REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XV – Número 55 – Abril 2019

http://www.revistaunion.org

ÍNDICE

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 55. Abril 2019
Páginas 01-194

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene ahora una periodicidad cuatrimestral, de modo que se publican tres números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre. Es referenciada en ***Mathematics Education Database,*** está incluida en el catálogo ***Latindex, CAPES*** y otros.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 55. Abril 2019
Páginas 02-07

EDITORIAL

Estimados colegas y amigos:

Llegamos al número 55 de la revista Unión. Como siempre hay diferentes investigaciones y distintos temas de interés para la educación matemática en sus diferentes niveles. La calidad de los artículos ha sido mantenida por la evaluación rigurosa de los revisores. Para que la producción dignifique el área de la educación matemática iberoamericana contamos siempre con la colaboración de todos, tanto autores como revisores.

En este número en la sesión Firma Invitada aparece un artículo de Lluís Bonet Juan, que desde el año 1995 ejerce como profesor de secundaria en el IES Mare Nostrum de Alicante y como profesor-tutor en la UNED de Denia-Benidorm. En 2017 fue galardonado en Alicante con el Premio Joan Ponsoda a la Innovación Educativa. En 2018 fue uno de los diez profesores premiados en los II Premios EDUCA a los mejores docentes en España. En el artículo: **“¿Matemáticas? Si, si … acércate y verás”** el autor argumenta la necesidad de crear situaciones cercanas al mundo de nuestro alumnado, con escenarios de aprendizaje diferentes con los que emocionar y descubrir las matemáticas desde una perspectiva que les resulte más atractiva y motivadora en la que las TIC permiten trabajar en el aula de una manera diferente y ser una fuente para generar y profundizar en el conocimiento matemático.

Este volumen lo componen seis artículos, dos propuestas de aula, una reseña de un libro y la habitual sección de problemas.

“Las percepciones de los profesores de matemáticas en Francia y México”, es el primer artículo, escrito por Maria del Rocio Juárez Eugenio y María Anabell Aguilar Zaldivar. Las autoras analizan las percepciones que tienen los futuros profesores de matemáticas de Francia y México sobre su formación y muestran que las percepciones de los docentes en formación de ambos países son similares en dos categorías. Diana Patricia Salgado, María Rita Otero y Verónica Parra presentan un trabajo que se encuadra dentro de una investigación más amplia, cuyo objetivo general es enseñar matemática para no matemáticos en la universidad, adoptando las nociones centrales de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). El artículo lleva por título “**A praxeological model of reference related to costs**

calculation: comparison with the ones developed in a research and study path at university level". El tercer artículo de este número lleva por título **"Coordinación de Registros de Representación en el Aprendizaje de la Función Lineal"**, es de los autores Marina Soto, Carlos Gabriel Herrera y Nora Elisa Pereyra. En este artículo se pretende, teniendo en cuenta la teoría de Duval, analizar en alumnos que cursan tercer año de Escuela Secundaria, el nivel de coordinación entre registros de representación semiótica, de la función lineal. Ángel Alsina, Miquel García y Eduard Torrent son los autores del artículo **"El desarrollo y la evaluación de la competencia matemática desde la escuela y para la escuela"**. En este trabajo se ofrecen orientaciones y recursos didácticos para evaluar la competencia matemática en Educación Primaria. Y a continuación puede encontrar el artículo de Lênio Fernandes Levy **"O Indivíduo, a Sociedade, o Conhecimento (Matemático) e a Educação (Matemática)".** En este trabajo, se abordan los papeles desempeñados por el individuo y la sociedad en lo que concierne a la construcción del conocimiento, con énfasis en el conocimiento matemático. Se trata de una investigación de naturaleza teórico-bibliográfica. Por último, aparece el artículo **"Um estudo da Primeira Forma Quadrática: Uma proposta de ensino com construção dinámica"** de los autores Ana Carla Pimentel Paiva y Francisco Régis Vieira Alves. En este artículo se presenta un análisis epistemológico de un concepto de la teoría matemática de las superficies, denominada Primera Forma Cuadrática.

Como propuestas de aula Magali Lucrecia Freyre y Ana María Mántica presentan **"Una nueva mirada a los poliedros regulares: construcciones que generan sorpresas"**. Las autoras, en este trabajo, plantean el análisis de lo realizado por estudiantes de tercer año de profesorado en matemática en la resolución de dos problemas de geometría tridimensional con GeoGebra y Polydron. Martha de las Mercedes Iglesias Inojosa y José Ortiz Buitrago tienen como propuesta en el artículo **"La Demostración en Geometría desde una Perspectiva Didáctica"** la revisión y análisis dirigido a caracterizar, desde una perspectiva didáctica, el escenario y las experiencias de aprendizaje que conforman un curso de resolución de problemas geométricos en ambientes de geometría dinámica; específicamente el caso de experiencias vinculadas a la demostración en geometría. En este número también aparece la reseña elaborada por Yeni Acosta **"Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)"**, cuyo autor es Ángel Alsina (Universidad de Girona, España), dirigido a maestros en activo, futuros maestros, formadores de maestros y otros profesionales interesados en la educación matemática. El problema de este número 55 es “**Porcentajes. Reflexiones em un marco de creación de problemas”** de nuestro colaborador habitual, el profesor **Uldarico Malaspina Jurado** de la Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM, que surgió en un taller con profesores de matemática en ejercicio, sobre creación de problemas.

Estamos convencidas que este número contiene artículos para todos los gustos y proporciona reflexiones sobre educación matemática.

Agradecemos a los autores y revisores, e invitamos a todos a una buena lectura.

EDITORAS

Celina Abar y Sonia Igliori

EDITORIAL

Estimados colegas e amigos*:*

Chegamosaonúmero 55 da Revista UNION. Como semprehá diversas direções de pesquisa e comvários temas de interesse do ensino de matemática em seus diferentes níveis. A qualidade dos artigostem sido mantida pela avaliação rigorosa de nossospareceristas. Para que a produção dignifique a área da EducaçãoMatemática Iberoamericanacontamos semprecom a colaboração de todos autores e revisores.

Nesse número na sessão Firma Invitada temos o artigo do pesquisador Lluís Bonet Juan, que desde o ano 1995 éprofessor de secundaria no IES Mare Nostrum de Alicante e profesor-tutor na UNED de Denia-Benidorm. Em 2017 foi premiado em Alicante como *Premio Joan Ponsoda a la Innovación Educativa*. En 2018 foi um dos dez professores premiados em II Premios EDUCA aos melhores docentes de España. No artigo: **"¿P¿Matemáticas? Si, si … acércate y verás"** o autor defende a necessidade de criar situações próximas ao mundo dos nossos alunos com cenáriosde aprendizagem diferentes que excitam e descobrem a matemática de uma perspectiva que é mais atraente e motivadora e que las TIC em geral permitem o trabalho em sala de aula de uma forma diferente e ser uma fonte para a geração e o conhecimento matemático.

Seis artigos, duas propostas de sala de aula, uma resenha de um livro e a seção de problemas compõem este volume.

"Las percepciones de los profesores de matemáticas en Francia y México", é o primeiro artigo, escrito por Maria del Rocio Juárez Eugenio e María Anabell Aguilar Zaldivar. As autoras analisam as percepções de futuros professores de matemática na França e no México sobre sua educação e que os resultados mostram que as percepções dos professores em formação nos dois países são semelhantes em duas categorias.Diana Patricia Salgado, María Rita Otero e Verónica Parra apresentam um trabalho que enquadra-se dentro de uma investigação mais ampla cujo objetivo geral é ensinar matemática para não matemáticos na universidade, adotando as noções centrais da Teoría Antropológica do Didático (TAD).O artigo tem como título "**A praxeological model of referencerelated to costscalculation: comparisonwith the onesdeveloped in a research and studypath at**

universitylevel”. O tercero artigo de título **“Coordinación de Registros de Representación en el Aprendizaje de la Función Lineal”** é dos autores Marina Soto, Carlos Gabriel Herrera e Nora Elisa Pereyra. Neste artigo se pretende, tendo em conta a teoría de Duval, analisar o nível de coordenação entre os registros de representação semiótica da função linear em alunos que estão em seu terceiro ano do ensino médio. Ángel Alsina, Miquel García e Eduard Torrent são os autores do artigo **“El desarrollo y la evaluación de la competencia matemática desde la escuela y para la escuela”**. Neste trabalho se oferecem orientações e recursos didáticos para avaliar a competência matemática no Ensino Fundamental. Continuando podemos encontrar o artígo de LênioFernandes Levy **“O Indivíduo, a Sociedade, o Conhecimento (Matemático) e a Educação (Matemática)”.** Neste trabalho, abordam-se os papéis desempenhados pelo indivíduo e pela sociedade no que respeita à construção do conhecimento, com ênfase ao conhecimento matemático. Trata-se de uma pesquisa de natureza teórico-bibliográfica. Por último, temos o artigo **“Umestudo da Primeira Forma Quadrática: Umaproposta de ensino com construção dinámica”** dos autores Ana Carla Pimentel Paiva e Francisco Régis Vieira Alves. Neste artigo é abordada uma análise epistemológica de um conceito da teoria matemática das superficies, denominado Primeira Forma Quadrática.

