

Dos relatos que chegam até nós da matemática hindu, ressalta a sua vertente aritmética em detrimento de uma abordagem geométrica. Contudo, por volta de (800-600) a.C., foram escritos na Índia os *Sulbasutras* (textos que forneciam instruções cuidadosas de como construir altares para rituais religiosos).

Nesses textos foi proposto o seguinte método para o cálculo de $\sqrt{2}$: "Aumentada a medida de sua terça parte, e essa terça parte da sua própria quarta parte menos a trinta e quatro-ésima parte dessa quarta parte" (Mankiewicz, 2001, p. 40). Na Figura 3 ilustra-se o cálculo descrito da afirmativa anterior.

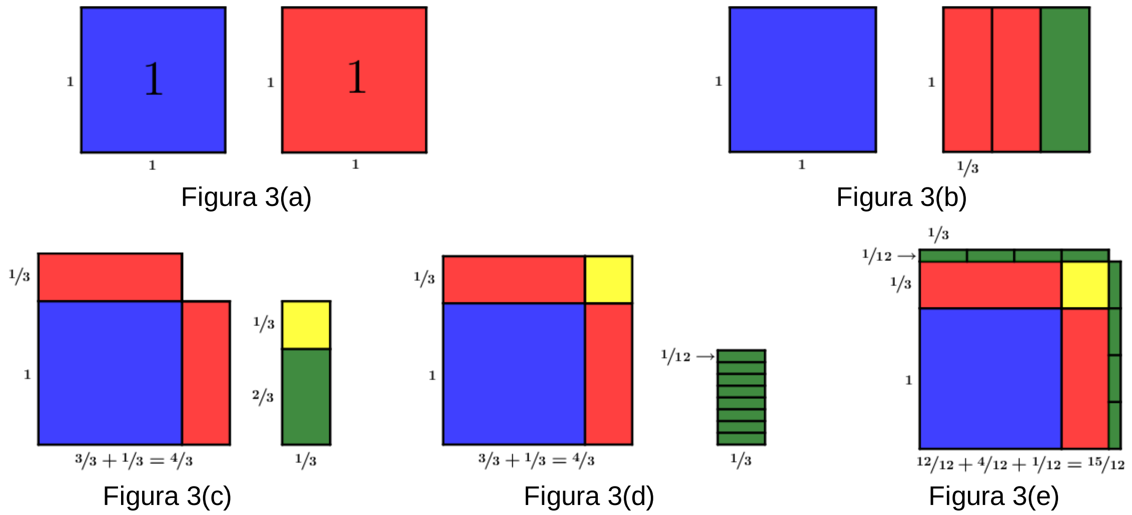


Figura 3. Representação geométrica para o método hindu no cálculo de $\sqrt{2}$. Fonte: Os autores (2020).

Sendo assim, o valor dado pela expressão abaixo era utilizado como aproximação para $\sqrt{2}$, possuindo as cinco primeiras casas decimais exatas.

$$\sqrt{2} \cong 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34}$$

Na expressão anterior, a parcela com sinal negativo se deve a uma compensação a fim de se obter uma melhor aproximação para raiz quadrada que será explicada no exemplo a seguir.

Baseado no raciocínio então usado e descrito por Hogdson (2008, p. 16-18) será apresentado a seguir o cálculo de $\sqrt{5}$. Nesse desenvolvimento os erros de aproximação para a raiz pretendida serão calculados em diferentes passos para que seja observada a evolução das aproximações e consequentemente o decréscimo do erro cometido.

Tendo por objetivo construir um quadrado com área igual a 5, começa-se por decompor o número como uma soma (com o menor número de parcelas) de quadrados perfeitos: $5 = 4 + 1$. Assim, vai-se partir de dois quadrados com áreas 4 e 1 (Figura 4(a)). Esses valores são escolhidos pois 4 é o quadrado perfeito mais próximo e menor que 5. Resumidamente, o método consiste em utilizar a área do quadrado menor para ampliar o quadrado maior de forma a se obter um novo quadrado cuja área seja o mais próximo possível de 5.

Para uma primeira aproximação, tome o quadrado menor e divida-o em 4 retângulos iguais (Figura 4(b)). Cada um dos retângulos possui lados de valores 1 e $\frac{1}{4}$ e esses retângulos serão colocados, dois a dois, sobre os lados do quadrado maior (Figura 4(c)). Faltando, assim, um quadrado de lado $\frac{1}{4}$ para formar um novo quadrado de lado $2+\frac{1}{4}$, como se vê na Figura 4(d).

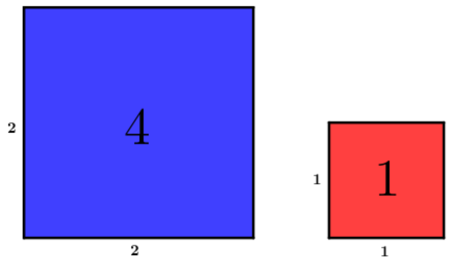


Figura 4(a)

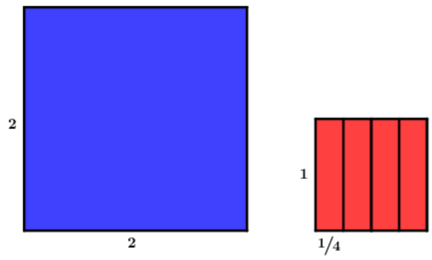


Figura 4(b)

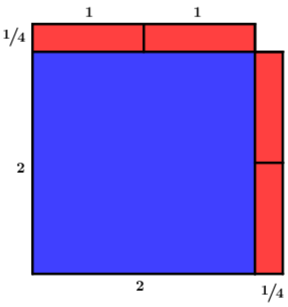


Figura 4(c)

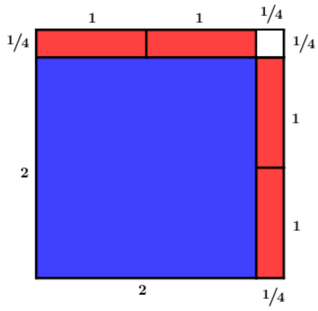


Figura 4(d)

Figura 4. Representação geométrica do erro cometido para o cálculo da √□. Fonte: Os autores (2020).

A área desse novo quadrado excede 5 em exatamente $\left(\frac{1}{4}\right)^2$. Assim, é preciso retirar a este quadrado, tanto na vertical, quanto na horizontal uma “tirinha”, ou seja, para reequilibrar o todo, é necessário “repartir” a área deste quadradinho ao longo dos lados do quadrado recortando-o. Desta forma imagine que seja retirada uma banda de largura x ao longo de cada um dos lados do quadrado tal que a área das duas bandas totalize $\frac{1}{16}$, ou seja, $2x\left(2+\frac{1}{4}\right)-x^2=\frac{1}{16}\#(1)$

Desprezando o termo x^2, obtemos uma equação de 1º grau cuja solução é $\frac{1}{9\times8}$, pelo que a equação (1) tem este valor como solução aproximada e consequentemente obtém-se uma aproximação para $\sqrt{5}$ que será calculada por $2+\frac{1}{4}-\frac{1}{9\times8}$.

O que ocorreria se inicialmente tivéssemos dividido o quadrado menor em mais partes? Vamos dividi-lo em 5 retângulos iguais de dimensões 1 e $\frac{1}{5}$, como na Figura 5(a). Vamos colocar 4 desses retângulos sobre os lados do quadrado maior de lado 2 para formar um novo quadrado de lado $\frac{11}{5}$. Do retângulo restante vai ser retirado 1 quadrado de lado $\frac{1}{5}$, restando um retângulo de lados $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{5}$. Este quadrado irá completar o quadrado de lado $\frac{11}{5}$. (Figura 5(b)). O retângulo restante será dividido em 22 partes iguais de forma que estas possam ser alocadas à volta deste último quadrado (Figura 5(c)).

Observando a Figura 5(d) nota-se que está faltando um quadrado de lado $\frac{2}{55}$ para ser gerado um quadrado com lado $2+\frac{1}{5}+\frac{2}{55}=\frac{123}{55}$

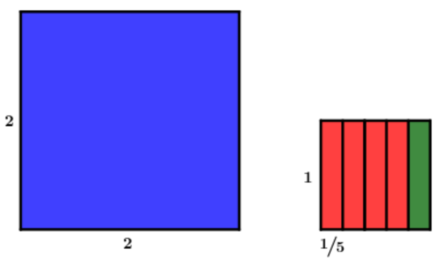


Figura 5(a)

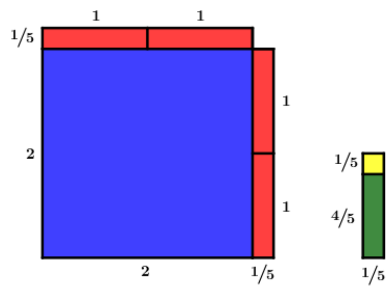


Figura 5(b)

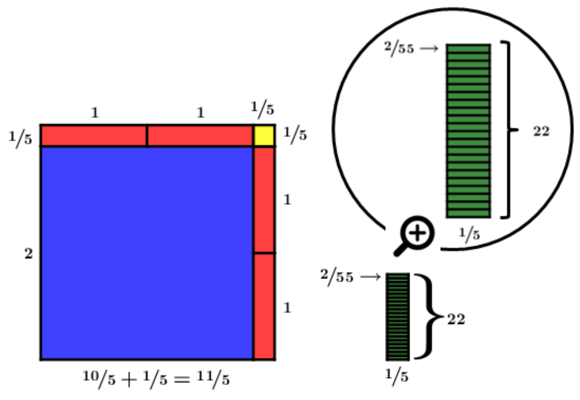


Figura 5(c)

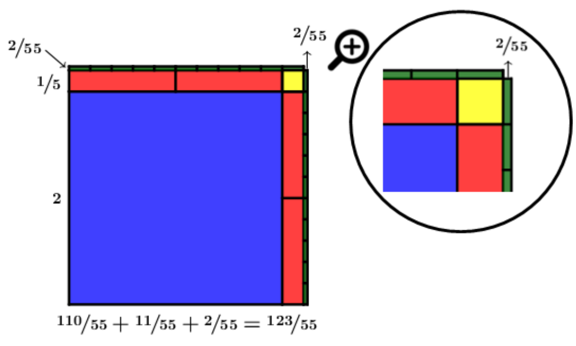


Figura 5(d)

Figura 5. Representação do passo a passo para uma aproximação da $\sqrt{\square}$. Fonte: Os autores (2020).

Este valor encontrado é uma aproximação de $\sqrt{5}$. Contudo, vamos continuar o processo, para reequilibrar o todo, sendo necessário retirar a área deste quadradinho ao longo de dois lados consecutivos do quadrado. Desta forma, imagine que sejam retiradas bandas de largura x ao longo desses lados, tal que a área das duas bandas totalize $\left(\frac{2}{55}\right)^2$, ou seja, $2x\left(2+\frac{1}{5}+\frac{2}{55}\right)-x^2=\left(\frac{2}{55}\right)^2$.

Esta última equação tem como solução aproximada $x\approx\frac{1}{55\times 123}$ que se obtém desprezando o termo x^2. Logo uma aproximação para $\sqrt{5}$ é dada por $2+\frac{1}{5}+\frac{2}{55}-\frac{1}{55\times 123}=2{,}2362158167$. Usando uma calculadora, temos que a $\sqrt{5}\approx 2{,}2360679775$ e comparando com a aproximação anterior observa-se que as três primeiras casas decimais são exatas.

3.6. Método Chinês

O método chinês de cálculo da raiz quadrada, que se apresenta a seguir, se baseia na decomposição de um número em unidades, dezenas, centenas, etc e no processo geométrico de multiplicação por decomposição, e que está na base do algoritmo ensinado na educação básica (BARONE, 1983).

Sabe-se que o quadrado de um número de p algarismos tem $2p-1$ ou $2p$ algarismos. Reciprocamente, o número de algarismos da raiz quadrada de um número de p algarismos é $\frac{p}{2}$, se p é par ou $\frac{p+1}{2}$, se p é ímpar.

Assim, por exemplo, se $n=273529$, $k=\sqrt{263169}$ tem 3 algarismos e por isso $k=100.c+10.d+u$, com c,d e u representando algarismos $(c\neq 0)$. O problema da determinação de k consiste em encontrar c,d e u tais que $(100.c+10.d+u)^2=273529$.

Para isso, vai recorrer-se à representação geométrica do primeiro membro desta igualdade: um quadrado de lados $100.c+10.d+u$ (Figura 6(a)). Começa-se por determinar o algarismo de maior ordem, neste caso c. Para isso procura-se o maior c tal que $(100.c)^2\leq 273529$. Se $c=5$ obtemos $(100.5)^2=250000\leq 273529$. Faça-se a diferença entre o número $n=273529$ e $(100.5)^2$ obtendo $273529-250000=23529$ que, na Figura 6(b), corresponde à área do gnómon maior. Para determinar d tem que se ter em consideração a sua presença em dois retângulos e num quadrado (Figura 6(b)), ou seja, d tem que ser tal que

$$2.100.5.10.d+(10.d)^2\leq 23529 \qquad (2)$$

Para simplificação de cáculos observemos quais valores de d satisfazem $2.100.5.10.d\leq 23529$. Esta desigualdade vale para $d=0,1,2$. Por experimentação, vejamos qual é o maior destes valores que satisfaz (2). Ora, se $d=2$, vem $2.100.5.10.2+(10.2)^2=20400<23529$. Assim, conclui-se que $d=2$.

Faça-se, agora, a diferença entre 23529 e 20400, $23529-20400=3129$ que corresponde, na Figura 6(c), à área do gnómon menor.

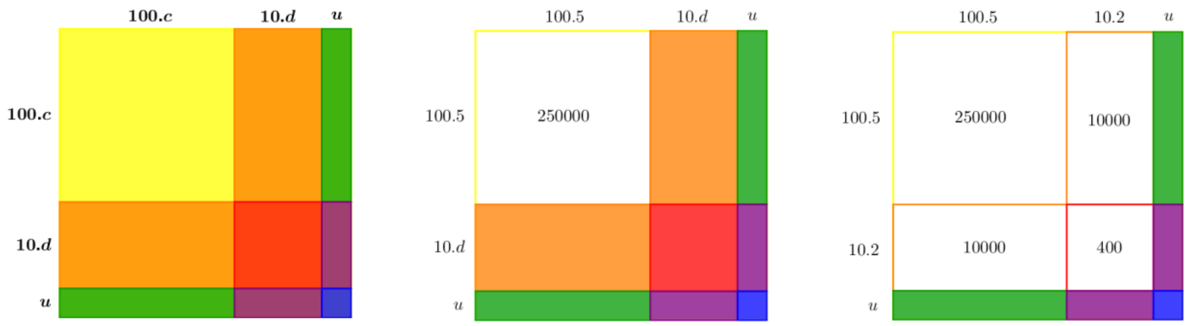


Figura 6(a) Figura 6(b) Figura 6(c)

Figura 6. Representação da decomposição em classes para o cálculo da $\sqrt{\square\square\square\square\square\square}$. Fonte: Os autores (2020).

Finalmente, para determinar u tem que se ter em consideração a sua presença em dois retângulos e num quadrado (Figura 6), ou seja, u tem que ser tal que

$$2.(100.5 + 10.2).u + u^2 \leq 3129 \qquad (3)$$

Para simplificação de cáculos vejamos que valores de d satisfazem $2.(100.5 + 10.2)u \leq 3129$. Esta desigualdade vale para $u \leq 3$. Por experimentação obtenhamos qual é o maior valor que satisfaz (3). Ora, se $u = 3$, vem $2.(100.5 + 10.2).3 + 3^2 = 3129$. Assim, conclui-se que $u = 3$. E a raiz é exata: $k = \sqrt{263169} = 523$.

De acordo com Hodgson (2008, p.18), se o número n não fosse um quadrado perfeito, tal não seria impedimento para usar o mesmo processo, uma vez que “o algoritmo dá, um a um, os algarismos da raiz quadrada, qualquer que seja o seu valor posicional”, a discussão feita “podia ser assim facilmente transposta para o caso de uma raiz quadrada não inteira”.

Para finalizar a presente seção convém referir que a determinação da raiz quadrada de número que não seja quadrado perfeito é um tipo de problema que pode levar à utilização de métodos numéricos que conduzem a uma solução aproximada, como os métodos des Heron e Theon. Nestes métodos, se incluem os chamados métodos iterativos, que estão associados aos conceitos de aproximação por repetição sucessiva de um processo (iteração) e ao de aproximação local.

Assim, é gerada uma sequência de soluções aproximadas que vão melhorando à medida que as iterações são executadas e que convergem para o valor procurado. Entre os métodos iterativos, destacamos o método de Newton-Raphson, o método do ponto fixo, o método da bisseção e o método dos babilônicos.

A implementação destes métodos pode levar a cálculos fastidiosos que, com o advento da computação, deixaram de ser efetuados a mão, fazendo com que suas soluções fossem obtidas de forma bem mais rápida. Não é nosso objetivo fazer aqui a exposição desses métodos, a sua explicação pode ser encontrada nas referências citadas no início da seção.

4. Como os Egípcios calculavam raízes quadradas

O problema 50 do papiro de Rhind trata de encontrar a área de um círculo, dado seu diâmetro, e aproxima-a pela área do quadrado cujo lado é igual a $\frac{8}{9}$ do referido diâmetro. Uma questão intrigante é saber de onde surge este valor. Ora, esse valor surge no problema 48 do mesmo papiro, e decorre do cálculo da área de um óctogono inscrito num quadrado de lado igual ao diâmetro do referido círculo. Na sequência do problema 48, ao procurar o quadrado com área igual à do octógono, surge a necessidade de representar um quadrado de área igual a $\frac{63}{81}$, o que equivale a calcular a raiz quadrada de $\frac{63}{81}$. (Katz, 2012 p. 28).

Para resolver este problema, os egípcios começaram por procurar um retângulo com igual área. Dos possíveis retângulos por eles conhecidos, escolheram aquele que tem lados mais próximos, ou seja, cuja forma é mais próxima do quadrado. Assim, para encontrar um quadrado com área $\frac{63}{81}$, partiram do retângulo de lados $\frac{7}{9}$ e $\frac{9}{9}$ (Figura 7(a)).

Após isso, numa tentativa de transformar o retângulo no quadrado desejado, consideravam no retângulo inicial um quadrado de lado $\frac{7}{9}$ (o menor lado do retângulo), sobrando um retângulo de lados $\frac{7}{9}$ e $\frac{2}{9}$ (Figura 7(b)). Dividiam o retângulo restante, de lados $\frac{7}{9}$ e $\frac{2}{9}$, em dois retângulos iguais (Figura 7(c)). Em seguida colavam um destes pequenos retângulos sobre um dos dois lados consecutivos do quadrado. Originando um gnomon (Figura 7(d)).

Os egípcios não estavam interessados no cálculo da raiz quadrada em si, mas na sua utilização para obter uma aproximação para a área do círculo. Apesar do erro cometido, eles estavam satisfeitos com a aproximação obtida e consideraram que o quadrado de lado $\frac{8}{9}$ era uma aproximação suficiente para a área pretendida, não se importando com o pequeno quadrado a mais, de área $\frac{1}{81}$. Assim, eles tinham que $\sqrt{\frac{63}{81}} \approx \frac{8}{9}$, esta aproximação por excesso com um erro inferior a $\frac{1}{9}$ (Figura 7(e)).

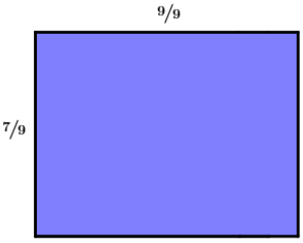


Figura 7(a)

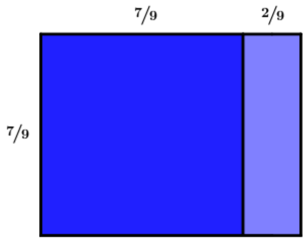


Figura 7(b)

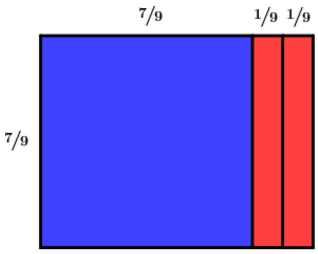


Figura 7(c)

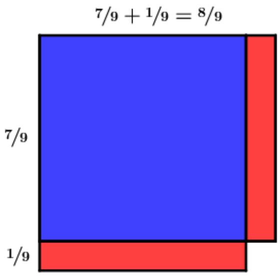


Figura 7(d)

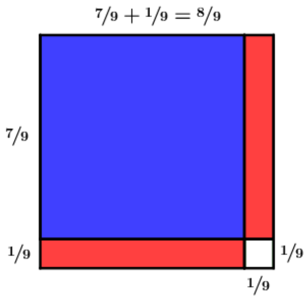


Figura 7(e)

Figura 7. Representação do retângulo de área □□/□□ e a decomposição em lados □/□ e □/□. Fonte: Os autores (2020).

Apesar de não se terem encontrado outros exemplos de cálculo da raiz quadrada, existe num papiro a referência que $\sqrt{\frac{61}{4}}$ é $\frac{21}{2}$. Repare-se que o erro cometido neste caso é muito grande já que $\left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{441}{4}$. Terá sido um erro do escriba ao fazer a anotação? Ou o erro é cometido no cálculo pelo método anterior e se deve ao fato de *61* ser um número primo o que dificultaria a decomposição em fatores, necessária para o quadrado inicial?

Esta e outras questões nos levaram a fazer algumas considerações sobre o presente método e que serão vistas na próxima seção.

5. Complementando os cálculos dos Egípcios

Objetivando refletir sobre os questionamentos feitos na seção anterior e ampliar alguns estudos relacionas ao cálculo de raízes quadradas utilizando o mesmo método que os egípcios, vamos fazer algumas considerações que decorrem do fato de $\frac{63}{81} = \frac{7}{9}$. Vale ressaltar que o uso de $\frac{63}{81}$ e não da fração geratriz $\frac{7}{9}$, por parte dos egípcios, deve-se a motivos já mencionados.

Para calcular $\sqrt{\frac{7}{9}}$, se pode pensar no resultado obtido pelos egípcios para $\sqrt{\frac{63}{81}}$ atendendo a que $\frac{63}{81} = \frac{7}{9} \times \frac{9}{9}$, eles partiram de um retângulo de lados $\frac{9}{9} = 1$ por $\frac{7}{9}$ e obtiveram $\sqrt{\frac{63}{81}} \approx \frac{8}{9}$ com erro inferior a $\frac{1}{9}$. Repare-se que pelo fato de $\frac{9}{9} = \frac{k}{k} = 1, k \in IN^*$, qualquer que fosse o valor de k eles obteriam sempre o mesmo valor aproximado e o mesmo majorante do erro, desde que utilizassem um retângulo de lados $\frac{7}{9}$ e $\frac{k}{k} = 1$.

Generalizando o raciocínio dos egípcios, pode se enunciar a seguinte

Proposição 1: Sejam $a, b, k \in \mathrm{IN}^*$, com $a < b$. Se para o cálculo aproximado da $\sqrt{\frac{a}{b}}$ se utiliza uma qualquer fração equivalente e a decomposição feita for $\frac{a}{b}$ e $\frac{k}{k}$, então $\sqrt{\frac{a}{b}} \approx \frac{a+b}{2b}$ e o erro cometido é inferior a $\frac{b-a}{2b}$.

Prova: Faz-se inicialmente a diferença $\frac{k}{k} - \frac{a}{b} = \frac{(b-a)k}{bk} = \frac{b-a}{b}$ para, a partir de um retângulo de lados $\frac{k}{k} = 1$ e $\frac{a}{b}$, obter um quadrado de lado $\frac{a}{b}$ e um retângulo de lados $\frac{k}{k} = 1$ e $\frac{b-a}{b}$. Continuando, este retângulo será dividido em dois retângulos congruentes de dimensões $\frac{k}{k} = 1$ e $\frac{b-a}{2b}$. Um desses retângulos será deslocado para um lado consecutivo do quadrado gerando um gnomon, que difere $\left(\frac{b-a}{2b}\right)^2$ de um quadrado de lado $\frac{a}{b} + \frac{(b-a)}{2b} = \frac{a+b}{2b}$, completando assim a prova.

Uma pergunta que ocorre, agora, é a seguinte:

Será que, partindo de uma fração equivalente a $\frac{7}{9}$ e usando a construção de um outro tipo de retângulo, se consegue obter uma melhor aproximação de $\sqrt{\frac{7}{9}}$ e que minimize o majorante do erro encontrado?

Para responder a essa questão vamos decompor a fração $\frac{7k}{9k}, k \in IN^*$ num produto de duas frações da seguinte forma: $\frac{7k}{9k} = \frac{7}{k} \times \frac{k}{9}$. Partindo, assim, de um retângulo de dimensões $\frac{7}{k}$ e $\frac{k}{9}$. Para construir o quadrado e posteriormente o gnomon, tem que ser calculada a diferença entre o maior e o menor lado do retângulo.

Assim, deve se considerar a seguinte diferença, em módulo: $\left|\frac{7}{k} - \frac{k}{9}\right| = \left|\frac{63-k^2}{9k}\right|$ e ver o quanto ela permite obter um erro inferior a $\frac{1}{9}$. $\left|\frac{63-k^2}{9k}\right| < \frac{2}{9} \#(4)$

Representando graficamente a desigualdade (4) e restringindo apenas aos números inteiros positivos, temos que $k = 8$ é a única solução (Figura 8).

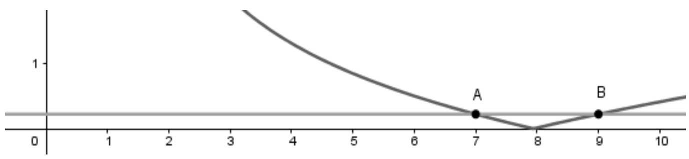


Figura 8. Representação gráfica das funções $\mathbf{f(x) = \left|\frac{63-k^2}{9k}\right|}$ e $\mathbf{g(x) = \frac{2}{9}}$. Fonte: Os autores (2020).

Algebricamente, o desenvolvimento de (4) é dado por: $-\frac{2}{9} < \frac{63-k^2}{9k} < \frac{2}{9}$.

$$-2 < \frac{63 - k^2}{k} < 2$$

Como $k > 0$ vem $-2k \underbrace{<}_{(*)} 63 - k^2 \underbrace{<}_{(**)} 2k$. De $(*)$ temos que $k^2 - 2k - 63 < 0$

Assim, o subconjunto dos naturais que satisfaz esta inequação é $S = \{k \in IN^* : k < 9\}$. Analogamente, de $(**)$ temos que $k^2 + 2k - 63 > 0$.

Que é satisfeito para $S' = \{k \in IN^* : k > 7\}$. Qualque valor de $S \cap S'$ melhora o erro encontrado anteriormente, o que no caso ocorre apenas com $k = 8$.

Assim, para calcular a $\sqrt{\frac{7}{9}}$ vamos utilizar $\sqrt{\frac{56}{72}}$, iniciando o processo com um retângulo de lados $\frac{8}{9}$ por $\frac{7}{8}$ (Figura 9(a)).

Ao construir o quadrado de lado $\frac{7}{8}$, vai restar um retângulo de dimensões $\frac{7}{8}$ por $\frac{1}{72}$ (Figura 9(b)). Em seguida, o retângulo restante é dividido em dois retângulos iguais de dimensões $\frac{7}{8}$ por $\frac{1}{144}$, em que um destes retângulos será deslocado para o lado adjacente (Figura 9(c)). O que nos leva a obter para a raiz quadrada a fração $\frac{127}{144}$ e um majorante do erro igual a $\frac{1}{144}$ (Figura 9(d)).

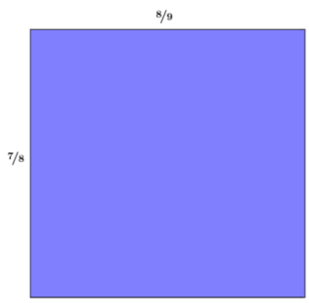


Figura 9(a)

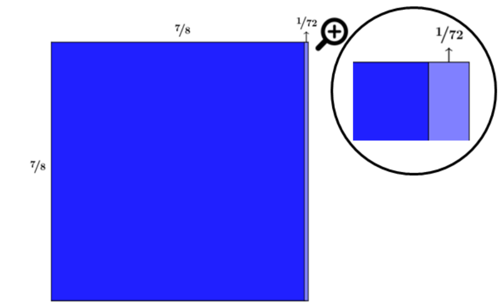


Figura 9(b)

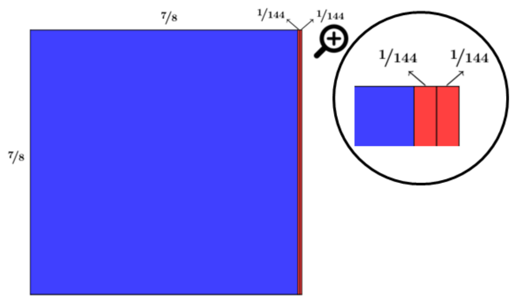


Figura 9(c)

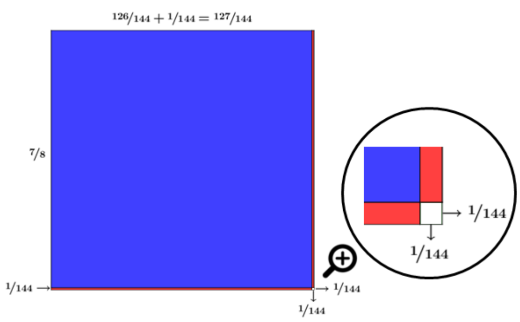


Figura 9(d)

Figura 9. Retângulo de área □□/□□ e lados □/□ e □/□. Fonte: Os autores (2020).

O que foi observado, leva-nos a enunciar a seguinte proposição:

Proposição 2: Sejam $a, b, k \in \mathrm{IN}^*$, com $a < b$. Se para o cálculo aproximado da $\sqrt{\frac{a}{b}}$ for utilizada uma qualquer fração equivalente a $\frac{a}{b}$ e se a decomposição feita for $\frac{a}{k}$ e $\frac{k}{b}$, então o valor de k, que minimiza, o erro pertence ao conjunto $U = \{k \in IN^* : a < k < b\}$

e é aquele cujo quadrado perfeito é o mais próximo de ab e um majorante do erro é $\frac{|k^2-ab|}{2kb}$.

Prova: Para construir o quadrado e obter o majorante do erro, faz-se a diferença entre o maior e o menor dos lados, que é dada por $\left|\frac{a}{k}-\frac{k}{b}\right|$. Pretende-se saber quando esta diferença é menor do que a obtida na Proposição 1

Como consequência tem-se $\left|\frac{a}{k}-\frac{k}{b}\right| = \left|\frac{ab-k^2}{kb}\right| < \frac{b-a}{b}$

Ou seja, $\frac{a-b}{b} < \frac{ab-k^2}{kb} < \frac{b-a}{b}$. Assim, temos $a-b < \frac{ab-k^2}{k} < b-a$.

Logo, $(a-b)k \underbrace{<}_{(*)} ab-k^2 \underbrace{<}_{(**)} (b-a)k$

De $(*)$, temos a seguite desigualdade $k^2+(a-b)k - ab < 0$. Ou $k^2-(b+(-a))k - ab < 0$

Assim, se $k \in IN$ satisfaz a inequação, temos que $S = \{k \in IN^* : k < b\}$. Analogamente, para a inequação $(**)$, temos $k^2+(b-a)k - ab > 0$

Ou melhor, $k^2-(a+(-b))k - ab > 0$

Assim, se $k \in IN$ satisfaz a inequação, temos que $S' = \{k \in IN^* : k > a\}$. O conjunto $S \cap S' \neq \emptyset$, se $b \neq a+1$. Então, o valor que minimiza a situação proposta está neste conjunto. Se $S \cap S' = \emptyset$, então $b = a+1$ e $k = a$ ou $k = a+1$.

Para concluir a demosntração, temos que o majorante do erro é dado por $\left|\frac{ab-k^2}{2kb}\right|$ e o valor de $k \in]a,b[$ que minimiza esta expressão é o valor de k que torna mínimo o valor da expressão $|k^2-ab|$, ou seja, é aquele cujo quadrado é o mais próximo de ab. ■

De acordo com o que foi visto anteriormente, observar-se uma melhora considerável na aproximação para $\sqrt{\frac{7}{9}}$ ao tomar $k=8$ em comparação ao $k = 9$ e, além disso, concluí-se que a aproximação utilizada minimiza o majorante do erro, respondendo assim aos questionamentos propostos anteriormente.

Considerando ainda, como referencial, o método utilizado pelos egípcios para o cálculo de raízes quadradas, passamos a analisar a aproximação obtida para raízes cujo radicando é do tipo $\frac{a}{b}$, com $a > b$ e $b \neq 0$. Sendo assim, as duas próximas proposições analisarão esses casos.

Proposição 3: Sejam $a, b, k \in IN^*$, com $a > b$, $b = 1$ e seja k^2 o quadrado perfeito mais próximo de a. Se, para o cálculo aproximado da $\sqrt{a}$ e utilizar a fração equivalente $a \times \frac{k^2}{k^2}$ e a decomposição feita for $\frac{a}{k}$ e $\frac{k^2}{k}$, então $\sqrt{a} \approx \frac{a+k^2}{2k}$ e o erro cometido é inferior a $\left|\frac{k^2-a}{2k}\right|$.

Prova: Calcula-se inicialmente o módulo da diferença $\left|\frac{k^2}{k}-\frac{a}{k}\right| = \left|\frac{k^2-a}{k}\right|$ para, a partir de um retângulo de lados $\frac{k^2}{k} = k$ e $\frac{a}{k}$, obter um quadrado de lado $m = min\left\{\frac{a}{k}, k\right\}$ e um retângulo de lados m e $\left|\frac{k^2-a}{k}\right|$. Continuando, este retângulo será dividido em dois retângulos congruentes de dimensões m e $\left|\frac{k^2-a}{2k}\right|$. Um desses retângulos será deslocado para um lado consecutivo do quadrado gerando um gnomon, que difere $\left(\frac{k^2-a}{2k}\right)^2$ de um quadrado de lado $m+\left|\frac{k^2-a}{2k}\right| = \frac{a+k^2}{2k}$, completando assim a prova. ■

A proposição anterior indica-nos um processo para a determinação de valores aproximados de raízes quadradas de números inteiros, no entanto nada garante se este processo nos fornece a "melhor" aproximação. Sabemos apenas, que quanto mais próximo de k^2 se encontrar o radicando, melhor será a aproximação obtida. Vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 1: Para a aproximação de $\sqrt{24}$, temos que o quadrado perfeito mais próximo de 24 é o $25 = 5^2$. Assim, usando $24 = 24 \times \frac{25}{25} = \frac{24}{5} \times \frac{25}{5}$, iremos obter $\sqrt{24} \approx \frac{24}{5} + \frac{1}{10} = 4{,}9$, com erro inferior a $\frac{1}{10}$. Repare que a aproximação dada pela calculadora fornece $\sqrt{24} \approx 4{,}8989794856 \ldots$

Exemplo 2: Para a aproximação de $\sqrt{5}$, temos que o quadrado perfeito mais próximo de 5 é $4 = 2^2$. Assim, usando $5 = 5 \times \frac{4}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{4}{2}$, iremos obter $\sqrt{5} \approx \frac{4}{2} + \frac{1}{4} = 2{,}25$, com erro inferior a $\frac{1}{4}$. Note que o valor fornecido pela calculadora é $\sqrt{5} \approx 2{,}2360679775 \ldots$

Exemplo 3: Para a aproximação de $\sqrt{2}$, temos que o quadrado perfeito mais próximo de 2 é $1 = 1^2$. Assim, usando $2 = 2 \times \frac{1}{1} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{1}$, iremos obter $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$, com um erro inferior a $\frac{1}{2}$. Vale ressaltar que ao usar $k^2 = 4 = 2^2$ viria $2 = 2 \times \frac{4}{4} = \frac{2}{2} \times \frac{4}{2}$, que origina a mesma aproximação! Por que ocorreu esta situação? Isso se deve ao fato de $x = 1$ e $x = 2$ serem os inteiros que minimizam $f(x) = \frac{|x^2-2|}{x}$, Figura 10.

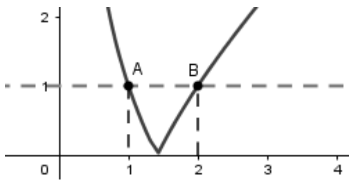


Figura 10. Parte do gráfico da função $f(x) = \frac{|x^2-2|}{x}$. Fonte: Os autores (2020).

Também para o cálculo aproximado de $\sqrt{7}$, há dois valores inteiros consecutivos que originam a mesma aproximação, o quadrado perfeito 9 (como indicado na proposição) e o 8.

Vimos, no exemplo 3, que ao utilizar a proposição 3 que ao encontrar uma aproximação para $\sqrt{2}$, foi obtido $1{,}5$ com erro inferior a $0{,}5$. Porém, a aproximação dada pela calculadora é $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135624 \ldots$, pelo que aquela está longe de ser a melhor aproximação que o método dos egípcios nos permite obter. Ora, $2 = \frac{24}{12}$ e ao calcular $\sqrt{\frac{24}{12}}$ fazendo a decomposição $\frac{24}{12} = \frac{6}{4} \times \frac{4}{3}$ vamos obter $\sqrt{\frac{24}{12}} \approx \frac{4}{3} + \frac{1}{12} = 1{,}41\overline{6}$. Da mesma forma ocorre para $3=\frac{24}{8}$, pois ao calcular $\sqrt{\frac{24}{8}}$ e fazendo a decomposição $\frac{24}{8}=\frac{6}{4}\times\frac{4}{2}$ vamos obter $\sqrt{\frac{24}{8}}=\frac{6}{4}+\frac{1}{4}=1{,}75$.

Nos casos anteriores obteve-se uma melhor aproximação para o cálculo de raízes quadradas de números primos do que a obtida com a proposição 3. Do mesmo modo, melhores aproximações também podem ser obtidas em alguns casos para números compostos, por exemplo, no cálculo de $\sqrt{6}$ pode-se usar a fração equivalente $\frac{60}{10}$ e, fazendo a decomposição $\frac{60}{10}=\frac{12}{5}\times\frac{5}{2}$, vamos obter $\sqrt{\frac{60}{10}}=\frac{12}{5}+\frac{1}{20}=2{,}45$. Assim, após vários experimentos efetuados com o GeoGebra surgiram as seguintes conjecturas:

Conjectura 1: Sejam $a,k\in IN$. Se para o cálculo aproximado de $\sqrt{a}$ se utiliza a fração equivalente $a\times\frac{k}{k}$ e $k=m\times n$ é tal que m, n são fatores consecutivos de k, com $m\leq n$. Então, o valor de k que dever ser escolhido para melhorar a aproximação de $\sqrt{a}$ é aquele que minimiza $|a\times m^2-n^2|$.

Conjectura 2: Se $a\times\frac{k}{k}$ for decomposto de forma que $a\times k=m\times n$ e $k=p\times q$ pode-se escrever $a\times\frac{k}{k}=\left(\frac{m}{p}\right)\times\left(\frac{n}{q}\right)$ de forma que $\left|\frac{m}{p}-\frac{n}{q}\right|$ seja mínima, para que o retâncgulo se aproxime do quadrado.

Para finalizar e com o objetido de responder o questionamento feito sobre $\sqrt{\frac{61}{4}}$, vamos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 4: Sejam $a,b,k\in IN^*$, com $a>b$ e seja k^2 o quadrado perfeito mais próximo de $\frac{a}{b}$. Se, para o cálculo aproximado da $\sqrt{\frac{a}{b}}$ se utilizar a fração equivalente $\frac{a}{b}\times\frac{k^2}{k^2}$ e a decomposição feita for $\frac{a}{k^2}$ e $\frac{k^2}{b}$, então $\sqrt{\frac{a}{b}}\approx\frac{ab+k^4}{2bk^2}$ e o erro cometido é inferior a $\left|\frac{k^4-ab}{2bk^2}\right|$.

Prova: Considerem-se os dois fatores da decomposição, calcule-se inicialmente o módulo da sua diferença, $\left|\frac{k^2}{b}-\frac{a}{k^2}\right|=\left|\frac{k^2-ab}{bk}\right|$ para, a partir de um retângulo de lados $\frac{k^2}{b}$ e $\frac{a}{k^2}$, obter um quadrado de lado $m=min\left\{\frac{a}{k^2},\frac{k^2}{b}\right\}$ e um retângulo de lados m e $\left|\frac{k^4-ab}{bk^2}\right|$. Este retângulo será dividido em dois retângulos congruentes de dimensões m e $\left|\frac{k^4-ab}{2bk^2}\right|$. Um desses retângulos será deslocado para um lado consecutivo do quadrado gerando um gnomon, cuja área difere $\left(\frac{k^4-ab}{2bk^2}\right)^2$ de um quadrado de lado $m+\left|\frac{k^4-ab}{2bk^2}\right|=\frac{ab+k^4}{2bk^2}$, completando assim a prova. ■

A proposição anterior nos permite responder, em parte, aos questionamentos colocados acerca da $\sqrt{\frac{61}{4}}$. Utilizando a decomposição $\frac{61}{4}=\frac{61}{16}\times\frac{16}{4}$ e obtem-se $\sqrt{\frac{61}{4}}=\frac{61}{16}+\frac{3}{32}\approx 3{,}90625$ e o valor dado pela calculadora é $3{,}905124838\ldots$

Nos vários experimentos efetuados com o GeoGebra sempre testamos o $\frac{61}{4}$ e em nenhum deles foi obtido algum valor próximo de $\frac{21}{2}$. Assim, parece ser, o engano do escriba ao efetuar a anotação, a razão mais plausível.

6. Algumas considerações finais

Este artigo se propôs realizar uma viagem pela História da Matemática, compilando e resgatando diferentes estudos sobre formas de calcular/aproximar a raiz quadrada de um número positivo, trazendo também as implicações desses estudos para os dias atuais.

A presença do pensamento, historicamente produzido e presente na literatura, constituiu instrumento basal para a generalização de um processo de cálculo da raiz quadrada. Diferentes processos e diferentes representações geométricas podem ser usadas para se obter de forma aproximada a raiz quadrada. Além disso, o uso de tecnologias é elemento facilitador do entendimento da essência dos processos e das representações.

O desenvolvimento das representações tem sido objeto de estudo por diversos autores e, a partir deles, se pode observar a sua evolução histórica e a sua importância não só no estímulo ao desenvolvimento do pensamento matemático, como também, na transposição didática dos objetos geométricos.

Neste contexto, insere-se a utilização dos softwares de geometria dinâmica, (em particular o GeoGebra) que são instrumentos que auxiliam o professor e os alunos não só na visualização geométrica dos métodos, como também por serem ferramentas de grande valor e importância para a pesquisa em Matemática.

Dentre os diversos métodos apresentados para uma possível aproximação da raiz quadrada, focou-se no método egípcio, pois além de ser um método de fácil compreensão, permite obter resultados satisfatórios. Recorrendo à utilização do GeoGebra para a representação geométrica, este método pode ser facilmente entendido por alunos da educação básica e ser utilizado em atividades diversas para sala de aula.

Aperfeiçoamentos e generalizações desse método foram propostos, baseados em proposições demonstradas e conjecturas, de forma a que se desse resposta aos questionamentos colocados.

Referências

Barone, M. (1983). O algoritmo da raiz quadrada. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, n. 2.

Bastos, C. L. (2016). *Representações em Matemática: Observações para o Ensino e a Aprendizagem em Geometria* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Brasil.

Carvalho, J. B. P. (2010). A raiz quadrada ao longo dos séculos. *In: V Bienal da SBM*, Anais. Paraíba.

D'Ambrosio, U (1999). A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP, 97-115.

Duval, R.; Moretti, Trad. M. T. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Revista Eletrônica de Educação Matemática,* Florianópolis, 7(2), 266-297.

Flores, C. R. (2003) *Olhar, Saber, Representar: Ensaios sobre a representação em perspectiva*, (Tese de Doutorado). Universidade Federal de Santa Caratina. Floranópolis, Brasil.

Katz, V. J. (2010). *História da Matemática*.Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

Lima, M. V. A. (2013). *Uma contribuição ao ensino do cálculo de raízes quadradas e Cúbicas*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Brasil.

Hefez, A. (2011) *Elementos de Aritmética* (2ª ed). Rio de Janeiro: SBM.

Hogdson, B. (2008). Uma Breve História da Quinta Operação. *Gazeta de Matemática,* 156, 7-30.

Mankiewicz, R. (2001) *L'histoire des mathématiques*. França: Le Seuil.

Makowiecky, S. (2003). Representação: a palavra, a idéia, a coisa. *Cadernos de Pesquisa Interdisciplinar em Ciências Humanas*, 4(57), 1-25.

Melo, H. S. (2016). Raízes quadradas sem calculadora. *Correio dos Açores*. Portugal. Último acesso em: 29 junho de 2020, de https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/4016/1/Raizes%20quadradas%20sem%20calculadora_25_08_2016.pdf

Petla, R. J. (2008). *GeoGebra – Possibilidades para o Ensino de Matemática*. Unidade Didática no Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE – Universidade Federal do Paraná, União da Vitória.

Rampazzo, L. (1985). A Raiz Quadrada sem Tabus. *Revista de Ensino de Ciências*. São Paulo, 14, 28-32.

Ribeiro, F. N. F. (2008) *Internet e Imagem: representações de jovens universitários.* (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

Silva, A.O. (2013). *O Cálculo da Raiz Quadrada Através dos Séculos*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, Brasil.

Autores:

Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa: Doutora em Matemática pela Universidade de Aveiro – Portugal. É professora do Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, RJ – Brasil onde atua na Educação Básica e nos cursos de formação de professores da pós-graduação. É pesquisadora do Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática - NEPEM. E-mail: lmgccosta@gmail.com / liliana.costa.1@cp2.edu.br.

João Domingos Gomes da Silva Junior: Mestre em Matemática Aplicada pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil. Atualmente é professor do Colégio Pedro II, ministrando aulas para alunos de Ensino Fundamental e Médio e no curso de pós-graduação na formação de professores. É pesquisador do Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática - NEPEM. E-mail: joao.dgomes@gmail.com.

Daniele Simas Pereira Alves: Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Atualmente é professora do município de São Gonçalo e professora do Colégio Santa Teresa de Jesus, no Rio de Janeiro, onde atua na Educação Básica. É pesquisadora do Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática - NEPEM. E-mail: daniele.simas@gmail.com.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-20

Relevancia de la teoría de conjuntos en la enseñanza de las matemáticas a nivel de bachillerato para la solución de situaciones combinatorias: una experiencia didáctica

Arturo Malesani, Sabrina Garbin Dall´Alba

Fecha de recepción: 23/08/2020
Fecha de aceptación: 9/05/2021

Resumen	Se presenta el diseño e implementación de una unidad didáctica para la enseñanza de la Combinatoria a un grupo de estudiantes con edades entre 16-17 años. Los hallazgos muestran que recuperar la teoría de conjuntos en esta etapa escolar, no conlleva necesariamente a resultados no deseados y denunciados por Klein (1973). Introducir la teoría de conjuntos dentro de una coherencia metodológica y articulada previo a la teoría combinatoria, podría favorecer la posibilidad de dotar a los alumnos de elementos simbólicos y conceptuales necesarios para comunicar matemáticamente el proceso de resolución de situaciones combinatorias propuestas, al tiempo que contribuye a que ellos desarrollen una actitud positiva hacia las matemáticas. **Palabras clave**: enseñanza de las matemáticas, teoría de conjuntos, teoría combinatoria.
Abstract	The design and implementation of a didactic unit for the teaching of Combinatorics to a group of students aged 16-17 years is presented. The findings show that recovering set theory at this school stage does not necessarily lead to unwanted results denounced by Klein (1973). Introducing set theory within a methodological and articulated coherence before combinatorial theory could support the possibility to provide students with the symbolic and conceptual elements necessary to mathematically communicate the process of solving proposed combinatorial situations while helping them to develop a positive attitude towards mathematics. **Keywords**: mathematics teaching, set theory, combinatorial theory.
Resumo	Neste estudo apresentamos o desenho e a implementação de uma unidade didática para o ensino da Combinatória a um grupo de estudantes entre 16 e 17 anos. Os resultados mostram que a abordagem da teoria de conjuntos nesta fase escolar não gera necessariamente efeitos indesejaveis como descrito por Klein (1973). A introdução da teoria dos conjuntos dentro de uma metodologia coerente e articulada previamente à abordagem da teoria Combinatória possibilitaria suprir os elementos simbólicos e conceituais necessários aos estudantes para uma eficaz comunicação matemática com fins de resolução da mesma. Concomitantemente, tal conduta contribuiria para o desenvolvimento de uma atitude positiva para com a disciplina de Matemática. **Palavras-chaves:** Professor de Matemática, teoria dos Conjuntos, teoria

	Combinatória

1. Introducción

El interrogante acerca de las maneras más adecuadas de estimular la generación de nuevos y mejores matemáticos, capaces de impulsar el desarrollo de esta ciencia tan necesaria para el progreso de los países y el mejor vivir de sus habitantes (Chvanova y Garbin, 2017), no es novedosa. Sin embargo, y a pesar de los muchos debates en torno a la didáctica de las matemáticas, tendentes a estimular y fortalecer su consolidación como disciplina fundamental frente a las necesidades educativas del presente (Godino, 2010), la emergencia de prácticas escolares alternativas, y los avances logrados por la teoría de la educación matemática en las últimas décadas, ello no significa que todas las aristas involucradas en la discusión hayan sido resueltas.