Como propostas de aula Magali Lucrecia Freyre e Ana María Mántica apresentam **“Una nueva mirada a los poliedros regulares: construcciones que generan sorpresas”**.As autoras,neste artigo, apresentam uma análise do que foi feito pelos estudantes do terceiro ano do professorado de matematica na resolução de dois problemas de geometria tridimensional com GeoGebra e Polydron. Martha de las Mercedes Iglesias Inojosa e José Ortiz Buitrago no artigo**“La Demostración en Geometría desde una Perspectiva Didáctica”** têm como proposta uma revisão e análise visando caracterizar, a partir de uma perspectiva didática, o cenário e as experiências de aprendizagem que compõem um curso de resolução de problemas geométricos em ambientes de geometría dinâmica; especificamente o caso de experiências relacionadas à demonstração em Geometria. Neste número temos também a resenha elaborada por Yeni Acosta **“Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)”** do autor Ángel Alsina (Universidad de Girona, España), dirigido a professores, futuros professores, formadores de professores e outros professionais interessados pela Educação Matemática. O problema deste número 55 "**Porcentajes. Reflexiones en un marco de creación de problemas"** é proposto por nosso colaborador habitual, o professor **Uldarico Malaspina Jurado** da Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM, e foi inspirado em uma oficina com professores de Matemática em exercício sobre a criação de problemas. Esse número certamente tem assunto para todos os gostos e possibilita reflexões sobre a educação matemática. Agradecemos aos autores e aos revisores e convidamos a todos para uma boa leitura!

EDITORAS

Celina Abar e Sonia Igliori

ISSN: 1815-0640
Número 55. Abril 2019
Página 08

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

FIRMA INVITADA

Lluís Bonet Juan

Lluís Bonet Juan, nació en Lorcha (Alicante) el 10 de agosto de 1965. En 1988 se licenció en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Valencia. Finalizados los estudios universitarios, una beca del programa europeo COMETT le llevó a Paris (Francia) para trabajar, durante casi un año, en el Institut de Recherches de la Sidérurgie Française. A finales de 1989 regresó a España y comenzó a trabajar como docente y desde el año 1995 ejerce como profesor de secundaria en el IES Mare Nostrum de Alicante y como profesor-tutor en la UNED de Denia-Benidorm.

En 2017 fue galardonado en Alicante con el Premio Joan Ponsoda a la Innovación Educativa. En 2018 fue uno de los diez profesores premiados en los II Premios EDUCA a los mejores docentes en España. Es miembro de la Sociedad de Matemáticas de la Comunidad Valencina y forma parte del grupo de calculadoras CASIO para la investigación didáctica, creación de materiales e implementación de estas herramientas en el aula.

Es autor y coautor de diversas publicaciones como “Mathcad auxiliar matemático con ejercicios prácticos”, o “Actividades para el aula con calculadora científica”.

En su Canal de Youtube INTEGRANT MATEMÀTIQUES dispone de una colección de vídeo abiertos de matemáticas, con propuestas didácticas, proyectos vídeoMAT y vídeo tutoriales para el uso y aprendizaje de la calculadora desde la resolución de problemas y su aplicación en la Pruebas de Acceso a la Universidad.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 55. Abril 2019
Páginas 09-30

¿Matemáticas? Si, si … acércate y verás
Maths? Yes, maths… come closer and you will see

Lluís Bonet Juan

Resumen

La imagen general de las matemáticas es que son simplemente cálculos y persiste la desconexión con las situaciones que nos proporciona la vida cotidiana que por otra parte son las que verdaderamente dan significado y enriquecen nuestra materia. De ahí la necesidad de crear situaciones cercanas al mundo de nuestro alumnado con escenarios de aprendizaje diferentes con los que emocionar y descubrir las matemáticas desde una perspectiva que les resulte más atractiva y motivadora. Además, los recursos que nos aportan las calculadoras, GeoGebra y las TIC en general permiten trabajar en el aula de una manera diferente y ser una fuente para generar y profundizar en el conocimiento matemático.
Palabras clave: Innovación, Motivación, Resolución de problemas

Abstract

The general image of mathematics is that it consists only in calculation; and the disconnection with daily life situations, which, on the other hand, are what really give meaning and enrich our subject, remains. Hence the need to create situations that are close to the real world of our students with different learning situations to stimulate them and make them discover maths from a more appealing and motivating perspective. Furthermore, the resources provided by calculators, GeoGebra and I.T. in general, allow students to work in the classroom in a different way, and are also a source to generate and go in depth in the knowledge of mathematics.
Keywords: Innovation, Motivation, Problem solving

Resumo

A imagem geral da matemática é que se trata simplesmente de cálculos e persiste a desconexão com as situações fornecidas pela vida cotidiana que, por outro lado, são aquelas que realmente dão sentido e enriquecem essa matéria. Daí a necessidade de criar situações acerca do mundo dos nossos alunos com diferentes cenários de aprendizagem que excitam e descobrem a matemática de uma perspectiva que é mais atraente e motivadora.
Além disso, os recursos que nos fornecem calculadoras, GeoGebra e TIC em geral permitem o trabalho em sala de aula de uma forma diferente e ser uma fonte para a gerar e aprofundar o conhecimento matemático.
Palavras chave: Inovação, Motivação, Resolução de Problemas

1. Introducción

Son las 7:45 h de la mañana de un día cualquiera en el que acudes a tu centro de trabajo, cuando María José, la conserje, me pide que me acerque al tablón de anuncios de la entrada. Hay una nota: “Se necesita profesor para dar clases de matemáticas de Lluís Bonet”. Nunca había pensado que tuviese esta exclusividad, aunque no voy a negar que algún elemento diferenciador existe en mis aulas. Así que, he pensado centrar este espacio en tres elementos, emociones, cercanía y tecnología (desde la humildad y sin pretender ser modelo de nada) porque…, hay un puesto de

trabajo vacante, alguien puede estar interesado y tal vez todo esto que voy a contar pueda servirle de ayuda o inspiración.
Últimamente he escuchado con bastante frecuencia frases que mencionan las palabras educar a través de las emociones. Y sinceramente he de decir que no deja de sorprenderme porque siempre había pensado que esto era algo "de serie" intrínseco a nuestra labor como docentes. Entiendo que nuestro trabajo, ejercido con verdadera vocación está repleto de la ilusión con la que sorprender cada día a nuestro alumnado.
¿Cuántas veces habéis escuchado a personas presumir en debates y tertulias de los medios del analfabetismo matemático o que directamente detestan las matemáticas? ¿Y frases como… me gustan las mates pero no los problemas? La imagen que la gente tiene en general de las matemáticas es que son cálculo, simplemente cálculos, pero pensar en un problema, investigarlo y debatirlo eso ya son palabras mayores, porque existe una gran desconexión entre las matemáticas y las situaciones que nos proporciona la vida cotidiana que son las que verdaderamente dan un significado y enriquecen nuestra materia, de ahí la necesidad que esas situaciones sean cercanas al mundo de nuestro alumnado.
Y para finalizar la terna quisiera destacar el papel que pueden desempeñar los recursos tecnológicos que tenemos a hoy en día nuestro alcance: calculadoras, Geogebra, medios audiovisuales, etc. que nos van a permitir trabajar en el aula de una manera diferente y donde una vez aprendidas las herramientas que nos proporcionan las matemáticas, poder profundizar en la comprensión de los problemas, investigar, modelizar y ser críticos con los resultados obtenidos.
Así pues, cerrar un círculo donde emocionar y sorprender con las matemáticas pueda ser también hacerlas más dinámicas, creativas y cercanas a través de la resolución de situaciones cotidianas en las que el uso y aprendizaje de la tecnología (no olvidemos que nuestro alumnado siente generalmente pasión por ella) nos permita llegar más lejos y conseguir otros objetivos como los citados anteriormente y a los que tantas veces no damos la importancia que merecen.

2. La conexión matemática y vida cotidiana desde la etapa infantil

Desde los colegios de la primaria se podrían trabajar las matemáticas no solamente con paquetes de ejercicios y actividades, generalmente de cálculo, sino además establecer esa perspectiva de resolución de situaciones que puedan tener relación con la vida cotidiana. Cuanto antes exista esta conexión antes haremos desaparecer de nuestro alumnado esas angustias y temores por los "problemas de enunciado".
Decidido a ayudar a romper estereotipos, trabajo desde hace un tiempo con mis alumnos en la creación vídeos cortos. ¿Y vosotros … qué pensáis de esto? es como finalizan cada una de las situaciones que se presentan en estas "píldoras matemáticas". En ellas, se plantea una situación sacada de la vida cotidiana, con datos reales, conocida y cercana al alumnado. Un pequeño problema que pretendo sea accesible a una amplia mayoría y donde la pregunta y el hecho de no disponer de la respuesta lanza un desafío.
¡Qué lio con las pizzas! es un ejemplo que ha funcionado muy bien en el último curso de la primaria y en el primer ciclo de la secundaria, donde se combinan operaciones y porcentajes, economía doméstica, comparación de resultados y toma de decisiones,

alguna muy sorprendente en las experiencias de aula llevadas a cabo, como podrán comprobar.

Es el cumpleaños de Marc y quiere comprar 6 pizzas para invitar a sus amigos en su casa.

Ha visto la promoción del *"-70 % en la segunda unidad"* en el Hipermercado. Sus padres le han dado 20 €. El precio de las pizzas es 5,10 € cada una y piensa que va a tener dinero suficiente.