De hecho, resulta en particular significativo que actualmente, y sobre todo en el contexto iberoamericano, las deficiencias en el aprendizaje de las matemáticas a nivel escolar sean cada vez mayores. En el caso de España, los resultados obtenidos en los procesos de evaluación nacional no logran superar la media (OECD, 2019); y estas cifras son similares a las que corresponden a América Latina (Palafox, 2018; Rivas y Scasso, 2017). De igual modo, son evidentes las dificultades que confrontan los estudiantes frente al razonamiento formal y la comprensión del lenguaje matemático en la transición del Pensamiento Matemático Elemental (PME) al Avanzado (PMA); así como también la falta de motivación y el desinterés por el estudio especializado de esta ciencia y de sus derivas prácticas. Y es que, por lo general, en la enseñanza obligatoria media se emplean lenguajes matemáticos poco rigurosos y no formales, y se reserva para la formación universitaria el acercamiento al lenguaje formal y lógico matemático. Esto abre una brecha entre la educación secundaria y la profesional respecto del aprendizaje de las matemáticas. Y pasa por alto la necesidad de establecer un tránsito adecuado y no abrupto del PME al PMA, que involucra un conocimiento previo de la representación formal de las matemáticas, su lenguaje, formalización y demostración (Garbin y Azcárate, 2011; Olivieri y Garbin, 2017), y una “gestión” didáctica que considere la importancia y complejidad del proceso.

De cara a esta primera observación, y en contra del rechazo categórico al uso de la teoría de conjuntos en la enseñanza preuniversitaria de las matemáticas, que se impuso en numerosos programas a nivel mundial hacia los años setenta del siglo pasado a raíz del enfrentamiento irresoluble entre una concepción mecanicista de las mismas y una tendencia formalista (la matemática moderna) ampliamente influenciada por el grupo de Bourbaki, el presente trabajo propone su incorporación como una herramienta para facilitar la resolución de problemas correspondientes al área de las probabilidades y la teoría combinatoria. No se trata, por supuesto, de insistir en el enfrentamiento entre estos dos enfoques que, en cierta medida, deciden el curso de la enseñanza de las matemáticas a lo largo de la segunda mitad del siglo XX; y que fueron discutidas *in extenso* por Kline (1976). En palabras de Sorando (2002), el trabajo de este autor tuvo

> […] el valor de saber denunciar los errores del sistema tradicional memorístico y a la vez alertar sobre los nuevos desastres que la arrolladora modernidad conjuntista traía a las escuelas e institutos. Al hacerlo se enfrentaba a los defensores de ambos sistemas. Lo hacía en el momento oportuno, previendo la nueva situación. Y no caía en el tono apocalíptico de quien sólo describe fracasos pasados y predice fracasos futuros, sino que argumentaba las razones para unos y otros, a la vez que sentaba los principios fundamentales para la necesaria reforma de la enseñanza de las matemáticas en dichos niveles. (pp.121-122)

Por el contrario, y a partir de una experiencia didáctica concreta (Autor, 2018), nos interesa mostrar que la recuperación de la teoría de conjuntos es posible y podría permitir dotar a los estudiantes de elementos simbólicos y conceptuales necesarios para comunicar matemáticamente el proceso de resolución de situaciones combinatoria propuestas, al tiempo que contribuir a que ellos desarrollen una actitud positiva hacia las matemáticas. Sabemos, por otra parte, como han demostrado Sriraman y English (2010), que ninguna teoría única es capaz de solucionar todos los problemas didácticos que intervienen en esa articulación de diversas disciplinas que es la educación matemática.

La teoría de conjuntos se puede entender como el estudio de las propiedades generales que definen los conjuntos, las cuales son intrínsecas e independientes de la naturaleza de los objetos que involucren y de las operaciones que puedan efectuarse entre ellos. Por su parte, la teoría combinatoria es una rama de la matemática encargada de estructurar modelos capaces de establecer la numeración de las diferentes configuraciones que puede tomar algún objeto de un conjunto. En este sentido, es posible afirmar que la teoría combinatoria es, grosso modo, el arte de contar los cardinales de cierto tipo de conjunto.

Enumerar los objetos que forman parte de un conjunto implica asignarles un orden a esos elementos. Este resulta de establecer una correspondencia biunívoca entre un conjunto determinado y algún subconjunto de los números naturales o, inclusive, los naturales. Esa enumeración que se asigna a los elementos de un conjunto devela la relación que existe entre la teoría combinatoria, la teoría de conjuntos y el concepto de función. Dicho concepto está inmerso en el desarrollo de la génesis epistemológica de la teoría de conjuntos.

El enfoque epistemológico que le damos a la unidad didáctica, según una concepción discreta (finita) de la teoría de conjuntos, se inspira en el nexo intuitivo de dicha idea según fue establecida por Cantor en 1891: "los conjuntos son colecciones que pueden ser contadas" (Lavine, 2005, p. 13). Para Lavine (2005), Cantor "[t]rató a las colecciones infinitas como si fueran finitas, a tal grado que el más agudo historiador de la obra de Cantor, Michael Hallett, enfatizó el 'finitismo' de Cantor" (p. 13).

Por una parte, este nexo puede mostrarles a los estudiantes el desarrollo conceptual de la matemática, su desarrollo epistemológico y la problemática que puede generar una definición errónea (Véase final de la sección 2.2.). Por otra, permitirles profundizar en lo que significa resolver un problema combinatorio. Y, finalmente, adquirir elementos simbólicos y conceptuales, propios de la teoría de conjuntos, que les permitan plasmar y establecer argumentaciones formales en la resolución de situaciones combinatorias, como primer paso hacia el tránsito y posterior consolidación del PMA.

La experiencia didáctica a la cual hacemos referencia respondió a dos preguntas fundamentales: a) ¿Qué diseño didáctico permitiría introducir el estudio de la teoría combinatoria a partir de los referentes teóricos de la teoría de conjuntos? b) ¿Qué estrategia de evaluación permitiría verificar que este método de trabajo no sólo les permite a los estudiantes familiarizarse con el lenguaje matemático y su simbología para poder interpretar definiciones, teoremas o enunciados de problemas, sino que también incentiva en ellos una actitud favorable hacia las matemáticas? A partir de ellas, desarrollamos el planteamiento que nos interesaba sostener en torno a tres fases, supervisadas y aprobadas por pares, según el modelo establecido por la Universidad Simón Bolívar de Venezuela: a) Diseño de una propuesta didáctica, cuyo tema de enseñanza corresponda al programa vigente de matemáticas de Educación Media General (primeros niveles de bachillerato); b) Implementación de la propuesta en una Institución Educativa con un enfoque de investigación-acción dentro del aula de clases; c) Evaluación del proyecto implementado mediante el resultado obtenido.

2. Diseño de la unidad didáctica

El diseño propuesto para la unidad didáctica en la cual se centró la experiencia que nos interesa discutir aquí se fundamentó teóricamente en los trabajos de Kline (1973), Sorando (2002) y Contreras (2012), en lo que refiere a la incorporación de la teoría de conjuntos para facilitar la resolución de situaciones combinatorias. Por otra parte, su estructuración y formalización metodológica se basaron en los lineamientos contemplados por Callejo (1992). Para Callejo, una “unidad didáctica” consiste en:

> Una unidad de trabajo relativa a un proceso de enseñanza-aprendizaje, articulado y completo. En ella se debe precisar por tanto los contenidos, los objetivos, las actividades de enseñanza-aprendizaje y las actividades para la evaluación. Estos elementos deben tener en cuenta los diferentes aspectos de la clase y desarrollarlos en función de las, necesarias, adaptaciones curriculares. (p. 7)

Finalmente, para articular el recurso a metodologías distintas, que responden a filosofías diversas y a veces contrarias subyacentes a las matemáticas, en cuanto al qué y cómo enseñar, tomamos en consideración el esquema de los cuatro cuadrantes (AQAL) concebido por Ken Wilber, según su aplicación al campo de las matemáticas, su filosofía y su enseñanza tal como la desarrollan Chvanova y Garbin (2017).

2.1. Consideraciones relativas al qué y para qué enseñar

En principio, y de cara a la hipótesis inicial que manejamos respecto de la incorporación de la teoría de conjuntos como facilitadora para la resolución de problemas combinatorios en la formación matemática preuniversitaria, el diseño de la unidad didáctica que nos interesaba proponer se interrogó acerca del qué y para qué enseñar. Y, de manera específica, nos concentramos en la teoría combinatoria.

Como sabemos, la teoría combinatoria es una de las ramas de la matemática que se ocupa del arte de contar. En términos generales, esta teoría se imparte en la educación media con el propósito de enseñar el Binomio de Newton o de proporcionar un preámbulo necesario para poder abordar con profundidad ciertos temas de probabilidad y estadística. Y, en este sentido, el profesor tiende a entregarles a los estudiantes las fórmulas básicas de una permutación ($P_n = n!$), r-permutación o variación ($P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$) y combinación ($C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$). A manera de preámbulo, el docente suele presentar estas fórmulas como una manera de dar respuesta a situaciones como las siguientes: ¿de cuántas formas diferentes es posible sentar a 7 personas en 7 sillas alineadas?; ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar con 1, 2, 3, 4, 5 y 6?; si se desea preparar una ensalada con tomate, zanahoria, papa y brócoli, ¿de cuántas formas se puede preparar la ensalada usando sólo 2 ingredientes? Una vez presentados los problemas, y después de resaltar las diferencias significativas de la naturaleza de cada uno, el docente procede a aplicar las fórmulas correspondientes.

Ahora bien, aunque reconocemos la importancia de establecer diferencias concretas mediante la exposición de situaciones disímiles, reducir la enseñanza de la teoría combinatoria a su dimensión más pragmática puede resultar insuficiente para desarrollar el PMA y lograr un aprendizaje significativo de los contenidos por parte de los estudiantes. Por el contrario, consideramos que la enseñanza de la teoría combinatoria no sólo debe suponer un entrenamiento mecánico de los estudiantes en la utilización de fórmulas y procedimientos para resolver problemas al respecto, sino también la generación de un proceso de comprensión acerca de la naturaleza de lo que se cuenta y el origen de las fórmulas que nos permiten dilucidar lo que se quiere contar. Por otra parte, es importante iniciar a los alumnos en las maneras de argumentar matemáticamente la solución de problemas, tanto a nivel oral como en la escritura; y reducir el aprendizaje de ciertos contenidos matemáticos a través de limitadas representaciones (ejemplos) de objetos matemáticos restringe una formación conceptual sólida del esquema asociado al objeto de estudio. De ahí la importancia y validez de incorporar aspectos vinculados a la teoría de conjuntos para introducir una adecuada conceptualización de modelos combinatorios. Estos aspectos familiarizan y concientizan a los alumnos acerca del uso riguroso del lenguaje matemático (su simbología) para la interpretación de definiciones, teoremas o enunciados de problemas; y, además, inscriben la significación de cada fórmula combinatoria en un cierto contexto conjuntista más amplio.

A partir de la introducción de una serie de nociones básicas de la teoría de conjuntos, la teoría combinatoria aportaría una serie de procedimientos capaces de facilitar el cálculo de los cardinales que los integran. La explicación, entonces, podría redefinirse de la siguiente manera:

Sea $P_1, P_2, \dots, P_k$ una sucesión de conjuntos finitos, con intersección diferente de vacío dos a dos.

Se define el conjunto producto cartesiano como:

$$P_1 x P_2 x P_3 x \dots x P_k = \{(p_1, p_2, \dots, p_k): p_1 \in P_1 \wedge p_2 \in P_2 \wedge \dots \wedge p_k \in P_k)\}$$

Y su cardinal $\#(P_1 x P_2 x P_3 x \dots x P_k)$ es igual a: $\#(P_1) \cdot \#(P_2) \cdot \#(P_3) \cdot \dots \cdot \#(P_k) = n_1 n_2 n_3 \cdot \dots \cdot n_k$; cuya demostración está fundamentada en el método inductivo, y cuyo caso base (k=2) consiste en construir una especie de arreglo o rectángulo formado por los elementos de $P_1 x P_2$. Para luego proceder a multiplicar el número de elementos que contiene la fila, por el de las columnas; donde luego se establece la hipótesis inductiva para $k = n$ y por último se demuestra fácilmente para $k = n + 1$. Este resultado nos permite enunciar y justificar la siguiente afirmación: “Si una tarea se realiza en “k” etapas y cada etapa se puede realizar en una cantidad finita de pasos: P_1 en n_1 pasos, P_2 en n_2 ,y así sucesivamente hasta P_k en n_k pasos , entonces la tarea completa se puede hacer en $n_1 n_2 n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ formas posibles”. Esto lleva el nombre del principio del producto el cual se puede tomar como definición gracias a la técnica desarrollada en la demostración de: $\#(P_1 x P_2 x P_3 x \dots x P_k) = \prod_{k=1}^{n} n_k$. En virtud de lo anterior, resulta casi de manera natural hacer uso del principio del producto y definir la expresión $n!$, desde la siguiente situación concreta: ¿de cuantas maneras distintas se pueden sentar n personas en n sillas alineadas?

Por otro lado, también se puede deducir la fórmula $\frac{n!}{(n-r)!}$ desde la siguiente situación: ¿de cuántas maneras diferentes se pueden extraer r elementos de un conjunto de n elementos? Utilizando el principio del producto se obtiene que $P(n,r) = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \dots \cdot (n-(r+1))$; y luego, si se multiplica la igualdad por $(n-r)!$ Y así se obtiene el resultado deseado a través de las manipulaciones algebraicas apropiadas.

Finalmente, para obtener la fórmula de $\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ basta con introducir la necesidad de contar: el número de subconjuntos que se pueden forman, sin importar el orden de estos, de r elementos de un conjunto A de n elementos; donde $C_{n,r}$ será ese número de subconjuntos. En virtud de la definición, resulta casi inmediato afirmar que : $P(n,r) = \mathrm{r}! \cdot C_{n,r} \Rightarrow C_{n,r} = \frac{P(n,r)}{r!}$; lo cual es cierto, ya que si se multiplica el número de combinaciones, por la cantidad de configuraciones en que puede permutar cada subconjunto de A de r elementos, en efecto se obtiene $P_{n,r}$ como resultado de ese producto. De esta manera, si el resultado se sustituye en la fórmula de $P(n,r)$ en $C_{n,r} = \frac{P(n,r)}{r!}$, se efectúa la división y obtenemos que $C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$.

En este orden de ideas, y a fin de que los estudiantes puedan aprender el contenido de teoría combinatoria desde el enfoque antes explicitado, decidimos desarrollar la secuenciación por módulos de los siguientes contenidos:

Módulo (1): Preliminares de Teoría Concreta de Conjuntos
Definición de conjunto
Conjuntos definidos por extensión y comprensión
Cardinal de un conjunto
Relación entre conjuntos
Relación entre el concepto de función y cardinal
Diagrama de Venn
Operaciones de conjuntos: Unión, Intersección, Diferencia, Diferencia Simétrica y Complemento
Repaso de las nociones del concepto de función
Módulo (2): Teoría Combinatoria
Principio del producto
Principio de la suma
r-Permutaciones
Combinaciones
Binomio de Newton
Consecuencias del Binomio de Newton

Tabla 1. Módulos y Contenidos trabajados en la Unidad Didáctica

2.2. Consideraciones relativas al cómo enseñar y las estrategias a implementar

La unidad didáctica se diseñó con un enfoque de metodología sistémica, la cual incorpora aspectos y momentos específicos diferenciados de tres métodos complementarios, según se expone a continuación:

a) La clase magistral: es frecuentemente elegida por el docente ya que, en alternancia con otros modos, permite fomentar la competencia sana entre los alumnos mediante juegos y discusiones, abarcar un número significativo de contenidos en un tiempo relativamente corto e incorporar diferentes modalidades de trabajo. Al respecto, puede consultarse el texto de López (2002), en el cual el autor cita a diferentes teóricos que reflexionan sobre el tema. Estos aportan definiciones relevantes de la clase magistral y destacan las posibles ventajas y desventajas de la metodología.
b) El trabajo cooperativo: es una metodología basada en el trabajo de pequeños grupos con la finalidad de resolver una tarea, un problema o consolidar un objetivo en común. Resulta interesante debido a que, mediante la colaboración e inclusive la confrontación entre los participantes, estos tienen la oportunidad tanto de construir ciertas partes del conocimiento, como de fijarlo y transmitirlo a través de la interacción colectiva. Además, es positivo para promover el desarrollo de las destrezas sociales de los alumnos (Berenguer et al., 2000, pp.1-4).
c) La clase invertida: es una metodología de trabajo que tiene la particularidad de intercambiar los roles del docente y del alumno. Esta innovadora metodología educativa nos interesa en particular porque le proporciona al alumno mayor oportunidad con respecto al tiempo que necesita para asimilar los contenidos planteados por el docente (Barreras, 2016, pp. 173-196).

Según López (2002), los métodos educativos cumplen la función de estructurar los contenidos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Y, como señala Amat (2002), a cada profesor le corresponde seleccionar y combinar aquellos métodos que permitan aumentar la probabilidad de éxito de los objetivos educativos planteados, en función de las destrezas de sus alumnos y de la naturaleza de los contenidos curriculares previstos. Desde esta perspectiva y como lo escribimos en sesión anterior (2) para articular de forma sistémica las metodologías distintas, que responden a filosofías diversas y a veces contrarias subyacentes a las matemáticas tomamos en consideración el esquema de los cuatro cuadrantes (AQAL).

La metodología sistémica, entendida como el conjunto de interconexiones entre las diferentes situaciones matemáticas y las evaluaciones diseñadas para constatar su aprendizaje, supone que cada parte del diseño engloba al siguiente en función de su aplicabilidad y de las diversas formas (contextos) de ejercitación y evaluación. En vista de ello, el primer módulo de la unidad didáctica enfatizó aquellas estrategias que permitían desarrollar diferentes habilidades sociales en los estudiantes, fundamentales para su desenvolvimiento en el segundo módulo. Este último, de mayor grado de dificultad, por ser un módulo de aplicación de conocimientos, cuyos problemas son de tipo algorítmico, de repetición o de traducción simple/compleja, y de procesos o situaciones reales (modelado a partir de algún contexto específico), exigía herramientas de carácter más individual.

La planificación de la propuesta didáctica estuvo conformada por 16 diseños didácticos que se clasifican en tareas, actividades y rasgos manifiestos como se expone a continuación:

- Tarea: situación didáctica elaborada en casa de forma individual o en grupos pequeños.
- Actividad: situación didáctica elaborada en el aula de clase de forma individual, en grupos pequeños o en grandes grupos.
- Rasgos: evaluación del comportamiento del alumno basado en los acuerdos establecidos en el primer día de clases a manera de “Contrato Didáctico” entre el docente y los estudiantes:

a) Estudiar matemática es algo que está vinculado con la disciplina; por lo tanto, un alumno que se desenvuelve de manera cónsona con este ítem debe: ser puntual con la hora de llegada a la sesión de clase; seguir las instrucciones impartidas para el desarrollo de cada tarea o actividad propuesta; demostrar dominio teórico y práctico de la materia y prestar atención en clase y no utilizar el tiempo de la asignatura para la elaboración de trabajos de otras materias o para terminar trabajos de la materia asignados para la casa.
b) Estudiar matemática tiene que ser un acto de responsabilidad y constancia. Sólo así se podrá entender el verdadero significado que esconde la matemática. Por lo tanto, un alumno que se desenvuelve de manera cónsona con este ítem debe: manifestar su interés por la materia mediante la elaboración de los ejercicios asignados en la Guía (entregada el primer día de clases) y estar en pleno conocimiento de las entregas establecidas en el plan de evaluación.
c) Las acciones del alumno se considerarán apropiadas, si y sólo si benefician a sus compañeros o lo benefician a sí mismo. Por lo tanto, un alumno que se desenvuelve de manera cónsona con este ítem debe: relacionarse de forma ecuánime y cordial con sus compañeros y con el docente; respetar su

proceso de aprendizaje y el de sus compañeros; cumplir con el reglamento interno de la institución o manual de convivencia.

d) La nota que califica al estudiante es directamente proporcional al esfuerzo y dedicación demostrados en las evaluaciones individuales y grupales.

El plan de evaluación diseñado en función de estas consideraciones se expone a continuación:

Tipo de Estrategia Evaluativa	Finalidad de la Estrategia	Elaboración en	%	Modalidad de trabajo
Actividad # (1): Aplicación del cuestionario de actitud hacia la matemática, institucionalización y construcción del contrato didáctico con los alumnos, proyección de dos materiales audio visuales.	-Determinar la actitud inicial de los estudiantes hacia la matemática. -Definir el contexto de enseñanza y de aprendizaje junto con los alumnos. -Introducir y motivar la importancia de la matemática en nuestras vidas.	Aula de clase	0%	Individual
Actividad #(2): Manejo de los conceptos de teoría de conjuntos a través del lenguaje escrito (sin simbología matemática).	Familiarizar a los estudiantes con las dinámicas cooperativas e introducirlo conceptualmente en el tema a tratar.	Aula de clase (trabajo cooperativo)	3%	En grupos de 3 y los alumnos determinan los grupos
Tarea #(0): Investigar el significado de cada símbolo matemático a utilizar en el curso, mediante una tabla de símbolos facilitada por el docente.	Familiarizar a los estudiantes con la notación de operadores y conectores lógicos y su significado.	Casa (clase invertida)	2%	Individual
Tarea # (1): Elaborar una carpeta, cuya portada contenga un dibujo que vincule los conceptos de: teoría de conjuntos y teoría combinatoria.	Permitirle al estudiante establecer la conexión entre estas dos teorías de forma intuitiva.	Casa (clase invertida)	2%	Individual
Tarea # (2): Investigar la historia de los matemáticos Ramanujan,	Introducir a los estudiantes en el contexto histórico, información personal de los personajes y	Casa (clase invertida)	3%	Individual

Littlewood, y Hardy.	líneas de investigación.			
Tarea #(3): Elaborar un ensayo referente al video *La razón de oro* y responder las preguntas planteadas.	Mostrar al alumno la importancia de la matemática en la vida cotidiana de los seres humanos y cómo ha ido evolucionando a lo largo de la historia.	Casa (clase invertida)	3%	Individual
Tarea #(4): Elaborar un trabajo de investigación con base en una lista de videos referentes a teoría de conjuntos.	Adquirir un glosario que sintetice, de forma ordenada y estructurada, todas las definiciones, propiedades de los objetos, símbolos lógicos y conjuntistas.	Casa (Clase invertida)	8%	Individual
Actividad #(3): Realización de un esquema referente a los conceptos relacionados con los conjuntos numéricos.	Recapitular y remediar posibles esquemas mal formados asociados a la estructura conjuntista de los sistemas numéricos vistos en el bachillerato, desde la óptica de la teoría de conjuntos.	Aula de clase (trabajo cooperativo)	3%	En grupos de 3 y los alumnos determinan los grupos
Tarea #(5): Elaborar un trabajo referente a los videos del módulo (2), a partir de las siguientes preguntas: ¿Qué son axiomas? ¿Qué es un teorema? ¿Qué es un Corolario? ¿Te imaginabas que el hacer matemáticas era como se pudo observar en la película? ¿Por qué? Y, por último explica: ¿qué entiendes por hacer matemática? y ¿qué tan importante es el rol de un matemático en nuestra sociedad?	Determinar qué conceptos formaron los alumnos, después haber visto de la película *El hombre que conoció al infinito*.	Casa (trabajo cooperativo)	4%	En grupos de 3 y el docente determina los grupos
Actividad #(4): Ejercitación del lenguaje matemático mediante la simbología de la teoría de conjuntos. Continuación de la Actividad # (2).	Recapitular e intercambiar los conceptos desarrollados en la tarea #(5) aplicados al contexto particular de la Actividad # (4); cuyo fin ulterior es trabajar y practicar en el intercambio de información matemática de forma oral y escrita.	Aula de Clase (trabajo cooperativo)	6%	Los mismos grupos de la Actividad # (2)
Actividad #(5): Interrogatorio lúdico	Determinar el nivel de aprendizaje a nivel grupal que	Aula de clase	5%	En grupos de 7 y el

referente a la teoría desarrollada en los trabajos #4 y #5 y trabajo con la guía de ejercicios prácticos que fueron entregados el primer día de clase.	han alcanzado los estudiantes y brindarles el espacio para que restructuren, debatan y ejerciten el conocimiento asociado a las estructuras cognitivas que vinculan este contenido.			docente determina los grupos
Tarea #(6): A partir de la proyección de la película *El hombre que conoció al infinito*, elaborar un ensayo argumentativo en torno a su postura referente a lo visto y a algunas preguntas facilitadas por el docente.	Concientizar a los estudiantes de la importancia del rigor en la escritura de la matemática, la importancia de las definiciones bien plantadas y la importancia del matemático en la sociedad y su rol en la ciencia.	Casa	6%	Individual
Actividad #(6): Evaluación escrita e individual referente a todo al módulo de teoría concreta de conjuntos.	Determinar el nivel de apropiación los conceptos básicos y notación conjuntista.	Aula de clase	15%	Individual
Actividad #(7): Evaluación escrita e individual referente al módulo de teoría Combinatoria: principio de la suma y del producto, cálculos con n-factoriales y r-permutaciones.	Determinar el nivel de destreza adquirido por los estudiantes en la resolución de situaciones asociadas al principio del producto y de la suma y destrezas algebraicas de operaciones con n!,	Aula de clase	15%	Individual
Actividad #(8): Evaluación escrita e individual referente al módulo de teoría combinatoria: problemas de los diferentes modelos combinatorios y cálculos de polinomios de la forma $(x+a)^n$, mediante la fórmula del Binomio de Newton.	Determinar el nivel de destreza adquirido por los estudiantes en el modelaje de situaciones combinatorias y aplicación del Binomio de Newton.	Aula de clase	15%	Individual, pero fue adaptada para hacerse en parejas.
Rasgos: Evaluación del comportamiento a lo largo de todo el trimestre y segunda aplicación del cuestionario de actitud hacia la matemática.	Incentivar al estudiante para que su conducta sea cónsona a la establecida en el contrato didáctico y determinar la actitud final de los estudiantes hacia la matemática	Aula de clase	10%	Individual

Tabla 2. Estrategias evaluativas diseñadas para la unidad didáctica

En función de los requerimientos del centro educativo en el que se ejecutaría la unidad didáctica propuesta, todas las actividades y tareas sugeridas tuvieron una ponderación independientemente a su finalidad, a excepción de los test de actitud hacia la matemática. Los porcentajes se ajustaron en función del objetivo perseguido por la implementación de la estrategia, la modalidad de trabajo, la dificultad y el lugar en donde se desarrollaría la misma. Por otro lado, el criterio de elección de los porcentajes respondió al grado de dificultad matemática de la actividad, la finalidad y la modalidad de elaboración de la misma.

2.3. Consideraciones relativas a los aspectos motivacionales

El diseño de la unidad didáctica contempló, adicionalmente, algunas actividades y tareas tendentes a generar una conciencia en los estudiantes acerca del desarrollo conceptual de la matemática, su especificidad epistemológica y los problemas que puede acarrear una definición mal estructurada. Al mismo tiempo, esta conciencia suponía también adquirir una actitud positiva y entusiasta hacia las matemáticas y su aprendizaje. Como señalan Moreno et al, citando a Wise, Spinder, De Wit y Gerber (2018), “los estados emocionales positivos activan los llamados núcleos dopaminérgicos […] favoreciendo el aprendizaje” (p. 5).

A fin de que los estudiantes pudieran asumir su contacto con la matemática de una manera divertida y relajada, se propusieron la Actividad # 1 y las Tareas # 1, 2 y 6 (Tabla N°2). Asimismo, estas estrategias permitían comunicar algunos aspectos históricos de la disciplina y justificar la importancia de aprender a manejar su simbología. El diseño incorporó dos sesiones dedicadas a la proyección de materiales audiovisuales. La primera, posterior a la presentación del curso, la realización del test inicial de actitud hacia la matemática y de los acuerdos pactados en el contrato didáctico, se organiza a partir de la proyección de dos documentales: *El mundo de las matemáticas de Donald* y *Grandes temas de matemática*, los cuales hablan del desarrollo de las matemáticas hasta el presente, su relación con el arte y la naturaleza, y su presencia en la vida cotidiana. La segunda, al final del primer módulo (Tabla N°1), gira en torno a la proyección de la película *El hombre que conocía el infinito* (2015), sobre la vida y la obra del matemático hindú Ramanujan. La película trasluce un aprendizaje relevante sobre la diferencia entre un experimento (numérico) y una demostración, el lugar problemático de la intuición en la generación del conocimiento, el valor que tiene compartir los hallazgos entre pares, y la importancia de aprender a transmitir los resultados matemáticos, defender y argumentar las propias aseveraciones y no dejarse llevar por creencias religiosas o prejuicios culturales.

3. El contexto y los participantes

La unidad didáctica diseñada se implementó en un grupo de 20 alumnos del último año de secundaria (16-17 años), pertenecientes a un centro educativo privado, adjunto a la Universidad Simón Bolívar (USB). En este centro de enseñanza, Unidad Educativa de la Universidad Simón Bolívar, un 40% del alumnado son hijos de profesores de la universidad, 40% hijos de empleados administrativos de la misma institución, 12% hijos de su personal obrero y 8% provenientes de otros sectores de las comunidades adyacentes.

Debido a la lejana ubicación de la Unidad Educativa respecto al centro urbanizado de Caracas, el 45 % de los alumnos usan el transporte que provee gratuitamente la USB para poder llegar a clase y el resto es acompañado por sus padres mediante el uso de vehículos propios. Esta información es relevante debido a los frecuentes disturbios sociales (manifestaciones públicas, protestas y/o huelgas), deficiencias de unidades de transporte públicas o privadas, que hacen inestable cualquier planificación y realización efectiva del horario de clases. De hecho, las actividades previstas y planificadas en el "laboratorio teórico" (Primera fase), tuvieron que ser modificadas y reajustadas.

Por otra parte, los alumnos no tenían experiencia en cuanto a la metodología de "clase Invertida" ni tampoco al "trabajo cooperativo". Estaban acostumbrados a evaluaciones y actividades de carácter psicométrico y no de carácter formativo o de refuerzo; la mayoría de los porcentajes de sus evaluaciones, en matemática, estaba entre 15-20% del total de nota acumulada; estilo que dificulta una evaluación multidimensional.

La aplicación de la unidad didáctica se inició el 1 de enero de 2018 y finalizó el 21 de marzo del mismo año, con dos sesiones de trabajo semanales de 90 minutos cada una.

4. Instrumentos de recopilación y análisis de datos

El análisis de la experiencia didáctica se articula a partir de dos instrumentos de recopilación y procesamiento de la información. El primero de ello, cuantitativo, está constituido por las calificaciones finales obtenidas por los estudiantes a partir de la implementación del diseño de evaluación, y las que corresponden al lapso escolar anterior (Tabla N°3). El segundo, cualitativo, contempla los errores cometidos por los alumnos en relación a los temas trabajados sobre teoría combinatoria; y su categorización se basa en el trabajo de Navarro-Pelayo y otros (1998) (Tabla N°6). Asimismo, el análisis permite observar y valorar la capacidad de comunicación matemática formal de los estudiantes al cabo de la experiencia didáctica.

En cuanto a la actitud de los alumnos hacia la matemática el test de Fennema y Sherman readaptado por Doepken *et al.* (2013) nos permite identificar los cambios producidos después de la experiencia. Dicho instrumento posee coeficientes de fiabilidad desde 0,86 hasta 0,93. Además, las expresiones de inconformidad, quejas y cuestionamientos expuestos por los alumnos durante la implementación de la unidad didáctica arrojan datos cualitativos relevantes al respecto.

5. Algunos hallazgos

5.1. Calificaciones de los alumnos

En la Tabla N°3 podemos observar los resultados estadísticos aplicados a las calificaciones de los estudiantes. Al comparar las calificaciones observamos: un incremento de la media en 0.35 puntos; un descenso de la moda en 3 puntos; un descenso de la mediana en 1 punto; un incremento de 1 punto con respecto a la mínima nota y la equiparación de la máxima calificación obtenida en la experiencia didáctica.

Indicadores	Calificaciones finales del grupo de alumnos al final de la Unidad Didáctica (UD)	Calificaciones finales del grupo de alumnos en el trimestre anterior a la aplicación de la UD
Media	11.05	10.7
Moda	9	12
Mediana	10	11
Mínimo	3	2
Máximo	18	18

Tabla 3. Resumen de los indicadores de las diferentes tendencias de las calificaciones. (La escala de notas es de 01 como mínima y 20 como máxima)

Ante estos resultados se podría decir que no hay evidencia de una mejora significativa en cuanto a los resultados cuantitativos de las calificaciones de los estudiantes. Tampoco hay evidencia de una desmejora significativa. Consideramos, sin embargo, que este es un dato relevante en vista de los siguientes factores: a) cambio radical del método de enseñanza y aprendizaje; b) poco tiempo de adaptación al cambio; c) introducción de unas técnicas de conteo sustentadas en el enfoque epistemológico ya explicitado; d) ambiente inadecuado e inestable para el aprendizaje (situación sociopolítica del país, suspensión de clases, falta de servicios básicos, etc.).

5.2. La actitud hacia las matemáticas

La Tabla N°4 presenta los parámetros mediante los cuales se analizaron los resultados del test de Fennema y Sherman (Doepken, 2013). Éste contiene 47 ítems los cuales son subdivididos en 4 subescalas, con intervalo de desempeño entre un mínimo y máximo de 12 y 60 puntos respectivamente. Para este estudio incorporamos una nueva subescala denominada: Concepción apropiada de la finalidad de la matemática.

Parámetros del Test			
Subescalas	Número de ítems	Intervalos De Desempeño (I.D.D)	
		Mínimo	Máximo
Concepción apropiada de la finalidad de la matemática.	10	10	50
Confianza personal para aprender matemática.	12	12	60
Utilidad del contenido.	12	12	60
Actitud hacia el éxito.	11	12	60
Percepción que se tiene del	12	11	60

profesor.			

Tabla 4. Rangos de valores de desempeño por cada subescala del cuestionario

En la Tabla Nº5 presentamos los resultados de las dos aplicaciones del Test, la primera al comienzo de la experiencia didáctica y la segunda al final. Los resultados de la segunda aplicación del test superaran a los de la primera en cada uno de los ítems. Es decir, muestran un cambio favorable de actitud hacia las matemáticas en cuanto a: concepción apropiada de la finalidad de la matemática, confianza personal para aprender matemática, utilidad del contenido, actitud hacia el éxito y percepción del rol del profesor.

Resultados de la aplicación del test de actitud hacia la matemática		1.ª Aplicación del Test	2.ª Aplicación del Test	
Subescalas:	**Media del (I.D.D)**	**Puntaje**	**Puntaje**	**Diferencia**
Concepción apropiada de la finalidad de la matemática.	30	46,35	48,85	2,5
Confianza personal para aprender matemática.	36	38,7	44,2	5,5
Utilidad del contenido.	36	36,4	47,75	11,35
Actitud hacia el éxito.	35.5	37,9	48,05	10,15
Percepción que se tiene del profesor.	36	38	39,6	0,6

Tabla 5. Rangos de valores de desempeño por cada subescala del cuestionario

5.3. La resistencia al cambio de los estudiantes

A mediados del trimestre que duró la experiencia didáctica, justo cuando el proceso se hacía de creciente dificultad matemática y los procesos cognitivos más exigentes, y al tiempo en que aumentaba la responsabilidad matemática del estudiante y disminuía la del docente, los alumnos manifestaron su desconcierto y la dificultad de gestionar su propio aprendizaje. Esto implicó reelaborar y renegociar lo planificado para mantener a los estudiantes en la zona de desarrollo próximo. Algunas de las quejas formuladas eran del tipo: “No estamos haciendo matemáticas en clase”, “El profesor no saca cuentas”, “Estamos perdiendo el tiempo hablando de conjuntos”, “¿Por qué tenemos que ver otra vez los conjuntos de los positivos y de las fracciones?” y “¿Qué tienen que ver los conjuntos con la matemática?”.

Esta situación fue solucionada en una reunión que se pauto con la profesora guía del grupo y los estudiantes. En ella se acordó que la actividad # (8) de la (Tabla N°2) fuese hecha en parejas, seleccionadas previamente por el practicante, en función de los promedios equivalentes de los alumnos. Sin embargo, al comparar estas manifestaciones de malestar y el resultado positivo de la experiencia, ellas pueden ser atribuidas a la angustia que produce todo proceso de adaptación al cambio.

5.4. Errores observados

En la Tabla N°6 mostramos el porcentaje de los errores de tipo epistemológico identificados en las últimas dos evaluaciones escritas administradas a los estudiantes (Actividades # 7 y 8 de la Tabla N°2). Recurrimos, para formularlos, a las etiquetas que proponen Navarro-Pelayo et al (1996). En el marco de la experiencia didáctica estos errores fueron discutidos con los estudiantes mediante el diálogo socrático, la resolución de los problemas en la pizarra y, en algunos casos, la atención individual a cada alumno.

Error de:	%de error.
1) Cambiar el tipo de modelo matemático en el enunciado del problema.	5%
2) Orden.	10%
3) Repetición.	0%
4) Confundir el tipo de objetos.	5%
5) Enumeración no sistemática.	5%
6) Respuesta intuitiva errónea.	5%
7) No recordar la fórmula correcta de la operación combinatoria que ha sido identificada correctamente.	35%
8) No recordar el significado de los valores de los parámetros en la fórmula combinatoria.	35%
9) Interpretación errónea del diagrama en árbol.	0%

Tabla 6. Proporción de errores cometidos en las Actividades # 7 y 8 (Tabla n° 2)

En la actividad # 7 se proponían problemas vinculados con el Principio de la Suma, el Principio del Producto, r-permutaciones y cálculos factoriales de expresiones algébricas y numéricas. En la actividad # 8 se proponían modelos combinatorios de permutación, y variación y combinación; así como también cálculos de polinomios de la forma $(x+a)^n$, mediante la fórmula del Binomio de Newton.

Los resultados demuestran que los errores de interpretación, intuición y elección de modelos erróneos de solución matemática son poco frecuentes; y, probablemente, los enfoques adoptados en la unidad didáctica favorecieron resultado positivo. Por otra parte, los ítems número 7 y 8 de la Tabla n °6 ponen en evidencia la necesidad de no desestimar la importancia del aprendizaje memorístico y dar un tiempo oportuno para la asimilación del contenido. Al respecto, los errores correspondientes al ítem 8 de la Tabla n° 6 se debieron exclusivamente a problemas de memorización de las fórmulas $C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$ y $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$. En muchos casos, al momento de escribir el denominador en ambas expresiones, la fórmula $C_{n,r}$ carecía del factor $r!$; y en el caso de $P_{n,r}$, lo agregaban. Estos errores pudieron ser identificados y categorizados gracias a entrevistas sostenidas con el 35% de los estudiantes que los habían cometido.

5.5. Capacidad de comunicación matemática

Elegimos algunos problemas combinatorios (Actividad # 8, Tabla N°2) con vistas a revisar la estructura comunicativa utilizada por los estudiantes en su resolución, y poder encontrar evidencia de la relevancia positiva o negativa del estudio de la teoría de conjuntos correspondiente al módulo 1. A modo de ejemplo, mostramos a continuación dos respuestas obtenidas en relación a dos de los problemas planteados.

Problema 1: Determinar cuántos paralelogramos se pueden formar con 4 rectas paralelas oblicuas y 4 horizontales, utilizando algún modelo combinatorio; suponga que entre cada recta consecutiva hay la misma distancia.

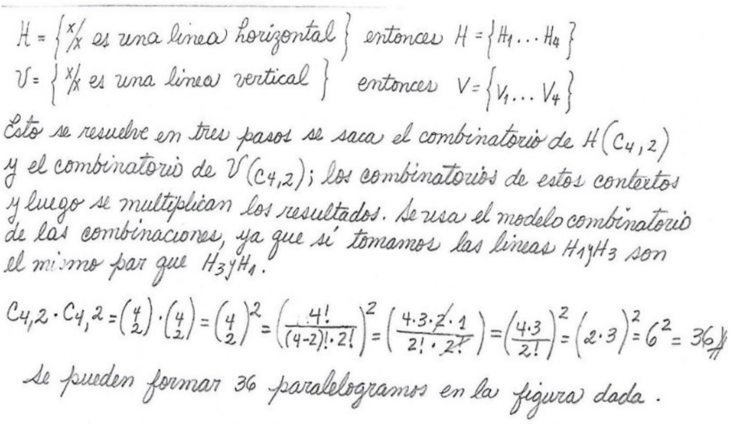


Figura 1. Respuesta del problema de los paralelogramos.

Problema 2: Se Tienen dos conjuntos de botes de pintura y en cada uno de ellos hay 4 colores, todos diferentes. Se desea pintar una pared de forma tal, que la mitad de la pared sea una mezcla de 2 colores del primer conjunto y la otra mitad una mezcla de 2 colores del segundo conjunto. ¿De cuántas maneras se puede pintar la pared?

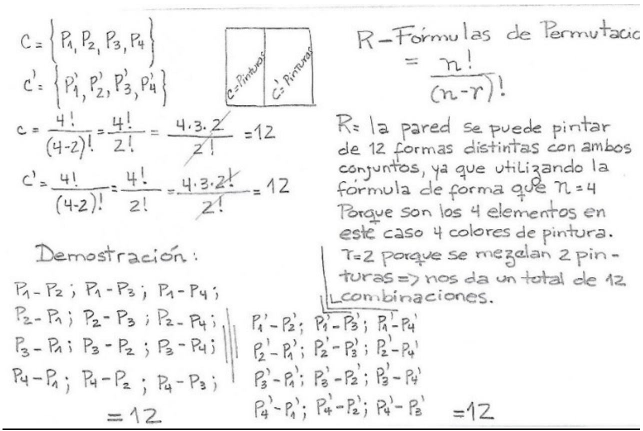


Figura 2. Respuesta del problema de las pinturas y la pared.

Estos ejemplos demuestran que, en general, los estudiantes aprendieron a articular un lenguaje matemático formalmente estructurado, así como también a demostrar el razonamiento que acompaña la aplicación de las fórmulas. En la resolución de problemas tienen en cuenta las definiciones de los conjuntos involucrados, escriben de forma detallada junto a los cálculos correspondientes, y además, utilizan dibujos o diagramas en la argumentación formal. Es decir, hacen uso de diferentes lenguajes de representación semiótica, con su respectiva conversión y translación de estos registros. Esto sugiere cierta comprensión conceptual de estos alumnos (Duval, 1995).

6. Consideraciones finales

En la introducción escribimos los cuestionamientos que queríamos abordar en este artículo. Al tener como referentes estas cuestiones mostramos algunos aspectos del diseño, desarrollo y hallazgos de la implementación de la Unidad Didáctica diseñada.

Los hallazgos son parciales y no concluyentes, pero muestran suficientes indicios para poder responder de modo afirmativo a las preguntas e inquietudes planteadas. O, por lo menos, dejan una duda razonable que alienta al sí como respuesta. Implementamos la Unidad Didáctica en un ambiente inadecuado e inestable para el aprendizaje (situación sociopolítica del país, suspensión de clases, falta de servicios básicos, etc.) y a un grupo de estudiantes con una única experiencia de aprendizaje, la de una didáctica tradicional y memorística. Este ambiente y la resistencia al cambio de los estudiantes e introducir la teoría de conjuntos tanto temida para estos niveles de enseñanza podrían hacernos pensar sobre la imposibilidad de obtener buenos resultados desde el punto de vista del aprendizaje. Sin embargo, los hallazgos muestran que el haber introducido la teoría de conjuntos de forma previa al desarrollo de un módulo de aprendizaje de Combinatoria no conlleva necesariamente a resultados negativos, no deseados y denunciados por Klein (1973). En su contrario hemos mostrado resultados que muestran que introducir la teoría de conjuntos dentro de una coherencia metodológica y articulada no frena sino favorece la posibilidad de dotar a los alumnos de elementos simbólicos y conceptuales que ayudan a formar argumentaciones formales en la resolución de situaciones combinatorias y, todo ello, sin perder una actitud positiva hacia las matemáticas.

Pensamos que una intervención didáctica cuya metodología integre distintos enfoques podría superar algunos de los errores denunciados por Klein (1973), correspondientes a la época en la cual se incluyó como contenido escolar la teoría de conjuntos. Así mismo, favorecería un tránsito proporcional hacia las matemáticas superiores y desarrollaría mayores competencias de comunicación matemática en los alumnos. Esto abre la necesidad de seguir un proyecto de investigación que profundice y corrobore los indicios que esta implementación didáctica muestra.

Referencias

Amat, O. (2002). *Aprender a enseñar. Una visión práctica de la formación de formadores*. Barcelona: Gestión 2000.

Barreras, M. (2016). Experiencia de la clase inversa en didáctica de las lenguas extranjeras. *Educatio Siglo XXI*, 34(1), pp.173-196.

Berenguer, L. (ed.) (2000). *Trabajo cooperativo en clase de matemáticas*. Recuperado el 20 de agosto del 2020, de http://www.ugr.es/~pflores/textos/otros/LaXSanFernando.pdf

Brown, M. (Director) y Pressman, E. (Productor). (2015). *El hombre que conocía el infinito* [Película]. Reino Unido: Warner Bros.

Callejo, M. L. (1992). *Orientaciones para la elaboración de unidades didácticas a áreas matemáticas.* Recuperado el 20 de agosto del 2020, de https://ieps.es/wp-content/uploads/2012/09/MON-13.pdf

Chvanova, A. & Garbin, S. (2017). La formación matemática y la resolución de "problemas para investigar": una aproximación según el enfoque integral de Ken Wilber. *Revista Paradigma*, 38(1), pp. 353-379.

Contreras, F. A. (2012). La evolución de la didáctica. *Horizonte de la Ciencia*, 2(2), pp. 20-25.

Doepken, D., Lawsky, E. y Padwa, L. (2013), *Modified Fennema-Sherman Attitude.* The Woodrow National Fellowship Foundation. Recuperado el 20 de agosto del 2020, de https://teacherleaders.files.wordpress.com/2013/07/modified-fennema-math-attitude.doc

Duval, R. (1995). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, pp. 37-65.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *Suma*, 38, pp. 53-67.

Godino, J. (2010). *Teoría e investigación en Educación Matemática*. Recuperado el 20 de agosto del 2020, de https://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Kline, M. (1973). *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI editores S.A.

Lavine, S. (2005). *Comprendiendo el infinito*. México: Fondo de Cultura Económica.

López, R. G. (2002). Análisis de los métodos didácticos en la enseñanza. *Publicaciones: Facultad de Educación y Humanidades del Campus de Melilla*, 32, pp. 261-334.