De camino se encuentra con Alex y éste le comenta que ha visto la promoción "*3x2*" en el supermercado del barrio y que le van a salir mejor de precio.

¿Qué piensas de esto?

En el debate se enfadan y finalmente Álex no irá al cumpleaños que ha preparado Marc, por lo que sólo deberá comprar 5 pizzas. Ahora Marc tiene dudas sobre cuál puede ser la compra más beneficiosa.

Y tú … ¿qué piensas ahora?

Ver vídeo: **¡Qué lio con las pizzas!**

Canal Youtube INTEGRANT MATEMATIQUES

https://youtu.be/0bUlgRB1hT4

Con esta actividad el alumnado resuelve un problema real realizando cálculos sencillos, con números decimales aprovechando las diferentes opciones que proporciona la calculadora, porcentajes, aproximaciones, etc. Una forma de resolver el problema puede ser la siguiente:

- **COMPRA DE LAS 6 PIZZAS CON LA OFERTA 2ª UNIDAD – 70%**

					
1ª PIZZA	**2ª PIZZA -70%**	**3ª PIZZA**	**4ª PIZZA -70%**	**5ª PIZZA**	**6ª PIZZA -70%**
5.10 €	**5.10·0.3 = 1.53€**	**5.10 €**	**5.10·0.3 = 1.53€**	**5.10 €**	**5.10·0.3 = 1.53€**

```
5.10+30%×5.10
                 6.63
```

```
Ans×3
                 19.89
```

- **COMPRA DE LAS 6 PIZZAS CON LA OFERTA 3x2**

					
1ª PIZZA	**2ª PIZZA**	**3ª PIZZA**	**4ª PIZZA**	**5ª PIZZA**	**6ª PIZZA**
5.10 €	**5.10 €**	**0 €**	**5.10 €**	**5.10 €**	**0 €**

```
5.10×4
                 20.4
```

TABLA RESUMEN	
6 PIZZAS CON LA OFERTA 2ª UNIDAD – 70%	**6 PIZZAS CON LA OFERTA 3x2**
19.89 €	**20.40 €**

La mejor opción pasa por comprar las seis pizzas en el Hipermercado con la oferta de la segunda unidad al -70%.

Se analizan a continuación las posibilidades de comprar 5 pizzas.

- **COMPRA DE LAS 5 PIZZAS CON LA OFERTA 2ª UNIDAD – 70%**

				
1ª PIZZA	**2ª PIZZA -70%**	**3ª PIZZA**	**4ª PIZZA -70%**	**5ª PIZZA**

5.10 €	**5.10 · 0.3 = 1.53€**	**5.10 €**	**5.10 · 0.3 = 1.53€**	**5.10 €**

```
5.10+30%×5.10
                6.63
```

```
Ans×2+5.10
               18.36
```

- **COMPRA DE LAS 5 PIZZAS CON LA OFERTA 3x2**

				
1ª PIZZA	**2ª PIZZA**	**3ª PIZZA**	**4ª PIZZA**	**5ª PIZZA**
5.10 €	**5.10 €**	**0 €**	**5.10 €**	**5.10 €**

```
5.10×4
                20.4
```

En principio la compra con la oferta de la segunda unidad al -70% parece la más recomendable pero el alumnado me sorprendió con la compra combinada que al final resulta ser la más interesante.

- **COMPRA DE LAS 5 PIZZAS COMBINANDO LAS DOS OFERTAS**

				
OFERTA 3x2			**OFERTA 2ª UNIDAD -70%**	
1ª PIZZA	**2ª PIZZA**	**3ª PIZZA**	**4ª PIZZA**	**5ª PIZZA -70%**
5.10 €	**5.10 €**	**0 €**	**5.10 €**	**5.10 · 0.3 = 1.53€**

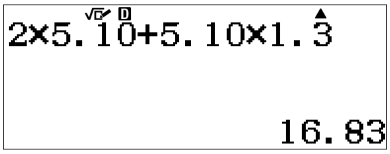


TABLA RESUMEN		
5 PIZZAS CON LA OFERTA 2ª UNIDAD – 70%	5 PIZZAS CON LA OFERTA 3x2	5 PIZZAS CON LAS OFERTAS COMBINADAS
18.36 €	20.40 €	16.83 €

En la experiencia de aula con el alumnado de 6º de primaria se facilitaron unas plantillas similares a las anteriores, pero sin las separaciones que se observan para que no pudiesen dirigir demasiado la resolución.

Organizados en grupos de cuatro alumnos/as en el desarrollo de la actividad, tanto en primaria como en secundaria, el trabajo supuso fomentar la capacidad para interpretar, estimar, comparar, incluso mantener una actitud crítica con los resultados obtenidos, sobre todo en la segunda parte de esta situación, sentando poco a poco las bases de unas matemáticas que son también para pensar.

3. Promover la investigación en la secundaria porque… los números hablan

En ocasiones con noticias o sucesos que pueden parecer irrelevantes se pueden establecer conexiones que permitan dar un enfoque matemático que, además, prepare a nuestro alumnado y a sus familias en aspectos como el consumo y la economía, como he resaltado con el anterior ejemplo, pero también en otros como pueden ser nutrición y salud o por qué no, con gestos y prácticas beneficiosas para el medio ambiente.
¿Podrías ducharte con un cubo de agua? es experimento que he llevado a cabo en mi aula de 2º ESO con la colaboración de sus familias y que partió de una noticia que rápidamente se hizo viral en todos los medios de comunicación en España.

EL MUNDO

Del Nido confía en ser el próximo indultado por el Gobierno

José Tomás reivindica el toreo en París en plena ola antitaurina

El juez Castro a sólo un paso de volver a imputar a la Infanta por el 'caso Aizoon'

El alcalde rebaja a 11 litros el agua que necesita para una ducha tras medirlo con su mujer

De la Torre relata que hizo el experimento el domingo con la ayuda de un barreño de esa capacidad y que está dispuesto a repetirlo ante notario

La pregunta trampa: '¿Quiere que Cataluña sea Estado soberano?'

Mas pacta con Unió e ICV evitar la palabra 'independencia' y Junqueras amenaza con «una demostración de fuerza»

EL PAÍS

EL PERIÓDICO GLOBAL EN ESPAÑOL

AOL acelera la carrera por el liderazgo digital

Un lamento del cine español a cuatro voces

ECONOMÍA: LA NUEVA TARIFA SUPONE EL COBRO POR CONSUMO

Las redes sociales "salpican a De la Torre tras afirmar que se ducha con sólo once litros de agua

Sus explicaciones acerca de cómo cronometró su ducha generan montajes fotográficos

I ♥ ALCALDE DE MÁLAGA

Egipto acomete su transición mientras recobra la normalidad

Zapatero permite más deuda al Gobierno catalán de Artur Mas

El aire sucio toma Madrid y Barcelona

Las ciudades adoptan tímidas medidas pese a las altas tasas de contaminación

Soluciones salvaescaleras 900 460 414

Hacienda pone este año bajo la lupa a los falsos autónomos

Tras los problemas de escasez de agua en la ciudad de Málaga y el anuncio del incremento de las tarifas, el Alcalde De la Torre exponía a la ciudadanía diversas propuestas para el ahorro de agua en una vivienda. Entre estas, en las que estaba usar la ducha en lugar del baño, explicaba que una persona podía ducharse con 11 litros, poco más de un cubo de agua y que él mismo había constatado este dato en su casa.
No sabemos si podemos ducharnos con los aproximadamente 11 litros que caben dentro de un cubo de agua. Pero nuestro experimento se basa en utilizar un cubo en el plato de ducha donde recoger el agua que se desperdicia en tanto llega caliente y aquella que pueda caer dentro del cubo mientras la persona se ducha. Esta agua podrá ser reutilizada en el inodoro, por lo que le estaremos dando una segunda oportunidad, con el consiguiente ahorro económico en la factura doméstica y sobre todo con la contribución al medio ambiente.
Esta actividad permite conocer cuál es el consumo medio de agua utilizada en la ducha a nivel individual y en cada familia efectuando unas sencillas medidas del caudal de la vivienda y del tiempo empleado en la ducha, con las que se rellena una plantilla que se preparó siguiendo unas normas previamente establecidas.
Una vez realizados los cálculos se procede a rehacer la factura de cada vivienda y se redactan junto con los resultados, las conclusiones a las cuales se ha llegado, compromisos, etc.

> Toda la prensa acaba de hacerse eco de las declaraciones del alcalde de Málaga en las que afirma que puede ducharse con 11 litros, poco más de un cubo de agua. Julia no está muy segura de esto, pero se le ha ocurrido que podría poner un cubo de agua en la ducha e intentar recuperar una parte del agua utilizada y aprovecharla para el inodoro.

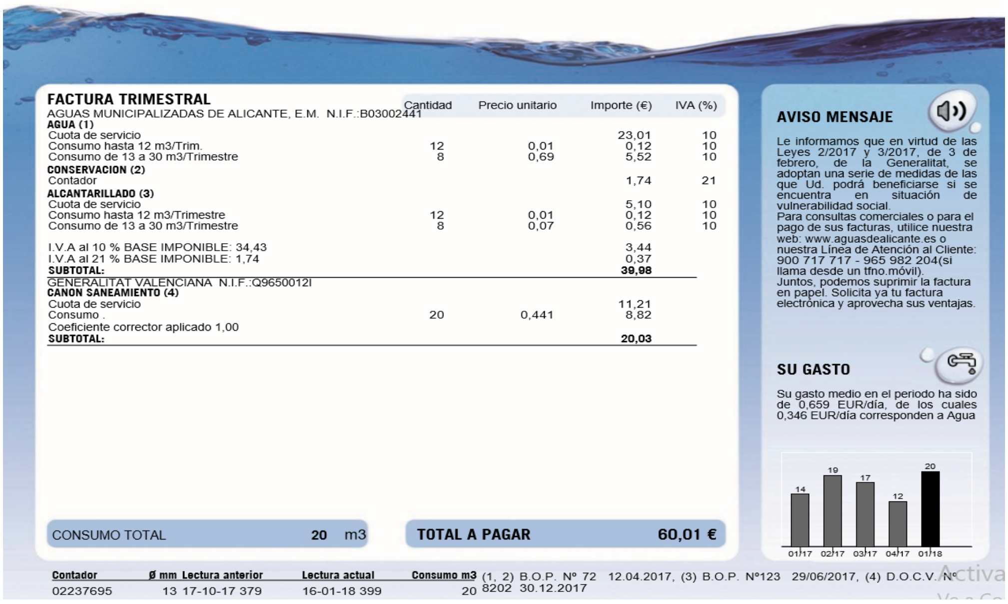
Junto con su amiga Daniela van a poner en marcha un experimento para *dar una segunda oportunidad al agua* de la ducha y estudiar la repercusión económica que podría representar en su factura trimestral. Van a poner un cubo en la ducha que recoja el agua que se desperdicia mientras llega el agua caliente o incluso la que se pueda recoger mientras se está duchando cada miembro de la familia.

Tras llevar a cabo el experimento han recogido la siguiente información:

- Han calculado el caudal de su casa midiendo en una jarra de cocina con medidas que en 15 segundos recoge 2,50 litros de agua.

- En la familia de Julia son cuatro y han calculado que el tiempo medio de ducha son 221 segundos y que con el cubo recuperan una media de 14,30 litros de agua en cada ducha.

a) ¿Cuántos litros de agua utilizan de media en cada ducha?
b) ¿Qué porcentaje de agua recuperan con este experimento?
c) Observa la factura trimestral del agua. Si estimamos seis duchas semanales por los cuatro miembros de la familia, ¿puedes recalcular dicha factura para ver cuál sería el ahorro, realizando esta sencilla acción cada día?



FACTURA TRIMESTRAL
AGUAS MUNICIPALIZADAS DE ALICANTE, E.M. N.I.F.:B03002441

	Cantidad	Precio unitario	Importe (€)	IVA (%)
AGUA (1)				
Cuota de servicio			23,01	10
Consumo hasta 12 m3/Trim.	12	0,01	0,12	10
Consumo de 13 a 30 m3/Trimestre	8	0,69	5,52	10
CONSERVACION (2)				
Contador			1,74	21
ALCANTARILLADO (3)				
Cuota de servicio			5,10	10
Consumo hasta 12 m3/Trimestre	12	0,01	0,12	10
Consumo de 13 a 30 m3/Trimestre	8	0,07	0,56	10
I.V.A al 10 % BASE IMPONIBLE: 34,43			3,44	
I.V.A al 21 % BASE IMPONIBLE: 1,74			0,37	
SUBTOTAL:			**39,98**	
GENERALITAT VALENCIANA N.I.F.:Q9650012I				
CANON SANEAMIENTO (4)				
Cuota de servicio			11,21	
Consumo .	20	0,441	8,82	
Coeficiente corrector aplicado 1,00				
SUBTOTAL:			**20,03**	

CONSUMO TOTAL 20 m3

TOTAL A PAGAR 60,01 €

Contador	Ø mm	Lectura anterior	Lectura actual	Consumo m3
02237695	13	17-10-17 379	16-01-18 399	20

(1, 2) B.O.P. Nº 72 12.04.2017, (3) B.O.P. Nº123 29/06/2017, (4) D.O.C.V. Nº 8202 30.12.2017

AVISO MENSAJE

Le informamos que en virtud de las Leyes 2/2017 y 3/2017, de 3 de febrero, de la Generalitat, se adoptan una serie de medidas de las que Ud. podrá beneficiarse si se encuentra en situación de vulnerabilidad social.
Para consultas comerciales o para el pago de sus facturas, utilice nuestra web: www.aguasdealicante.es o nuestra Línea de Atención al Cliente: 900 717 717 - 965 982 204(si llama desde un tfno.móvil).
Juntos, podemos suprimir la factura en papel. Solicita ya tu factura electrónica y aprovecha sus ventajas.

SU GASTO

Su gasto medio en el periodo ha sido de 0,659 EUR/día, de los cuales 0,346 EUR/día corresponden a Agua

Ver vídeo: **¿Podrías ducharte con un cubo de agua?**

Canal Youtube INTEGRANT MATEMATIQUES

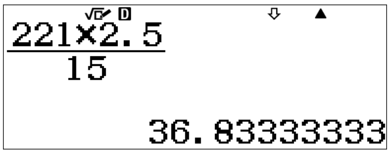
https://youtu.be/r8he3lAf_eQ

En esta actividad se trabaja con proporciones y porcentajes. Además, se trata de un problema real donde el alumnado toma sus datos en casa y aporta su propia factura sobre la cual se van a trasladar los resultados obtenidos en su experimento.
Una forma de resolver el problema puede ser la siguiente:

a) Se utiliza el caudal medido para calcular los litros de agua que se gastan en la ducha:

CAUDAL	15 seg.	2,5 l.
DUCHA	221 seg.	x

Se plantea la proporción directa:



$$\frac{15}{221} = \frac{2{,}5}{x} \rightarrow x = \frac{221 \cdot 2{,}5}{15} = 36{,}83\ l.$$

Normalmente la familia utiliza una media de 36,83 l. de agua en cada ducha.

Si restamos los 14,30 l. que recuperan con el cubo de agua, esto supone un gasto efectivo de**:**

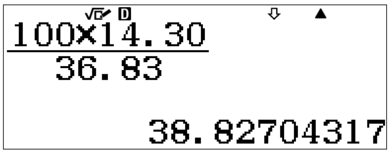
$$36{,}83\ l. - 14{,}30\ l. = 22{,}53\ l.$$

El gasto en cada ducha, una vez recuperada el agua con el cubo es de 22,53 l.

b) Para calcular el % de agua que se recupera con el experimento del cubo de agua, se plantea de nuevo una proporción una vez se conocen los litros de agua que se gastan en la ducha:

AGUA	36,83 l.	14,30 l.
%	100 %	x

Se plantea la proporción directa:



$$\frac{36{,}83}{100} = \frac{14{,}30}{x} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 14{,}30}{36{,}83} = 38{,}83\ \%$$

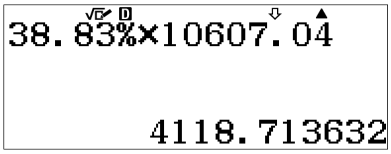
Con el experimento del cubo en la ducha, se recupera el 38,83 % del agua utilizada.

c) Se estudia ahora el agua utilizada en las duchas por trimestre y por toda la familia, así como la que se recupera para poderle dar una segunda oportunidad y ser utilizada en el inodoro.

4 personas · 6 duchas semanales · 12 semanas al trimestre = 288 duchas/trim.

288 · 36,83 = 10607,04 l. de agua

Se recuperan aproximadamente el 38,83 % →



De esta manera se han recuperado 4118,71 l. ≈ 4,1 m^3

d) Se rehace la factura ahora con 4,1 m^3 menos que son los que se han recuperado con el experimento.

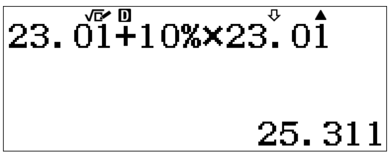
El consumo en la vivienda ha sido de 20 m^3 por lo que ahora se tiene:

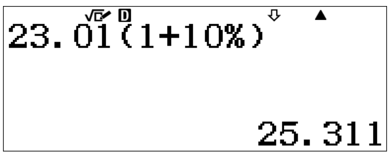
$$20\ m^3 - 4{,}1\ m^3 = 15{,}9\ m^3$$

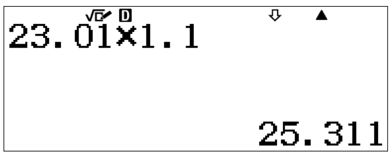
En las facturas hemos observado que se cobra por metro cúbico entero así que se nos cobraran 16 m^3.