Malesani, A. (2018). *Manual de la implementación de la unidad didáctica para la enseñanza de teoría combinatoria del 5º año de diversificado.* Manuscrito no publicado, Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela.

Moreno, A. E., Rodríguez, J. V. R. y Rodríguez, I. R. (2018). La importancia de la emoción en el aprendizaje: Propuestas para mejorar la motivación de los estudiantes. *Cuaderno de pedagogía universitaria*, 15(29), pp. 3-11.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1998). Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. *Educación Matemática*, 8(1), pp. 26-39.

OECD. (2019), *PISA 2018 results combinated executIVE summaries volume I, II & IIIoecd.* Recuperado el 20 de agosto de 2020, de https://www.oecd.org/pisa/Combined_Executive_Summaries_PISA_2018.pd

Olivieri, A. y Garbin, S. (2017). *Una experiencia sobre el uso del foro online en cursos de álgebra universitaria: una posibilidad para favorecer las competencias de comunicación y argumentación*. Recuperado el 20 de agosto, de https://www.researchgate.net/publication/334230840_UNA_EXPERIENCIA_SOBRE_EL_USO_DEL_FORO_ONLINE_EN_CURSOS_DE_ALGEBRA_UNIVER

SITARIA_UNA_POSIBILIDAD_PARA_FAVORECER_LAS_COMPETENCIAS_DE_COMUNICACION_Y_ARGUMENTACION

Palafox, J. (2018). PISA. Análisis comparado 2000 a 2015. Indicios esperanzadores. *Voces De La Educación*, 3(5), pp. 136-169.

Rivas, A. y Scasso, M. (2017), *Centro de implementación de políticas públicas para la equidad y el crecimiento.* Recuperado el 20 de agosto de 2020, de https://www.cippec.org/wp-content/uploads/2017/12/DT-Que-paises-mejoraron-en-PISA-vf.pdf

Sorando, J. M. (2002). ¿Os acordáis de los conjuntos? *Suma*, 39, pp. 121-121.

Malesani. Arturo
Licenciado en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar.
Email: arturomalesani.8@gmail.com
Direccción: Via Alessandro Prosdocimi, 42 INT.8. Italia. Este (PD).Cap. 35042.

Garbin. Sabrina:
Doctora en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales (UAB-España) ,Profesora Titular Jubilada del Dpto de Matemáticas Puras y Aplicadas de la USB Venezuela con línea de investigación: Desarrollo del Pensamiento Matemático Avanzado y transición del Pensamiento Matemático Elemental al Avanzado. Email: sgarbin@usb.ve
Dirección: Calle Fernán González 65, 5B. Madrid. España.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62 – Agosto 2021
Páginas 1-21

https://union.fespm.es

Conjeturar y validar en un problema de geometría mediado por GeoGebra. ¿Qué construcciones se ponen en juego?

Magali Freyre, Patricia Cavatorta

Fecha de recepción: 2/08/2020
Fecha de aceptación: 15/02/2021

Resumen	Se presenta el análisis de producciones de estudiantes de Profesorado en Matemática en la resolución de un problema de geometría con GeoGebra. Trabajan en grupos y los datos analizados se recogen de grabaciones de audio y video, archivos de GeoGebra y registros escritos. Se da cuenta del tipo de construcciones dinámicas que los estudiantes realizan, la elaboración y validación de conjeturas y el rol del software en dichas acciones. Se logra construir una categorización de los tipos de construcciones dinámicas según las propiedades geométricas empleadas y según las finalidades de uso de las mismas, para el análisis en profundidad de las producciones consideradas en este estudio. **Palabras clave**: Conjeturar y validar, tipos de construcciones dinámicas, GeoGebra, clasificación de cuadriláteros
Abstract	We present an analysis of the productions made by prospective mathematics teachers during the resolution of a geometry problem with GeoGebra. The students work in groups and the information to analyze is collected from audio and video recordings, GeoGebra files and written notes. The analysis shows types of dinamic constructions that students make, the elaboration and validation of conjectures and the role of GeoGebra in those processes. A categorization of types of dinamic constructions is developed to realise a deep analysis of the productions. It takes into account the geometric properties used and the purpose of using of the constructions. **Keywords**: Guess and validate, types of dynamic constructions, quadrilateral classification, GeoGebra
Resumo	Apresentamos a análise das produções dos alunos de Licenciatura em matemática na resolução de um problema de geometria com o GeoGebra. Eles trabalham em grupos e os dados analisados são coletados de gravações de áudio e vídeo, arquivos GeoGebra e registros escritos. Ele percebe o tipo de construções dinâmicas que os alunos realizam, a elaboração e validação de conjecturas e o papel do software nessas ações. É possível construir uma categorização dos tipos de construções dinâmicas de acordo com as propriedades geométricas utilizadas e de acordo com as finalidades de seu uso, para a análise aprofundada das produções consideradas neste estudo. **Palavras-chave:** Conjectura e validar, tipo de construções dinámicas, GeoGebra , clasificação de cuadriláteros

1. Introducción

Las acciones de conjeturar y validar son de suma importancia si se tiene como objetivo la construcción de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. La elaboración de argumentos que validen aquello que se conjetura depende del contrato didáctico que se establece y tiene distintas características de acuerdo a cada nivel educativo. Por estas razones, en la formación de profesores de matemática, es fundamental el planteo de propuestas de enseñanza que impliquen la evolución en la construcción de argumentos hacia la elaboración de demostraciones formales.

Por otro lado, las tecnologías digitales utilizadas en la enseñanza de la Geometría influyen sobre qué tipo de problemas plantear a los estudiantes para que realmente se activen las acciones de conjeturar y validar. El trabajo con problemas donde resulta potente la utilización de software de geometría dinámica (SGD) para allanar el camino de la conjetura o para construir ideas en torno a la elaboración de argumentos válidos, haciendo uso de conceptos y propiedades geométricas; resulta enriquecedor para la construcción de conceptos.

Este artículo presenta estudios realizados por un grupo de investigación de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), Argentina. En el grupo se investiga en general sobre la construcción de conceptos matemáticos y la validación de sus propiedades mediadas por tecnologías digitales en la formación de profesores (Freyre y Mántica, 2017; Mántica y Freyre, 2019). Una de las cuestiones que motiva orientar la investigación en la formación de profesores tiene que ver con la importancia de que futuros profesores estén atravesados en su formación por experiencias de enseñanza y aprendizaje mediadas por tecnologías digitales, no sólo para su apropiación sino para reflexionar respecto de las características que estas ofrecen a la hora de pensar propuestas de enseñanza. Cabe destacar que actualmente esto cobra mayor relevancia dadas las situaciones de enseñanza virtual que se gestionan mundialmente.

Particularmente, en este artículo se presenta un análisis en profundidad de las producciones de estudiantes de Geometría II del Profesorado en Matemática de un Instituto Superior de Profesorado de la provincia de Santa Fe, en el proceso de resolución de un problema de geometría con GeoGebra. Este problema de geometría tiene como objetivo trabajar la resignificación de la clasificación jerárquica de cuadriláteros a partir de la elaboración y validación de conjeturas con el software. La elección de trabajar con el software GeoGebra radica entre otras cosas en su carácter libre, de código abierto, multiplataforma y en las variadas funciones que ofrece (Carrillo de Albornoz Torres, 2012). Actualmente la página de GeoGebra incluye además la posibilidad de generar grupos que actúan como aulas virtuales; características que permiten enriquecer el trabajo a distancia para el aprendizaje de la Matemática.

Las preguntas que dan origen a este trabajo son: cómo los estudiantes elaboran conjeturas y las validan en un problema de geometría con GeoGebra y qué tipos de construcciones dinámicas ponen en juego en esos procesos. En el trabajo de investigación, buscando respuestas a estas preguntas, se estudian referentes teóricos que permiten analizar por un lado los procesos de conjeturar y validar y por otro los tipos de construcciones que pueden realizarse con SGD en la resolución de problemas. Los antecedentes en relación a los tipos de construcciones resultan insuficientes para el análisis en profundidad de los resultados obtenidos en la implementación del problema antes mencionado. Por tanto surge la necesidad de elaborar una categorización de tipos de construcciones para dicho análisis, lo que representa una contribución teórica que se encuentra al final del artículo y cuya construcción se elabora en el proceso de análisis de los datos y se presenta en el desarrollo.

2. Marco teórico

Se encuentran estudios sobre el trabajo de resolución de problemas en entornos dinámicos por parte de futuros profesores de matemática (Iglesias y Ortiz, 2018, Iglesias y Ortiz, 2019). Resulta importante, además de estudiar los usos que le dan a los software de geometría dinámica, que estos estudiantes tengan contacto con actividades cercanas al quehacer matemático que puedan implementarse en la educación básica (Iglesias y Ortiz, 2019). Reid, Botta y Prieto (2017) presentan una propuesta de enseñanza de geometría para escuela secundaria que es elaborada por estudiantes de profesorado de matemática en conjunto con los profesores de los cursos donde se implementa.

Otros trabajos investigan particularmente la formulación y validación de conjeturas con software de geometría dinámica en estudiantes de profesorado de matemática (Cruz y Mántica, 2017; Cruz y Mántica, 2019). Se considera que el hecho de acercar a los futuros profesores de matemática a actividades que emplean recursos tecnológicos y son propias del quehacer matemático tales como conjeturar y validar, puede potenciar su trabajo como docentes logrando establecer mejoras en la enseñanza de la matemática (Cruz y Mántica, 2019).

El aprendizaje de la geometría con recursos digitales plantea diferencias en cuanto al trabajo tradicional de la misma con lápiz y papel. Los software de geometría dinámica permiten que se trabaje con diferentes representaciones de objetos matemáticos.

Villella (2017) afirma que la posibilidad de observar invariantes de forma dinámica a través de la manipulación de objetos en la pantalla representa un aspecto fundamental en la comprensión de los conceptos. Las construcciones geométricas por si mismas no demuestran, pero pueden estimular al estudiante a realizar demostraciones. De esta manera, a partir del trabajo con estos software el estudiante puede explorar, formular conjeturas y verificar hipótesis, convirtiendo a los objetos matemáticos en objetos vivos, que van más allá de un conjunto de algoritmos para resolver problemas tradicionales.

El estudio de la geometría con tecnologías de la información y la comunicación promueve el desarrollo de habilidades mentales permitiendo a los estudiantes acceder a un estudio formal de la geometría posteriormente. La exploración y la manipulación de objetos posibilitan que se establezcan conjeturas mediadas por las prácticas propias del software, tales como arrastrar, medir, trazar, hacer zoom, entre otras. El rol del docente resulta fundamental ya que a través de sus intervenciones puede generar espacios para explorar, conjeturar, verificar y sistematizar información poniendo en juego los conocimientos previos de los estudiantes y las características del software. De esta manera, las construcciones geométricas constituyen un objeto de experimentación sobre la teoría, contribuyendo a que se supere la tensión entre los procesos de visualización y justificación, dotando de sentido a la organización deductiva del conocimiento matemático y sin utilizar el discurso de manera directa (Villella, 2017).

En cuanto a las características de las herramientas que ofrecen los entornos dinámicos de geometría se recuperan los aportes teóricos de Arzarello (2001). Este autor describe al arrastre y a la medición como herramientas fuertes para construir conocimiento matemático en cuanto ayudan a la producción de conjeturas permitiendo la exploración sobre las figuras, moviéndolas y observando la manera en que cambian y no cambian sus medidas y formas. Estas prácticas posibilitan el descubrimiento de propiedades invariantes. De esta manera, la posibilidad de arrastrar y medir ofrece una retroalimentación durante la exploración que contribuye a considerar la prueba como una real explicación de conjeturas y propiedades.

En las prácticas de arrastre y medición se distinguen procesos ascendentes y descendentes. En los ascendentes se desarrolla un trabajo desde los dibujos hacia la teoría, explorando libremente una situación y buscando regularidades e invariantes. En los procesos descendentes por el contrario, el trabajo se desarrolla desde la teoría hacia los dibujos, para validar, refutar conjeturas o verificar propiedades. Estos procesos permiten una vinculación entre el nivel teórico y el perceptual. La medición y el arrastre en los procesos ascendentes se utilizan como herramientas heurísticas para identificar propiedades al observar los cambios e invariantes en la figura. En los procesos descendentes la medición se utiliza como herramienta de control, para verificar una predicción o validar una conjetura (Arzarello, 2001).

En este sentido, se entiende al proceso de elaboración de conjeturas con SGD como aquel que se realiza formulando evidencias identificadas en una situación a través de la exploración. El proceso de validación de las mismas corresponde a la justificación que se hace sobre ellas. Los procesos de exploración en problemas resueltos con SGD tienen características peculiares atendiendo a los tipos de construcciones que con ellos se realizan y por tanto influyen sobre los dos procesos antes mencionados.

Con respecto a las construcciones que pueden realizarse con software de geometría dinámica, se destacan los aportes de Healy (2000) quien distingue entre construcciones blandas y robustas. En las construcciones blandas no se consideran todas las propiedades geométricas relacionadas con la figura y el desplazamiento permite controlar el lugar de las figuras posibles de ser generadas ya que posibilita obtener las propiedades que faltan. En una construcción robusta la figura tiene todas las propiedades geométricas esperadas. En estas construcciones el desplazamiento permite generar una familia de dibujos con las mismas propiedades geométricas. En las construcciones blandas, en cambio, el desplazamiento es parte de las mismas. Permite que se pongan en evidencia las propiedades que no son consideradas inicialmente en la construcción pero son observables en una cierta posición de ella. Así, la generalización emerge de casos particulares a partir de la búsqueda de posiciones en que las condiciones se cumplen.

En lo que a procesos de demostración se refiere, Larios (2015) sostiene que las dificultades que se encuentran generalmente en los estudiantes a la hora de producir demostraciones surgen al proponerles que reconstruyan un proceso que otros ya han realizado, sin involucrarlos en la elaboración de los enunciados ni en la formulación de conjeturas relacionadas a los mismos.

Asimismo, Boero, Garuti y Mariotti (1996), en Larios (2015), consideran que si los estudiantes exploran situaciones, elaboran conjeturas y luego producen las demostraciones correspondientes, se evidencia una unidad cognitiva en el proceso. De esta manera, el proceso de construcción de la demostración es continuo y consta de etapas por las que se transita de una manera no necesariamente lineal. Las etapas son: *Exploración de una situación*, que puede surgir de experiencias previas o ser propuesta por el profesor; *Producción de una conjetura*, que se da tras la observación llevada a cabo, *Exploración orientada a la búsqueda de justificaciones de las conjeturas planteadas* y *Producción de la demostración,* en la que a partir del encadenamiento de argumentos se validan las conjeturas planteadas.

Los software de geometría dinámica permiten la exploración y la visualización de situaciones para buscar regularidades y condiciones geométricas. La operación de arrastre ilustra su capacidad dinámica para manipular representaciones de objetos matemáticos. Esto resulta beneficioso para los estudiantes, quienes a diferencia de los matemáticos profesionales, no trabajan con objetos matemáticos asiduamente, y el software les permite que estos sean más susceptibles de ser experimentados. De esta manera, se plantea una situación y el estudiante explora, conjetura y valida el conocimiento, individual y grupalmente. Las etapas mencionadas anteriormente no necesariamente se dan de manera lineal y progresiva ya que en algunas oportunidades por ejemplo se puede requerir exploración más de una vez. Lo interesante radica en que los resultados obtenidos durante el proceso pueden servir como punto de partida para nuevas exploraciones, descubrimientos y conjeturas dando lugar a nuevas validaciones de las mismas (Larios, 2015).

3. Metodología

La investigación es de tipo cualitativa ya que procura dar cuenta de resultados obtenidos de la implementación de un problema de Geometría con GeoGebra, a partir de un análisis interpretativo de lo realizado por los estudiantes en la resolución del mismo (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2010).

De esta manera el estudio requiere de una contextualización del entorno, para estudiar en profundidad los tipos de construcciones realizadas por los estudiantes a la hora de resolver el problema propuesto en el que se pretende que elaboren conjeturas y establezcan argumentos para validarlas. Al tratarse de un tipo de investigación cualitativa, se evalúa el desarrollo natural de los sucesos.

El trabajo con el problema presentado se organiza en distintas etapas que dan cuenta de un proceso de investigación previo a la escritura de este artículo. Estas etapas contemplan la redacción de la consigna, su estudio previo con las posibles resoluciones, la valoración del problema que tiene en cuenta el contexto de implementación, el análisis propiamente dicho de lo realizado por los estudiantes a partir del marco teórico de referencia, y los nuevos aportes producto de los resultados de la investigación.

3.1. Etapa de estudio previo del problema

Se presenta a continuación el problema cuya redacción surge como producto de un proceso en el cual se intenta evitar direccionar las formas de resolución habilitando la exploración por parte de los estudiantes para la elaboración de conjeturas.

Realizar una construcción con GeoGebra que permita analizar y responder las siguientes preguntas: 1. ¿Qué cuadriláteros convexos se pueden construir sabiendo que sus vértices están sobre una circunferencia y una de sus diagonales es un diámetro de la misma? 2. ¿Dónde deben estar ubicados los vértices en cada caso? ¿Por qué?

Tabla 1. Consigna del problema

Los objetivos del problema son:

- La elaboración de conjeturas respecto de las posibilidades de construcción de cuadriláteros por medio de la experimentación con el software y la validación utilizando propiedades geométricas.
- La resignificación de la clasificación jerárquica de cuadriláteros.

Se elabora un estudio previo del problema teniendo en cuenta estos objetivos considerando las conjeturas correctas y posibles resoluciones del mismo que pueden surgir a partir de distintas construcciones con GeoGebra, teniendo en cuenta sus herramientas y propiedades geométricas que poseen disponibles los alumnos[1]. En este estudio previo se identifican particularmente dos tipos posibles de resoluciones en relación con las justificaciones de las conjeturas correctas; y dentro de cada tipo de resolución se presentan varias posibilidades en función de las propiedades utilizadas para resolver el problema. En un tipo de resolución, se utiliza la construcción elaborada para abordar el problema, las propiedades de cuadriláteros y distintos procedimientos que el software permite; para validar la posición de los vértices establecida como conjetura. En el otro tipo de resolución, se realiza una segunda construcción considerando las propiedades de cuadriláteros para validar la posición de los vértices establecida como conjetura, a partir de los procedimientos de construcción.

Se realiza también una valoración del problema contemplando las posibilidades de exploración y de argumentación que posibilita el trabajo de

[1] El estudio completo se encuentra en: Cavatorta, P., Freyre, M. y Renzulli, F. (2017).

resolución del mismo con el software[2]. En este estudio, se analiza por ejemplo que la consigna permite diferentes caminos de resolución ya que la manipulación dinámica con el software ofrece diversas posibilidades para pensar las posibles respuestas al problema. Además, los estudiantes en el proceso de conjeturar la ubicación de los vértices, su relación con los elementos de la circunferencia y concluir qué tipo de cuadrilátero se obtiene en cada caso, pueden utilizar diversos procedimientos de resolución ya que estos no están pautados en el enunciado. Este aspecto posibilita un trabajo autónomo en la resolución.

Los caminos para elaborar la construcción geométrica, explorar, conjeturar y argumentar son variados. En la resolución del problema se pueden recuperar las propiedades de los paralelogramos, los conceptos de mediatriz y bisectriz, las isometrías del plano, las propiedades de los cuadriláteros, triángulos y ángulos inscriptos en una circunferencia; entre otros conceptos. Los estudiantes pueden determinar si su conjetura es o no correcta a través del trabajo con el software. De este modo se valora positivamente la consigna, dadas sus posibilidades para la exploración y la argumentación.

3.2. Etapa de implementación y recogida de datos

Los sujetos de estudio son los alumnos que cursan la materia Geometría II del segundo año del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática, de un Instituto Superior de Profesorado de la provincia de Santa Fe, Argentina.

El trabajo en la materia se realiza utilizando el software GeoGebra de manera fundamental, para la elaboración de conjeturas y la validación utilizando propiedades geométricas. Los contenidos previos desarrollados refieren a polígonos, en particular triángulos y cuadriláteros, definidos empleando una clasificación jerárquica, y las propiedades de sus elementos. También se trabajan los conceptos de perímetro y área de figuras planas, y la definición y propiedades de polígonos inscriptos y circunscriptos a una circunferencia.

La dinámica de trabajo, que continúa desde el cursado de Geometría I, comprende la realización de una guía por cada eje de contenido, que introduce a través de un trabajo exploratorio los conceptos, propiedades y demostraciones que luego se formalizan recurriendo al material bibliográfico obligatorio de la cátedra. En la materia además se pretende promover con el uso de software la integración entre la Geometría Sintética y la Analítica, como establecen los documentos regulatorios de la provincia de Santa Fe (Resolución 2090/15).

En lo que respecta a la implementación del problema, los estudiantes lo resuelven en grupos: uno de dos estudiantes y otro de tres. Posteriormente se realiza una puesta en común en la que se socializan sus resoluciones teniendo como soporte la proyección de las construcciones hechas con GeoGebra.

Los datos que se recogen son de distintos tipos: lenguaje escrito, verbal y no verbal, conductas observables e imágenes. Se recogen a partir de tres

[2] El estudio completo se encuentra en: Renzulli, F., Cavatorta, P. y Freyre, M. (2017).

instrumentos: grabaciones de audio y video del trabajo en grupo y la puesta en común, archivos de GeoGebra con las construcciones elaboradas por los estudiantes y registros escritos de cada grupo durante la resolución del problema. De los archivos de GeoGebra se recupera el protocolo de construcción que permite observar las herramientas utilizadas y los pasos de la construcción.

3.3. Etapa de análisis

En esta etapa se analizan las producciones obtenidas a partir de la implementación de la propuesta teniendo en cuenta el marco teórico de referencia y las características del problema.

El análisis contempla principalmente los aportes de Healy (2000) en cuanto a los tipos de construcciones realizadas por los estudiantes. Se consideran las etapas que desarrolla Larios (2015) en la construcción de una demostración, que posibilitan a los estudiantes involucrarse en estas prácticas constituyendo una unidad cognitiva en el proceso.

Por otro lado, se observan los procesos que se dan en las prácticas de arrastrar y medir, atendiendo a lo propuesto por Arzarello (2001).

Se describen detalladamente situaciones orales o escritas que permiten identificar las herramientas utilizadas por los estudiantes para construir y elaborar conjeturas, las propiedades geométricas que son consideradas y las conductas observadas en las resoluciones con el software y puesta en común.

3.4. Etapa de formulación de resultados

A partir del análisis realizado se obtienen los resultados del estudio, los cuales se presentan en el apartado resultados y conclusiones.

4. Estudio de las producciones

El problema planteado solicita el establecimiento de dos conjeturas. Una referida a los tipos de cuadriláteros posibles de ser construidos bajo las condiciones establecidas en la propuesta, y la otra relacionada con la posición de los vértices de esos cuadriláteros sobre la circunferencia. Así, la segunda depende del trabajo realizado con respecto a la primera.

Se organiza el análisis de lo realizado por los estudiantes en función del orden en el que se exponen las conclusiones en la puesta en común. Se transcriben algunos diálogos que funcionan como evidencia para el análisis. Para esto se utilizan las letras A y P que corresponden a intervenciones de alumno y profesor respectivamente. También se presentan algunas imágenes de registros escritos y figuras construidas por los estudiantes con el software.

4.1. En relación al Grupo 1

Para elaborar las conjeturas los estudiantes realizan dos construcciones geométricas particulares de cuadriláteros inscriptos en una circunferencia. Conjeturan que los cuadriláteros que se pueden construir son: rombo, cuadrado, romboide y rectángulo. No contemplan la posibilidad de que se puedan construir trapezoides no romboides. A continuación se mencionan los pasos de cada una de las construcciones, las conjeturas a las que arriban y el análisis a partir de los referentes del marco teórico.

Primera construcción

Los estudiantes trazan dos puntos sobre la circunferencia (vértices del cuadrilátero) y la cuerda que tiene por extremos a esos dos puntos, luego trazan una recta perpendicular a la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. A partir de la intersección de la recta con la circunferencia determinan los otros vértices del cuadrilátero (Figura 1).

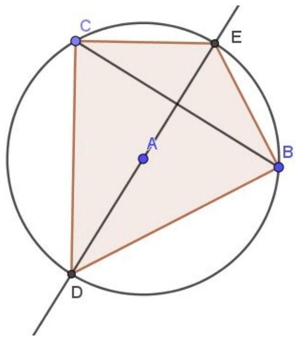


Figura 1. Primera construcción del Grupo 1.

Esta es una construcción robusta, ya que tiene todas las propiedades geométricas esperadas: los cuatro vértices pertenecen a la circunferencia y una diagonal del cuadrilátero es diámetro de la misma. Se limita la posibilidad de hallar todos los cuadriláteros posibles de ser construidos, ya que se impone la condición de perpendicularidad de las diagonales del cuadrilátero. Este aspecto de la imposición de una condición extra que limita la posibilidad de conjeturar no es contemplado en la categorización hecha por Healy (2000).

Este tipo de construcción hace que las conjeturas sean en función de esa propiedad no necesaria que se cumple, permitiendo sólo identificar a partir del desplazamiento, romboides y cuadrado. Esta conjetura si bien es correcta no contempla todos los cuadriláteros posibles de ser construidos de acuerdo a lo que propone el problema, lo que se evidencia en el siguiente diálogo.

A: Con este tipo de construcción solamente los cuadriláteros que cumplen la condición de la actividad son el rombo, el cuadrado y el romboide.

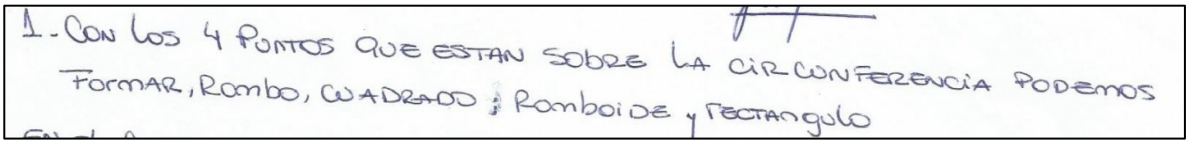
P: ¿Cuál es la ubicación de los vértices?

A: En esta construcción, en el caso del romboide, un par de puntos tienen que ser los extremos de un diámetro y los otros extremos de una cuerda.

Mientras se exponen estas conclusiones en la puesta en común, los estudiantes utilizan el arrastre de los puntos sobre la circunferencia generando los cuadriláteros que nombran.

La docente les pregunta a los alumnos en qué casos se puede construir un rombo y una de ellas responde que sólo se puede construir el cuadrado en el tipo de construcción analizada. Esto evidencia que tienen incorporado, al menos en este caso, la clasificación jerárquica de cuadriláteros.

En el registro escrito esto puede observarse a partir de un punto y coma utilizado para enumerar los cuadriláteros posibles de ser construidos. (Figura 2)


1.- CON LOS 4 PUNTOS QUE ESTAN SOBRE LA CIRCUNFERENCIA PODEMOS FORMAR, ROMBO, CUADRADO ; ROMBOIDE Y RECTANGULO

Transcripción del texto:

1- *Con los 4 puntos que están sobre la circunferencia podemos formar, rombo, cuadrado; romboide y rectángulo.*

Figura 2. Fragmento de texto presentado por el Grupo 1.

Segunda construcción

En este caso trazan una circunferencia, luego dos puntos sobre la misma (vértices del cuadrilátero), una recta que los contiene y otra recta paralela a la primera que corta a la circunferencia en dos puntos, que son los vértices restantes. Luego trazan las diagonales de este cuadrilátero con la herramienta Segmento. (Figura 3)

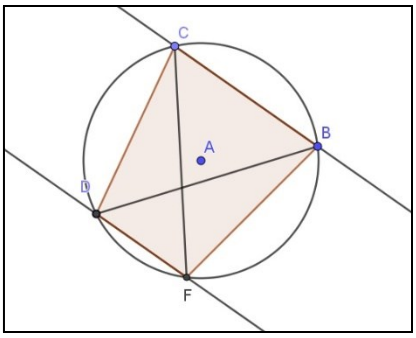


Figura 3. Segunda construcción del Grupo 1.

Esta construcción es blanda (Healy, 2000) ya que no considera todas las propiedades geométricas necesarias para abordar el problema. No cumple con la condición de que una de las diagonales del cuadrilátero debe ser diámetro de la circunferencia, aunque esto se verifica en algunas posiciones de los puntos y puede ser encontrada a partir del arrastre. En la misma se considera una propiedad no necesaria, la del paralelismo de un par de lados. Nuevamente se observa que se imponen condiciones extras limitando las conjeturas, cuestión no contemplada en la categorización consultada.

A partir de esta construcción conjeturan que se pueden construir rectángulos y cuadrados. Esta conjetura si bien es correcta es incompleta dadas las limitaciones que impone la construcción para el problema en general. La posición de los vértices establecida para estos cuadriláteros es correcta.

El carácter blando de la construcción se relaciona con un desplazamiento limitado de objetos libres dado que solo consideran los casos en que las diagonales pasan por el centro de la circunferencia, tratando de aproximarse "a ojo" a que la construcción cumpla con la propiedad geométrica necesaria en el problema pero no contemplada.

Cuando se les pregunta a los alumnos cómo pueden asegurar que esas diagonales pasan por el centro, ellos responden de acuerdo a lo que se visualiza en la vista geométrica:

P: ¿Cómo se aseguraron de la condición que una de las diagonales tiene que ser diámetro?

A: Porque pasa por el centro.

P: ¿Estaban convencidos de eso antes de construir?

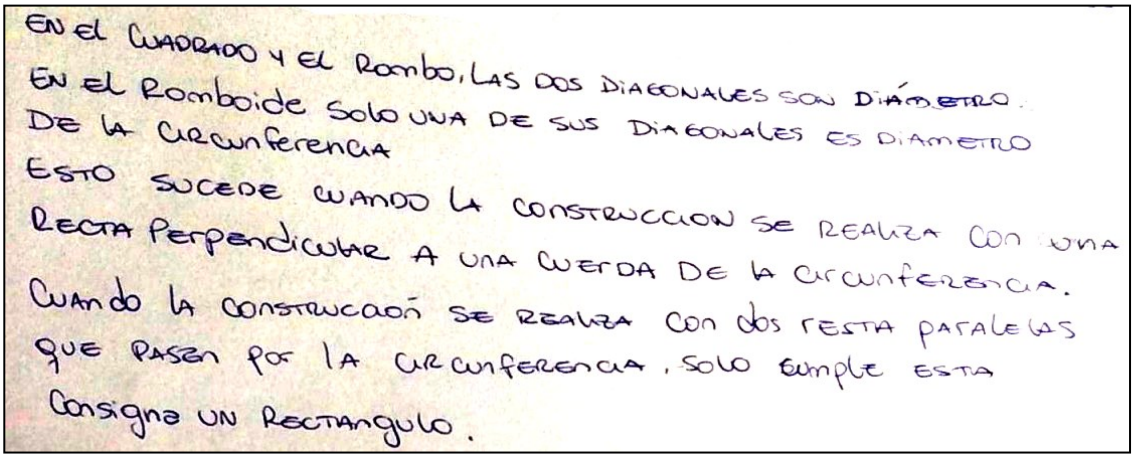
A: No, construimos el dibujo y después hicimos las diagonales para ver si se cumplía.

Así, puede afirmarse que los estudiantes no sienten la necesidad de verificar, ya sea con herramientas del software o con propiedades geométricas. Esto evidencia que no trabajan en la etapa de Exploración orientada a la búsqueda de justificaciones de las conjeturas o propiedades planteadas u observadas (Larios, 2015), dado que no recurren a herramientas del software para asegurarse que la diagonal pasa por el centro de la circunferencia, para lo cual podrían haber utilizado por ejemplo la herramienta Relación; y tampoco realizan otra construcción con la finalidad de constatar. De esta manera, no se observan procesos descendentes (Arzarello, 2001) en la resolución del problema, lo que les permitiría constatar en el dibujo lo conjeturado teóricamente.

En relación a las dos construcciones

El desplazamiento que realizan en ambas construcciones durante la puesta en común reproduce lo realizado por su grupo para la elaboración de conjeturas, ya que a partir del arrastre de objetos libres logran deducir algunos cuadriláteros que pueden construirse. De esta manera, las construcciones realizadas son para conjeturar. Los estudiantes trabajan en un proceso ascendente, desde los dibujos hacia la teoría (Arzarello, 2001).

Los integrantes de este grupo pueden determinar que estas construcciones con propiedades impuestas permiten encontrar posibles cuadriláteros de ser construidos pero no necesariamente todos. Esto se manifiesta en lo expresado en su registro escrito, donde explican por separado qué cuadriláteros se pueden lograr con cada construcción. (Figura 4)


En el cuadrado y el rombo, las dos diagonales son diámetro.
En el romboide solo una de sus diagonales es diametro
de la circunferencia
Esto sucede cuando la construccion se realiza con una
recta perpendicular a una cuerda de la circunferencia.
Cuando la construcción se realiza con dos resta paralelas
que pasen por la circunferencia, solo cumple esta
consigna un rectangulo.

Transcripción del texto:
En el cuadrado y el rombo, las dos diagonales son diámetro. En el romboide solo una de sus diagonales es diámetro de la circunferencia.
Esto sucede cuando la construcción se realiza con una recta perpendicular a una cuerda de la circunferencia.
Cuando la construcción se realiza con dos rectas paralelas que pasan por la circunferencia, sólo cumple esta consigna un rectángulo.

Figura 4. Fragmento de texto presentado por el Grupo 1.

Se evidencia que los estudiantes experimentan dos etapas de las mencionadas por Larios (2015). Realizan Exploración de una situación al mover puntos libres sobre la construcción para identificar las características de los cuadriláteros inscriptos, y trabajan en una etapa de Producción de conjetura al determinar qué cuadriláteros se pueden construir.

Con respecto a la justificación de las conjeturas, si bien se evidencia que tienen conocimientos de las propiedades de los cuadriláteros involucrados porque las utilizan para seleccionar las herramientas de construcción con el software, no utilizan estas propiedades para validar la ubicación de los vértices. La validación a partir de propiedades geométricas se realiza luego de la intervención de la docente en la puesta en común, y no surge como necesidad de los estudiantes.

4.2. En relación al Grupo 2

Los estudiantes conjeturan que se pueden construir paralelogramos y trapezoides. Dentro de los paralelogramos establecen que se pueden construir cuadrado, rombo y rectángulo, y de los trapezoides sólo el romboide. Se evidencia un buen manejo de la clasificación jerárquica de cuadriláteros, aunque no consideran que pueden construirse trapezoides no romboides.

Para establecer las conjeturas hacen dos construcciones. Una considerando sólo las condiciones de la consigna (segunda construcción) y otra con una condición impuesta (primera construcción).

A continuación se mencionan los pasos de cada una de las construcciones, las conjeturas establecidas a partir de ellas, y el análisis realizado contemplando los referentes del marco teórico.

Primera construcción

En esta construcción marcan dos puntos y la circunferencia que tiene por centro uno de ellos y pasa por el otro. Luego marcan otro punto de la circunferencia y la recta que pasa por los dos puntos que pertenecen a la circunferencia (vértices del cuadrilátero). Luego trazan dos rectas perpendiculares a ésta por los dos vértices, y determinan los otros dos vértices a partir de las intersecciones de estas rectas con la circunferencia. (Figura 5)

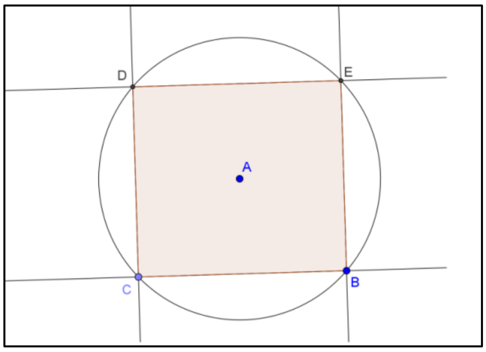


Figura 5. Primera construcción del Grupo 2.

La construcción corresponde al tipo robusta de acuerdo a la categorización de Healy (2000), ya que para la misma se consideran todas las propiedades geométricas requeridas por el problema. Sin embargo, se impone una condición no necesaria: la perpendicularidad de dos lados no consecutivos a un tercero, aspecto no contemplado por la categorización antes mencionada. A partir de esta construcción sólo pueden mostrar que se pueden construir rectángulos y cuadrados, pero no lo explicitan, se limitan a contar cómo construyen.

Los estudiantes durante la puesta en común explican los pasos de la construcción y aclaran que la realizan luego de haber conjeturado que un rectángulo puede ser construido bajo las condiciones del problema. Esto da cuenta de la finalidad de la construcción: es realizada para verificar lo que conjeturan.

Los estudiantes aclaran que luego de construir el rectángulo inscripto, trazan la diagonal y observan que pasa por el centro de la circunferencia.

Se genera un diálogo en la puesta en común a partir de una pregunta del docente en la que se intenta la búsqueda de justificaciones en relación a que la diagonal del rectángulo pasa por el centro de la circunferencia:

P: ¿Cómo se aseguraron que la diagonal siempre va a pasar por el centro? Es decir… ¿Cómo aseguran que la diagonal de ese cuadrilátero va a ser diámetro?

A: Vimos que cuando lo trazamos siempre pasa por el centro.

P: ¿Recuerdan alguna propiedad geométrica para justificar que esa diagonal necesariamente es un diámetro?

A (del otro grupo): La de los ángulos inscriptos, que es la mitad del ángulo central y entonces abarca el diámetro.

P: ¿Y el ángulo central en este caso? ¿Cuánto mide?

A: Es un ángulo de 180º.

Vale aclarar que a pesar de haber realizado una construcción para constatar una conjetura previamente establecida, esta constatación sólo se hace visualmente y no apoyada de herramientas del software ni propiedades geométricas disponibles. No utilizan por ejemplo la herramienta Relación para comprobar que el centro de la circunferencia pertenece a la diagonal del rectángulo y sólo luego de la intervención docente se logra una justificación a partir de propiedades geométricas, pero por un alumno del otro grupo.

La puesta en común también permite observar el trabajo en relación a la otra conjetura solicitada por el problema: la ubicación de los vértices para cada cuadrilátero. Los estudiantes, en este caso, no responden inicialmente dónde deben estar ubicados los vértices. La docente solicita que respondan eso y se da el siguiente diálogo.

P: ¿Dónde deben estar ubicados los vértices?

A: Sobre la circunferencia.

P: Sí, eso es lo que pide la consigna, ¿Pero qué más pueden decir?

A: Que son extremos de una cuerda.

P: ¿Qué propiedades tienen las diagonales del rectángulo?

A: Se cortan en su punto medio y son congruentes.

P: ¿Qué permite asegurar eso en relación a los vértices?

A: Si una diagonal es diámetro, la otra también es, porque miden lo mismo.

Este diálogo evidencia que sólo a partir de las preguntas generadas por el profesor los estudiantes logran identificar la correcta ubicación de los vértices, ya que si bien esto es parte de la consigna del problema no fue tenido en cuenta inicialmente por este grupo. Los estudiantes elaboran una conjetura y luego realizan la construcción para constatar, pero no utilizan propiedades geométricas disponibles para validar esta conjetura. Las justificaciones se dan recién en la puesta en común aunque no surgen como necesidad de los estudiantes. De esta manera la etapa de Exploración orientada a la búsqueda de justificaciones (Larios, 2015) es promovida por la intervención docente.

El trabajo con esta construcción les permite desarrollar procesos descendentes (Arzarello, 2001) en los que a partir de una conjetura teórica elaboran una construcción para analizar el dibujo. En esta construcción utilizan propiedades geométricas del rectángulo pero no las tienen en cuenta en principio para validar la conjetura. Tampoco utilizan herramientas del software para hacerlo.

Segunda construcción

En esta construcción marcan dos puntos y la circunferencia que tiene por centro uno de ellos y pasa por el otro. Luego la recta que pasa por esos dos puntos y los puntos de intersección con la circunferencia. A continuación marcan otros dos puntos, uno en cada semicircunferencia determinada por la recta. Continúan trazando cuatro rectas tomando dos a dos los puntos marcados sobre la circunferencia de manera de determinar un cuadrilátero convexo. (Figura 6)

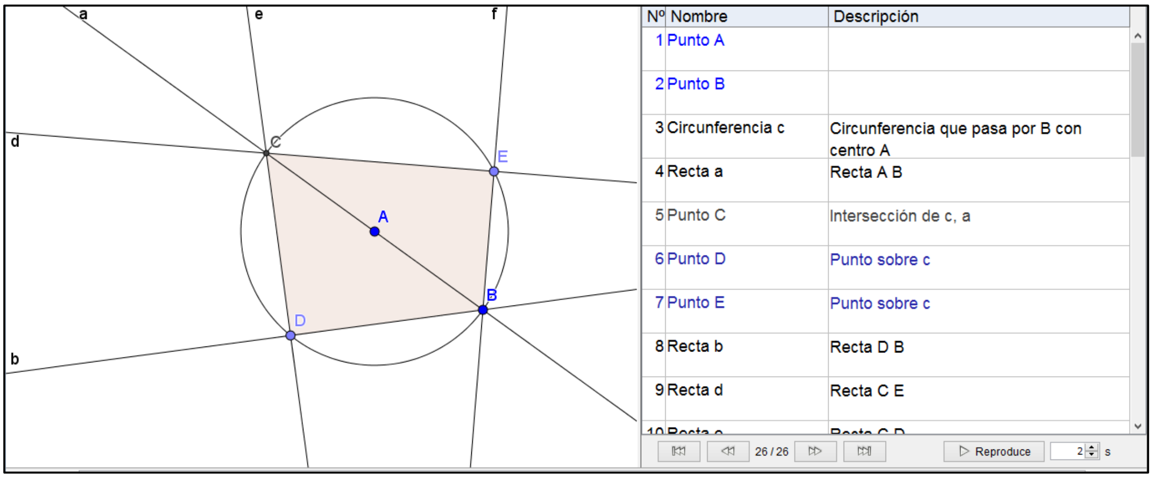


Figura 6. Primera construcción del Grupo 2.

De todas las construcciones presentadas hasta el momento, esta es la única robusta (Healy, 2000) a la que no se le impone ninguna condición extra o no requerida por el problema. Cumple con todas las propiedades necesarias y suficientes solicitadas. A partir del desplazamiento de puntos en esta construcción se pueden encontrar todos los tipos de cuadriláteros posibles de ser construidos.

Vale aclarar que los estudiantes manifiestan en la puesta en común que esta es la primera construcción elaborada por ellos y que dudan en un primer momento si exponerla o no. Afirman que a partir de la exploración sobre la misma logran las conjeturas correctas sobre los tipos de cuadriláteros posibles de ser construidos.

Este hecho se evidencia también en el nombre que eligen para el archivo de GeoGebra en este caso. El archivo se denomina "dónde está". De esta manera, parecería que la finalidad de la construcción es conjeturar no sólo qué tipos de cuadriláteros se pueden construir, sino también dónde deben estar ubicados los vértices, aunque esta última conjetura no la formulan hasta la puesta en común con la primera construcción. Por esta razón se trata de una construcción realizada para conjeturar.

Los estudiantes realizan esta construcción y a partir de las distintas representaciones encontradas logran establecer una conjetura correcta, aunque no exhaustiva, respecto de los cuadriláteros posibles de ser construidos, manifestando de esta manera un proceso ascendente en su resolución, (Arzarello, 2001). El trabajo con esta construcción se sitúa en las etapas de *Exploración de una situación* y *Producción de una conjetura* según Larios (2015).

En relación a las dos construcciones

Este grupo resuelve el problema mediante procesos ascendentes y descendentes (Arzarello, 2001) ya que logran realizar dos construcciones, una para conjeturar y otra para comprobar algunas de las conjeturas formuladas. Vale aclarar que presentan las dos construcciones en la puesta en común en el orden contrario al que utilizan para elaborarlas. Parecería de esta manera que les resulta más significativo el hecho de presentar como resolución una construcción para constatar (primera construcción) en la que puede observarse un rectángulo que soporta el arrastre, aunque para esto se consideren propiedades geométricas no necesarias impuestas al problema.

Esto puede deberse a que al no trabajar en las etapas de búsqueda de justificaciones y argumentos para validar, el impacto visual de las múltiples representaciones logradas con esa primera construcción les brinda mayor seguridad para poder sostener su conjetura. El rectángulo construido no se deforma a partir del arrastre de objetos libres, por lo que en todas las posiciones es rectángulo. Este es el tipo de construcciones que generalmente se proponen en el espacio curricular para un problema de cuadriláteros con GeoGebra, lo que puede influenciar en el hecho de no querer en un principio poner en común el trabajo con la segunda construcción.

Si bien en ambas construcciones, por ser robustas, se mantienen invariantes las propiedades geométricas necesarias y suficientes relacionadas con el problema, en la segunda construcción no se mantienen invariantes las propiedades que pueden definir a un cuadrilátero específico inscripto. Este hecho permite dar respuesta al problema pero parecería generar cierta incertidumbre en los estudiantes.

Esto también se evidencia en el registro escrito que presenta este grupo, en el que sólo se refieren al trabajo con la primera construcción.

5. Resultados y conclusiones

Los aportes de Healy (2000), Larios (2015) y Arzarello (2001) permiten realizar un análisis interrelacionando los tipos de construcciones realizadas por los estudiantes en la resolución de este problema geométrico, las etapas en el proceso de construcción de la demostración dentro de las que trabajan y el rol que juegan en estos procesos las prácticas de arrastrar y medir.

5.1. Sobre las conjeturas

Como se menciona anteriormente, en el problema hay dos aspectos que conjeturar, por un lado qué tipo de cuadriláteros se pueden construir y por otro la posición de los vértices sobre la circunferencia para cada cuadrilátero. La identificación de cuadriláteros es lograda por los grupos de estudiantes sin intervención del docente a partir de las construcciones realizadas con GeoGebra, aunque ninguno manifiesta la posibilidad de construir trapezoides no romboides. Por otro lado, la conjetura referida a la posición de los vértices sólo surge a partir de las interacciones con el docente en la puesta en común. Parecería que la pregunta propuesta para elaborar dicha conjetura genera confusión, ya que los estudiantes responden que los puntos se encuentran sobre la circunferencia sin dar mayores precisiones en un primer momento.

5.2. Sobre los tipos de construcciones

A partir del estudio realizado, se considera que los aportes de Healy (2000) en cuanto a los tipos de construcciones son válidos pero no suficientes para poder describir en profundidad las construcciones realizadas por los estudiantes en la resolución del problema implementado. Por este motivo resulta necesario establecer una nueva categorización de tipos de construcciones para problemas geométricos que contemple todos los casos observados. Se eligen nuevos términos para nombrar estas categorías. Por otro lado, los procesos que se dan en las prácticas de arrastrar y medir, propuestos por Arzarello (2001) resultan un punto de partida para la elaboración de una categorización de construcciones según la finalidad de uso en un tipo de problemas geométricos específico.

Se presentan estas nuevas categorizaciones: según las propiedades empleadas y según la finalidad de uso. Además, se realiza un análisis de las producciones de los grupos presentados en el apartado 4 en función de las mismas.

5.2.1. Categorización de tipos de construcciones según las propiedades empleadas

Esta categorización atiende a construcciones asociadas a problemas de geometría. Para poder clasificar una construcción de acuerdo a este agrupamiento es necesario determinar las condiciones consideradas para realizarla. Por esto resulta imprescindible conocer el problema que le da origen o el contexto en el que es elaborada.

Construcciones fuertes:

Una **construcción fuerte** cumple con las propiedades geométricas necesarias y suficientes en relación a lo establecido por el problema dado, en todas las posiciones de la figura. Si cumple al menos otra propiedad geométrica no necesaria, se denomina **construcción fuerte con propiedades impuestas**.

Construcciones débiles:

Una **construcción débil** cumple con algunas de las propiedades necesarias establecidas por el problema dado, pero no con todas. El desplazamiento de la construcción en este caso debe permitir encontrar posiciones de la figura en las que todas las propiedades necesarias se cumplan. Si cumple al menos otra propiedad geométrica no necesaria, se denomina **construcción débil con propiedades impuestas**.