Los cálculos son interesantes ya que hay que aplicar IVA 10 % o IVA 21 %

En el cálculo de los porcentajes donde hay un impuesto de IVA se han utilizado diferentes técnicas para obtener el resultado final directamente:







FACTURA TRIMESTRAL

	Cantidad	Precio Unitario	IVA %	Importe (€)
AGUAS MUNICIPALIZADAS ALICANTE				
AGUA (1)				
Cuota de servicio	1	23,01	10%	25,31
Consumo hasta 12 m3/Trim.	12	0,01	10%	0,13
Consumo de 13 a 30 m3/Trim.	4	0,69	10%	3,04
CONSERVACIÓN (2)				
Contador	1	1,74	21%	2,11
ALCANTARILLADO (3)				
Cuota de servicio	1	5,1	10%	5,61
Consumo hasta 12 m3/Trim	12	0,01	10%	0,13
Consumo de 13 a 30 m3/Trim	4	0,07	10%	0,31
SUBTOTAL:				**36,63**
GENERALITAT VALENCIANA				
CANON SANEAMIENTO (4)				
Cuota de servicio	1	11,21		11,21
Consumo	16	0,441		7,06
SUBTOTAL:				**18,27**
CONSUMO TOTAL:	**16 m3**	**TOTAL A PAGAR:**		**54,90**

La factura trimestral era de 60,01 € por lo que se ha conseguido un ahorro trimestral de:

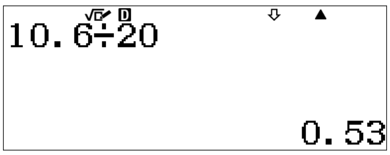
$$60{,}01\ € - 54{,}90\ € = 5{,}11\ €$$

Se ha conseguido un ahorro trimestral de 5,11 € en la vivienda de Julia.

CONCLUSIONES IMPORTANTES

- El agua utilizada en la ducha por esta familia son 10607,04 l. que suponen casi 11 m3 de agua de los 20 m3 trimestrales de consumo en la casa.

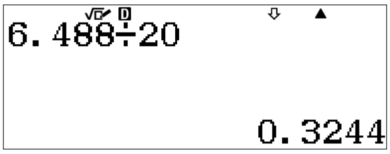
  Este consumo representa el 53 % del total, es decir, algo más de la mitad del consumo de agua de la vivienda se utiliza en la ducha.

- La realización de este sencillo experimento en una casa de estas características puede suponer recuperar 4118,71 l. es decir, aproximadamente 4,1 m^3 con lo que se estará contribuyendo, junto con otras posibles actuaciones, a un uso más racional del agua y por lo tanto a un mayor respeto al medio ambiente.

Además: $10607{,}04 - 4118{,}71 = 6488{,}33\ l. \approx 6{,}5\ m^3$

Ahora el consumo de agua de la ducha representa el 32,44 % es decir, pasa a ser aproximadamente 1/3 del consumo trimestral de la vivienda.



- Se consigue un ahorro económico de 5,11 € trimestrales en la vivienda.

La realización de un trabajo de investigación de estas características, basado en datos reales y que el propio alumnado ha obtenido con la colaboración de su familia, proporciona unos resultados que aportan una información objetiva y veraz que pueden ser importantes para la consecución de cambios en hábitos más acordes y respetuosos con el medio ambiente. Y desde un punto de vista más académico dan valor a las matemáticas que son las que permiten llegar a los resultados numéricos que dan visibilidad clara de lo que está ocurriendo en la realidad y que en muchas ocasiones no se es capaz de pensar.

4. ¿Alumnos/as digitales y profesorado no tanto?

En este momento de la era digital en el que la tecnología forma parte de nuestro día a día y donde el mundo de la ciencia y la informática avanza a pasos agigantados, las matemáticas como base importante de éste, deberían estar en la brecha. Además, nuestro currículum establece el uso y aprendizaje de la tecnología en nuestras aulas, profesorado y alumnado.

¿Está preparado nuestro alumnado para estos cambios digitales y tecnológicos y el profesorado no tanto? Responderé a esta pregunta con un tal vez con importantes matices que entiendo cabe tener muy en cuenta.

Nuestro alumnos y alumnas empiezan a utilizar recursos como las calculadoras o GeoGebra de una manera muy rápida, pero no lo son tanto en el grado de madurez y reflexión matemático que se requiere cuando se hace uso de estas herramientas. Y ahí es donde entiendo debe estar nuestro rol como docentes, y aprovechar todos estos recursos para generar y profundizar en el conocimiento matemático.

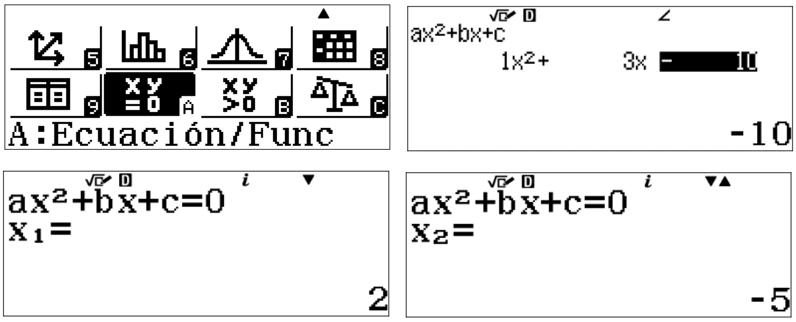
Pondré un ejemplo de una experiencia en mi aula de Bachillerato con la realización de un simple ejercicio de cálculo de un límite:

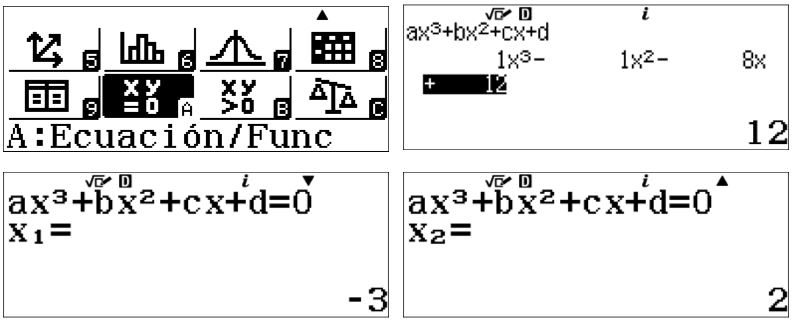
Calcula el límite justificando paso a paso:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12} = \frac{2^2+3\cdot 2-10}{2^3-2^2-8\cdot 2+12} = \frac{0}{0}\ indeterminación$$

Mis alumnos utilizan la calculadora CASIO Classwiz 991 y esto es lo que ocurrió con alguno de ellos:





$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+5)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+5)}{(x+3)} = \frac{2+5}{2+3} = \frac{7}{5}$$

Pero esto provoca el debate por el grado y la factorización del polinomio del denominador:

- ¿Falta una raíz?
- ¡Ah es porque la que falta es compleja!
- ¡No puede ser compleja!
- Una de ellas será doble. Pero... ¿cuál de las dos?

Alguno/a nos dirá que analizando el producto entre los términos independientes de los factores (o de las raíces) se debe obtener el termino independiente del polinomio de partida por lo que la factorización debería quedar:

$$(x+\mathbf{3})(x-\mathbf{2})(x-\square) = (x+3)(x-2)^2 = x^3-x^2-8x+\mathbf{12}$$

Así pues:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+5)(x-2)}{(x+3)(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+5)}{(x+3)(x-2)}$$
$$= \frac{7}{0}\ ind\ tipo\ \infty$$

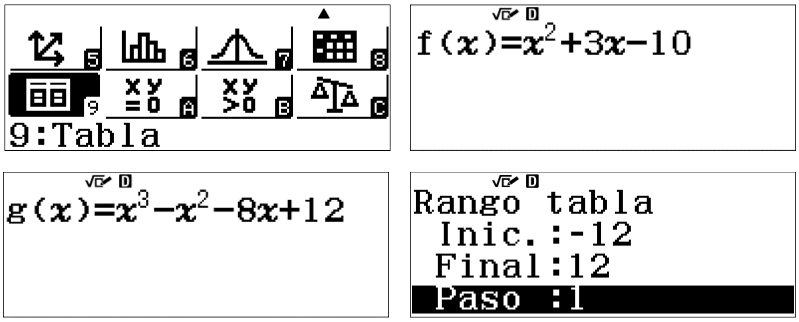
Se analizan los límites laterales en x = 2

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+5)}{(x+3)(x-2)}=\frac{7}{0^-}=-\infty$$

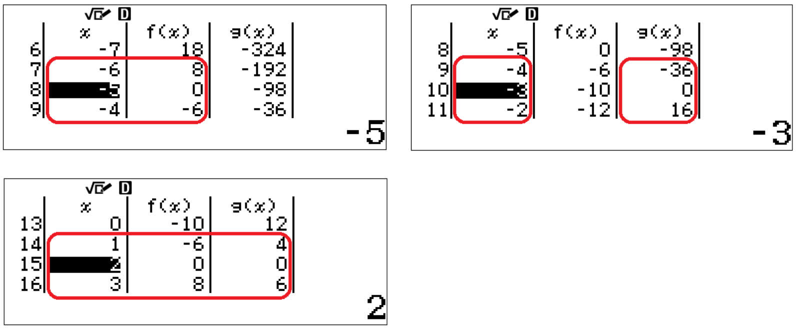
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{(x+5)}{(x+3)(x-2)}=\frac{7}{0^+}=+\infty$$

El $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12}$ no existe, y se tiene una asíntota vertical en x = 2

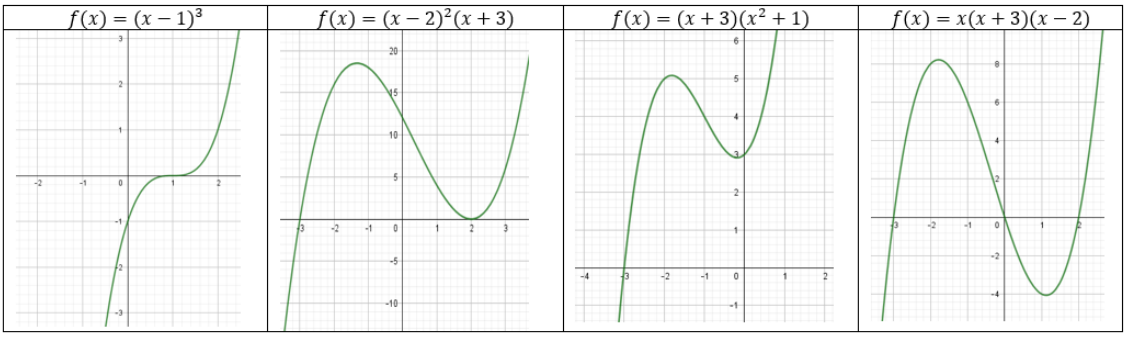
El uso de las tablas de valores también aportó detalles interesantes de aplicación de los Teoremas de Ruffini, del Resto y sus corolarios a la hora de escoger los rangos de las tablas.



Con la búsqueda de los ceros y el análisis del signo de las funciones a su derecha e izquierda, se estaba trabajando el Teorema de Bolzano.



La actividad finalizó con la construcción y análisis de diferentes gráficas de las funciones polinómicas de tercer grado.



Los detractores del uso de estas herramientas lanzan frases como que las calculadoras atrofian la mente, acaban liando al alumnado o hacen difícil y tedioso lo sencillo, y tendrán parte de razón cuando como docentes no proporcionemos a nuestros alumnos la formación necesaria para la gestión de estas herramientas con unos objetivos bien definidos que generen conocimiento matemático. Por el contrario, de ser así se podrá avanzar hacia un modelo en el que prime más el trabajo con datos reales, la investigación, la creación de simulaciones etc.

Las administraciones educativas deben facilitarme los medios y la formación necesaria y yo como docente debo tener esa actitud de no dejar nunca de aprender y poder de esta manera hacer efectiva la implantación de la tecnología en el aula que ayude a conseguir una enseñanza más dinámica de nuestra materia.

5. Descubrir contextos que dan sentido y enriquecen las matemáticas

Y en estos niveles de bachillerato nos seguimos encontrando con preguntas como las que se hace mi alumna Llúcia … pero ¿y todo esto para qué me va a servir? ¿Esto se utiliza para algo? Posibilitar al alumnado descubrir contextos que den sentido a los contenidos y que enriquezcan las matemáticas que están aprendiendo no resulta ser en estos momentos una tarea sencilla, sobre todo en 2º de bachillerato, que se ha convertido en un curso preparador de actividades modelo que aparecen en la Prueba de Acceso a la Universidad.

Bajo mi punto de vista, debería existir un serio debate sobre la conexión entre la secundaria, bachillerato y universidad, como se está haciendo desde un tiempo entre la primaria y la secundaria con los proyectos de transición entre colegio e instituto. No se promueve una discusión sobre contenidos, número de horas, modelo de enseñanza, etc. y la preocupación desde la Universidad parece encorsetada en si el alumnado puede hacer uso, o no, de determinadas calculadoras científicas, gráficas o CAS y su prohibición en las Pruebas de Acceso como responsables de la baja formación matemática con la que llega el alumnado a sus aulas. Curiosa preocupación esta, cuando solamente un bajísimo porcentaje de alumnado de bachillerato trabaja con calculadoras gráficas o CAS u otras herramientas, puesto que al estar prohibidas en las Pruebas de Acceso tampoco el profesorado se preocupa en enseñar haciendo uso de ellas.

El incendio en CAMPOFRÍO, basado en una noticia real, propone un escenario de trabajo que da respuesta a las preguntas de nuestro alumnado y donde el uso de Geogebra y la calculadora se hace imprescindible para facilitar los cálculos.

A las 6.40 de la mañana se ha originado un incendio que está arrasado la planta de industria cárnica de Campofrío en Burgos, sin que se hayan producido heridos. Las llamas están destrozando la totalidad de la fábrica, ubicada en el Polígono de Villafría de la capital burgalesa y en la que trabaja un millar de personas. El fuego, que ha obligado a evacuar a 400 vecinos por la nube de humo tóxico, permanece activo y la principal hipótesis apunta a un cortocircuito.

Los bomberos desplazados al lugar nos explican que el incendio es muy virulento debido a la presencia de material inflamable en la planta de la industria cárnica y tras controlar las llamas y realizar una medición ambiental van a realizar los cálculos necesarios para determinar la superficie de los terrenos que ocupa esta empresa y poder realizar una evaluación de los daños.

El Ejército ha aportado equipos electrógenos para que sea posible seguir trabajando durante toda la jornada y se mantiene activado el Plan de Emergencia Municipal realizándose mediciones ambientales periódicas para detectar cualquier riesgo de toxicidad.

¿Podéis localizar la parcela que ocupa la empresa y ayudar a los bomberos a calcular la superficie para que puedan emitir el correspondiente informe de daños?

Ver vídeo: ¿Se puede calcular la superficie de una parcela irregular?

Canal Youtube INTEGRANT MATEMATIQUES

https://youtu.be/4_mxEOUQT1Y

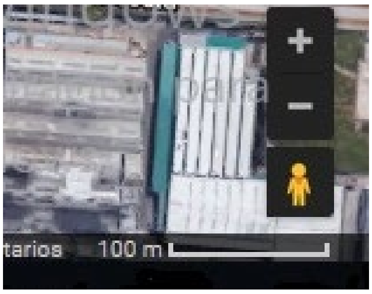
En esta actividad que he desarrollado en 2º de bachillerato se trabaja con vectores, matrices y determinantes. Además, se trata de un problema real donde el alumnado deberá realizar sus búsquedas e investigaciones sobre la noticia, localización de la parcela con herramientas como Google Maps o Google Earth, llevar sus imágenes a

GeoGebra para posteriormente realizar los cálculos de sus determinantes con CASIO Classwiz. Finalmente podrá acudir a la sede del catastro en www.sedecatastro.gob.es y contrastar sus resultados.

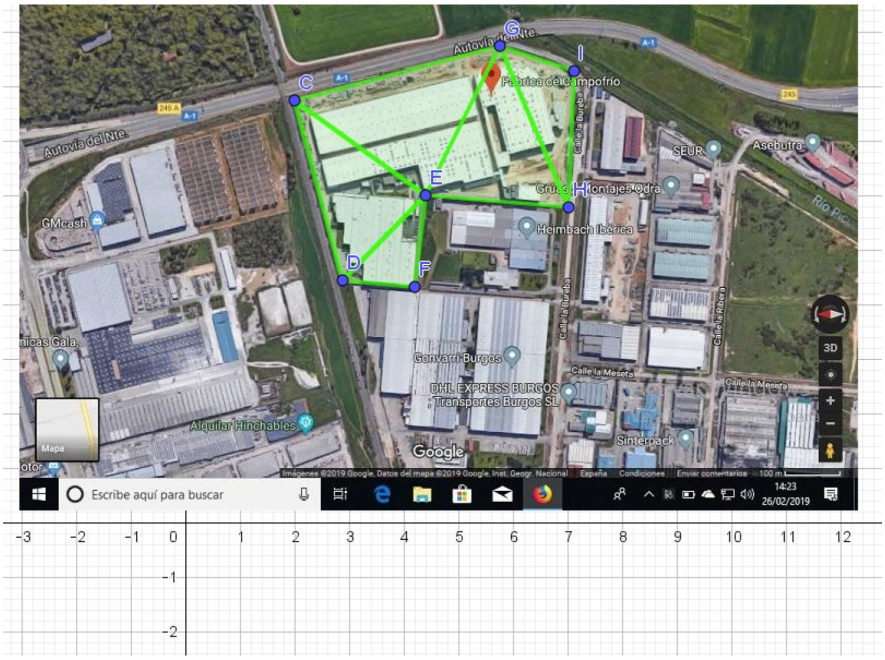
La actividad es fácilmente exportable ya que se pueden crear contextos similares para acceder a datos de superficies de terrenos agrícolas y utilizar el Visor SigPac del Ministerio de Agricultura desde http://sigpac.mapa.es/ con el que contrastar resultados.
Una forma de resolver el problema puede ser la siguiente:

a) Se localiza la parcela en Google Maps.

Es importante que la imagen capturada disponga de la escala correspondiente.

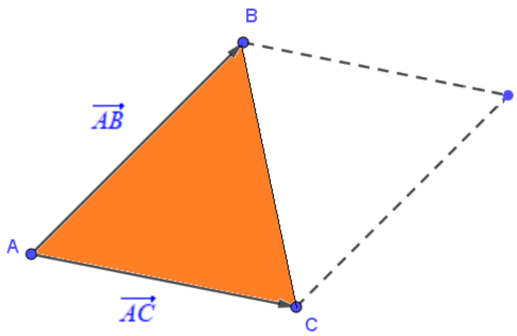


b) Se lleva la imagen a GeoGebra y se ajustan los ejes a la escala de la imagen capturada.



c) El procedimiento es como sigue. Se triangulariza la parcela que se desea conocer la superficie y se puede calcular el área de cada triangulo aplicando el razonamiento que se expone a continuación.