5.2.2. Categorización de tipos de construcciones según la finalidad de uso

Esta categorización atiende a construcciones asociadas a problemas geométricos en los que se busca analizar relaciones o propiedades que involucran a una figura geométrica. En este tipo de problemas se distinguen dos finalidades para las cuales se elaboran las construcciones: conjeturar o constatar.

Construcciones para conjeturar:

Se utilizan para establecer conjeturas respecto de relaciones o propiedades involucradas. Este tipo de trabajo se relaciona con un proceso que Arzarello (2001) denomina ascendente, en el que se procede desde los dibujos hacia la teoría.

Construcciones para constatar:

Se utilizan luego de establecer una predicción sobre una propiedad o relación existente en la figura, para aceptar o rechazar dicha predicción. La constatación no necesariamente involucra el empleo de propiedades que justifiquen o validen la aceptación o no de la predicción. Este tipo de trabajo se relaciona con lo que Arzarello (2001) denomina proceso descendente, en el que se procede desde la teoría hacia los dibujos.

5.2.3. Análisis de las producciones de los grupos

A partir de todo el análisis presentado en este escrito puede observarse que tres de las cuatro construcciones elaboradas por los grupos cumplen propiedades no necesarias de acuerdo a lo que plantea el problema, denominadas propiedades impuestas.

La resolución del problema implica establecer conjeturas respecto de los cuadriláteros posibles de ser construidos, la posición de sus vértices en la circunferencia y dar argumentos en torno a lo conjeturado. El hecho de imponer condiciones extras limita la posibilidad de identificar todos los cuadriláteros posibles de ser construidos en una única construcción. Esta imposibilidad parecería generar en los estudiantes la necesidad de elaborar más de una construcción para abordar el problema.

En el caso del grupo 1: una construcción fuerte y una débil, ambas con propiedades impuestas. El grupo 2, en cambio, realiza dos construcciones fuertes, una con propiedades impuestas en la que los cuadriláteros que pueden identificarse no son todos los posibles y otra fuerte propiamente dicha, la que sí permite a partir del arrastre generar todos los cuadriláteros posibles. Cabe destacar que esta última construcción es desestimada inicialmente por los estudiantes, ya que si bien la utilizan para conjeturar, no la conciben óptima para ser presentada en la puesta en común en un primer momento.

El hecho de considerar especialmente propiedades impuestas puede deberse a la importancia que suele darse a las construcciones fuertes durante el cursado de la carrera. Esto quiere decir que las construcciones que son consideradas más ricas son aquellas en las que al mover los objetos libres se mantienen invariantes ciertas propiedades de la figura. De esta manera, parecería que la construcción que permite identificar todos los cuadriláteros posibles de ser construidos y cumple todas las propiedades necesarias y suficientes según el contexto del problema necesita cumplir aún mas propiedades, y que se mantengan invariantes, lo que podría ser la razón por la que se agregan propiedades no necesarias.

Es necesario aclarar que cuando se realiza la etapa de estudio previo del problema se esperan que surjan construcciones fuertes como la segunda construcción del grupo 2. Si bien se analiza la posibilidad de que aparezcan construcciones débiles, no se piensa en esta etapa que los estudiantes agreguen propiedades no necesarias. Este es un aspecto que también contribuye a la elaboración de la categorización presentada.

Con respecto a las finalidades de uso de las construcciones, puede decirse que el grupo 1 elabora dos construcciones para conjeturar. Permanecen en un proceso ascendente, de los dibujos a la teoría. El hecho de haber considerado propiedades impuestas les permite también que se utilicen estas construcciones para constatar, pero esta es una actividad que no realizan.

Con respecto al grupo 2, elaboran una construcción para conjeturar y otra fuerte con propiedades impuestas para constatar, aunque realizan constatación visual y no apoyada en herramientas del software ni en propiedades geométricas.

5.3. Sobre las etapas en el proceso de construcción de demostraciones

Se evidencia que ambos grupos trabajan en las etapas de Exploración de una situación y Producción de una conjetura (Larios, 2015). Las elaboraciones de conjeturas se realizan en relación a dar respuesta a qué tipos de cuadriláteros son posibles de ser construidos. Sólo a partir de las intervenciones del docente en la puesta en común logran producir conjeturas en torno a la posición de los vértices.

En cuanto a las justificaciones de las conjeturas planteadas puede decirse que no realizan una exploración orientada con este fin por necesidad propia. El hecho de transitar en esta etapa podría haberles permitido que comprendan qué es necesario probar y cuáles son los objetos auxiliares que pueden aportar a la validación.

Es sólo a partir de las preguntas generadas por el docente que se enuncian oralmente propiedades geométricas que validan algunas conjeturas. Si bien los estudiantes utilizan propiedades para construir, éstas no son una demostración en sí mismas, y la necesidad de validar no surge por parte de ellos. Villella (2017) sostiene que de todos modos el trabajo de construcción, exploración y formulación de conjeturas con el software fomenta que los objetos geométricos se conviertan en objetos vivos, y que este tipo de tareas habilita a superar la tensión entre la visualización y la justificación por parte de los estudiantes. En este caso, la superación de esta tensión se da sólo a partir de la intervención del docente.

Bibliografía

Arzarello, F. (2001). Dragging, perceiving and measuring physical practices and theoretical exactness in Cabri-environments. Dipartimento di Matematica Università di Torino, Italia. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.patrickmoisan.net/documents/publications/cw2001/2001/contributions/Arzarello.pdf

Cavatorta, P., Freyre, M. y Renzulli, F. (2017). Análisis previo de un problema sobre cuadriláteros inscriptos usando SGD en la formación de profesores. En *Libro de resúmenes VIII Encuentro Nacional y V Latinoamericano La Universidad como objeto de investigación. La Reforma Universitaria entre dos siglos.* (pp.1636-1653). Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.unl.edu.ar/u17/2016/08/16/post-1/

Carrillo de Albornoz Torres, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra. UNIÓN [en línea], 29. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/29/archivo5.pdf

Cruz, M. y Mántica, A. (2017). El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas. *UNIÓN* [en línea], 51. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2017/51/03.pdf

Cruz, M. y Mántica, A. (2019). La puesta en juego de actividades propias del quehacer matemático mediadas por el empleo de un software de geometría dinámica. *ÉPSILON* [en línea], 101. Recuperado el 28 de julio de 2020 de https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon101_8.pdf

Freyre, M. y Mántica, A. (2017). Constatación empírica y uso de propiedades para la validación de conjeturas utilizando GeoGebra. *NÚMEROS* [en línea], 95. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/95/Geogebra.pdf

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. En Tadao Nakahara y Masataka Koyama (Ed.) Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1, 103-117. Hiroshima University: Hiroshima.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, M. (2010). *Metodología de investigación*. MC Graw Hill, México.

Iglesias, M y Ortiz, J. (2018) Usos del software de geometría dinámica en la formación inicial de profesores de matemáticas. *MATEMÁTICAS, EDUCACIÓN Y SOCIEDAD,* [en línea], 1(2). Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://mesjournal.es/ojs/index.php/mes/article/view/13

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2019). La Demostración en Geometría desde una Perspectiva Didáctica. *UNIÓN* [en línea], 55. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2019/55/aula01.pdf

Larios, V. (2015). La construcción continua de la demostración como medio para enseñar y aprender a validar matemáticamente. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/729/312

Mántica, A. y Freyre, M. (2019) Análisis de la relación entre imagen y definición en una situación problemática mediada por GeoGebra a partir de no ejemplos del concepto de poliedro regular. *EDUCACIÓN MATEMÁTICA* [en línea], 31 (1). Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol31/1/08_REM_31-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe (2001). *Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Diseño curricular*. Anexo VII del decreto Nº 2090/15. Argentina.

Reid, M., Botta, R. y Prieto, F. (2017). Mandala: Otra forma de abordar conceptos geométricos. *UNIÓN* [en línea], 49. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2017/49/Reid.pdf

Renzulli, F., Cavatorta, P. y Freyre, M. (2017). Valoración de una tarea de geometría sobre cuadriláteros inscriptos y sus propiedades para resolver utilizando GeoGebra. En *VI* Jornadas de Educación Matemática y III Jornadas de Investigación en Educación Matemática: memorias, 212-223. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.fhuc.unl.edu.ar/media/investigacion/publicaciones/MATEMATICA/MATEMATICA_ebook_memoriaFHUC_2017.pdf

Villella J. (2017). Revisitando la enseñanza de la geometría con ojos TIC: otro desafío para el desarrollo profesional docente. En G. Fioriti (Ed.), Recursos tecnológicos en la enseñanza de la matemática, 143-157. Miño y Dávila Editores, Buenos Aires. Argentina.

Autores:

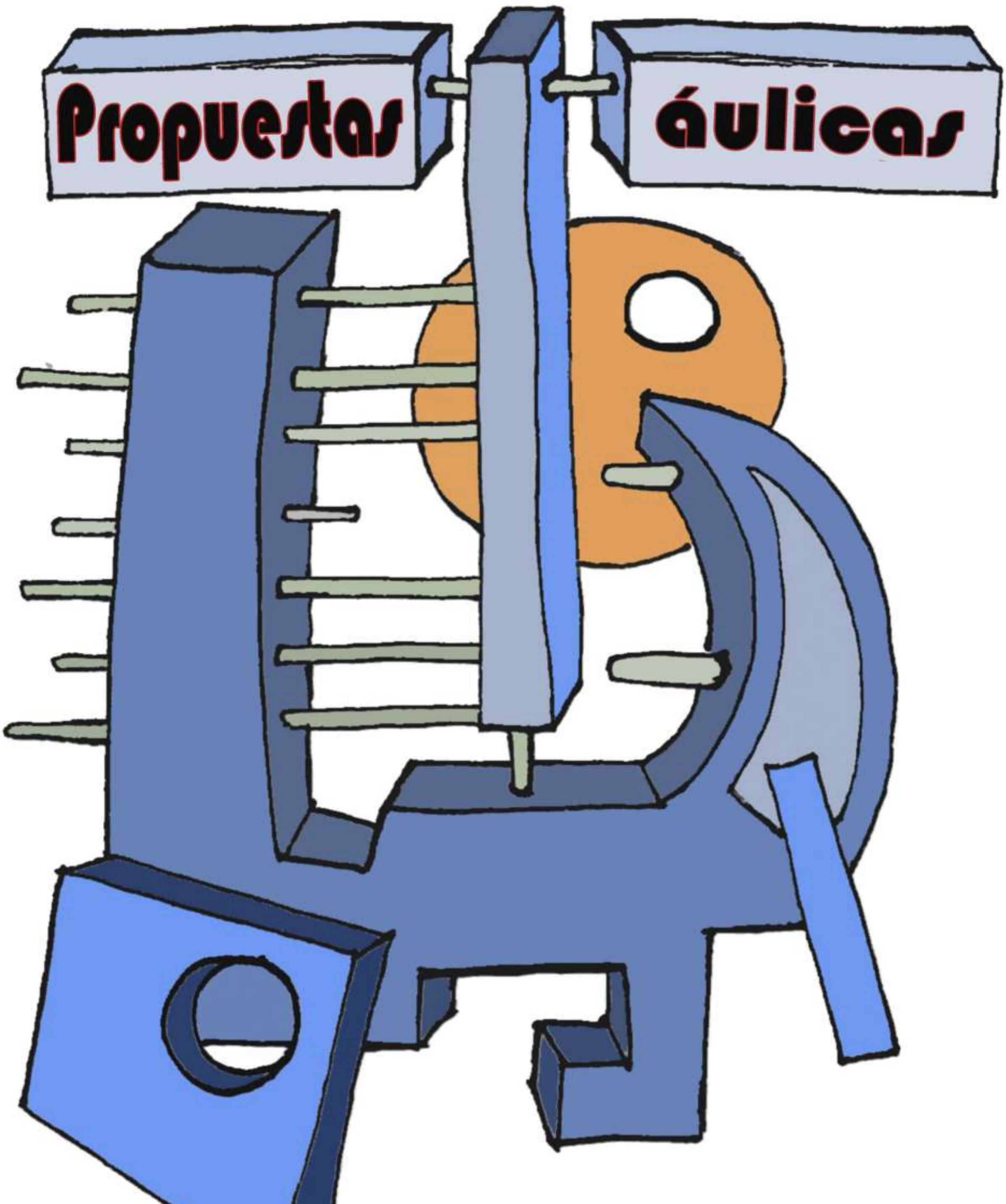
Primer autor: **Freyre, Magali Lucrecia**: Profesora de Matemática en los niveles secundario, universitario y superior no universitario. Ha participado como expositora en congresos y jornadas especializados nacionales e internacionales. Cuenta con publicaciones en revistas especializadas en enseñanza de la matemática.

Segundo autor: **Cavatorta, Patricia Noemí**: Profesora de Matemática en los niveles universitario y superior no universitario. Ha participado como expositora en congresos y jornadas especializados nacionales e internacionales. Cuenta con publicaciones en revistas educativas.

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php



REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-13

https://union.fespm.es

Actividades matemáticas puestas en juego en un mensaje de *WhatsApp.* Una experiencia mediada por tecnologías con futuros profesores en matemática

María Florencia Cruz, Ana María Mantica

Fecha de recepción: 30/10/2020
Fecha de aceptación: 23/05/2021

Resumen	Presentamos una experiencia educativa implementada con futuros profesores en matemática mediante un trabajo sincrónico a través de la plataforma *Zoom.* Analizamos el empleo que realizan los estudiantes de las tecnologías y focalizamos en las actividades propias del quehacer matemático puestas en juego. Concluimos que las tecnologías digitales median la producción matemática de los futuros profesores de modo que su producción hubiera sido otra sin estos elementos tecnológicos. A su vez, evidenciamos el empleo de tecnologías y del software como medios para visualizar y experimentar y la puesta en juego de diversas actividades características de la ciencia matemática. **Palabras clave**: Futuros profesores, tecnologías digitales, quehacer matemático.
Abstract	We present an educational experience implemented with mathematics' pre-service teachers through synchronous work using the *Zoom* platform. The usage of technology by the students is analyzed making focus on the mathematical activities put into play. We conclude that digital technologies mediate the pre-service teachers' mathematical production in such way that their production would have been different without these technological elements. At the same time, we evidence the use of technologies and software as a mean to visualize and experiment, and put into play of various activities characteristic of mathematical science. **Keywords**: Pre-service teachers, digital technologies, mathematical task, *Zoom.*
Resumo	Apresentamos uma experiência educacional implementada com futuros professores de matemática através do trabalho síncrono através da plataforma Zoom. Analisamos o uso das tecnologias pelos estudantes e nos concentramos nas atividades matemáticas envolvidas. Concluímos que as tecnologias digitais medeiam a produção matemática dos futuros professores de tal forma que sua produção teria sido diferente sem esses elementos tecnológicos. Ao mesmo tempo, evidenciamos o uso de tecnologias e softwares como meios para visualizar e experimentar e colocar em jogo diversas atividades proprias da ciência matemática. **Palavras-chave**: futuros profesores, tecnologías digitais, trabalho matemático, *Zoom.*

1. Introducción

En la actualidad las tecnologías digitales ocupan un rol preponderante en la sociedad y particularmente en los contextos educativos, lo que muestra el interés de que estudiantes utilicen las mismas como mediadoras de su producción matemática. En este artículo presentamos y fundamentamos una experiencia educativa llevada adelante con futuros profesores en matemática. Por las particularidades que atraviesan actualmente al mundo y particularmente al país donde realizamos la experiencia (Argentina) debido a la pandemia por COVID-19, se decide llevarla adelante empleando el programa *Zoom*[1].

Desde una perspectiva educativa amplia Maggio, Lion y Perosi (2014) señalan que las tecnologías se entraman en el aula con las formas propias de la formación de conceptos de la disciplina y potencian formas particulares de producción de conocimientos matemáticos.

Particularmente, se señala que en el aula de matemática las tecnologías digitales de uso frecuente no siempre se emplean con fines educativos de modo natural. Respecto a esta cuestión Kaplan, Robalo, Tedesco, Nicodemo y Novembre (2016) consideran que la incorporación de las tecnologías digitales en la sociedad se acepta sin discusiones, pero no ocurre lo mismo en las instituciones educativas donde es un desafío determinar cuál es el lugar que deben ocupar. Los autores, se refieren a computadoras, calculadoras científicas o básicas, teléfonos o cualquier instrumento que admita un trabajo tecnológico y sostienen que, como cualquier recurso para la enseñanza, su incorporación al aula “supone un trabajo previo de reflexión por parte del docente respecto de qué lugar ocuparán en la planificación de los contenidos” (p.1). Además, destacan que su integración debe realizarse intentando “promover el desarrollo de prácticas tales como la anticipación, la elaboración de conjeturas, la exploración, el cuestionamiento de conocimientos anteriores, la explicación, la confirmación o modificación como resultado de un proceso que invitó a resolver un problema” (p. 1-2).

A su vez, la relevancia de reflexionar experiencias en las que se emplean tecnologías por parte de futuros profesores en matemática se evidencia por el lugar preponderante que ocupan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática. Particularmente, en Argentina el Marco nacional para la mejora del aprendizaje en Matemática (2018) explicita la necesidad de que “estudiantes aprendan a usarlas y a interactuar con ellas” (p.33). También señala que la incorporación de las nuevas tecnologías debe realizarse de modo relevante en las propuestas de enseñanza en el nivel secundario, lo que fundamenta el interés de focalizar en esta cuestión en el marco de formación de profesores.

Atendiendo a las cuestiones anteriormente mencionadas se diseña y pone en juego un problema con futuros profesores en matemática de una Universidad Nacional de Argentina. A su vez, se fundamenta teóricamente el empleo de tecnologías en el marco de la experiencia. Así, se propone como objetivo de este artículo analizar el empleo que realizan futuros profesores de tecnologías digitales y focalizar en las actividades matemáticas puestas en juego en el marco de una

[1] Agradecemos a la Universidad Nacional del Litoral por otorgar la licencia para emplear el programa.

experiencia educativa sincrónica donde prevalece el trabajo con el dominio geométrico.

En los apartados siguientes se presenta el marco teórico al que apelamos para fundamentar el diseño del problema y que utilizaremos para analizar las producciones de los futuros profesores en matemática, una caracterización de la modalidad de trabajo, reflexiones de las producciones de los futuros profesores y reflexiones finales.

2. Marco de referencia

Se consideran aportes teóricos de Villarreal (2004), Borba y Villarreal (2005) y Villarreal (2012) respecto al trabajo matemático mediado por tecnologías digitales en el aula. A su vez, teniendo en cuenta que en la experiencia se ofrece la oportunidad de emplear *GeoGebra* tomamos aportes de Arcavi y Hadas (2000) que caracterizan el trabajo de estudiantes cuando emplean software en la resolución de una actividad. Finalmente, retomamos a Itzcovich (2007) con el fin de identificar momentos en que actividades propias del quehacer matemático se ponen en juego por los futuros profesores que participan de la experiencia.

Villarreal (2004) afirma que en el ámbito educativo los estudiantes deben acceder a una "alfabetización tecnológica" con el fin evitar un tipo de exclusión social que denomina "analfabetismo informático". A su vez, la autora explicita que las tecnologías digitales suponen una reorganización de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Entre otros, se reorganizan los procesos de creación, búsqueda y almacenamiento de información y el establecimiento de relaciones humanas.

En sinergia con lo mencionado, adoptamos como visión epistemológica la noción de humanos con medios como unidad epistémica propuesta por Borba y Villarreal (2005). Los autores consideran que los medios poseen un papel central en la producción del conocimiento y que los mismos transforman prácticas educativas, contenidos y formas de conocer. La noción de humanos con medios involucra dos consideraciones centrales: por un lado, que la cognición es una empresa social (por eso humanos) y por otro que la cognición incluye herramientas y medios con los que se produce el conocimiento, esta componente no es suplementaria, sino esencial. Esto último, evidencia que el medio es constitutivo del conocimiento, más aún, si estuviera ausente el conocimiento construido sería otro. Esta posición epistemológica que pone de manifiesto el lugar de los medios en instancias de producción del conocimiento brinda una perspectiva que permite comprender el papel de la tecnología en los ámbitos educativos y comprender su carácter potenciador y reorganizador.

Al considerar particularmente el trabajo en el aula de matemática, Borba y Villarreal (2005) destacan la importancia de que los estudiantes experimenten, lo que implica: el empleo de procedimientos tentativos y ensayos en instancias de generación de conjeturas, el descubrimiento de resultados matemáticos previamente desconocidos para el experimentador, la oportunidad de testear modos alternativos de obtener un resultado, la posibilidad de proponer nuevos experimentos y un modo diferente de aprender matemática.

En la misma línea, Villarreal (2012) destaca el potencial de emplear herramientas que permitan la generación y validación de conjeturas, emplear los recursos como laboratorios matemáticos donde: el ensayo y el error se permita, y la visualización potencie la comprensión matemática. A partir de esta investigación, la autora pone de manifiesto que la inclusión de la computadora en algunos escenarios resulta esencial para generar conjeturas, refutarlas o validarlas, lo que muestra la posibilidad de un trabajo matemático con énfasis en la visualización y experimentación, actividades que se consideran características del quehacer matemático.

En relación a lo mencionado y teniendo en cuenta que a los estudiantes que participan de la experiencia se les otorga la posibilidad de emplear el software de geometría dinámica *GeoGebra* retomamos a Arcavi y Hadas (2000) que presentan características del trabajo con ambientes dinámicos. Los autores reconocen la: visualización, experimentación, sorpresa, retroalimentación, necesidad de pruebas y demostraciones.

Arcavi y Hadas (2000) afirman que la visualización es una tarea esencial, puesto que propicia sensación de autoevidencia e inmediatez, destacan que los ambientes dinámicos posibilitan construir figuras con propiedades y transformar construcciones en tiempo real, de este modo, se facilitan las bases intuitivas. Los autores señalan que a partir de la experimentación se permite obtener con facilidad un gran número de ejemplos, casos extremos y de carácter no estereotipado, entre otros. La información obtenida puede ser un paso a la generalización y enunciación de conjeturas. A su vez, constatar predicciones entre un resultado y lo devuelto por el software, puede producir sorpresa cuando el resultado difiere de la predicción. Esta diferencia crea una retroalimentación. Esto último, puede involucrar motivación para modificar, revisar la predicción y potenciar el realizar pruebas y demostraciones. Es decir, el ciclo de experimentación-retroalimentación-reflexión debe potenciar la argumentación.

Respecto a las actividades características del quehacer matemático tomamos aportes de Itzcovich (2007). El autor sostiene que la matemática reconocida por los estudiantes se encuentra influenciada por sus experiencias educativas, por lo que es fundamental que lleven adelante, entre otras, las siguientes actividades: resolución de problemas, representación y exploración, elaboración de conjeturas y validación de conjeturas y resultados.

Asimismo, Itzcovich (2007) considera que es importante que en el marco de la resolución de problemas los estudiantes elaboren conceptos, los relacionan con otros, modifiquen ideas disponibles, propongan procedimientos, en general, produzcan ideas matemáticas. El autor señala que se conjetura cuando se produce una sospecha que es producto de la experimentación, de la exploración a partir de datos, representación y la puesta en juego de saberes disponibles que permitan establecer una afirmación. A su vez, destaca la importancia de encontrar razones que permiten explicar y comprender la afirmación establecida, es decir, validar apelando a argumentos matemáticos los resultados que se obtienen.

3. Modalidad de trabajo

La experiencia que reportamos se planifica inicialmente para ser llevada adelante en un curso de geometría tridimensional de una Universidad Nacional Argentina, a partir de la misma se tenía como objetivo principal que los futuros profesores construyan la noción de simetría especular. Se diseña un problema con el fin de que se pongan en discusión características propias de esta noción. Sin embargo, el desarrollo de clases presenciales en el año 2020 se encontró afectado por la pandemia COVID-19, lo que implicó el repensar la modalidad y metodología para concretar la experiencia, dado que, en el país las clases se desarrollaron en la modalidad virtual en todos los niveles del sistema educativo.

Por lo mencionado, se determina invitar a cinco estudiantes que cursan sus estudios, de formación de profesorado en matemática, en la universidad escogida para poner en juego la experiencia. Particularmente, seleccionamos estudiantes que se encuentran avanzados en la carrera (en cuarto año del plan de estudios) y que han cursado asignaturas de álgebra, geometría analítica, geometría sintética, análisis, matemática discreta, etc. Estas decisiones se toman, teniendo en cuenta que si bien los futuros profesores abordaron la noción de simetría especular en su formación podrán tener la oportunidad de revalorizarla y aplicarla en una situación cotidiana para ellos. A su vez, los resultados de esta primera experiencia se emplearán a futuro para repensar la puesta en práctica de la misma en la asignatura para la que inicialmente estaba pautada.

Como se menciona en la introducción, el trabajo se realiza de modo sincrónico empleando *Zoom*. Atendiendo a lo mencionado en Villarreal (2004), Borba y Villarreal (2005) y Villarreal (2012) respecto al potencial del trabajo en interacción mediado por tecnologías organizamos los 5 estudiantes en dos grupos, uno de dos (A) y otro de tres (B) estudiantes. Cada encuentro tiene una duración de dos horas y se realizan dos días diferentes en función de la disponibilidad de los estudiantes. Se destaca que de este modo no puede realizarse un debate colectivo lo que se considera una limitación producida por la adaptación inmediata de la propuesta original. Actualmente, conociendo la posibilidad de crear sub-salas en la plataforma *Zoom* se podría organizar un encuentro donde trabajen en grupos los estudiantes (por salas) y luego se haga un debate colectivo simulando, más aún, una clase presencial.

El problema diseñado con el fin de que en esta experiencia los participantes resignifiquen conceptos geométricos y que a futuro se ponga en juego con otro grupo de futuros profesores que construyan la noción de simetría especular es el siguiente:

> Juana y Pedro viajaban en auto por una ruta peligrosa y tuvieron un accidente.
>
> Pedro no tenía carnet de conducir y el conductor del otro auto afirma que Pedro manejaba en el momento del impacto. Pedro y Juana afirman que manejaba Juana.
>
> El seguro automovilístico necesita pruebas. La mamá de Juana muestra una foto de los jóvenes dentro del auto abriendo el chat con Juana en la

aplicación *WhatsApp*. Esa foto no coincide con la foto que Juana tiene guardada en el celular y mostró a vialidad inmediatamente después del accidente. Por lo tanto, del seguro automovilístico, afirman que las pruebas no son compatibles. a) ¿Podrías ayudar en la resolución del caso? b) ¿Cómo justificarías desde tus conocimientos matemáticos esta situación?

Tabla 1. Problema formulado y presentado a los futuros profesores.

Los futuros profesores que participan de la experiencia manifiestan el acuerdo de que se grabe la reunión en *Zoom*. Asimismo, envían por correo electrónico las representaciones que realizan en el software de geometría dinámica *GeoGebra,* fotos de las experimentaciones que realizan empleando el teléfono celular, etc.

Durante la puesta en juego se encuentran presentes dos docentes de geometría de la carrera, una estudiante del profesorado en matemática que se encuentra realizando una adscripción en investigación y los futuros profesores. Respecto a las interacciones en el marco de este trabajo sincrónico señalamos que en general otorgamos lugar a los estudiantes para que ellos respondan la tarea, evidenciamos que sus explicaciones resultan detalladas para que su par pueda comprender las ideas matemáticas en juego, asimismo las docentes se encontraban conectadas por la aplicación *WhatsApp* y decidían cuándo y cómo intervenir, estas diferencias se hacen evidentes respectos al trabajo tradicional en el aula y se corresponden con lo mencionado en Villarreal (2004) y Borba y Villarreal (2005).

4. Análisis de las producciones de los futuros profesores

Como mencionamos anteriormente los grupos se denominan A y B para preservar la anonimidad de los participantes de la experiencia y cada uno de los estudiantes que forman los respectivos grupos se denotan A1, A2, B1, B2 y B3. Las docentes se designan D.

En la resolución del problema ambos grupos recurren al teléfono celular para comprobar lo que sucede al tomar una *selfi*, es decir apelan a la experimentación mediada por tecnologías. El grupo B lo realiza al inicio de la discusión, a diferencia del grupo A en el que uno de los estudiantes hace la prueba (manifestándolo al final por una pregunta de una docente) pero no lo pone en discusión con su par. Lo mencionado se encuentra en relación con Villarreal (2012), dado que la autora destaca el potencial de emplear las tecnologías digitales para experimentar en instancias de trabajo matemático, tal como lo realizan los futuros profesores en este caso.

Cabe mencionar, que el grupo que socializa realiza una discusión centrada en la experimentación, que consiste en sacar y enviar fotos que otorgan la oportunidad de visualizar la situación en juego. Esto redunda en conjeturas acerca de cuál puede ser el motivo por el que en la foto se invierte el sentido, de este modo comienzan a discutir y poner en acción nociones matemática con el fin de fundamentarlas. Se evidencia que el trabajo en interacción, en este momento, potencia la producción en juego, dado que se avanza desde la experimentación al empleo de conocimientos matemáticos (Borba y Villarreal, 2005).

A partir de lo dicho anteriormente se hace evidente de este modo que movilizan actividades características del quehacer matemático, como ser, la exploración en el marco de la resolución del problema (Itzcovich, 2007).

Tal como se menciona anteriormente, el grupo A no debate en torno al trabajo experimental con el celular. En este caso, la discusión comienza a partir de cuestiones que involucran al dominio de la lógica, particularmente conjetura que Juana miente. Uno de los alumnos afirma:

A1[2]: Si, para mí es un problema de lógica. En donde si Juana y Pedro, o sea si Pedro y Juana dicen la verdad el otro chofer está mintiendo y el seguro también. Después, tendríamos que analizar eso capaz, si Juana y Pedro mienten, la mamá miente y así ir viendo los distintos casos.

Como se evidencia en la expresión de A1 centran sus intercambios en probar si Juana miente o dice la verdad. Se alejan del trabajo en el dominio de la lógica a partir de la intervención por parte de una docente, que considera la expresión del estudiante A1 "Viendo los distintos casos" y expresa:

D: Ustedes están suponiendo que uno dice la verdad y el otro no. ¿Y si los dos dicen la verdad? No es que la madre la cambia, si dice la verdad Juana y dice la verdad la madre, ¿qué pasaría?

La docente incentiva la discusión para que los estudiantes consideren que los valores de verdad de ambas afirmaciones pueden ser iguales, ya sean verdaderas o falsas. Posteriormente, uno de los estudiantes responde:

A1: En ese caso la foto en realidad no tendría relevancia creo yo, porque también pueden ser espejadas, entonces por más que el rostro este del lado izquierdo puede que justamente no haya estado manejando el que salía del lado del volante.

Se hace evidente que a partir de la intervención docente los estudiantes buscan validar sus procedimientos, considerando que si ambos dicen la verdad las fotos pueden no resultar útiles a la hora de resolver el caso, por lo que comienzan a trabajar con cuestiones de la geometría que les posibiliten analizar posiciones de las personas a partir de las fotos. Descartan la conjetura inicial (que uno miente y el otro dice la verdad), a partir de este momento trabajan en el dominio geométrico y deciden apelar al software de geometría dinámica *GeoGebra*. De este modo, se observa que en el trabajo del grupo se ponen en juego algunas de las actividades características del quehacer matemático mencionadas por Itzcovich (2007), como ser, conjeturar, validar, representar y explorar.

A continuación, uno de los integrantes, para explicar con precisión su afirmación, representa la situación en el software de geometría dinámica *GeoGebra*, como se muestra en la siguiente imagen.

[2] Las frases textuales de transcripciones de voces de estudiantes y docentes se escriben en letra itálica y corresponden a la variedad dialectal del español rioplatense.

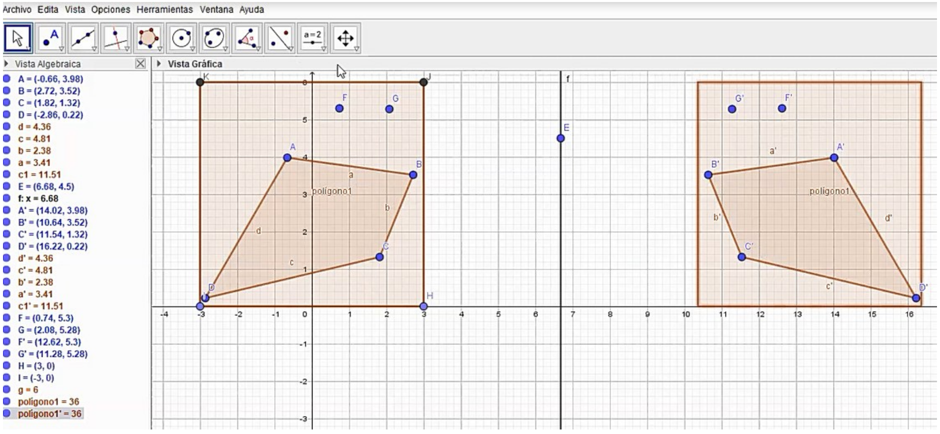


Figura 1. Representación en *GeoGebra* realizada por un estudiante del grupo A.

Los estudiantes conjeturan:

A2: Salvo que sea una selfi. O sea, si era una selfi, ya de por si el celular invierte el sentido y la posición, si era una selfi.

A partir de la intervención de A2 conjeturan que en las fotos se invierte el sentido. Los estudiantes deciden comparar las dos fotos posicionándose en el trabajo en el plano, validan esta conjetura con una representación de la situación apelando a conceptos de la simetría axial. El estudiante A1 representa en *GeoGebra* y comparte pantalla para que el estudiante A2 y las docentes visualicen la representación en juego y explica:

A1: De esta forma supongamos que F es Juana y G es Pedro, Juana va en el lugar del conductor, y Pedro del acompañante. Si yo transformo esa foto [en este momento utiliza el comando de simetría axial] *lo que me queda es que, Pedro en realidad, va en el lugar del conductor y Juana en el del acompañante. Es decir que con esto yo puedo determinar que la foto es la misma, la que tiene la mamá de Juana y Juana.*

Por una parte, los estudiantes visualizan, representan, experimentan y se retroalimentan a partir del empleo del software (Arcavi y Hadas, 2000). Esto se aprecia en la fundamentación que ofrece el estudiante que se apoya en la construcción realizada en *GeoGebra.* Emplea la herramienta arrastre para mostrar a su compañero que la condición de inversión de sentido se mantiene y se lo fundamenta a partir de las propiedades de la transformación del plano, esto permite que se retroalimenten.

Por otra parte, es de destacar que establecen y validan conjeturas a partir del trabajo con el software y del uso de propiedades de geométricas (Itzcovich, 2007). En las cuestiones mencionadas, se refleja que los futuros profesores que participan de la experiencia emplean las tecnologías digitales y particularmente el software *GeoGebra* para resolver el problema, a su vez ponen en juego actividades características del quehacer matemático. Se destaca, por tanto, que potencian su trabajo matemático a partir del empleo de tecnologías digitales y se hace evidente que su producción no sería la misma en caso de no emplearlas, en correspondencia con los mencionado en Borba y Villarreal (2005).

En el grupo B una de las integrantes conjetura desde el inicio que se presenta la imagen en “espejo”, refiriéndose a la foto afirma:

B1: En realidad es un espejo, pero no sé, ¿cómo se llama?

Posteriormente, debaten respecto al motivo de lo conjeturado y se preguntan cómo es posible que suceda esto:

B2: ¿Whatsapp te las da vuelta? (…) porque capaz que es eso, o sea que cuando vos la sacas te la invierte y después vos la mandas y Whatsapp te la da vuelta.

Esto permite que otra estudiante del grupo comience a experimentar y envía fotos a sus compañeras para mostrar y validar su conjetura inicial. Interesa señalar que las estudiantes ponen en juego cuestiones y conocimientos tecnológicos basando sus conjeturas en la experimentación (Borba y Villarreal, 2005), no emplean nociones matemáticas en la validación. Una de las integrantes se toma una *selfi* con su celular y la envía por la aplicación *Whatsapp* del celular al resto del grupo B.

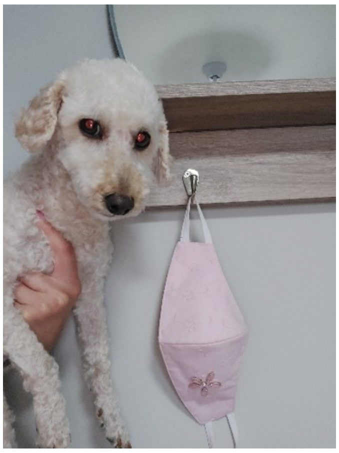


Figura 2.[3] Imitación de imagen de una de las estudiantes del grupo B en la aplicación *Whatsapp*.

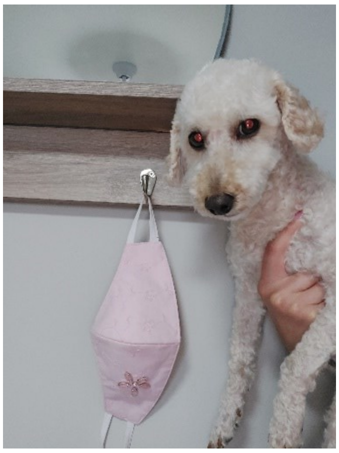


Figura 3. Imitación de imagen de una de las estudiantes del grupo B en la galería del teléfono.

[3] Se realiza una imitación de la foto que toma la estudiante con el fin de preservar su anonimato.

A partir de la foto comienzan a discutir posibles posiciones de los elementos presentes en la misma respecto de la persona que se toma la *selfi*. B2 afirma: *Por ejemplo, veo el perchero del lado izquierdo* [Refiere a la imagen que se encuentra en el chat de la aplicación *Whatsapp*].

Continúan trabajando con la foto, basando sus afirmaciones en esta evidencia empírica. Establecen conjeturas y las validan apelando a la visualización y experimentación mediada por tecnologías (Villarreal, 2012) y aseguran:

B2: Puse para editarla y ahora por ejemplo el perchero me aparece con el lado derecho. [Refiere a la imagen que se encuentra guardada en la galería del teléfono celular].

B3: A ver, mándala. [Refiere a la imagen que se encuentra guardada en la galería del teléfono celular].

A partir de este momento, las futuras profesoras validan sus conjeturas apelando a nociones de la geometría euclídea plana, particularmente recurren al concepto y propiedades de la simetría axial con el fin de explicar lo que sucede en cada una de las imágenes en juego, de modo análogo al procedimiento llevado a cabo por los estudiantes del grupo A.

B2: Está en el plano y está el eje de simetría en el medio, para ya lo sé, es una simetría axial.

B3: ¡Mirá!, los celulares están usando la simetría de geometría.

B1: Es axial chicas.

B2: Y está en el plano. Y si uno piensa en la especular, por ejemplo, si uno piensa en el espacio podría ser la especular y el plano es paralelo al plano de la foto.

De las actividades propias del quehacer matemático mencionadas por Itzcovich (2007) ponen en juego la validación a partir de propiedades geométricas, en primera instancia emplean conceptos de la geometría euclídea plana y posteriormente apelan a conceptos de la geometría euclídea tridimensional.

Las estudiantes avanzan en la discusión en torno, en primera instancia, a la noción de simetría axial, conjeturando dónde deberían ubicar al eje de simetría y bajo qué condiciones se verifica lo conjeturado. Posteriormente, discuten y analizan la situación apelando al celular y la persona (no a las fotos), por lo que apelan al concepto de simetría especular, intentan determinar dónde se ubica el plano y cómo se transforman los puntos a partir de la misma. A su vez, interesa destacar que el uso del celular permite que las alumnas se sorprendan respecto a la aplicación de cuestiones geométricas que han estudiado en el marco de su formación como futuras profesoras en matemática.

Finalmente, para dar respuesta al problema presentado las estudiantes del grupo B explican que las fotografías pueden ser iguales, por lo tanto, afirman que tanto Juana como su madre presentan una foto real de la situación. Validan esta conjetura empleando el concepto de simetría especular (pseudomovimiento, transformación del espacio que conserva las propiedades movimiento, pero invierte el sentido) de manera principalmente intuitiva.

5. Reflexiones finales

En las producciones de los futuros profesores que participan de la experiencia evidenciamos que apelan ambos grupos a nociones de la geometría euclídea plana, sin embargo, el grupo B posteriormente logra posicionarse en el espacio tridimensional, empleando el concepto de simetría especular. Respecto a esta cuestión, consideramos, como señalan Schaefer y Sgreccia (2016) y Grossi y Sgreccia (2016), que la enseñanza de la aritmética y el álgebra predomina a la enseñanza de la geometría y además si se trabajan propuestas en geometría, la geometría del plano prevalece a la geometría tridimensional, en este sentido el problema diseñado puede incentivar el trabajo en 3D.

En el trabajo de ambos grupos apreciamos que se reorganizan, por un lado, el modo de trabajo matemático y por otro el establecimiento de relaciones humanas, en relación con lo planteado por Villarreal (2004). Consideramos positivo que las interacciones generan debate que permiten el avance en la resolución del problema y valoramos el modo de comunicación que permite este tipo de trabajo sincrónico que exige a los estudiantes explicar de modo detallado y oralmente las conjeturas formuladas y su validación, potenciando, por tanto, el uso del lenguaje matemático.

Como plantean Borba y Villarreal (2005) el problema diseñado y la modalidad propuesta, fomentan el trabajo de los estudiantes como comunidad matemática en la que resignifican y ponen en juego conocimientos tecnológicos y matemáticos a partir de un trabajo en interacción, donde las tecnologías digitales median los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Además, generan y validan conjeturas empleando el ensayo y error de modo administrado con el fin de establecer una respuesta al problema (Borba y Villarreal, 2005; Villarreal, 2012).

Consideramos que en la propuesta los estudiantes de ambos grupos llevan adelante actividades propias del quehacer matemático (Itzcovich, 2007). Particularmente, el grupo A emplea el software de geometría dinámica *GeoGebra* y ponen en juego actividades características de los mismos, es decir: experimentan, visualizan, se sorprenden y retroalimentan (Arcavi y Hadas, 2000).

Cabe mencionar, que como se puede apreciar en esta experiencia no emergen nuevos conocimientos por parte de los futuros profesores, sino que resignifican algunas nociones propias de geometría. Se considera que el problema posibilita la construcción de la noción de simetría especular, como se especifica inicialmente, por lo que puede ser utilizado con este fin por otros docentes o investigadores. Particularmente, se propone a futuro implementar esta propuesta en el curso de geometría euclídea tridimensional para el que se diseña inicialmente, con el fin antes mencionado.

A partir de las consideraciones realizadas se piensa que este trabajo puede aportar al campo de la Educación Matemática, puesto que se expone un problema que: invita a la utilización de diversas tecnologías digitales, requiere para su resolución de la puesta en juego de diversas actividades que caracterizan al quehacer matemático, posibilita la construcción de conocimientos tecnológicos y matemáticos, entre otros. Asimismo, se valora la reflexión en torno a este tipo de trabajo virtual sincrónico atendiendo a la situación actual de prevalencia del trabajo sincrónico respecto al presencial por la pandemia COVID-19.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*, 25-45. Disponible en: https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2014/01/s71-material-de-referencia.pdf

Borba M y Villarreal M. (*2005). Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking.* Nueva York: Springer.

Grossi, S. y Sgreccia, N. (2016). Perspectivas docentes acerca de habilidades de representación y comunicación de lo tridimensional. En R. Otero (Comp.) *Actas del Segundo Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática y Tercer Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática* (pp. 73-79). Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Itzcovich, H. (2007) *La matemática escolar.* Buenos Aires: Aique.

Kaplan, G., Robalo, G., Tedesco, G., Nicodemo, M. y Novembre, A. (Coord.). (2016). *Aportes para pensar la enseñanza de la matemática con TIC*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Provincia de Buenos Aires. Disponible en: https://escuelaprimarialh.files.wordpress.com/2016/09/aportes-para-pensar-la-matemc3a1tica-con-tic.pdf

Maggio,M.; Lion, C. y Perosi, M. (2014). Las prácticas de la enseñanza recreadas en los escenarios de alta disposición tecnológica. *Polifonías - Revista de Educación, 3 (5)*, 101-127. Disponible en: http://www.polifoniasrevista.unlu.edu.ar/sites/www.polifoniasrevista.unlu.edu.ar/files/site/5%20maggio.pdf

Marco Nacional para la mejora del aprendizaje en Matemática. (2018) Buenos Aires: Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la Nación. Disponible en:https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/marco_nacional_para_la_mejora_del_aprendizaje_en_matemaetica-digital-ok.pdf

Schaefer, L. y Sgreccia, N. (2016). Conocimiento especializado del contenido al enseñar a medir segmentos y ángulos a futuros profesores en matemática. En R. Otero (Comp.) *Actas del Segundo Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática y Tercer Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática* (pp. 66-72). Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Villarreal, M. (2004). Transformaciones que las Tecnologías de la Información y la Comunicación traen para la Educación Matemática. *Yupana, 1(1),* 41-55. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/16229/1/Villareal2004Transformaciones.pdf

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia,* 3 (5), 73-94. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/263654463_Tecnologias_y_educacion_matematica_necesidad_de_nuevos_abordajes_para_la_ensenanza

Autoras:
Cruz, María Florencia:
Profesora en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (Argentina) en el profesorado en Matemática. Especialista docente de nivel superior en enseñanza de la matemática en la educación secundaria. Realiza su tesis de doctorado en Ciencias de la Educación en la Universidad Nacional de Córdoba (Argentina), gozando una beca doctoral otorgada por CONICET, en temas referidos a la enseñanza de la matemática.
Ha participado en congresos nacionales e internacionales y realizado publicaciones en revistas especializadas en relación a la enseñanza de la matemática.
Dirección Electrónica: mfcruz@fhuc.unl.edu.ar

Mantica, Ana María:
Profesora en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (Argentina) en el profesorado en Matemática. Magister en Didácticas Específicas, mención en matemática. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo que ha realizado publicaciones en revistas especializadas nacionales e internacionales.
Dirección Electrónica: ana.mantica@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-19

https://union.fespm.es

Propuesta didáctica de una tarea matemática de modelación sobre funciones

Matías Sáez, Mario Sánchez, Horacio Solar

Fecha de recepción: 31/01/2020
Fecha de aceptación: 8/04/2021

Resumen	Presentamos una propuesta didáctica de una tarea de modelación de funciones. Nuestra metodología consistió en escoger una tarea de modelación, ejecutarla, y analizar los resultados obtenidos así como la propia implementación buscando falencias y oportunidades de mejora. De esta forma también logramos obtener evidencia que pueda ayudar a los docentes a determinar los procesos de modelación que pueden alcanzar los estudiantes según los diferentes momentos de la clase al ejecutar la tarea. Además, se promueve el uso de las cinco prácticas para generar discusiones como una estrategia de gestión en el tránsito por las diferentes etapas del ciclo de modelación. Gracias a esto logramos producir una planificación mejorada que potencie la habilidad de modelar de los estudiantes. **Palabras clave**: Propuesta didáctica, modelación, discusiones matemáticas, tarea matemática.
Abstract	We present a teaching proposal of a function modeling task. Our methodology consisted of choosing a modeling task, executing it, and analyzing the results obtained as well as the implementation itself, looking for shortcomings and opportunities for improvement. This way, we also obtain evidence that can help teachers determine the modeling processes that students can achieve according to the different moments of the class. In addition, is promoted the use of the five practices to generate discussions as a management strategy for the transit through the different stages of the modeling cycle. Thanks to this we were able to produce an improved planning that enhances the modeling ability of the students. **Keywords**: Teaching proposal, modeling, mathematical discussions, mathematical task.
Resumo	Apresentamos uma proposta didática para uma tarefa de modelagem de funções. Nossa metodologia consistiu em escolher uma tarefa de modelagem, executá-la e analisar os resultados obtidos, bem como a própria implementação, em busca de deficiências e oportunidades de melhoria. Desta forma, também obtemos evidências que podem ajudar os professores a determinar os processos de modelagem que os alunos podem realizar de acordo com os diferentes momentos da aula. Além disso, promove-se o uso das cinco práticas para gerar discussões como estratégia de gestão no trânsito pelas diferentes etapas do ciclo de modelagem. Graças a isso, fomos capazes de produzir um planejamento aprimorado que aprimora a capacidade de modelagem dos alunos. **Palavras-chave**: Proposta didática, modelagem, discussões matemáticas, tarefa matemática.