En $\mathbb{R}^3$ se puede calcular el área del triángulo de vértices A, B y C a través del módulo del producto vectorial de los vectores



Sea el triángulo de vértices $A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2) \quad C = (x_3, y_3)$

Se consideran los puntos en $\mathbb{R}^3$ $A = (x_1, y_1, 0) \quad B = (x_2, y_2, 0) \quad C = (x_3, y_3, 0)$

$$\acute{A}rea\ triangulo = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} \right\| =$$

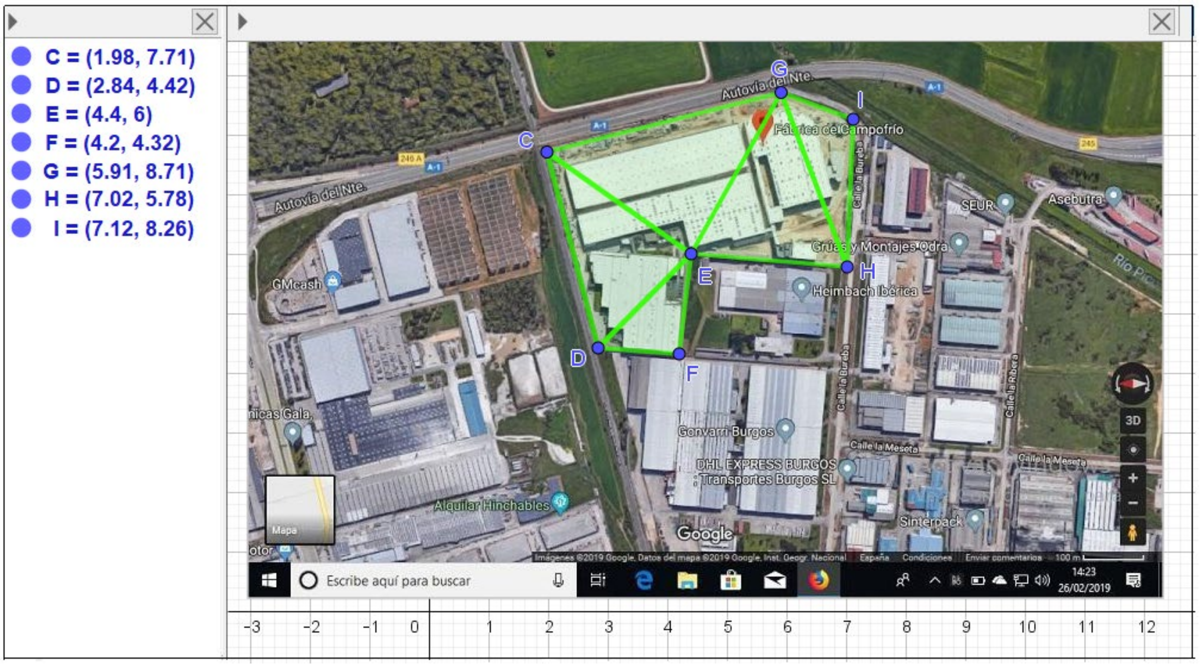
$$=\frac{1}{2}\cdot|(0,0,(x_2-x_1)\cdot(y_3-y_1)-(x_3-x_1)\cdot(y_2-y_1))|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot|[(x_2-x_1)\cdot(y_3-y_1)-(x_3-x_1)\cdot(y_2-y_1)]|=$$

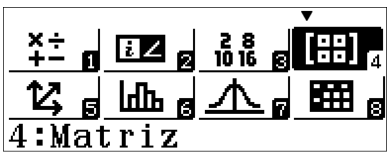
$$=\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|$$

OBSERVA: $\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}$

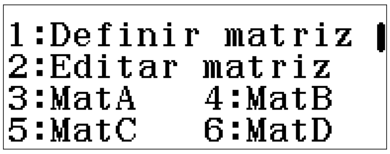
d) Se calcula el área de cada uno de los triángulos que cubren la superficie utilizando los determinantes según se ha explicado anteriormente.

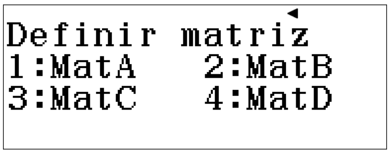


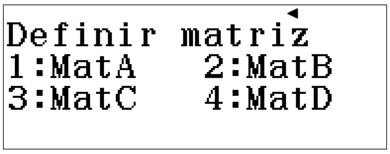
Para ello se va al **Menú 4: Matriz**:

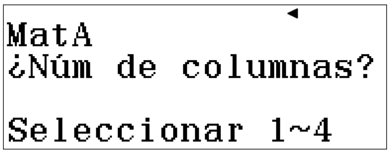


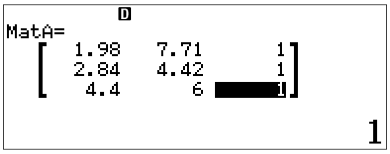
Se define la primera de las matrices y se introducen sus elementos:



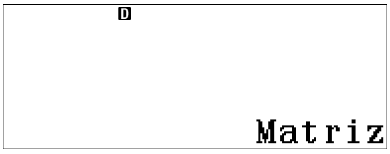








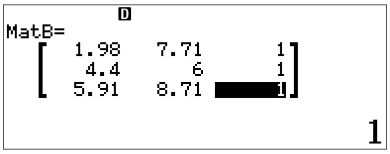
Desde T se escoge la tercera de las opciones para realizar cálculos con la matriz de la siguiente manera:

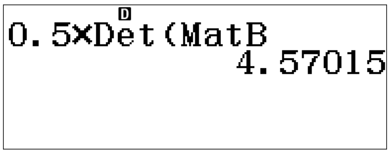


0.5OTR2T3=

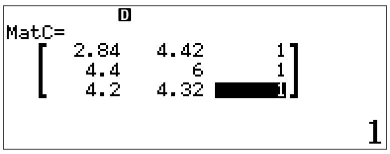
Triángulo $\widehat{CDE}$ $\rightarrow \begin{cases} C = (1.98\,,7.71) \\ D = (2.84\,,4.42) \\ E = (4.4\,,6) \end{cases} \rightarrow \quad A1 = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1.98 & 7.71 & 1 \\ 2.84 & 4.42 & 1 \\ 4.4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3.2456$

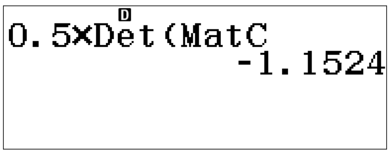
Se procede de la misma forma con cada uno de los triángulos:





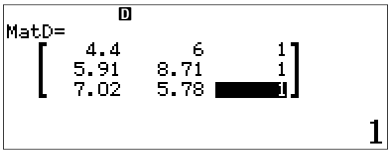
Triángulo $\widehat{CEG}$ $\rightarrow \begin{cases} C = (1.98\,,7.71) \\ E = (4.4\,,6) \\ G = (\,5.91\,,8.71) \end{cases} \rightarrow \quad A2 = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1.98 & 7.71 & 1 \\ 4.4 & 6 & 1 \\ 5.91 & 8.71 & 1 \end{vmatrix} = 4.57015$

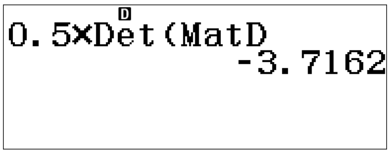




Se toma el área en valor absoluto

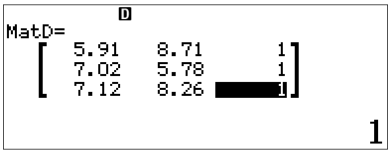
Triángulo $\widehat{DEF} \rightarrow \begin{cases} D = (2.84\,,4.42) \\ E = (4.4\,,6) \\ F = (\,4.2\,,4.32) \end{cases} \rightarrow \quad A3 = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2.84 & 4.42 & 1 \\ 4.4 & 6 & 1 \\ 4.2 & 4.32 & 1 \end{vmatrix} \right| = 1.1524$

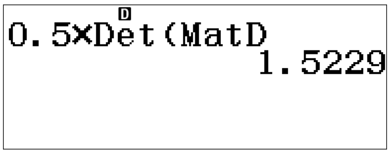




Se toma el área en valor absoluto

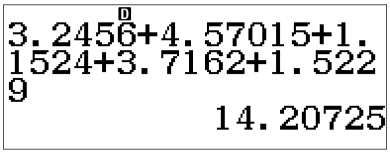
Triángulo $\widehat{EGH} \rightarrow \begin{cases} E = (4.4\,,6) \\ G = (5.91\,,8.71) \\ H = (\,7.02\,,5.78) \end{cases} \rightarrow \quad A4 = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4.4 & 6 & 1 \\ 5.91 & 8.71 & 1 \\ 7.02 & 5.78 & 1 \end{vmatrix} \right| = 3.7162$





Triángulo $\widehat{GHI} \rightarrow \begin{cases} G = (5.91\,,8.71) \\ H = (7.02\,,5.78) \\ I = (\,7.12\,,8.26) \end{cases} \rightarrow \quad A5 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5.91 & 8.71 & 1 \\ 7.02 & 5.78 & 1 \\ 7.12 & 8.26 & 1 \end{vmatrix} = 1.5229$

Finalmente se suman los cinco resultados para obtener el área total que deberemos multiplicar por la razón al cuadrado. En nuestro caso se ha utilizado una escala 1: 100 m por lo que deberemos multiplicar la suma total por 10^4.



$$Área\ total = (3.2456 + 4.57015 + 1.1524 + 3.7162 + 1.5229) \cdot 10^4 = 142072{,}5\ m^2$$

Des de la web del Catastro www.sedecatastro.gob.es se pueden contrastar los resultados de la superficie trabajada. Los datos oficiales en el Catastro con Referencia 7194004 VM4879S 00**** son que los terrenos de Campofrío ocupan una superficie de 142090,62 m^2.