1. Introducción

Modelar es una competencia matemática que ha llamado la atención tanto de documentos curriculares como de investigadores (Frejd, 2013), así como matemáticos al menos desde el siglo XIX (Schukajlow, Kaiser & Stillman, 2018) y que es considerada cada vez en un mayor número de documentos curriculares alrededor del mundo (Blum, Galbraith & Niss, ctd. en Frejd, 2007). Si bien ha habido avances en la investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje en modelación (Kaiser, Blum, Borromeo Ferri & Stillman, 2011), el profesorado aún requiere de herramientas para promover la modelación, en particular, de tareas y estrategias de gestión que potencien su desarrollo en el aula de matemática.

La importancia de la modelación en el aula de matemática radica en que mejora la capacidad de abstracción de los estudiantes, pues logra que el alumno construya una versión simplificada y abstracta de la realidad (Mineduc, 2015, p. 95); esto se logra a través de un ciclo (Borromeo-Ferri, 2006; Maaß, 2018) que permite trabajar con otras competencias o habilidades matemáticas (OECD, 2016; Mineduc, 2015).

Implementar tareas de modelación en el aula es importante porque implica el desarrollo de interacciones dialógicas entre profesores y estudiantes que facilitan un aprendizaje significativo de los fenómenos matemáticos asociados a un problema (Colorado, Álvarez & Ospina, 2011). Esto se vincula con que las tareas de modelación son necesariamente tareas de creación, según la taxonomía de Bloom y revisada por Anderson (2009), por lo que su utilización en el aula fomenta el desarrollo de habilidades cognitivas superiores.

Uno de los problemas más frecuentes para incluir tareas de modelación en el aula de matemáticas viene dado por el sistema escolar, que impide que la habilidad se desarrolle de forma integral en la práctica cotidiana de los profesores (Schukajlow, Kaiser & Stillman, 2018) y por ello, sigue siendo una cuestión pendiente en su formación inicial (Blomhøj y Carreira, 2009). Por esta razón, se vuelve necesario poner a disposición de los profesores tareas de modelación previamente implementadas y analizadas que les faciliten el integrar la modelación en la gestión de sus clases y el comprender cómo se desarrolla el proceso de modelación en sus estudiantes. El objetivo de este artículo es presentar una propuesta didáctica de una tarea de modelación.

La propuesta didáctica consiste en una tarea matemática sobre la modelación de un fenómeno asociado a funciones. En su diseño se consideraron los procesos de modelación (Borromeo-Ferri, 2006; Maaß, 2006) y las cinco prácticas para orquestar discusiones productivas (Smith y Stein 2011) como una estrategia para gestionar la competencia de modelación en el aula. La propuesta didáctica se implementará y analizará con el propósito de ajustarla para que pueda propiciar mejores oportunidades de enseñanza-aprendizaje de modelación en los estudiantes.

2. Marco Teórico

2.1. Procesos de modelación matemática

Las relaciones de los procesos de modelación que serán utilizados en esta propuesta son los planteados por Maaß (2006) y se utilizarán para analizar el nivel de modelación alcanzado por los estudiantes.

El ciclo de modelación empieza con un problema del mundo real. Luego, a través del proceso de simplificación, se obtiene un modelo real, del que algunas veces se pueden conseguir respuestas para el problema. Posteriormente, se procede con la *matematización* que tiene como resultado un *modelo matemático* que, al ser utilizado, produce una *solución matemática*. Para finalizar, se procede a interpretar los resultados obtenidos para *validarlos* según como se ajustan a la realidad; dependiendo del éxito, se procede a repetir el ciclo. Existen al menos dos situaciones en las que, luego de la validación, este proceso puede volver a empezar. La primera viene dada al determinar que el resultado obtenido es erróneo. La segunda viene dada por la generalización del modelo, situación que es deseable pues permite profundizar en los procesos de modelación.

Los procesos de modelación se ilustran en el esquema de la figura 1:

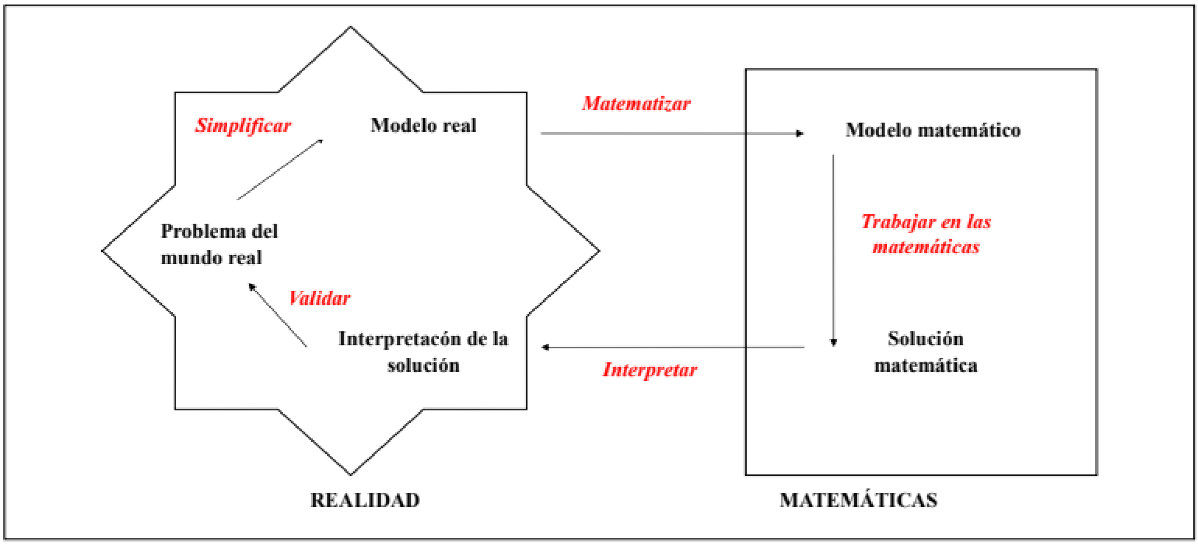


Figura 1. Procesos de modelación matemática (traducción propia, Maaß, 2006, p.15)

2.2.1 Gestión de la modelación

Frejd (2013) propone tres mecanismos de evaluación o acercamientos que pueden ser beneficiosos para mejorar la modelación: (1) *observar* el trabajo de los estudiantes para poder (2) *dar impresiones* a los estudiantes sobre su trabajo; y (3) *dar entrevistas* para que los estudiantes puedan hacer preguntas sobre su desempeño. Consideramos que, para una tarea matemática que se implementa en una sola clase, las dos primeras opciones son las más viables. Más tarde, Frejd y Bergsten (2018) reconocen cuatro procesos que se dan durante una tarea de modelación: (1) descripción de la realidad, un sistema o un problema; (2) entender el problema real; (3) abstracción para (o por) herramientas de representación como computadores; (4) negociación de significados del problema real entre el profesor y el estudiante.

Utilizaremos estos mecanismos y procesos en la planificación; y las vincularemos con las prácticas para generar discusiones productivas de Smith y Stein (2011), ya que consideramos que son una estrategia de gestión del docente para promover la modelación. En la tabla 1, se muestran cada una de las cinco prácticas con las acciones propias que realiza el profesor para llevarla a cabo. En esta propuesta serán conectadas con los procesos de modelación según el ciclo descrito por Maaß (2006; 2018).

Práctica
[1] Anticipar las respuestas de los estudiantes antes de la lección.
[2] Supervisar o monitorear el trabajo de los alumnos y alumnas e involucrarlos en las tareas.
[3] Seleccionar a algunos estudiantes y sus producciones para que muestren su trabajo matemático.
[4] Dar una secuencia con un orden específico a las respuestas de los estudiantes para analizarlas.
[5] Relacionar o conectar las respuestas de los estudiantes y vincularlas con ideas matemáticas clave de la lección.

Tabla 1. Acciones del uso de las 5 Prácticas (adaptado de Smith y Stein, (2011))

Al vincular las cinco prácticas con los mecanismos y procesos recopilados por Frejd, se puede apreciar que estos últimos se encuentran contenidos en ellas. También, resulta interesante observar cómo las cinco prácticas, vinculadas al proceso de modelación de Maaß, facilitan la transición de un proceso a otro. Por ejemplo, al momento de validar, una *selección* de determinados modelos expuestos por medio de *secuencia específica* facilita la validación de cada uno. Además, también se observa gran potencial argumentativo durante la fase de interpretación (Henríquez et al. 2020), momento en el que el monitoreo ayuda a involucrarlos en la discusión.

3. Metodología

El estudio se realizó en un establecimiento particular mixto de Santiago de Chile, en un curso de 38 estudiantes (13 a 14 años). La clase fue gestionada por un profesor que participó en la evaluación de la propuesta didáctica original. Se grabaron las acciones del docente a cargo y de dos grupos de alumnos. La clase duró 1 hora y 30 minutos.

Como mencionamos anteriormente, el objetivo de esta propuesta es ajustar una tarea de modelación y proponer acciones específicas para su desarrollo. Para conseguirlo, se implementó la tarea planificada para su posterior análisis (planificación original anexada). Luego, se procedió a codificar los momentos de la clase en función del proceso de modelación que se llevó a cabo y las cinco prácticas de Smith y Stein (2011). Terminado el análisis, se ajustó tanto la tarea como la planificación, con acciones docentes específicas para que los estudiantes alcancen una modelación más profunda. De esta manera buscamos validar la tarea como pertinente para desarrollar la competencia de modelación. La propuesta didáctica que se obtuvo como resultado del análisis, se encuentra en el apartado 6.2.

El estudio se divide tres etapas:

Diseño e implementación: seleccionamos una tarea matemática de modelación y anticipamos posibles respuestas, errores, dificultades y modelos de los estudiantes. En la implementación se separó al curso en grupos pequeños (de 3 a 5 alumnos) según afinidad; se grabó al profesor y a dos grupos escogidos previamente según su potencial. Se recogió evidencia escrita de todos los grupos.

Evaluación de la implementación: la gestión del profesor y todo lo ocurrido en la implementación fue analizado en función del ciclo de modelación (Maaß 2018) y de las cinco prácticas; con especial atención en los procesos promovidos por el profesor y los niveles de modelación alcanzados por los estudiantes. Toda la evidencia videográfica fue codificada para su posterior análisis.

Innovación: con los resultados obtenidos en el análisis, se procedió a adaptar la tarea matemática, añadiendo nuevos datos, preguntas y subtareas. Además, se añadieron nuevas acciones docentes a la planificación. Todo esto con el objetivo de generar nuevas oportunidades de enseñanza-aprendizaje que faciliten un mayor desarrollo de la competencia de modelar.

4. Análisis de datos

En este apartado se analizan distintos aspectos relacionados con la tarea y su implementación. Para la tarea matemática se realiza un análisis a priori de su potencialidad como tarea de modelación y los posibles modelos que podrían utilizar los estudiantes en su resolución. Para la implementación se toma en consideración tanto la gestión del profesor como el trabajo de los estudiantes.

4.1 Tarea Matemática

A continuación, en la figura 2 se presenta la tarea matemática seleccionada, diseñada por Aravena y Caamaño (2007). Seleccionamos esta tarea por dos razones. Primero, consideramos que promueve intrínsecamente la modelación. Segundo, se trata de una situación real, en la línea de lo planteado por Maaß, quien postula que los ambientes de aprendizaje de los estudiantes deben ser auténticos (2018) en el contexto de una tarea de modelación matemática.

Cuidemos el Medio Ambiente

En 1896 el científico sueco Svante Arrhenius fue el primero en predecir el efecto invernadero como resultado de las emisiones de dióxido de carbono en el aire por parte de los países industrializados. La quema de combustibles fósiles continúa produciendo 5,4 mil millones de toneladas de carbono al año, las cuales son absorbidas por la atmósfera y por los océanos.

En 1990 el Grupo Internacional sobre el Cambio de Clima (GICC) pronosticó que, de continuar la tendencia actual, aumentará la temperatura promedio global de la Tierra. La tabla 1 muestra los datos del aumento de la temperatura global pronosticada en grados Celsius.

Tabla 1

Aumento de la temperatura global pronosticada en grados Celsius

Año	Temperatura
1980	0.0
2000	0.42
2020	0.84
2040	1.26
2060	1.68
2080	2.10

A partir de la información, realiza las siguientes tareas:

(a) Represente los datos en un gráfico. ¿Qué tipo de gráfica te resulta?
(b) A partir de la gráfica determina una expresión algebraica de manera que concuerde con los datos.
(c) Predice la temperatura estimada para los años 2030 y 2085.
(d) Tomando tu expresión algebraica (o modelo) explica el significado de los coeficientes y llega a una expresión general.

Figura 2. Tarea Matemática. Extraído de Aravena y Caamaño (2007)

A continuación, se procederá a analizar la tarea matemática. Primero, desarrollaremos brevemente la gestión de esta tarea utilizando las cinco prácticas (Smith & Stein, 2011). Segundo, analizaremos cómo la tarea invita a los estudiantes a transitar por distintos procesos de modelación (Maaß, 2006). Tercero, anticiparemos los posibles modelos que podrían construir los estudiantes analizando los razonamientos que hay detrás de ellos.

4.1.1 Análisis de la gestión de la tarea matemática

Sobre cómo utilizar las cinco prácticas en esta tarea se detalla en las acciones del docente que se encontrarán en la planificación ajustada más adelante. Sin embargo, a modo de resumen, antes de la clase se anticipan posibles respuestas y obstáculos de los estudiantes. Durante su implementación se separa a los estudiantes en grupos pequeños para facilitar el monitoreo del trabajo y para generar una mayor discusión de la tarea, en este punto el profesor es el encargado de profundizar en el pensamiento de los estudiantes, de responder y plantear preguntas deliberadas y de discutir los significados matemáticos con los grupos, esto con el fin de avanzar en el ciclo de modelación. Luego, se seleccionan modelos producidos por los estudiantes y se organizan en una secuencia específica, en este caso según la complejidad de las representaciones, para que sean expuestos al curso y generar una discusión que permita validar los modelos.

4.1.2. Análisis de los procesos de modelación

El diseño original de esta tarea matemática por Aravena y Caamaño es apropiado para una tarea de modelación en el sentido de que establece una secuencia que permite a los estudiantes avanzar a través de los procesos de modelación siguiendo el esquema de Maaß.

El enunciado presenta varios aspectos que ayudan en este tópico ya que, una vez presentada la tarea matemática, la primera indicación que se les entrega a los estudiantes es que realicen un gráfico en el apartado (a); así, se les invita a utilizar un método de representación diferente a la tabla presentada por el enunciado, favoreciendo la comprensión del problema en el proceso de simplificación. El gráfico permite observar que los datos tienen una relación lineal que se puede expresar a través de una función lineal o afín, o de una proporción directa. Esto ayudaría a matematizar el problema y a construir una expresión algebraica según el razonamiento anterior, lo que se indica en el apartado (b). El apartado (c) promueve el trabajo de las matemáticas al utilizar el modelo para predecir valores que no se encuentran en el enunciado. Esto incide en la validación de los modelos matemáticos, ya que al interpretar las soluciones que nos entrega el modelo construido en el problema real podemos determinar su pertinencia y coherencia; este punto es más importante de lo que parece, pues los alumnos no tienen a validar sus modelos (Stillman & Galbraith, 1998 ctd. en Czocher 2018). Finalmente, el apartado (d) promueve avanzar a una proyección del modelo matemático, de manera que sirva para otros contextos con características similares.

4.1 3. Posibles modelos y procedimientos

Consideramos que existen cinco modelos o procedimientos que pueden desarrollar los estudiantes al resolver esta tarea. Tres de ellos corresponden, según el esquema de los procesos de modelación de Maaß, a modelos del mundo real: (1) razonamiento proporcional; (2) tablas y promedios; y (3) un gráfico que permita aproximar el aumento de la temperatura en algún año específico. Las dos opciones restantes corresponden a modelos matemáticos: (4) $f(x) = 0{,}021x - 41{,}58$ dónde x representa el año en que se desea observar el aumento de temperatura, y (5) $f(x) = 0{,}021x$ donde x representa los años transcurridos desde 1980. Lo interesante de estos dos últimos modelos es que uno corresponde a una función lineal y el otro a una función afín, ambas correctas y que dependen del significado de la variable independiente. Consideramos que gestionar la construcción de ambos modelos permite generar una discusión productiva que enriquece el desarrollo de la competencia de modelación y la profundización de significados matemáticos.

4.2 Análisis de la implementación

4.2.1. Gestión del profesor

Para realizar el análisis de la gestión del profesor se toman en consideración dos tipos de fuentes directas: (1) el vídeo de la clase donde se implementó la tarea de modelación; y (2) la planificación de la misma. A continuación, se analizará, por un lado, la gestión de la modelación y, por otro lado, el uso de las cinco prácticas.

4.2.1.1 Con respecto a la gestión de la Modelación

Al iniciar el desarrollo de la tarea, los estudiantes se encuentran en la simplificación del problema del ciclo de Modelación (Maaß, 20018) donde se espera que identifiquen los datos y los relacionen a través de significados matemáticos. Con el monitoreo de los primeros grupos se destaca la necesidad de gestionar la discusión para promover la comprensión del problema, a través de preguntas fundamentalmente de identificación, como se observa en el siguiente diálogo:

Profesor: pero para graficar, ¿qué hiciste primero para graficar?

Alumna 1: poner los datos

Profesor: los datos, ¿y cuáles son los datos?, ¿dónde están en el problema?

Alumna 1: acá (señala el cuadro de la guía)

Alumna 2: la temperatura

Profesor: esa sería la variable, ¿verdad?

Alumna 3: el año lo voy a poner abajo, la temperatura al lado

Profesor: ¿y por qué lo pones abajo y no al revés?

Alumna 3: porque ahí van, el año está primero, entonces va ir sostenido en el año

En este episodio, el profesor quiere destacar la identificación de las variables del problema: temperatura y año, que se encuentran en la tabla que indica Alumna 1. Pero también, al realizar la última pregunta promueve la comprensión de la relación de las variables, ya que la dependencia de una variable sobre la otra permitirá avanzar a un razonamiento matemático proporcional que contribuirá en la matematización del problema. Aquí la gestión del profesor se hace necesaria sobre todo para promover el uso de sistemas de representaciones y conocimientos matemáticos que ayuden a los estudiantes a aclarar y/o expandir sus conocimientos. Sin embargo, observamos que no fue necesario realizar este tipo de preguntas después de la primera media hora en la que los estudiantes han desarrollado de la tarea. Creemos que esto se debe a que la simplificación del problema real está vinculado a la discusión grupal que surge de forma espontánea para resolver la tarea en los grupos, por lo que el desarrollo de este proceso de modelación se promueve en los estudiantes otorgándoles un tiempo prudente sin necesidad de una intervención del profesor.

Durante el proceso de Matematización para construir un modelo matemático, en varias oportunidades fue necesario que el profesor promueva en los estudiantes que expliciten los modelos reales en términos matemáticos, sobre todo a través de una expresión algebraica como lo indica la tarea matemática en el apartado (b) (figura 1). Se observó que los estudiantes tienen dificultad para expresar el razonamiento en términos algebraicos o llanamente tienen dificultades con el concepto de “expresión algebraica”. Como se observa en el siguiente diálogo:

Alumno 1: encontré aquí la temperatura con respecto a los años y la expresión algebraica la estoy sacando en base a los años, lo que se da en un año...

Profesor: ¿cómo llegaste a esos resultados?, ¿qué te diste cuenta? (indica la guía de trabajo del estudiante).

Alumno 1: porque, me di cuenta que por cada 20 años aumenta 0.42, entonces este (indica los años en la tabla), ya que, pide 10 años dividí 0.42 entre 2 y me dio 0.21 y lo sume y me dio esto (indica la guía de trabajo 1,05)

Profesor: ya, y ¿podrías eso expresarlo como una forma más general?, porque si yo te dijera cuánta temperatura aumentó en el año 4100 (que no sale en la tabla de la guía), ¿lo vas poder hacer así como ir sumando, e ir sumando…?, deberías llegar como a una expresión quizás más general.

Alumno 1: mmm…

Profesor: esa es la idea, llegar a una expresión más general.

Alumno 1: ¿cómo así?, no entiendo.

En este episodio, Alumno 1 ha utilizado el razonamiento proporcional esperado para dar solución al apartado (c) de la tarea, sin embargo, ese razonamiento aún no lo ha expresado a través de una expresión algebraica. El profesor identificando este obstáculo lo invita a predecir el aumento de temperatura para años más lejanos a los que se presentan en la tabla del enunciado, con el fin de comprender que utilizar este procedimiento se tornará engorroso por que le será necesario construir una expresión general utilizando términos algebraicos que le permitan avanzar de un modelo real a un modelo matemático. Un aspecto interesante de considerar en este estudio es que en otros momentos de la clase fue necesario describir el concepto de “expresión algebraica”, como expresión general, expresión utilizando letras como variables o fórmula matemática par que los estudiantes comprendan que debían construir el modelo matemático en términos algebraicos.

4.2.1.2 Con respecto al uso de las Cinco Prácticas

La práctica más utilizada durante toda la implementación fue la de *monitorear* el trabajo de los estudiantes para involucrarlos en la tarea matemática. Esta se dio de manera interactiva, es decir el profesor tuvo contacto directo con los estudiantes y ayudó de manera considerable a profundizar en los razonamientos y estrategias de los estudiantes (acción 2.a de la Tabla 1) como apreciamos en los diálogos anteriormente descritos. Además, ayudó al profesor a tener claridad del proceso de modelación que los estudiantes estaban alcanzando, identificar errores y estrategias que no había anticipado con anterioridad y seleccionar los diferentes modelos matemáticos que se comunicarán en la puesta en común (acción 2.b de la Tabla 1). Sin embargo, al iniciar el proceso de simplificación del problema, las preguntas que dirige el profesor son cerradas por lo que muchas veces induce la respuesta de los estudiantes en contraposición de la acción 2.a de la Tabla 1, como se aprecia en el siguiente diálogo expresado en el monitoreo de un grupo:

Profesor: aumenta la tasa de carbono, la temperatura… ¿se acuerdan como se llamaba eso de que si aumenta una variable aumentaba la otra?

Alumna 4: directa…

Profesor: ¿qué tipo?

Alumna 4: una proporcionalidad directa

Profesor: una proporcionalidad directa, ¿cierto?, ya genial… y en eso, proporcionalidad directa, ¿se acuerdan de que había algo que se mantenía siempre?

Alumna 5: eh…

Profesor: tenía un nombre…

Alumna 5: constante…

Profesor: la constante de proporcionalidad, bien Alumna 5, hay una constante. Entonces, tienen que descubrir cuál es la constante de proporcionalidad con esos datos. Y la idea, es que le piden como proyectar o estimar la temperatura del año 2030 y del año 2035. Entonces, ahora con esto, quizás puedan llegar a una forma más general.

Las preguntas *"¿se acuerdan como se llamaba eso de que si aumenta una variable aumentaba la otra?"* y *"¿se acuerdan de que había algo que se mantenía siempre?"* podrían responderse perfectamente con un sí o no sin un mayor razonamiento, ya que si bien se aprecia una intención de que los estudiantes identifiquen los conceptos matemáticos asociados a la relación de las variables, la pregunta no promueve la utilidad que tienen estos términos para la construcción del modelo matemático. Esta ambigüedad o poca dirección en las preguntas puede entorpecer los procesos de modelación.

Incluido en el monitoreo está la acción de tomar notas de las producciones que van desarrollando los estudiantes (acción 2.a de la Tabla 1), acción que estuvo ausente tanto en la planificación como en la implementación de la tarea, por lo que, al momento de entregar una retroalimentación sobre el trabajo de los estudiantes, estos no logran apreciar con claridad cómo reorientar o clarificar las estrategias de resolución. Esto se evidencia en el diálogo con Alumno 1 que no logra comprender a qué se refiere el profesor con obtener una expresión más general, y este no logra describir ese concepto de una manera más comprensible.

A medida que se monitorean los grupos, se logró evidenciar la práctica de *anticipar*, en la cual el profesor previamente determina los posibles resultados, estrategias, errores u obstáculos (acciones 1.b, 1.c y 1.d de la Tabla 1) que puedan surgir en el desarrollo de la tarea por los estudiantes, como sucede en los diálogos anteriores. También, esta práctica se devela desde la presentación de la tarea matemática al iniciar la clase, como muestra el siguiente diálogo:

Profesor: la clase de hoy día trata sobre un problema de modelación, se va a basar todo en un solo problema de modelación. Hemos estado trabajando eso sí, se acuerdan un poco ¿qué significaba modelar?

Alumna 6: ¿modelar?

Profesor: modelar en matemática

Alumno 2: crear una forma como de entender algo

Profesor: crear como una forma de entender una situación cotidiana matemáticamente, obvio, estamos en clases de matemática...

Aquí el profesor comunica a los estudiantes que realizarán una tarea relacionada con la competencia de modelación y con ello, comunica los aprendizajes asociados de la clase (acción 1.a de la Tabla 1).

Las demás prácticas (anticipar, secuencia y conectar) si bien se consideraron en la planificación de clases, no se alcanzaron a evidenciar de manera significativa en la implementación de la tarea matemática, por el poco tiempo en que fue realizada.

4.2.2. Trabajo de los estudiantes

Para realizar el análisis del trabajo de los estudiantes en relación con los procesos de modelación de Maaß se toman en consideración dos tipos de evidencia: (1) los videos de las dos clases, que registraron el trabajo de dos de los siete grupos, (2) las producciones de los estudiantes.

La evidencia muestra que todos los grupos pasaron por el proceso de simplificación. Ya se analizó cómo la gestión del profesor aportó a esta situación; no obstante, se observa en la evidencia que los estudiantes ven facilitada la simplificación de datos al realizar el gráfico sugerido por el enunciado. También se observa que todos los grupos respondieron las preguntas de la tarea. Se debe destacar que, al menos en los dos grupos que fueron grabados, el apartado (b), correspondiente a la modelación, fue contestado después del (c). Esta situación desencadenó en que los grupos no utilizaron su modelo para desarrollar la tarea matemática.

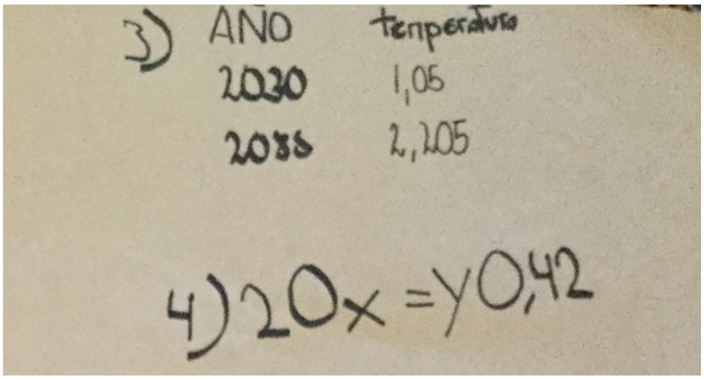


Figura 3. Producción grupo 6. Relación lateral.

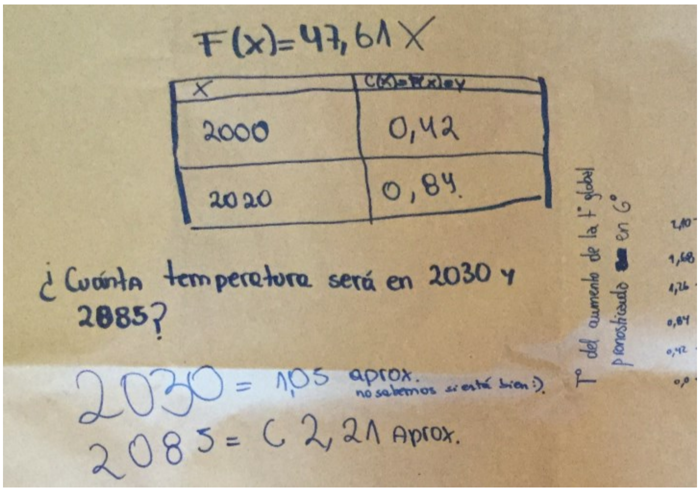


Figura 4. Producción grupo 3. Función lineal.

En general, la mayoría de los grupos escribió relaciones algebraicas similares a la mostrada en la Figura 3: *20x=0.42y*. Esta relación, según el análisis de la interacción de los grupos, indicaría que los años aumentan de 20 en 20 por cada fila de la tabla entregada, mientras que la temperatura lo hace de 0.42 en 0.42. Los modelos erróneos podrían llevar a resultados erróneos. Sin embargo, eso no se observa. La mayoría de los grupos logró responder el apartado (c) sin mayor dificultad (lo que se ve en las figuras 3 y 4), y eso se debe a que usaron un razonamiento proporcional. El análisis sugiere que los alumnos no tuvieron tiempo para poner a prueba su modelo pues, una vez contestada la pregunta (c) y construido el modelo, utilizaron el tiempo que quedaba para diseñar su cartel.

Se observa también que ninguno de los grupos de trabajo fue capaz de llegar a los modelos de función lineal o afín que la tarea esperaba que fuesen desarrollados. Es más, muchas de las expresiones algebraicas obtenidas parecen ser traducciones incorrectas del lenguaje natural al algebraico; sólo un grupo escribió una función lineal que, por un error en el uso de la fórmula, tenía mal calculada la pendiente (se invirtieron el divisor y el dividendo).

Un hecho particular a rescatar es que se observó a uno de los grupos de trabajo sumar 20 grados a todas las temperaturas. La evidencia muestra que esto se debe a que la pregunta (c) solicitaba predecir "la temperatura" y no el "aumento de temperatura". En este proceso el grupo necesariamente pasó por una etapa de validación de sus respuestas llegando a la conclusión de que eran incorrectas e iniciando el ciclo nuevamente; se observa que en la etapa de simplificación decidieron que 20 grados era una buena estimación para una temperatura *agradable* que no conocían y la sumaron a los aumentos que poseían.

5. Resultados

Clasificaremos los resultados del análisis anterior en dos aspectos que permiten una mejor comprensión de las acciones que deben realizar tanto profesores como estudiantes para un mejor desarrollo de los procesos de modelación: según la gestión del profesor respecto a la promoción de los procesos de modelación y según el trabajo de los estudiantes respecto al transcurso de un proceso a otro.

5.1 De la gestión del profesor

Considerando que la práctica de gestión más utilizada en la construcción del modelo matemático es el monitoreo, ya que es parte de cada uno de los episodios mencionados anteriormente; y que el proceso de modelación que alcanza a promover el profesor es a lo más la validación, podemos concluir que el monitoreo es la práctica más importante para promover el tránsito por los distintos procesos del ciclo de modelación propuesto por Maaß (2018), que se dan antes de la validación. Por ello, es necesario que el profesor realice un monitoreo efectivo que permita reorientar o clarificar las estrategias de construcción de los modelos matemáticos, así como profundizar en los conceptos matemáticos asociados a ellos; también será necesario monitorear un amplio espectro de grupos dada la relevancia de esta práctica para el desarrollo de la competencia.

El monitoreo asociado con la práctica de anticipar respuesta permite que el profesor cuente con estrategias que lo ayuden a ser más efectivo al momento de gestionar errores o procedimientos incorrectos en los modelos construidos en el monitoreo, y de esta manera ser más eficiente en el tiempo que le conlleva monitorear un grupo. En relación con el tiempo de monitoreo, el profesor puede hacer uso de la suscitación de las ideas de los estudiantes (Boerst, Sleep, Ball & Bass, 2011) no solo para profundizar en el razonamiento de los estudiantes, sino para involucrarlos en la tarea matemática, ya que con una mayor comprensión de la tarea logra que el grupo trabaje de manera más dirigida e independiente, de tal forma que se logre monitorear a más grupos en la clase. Otra acción importante asociada al monitoreo es que el profesor tome nota de las producciones de los estudiantes, para que luego de su análisis pueda entregar una retroalimentación más efectiva a los grupos (Gibbs & Simpson, 2009) y seleccionar con un enfoque claro los modelos que va a secuenciar para ser discutidos.

La práctica de anticipar respuestas invita al docente a que luego de implementar la tarea, este la pueda completar, mejorar o ajustar con los errores, procedimientos y modelos que no fueron anticipados previamente y que fueron expresados en la clase. Esto otorgará al profesor una visión clara para el diseño de preguntas que le permitan a los estudiantes hacer las conexiones del problema con los conocimientos matemáticos asociados. Por lo que esta práctica esta ligada a la matematización del problema real y a la construcción del modelo matemático.

Para alcanzar el proceso de validación con la tarea matemática, el profesor puede utilizar las prácticas de seleccionar, dar una secuencia y hacer conexiones entre respuestas e ideas matemáticas para gestionarlo, por medio de una exposición y discusión de los modelos. Si bien, esto no se realizó en nuestro estudio, consideramos que, para alcanzar una modelación más profunda de la tarea con la validación de los modelos, estas prácticas son pertinentes para ello.

5.2 Del trabajo de los estudiantes

El análisis del trabajo de los estudiantes muestra que la tarea matemática se ve parcialmente impedida cuándo esta se realiza en un intervalo de tiempo limitado a dos horas pedagógicas. Esto dificulta a los estudiantes atravesar la etapa de validación que les permitiría pulir y mejorar su modelo. Por esta razón se vuelve necesario aumentar la cantidad de horas pedagógicas destinadas a la implementación de la tarea. Con este tiempo extra se pueden realizar dos tipos de mejora para facilitar que los estudiantes validen sus modelos: (1) la primera forma de mejorar sería en la etapa anterior a las exposiciones, aquí los estudiantes pueden probar su modelo preliminar con nuevos datos; (2) la segunda podría ser posterior a las exposiciones, en la que los alumnos ponen a prueba dos o tres modelos, tanto propios como de otros grupos, previamente seleccionados por el profesor; así el grupo tiene oportunidad de dar sus opiniones y pulir los modelos de sus compañeros.

Otra situación que se observó es que los alumnos encontraban una expresión algebraica que, según su interpretación, modelaba la situación, aun cuando esta era incorrecta. El análisis sugiere que los estudiantes tendían a responder las preguntas utilizando un razonamiento proporcional y luego buscaban una expresión algebraica que se ajustase a los resultados. Para evitar que esto ocurra se puede solicitar a los alumnos que calculen más valores que sean difíciles de obtener utilizando un razonamiento proporcional, de manera que hagan uso de la expresión algebraica para ello y con esto logren determinar la validez de su modelo.

6. Propuesta didáctica de la tarea matemática ajustada de modelación

A continuación, se presenta la tarea matemática ajustada de acuerdo el análisis de la implementación de la tarea original. Optamos por dividir el desarrollo de la tarea en dos clases, así que se presentan las respectivas planificaciones.

6.1 Ajuste de la Tarea matemática

Optamos por mantener el enunciado original de Aravena y Camaño (2007), haciendo algunas modificaciones los tiempos sugeridos y las preguntas.

Primero, la tarea ahora está diseñada para ser aplicada en dos clases. Segundo, se han añadido preguntas para así facilitar el que los estudiantes inicien un proceso de validación del modelo que propongan.

a	Realice un listado de los posibles contenidos matemáticos relacionados con el problema para solucionarlo.
b	Organice y represente los datos en un gráfico. ¿Qué tipo de gráfico te resulta?
c	A partir de las características del gráfico determinen una expresión algebraica (o fórmula) que concuerde con los datos.
d	Con el modelo matemático anterior (fórmula) predice el aumento de temperatura estimada para los años 2030 y 2085.
e	Utilizando el mismo modelo predice el aumento de temperatura estimada para los años 2100, 2321, 2980, 3200 y 3333 (pueden organizar los datos en una tabla)
f	Expliquen el significado de los coeficientes utilizados en el modelo matemático (o fórmula) y obtengan una expresión general que pueda predecir el aumento de temperatura de otros planetas.

Tabla 2. Nuevas preguntas para el enunciado de la tarea

6.2 Ajuste de la planificación original.

A continuación, se muestran las planificaciones de las dos clases modificadas según los resultados obtenidos. Tal como antes y en ambas se espera que el curso sea dividido en grupos, el tamaño de estos queda a libre disposición del profesor.

6.2.1 Clase 1

La planificación de la primera clase; empieza por el acercamiento a la tarea matemática y termina con la exposición de los modelos de los estudiantes.

Proceso de modelación	Qué hacen los estudiantes	Qué hace el docente
Simplificar	Se establecen en grupos; leen el problema y organizan los datos; reconocen y nombran las variables involucradas; realizan un listado de contenidos matemáticos asociados a la tarea; y discuten las estrategias a utilizar para desarrollar los items de la tarea	Lee el problema en voz alta y da las instrucciones de la clase. Comunica que no solo se espera que resuelvan los problemas, sino que realicen un modelo matemático. El profesor **monitorea** el trabajo con el fin de identificar los datos de la tarea, para ello, plantea dudas, elicita el pensamiento de los alumnos y cuida de no dar respuestas.
Matematizar	Los estudiantes grafican la información de la tabla; relacionan las variables con una función lineal o afín, o un crecimiento de tipo proporcional directo; describen el modelo inicial, matematizan y crean un modelo. Podrían llegar a expresiones como $f(x) = 20x$ o $f(x) = 0.42x$. Seguramente se deba a que no se están	El profesor **monitorea** el trabajo: responde dudas, invita a utilizar los conceptos de pendiente, constante de proporcionalidad y coeficiente de posición; mediante preguntas tales como: *¿cómo se relacionan el año y la temperatura entre ellas?, ¿se relacionan de manera proporcional, qué tipo de proporción?, ¿cómo*

	relacionando las variables entre sí, sino que cada una con la fila en la que se encuentra.	*pueden graficarse los datos, la línea pasa por el origen (del plano cartesiano)?*
Trabajar en matemáticas	Utilizan su modelo para responder a las preguntas indicadas, o bien no lo utilizan.	**Monitorea**: invita a los estudiantes a utilizar su modelo en la resolución de las primeras preguntas.
Interpretar	Los resultados matemáticos tienen una interpretación directa. Diseñan un cartel para exponer su modelo al resto del curso.	**Monitorea** el trabajo de los estudiantes, tomando nota de los modelos construidos; y **selecciona** los grupos que expondrán sus modelos, según la variabilidad y complejidad de los modelos.
Validar	Podría darse en cada grupo de forma espontánea antes del proceso de diseño de los carteles al utilizar los modelos para encontrar la solución matemática. Sin embargo, el foco está en la segunda clase.	Invita a mejorar y/o ajustar los modelos de los grupos avanzados, ya sea a pasar de un modelo de función afín a lineal, o bien ayudando a detectar modelos erróneos.

Tabla 3. Planificación clase 1

6.2.2 Clase 2

Proceso de modelación	Qué hacen los estudiantes	Qué hace el docente
Validación (exposiciones)	Algunos grupos **seleccionados** por el profesor comunican su modelo en una exposición. Muestran su modelo, explican los procedimientos y estrategias utilizadas. Analizan los modelos de sus compañeros, discuten su validez y los verifican.	Coloca frente al curso todos los carteles. El profesor **secuencia** la exposición de los modelos según complejidad, siendo el razonamiento proporcional el más bajo y las funciones el más alto.
Validación	Ponen a prueba dos o más modelos seleccionados por el profesor utilizando nuevos datos; calculando años más distantes. Argumentan si estos funcionan o no. Reflexionan sobre sus capacidades y limitaciones (por ejemplo, es poco práctico calcular la temperatura del año 1000 utilizando un gráfico). Generalizan los modelos identificando el significado de las variables.	**Selecciona** los modelos de funciones si estos aparecen. Si hay dos modelos de funciones equivalentes, pero con parámetros distintos, entonces guía una discusión en torno a por qué dan los mismos resultados. **Conecta** los argumentos de los estudiantes con matemáticas más profundas o con un lenguaje matemático más elaborado, por ejemplo, *“cuando dices que no consideras estos datos, quieres decir que el dominio y recorrido de la función es limitado o no son todos los reales”, “cuando mencionan que este número no tiene sentido en el problema, quieres decir que el coeficiente de*

		posición de esta función afín no tiene una interpretación en el resultado del problema", etc.

Tabla 4. Planificación clase 2

7. Conclusiones

Diseñar tareas de modelación no es sencillo. Incluso tareas que fueron diseñadas para favorecer el desarrollo de los procesos de modelación pueden verse impedidas, por varios factores. Algunos de estos factores que dificultan el modelar pueden ser relativos a la gestión del profesor, a características del sistema educativo o simplemente a dificultades particulares de los estudiantes.

Una de las principales dificultades corresponde a la escasez de tarea de modelación junto con la dificultad para diseñarlas. Si un docente requiere de enseñar a modelar necesita una variedad de tareas listas para ser implementadas, o bien de mucho tiempo libre para crearlas.

Otra de las principales dificultades que pueden surgir a la hora de modelar viene dada por el tiempo destinado a la tarea. Consideramos que, al requerir habilidades cognitivas superiores, la modelación necesita de tiempo, no sólo para que los estudiantes puedan diseñar un modelo, sino que para ponerlo a prueba y lograr su validación.

El desarrollo de una tarea de modelación es un proceso dinámico en el aula de matemáticas, no solo porque promueven el desarrollo de otras competencias matemáticas como la argumentación, sino porque es posible que los estudiantes resuelvan esta tarea con modelos matemáticos que no se han anticipado, sean estos correctos o no. Por ello, que este tipo de tareas invita a los profesores a ajustar la planificación de las clases donde se desarrollan y utilizar nuevas estrategias de gestión que promuevan los procesos de modelación.

Consideramos que esta tarea está limitada por la especificidad del contenido asociado y los posibles modelos resultantes, lo que no nos permite asegurar que se logre gestionar de forma parecida con un contenido, por ejemplo, de geometría. En este punto, creemos que las representaciones matemáticas inciden en la forma de abordar la gestión de la tarea.

A modo de proyección, consideramos que puede ser interesante diseñar una propuesta de evaluación para esta tarea, pues necesariamente surgen preguntas a la hora de considerar aquel aspecto. ¿Cómo evaluar la complejidad del modelo? ¿y su funcionalidad? ¿sería apropiado calificar inferiormente a un estudiante que consiga un modelo poco profundo pero funcional?

AGRADECIMIENTOS: Investigación financiada por proyecto ANID Fondecyt 1180880

Bibliografía

Anderson, L. & Krathwohl, D. (2009). *A taxonomy for learning, teaching and assessing.* New York: Longman.

Blomhøj, M. & Carreira, S. (2009). Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. Em G. Kaiser, *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 6-13). Dordrecht: Springer.

Boerst, T. A., Sleep, L., Ball, D. L. & Bass, H. (2011). Preparing Teachers to Lead Mathematics Discussions. *Teachers College Record, 113*(12), 2844–2877.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86-95.

Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process?. *Educational Studies in Mathematics*, 99(2), 137-159.

Colorado, H., Álvarez, D. & Ospina, L. (2011). *Aprendizaje significativo en el área de matemáticas: una experiencia pedagógica*. En García, G. (Ed.), Memorias del 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, (pp.611-621). Armenia: Gaia.

Frejd, P. (2013). Modes of modelling assessment - a literature review. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3), 413-438.

Frejd, P. & Ärlebäck, J. B. (2011). First results from a study investigating Swedish upper secondary students' mathematical modelling competencies. Em G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman, *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, 407–416.

Frejd, P. & Bergsten, C. (2018). Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modelling - Ideas for education. *ZDM, 50*(1-2), 117-127.

Gibbs, G. S. (2009). *Condiciones para una evaluación continuada favorecedora del aprendizaje*. Barcelona: Octaedro.

Henríquez, D., Pinto, M. & Solar Bezmalinovic, H. (2020). Identificación de la argumentación en el desarrollo de la modelación en la sala de matemáticas. *Revista de estudios y experiencias en educación*, 19(41), 391-407.

Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R. B. & Stillman, G. (2011). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14.* Dordrecht: Springer.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZMD, 32*(2), 113-142.

Maaß, K. & Engeln K. (2018*). Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching*. ZMD 50(1), 273-285.

Mineduc. (2015). *Bases Curriculares 7º básico a 2º medio.* Santiago de Chile: Mineduc. Curriculum nacional https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34949_Bases.pdf

Schukajlow, S., Kaiser, G. & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM, 50*(1-2), 5-18.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 prácticas para orquestar discusiones productivas en Matemáticas.* Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Saéz, Matías: Licenciado en Ciencias de la Educación y Profesor de Matemáticas graduado de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Correo: mbsaez@uc.cl.

Sánchez, Mario: Licenciado en Ciencias de la Educación y Profesor de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Profesor de Enseñanza Media en Matemáticas en el Colegio Inmaculada Concepción de Puerto Varas, Chile. Correo: masanchez4@uc.cl.

Solar, Horacio: Doctor en Didáctica de las Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona. Profesor Asistente de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Sus líneas de investigación incluyen las competencias matemáticas, entre ellas la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas y el desarrollo profesional docente de matemáticas. Correo: hsolar@uc.cl. Dirección: Vicuña Mackenna 4860, Macul. Santiago de Chile. Facultad de Educación, Campus San Joaquín. CP: 782-0436, Teléfono: +5622357503

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-21

www.fisem.org/web/union

Dieta saludable y proporcionalidad: una experiencia en educación matemática crítica

Christian Camilo Fuentes Leal

Fecha de recepción: 7/04/2020
Fecha de aceptación: 9/05/2021

Resumen	En el documento se sistematiza y reflexiona sobre una experiencia de aula cuyo objetivo fue enseñan diferentes significados, procedimientos y representaciones asociados a la proporcionalidad a partir de la comprensión y el análisis de una situación de alimentación, dieta y nutrición, la cual se considera significativa para un grupo de estudiantes de grado noveno de un colegio público del suroccidente de la ciudad de Bogotá. Para esta tarea se implementaron como herramientas metodológicas conceptos como escenarios de aprendizaje propuestos por Skovsmose y algunos planteamientos de modelación matemática. **Palabras clave:** Proporcionalidad, Escenarios de aprendizaje, Modelación, Alimentación saludable.
Abstract	The document systematizes and reflects on a classroom experience whose objective was to teach different meanings, procedures and representations associated with proportionality based on the understanding and analysis of a situation of food, diet and nutrition, which is considered significant for a group of ninth grade students from a southwestern public school in the city of Bogotá. For this task, take concepts such as learning scenarios proposed by Skovsmose, and some approaches about mathematical modeling. **Keywords**: Proportionality, Learning scenes, Modeling, Healthy eating.
Resumo	O documento sistematiza e reflete sobre uma experiência em sala de aula cujo objetivo era ensinar diferentes significados, procedimentos e representações associados à proporcionalidade, com base no entendimento e análise de uma situação de alimentação, dieta e nutrição, considerada significativa para um grupo de alunos da nona série de uma escola pública do sudoeste da cidade de Bogotá. Para esta tarefa, conceitos como os cenários de aprendizado de Skovsmose propostos por e algumas abordagens de modelagem matemática foram implementados como ferramentas medológicas. **Palavras-chave:** Proporcionalidade, Cenários de aprendizagem, Modelagem, Alimentação saudável.

1. Introducción

La enseñanza de la proporcionalidad nos genera diferentes retos para nosotros como profesores, pues desde los planteamientos de autores clásicos de psicología cognitiva la comprensión de la proporcionalidad es requisito para pasar de la etapa de operaciones concretas a la etapa de las operaciones formales, esta última caracterizada por la capacidad de valoración de la verdad o falsedad de proposiciones abstractas analizando fenómenos complejos en términos de causa efecto utilizando el método hipotético deductivo, e incluso consecuencias de situaciones hipotéticas para diseñar pruebas para ver si las consecuencias sostienen la verdad.

Por otro lado, es necesario tener en cuenta que uno de los objetivos de la educación matemática es la formación para la ciudadanía y la toma responsable de decisiones, las cuales están relacionadas con situaciones como el consumo responsable y una alimentación saludable, elementos que son abordados en esta experiencia por medio de significados, representaciones y procedimientos asociados a la proporcionalidad.

De este modo, por medio de este documento se quiere sistematizar una experiencia de aula como una estrategia de reflexión sobre práctica pedagógica en la enseñanza de las matemáticas con un grupo de 35 estudiantes en grado noveno (de 14 a 16 años) en un colegio público en la ciudad de Bogotá, Colombia. Este tipo de ejercicios de reflexión y sistematización de la práctica son una tarea necesaria para la comprensión, mejora y teorización de la práctica pedagógica, además de formar parte del compromiso ético y político que todo profesor debe apropiar procurando transformar la teoría en praxis, entendiendo esta última en términos de Freire, es decir como el proceso por el cual una teoría pasa a formar parte de la experiencia vívida.

2. Planteamiento de la investigación

La construcción del pensamiento proporcional se consolida como una de las tareas las significativas en el proceso de las operaciones formales, pues implica hacer uso de capacidades como la argumentación y la abstracción, además es de gran importancia pues la proporcionalidad como concepto está presente desde la Educación Primaria, en el uso de la estructura multiplicativa, las fracciones y los porcentajes, en la Educación Secundaria es necesaria en la comprensión de fenómenos como función lineal, congruencia y semejanza, y en la universidad en la construcción de relaciones de variación entre magnitudes para llegar a los conceptos de derivada o integral.

Para llevar a cabo satisfactoriamente este proceso es necesario hacer un acercamiento a los estudiantes a diferentes experiencias que aborden diferentes interpretaciones, representaciones y procedimientos asociados a la proporcionalidad por medio de la modelación de la realidad. Ante esta situación es necesario construir propuestas de enseñanza que busquen superar dificultades y errores asociados a aprendizaje de la proporcionalidad, además de asociar diferentes tipos de representaciones y relacionar contextos aritméticos, geométricos y algebraicos.

De esta forma, se considera que la modelación de una situación real (en este caso la construcción de propuestas de dietas saludables) por medio de ambientes de aprendizaje pueden constituir una propuesta adecuada que permita hacer, por un lado, formación para la ciudadanía y forma conciencia sobre sobre consumo responsable y, además enriquecer las experiencias que aporten a la comprensión de la proporcionalidad como concepto construido a largo plazo.

Para esto fue necesario plantear como pregunta orientadora ¿Qué potencialidades tiene el uso de la modelación y los ambientes de aprendizaje en la enseñanza de la proporcionalidad?, para poder responder esta incógnita se planteó como objetivo principal comprender cuales elementos disciplinares y didácticos están involucrados en el diseño, uso y evaluación de estrategias como la modelación de situaciones reales para la enseñanza de la proporcionalidad.

3. Referentes Teóricos

Para presentar los elementos teóricos tenidos en cuenta para el diseño de la presente experiencia se hará por medio de dos categorías, la primera asociada al conocimiento disciplinar sobre la proporcionalidad como objeto matemático, y la segunda relacionada con los conocimientos didácticos asociados a la proporcionalidad como objeto a ser enseñado.

3.1 Acercamiento a la proporcionalidad como objeto disciplinar

En primera medida, es importante tener en cuenta la existencia de diferentes definiciones sobre la proporcionalidad como relación de igualdad entre dos razones, por ejemplo, Fiol y Fortuny (1990), definen la proporcionalidad por medio de teorías sobre funciones, mencionando que dos magnitudes son proporcionales si se puede establecer un isomorfismo entre sus cantidades $f: M \rightarrow N$ tal que:

I. Si $a < b$ implica $f(a) < f(b)$, la relación de orden es monótona.

II. $f(a+b) = f(a) + f(b)$, es decir, se conserva el orden y la suma.

III. Si la magnitud es continua, la proporcionalidad f queda unívocamente determinada dando la cantidad homóloga $f(a)$ de una cantidad cualquiera y en particular las cantidades correspondientes $f(a)$ a una unidad.

En efecto si $a = r \cdot e$, entonces $f(r \cdot e) = rf(e)$, así las medidas de cantidades correspondientes, a, $f(a)$ con unidades correspondientes, $e, f(e)$ son iguales

$$a = re\,;\ f(a) = rf(e)$$

De igual forma, los autores definen la constante de proporcionalidad a partir de M y N como dos magnitudes proporcionales continuas, donde f sea la correspondencia entre sendas cantidades e y u dos unidades respectivas de M y N.

$$f: M \rightarrow N$$

$$e \rightarrow u$$

Escribiendo que sí $f(e) = k \cdot u$, se podrá decir entonces que k es la constante de proporcionalidad respecto de las unidades e y u. En este sentido, la constante de la proporcionalidad es una representación de la correspondencia y por eso se denota como $k = [f]\,\{e\}\,\{u\}$. Como las magnitudes M y N pueden ser descritas completamente por sus medidas m_e y m_u respectivamente, entonces la proporcionalidad f puede expresarse como una aplicación g de R^+ en R^+.

Esta definición construida a partir de isomorfismos aporta, por un lado, en la superación de la idea que la proporcionalidad se asocia únicamente entre segmentos y por la otro también aporta en la comprensión de la proporcionalidad desde una perspectiva analítica a partir del uso de funciones, elementos que serán necesarios para el profesor en una comprensión amplia y rica del objeto matemático.

Otra posible forma de definir el concepto de proporcionalidad desde una perspectiva disciplinar está en Carrillo, Contreras, Climent, Montes, Escudero y Flores (2016), quienes la presentan como una relación multiplicativa entre magnitudes, la cual permite determinar el valor cantidad de magnitud en función de otra cantidad de magnitud de la cual se conoce su medida, estableciendo relaciones de proporcionalidad entre cantidades de distintas magnitudes, como por ejemplo, cuando se relacionan la cantidad de litros de leche y gramos de harina en una receta, o de la misma magnitud, como cuando se relaciona el valor de unos artículos que están al 50% de descuento.

La anterior definición aporta una comprensión disciplinar del objeto matemático, pues, por medio de esta se establece la proporcionalidad como una relación numérica se puede presentar entre magnitudes que necesariamente no pueden homogéneas, enriqueciendo así desde otra perspectiva el conocimiento asociado a la proporcionalidad.

3.1.1 Relaciones Proporcionalidad directa – inversa y proporcionalidad aritmética geométrica

La proporcionalidad entre magnitudes se puede caracterizar desde dos categorías, la directa y la inversa, la primera se define como una relación entre magnitudes que permite obtener la medida de cantidad de la otra magnitud multiplicando una constante por la medida de cantidad de esta u otra magnitud; esta relación es expresada simbólicamente como y=kx, donde x e y son medidas de cantidades de magnitudes, y k es la constante o razón de proporcionalidad.

Un ejemplo de proporcionalidad directa, es cuando aumenta tanto la variable dependiente como la independiente, por ejemplo, cuando se menciona que en la preparación de una mezcla de concreto se necesita 2 kilos de arena por cada 14 bultos cemento, la expresión algebraica para esta situación sería y=7x , siendo y la cantidad de bultos de cemento y x la cantidad de kilos de arena, además 7 como la constante de proporcionalidad de la cantidad de bultos de cemento necesitados respecto a la cantidad de arena necesitada .

De forma similar, la proporcionalidad inversa se define como una relación entre magnitudes que permiten obtener la medida de una cantidad de magnitud multiplicando por una constante por la inversa de la medida de otra cantidad de magnitud; un ejemplo clásico de este tipo de proporcionalidad es la relación entre la cantidad de personas y el tiempo necesario para hacer una actividad, pues a mayor cantidad de personas se necesitará menos tiempo para hacer dicha tarea. Si 3 albañiles tardan 12 días para poner el piso de una casa, 6 albañiles tardarán 6 días, su expresión simbólica será *y = k 1/x,* donde *x* e y representan las medidas de las cantidades de magnitudes, y k representa la constante o la razón de proporcionalidad.

En el ejemplo de los albañiles, la expresión simbólica está dada por la cantidad de albañiles = 36 (1/cantidad de días) o en término de la cantidad de días sería = 36 (1/ cantidad de pintores), en el caso que el tiempo necesitado para acabar el piso de la casa sean sólo 2 días, la relación sería y=36 (1/2) = 18 albañiles.

Con respecto a los contextos en los cuales se da la proporcionalidad, esta se puede establecer en dos casos: el numérico y el geométrico; se puede mencionar que cuando se busca encontrar una relación de proporcionalidad directa o inversa entre dos cantidades de magnitud es necesario hacer uso de la proporcionalidad numérica; en cambio, se hará uso de la proporcionalidad geométrica cuando se indague por cuerpos, formas, objetos de los cuales se quieren replicar a diferente tamaño o cuando su medición no sea físicamente posible, por ejemplo, la construcción de maquetas, mapas o medir alturas de edificios de grandes alturas.

Con respecto a la proporcionalidad aritmética, es importante mencionar que esta busca calcular la medida de una cantidad de magnitud a partir de otra, o también encontrar una cuarta cantidad de magnitud dadas tres cantidades de magnitudes proporcionales. En Carrillo *et al.* (2016) se propone el siguiente ejemplo de proporcionalidad directa, en el cual se indaga por el valor de 5 cuadernos.

Cant. de cuadernos	2	5
Precio (euros)	3	?

Para los autores, la primera cuestión en este tipo de problemas es la identificación que la situación descrita se puede expresar por medio de una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de cuadernos y el precio, es decir se debe identificar que el costo por la cantidad de cuadernos sea constante igual al costo de un cuaderno, como en este caso la expresión si es proporcional se puede representar por medio de la siguiente representación.

Cant. de cuadernos	2	4	1	5
Precio (euros)	3	6	1,5	7,5

Por medio de este tipo de razonamientos se concluye que la razón está dada por la expresión 3 euros / 2 cuadernos = 1,5 euros por un cuaderno, es decir que para saber el costo de los 5 cuadernos se establece una relación multiplicativa entre 1,5 y 5 es decir 1,5 euros x 5 cuadernos= 7,5 euros, de esta forma se propone elementos para resolver problemas asociados a proporcionalidad directa como:

- Calcular la constante de proporcionalidad e igualarla a la relación entre el segundo par de cantidades.
- Calcular el precio de una unidad de la magnitud determinada (un cuaderno, en este caso), a esto se le conoce como reducción a la unidad.
- Aplicar propiedades de proporcionalidad directa, en este caso la aditividad de la proporcionalidad directa.

En el caso de la proporcionalidad inversa, desde la perspectiva aritmética, en el texto propuesto por los autores se preguntaba sí 3 albañiles tardan 12 días para poner el piso de una casa, 6 albañiles cuántos días se demorarían. Sabiendo que la constante de proporcionalidad en este caso es 12 x 3 = 36, por lo que 36 = 6 x, donde x representa la cantidad de días demorarían 6 albañiles para construir el piso de una casa; en este caso también es necesario hacer uso de la reducción a la unidad y para esto será de ayuda la construcción de representaciones tabulares

Albañiles	3	6	2	1
Días	12	6	3	6

Se considera que este tipo de análisis (reducción a la unidad) y representaciones le dará un mayor significado a procedimientos que se presentarán posteriormente como la regla de tres, la cual generalmente es presentada algorítmicamente.

Al explorar otras características y propiedades de la proporcionalidad geométrica, se puede mencionar que la proporcionalidad directa también permite el estudio entre las medidas de cantidades de magnitudes en contextos geométricos.

En el contexto de medida de cantidades de longitud en contextos reales, se puede caracterizar un ejemplo de proporcionalidad geométrica cuando se hace la comparación entre una fotografía ampliada y una fotografía real, pues describen la misma forma con diferente tamaño, característica que a su vez está relacionada con el concepto de semejanza entre polígonos, la cual está presente cuando se tienen ángulos correspondientes iguales y los lados correspondientes tienen la misma razón; en este caso llamará razón de semejanza.

Por ejemplo, cuando se amplía una imagen a razón de semejanza de *x*, la medida de las distancias de la imagen resultante será *x* veces mayor que la inicial, además de tener todos los ángulos correspondientes iguales entre sí, tal y como lo muestra la figura 1.

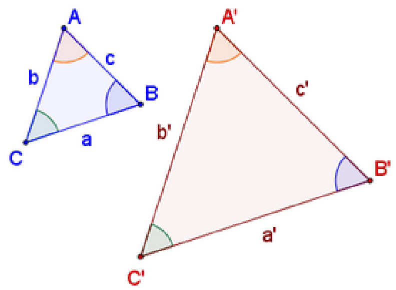


Figura 1. Triángulos semejantes

Otro tipo de representación asociada a la semejanza como proporcionalidad geométrica se muestra en la siguiente imagen, la cual se puede observar una pareja de triángulos semejantes donde la razón de semejanza es 4, en la figura 2 se puede determinar que:$\frac{f'}{c'} = \frac{d'}{a'} = \frac{e'}{b'} = 4$, donde $f' = 4 \cdot c'$; $d' = 4 \cdot a'$; $e' = 4 \cdot b'$

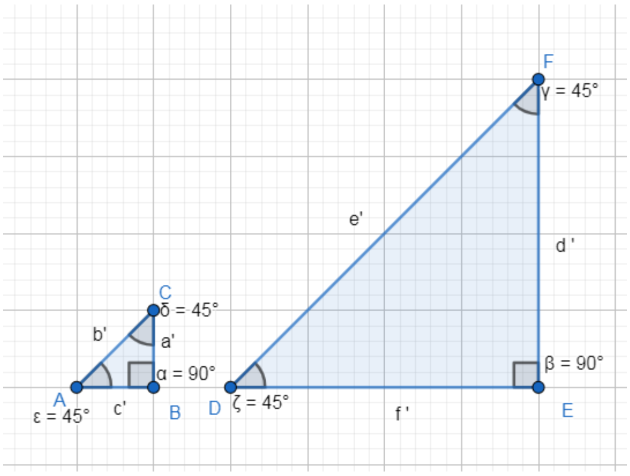


Figura 2. Triángulos cuya razón de semejanza es 4

Mostrando de esta forma, la semejanza como una propiedad asociada a la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica, donde no sólo se pueden comparar sus lado, sino también se pueden comparar sus superficies; esta característica aporta en la comprensión y sensibilización teórica con respecto a la proporcionalidad desde la perspectiva geométrica, en especial en la identificación del rol de las representaciones gráficas como herramientas para identificar y caracterizar las propiedades de la proporcionalidad geométrica como una relación, elemento que debe formar parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de la proporcionalidad.

Otro contexto en el que se presenta la semejanza como proporcionalidad geométrica en situaciones reales es la elaboración de maquetas, la elaboración de mapas o planos en los que se usen escalas. En estos casos, el uso de las medidas de las distancias reales resulta ser proporcionales a sus correspondientes en el plano o mapa; elementos como las escalas numéricas generalmente vienen presentadas como una fracción, donde el numerador muestra la unidad de medida en el mapa y el denominador la medida equivalente en la unidad en la realidad. Por ejemplo, si se ve un mapa con una escala de 1:500, a la medida de un segmento del plano representará 500 veces esa medida, es decir que cada metro en la realidad representa como si se hubiera reducido 500 veces parte de terreno real.

3.2 Conocimientos didácticos asociados a la proporcionalidad como objeto a ser enseñado

Múltiples investigaciones con respecto al conocimiento didáctico asociado a la proporcionalidad han demostrado la importancia del manejo de diferentes sistemas de representación como herramientas necesarias para la construcción de una comprensión amplia del conocimiento, un ejemplo de estos planteamientos está en Fiol y Fortuny (1990) quienes consideran que la comprensión de la proporcionalidad puede realizarse dando diferentes representaciones, mostrando la importancia de la conversión de una representación a otra. Algunos ejemplos esta traslación se muestra en la tabla 1, en esta se hace énfasis en descripciones verbales, tablas de valores, gráficas, formulas y ejemplos.

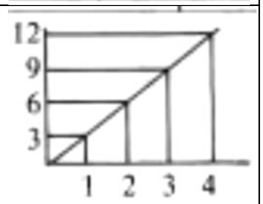
<table>
<tr><th>De \ A</th><th>Situaciones descripción verbal</th><th>Tablas de valores</th><th>Gráficas</th><th>Fórmulas</th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td>Situaciones descripción verbal</td><td>Analogía
Redacción</td><td>Mediaciones
Particularizar
Concretar</td><td>Esbozar
Visualizar</td><td>Algebraizar
Obtener un modelo</td><td>(el perímetro de un triángulo equilátero es el triple del lado)</td></tr>
<tr><td>Tablas de valores</td><td>Reflexiones
Describir</td><td>Interpretar
Extrapolar</td><td>Señalizar</td><td>Generalizar
Relacionar
Ajustar</td><td><table><tr><th>x lado</th><th>y perímetro</th></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>12</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gráficas</td><td>Interpretar</td><td>Seleccionar
Lectura de puntos</td><td>Cambios de sistema de referencia
Cambio de escala</td><td>Generalizar
Relacionar
Ajustar</td><td></td></tr>
<tr><td>Fórmulas</td><td>Explicar
Reconocimiento de parámetros</td><td>Calcular
Tabular</td><td>Esboza
Representa</td><td>Transformación algebraica
Operaciones</td><td>$y = 3x$
$\frac{y}{x} = 3$</td></tr>
</table>

Tabla 1. Representaciones sobre proporcionalidad propuestas por Fiol y Fortuny (1990)

Otros conocimientos que aportan en la comprensión de los conocimientos asociados a la enseñanza de la proporcionalidad están presentes en los planteamientos de Khoury (2002), quien presenta un cuadro los cuatro niveles de razonamiento proporcional el cual observará en la tabla 2. En esta propuesta se hace énfasis en el proceso que debería tener un estudiante en el proceso de comprensión de las características y las propiedades de la proporcionalidad, especialmente el paso de un nivel aditivo al uno multiplicativo (nivel razón).

<table>
<tr><td colspan="2">Problema: La altura de un señor bajito es 4 botones, mientras la altura de un señor alto es de 6to es botones. Si usamos clips, la medida de señor bajito es de 6 clips. ¿Cuál será la altura de señor alto en clips?</td></tr>
<tr><td>Nivel ilógico</td><td>El estudiante no proporciona explicación, exhibe un cálculo ilógico o una adivinanza, o realiza una estimación general sobre la base de una observación descriptica.</td></tr>
<tr><td>Nivel aditivo</td><td>El estudiante se enfoca en las diferencias entre 6 y 4 botones, y luego asume que la misma diferencia debe existir cuando se usan los clips</td></tr>
<tr><td>Nivel transicional</td><td>El estudiante usa un enfoque aditivo dirigido a la correspondencia entre las medidas de cada figura, por cada dos botones hay un clip adicional.</td></tr>
<tr><td>Nivel razón</td><td>El estudiante usa una relación de razón constante o hace una comparación multiplicativa de las medidas de ambas figuras.</td></tr>
</table>

Tabla 2. Niveles de razonamiento proporcional en Khoury (2002)

A modo de resumen se presentará un esquema en la tabla 3 donde se muestra diferentes obstáculos y errores asociados a la proporcionalidad en diferentes momentos de su enseñanza, elementos que aportaron en la construcción de la presente experiencia.

Categorías/ Autores	Dificultad o error asociado a la proporcionalidad
Asociadas a conceptos previos a la proporcionalidad Rapetti (2003), Rivas (2013), Fernández y Llinares (2012)	Errores en el significado de la fracción como relación parte-todo y como cociente. No comprender de la razón como un índice comparativo, que generalmente expresa una relación multiplicativa entre dos medidas. No establecer la relación entre el uso de una razón como una fracción y viceversa. No usar razón como un índice comparativo.
Asociadas a la iniciación a la proporcionalidad Fiol y Fortuny (1990), Godino y Batanero (2002), Rodríguez y Pérez (2003), Carrillo *et al.* (2016),	Uso de métodos mecánicos de manipulación de símbolos, como los esquemas del tipo de "regla de tres" sin introducir el dominio de otros intuitivos. La no utilización de la estrategia del valor unitario en la resolución de un problema. El no uso de situaciones reales que sean intuitivas para el estudiante, haciendo énfasis en las relaciones multiplicativas entre las cantidades de magnitud y diferenciarlas de las relaciones aditivas. Identificación equivocada de relaciones proporcionales de cantidades de magnitudes cuando no lo son.
Asociados al significado de conceptos relacionados a la proporcionalidad Guarín y Escolano (2009), Khoury (2002), Vega (2006), Godino y Batanero (2002), Rodríguez y Pérez (2003), Carrillo *et al.* (2016)	Realización de operaciones aditivas por medio de operaciones entre números como entes abstractos y no como expresión de las distintas cantidades de magnitud. Cálculo de la constante es un simple cálculo numérico sin interpretación alguna. Uso de tablas dadas únicamente en forma numérica es decir sin especificar de qué magnitudes se trata. Considerar las razones como entes numéricos abstractos. Presentar la razón como un número y no como medida, mostrando a la razón como un ente abstracto desconectado de las magnitudes ocupándose solamente de los aspectos numéricos. Uso exagerado de procedimientos de cálculo, junto con la habitual aritmetización de la medida, provocando la pérdida del significado de las magnitudes.
Asociados al pensamiento variacional Guarín y Escolano (2009), Rodríguez y Pérez (2003), Torres y Deulofeu (2018), Rivas (2013)	Definición errónea del valor de las incógnitas. Interpretación errónea de la solución y el erróneo establecimiento de las relaciones algebraicas. Resolución de situaciones en las que se presenta una variación simultánea de dos cantidades.

	Asociar el concepto de proporcionalidad únicamente al hecho de doblar o triplicar magnitudes, en este caso el estudiante no entiende la proporcionalidad como una relación de doble sentido.
Asociado al uso de estrategias de proporcionalidad erronas Fernández y Linares (2012), Torres y Deulofeu (2018), Rivas (2013), Carrillo *et al.* (2016)	No complementar el significado del concepto de razón proveniente de la estructura aditiva (significado de uno a varios), incorporando nuevos significados generados independientemente de las estructuras aditivas. No trabajar situaciones no proporcionales No usar diferentes tipos de razones (enteras y no enteras) No distinguir entre situaciones que son organizadas de manera apropiada por razones, de aquellas que no lo son. Dificultad de razonar proporcionalmente distinguiendo las diferencias entre situaciones donde existen proporciones y donde no existen.

Tabla 3. Categorización de diferentes tipos de errores en la enseñanza de la proporcionalidad

Finalmente, es necesario contemplar qué elementos priorizar y cómo enseñar este contenido disciplinar de una forma significativa para los estudiantes, para esto es necesario tener en cuenta los planteamientos emitidos por instituciones el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, en este caso se tuvo en cuenta planteamientos de los Derechos Básicos de Aprendizaje como los lineamientos institucionales, de acuerdo al MEN (2017) algunos de los indicadores conceptuales relacionados con la proporcionalidad y la propuesta de aula son:

- Expresa una misma medida en diferentes unidades, establece equivalencias entre ellas y toma decisiones de la unidad más conveniente según las necesidades de la situación.
- Emplea las relaciones de proporcionalidad directa e inversa para resolver diversas situaciones.
- Propone y explica procedimientos para lograr mayor precisión en la medición de cantidades de líquidos, masa, etc.
- Describe y utiliza diferentes algoritmos, convencionales y no convencionales, al realizar operaciones entre números racionales en sus diferentes representaciones (fracciones y decimales) y los emplea con sentido en la solución de problemas.
- Construye representaciones geométricas y pictóricas para ilustrar relaciones entre cantidades.
- Describe procedimientos para calcular el resultado de una operación (suma, resta, multiplicación y división) entre números enteros y racionales

3.2.1 Experiencias previas y antecedentes asociados al uso de modelación, proporcionalidad y dieta saludable.

Otra parte importante en la elaboración de propuestas es contemplar el trabajo pedagógico no parte del vacío, por lo contrario, es necesario analizar y apropiarse de diferentes experiencias o antecedentes que pueden enriquecer la presente propuesta. En este caso, en el contexto colombiano se puede mencionar el trabajo de Camelo, Mancera, Romero, García y Valero (2011) quienes indagaron sobre la necesidad de trabajar la modelación matemática desde una perspectiva socio crítica, encaminada a vincular a los estudiantes en la reflexión colectiva sobre situaciones sociales relevantes para ellos, además de buscar la constitución de subjetividades sociales.

En este trabajo los autores diseñan e implementan un ambiente de aprendizaje en torno a la nutrición. Este diseño curricular local fue parte de un proyecto más amplio destinado a desarrollar un plan de estudios para estudiantes de séptimo grado, inspirado en los principios de la educación matemática crítica. Desde esta perspectiva, el diseño propició el aprendizaje interdisciplinario en matemáticas, ciencias naturales y ciencias de la computación, además involucró de manera directa el contexto social, cultural y político de los estudiantes, como una forma de contribuir a la educación de ciudadanos democráticos y críticos.

Otra experiencia que aportó en la elaboración de esta propuesta fue presentada en Camelo, Mancera, Amaya y García (2014) quienes reflexionan sobre los desafíos y las posibilidades que han encontrado en el montaje de dos ambientes de aprendizaje desde la perspectiva sociocrítica, discutiendo las diferentes interpretaciones de los ambientes como reflejos de las subjetividades de los estudiantes; todos estos elementos aportaron en la comprensión de las potencialidades del uso de la modelación y los ambientes de aprendizaje en el proceso de construcción de matemáticas para la ciudadanía crítica.

4. Referentes metodológicos

Para el diseño y ejecución de esta propuesta se usaron varias herramientas metodológicas, inicialmente dos conceptos propuestos por Skovsmose (2005) el primero, foreground, definido como aquel que contempla las condiciones económicas de los estudiantes, procesos de inclusión y exclusiones socioeconómicas, oportunidades, valores culturales y tradiciones y el segundo llamando background, el cual se caracteriza como el conjunto de experiencias previas que involucran el contexto cultural, social y político de una persona.

En este caso tanto el foreground como el background están relacionados a las problemáticas de poblaciones con nivel socioeconómico precario debido a que los colegios públicos de Colombia reciben en su gran mayoría a población de sectores populares en situación de vulnerabilidad.

Por otra parte, fue necesario de la implementación de conceptos como modelación matemática, la cual ha tenido diferentes acepciones y líneas de trabajo a través del tiempo, en esta ocasión se optará por la modelación matemática desde una perspectiva socio crítica en términos de Blomhøj (2009), pues desde estos planteamientos la modelación posee un potencial para empoderar a los estudiantes como ciudadanos autónomos e independientes de la sociedad, promueve el desarrollo de una competencia crítica de los modelos matemáticos, así como en las formas en las que se utilizan en la toma de decisiones, además de capacitar a los estudiantes a usar modelos matemáticos para una reflexión crítica sobre la realidad social.

En Salazar, Mancera, Camelo y Perilla (2017) se proponen los siguientes momentos en la ejecución de este tipo de estrategias:

A) Escogencia del problema o tema a trabajar otorgando gran importancia al macro y micro contexto: Para esto los autores consideran tres casos i) Considerando ampliamente el contexto social, cultural, histórico y político de los estudiantes, el profesor plantea un problema o una temática específica a trabajar que enfatiza en la responsabilidad de los estudiantes como ciudadanos ii) el profesor plantea un marco general para la actividad, basado en los resultados de actividades previas de indagación acerca de las intenciones de los estudiantes, de situaciones que impactan sus porvenires o de situaciones que implican prácticas de cuidado de sí iii) los estudiantes plantean que investigar de acuerdo a sus amplios intereses

B) Desarrollo de una investigación exploratoria: Para esto los autores consideran que se debe ampliar los conocimientos sobre la o las temáticas definidas en la etapa anterior, realizando una búsqueda de informaciones para profundizar conocimientos al respecto. Esta búsqueda de información para la reinterpretación de la situación y la delimitación de la situación problema, incluye no sólo conocimientos teóricos, sino que involucra el acopio de información a través de entrevistas, evidencias empíricas, saberes culturales, experiencias de los estudiantes o de la comunidad en torno a las temáticas o problemáticas a estudiar. Luego de tal ampliación, se debe puntualizar una situación problema para indagar, lo que conducirá a un objetivo, comprender más profundamente y con la ayuda de soportes matemáticos.

C) Levantamiento de los datos y delineamiento de trayectorias de acción: En esta etapa la información se sistematiza, se depura y se traza una trayectoria para la acción con el fin de alcanzar el objetivo o responder a la pregunta que se estableció. Además, se plantean preguntas como: ¿qué datos adicionales se deben recolectar?, ¿con qué instrumentos recolectar tales datos? y ¿cómo se analizarán tales datos? A partir de lo anterior, cada grupo de estudiantes traza un plan de acción con responsables y cronogramas.

D) Reinterpretación de la situación soportada en consideraciones matemáticas y desarrollo del problema: Par los autores en este momento cada grupo debe proponer una reinterpretación de la situación a estudiar o plantear desarrollos de esta, apoyado en consideraciones matemáticas, con el propósito de alcanzar el objetivo o responder a la pregunta formulada inicialmente.

E) Análisis crítico de los desarrollos planteados: Aquí se presenta un análisis retrospectivo, dando lugar a reflexiones sobre posibles implicaciones sociales del uso de los modelos matemáticos que se generen. En esta etapa del ambiente los estudiantes reformulan el modelo propuesto, dando entrada a otras consideraciones que inicialmente no se advirtieron adecuadamente.

En este tipo de propuestas también es necesario presentar el concepto de ambiente de aprendizaje como concepto metodológico que aporta en la construcción de este tipo de propuestas de enseñanza, para en Skovsmose (1999) es necesario el concepto de ambientes de aprendizaje surge como una estrategia de relación entre el conocimiento matemático y el contexto social y económico de los estudiantes.

De acuerdo a los planteamientos del autor, los ambientes de aprendizaje están dados en dos contextos, el paradigma del ejercicio el cual privilegia los algoritmos, y los escenarios de investigación los cuales implican un contexto más amplio; cada uno de estos contextos se puede trabajar a partir de diferentes tipos de referencia, desde las matemáticas puras cuando el estudiante construye una demostración o una hipótesis matemática, desde la semirealidad cuando se habla de una realidad hipotética y desde la vida real cuando relaciona su contexto social con las matemáticas.

Con respecto a los tres tipos de referencia, las matemáticas puras se usan para describir el estudio de las matemáticas sin referencia a las aplicaciones prácticas que pudieran derivarse, caracterizándose por trabajar de una forma abstracta, utilizando axiomas, formulas, algoritmos con criterios matemáticos rigurosos; en segundo lugar, la semirealidad pretende ser entendida como una realidad “hipotética” construida por el profesor y con respecto a la referencia de la vida real, mostradora a partir de las situaciones que son propias de la realidad y del contexto cercano a los estudiantes, en la tabla 4 se muestra a forma de esquema la propuesta Skovsmose (1999).

Tipos de referencia	Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Matemáticas puras	1	2
Semirealidad	3	4
Vida real	5	6

Tabla 4. Formas de organización de la actividad de los estudiantes de acuerdo con Skovsmose (1999).

En la presente experiencia se usaron ambientes tipo 5 y 6 en las cuales se tiene un mayor grado de realidad, y por lo tanto se considera que aporta más en la construcción de la importancia de hábitos de alimentación saludable.

4. Descripción de la experiencia

La presente experiencia fue llevada a cabo teniendo en cuenta varias acotaciones, entre estas como se pudo observar en el apartado de marco teórico la vastedad y complejidad de la proporcionalidad como concepto disciplinar, además de corto tiempo con el cual se cuenta en las instituciones escolares públicas de Colombia, pues se tiene únicamente 4 horas de clase semanalmente, elementos que junto con variables como la sobrepoblación escolar (35 a 45 estudiantes por grupo), y problemáticas sociales y económicas hacen que las dinámicas sean mas lentas de los presupuestadas y se abarquen menos temas de los inicialmente planteados.

En esta experiencia se tuvo un acercamiento a las nociones de proporcionalidad directa en contextos numéricos con estudiantes de grado noveno cuyas edades oscilan entre 14 y 16 años, para dar cuenta de la experiencia se tendrán en cuenta los momentos planteados en Salazar *ed al* (2017).

Esta experiencia surge a raíz de del inicio del funcionamiento del comedor escolar, el cual brinda la oportunidad de alimentar a los casi 2200 estudiantes de las dos jornadas en la institución educativa, pertenecientes en su mayoría a población vulnerable de la ciudad de Bogotá; ante estas nuevas dinámicas surgió la necesidad de generar conciencia sobre el uso responsable de este espacio y la creación de hábitos sanos de alimentación, en este caso este será el problema o el tema a trabajar, constituyéndose como el primer momento de la experiencia.

El segundo momento está relacionado con la investigación exploratoria, esta giró en torno a la comprensión de procesos de nutrición, la importancia de una alimentación sana, por medio de la búsqueda de información y reflexión sobre preguntas orientadoras como, ¿Qué tipo de alimentos son más o menos saludables?, ¿Cuáles variables hacen que sea más o menos saludable?, ¿Cuántas calorías debe consumir un humano diariamente?, ¿Cómo se debe distribuir una dieta saludable para tener una dieta saludable?, ¿Qué problemas médicos genera no tener una dieta saludable?

Con base a la consulta y reflexión de estas preguntas los estudiantes comprendieron, por ejemplo, la importancia de consumir 2000 Kcal diarias y la comprensión de las enfermedades como la obesidad, la hipertensión, diabetes y diferentes tipos de cáncer gástricos generadas como producto de no tener hábitos de alimentación saludables, gracias a este segundo momento los estudiantes identificaron en términos generales las variables y las situaciones que iban a ser trabajadas por medio de la modelación, priorizando el uso de datos reales.

En el tercer momento relacionado con el levantamiento de los datos y la trayectoria de acción, inicialmente a los estudiantes se les pidió cortar y pegar 15 tablas de información nutricional de diferentes alimentos procesados que usualmente consumen como lo muestra la imagen 1; la interpretación y en análisis de este tipo de tablas fue una primera actividad relacionada con la proporcionalidad desde un perspectiva numérica, para esto los estudiantes junto con el acompañamiento del profesor debieron responder preguntas orientadoras como ¿sí 2000 Kcal representan el 100% de las calorías que se deben consumir, entonces qué porcentaje representa el consumo de determinado producto según la tabla nutricional? O ¿Cuántas unidades de cada uno de los productos se pueden comer de tal forma que se tengan las 2000 Kcal?

Imagen 1. Tabla nutricional de un alimento procesado donde se muestra que contiene 140 Kcalorias.

En este momento se hizo necesario mostrar a los estudiantes la importancia de la proporcionalidad como concepto matemático necesario para poder resolver los anteriores cuestionamientos, para esto se dejó como tarea, consultar sobre la proporcionalidad directa desde un contexto numérico, con base a esta consulta los estudiantes elaboraron un mapa conceptual con los elementos más importantes, como lo muestra la imagen 2.

Imagen 2. Mapa conceptual elaborado por los estudiantes.

Una vez los estudiantes elaboraron y socializaron los mapas conceptuales construidos, caracterizaron la proporcionalidad como igualdad de razones construidas a partir de dos cantidades de magnitud, elemento que se asoció inmediatamente con las situaciones trabajadas, denotando como magnitudes las

Kcal y el porcentaje.

Como forma de comprobar lo anteriormente comentado se solicitó a los estudiantes encontrar la cantidad de Kcal diarias que tiene el consumo de un pan blanco de 50 gramos, sabiendo que este contiene 200 Kcal. Dado que comprendieron la proporcionalidad como igualdad entre razones, pudieron construirlas ubicando en la parte superior la primera magnitud (Kcal) y en la parte inferior la segunda (porcentaje). Una vez determinaron esta igualdad procedieron a usar el principio de medios y extremos para encontrar la incógnita (porcentaje desconocido), como lo muestra la imagen 3, en la cual el estudiante concluye que un pan blanco de 50 gramos equivale al 10% de las calorías de un día, constituyéndose esta situación como un escenario tipo 5 de los propuestos por Skovsmose (1999).

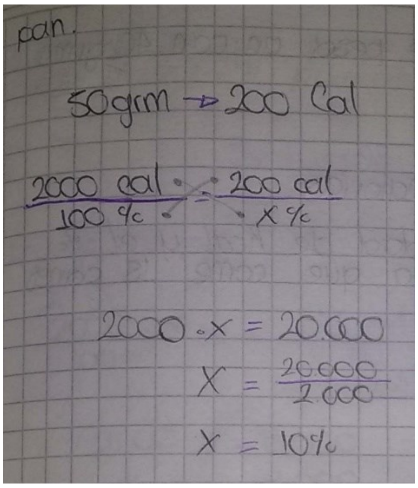


Imagen 2. Porcentaje de calorías diarias de un pan blanco.

Una vez los estudiantes comprendieron la importancia del uso de la proporcionalidad para establecer el porcentaje de calorías de diferentes alimentos procesados, ahora se procedió a hacer el mismo experimento con alimentos no procesados. Para esto inicialmente los estudiantes debieron consultar debieron consultar e indagar sobre el porcentaje de calorías diarias que tiene cierta cantidad de estos alimentos como lo muestra la imagen 2.

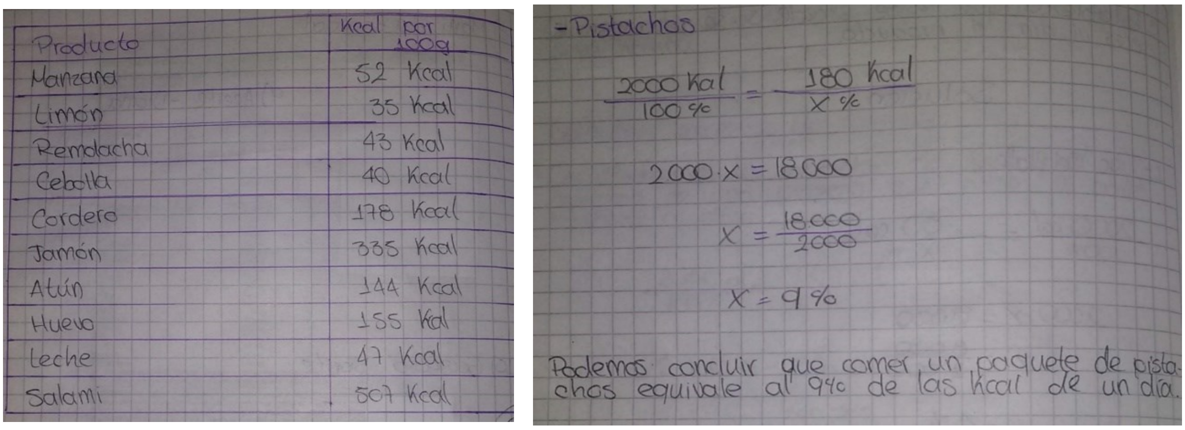


Imagen 2. Kcalorías de productos sin procesar y porcentaje de calorías de los pistachos.

En cuarto momento está asociado con la reinterpretación de la situación inicialmente planteada usando sus conocimientos sobre proporcionalidad directa desde una perspectiva numérica y complejizando las situaciones inicialmente planteada, en este caso preguntando sí un almuerzo saludable de1000 Kcalorías, además debe tener una proteína, vegetales, un almidón y una bebida ¿Cuáles propuestas de almuerzos se pueden hacer?, constituyendo este tipo de situación como un ambiente tipo 6 de acuerdo a los planteamientos de Skovsmose (1999), dado que no busca ejercitar un procedimiento sino más bien explorar las técnicas de resolución de problemas de los estudiantes

Para esto se consultaron la cantidad de calorías de 100 gramos de alimentos procesados y no procesados necesarios para elaborar diferentes menús, a continuación, en la imagen 3 se muestra una propuesta inicial de almuerzo construido por un estudiante, donde concluye que contiene 518 Kcalorías, es decir el 25,9% de las calorías necesarias para un día, concluyendo que esta propuesta es insuficiente, pues según lo planteado inicialmente un almuerzo debe tener 1000 Kcalorías.

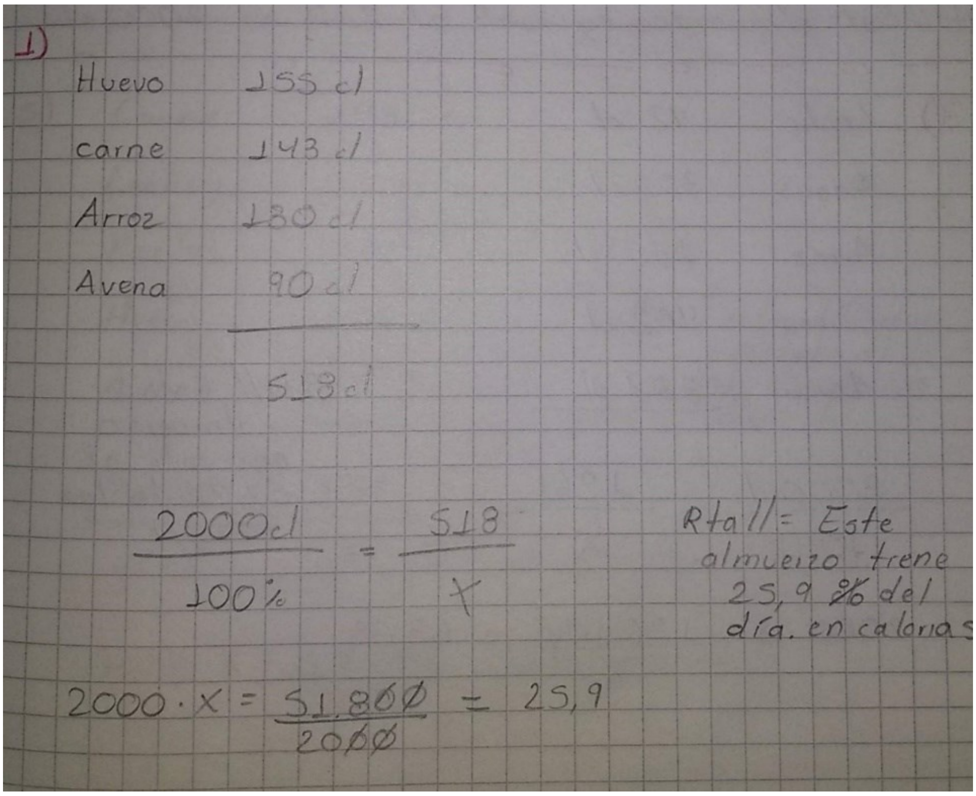


Imagen 3. Propuesta inicial de un almuerzo saludable.

Poco a poco los estudiantes fueron modificando variables para poder construir menús que cumplieran los las indicaciones nutricionales solicitadas (tener 1000 Kcalorías, contener al menos una proteína, vegetales, un almidón y una bebida), en el siguiente ejemplo, el menú inicial del estudiante contenía solo 724 Kcalorías, es decir necesita aún 276 Kcalorías para cumplir las 1000 Kcalorías solicitadas, para esto propuso agregar al menú un postre (arroz con leche), sabiendo que 100 gramos de este contiene 123 Kcalorías.

De esta forma la pregunta que se buscaba solucionar fue, ¿Cuántos gramos de arroz con leche se debe poner para obtener las 276 Kcalorías que hacen falta para cumplir las 1000 Kcalorías del almuerzo? Para esto también fue necesario hacer uso del pensamiento proporcional a partir de un contexto numérico, como lo muestra la imagen 4.

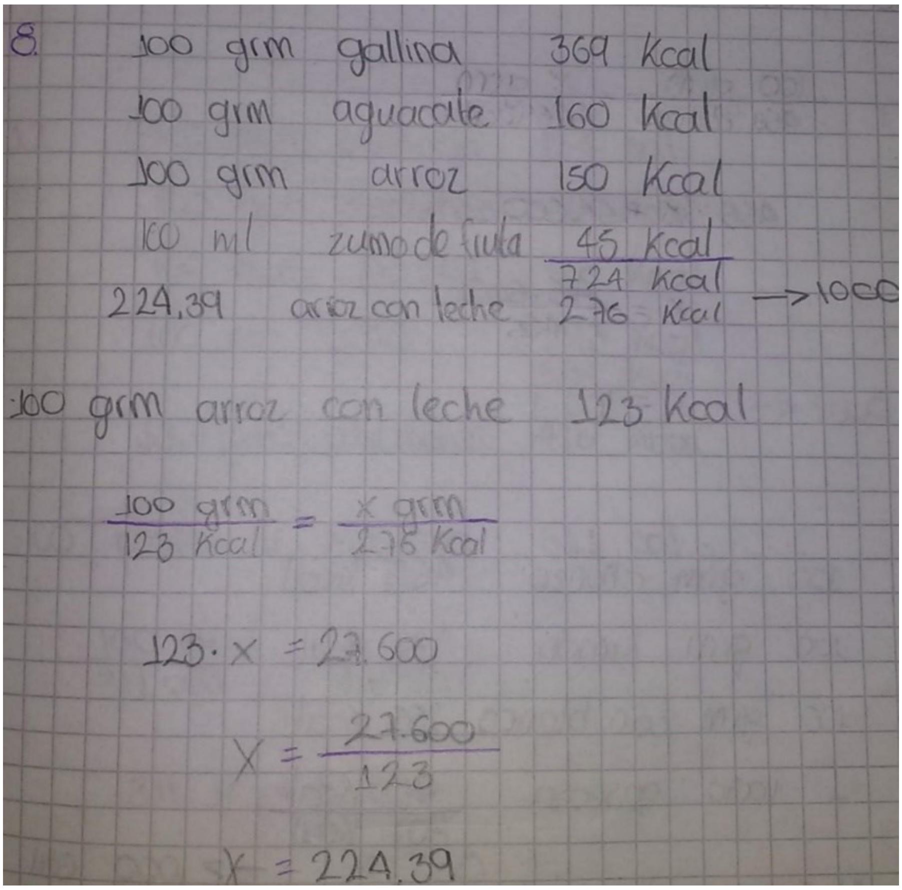


Imagen 4. Menú saludable con 1000 Kcalorías.

Con base a los procedimientos del estudiante, se pudo concluir que sería necesario 224,3 gramos de arroz con leche para obtener 276 Kcalorías y finalmente tener un menú saludable con 1000 Kcalorías, compuesto por proteína, vegetales, un almidón, una bebida y un postre.

Finalmente, con respecto al momento de análisis crítico de los desarrollos planteados, se indagó sobre las implicaciones del uso del pensamiento proporcional para la construcción de menús saludables y hábitos de alimentación sanos. Para eso los estudiantes resolvieron y socializaron preguntas orientadoras como ¿Por medio de esta experiencia qué aprendí que inicialmente desconocía?, ¿Cómo aporta el conocimiento sobre proporcionalidad en la creación de conciencia sobre hábitos saludables de alimentación?, ¿Qué hábitos no se consideran saludes y por qué?, ¿Cómo socializaría sus aprendizajes asociados con dieta saludable con sus allegados y la comunidad educativa?

Por medio de las reflexiones de los estudiantes se pudieron establecer relaciones entre el conocimiento matemático (asociado a la proporcionalidad), la comprensión de la realidad y la toma de decisiones, como, por ejemplo, la construcción de argumentos de naturaleza matemática para mostrar la importancia de una dieta saludable, el consumo de determinada cantidad de calorías o las enfermedades generadas por no tener hábitos saludables.

5. Consideraciones finales

A modo de cierre, en este apartado que quiere comentar algunas reflexiones, dificultades, retos y proyecciones que se pudieron percibir por medio de la ejecución de la presente experiencia; en primera medida es importante mencionar que este tipo de propuestas son un reto tanto para los profesores como para los estudiantes, pues pretenden cambiar las relaciones tradicionales entre estos, por un lado se busca un estudiante comprometido con un aprendizaje para su vida, más allá del condicionamiento por una nota, un agente reflexivo de su realidad y sus problemas, activo y propositivo ante las propuestas del profesor.

Con respecto a los retos para los profesores, es importante ser consciente que este tipo de estrategias buscan que se pueda manejar y aprender a través de la contingencia, alejándose de las zonas de confort, además de dar prioridad a comprensión de conceptos y su realidad con la realidad más allá de la ejecución repetitiva y memorística de procedimientos descontextualizados. Además, es importante mencionar el cambio de las relaciones ente estos (estudiante, profesor), pues se busca que dejen se ser unilaterales a ser mas bien de tipo dialógico y reflexivo, mostrando al profesor como un mediador y al estudiante como un agente activo y propositivo.

Con respecto a las dificultades vivenciadas en el trascurso de la propuesta, la principal estuvo asociada a la evaluación, pues, los estudiantes están acostumbrados a otro tipos de instrumentos más taxativos como talleres, exámenes escritos o pruebas estandarizadas, y les cuesta concebir a esta como un proceso sumativo y multidimensional compuesta de diferentes criterios.

Un elemento que se considera fue una limitante más que una dificultad fue que por cuestiones de tiempo las situaciones fueron modeladas de forma individual, se considera que la implementación de este tipo de propuestas en grupos de trabajo puede potenciar aspectos como el trabajo colaborativo, la comunicación asertiva y la argumentación en matemáticas.

Finalmente, con respecto a las proyecciones de esta experiencia es necesario constatar dos elementos, el primero, la necesidad de implementar proyectos de aula transversales que puedan aportar a la comprensión de este tipo de fenómenos desde por ejemplo, la biología y las ciencias sociales; el segundo está relacionado con la necesidad de seguir enriqueciendo la comprensión de la proporcionalidad por medio de otro tipo de situaciones, de tal forma que estas abarquen, por ejemplo, la proporcionalidad entre segmentos, la proporcionalidad inversa y la semejanza, mostrando así la proporcionalidad como un concepto amplio y complejo.

Referencias

Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching of learning mathematical modelling. M. Blomhoj y S. Carreira (Eds.) Mathematical aplication and modelling in the teaching and learning of mathematics. Proceedings from Topics Study Group 21. Monterrey. México.

Camelo, F., Mancera, G., Romero, J., Garcia, G. y Valero, P. (2011). The importance of the relation between the social-political context, interdisciplinarity and the learning of the mathamatics. Proceedings of the Sixth International. Mathematics Education and Society Conference Vol. 1, p. 299- 310. Disponible en http://www.ewi-psy.fuberlin.de/en/v/mes6/documents/proceedings/Band 1Finale.pdf.

Camelo, F., Mancera, G., Amaya C.,y García, G. (2014). Aspectos políticos y críticos en las prácticas de modelación matemática escolar. *I Encuentro distrital de educación matemática.* Disponible en https://www.researchgate.net/publication/319449119_Aspectos_politicos_y_criticos_en_las_practicas_de_modelacion_matematica_escolar

Carrillo, J; Contreras, L; Climent, Montes, N; Escudero, D; y Flores E. (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid: Paraninfo.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30* (1), 129-142.

Fiol, L. Fortuny, M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid.: Síntesis.

Godino, J.; Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad para maestros*. Proyecto Edumat Maestros. España.

Guairín, J. Escolano, R. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Revista Suma 62*, 5-48. Disponible en https://revistasuma.es/IMG/pdf/62/SUMA_62.pdf

Khoury, H. (2002). Classroom challenge. exploring proportional reasoning: Mr. Tall/Mr. short. In: B. Litwiller; G. Bright (Eds.). *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics, p. 100 - 102.

Rapetti, V. (2003). Proporcionalidad. Razones internas y razones externas. *Revista suma,* (44). 65-77. Disponible en https://revistasuma.es/IMG/pdf/44/065-070.pdf

Rivas, M. (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Disponible en https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Mauro_Rivas_tesis.pdf

Rodríguez, A., y Pérez, J. (2003). *La noción de proporcionalidad*. México: Ethos Educativos.

Skovsmose, O. (1999). Hacia una filosofía de la educación matemática crítica. Bogotá: una empresa docente.

Salazar, C., Mancera, G., Camelo, F., y Perilla (2017). Una propuesta para el desarrollo de prácticas pedagógicas de modelación matemática en la perspectiva socio crítica. *IV Encuentro distrital de educación matemática.* Disponible en https://www.researchgate.net/publication/326569765_UNA_PROPUESTA_PARA

_EL_DESARROLLO_DE_PRACTICAS_PEDAGOGICAS_DE_MODELACION_MATEMATICA_EN_LA_PERSPECTIVA_SOCIO_CRITICA

Skovsmose, O. (2005). Foregrouds and politics of learning obstacles. *For the learning of Mathematics*, (25), 4-10. Disponible en https://www.jstor.org/stable/40248476

Torres, E; y Deulofeu, J. (2018). *La enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad en el paso de la educación primaria a la secundaria: el caso de Ainoa. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (99). 105-126. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/12902/

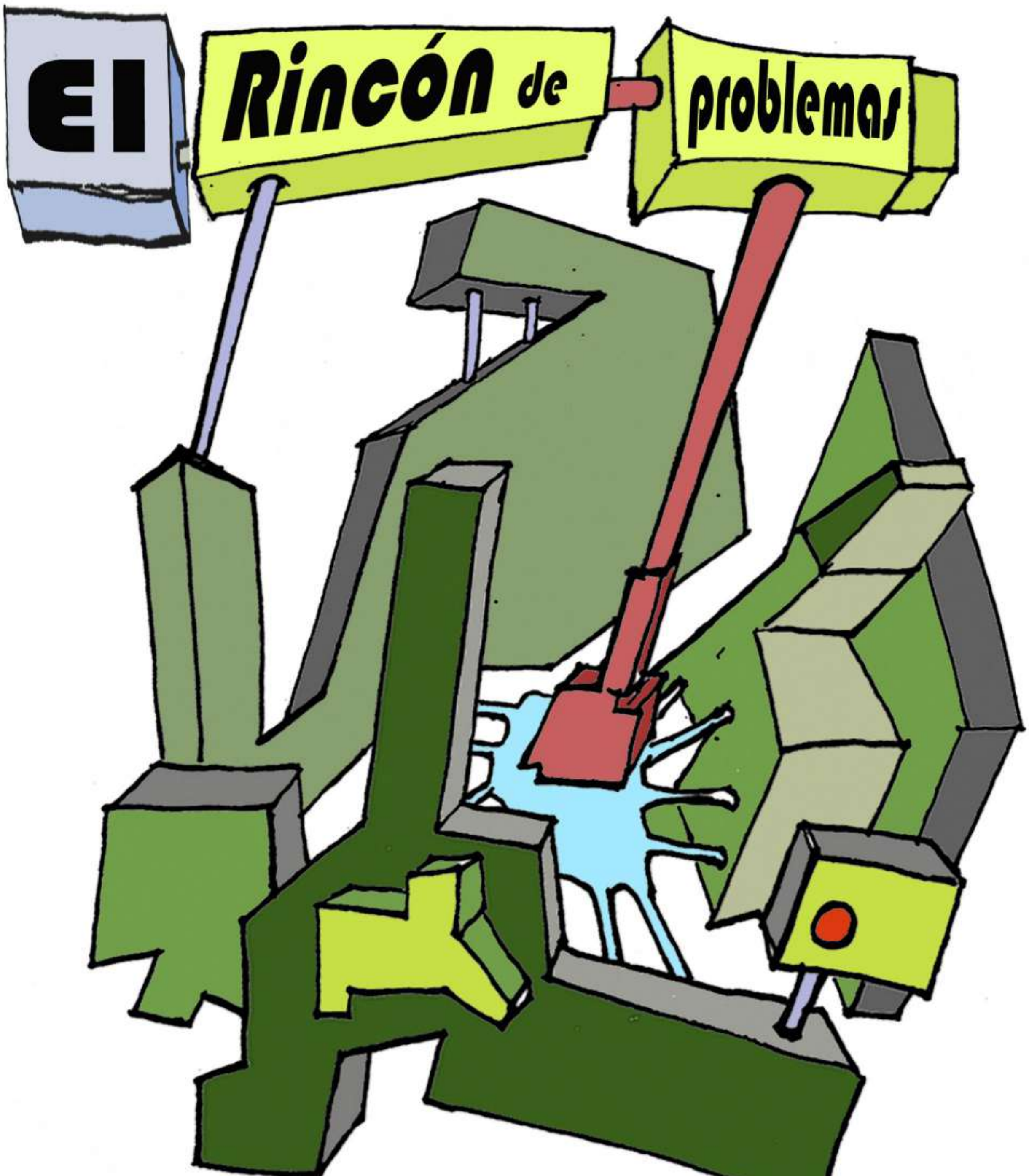
Autores:

Christian Camilo Fuentes Leal: *Profesor de la Secretaría de Educación de Bogotá, Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y Magíster en Educación- Énfasis Educación Matemática por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Doctor y Máster en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas por la Universidad Internacional de Andalucía - Universidad de Huelva. Email:* *cfuentesl@educaciónbogota.edu.co*

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-8

Creación de problemas sobre triángulos, jugando con varillas

Uldarico Malaspina

Resumen	En este artículo se presenta y comenta actividades, preguntas y problemas creados acerca de triángulos, en una experiencia didáctica con 18 niñas y 12 niños de quinto grado de primaria, a partir de un material presentado a ellos, elaborado para tal ocasión. Fue una experiencia de indagación y aprendizaje en un ambiente lúdico, que despertó emociones positivas en los estudiantes y los estimuló al descubrimiento de propiedades de los triángulos y la creación de problemas relacionados con ellas. El problema con el que iniciamos este artículo, se originó en una interesante conversación entre los estudiantes de uno de los grupos de trabajo. **Palabras clave**: Creación y resolución de problemas; indagación; aprender jugando; matemática en primaria; dominio afectivo.
Abstract	In this article we present and comment on activities, questions and problems created about triangles, in a didactic experience with 18 girls and 12 boys from the fifth grade of primary school, based on a material presented to them, prepared for that occasion. It was an experience of inquiry and learning in a playful environment, which aroused positive emotions in the students and stimulated them to discover the properties of triangles and to pose problems related to them. The initial problem in this article originated in an interesting conversation between the students of one of the working groups. **Keywords:** Problem posing and problem solving; inquiry; learning by playing; mathematics in elementary school; affective domain.
Resumo	Neste artigo apresentamos e comentamos atividades, questões e problemas criados sobre os triângulos, em uma experiência didática com 18 meninas e 12 meninos da quinta série do ensino fundamental, a partir de um material apresentado a elas, elaborado para a ocasião. Foi uma experiência de indagação e aprendizagem em um ambiente lúdico, que despertou emoções positivas nos alunos e os estimulou a descobrir as propriedades dos triângulos e criar problemas a eles relacionados. O problema com o qual iniciamos este artigo teve origem em uma interessante conversa entre os alunos de um dos grupos de trabalho. **Palavras-chave**: Criação e resolução de problemas; indagação; aprender jogando; matemática no ensino fundamental; domínio afetivo.

1. Problema

Julia recibe 5 conjuntos de varillas de madera, de tamaños y colores diferentes. Cada conjunto tiene 3 varillas de la misma longitud y del mismo color, como se muestra en la Figura 1 y se especifica en la Tabla 1. ¿Es posible mostrar dos triángulos rectángulos, de tamaños diferentes, uniendo algunas de las varillas por sus extremos? Justificar.

Figura 1. Material entregado en el aula, a cada grupo.

Color	Longitud de cada varilla
Azul	10 pulgadas
Verde	8 pulgadas
Amarillo	6 pulgadas
Rojo	4 pulgadas
Blanco	2 pulgadas

Tabla 1. Especificaciones sobre el material entregado.

Cabe aclarar que este problema no es el punto de partida en la experiencia didáctica que explicaremos a continuación. El problema emerge en el marco de las fases 4 y 5.

2. La experiencia didáctica

Fue una experiencia didáctica en cinco fases, desarrollada en octubre del 2019, con el apoyo de la profesora Maritza León Jordán, en la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen, de Lima Metropolitana, con 18 niñas y 12 niños del quinto grado de primaria, ubicados en un aula, en cinco grupos de 4 integrantes y dos grupos de 5, en sus respectivas mesas. El propósito fundamental fue estimular a los estudiantes a aprender matemáticas en un ambiente lúdico, indagando, creando actividades, formulando preguntas y creando problemas, usando un material didáctico especialmente diseñado y considerando como entorno matemático los triángulos.

Fase ***1.*** A los siete grupos, se les repartió material similar al descrito en el enunciado del problema (Figura 1 y Tabla 1). Cada grupo recibió sus 15 varillas y se les pidió que, por unos minutos, exploren el material y jueguen libremente con él.

Fase 2. Se les pidió que, en unas hojas de papel que se les repartió, que tenían tres recuadros para escribir, en cada grupo escriban, en el primer recuadro, algunas actividades que se les haya ocurrido o se les ocurra hacer, relacionadas con triángulos, uniendo algunas de las varillas por sus extremos. En las Figuras 2 y 3 mostramos lo que escribieron en el Grupo 7, conformado por 3 niñas y 2 niños.

- Un triangulo con tres lados de color verde del mismo tamaño todos sus lados.

Figura 2

- Un triangulo con 2 colores rojos y 1 amarillo.

Figura 3

Observamos que, como parte de su juego libre, hicieron una actividad que mostramos en la Figura 4. Al comentarles que era muy lindo lo que habían hecho y preguntarles por qué no la escribieron como una de sus actividades, manifestaron que era difícil de explicar. Ante la pregunta ¿Cómo se les ocurrió armar esas figuras? Respondieron que partieron del triángulo más grande que se podía formar con tres palitos.

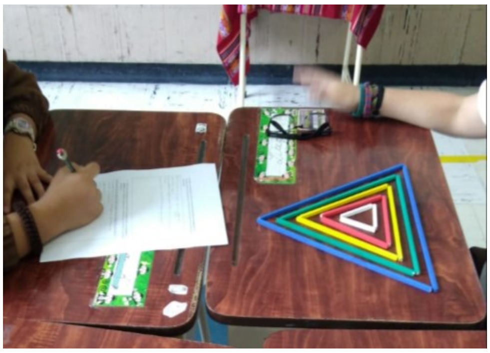


Figura 4. Una de las actividades con el material, en el juego libre de los participantes del Grupo 7

Fase 3. Se les pidió que ahora escriban, en el segundo recuadro de la hoja de papel, una o más preguntas teniendo en cuenta las actividades que habían escrito o habían hecho con las varillas, relacionadas con triángulos. Algunas de tales preguntas, formuladas en el Grupo 7, son las que mostramos en las Figuras 5 y 6.

¿Se puede crear un triangulo dentro de otro triangulo?

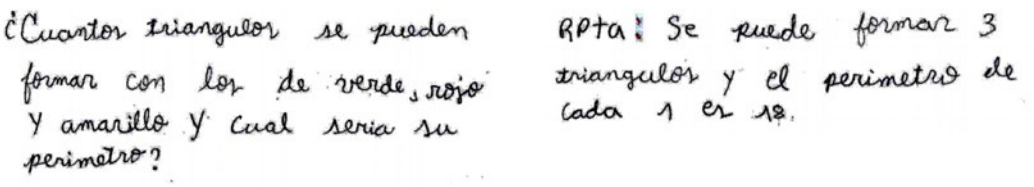
Figura 5

¿Los triangulos pueden estar encima de otros triangulos?

Figura 6

En el Grupo 5, integrado por 4 niñas, jugando libremente, descubrieron por indagación espontánea, que con tres varillas de longitudes diferentes, no siempre se puede construir un triángulo cuyos lados tengan las longitudes de las varillas. Para esta fase, una de las niñas preguntaba si se podía formar el triángulo o no al mostrar tres varillas escogidas al azar, pero de diferentes tamaños, y otra niña "adivinaba" si se podía formar o no el triángulo.

Fase 4. Se les pidió que esta vez escriban en el tercer recuadro de la hoja de papel, un problema que se les ocurra, relacionado con triángulos, teniendo en cuenta las actividades y preguntas que habían formulado antes. Además, deberían escribir una solución del problema que inventen. En la Figura 7 mostramos el problema y la solución que escribieron en el Grupo 7


¿Cuantos triangulos se pueden formar con los de verde, rojo y amarillo y cual seria su perimetro?

RPta: Se puede formar 3 triangulos y el perimetro de cada 1 es 18.

Figura 7

En su mesa de trabajo observamos que habían construido los triángulos del problema, como se ve en la Figura 8:

Figura 8

Las niñas del Grupo 5 no escribieron la interesante actividad de “adivinación” que estuvieron haciendo, pero como problema escribieron:

¿Siempre se podrá formar triángulos con diferentes tamaños de palitos[1]?

No escribieron una solución a tal problema. Cuando les hice notar que ellas ya tenían la respuesta, su reacción fue “Sí sabemos la respuesta, pero no sabemos cómo escribir una solución del problema”.

Otro problema, que lo propusieron con gran entusiasmo los del Grupo 4 (2 niñas y 2 niños) fue el siguiente:

¿Se puede formar un triángulo de perímetro 30 usando los 5 colores?

Tampoco escribieron su solución, pero al preguntarles, mostraron un caso concreto, usando las varillas: un triángulo cuyos lados eran: uno de ellos, las varillas blanca y roja (longitud: 6 pulgadas); otro lado, las varillas amarilla y verde (longitud:14 pulgadas); y el tercer lado, la varilla roja (longitud: 10 pulgadas).

En el Grupo 6 (3 niñas y 2 niños) propusieron:

Encontrar el perímetro del triángulo rectángulo que se puede formar con tres *palitos.*

Estuvieron muy entretenidos en discusiones sobre diversos tipos de triángulos y no escribieron su solución, aunque la mostraron en su mesa, con las varillas de longitudes 6, 8 y 10 pulgadas.

Fase 5. Se permitió el intercambio intergrupal, libre, de las experiencias tenidas en las fases anteriores. Destaco una conversación que resumo a continuación:

[1] Se está usando la palabra palitos, al referirse a las varillas.

Niño 1*: No se puede formar un triángulo rectángulo.*
Niño 2*: Sí se puede. (Y formó el triángulo de lados 6, 8 y 10)*
Niño1*: ¿Y cómo sabes que es rectángulo?*
Niño 3*: ¿No lo ves?*
Niño 4*: Mide el ángulo…*
Niño 5*: Va a traer al Niño 6 del Grupo 6*
Niño 5*: Él sabe (refiriéndose al niño 6) por qué este triángulo es rectángulo.*
Niño 6 (Luego de mirar) *Ese triángulo es rectángulo porque se cumple Pitágoras. Miren: (y lo aplicó correctamente: 6 al cuadrado es 36; 8 al cuadrado es 64 y su suma es 100, que es el cuadrado de 10).*
Los otros niños*: Silencio y miradas escépticas.*

Me llamó mucho la atención, tanto esta conversación como la seguridad del Niño 6. Luego de la sesión en el aula, en el intermedio para su siguiente clase, conversé brevemente con él y me mostró su gran actitud positiva hacia las matemáticas, fuertemente estimulada en su casa, principalmente por su padre, ingeniero de profesión. Tenía una inquietud muy grande para aprender mucho más de matemáticas. En la conversación le pregunté en relación al problema que propusieron en su grupo (*Encontrar el perímetro del triángulo rectángulo que se puede formar con tres palitos.)*

- ¿Por qué especificaron que el triángulo rectángulo que se forme tenía que ser con tres palitos?

Niño 6: Porque también se puede formar otro triángulo rectángulo con más palitos

- ¿Cómo?

Niño 6: Poniendo dos palitos del mismo tamaño en cada lado.

El tiempo del intermedio ya se había acabado y el niño fue corriendo a su siguiente clase. Evidentemente, el niño se refería al triángulo rectángulo de lados con longitudes 6 + 6, 8 + 8 y 10 +10 pulgadas, respectivamente, que seguramente lo habían construido ya en su grupo, con el material recibido y que es semejante al triángulo rectángulo de lados con longitudes 6, 8 y 10 pulgadas. Como puede advertir el lector, es a partir de esta conversación y de las indagaciones del Grupo 6, que surgió el problema con el que iniciamos este artículo y ya tiene su solución.

3. Observaciones

a) La Fase 1 despertó entusiasmo y relajó a los estudiantes, ante la presencia mía, como persona extraña de su entorno cotidiano. Las diversas representaciones libres que hicieron, les hizo llegar, en todos los grupos, a por lo menos una figura triangular, o a figuras con la presencia de una figura triangular.

b) Las actividades que escribieron en la Fase 2, no fueron todas las que realmente hicieron, en el marco de la Fase 1. Como ya lo comenté, la Figura 4 (un conjunto de triángulos equiláteros encajados) muestra una actividad interesante del Grupo 7, en la que podemos percibir la semejanza de triángulos, pero que no fue escrita "porque es difícil explicarla", como ellos manifestaron. Esto revela lo importante que es estimular a describir, y en general, a verbalizar experiencias. Desarrollar esta capacidad contribuirá fuertemente a desarrollar también la capacidad de crear problemas, pues una de las dificultades más presentes es la claridad en el texto del problema que se inventa.

Es interesante notar que la pregunta del Grupo 7, presentada en la Figura 5 (¿Se puede crear un triángulo dentro de otro triángulo?), tiene mucha relación con la actividad mostrada en la Figura 4 que acabo de comentar. Ciertamente, la pregunta es más amplia, pues el triángulo que esté en el interior de otro triángulo, no necesariamente debe ser semejante a tal triángulo; así, a partir de tal pregunta se puede crear otros problemas, como

Con el material descrito, ¿se puede construir dos triángulos, no semejantes entre sí, en el interior del triángulo equilátero de color rojo?

Con el material descrito, ¿se puede construir dos triángulos semejantes entre sí, no equiláteros, de modo que uno esté en el interior del otro?

c) La actividad de indagación, descubrimiento y "adivinación" del Grupo 5, que mencioné en la Fase 3, (no escrita, pero realizada muy dinámicamente) está directamente relacionada con el problema que propusieron (¿Siempre se puede formar triángulos con diferentes tamaños de palitos?). Las niñas no escribieron su solución, aunque, en verdad, la tenían, pues encontraron que no se puede formar un triángulo con las varillas de longitudes 2, 4 y 8 pulgadas, uniéndolas por sus extremos.

d) La pregunta formulada por el Grupo 7, mostrada en la Figura 6 (¿Los triángulos pueden estar encima de otros triángulos?) tiene relación con una actividad de construcción de triángulos "iguales", colocados uno encima de otro, que está claramente vinculada con la congruencia de triángulos.

4. Comentarios

La experiencia didáctica muestra el gran valor que tiene, didáctica, matemática y emocionalmente, estimular la indagación en los niños y crear condiciones que favorezcan crear actividades, formular preguntas e inventar problemas. Es esencial propiciar el aprendizaje de las matemáticas teniendo muy en cuenta el aspecto emocional de los estudiantes, que está intensamente presente cuando los niños juegan; más aún cuando crean sus propios juegos (Malaspina, 2021b; Malaspina y Malaspina, 2020) y cuando desarrollan su creatividad (Domínguez et al., 2020). En ese sentido, las actividades lúdicas, empezando por una manipulación libre del material que se les entregó (Fase 1), resultó fuente de descubrimientos y de avances en su aprendizaje y contribuyó a que al final de la experiencia se adviertan actitudes positivas hacia el aprendizaje de la matemática. Lo lúdico estuvo totalmente a cargo de los estudiantes, pues no se les presentó ningún juego estructurado, sino se les pidió una manipulación libre del material didáctico preparado y se estimuló su creatividad.

La mayor riqueza de la experiencia quizás no está precisamente en la parte "formal" que tenían que cumplir los niños al describir por escrito las actividades que hicieron o al escribir preguntas y problemas, sino en lo que ellos fueron descubriendo "informalmente" mientras jugaban libremente en cada grupo, interactuando, desarrollando su creatividad y avanzando en su pensamiento matemático. En varios casos, estos descubrimientos y avances no fueron llevados al papel, como lo hago notar en las observaciones b) y c). Ciertamente, el rol del profesor de aula resulta esencial, tanto para estimular la creatividad de los estudiantes como para captar y retomar esos avances "informales", cuando les muestre un conjunto integrado de conocimientos, entre los que estén aquellos que los estudiantes han ido descubriendo o discutiendo.

Otro aspecto de la riqueza de esta experiencia, evidentemente relacionada con lo dicho en el párrafo anterior, es que las actividades, preguntas y problemas creados por los niños – "formal" o "informalmente" – son fuente de nuevas preguntas, actividades y problemas que el profesor puede crear y usar en su clase. Algunos de estos se muestran al final de la observación b). Inclusive el problema inicial de este artículo es una manera de darle forma a lo que trabajó el Grupo 6 y a mi conversación con el Niño 6. Notar que en la experiencia didáctica descrita, estuvieron presentes "informalmente", los conceptos de semejanza y congruencia de triángulos, la existencia de triángulos, así como los teoremas de la desigualdad triangular y el de Pitágoras.

También es muy importante notar que los estudiantes propusieron problemas no típicos, como *¿Siempre se puede formar triángulos con tres palitos de tamaños diferentes?* Y que no escribieron la solución, a pesar de tenerla, por no reconocer en ella una "solución típica", como las que usualmente se trabaja en las aulas. Esto revela la importancia de trabajar con los niños problemas con cuantificadores y de usar los contraejemplos para justificar la falsedad de algunas afirmaciones o la respuesta negativa a algunas preguntas que involucren el "siempre" o el "para todo". En este marco, es muy importante que el Grupo 5 haya planteado la pregunta como un problema; más aún, la actividad – incluidas las "adivinanzas" – el problema y el caso que mostraron, constituyen una aproximación intuitiva al teorema de la desigualdad triangular, como consecuencia de indagaciones en un contexto lúdico creado por las propias niñas.

Finalmente, cabe destacar que para que los docentes desarrollen experiencias similares a la descrita y exploten muchas de sus potencialidades didácticas y matemáticas, es esencial que ellos mismos vivan experiencias similares en cursos de formación inicial y continua de profesores. Una de estas experiencias está ampliamente expuesta en Malaspina (2021a).

Bibliografía

Domínguez, H. Crespo, S. del Valle, T. Adams, M. Coupe, M. Gonzalez, G. & Ormazabal, Y (2020). Learning to Transform, Transforming to Learn: Children's Creative Thinking with Fractions. *Journal of Humanistic Mathematics, 10*, (2): 76-101. DOI: 10.5642/jhummath.202002.06 https://scholarship.claremont.edu/jhm/vol10/iss2/6

Malaspina, U. (2021a) Triángulos en un rectángulo. Situación, actividades, preguntas y problemas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 61*, 1 - 9

Malaspina, U. (2021b). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 10*(1), 1-17.

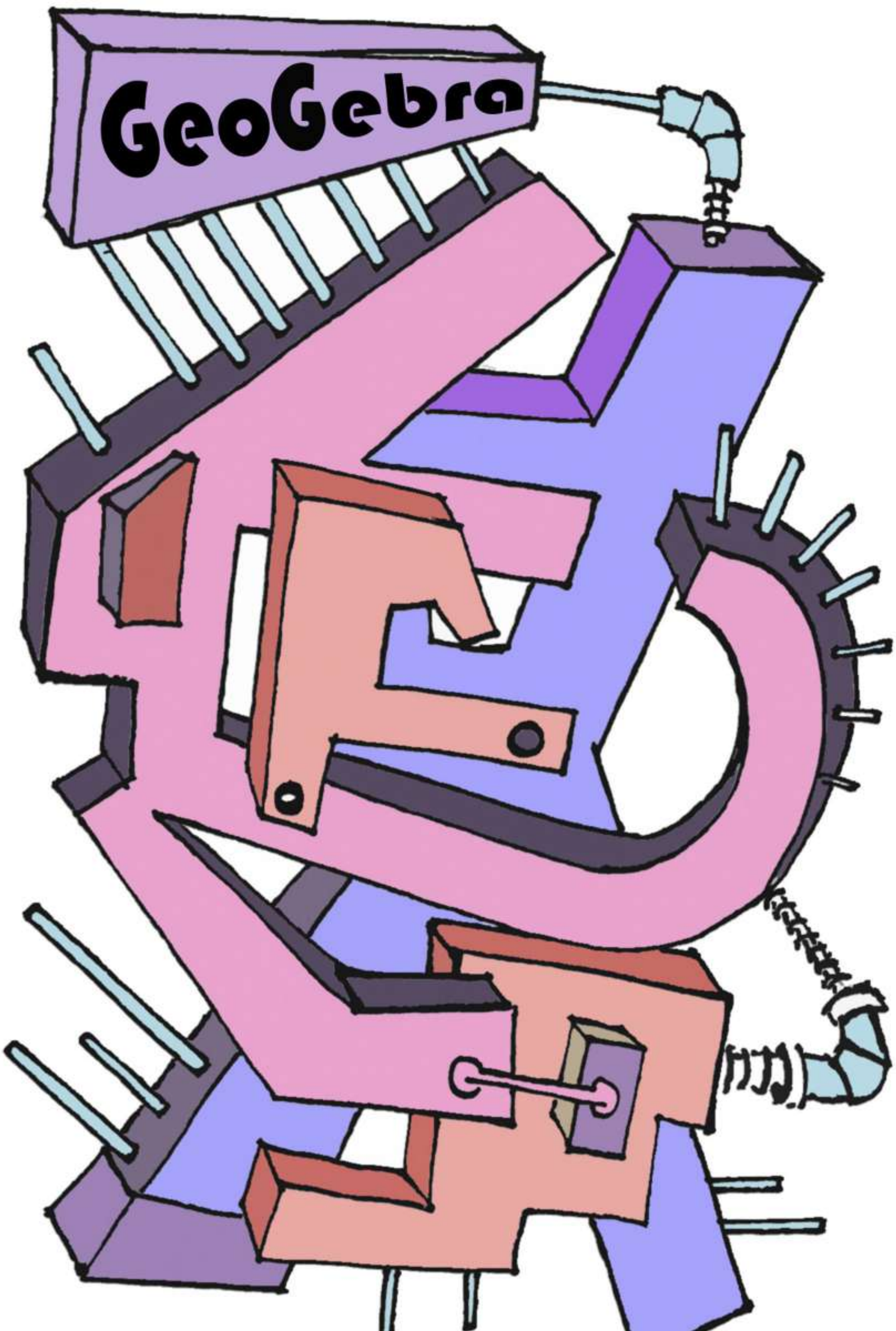
Malaspina, M., & Malaspina, U. (2020). Game Invention as Means to Stimulate Probabilistic Thinking. *Statistics Education Research Journal, 19*(1), 57-72. https://doi.org/10.52041/serj.v19i1.119

Autor: Malaspina Jurado, Uldarico
Doctor en Ciencias, Profesor Emérito de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Expositor en foros internacionales de Educación Matemática. Autor y coautor de libros y artículos de Matemática y Educación Matemática. Académico de Número de la Academia Nacional de Ciencias del Perú. Palmas Magisteriales - Grado Amauta

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-6

GeoGebra en Unión

Alejandro Gallardo Lozano

1. Introducción

Esta es la sección dedicada en la revista UNIÓN a las noticias y novedades relacionadas con el software GeoGebra en la comunidad Iberoamericana.

En cada número tenemos un artículo realizado por una firma invitada que pueda realizar un aporte especial en alguno de estos tres aspectos:

- Investigaciones realizadas sobre el impacto educativo del uso de GeoGebra en las aulas. Es necesario avanzar en esta línea para favorecer su inclusión en las aulas como un elemento de mejora en la Educación Matemática.

- Experiencias de aula con GeoGebra: modelos de uso con éxito en las aulas de diferentes niveles educativos. Necesitamos responder a la preguntas ¿cómo introducir GeoGebra en mi aula y para qué? ¿Cómo hacer que mis alumnos hagan Matemáticas con GeoGebra?

- Trabajos realizados con GeoGebra que nos sirvan a todos para aprender su manejo.

En este número nuestra firma invitada es doble: la profesora Débora Pererio Carbajo y el profesor Javier Cayetano Rodríguez.

Débora es uno de los máximos referentes en GeoGebra en este momento. En sucesivos eventos y ponencias nos ha ido compartiendo, con gran generosidad, valiosas experiencias de aula en las que los productos realizados destacan por una gran creatividad y una estética muy cuidada. Cuando Débora cuenta alguna de sus creaciones hace que parezcan muy fáciles porque lo hace con un estilo didáctico muy cuidado, pero, realmente, sus construcciones reflejan un manejo virtuoso de las herramientas y comandos de GeoGebra.

Javier es el auténtico maestro de las actividades autoevaluables. Tiene de casi todo lo que se te pueda ocurrir, listas para usar con tu alumnado. Estas construcciones son (si las destripas lo compruebas) muy difíciles de realizar, aunque él lo ha ido explicando con mucho altruismo y gracia en muchos eventos. Ha hecho una gran apuesta por los Recursos Educativos Abiertos en los que integra

GeoGebra con Exelearning. Cuando haces alguna construcción, él hace tiempo que ya la hizo (y mejor que tú ;-)).

En esta ocasión en su artículo nos van a traer el mundo de las flores a la modelación con GeoGebra y su desarrollo en el aula utilizando funciones elementales. Espero que lo disfrutéis tanto como nosotras y nosotros.

2. Novedades y Noticias

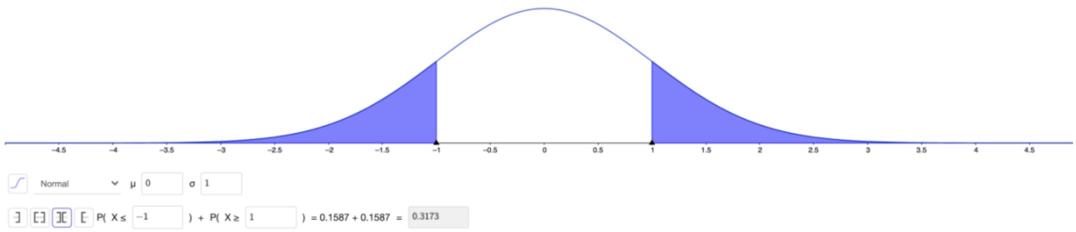
- La aplicación **Suite Calculadora** que va ganando terreno por su excelente manejo en web, smartphone y tablets, ha incorporado la novedad de poder poner la Vista Algebraica ocupando toda la pantalla que necesites para poder trabajar con más espacio escribiendo comandos (mientras estás por ejemplo en el dentista).

- GeoGebra ha puesto a nuestra disposición el **Illustrative Math Curriculum** en formato digital, para escuela Secundaria y "High School". Se trata de una serie de recursos digitales de alta calidad (en Inglés) con actividades de aula con las que podemos trabajar directamente con nuestro alumnado a través de GeoGebra Aula (Classroom). Merece la pena que las consultes porque hay un gran trabajo detrás de ellas. Toda la información en https://www.geogebra.org/im.

- El modo **Examen** en las aplicaciones de GeoGebra nos permite que nuestro alumnado pueda utilizar GeoGebra en sus dispositivos desactivando cualquier otra función para garantizar que, durante un lapso de tiempo, solo se utilice la aplicación de GeoGebra. Una nueva característica que han liberado es que, desde este modo Examen, el alumno o alumna pueda guardar y organizar su trabajo, separando, por ejemplo, las diferentes tareas que se les han encargado. Podéis consultar esta novedad en este vídeo.

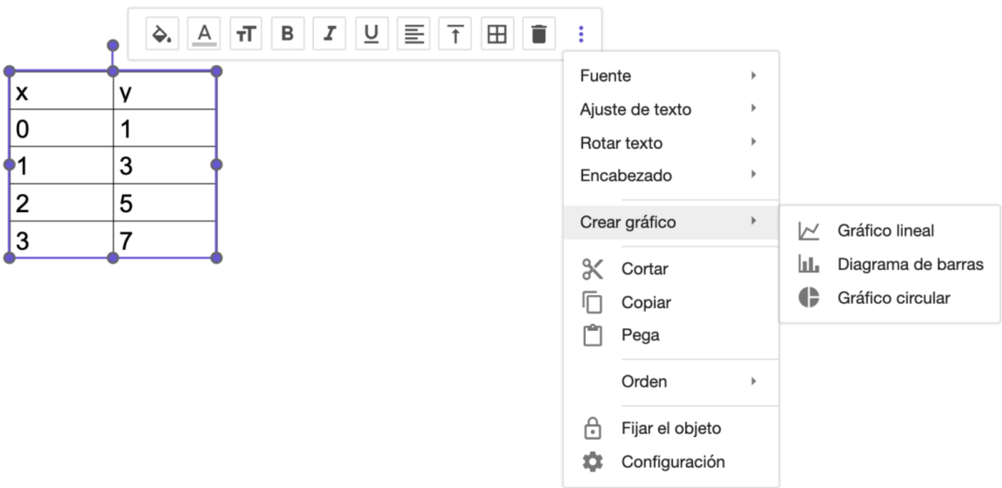
- La aplicación **Calculator Suite** está ahora disponible en descarga para trabajar directamente en escritorio, para Windows y Mac. Esta nueva versión de escritorio convivirá con GeoGebra Clásico 5 (el que usan los/las cracks) y 6. Recordamos que, por ahora, la Calculator Suite no tiene la funcionalidad de poder trabajar con diferentes vistas (Vistas Gráficas, 3D, Hoja de Cálculo), lo que, a mi juicio, es una de las mayores potencialidades del software. Por eso seguimos usando la versión 5 y 6.

- La **Calculadora de Probabilidad** (¿por qué seguimos usando las tablas?) de GeoGebra, incluida en GeoGebra Classic (6 en la web) ha incorporado una novedad: poder calcular la probabilidad de dos colas de una distribución (es decir, mayor que un cierto valor y menor que otro).



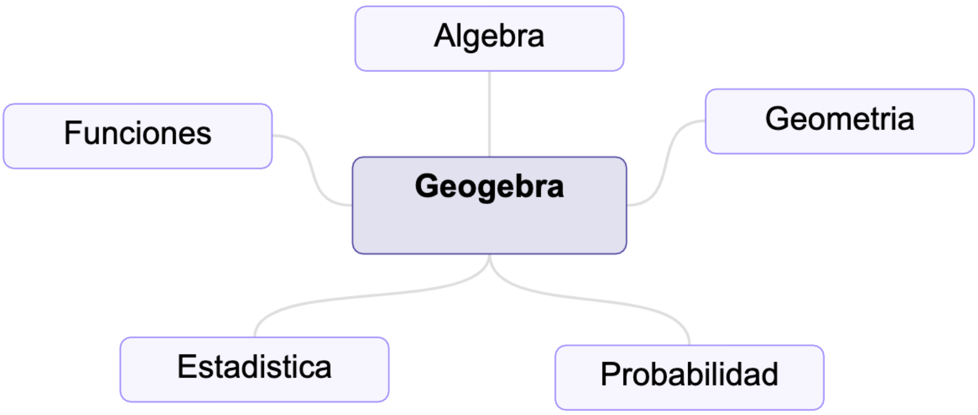
- **GeoGebra Notas** va camino de ser una herramienta imprescindible, sobre todo en las situaciones de enseñanza online y semipresencial. Sigue añadiendo funcionalidades:

  - Incorpora la posibilidad transformar una tabla directamente en un **gráfico**, pudiendo elegir entre: lineal, de barras y de sectores.

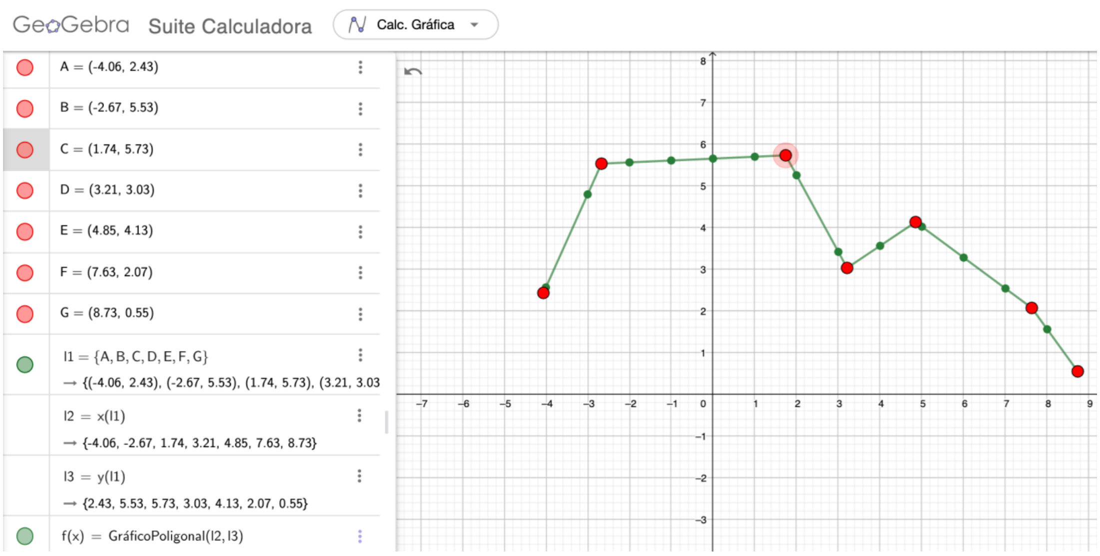


  - Ha añadido también la funcionalidad de realizar **mapas mentales**, una de las técnicas más poderosas del pensamiento visible. Hay un problema con las tildes en español pero está muy bien. Ojo: hay profesores que hacen unos mapas mentales maravillosos para el alumnado. Pero esto no vale para nada: ¡tienen que hacerlo ellas y ellos para organizar las ideas y aclarar su pensamiento!

¡Todo a la vez y relacionado!



- Hay un nuevo comando para hacer **funciones poligonales**. Se los presento: se llama GráficoPoligonal y solo te pide dos listas, una con las coordenadas “x” y otra con las coordenadas “y” de los puntos que definen la poligonal. Te permite crear después una tabla de valores y, como todo en GeoGebra, es interactivo. Más información en https://youtu.be/0xsyoFSwbyI



- **Open Middle Problems**: este modelo de actividad ha sido desarrollado por Robert Kaplinsky. Son actividades que proponen retos al alumnado que debe resolver colocando adecuadamente dígitos del 1 al 9. El estupendo **Tim Brzezinski** ha creado una versión digital en GeoGebra con muchos problemas de este tipo. Listos para usar con tus alumnas y alumnos. Están en Inglés pero se entienden muy bien: https://www.geogebra.org/m/jazvukfd

3. Talleres Fotogebra

¡Ya han comenzado los talleres! El Concurso Fotogebra que promueve Karina Rizzo, organiza como cada año, talleres para profesorado y alumnado. Este año mejor que nunca con un estupendo cartel de ponentes. Todos los viernes a las 11:30 o 14:30 hora argentina hasta el 29 de octubre.

Ponentes: Débora Pereiro y Karina Rizzo, Alejandro Rentería, Laura del Río, Bernat Ancochea, José Aurelio Pina, José Luis Muñoz, Marina Gabriela Torres, Alejandro Gallardo, Mari Carmen García, Fabián Vitabar, Diego Lieban, Eduardo Mancera y Agustín Carrillo.

Podrás verlos en directo en el canal de Fotogebra y ver después en https://www.fotogebra.com/talleres.

4. Comunidad GeoGebra Latinoamericana

La Comunidad GeoGebra Latinoamericana es uno de los mayores agentes activos en la comunidad GeoGebra en lengua española. Podemos encontrar toda su información en su página de Facebook: https://www.facebook.com/GeoGebraLatino/

Sus eventos #ColoquioGeogebra son un estupendo lugar de encuentro para todas y todos en los que aprender y compartir diferentes funcionalidades y aplicaciones en el aula de GeoGebra.

Son los responsables de la una inmensa recopilación de recursos que podemos ver cuando abrimos la página de GeoGebra en lengua española. Podemos consultarlos también en su perfil de usuario: https://www.geogebra.org/u/geogebralatino.

Gracias amigas y amigos por la estupenda tarea que realizáis.

La FESPM está también realizando una muy completa recopilación de recursos útiles para el aula a través de los Institutos GeoGebra de España. Esperamos pronto ver el resultado de este trabajo que sabemos que está siendo muy exhaustivo.

5. GeoGebra Florida Conference

Si todavía te queda un huequito en esta azarosa vida que llevas puedes ver los talleres que se desarrollaron en este importante punto de encuentro entre profesorado que busca el aprendizaje centrado en el alumnado apoyado por esta gran herramienta tecnológica (GeoGebra) que parece que nos está gustando a algunos y algunas.

https://www.youtube.com/playlist?list=PLITakOESY-2y0hZblGpPkFeyNzd4Ba-hK

¡Gracias por vuestra atención! ¡A construir y a llevarlo al aula!

Autor:

Alejandro Gallardo Lozano: Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Málaga. Profesor de Matemáticas en el Colegio Rafaela Ybarra de Madrid. Profesor asociado en la Universidad Rey Juan Carlos de Madrid. Miembro de la sociedad madrileña de profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo. Miembro del Instituto GeoGebra Maslama Al Mayriti. Correo electrónico alegallardo28@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-20

Flores: del jardín a GeoGebra

Débora Pereiro Carbajo, Javier Cayetano Rodríguez

Resumen	En este artículo se expone cómo el análisis y diseño de flores resulta de utilidad en el aula de matemáticas y, para ello, se muestran las principales técnicas de diseño de flores y ejemplos prácticos de implementación con GeoGebra. Se presentan, también, varias propuestas didácticas en las que se usa el diseño de flores para trabajar el análisis matemático de funciones (propiedades globales y área de recintos), así como la referencia y descripción de diferentes applets de GeoGebra, diseñado para tal fin. **Palabras clave**: Flores, GeoGebra, Curvas, Superficies, Funciones
Abstract	This paper is intended to show how flower analysis and design is useful in the math classroom, describing the main flower design techniques and giving some practical examples of implementation with GeoGebra. Several didactic proposals are also presented in which flower design is used to introduce some properties concerning mathematical analysis of functions (global properties and area of enclosures), as well as the reference and description of different GeoGebra applets which have been designed for this purpose. **Palabras clave**: Flowers, GeoGebra, Curves, Surfaces, Functions
Resumo	Este artigo mostra como a análise e o desenho de flores são úteis na aula de matemática, descrevendo as principais técnicas de desenho de flores e dando alguns exemplos práticos de implementação com o GeoGebra. Também são apresentadas várias propostas didáticas nas quais o desenho de flores é utilizado para trabalhar a análise matemática de funções (propriedades globais e área de recintos), assim como a referência e descrição de diferentes applets do GeoGebra, concebidos para este fim. **Palabras clave**: Flores, GeoGebra, Curvas, Superfícies, Funcões

1. Introducción

Este proyecto floreció en la primavera de 2020 en medio de la pandemia que nos confinó en nuestros hogares, alejados de las aulas y situándonos en un nuevo contexto vital. Por fortuna, las flores de mi jardín, las matemáticas y GeoGebra me proporcionaron una entretenida evasión. La belleza de las magnolias despertaron mi mirada matemática y me vi seducida a modelizarlas con GeoGebra utilizando las ecuaciones de las flores y las funciones. Posteriormente, analizando la forma y el perfil de los pétalos fui configurando un catálogo de flores 3D elaboradas con GeoGebra.

Otros compañeros crearon nuevas flores y aportaron otras visiones. De las más interesantes es la de Javier Cayetano, que usa funciones en lugar de curvas y facilita que el alumnado de secundaria, utilizando contenidos del currículo, pueda crear y analizar flores con GeoGebra a partir de una serie de actividades interactivas que elaboró para introducir el estudio de las propiedades de las funciones y la geometría usando las propiedades de las flores como punto de partida.

Puesto que ambos trabajos se complementan; uno parte de las matemáticas para construir flores con GeoGebra y el otro acerca dichas matemáticas presentes en las flores al alumnado, hemos decido escribir este artículo a dos manos y estructurarlo en dos partes.

En la primera parte, “*Modelización de flores con GeoGebra*”, mostraremos cómo construir flores con GeoGebra desde cero de tres maneras diferentes: a partir de las curvas concoide de rosetón, mediante funciones cuadráticas y utilizando herramientas GeoGebra elaboradas para este fin.

Figura 1. Foto: Machi Salgado.

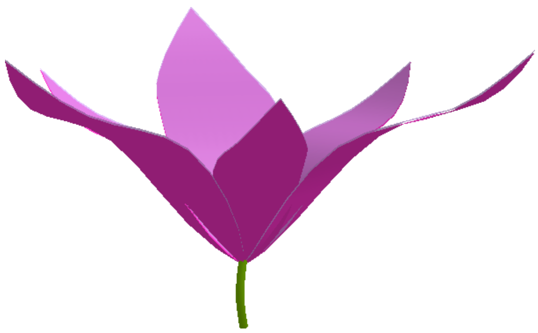


Figura 2: Magnolia con GeoGebra.

En la segunda parte, “*Análisis Matemático: dígamelo con flores*”, exponemos actividades que utilizan flores para iniciar al alumnado en el análisis matemático, a través de la concreción de los contenidos aprendidos en el estudio de las flores.

Dependiendo de los objetivos que nos fijemos para nuestro alumnado, analizaremos las propiedades de las funciones, las integraremos para calcular áreas de recintos, o podremos ver algunos elementos geométricos, como los polígonos regulares o las simetrías axial y rotacional.

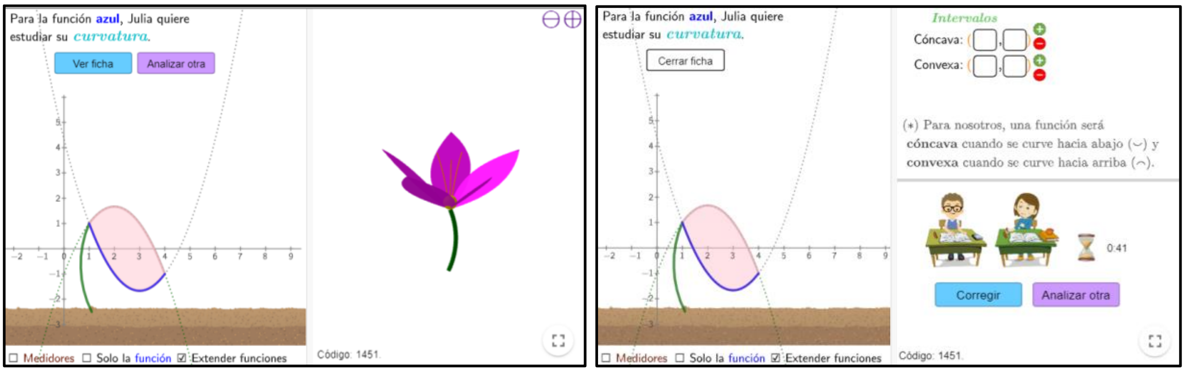


Figura 3: Ficha autoevaluable de análisis de la curvatura.

Este proyecto, originado a partir de las flores, continúa en desarrollo. En el libro GeoGebra "*Flores: del jardín a GeoGebra*" (https://www.geogebra.org/m/edqynt4y) se puede consultar, entre otros materiales, los que proponemos en este artículo.

2. Modelización de flores con GeoGebra

Para extraer de una flor las ecuaciones matemáticas que permitan modelizarla en un software como GeoGebra, utilizaremos curvas y funciones que resulten conocidas por el profesorado y el alumnado de secundaria.

No hay un método único para construir flores con GeoGebra, ya que cada flor es diferente pero, con variaciones de los métodos que sugerimos a continuación, se pueden crear un gran número de flores.

La estrategia general para el diseño, consistirá en hacer un planteamiento bidimensional de los pétalos de la flor, que llevaremos a la vista 3D proyectando esos puntos bidimensionales en el espacio mediante una curva "perfil", que vaya indicando la altura de cada punto, dependiendo de su distancia al tallo de la flor.

Igualmente, podemos aprovechar este método para incluir hojas en el diseño de la flor.

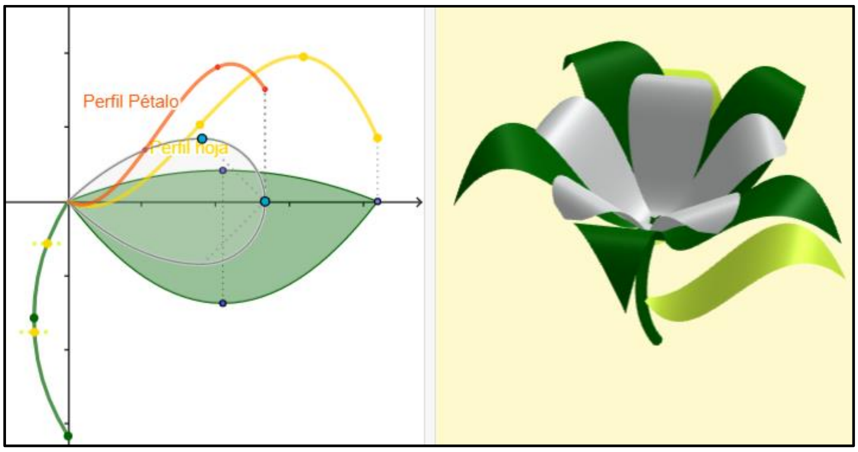


Figura 4: Modelado de una flor, con hojas y el paso 2D a 3D utilizando una función perfil.

Para generar los pétalos tendremos, a su vez, dos posibles estrategias:

1. Generar todos los pétalos a partir de una única curva. En este caso, utilizaremos curvas "concoides", que describiremos en el apartado 2.1. Esto nos aportará la ventaja añadida de contribuir, de forma práctica, a familiarizar a nuestro alumnado con el uso de las coordenadas polares.
2. Utilizar el área encerrada por una curva cerrada del plano para modelizar cada pétalo individual. Una vez creado uno, podemos generar los siguientes aplicando rotaciones alrededor del eje vertical. Este método nos proporciona la ventaja de potenciar la visión espacial de nuestro alumnado y la visualización de movimientos en el espacio, a la vez que da mucho juego a la hora de estudiar propiedades de las funciones y la relación entre sus expresiones algebraicas y sus gráficas.

2.1 Modelización de flores utilizando las curvas concoide de rosetón

El primer método que proponemos para modelizar flores consiste en llevar al 3D las curvas concoide de rosetón. Estas curvas, investigadas en el siglo XVIII por Abbot Guido Grandi tienen como ecuación en coordenadas polares:[1]

$$\rho = a \cos (n\, t) + b$$

donde **t** es el ángulo girado respecto a la horizontal y **ρ** la distancia al origen**.**

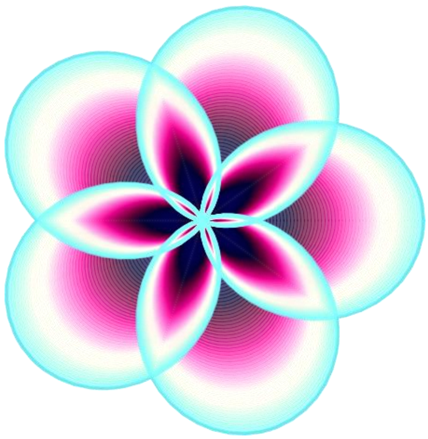


Figura 5: Concoide de rosetón a =1, b=1, n= 5/3

Las coordenadas polares son las más adecuadas para este tipo de curvas pero para curvas en tres dimensiones resulta más cómodo expresarlas en coordenadas rectangulares. Recordaremos seguidamente cómo obtener las

[1] Pérez A. (2005) "Las ecuaciones de las flores". (Sigma nº 26)

ecuaciones de una curva en coordenadas rectangulares conocida su ecuación polar.

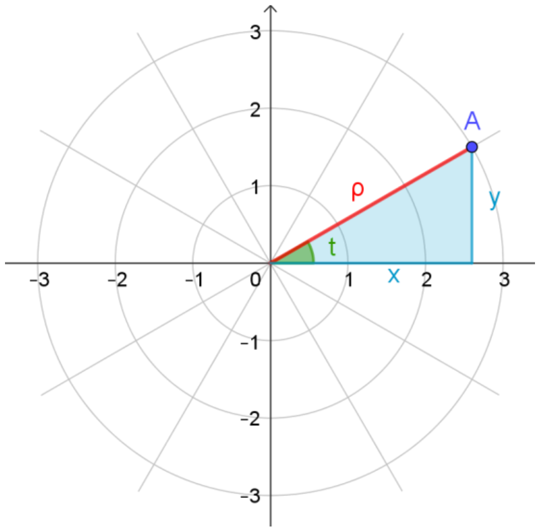


Figura 6: Coordenadas polares y rectangulares.

Dado un punto A, representaremos sus coordenadas polares como **(ρ;t)**, donde t es el ángulo girado respecto a la horizontal y ρ la distancia al origen[2].

Sus correspondientes coordenadas rectangulares **(x,y)** son:

$$x = \rho \cos(t)$$

$$y = \rho \operatorname{sen}(t)$$

Una curva de ecuación polar **ρ=f(t)** se expresa en coordenadas rectangulares mediante las ecuaciones:

$$\mathbf{x(t) = f(t)\ \cos(t)}$$

$$\mathbf{y(t) = f(t)\ sen(t)}$$

Proponemos a continuación dos actividades para graficar con GeoGebra la curva concoide de rosetón en coordenadas polares y en rectangulares.

Actividad 1

*Grafique con GeoGebra las curvas concoide de rosetón **ρ = a cos(n t) +b** ; siendo **a** y **b** números reales y **n** un número natural. Utilice las coordenadas polares.*

Escriba en la entrada algebraica un valor para cada variable a, b y n

a = 1

b = 1

[2] Utilizamos la convención habitual, también utilizada en GeoGebra, de separar mediante el símbolo "**;**" la componente angular, precisamente para indicar que son coordenadas polares y no rectangulares.

n = 5

(Acceda a las propiedades del deslizador n y seleccione como valor mínimo 1, valor máximo 30 e incremento 1)

Introduzca la curva ρ = f(t) en coordenadas polares (ρ;t). Use el comando *Curva*[3]

f(t) = a cos(n t) +b (Oculte la función f de la vista gráfica)

c = Curva((f(t); t), t, 0, 2π)

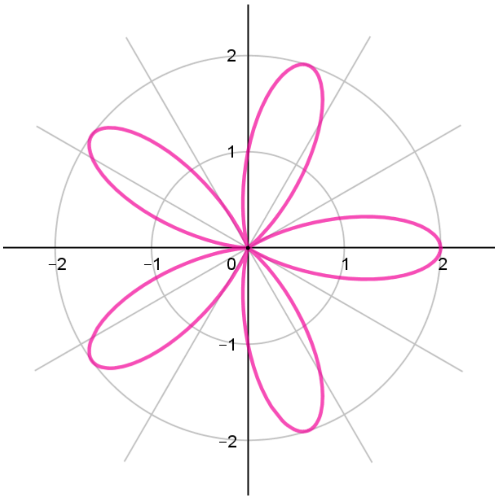


Figura 7: Concoide de rosetón a =1, b=1, n= 5

Tome diferentes valores de las variables a, b y n para generar diferentes flores.

Actividad 2

*Grafique con GeoGebra las curvas concoide de rosetón **ρ = a cos(n t) + b** ; siendo **a** y **b** números reales; y **n** un número racional (**n = p / q**). Utilice las coordenadas rectangulares.*

Escriba en la entrada algebraica de GeoGebra un valor para cada variable a, b, p, q

a = 1

b = 1

p = 5

q = 3

(Acceda a las propiedades de los deslizadores p y q y seleccione como valor mínimo 1, valor máximo 30 e incremento 1)

n = p/q

Introduzca la curva en la entrada algebraica mediante el comando *Curva*

f(t) = a cos(n t) + b (Oculte la función f de la vista gráfica)

[3] Curva(<Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>)

c = Curva(f(t) cos(t), f(t) sen(t), t, 0, 2π q)

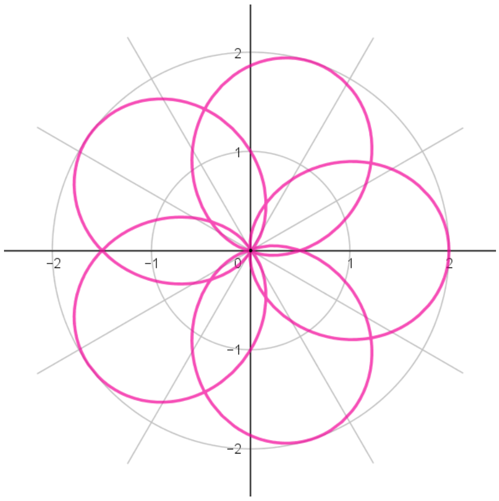


Figura 8: Concoide de rosetón a =1, b=1, n= 5/3

Tome diferentes valores de las variables a, b, p y q para generar diferentes flores.

Una vez representada la curva concoide de rosetón, se ha de aplicar una función a la curva para transformarla del plano 2D al espacio 3D.

Sea ρ=f(t) la ecuación de la curva concoide y g la función que defina el perfil de la flor 3D (puede ser una función lineal, cuadrática, radical, racional, etc). La coordenada z de un punto de la curva 3D se obtiene componiendo las funciones f y g: z(t) = g(f(t))

Es decir, nuestra curva 3D tendrá las siguientes ecuaciones paramétricas:

x(t) = f(t) cos(t)

y(t) = f(t) sen(t)

z(t) = g(f(t))

En este punto, una vez obtenida la "estructura" de la flor, sólo resta darle vida mediante una superficie que la cubra.

Utilizaremos *superficies regladas*, que son superficies que se generan mediante el movimiento de una recta o un segmento al desplazarse sobre una o varias curvas.

- Superficie reglada entre una curva a(t) y un punto A

  Superficie(k A +(1-k) a(t), <Parámetro 1>, <Valor inicial 1>, <Valor final 1>, <Parámetro 2>, <Valor inicial 2>, <Valor final 2>)

- Superficie reglada entre dos curvas a(t) y b(t)

  Superficie(k a(t) +(1-k) b(t),<Parámetro 1>,<Valor inicial 1>,<Valor final 1>, <Parámetro 2>, <Valor inicial 2>, <Valor final 2>)

Dependiendo de la flor en cuestión y de la forma de sus pétalos usaremos un método u otro para crear su superficie. O bien, como superficie reglada entre la curva y un punto (la base de la flor), o bien como superficie reglada entre dos curvas que formen un pétalo de la flor. Una vez creado un pétalo, los siguientes pétalos se generan aplicando rotaciones alrededor del eje Z.

Consideraremos como pétalo base el que es simétrico con respecto al eje X y que se obtiene para valores de la curva con $-\pi/n \leq t \leq \pi/n$.

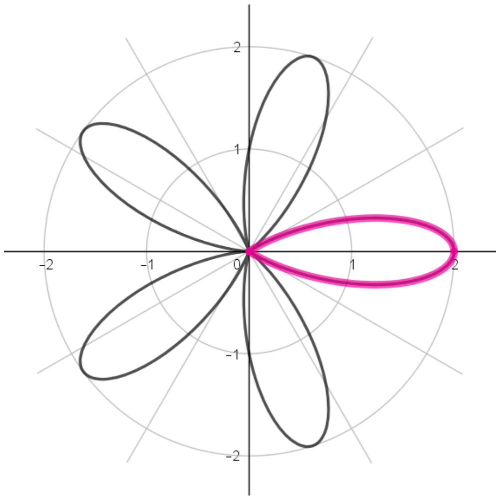


Figura 9: Pétalo simétrico respecto al eje X.

Proponemos seguidamente dos actividades para practicar lo aprendido. En la primera actividad, se construirá una flor a partir de una superficie reglada entre la curva 3D y un punto, y en la segunda, el pétalo de la flor se formará como superficie reglada entre dos curvas.

Usaremos GeoGebra Clásico con las vistas: *Vista Algebraica*, *Vista Gráfica* y *Vista Gráfica 3D*.

Actividad 3

Construya una flor 3D a partir de la curva concoide de rosetón.

Escriba en la entrada algebraica un valor para cada variable a, b, p, q

a = 1

b = 0

p = 5

q = 3

(Acceda a las propiedades de los deslizadores p y q y seleccione como valor mínimo 1, valor máximo 30 e incremento 1)

n = p/q

Escriba en la entrada algebraica la función de la curva concoide de rosetón y la que será la función perfil de la flor en 3D

f(t) = a cos(n t) + b

g(t) = sqrt(t) (Puede considerar otras funciones: función valor absoluto, cuadrática, racional, potencial, exponencial, trigonométrica, ...)

Oculte ambas funciones

Introduzca la curva mediante la entrada algebraica

c = Curva(f(t) cos(t) , f(t) sen(t) , g(f(t)) , t , 0 , 2πq)

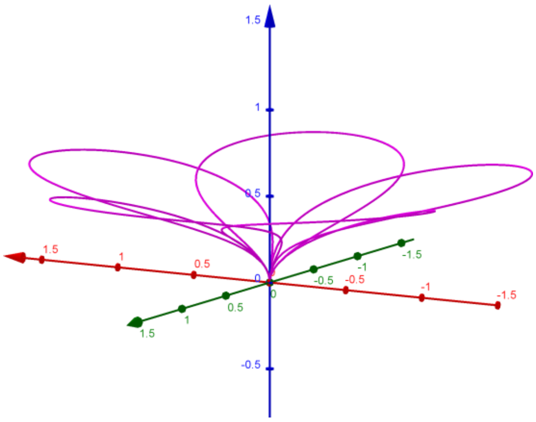


Figura 10: Curva concoide en 3D.

Introduzca en la entrada algebraica la superficie reglada entre la curva c y el origen de coordenadas:

A = (0,0,0)

d = Superficie(k A +(1-k) c(t), k,0,1,t,0,2π q)

Si la forma de la flor se ajusta a nuestro modelo, sólo queda ponerlo bonito accediendo a sus propiedades: cambiar el color, poner a cero el grosor del trazo, etc.

En caso contrario cambie la función g o modifique los valores de las variables a, b, p, q.

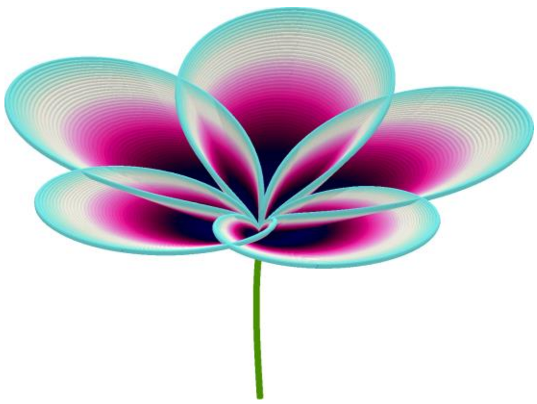


Figura 11: Flor 3D a partir de la concoide[4]

Actividad 4.

Construya una flor 3D a partir de un pétalo de la curva concoide de rosetón. Utilice como superficie del pétalo una superficie reglada entre dos curvas.

[4] GeoGebra no permite hacer directamente degradados de colores. Pueden hacerse, pero empleando otras técnicas que no son objeto de este artículo.

Escriba en la entrada algebraica de GeoGebra un valor para cada variable a, b, p, q.

a = 1 (Acceda a las propiedades del deslizador a y seleccione como valor mínimo 0, valor máximo 5 e incremento 0.1).

b = 1 (Acceda a las propiedades del deslizador b y seleccione como valor mínimo a, valor máximo 5 e incremento 0.1).

p = 3

q = 1

(Acceda a las propiedades de los deslizadores p y q y seleccione como valor mínimo 1, valor máximo 30, e incremento 1).

n = p/q

Escriba en la entrada algebraica la función de la curva concoide y la que será la función perfil de la flor en 3D.

f(t) = a cos(n t) + b

g(t) = sqrt(t) (Pruebe con otras funciones)

Oculte las funciones f y g de las vistas gráficas.

Escriba en la entrada algebraica las curvas que definen el pétalo en 2D. Nótese que como el pétalo es simétrico respecto al eje X ambas curvas tienen las mismas coordenadas salvo el signo de la 2ª coordenada.

c = Curva(f(t) cos(t) , f(t) sen(t) , t , 0 , π/n)

c’ = Curva(f(t) cos(t) , -f(t) sen(t) , t , 0 , π/n)

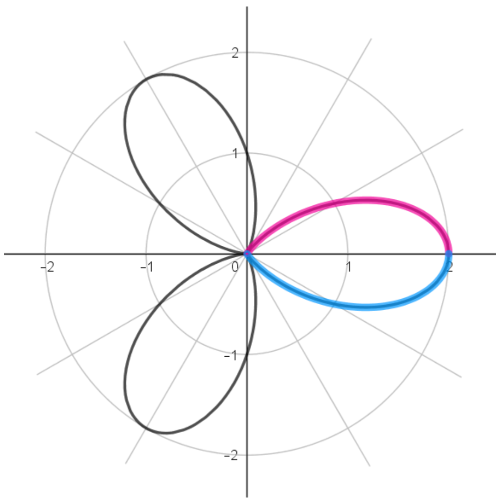


Figura 12: Curvas simétricas que forman un pétalo.

Escriba en la entrada algebraica las curvas que definen el pétalo en 3D.

d = Curva(f(t) cos(t) , f(t) sen(t) , g(f(t)) , t , 0 , π/n)

d’ = Curva(f(t) cos(t) , -f(t) sen(t) , g(f(t)) , t , 0 , π/n)

Escriba en la entrada algebraica la superficie reglada entre las dos curvas que definen el pétalo:

e = Superficie(k d(t) + (1 - k) d'(t), k, 0, 1, t, 0, π / n)

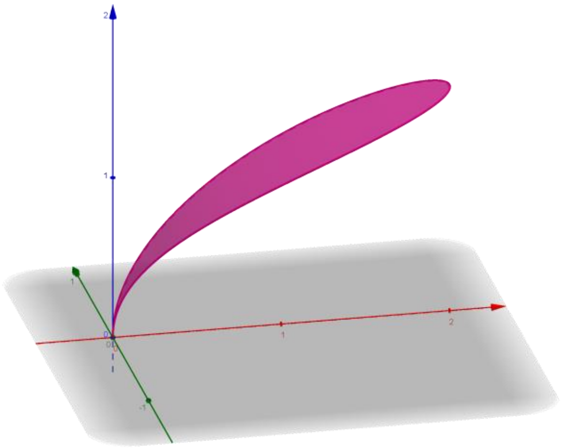


Figura 13: Pétalo en 3D.

Introduzca en la entrada algebraica el número de pétalos de la flor y obtenga mediante el comando secuencia[5] todos sus pétalos aplicando rotaciones[6] alrededor del eje Z.

m=6 (Acceda a las propiedades del deslizador m y selecciona como valor mínimo 1, valor máximo 30 e incremento 1).

l1=Secuencia(Rota(e, k * 2π / m, EjeZ), k, 1, m)

Oculte el pétalo base y ponga la flor a su gusto modificando en las propiedades de la lista: color, grosor de trazo, etc.

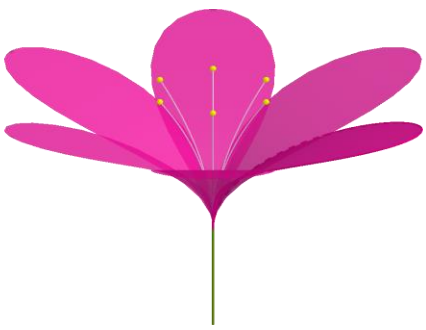


**Figura 14: Flor creada a partir de un pétalo.
Como adorno, se han añadido algunos estambres.**

[5] Secuencia(<Expresión>, <Variable k>, <Valor inicial a>, <Valor final b>)

[6] Rota(<Objeto>, <Ángulo>, <Eje de rotación>)

2.2 Modelización de flores mediante funciones

Como indicamos anteriormente, otra forma de crear flores consiste en modelizar un pétalo de la flor utilizando funciones. Veamos cómo hacerlo mediante funciones cuadráticas:

Actividad 5

Modelice un pétalo 2D mediante una función cuadrática y, a partir de éste, obtenga una flor 3D.

Consideremos la función cuadrática definida a partir de tres puntos no alineados, por ejemplo: sean A el origen de coordenadas, B un punto en el semieje positivo de las X y C un punto en el primer cuadrante. Mediante el comando *Polinomio(<Lista de Puntos>)* se obtiene la función polinómica, cuadrática en este caso, que pasa por estos puntos:

f = Polinomio({A,B,C})

Tomamos como pétalo 2D la región del plano delimitada por las funciones cuadráticas f y -f (su simétrica con respecto al eje X) y x(A) ≤ x ≤ x(B), siendo x(A) y x(B) las abscisas de los puntos A y B respectivamente.

a= IntegralEntre(f, -f, x(A), x(B))

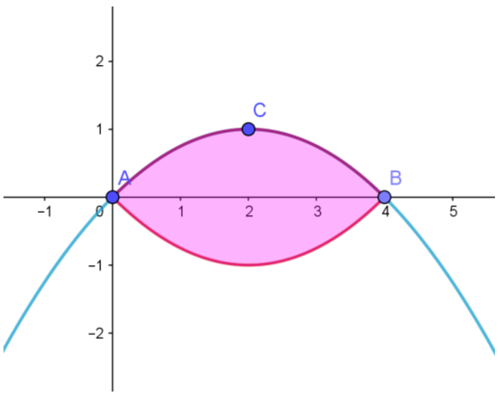


Figura 15: Pétalo 2D a partir de una función cuadrática.

Sea g(x) = sqrt(x) la función perfil que llevará el pétalo del 2D al 3D (puede probarse con otros tipos de funciones: lineal, cuadrática, racional, radical, etc.)

Las curvas que definen el pétalo en 3D tienen como ecuaciones paramétricas:

Curva definida a partir de f	Curva definida a partir de -f
x = t **y = f(t)**	**x = t** **y = -f(t)**

z = g(t)	**z = g(t)**

Tabla 1. Ecuaciones paramétricas para definir en 3D el pétalo de la actividad 5.

Estas curvas se grafican en GeoGebra mediante las sentencias:

b = Curva(t, f(t), g(t), t, x(A), x(B))

c = Curva(t, -f(t), g(t), t, x(A), x(B))

Una vez creadas las curvas procedemos a obtener la superficie del pétalo (mediante una superficie reglada entre ambas curvas):

d = Superficie(k b(t) + (1 - k) c(t), k, 0, 1, t, x(A), x(B))

Y para acabar, obtenemos todos los pétalos de la flor rotando el pétalo base alrededor del eje Z:

n = 6 (Acceda a las propiedades del deslizador n y selecciona como valor mínimo 1, valor máximo 30 e incremento 1)

l1 = Secuencia(Rota(d, k * 2π / n, EjeZ), k, 1, n)

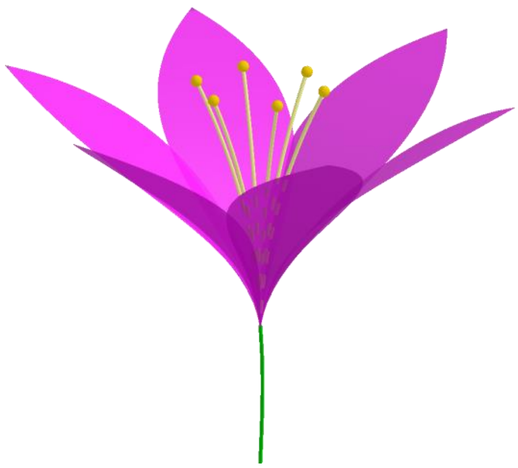
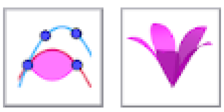


Figura 16: Flor generada a partir de una función cuadrática.

2.3 Herramientas GeoGebra para modelizar flores

Si queremos trasladar este trabajo al aula de secundaria, para que los estudiantes modelicen flores a la par que investigan, analizan y practican las matemáticas que aparecen en el proceso de su construcción, podemos proporcionarles herramientas (macros) que les faciliten el trabajo.

En la actividad GeoGebra *"Construye una flor 3D con funciones cuadráticas"* (https://www.geogebra.org/m/ywxqjcne) se encuentran dos herramientas (*pétalo* y *flor*) para generar flores utilizando funciones cuadráticas que se pueden utilizar para este fin.



Figuras 17 y 18: Herramientas "pétalo" y "flor"

La herramienta "***pétalo***"  genera a partir de 4 puntos:

- *Dos funciones cuadráticas*. Una modeliza (junto a su simétrica con respecto al eje X) el pétalo bidimensional y la otra proyecta el pétalo 2D en el espacio 3D.
- *Un punto* (vértice de la parábola que modeliza el pétalo bidimensional).
- *El pétalo 2D y el 3D*.
- Oculta las funciones cuadráticas y los puntos de la vista gráfica 3D.

A continuación se puede modificar el pétalo desplazando estos cinco puntos.

La herramienta "**flor**"  genera el resto de pétalos a partir de los 5 puntos citados. Estos puntos deben seleccionarse en orden: primero seleccionamos los tres puntos de la función cuadrática que define el pétalo 2D y a continuación los dos puntos de la función perfil.

Para más información sobre las herramientas consulte la actividad *Construye una flor 3D con funciones cuadráticas* (https://www.geogebra.org/m/ywxqjcne).

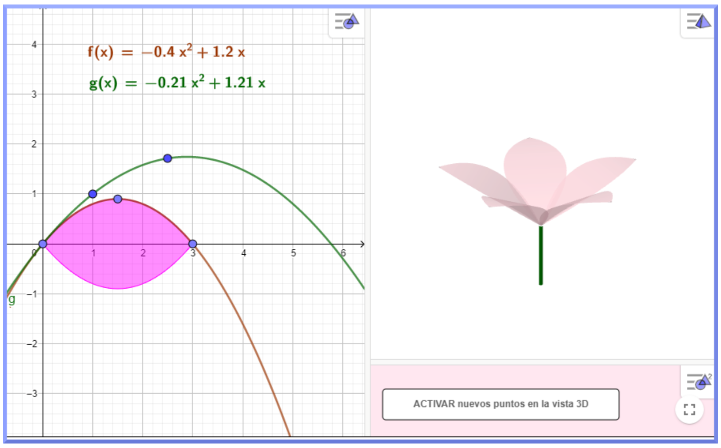


Figura 19: Flor de Noa. Alumna de 3º ESO, del IES As Barxas, Moaña.

3. Análisis Matemático: dígamelo con flores

El otro ámbito de aprendizaje que hemos considerado para las actividades con flores es utilizarlas como trasfondo para el análisis matemático. Principalmente, el estudio de las funciones.

Para gran parte del alumnado, el estudio de las propiedades de las funciones supone una barrera de abstracción difícil de superar. Introducir esas propiedades sin una referencia tangible o cercana a sus experiencias previas puede causar que no asimilen correctamente esos conocimientos.

En las actividades anteriores, hemos visto la utilidad de las flores para introducir las funciones cuadráticas y sus propiedades, pues resulta de interés para el diseño el localizar el vértice y conocer su forma.

Ahora proponemos dar un paso más, y diseñar flores aprovechando el lenguaje de las funciones para introducir y afianzar nuestros conocimientos sobre las mismas.

Para ello, utilizaremos applets ya preparados, pensados para focalizar nuestra atención precisamente en las propiedades matemáticas, en lugar de la generación en sí de las flores.

Podemos comenzar con actividades como el *Generador de flores* (ver fig. 4), https://www.geogebra.org/m/duqthjva, que servirán para familiarizar al alumnado con diferentes formas que pueden tomar las curvas, sin necesidad de recurrir a su expresión algebraica.

Posteriormente, podemos introducir y estudiar diferentes funciones elementales, con actividades como *Flores generadas por funciones* https://www.geogebra.org/m/yhjyqtq6 (ver fig. 20) y *Flores y funciones*, https://www.geogebra.org/m/qamjrsms. Además, este tipo de actividad nos permitirá introducir de manera natural conceptos como el dominio y recorrido de las funciones, poniendo de manifiesto que, al modelizar matemáticamente, puede ocurrir que solo necesitemos parte de la función.

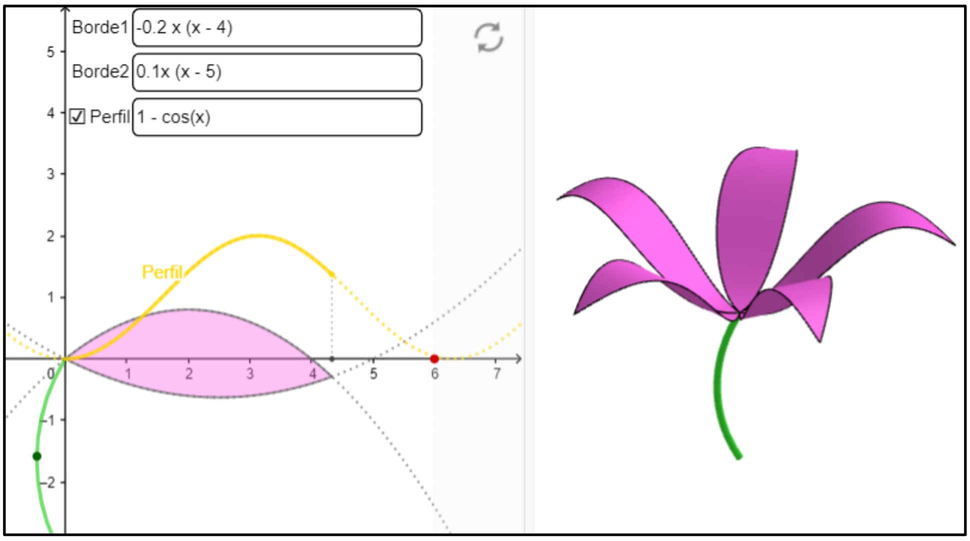


Figura 20: Flores generadas por funciones.

Una vez que nuestro alumnado se ha familiarizado con las diferentes formas que toman las funciones elementales, podemos aprovechar también estos applets para hacer un estudio guiado donde les vayamos invitando a reconocer y analizar las diferentes propiedades de las funciones, como pueden ser los signos, intervalos de crecimiento y curvatura, rango y dominio. Por ejemplo, una actividad muy interesante es proponer a los alumnos que diseñen flores cuyos pétalos cumplan ciertas condiciones.

Conseguiremos así llegar a estos conceptos de una forma natural e introducirlos de una forma práctica pero rigurosa, haciendo ver a nuestro alumnado su utilidad.

3.1 Actividades de evaluación

Para facilitar la adquisición de conocimientos y la comprobación de su correcta asimilación, hemos creído conveniente preparar actividades que propongan diferentes ejercicios relativos a las propiedades de las funciones, dentro del ámbito de las flores (disponibles en el enlace https://www.geogebra.org/m/edqynt4y#chapter/689201).

Las flores no servirán únicamente como pretexto para la redacción de los ejercicios, sino que la compresión de los propios ejercicios servirá para que el alumnado practique la capacidad para elegir la función, y qué parte de la misma necesita para el modelizado.

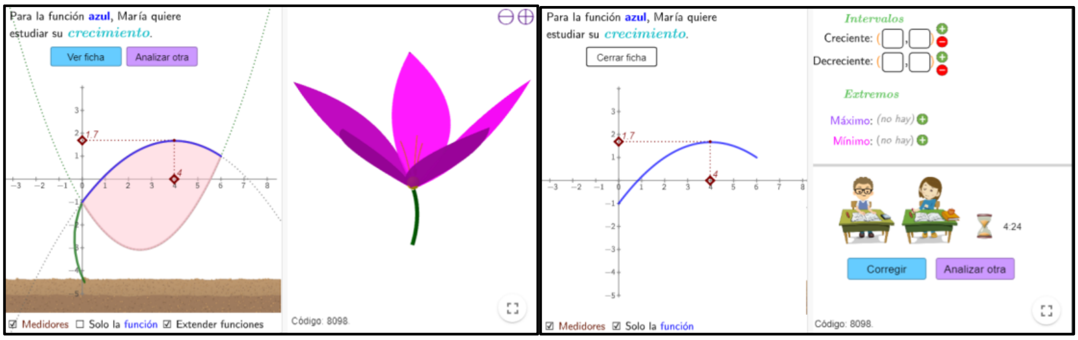


Figura 21: Ejercicios correspondientes al estudio de los intervalos de crecimiento de funciones.

Concretamente, se han creado applets para el estudio de:

- Intervalos de crecimiento de una función.
- Signos de una función.
- Dominio y recorrido.
- Intervalos de curvatura.
- Análisis conjunto de las cuatro posibilidades anteriores.

Los applets se han programado de manera que comprueben automáticamente la solución introducida por el alumno, muestren la respuesta correcta y asignen una puntuación acumulativa a los ejercicios correctos. Para facilitar la tarea al alumnado, se incluyen unos medidores que indican los valores sobre los ejes de coordenadas, y se permiten ciertos errores de redondeo.

Además, se conserva información útil tanto para el alumnado como para el profesor, como es la cantidad de fichas realizadas y cuántas han sido correctas, el tiempo invertido en la ficha actual y el tiempo total de trabajo.

Así, se facilita la autocorrección y autorregulación de la adquisición de conocimientos por parte del alumnado que, además, tendrá a su disposición una batería inagotable de ejercicios diferentes con los que practicar.

Al mismo tiempo dotamos al profesorado de herramientas prácticas para la docencia tanto presencial como virtual, liberándolo de la tarea mecánica de comprobación de la corrección de los ejercicios, para que pueda dedicar el tiempo de aula en una atención más personalizada de sus alumnos y resolución de dudas conceptuales.

Otra de las ventajas del uso de GeoGebra para crear estas actividades es que los applets están disponibles de forma gratuita en la web para descargar y editar, de manera que el profesorado que lo necesite podrá modificar alguna de sus características (como las puntuaciones) para adaptarlos todavía más a la realidad de su aula.

También, utilizando herramientas como GeoGebra classroom, el profesorado podrá consultar la evolución de sus alumnos al resolver las fichas o, utilizando un LMS como Moodle, incorporar las actividades a su aula, con la opción de guardar automáticamente las calificaciones (ver https://www.geogebra.org/m/tcytwayg).

3.2 Flores e integrales

Al igual que en el caso de las propiedades de las funciones, otro escollo conceptual que encuentra el alumnado es el proceso de cálculo de áreas utilizando integrales. Especialmente en el caso del área definida entre dos curvas.

Por ello, para hacer más accesibles estos conceptos, podemos recurrir a ejercicios de cálculo basados en el diseño de flores, materializándolos en algo más concreto que la mera abstracción del área entre dos curvas.

Al modelizar las flores, hemos utilizado precisamente el área encerrada entre dos funciones para definir cada pétalo. Aprovechando para elegir funciones con intersecciones y primitivas sencillas de calcular podemos, nuevamente, crear una batería virtualmente infinita de ejercicios con los que el alumnado podrá practicar de forma autónoma, y con tantos como necesite.

En este caso, hemos creado ejercicios con diferentes tipos de actividades, donde las funciones serán rectas o parábolas, con y sin denominadores (ver https://www.geogebra.org/m/dv6ufjne).

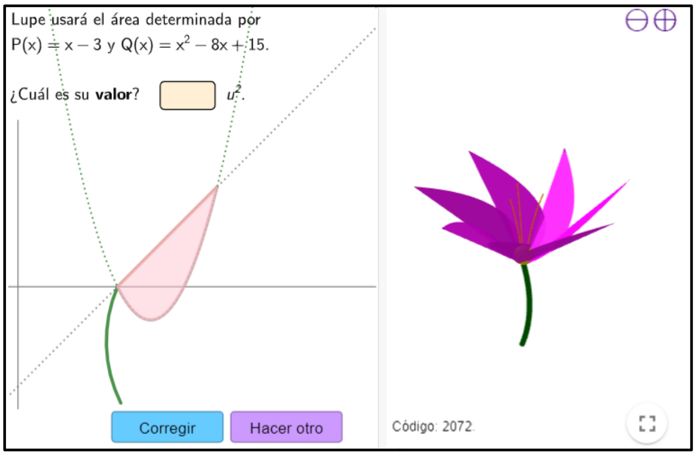


Figura 22: Ejemplo de enunciado de ejercicios de cálculo de áreas.

Además, los ejercicios incluyen las explicaciones detalladas paso a paso de la resolución de los mismos, para facilitar aún más la autonomía del alumno y la autorregulación de su aprendizaje.

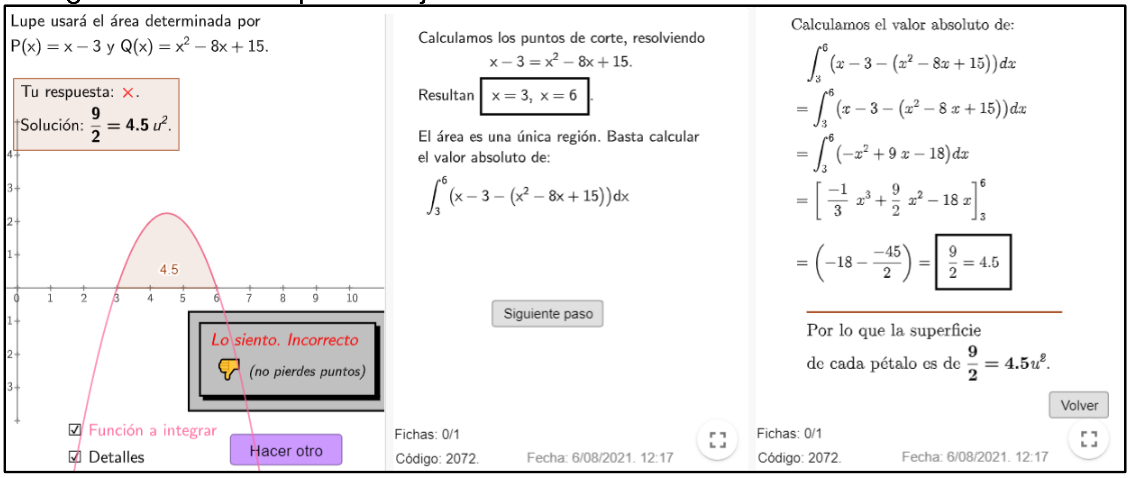


Figura 23: Ejemplo de enunciado de cálculo de áreas, con los pasos para su resolución.

4. Conclusiones

El diseño de flores es una actividad atractiva para el alumnado porque puede enriquecerse con tantos contenidos matemáticos como queramos llevar al aula. Podemos aprovechar el proceso de diseñarlas para

- Mostrar cómo las matemáticas sirven para modelizar e interpretar aquello que nos rodea.
- Aprender las coordenadas polares y diferentes formas de modelizar curvas; como arcos de circunferencia, trozos de parábolas u otros tipos de funciones que nos interese mostrar, como pueden ser las de interpolación.
- Introducir a nuestro alumnado de una forma amena y divertida en el uso de GeoGebra que, actualmente, es el software de geometría dinámica más completo y ampliamente utilizado.
- Aplicar el estudio de las flores a aquellas áreas de las matemáticas en las que nos interese concretar definiciones y conceptos que puedan resultar más abstractos, como pueden ser, las características de las funciones o el cálculo de áreas de recintos mediante integración. Mezclando estas ideas con la creación de actividades que propongan diferentes ejercicios a los alumnos y corrijan y califiquen sus respuestas de manera automática, tendremos una completa propuesta didáctica basada en el diseño de flores.
- Ampliar nuestra propuesta a otras áreas de la matemática que nos interese estudiar. Por ejemplo, la disposición de los pétalos puede darnos pie a estudiar los polígonos regulares, contar sus diagonales, estudiar simetrías -incluida la simetría rotacional- o hablar de diferentes tipos de prismas si nos proponemos diseñar una caja que contenga nuestra flor.

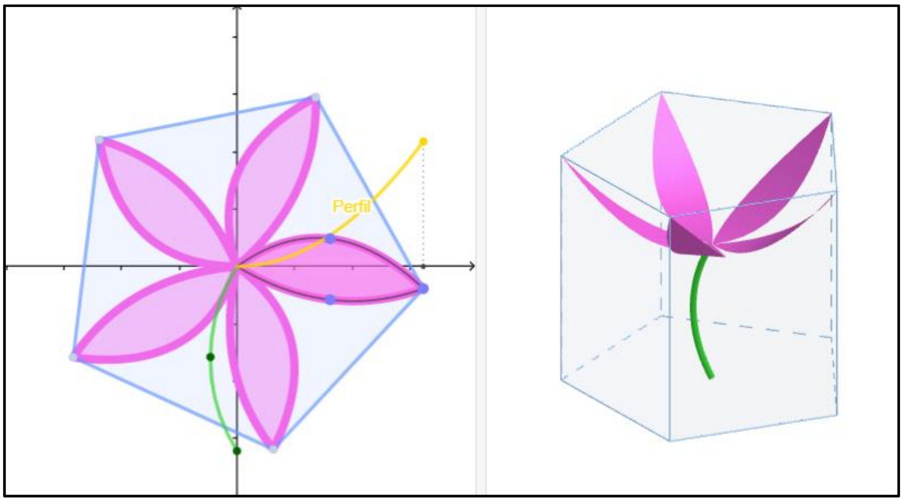


Figura 24: Actividad “Polígonos regulares y flores”
(https://www.geogebra.org/m/njpvjapj)

Como hemos indicado anteriormente, hemos reunido todos estos materiales relativos a la modelización y al estudio matemático de las flores en el libro GeoGebra, *Flores: del jardín a GeoGebra* (https://www.geogebra.org/m/edqynt4y).

Para concluir les invitamos a visitar el libro *Flores 3D* donde pueden encontrar una gran variedad de flores modelizadas con Geogebra https://www.geogebra.org/m/ct3jebjc.

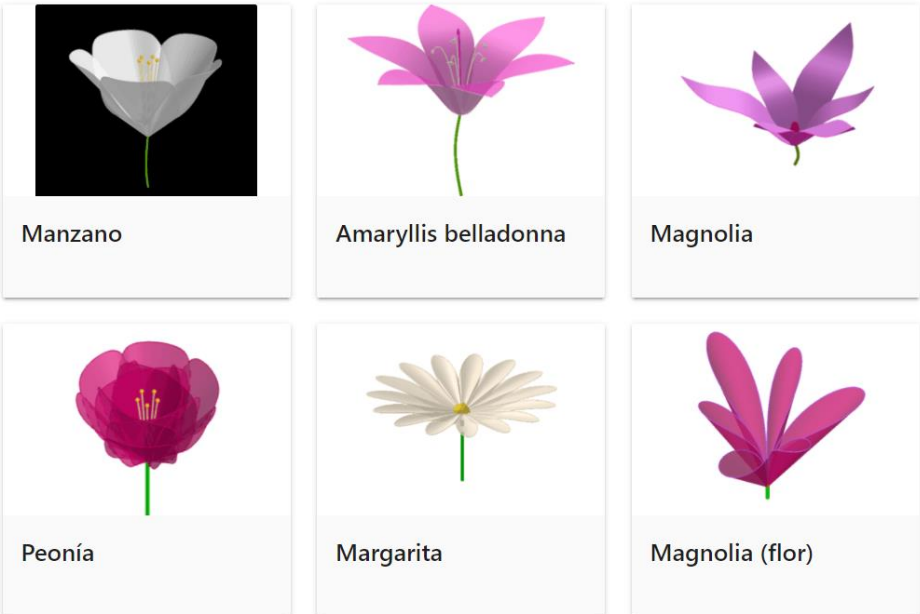


Figura 25: Exposición de flores 3D
(https://www.geogebra.org/m/ct3jebjc#chapter/474075)

Bibliografía

Ancochea, B., Arranz, J.M., Muñoz, J. (2018). *Construcción de superficies con GeoGebra 3D* [en línea], recuperado el 6 de agosto de 2021 de https://www.geogebra.org/m/MSNNQCmE#material/d6waftkg

Muñoz, J. (2016). *Me quiere, no me quiere. La ecuación de una flor*, Revista Suma nº 82, 91-107.

Pérez, A. (2005). *Las ecuaciones de las flores*, Revista Sigma nº 26, 137-148.

Cayetano Rodríguez, Javier. Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Extremadura. Profesor de matemáticas en el IES Albarregas (Mérida) y miembro del Grupo de Software Educativo de Extremadura (GSEEX). Director del Instituto GeoGebra Extremeño (IGEx) y miembro de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática (SEEM). javiercayetano@educarex.es

Pereiro Carbajo, Débora. Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela. Profesora de matemáticas en el IES As Barxas de Moaña. Miembro de la Asociación Gallega de Profesores de Matemáticas (AGAPEMA). Miembro del Instituto GeoGebra de Galicia. deborapereirocarbajo@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640

Número 62. Agosto 2021

http://www.fisem.org/www/index.php

https://union.fespm.es/index.php/UNION

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene ahora una periodicidad cuatrimestral, de modo que se publican tres números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre. Es recepcionada en ***Mathematics Education Database***, está incluida en el catálogo ***Latindex, CAPES*** y otros.

Junta de Gobierno de la FISEM