Si nuestra profesión es enseñar, también lo es prender, no dejar nunca de aprender para así mejorar nuestras enseñanzas. En nuestra profesión tenemos la obligación de buscar cómo ofrecer lo mejor a nuestro alumnado y asistir su derecho a recibir una educación de calidad. Nuestra profesión es también compromiso con la sociedad para formar ciudadanos más reflexivos, más críticos, que contrasten la información y que por lo tanto decidan con mayor rigor y libertad. Pero requiere también ser exigente con los compromisos y obligaciones del resto de estamentos y colectivos que forman

la comunidad educativa para que nos permitan alcanzar los objetivos de una formación integral de los estudiantes.
Y para finalizar propongo que preguntemos a nuestro alumnado… ¿qué tienen Clash Royale, Fortnite, Brawl Stars o Clash of Claus? ¿Cuántas horas les dedicáis cada día? y que les invitemos a dejar 1/5 del tiempo que emplean en abrir cofres en ese tipo de juegos para dedicarlo a “Clash GeoGebra Royale” o “Calculadora Fortnite” con los que acercarse y descubrir escenarios de aprendizaje diferentes, que les resulten motivadores y atractivos desde la perspectiva de las matemáticas.

Referencias bibliográficas:

Allen Paulos, J. (1993). Más allá de los números. Barcelona. Tusquets Editores

Fabretti, C. (2016). Las matemáticas de la naturaleza. Barcelona: Bonalletra Alcompás.

Vaello Orts, J. (2007). Cómo dar clase a los que no quieren. Madrid: Santillana.

LLUIS BONET JUAN <lluis@iesmarenostrum.com>

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 55. Abril 2019
Páginas 31-53

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Percepciones de los futuros profesores de matemáticas de Francia y México sobre su formación

Maria del Rocio Juárez Eugenio, María Anabell Aguilar Zaldivar

Fecha de recepción: 02/05/2017
Fecha de aceptación: 15/04/2019

Resumen	El objetivo de esta investigación es mostrar las percepciones que tienen los futuros profesores de matemáticas de Francia y México sobre su formación. Se trata de un estudio cuantitativo en el que los sujetos se determinaron a partir de un muestreo no probabilístico discrecional. Se aplicó un cuestionario, elaborado a partir de cuatro categorías. Se seleccionaron a los estudiantes que obtuvieron los más altos puntajes en las pruebas nacionales de oposición, las instituciones participantes fueron: la Universidad Paris Diderot-VII y la Escuela Normal Superior de Toluca. Los resultados muestran que las percepciones de los docentes en formación de ambos países son similares en dos categorías. **Palabras clave:** Percepciones, formación de profesores, enseñanza de las matemáticas
Abstract	The purpose of this research is to show the perceptions that the future mathematics teachers in France and Mexico have about their formation. It's about a quantitative study in which the subjects were determined from a non-probabilistic discretionary sampling. A questionnaire was applied, elaborated from four categories. The students who obtained the highest scores in the national opposition tests were selected, the participating institutions were: The Paris Diderot-VII University and the Normal Superior School of Toluca. The results show that the perceptions of teacher in formation of both countries are similar. **Key words:** Perceptions, teacher training, mathematics teaching
Resumo	O objetivo desta pesquisa é mostrar as percepções de futuros professores de matemática na França e no México sobre sua educação. Trata-se de um estudo quantitativo em que os sujeitos foram determinados a partir de uma amostragem não probabilística discricionária. Um questionário foi aplicado, baseado em quatro categorias. Os alunos que obtiveram as maiores pontuações nos testes de oposição nacional foram selecionados, as instituições participantes foram: a Universidade Paris Diderot-VII e a Escola Superior Normal de Toluca. Os resultados mostram que as percepções dos professores em formação nos dois países são semelhantes em duas categorias. **Palavras-chave:** Percepções, formação de professores, ensino de matemática

1. Introducción

La formación de docentes de matemáticas es un aspecto clave para la mejora en la enseñanza de las matemáticas así lo considera Vassiliou (2012) en la introducción del informe “La enseñanza de las matemáticas en Europa: retos comunes y políticas nacionales” pues la inquietud suscitada por los estudios internacionales respecto al bajo rendimiento escolar en matemáticas llevó a establecer en 2009 el siguiente objetivo común para toda la Unión Europea: “para 2020, el porcentaje de jóvenes de 15 años con un nivel de competencia insuficiente en lectura, matemáticas y ciencias debería ser inferior al 15%”, para lograrlo una cuestión importante era identificar aspectos clave de la formación de docentes de matemáticas.

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2014) refiere que el conocimiento que el docente tiene de la asignatura de matemáticas suele reflejarse claramente en la puntuación o el aprovechamiento de los alumnos en las pruebas estandarizadas. La falta de una adecuada formación en esta área les ha impedido a los escolares enfrentar con éxito los problemas de la vida cotidiana y desempeñarse de una manera competente en una sociedad compleja (Otero, 2001; Murillo y Román, 2008). Por esta razón es importante identificar aspectos clave de la formación de docentes de matemáticas de Francia y de México, ambos países con una fuerte tradición en la formación de docentes.

1.1 La trayectoria de formación de los docentes en Francia y México

La formación de docentes en Francia y México se realizó por más de un siglo en las escuelas normales, aunque en México aún prevalece. En Francia, la formación de docentes ha estado sometida a varios procesos de reforma en la preparación de su profesorado de secundaria. A principios de la década de los noventa eran los Institutos Universitarios de Formación de Maestros (IUFM) componentes de las universidades, los encargados de la formación de los docentes de segundo grado *(collège- lycée).* Los IUFM tenían la doble vocación de preparar a los docentes para los concursos nacionales de oposición, además de brindarles una formación centrada en la adquisición de saberes disciplinares y competencias pedagógicas con el propósito de lograr una articulación entre teoría y práctica.

Con la reforma de 2013, las Escuelas Superiores de Profesores y de la Educación (ESPE) fueron las encargadas de la formación de profesores. Las ESPE abrieron sus puertas a partir de septiembre de 2013, organizando la formación de maestría *“Métiers de l´enseignement, de l´éducation et de la formation” (MEEF), (Profesión de la enseñanza, la educación y la formación);* esta maestría ha contemplado diferentes módulos de enseñanza disciplinar así como de iniciación a la investigación, apertura internacional y herramientas pedagógicas innovadoras; ha incluido una preparación a los concursos nacionales de oposición (pruebas orales y escritas); en el segundo año, el estudiante debe desarrollar una estancia de práctica de nueve horas por semana en responsabilidad con la escuela, por la cual recibiría una remuneración de jornada completa aunque sólo laborará media jornada y redactará una memoria como producto de su reflexión sobre la práctica docente. El marco de competencias profesionales es la referencia central y común a todos los actores de la formación inicial y continua (EDUSCOL, 2013).

En México, las instituciones que han asumido la responsabilidad de formar a los docentes de secundaria son las escuelas normales superiores que hay en el país. El periodo de formación es de cuatro años, con estudios previos de bachillerato. A partir de la firma del Acuerdo Nacional de Modernización de Educación Básica (ANMEB, 1992), se determinó una reforma curricular a los planes de estudio para la formación inicial del profesor, por lo cual se diseñó un modelo con un tronco básico general (preescolar, primaria y secundaria) y una intensa observación y práctica en el salón de clase; de esta manera, el maestro se capacitaría en el dominio de los contenidos básicos y tendría las bases pedagógicas suficientes para desempeñarse en el ámbito educativo. El gobierno federal expidió los lineamientos para reformar la educación normal del país.

A partir de 1996, la Secretaría de Educación Publica (SEP, 1999) en coordinación con las autoridades educativas estatales, puso en marcha el Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académico de las Escuelas Normales, (PTFAEN) mediante cuatro líneas de acción las cuales fueron: transformación curricular; actualización y perfeccionamiento profesional del personal docente de las escuelas normales; elaboración de normas y orientaciones para la gestión institucional y la regulación del trabajo académico; mejoramiento de la planta física y del equipamiento de las escuelas normales. El programa partió de la convicción de que las escuelas normales deben seguir formando a los maestros de educación básica, pero respondiendo a los requerimientos de la educación superior y las demandas cada vez mayores y más complejas que se derivan de la necesidad de una educación suficiente para todos, de alta calidad formativa y que distribuya con equidad sus beneficios (SEP, 1999).

El plan para formar a docentes de secundaria entró en vigor en 1999 y desde esa fecha no se ha reformado, es de carácter nacional, se divide en tres apartados los cuales son: actividades escolarizadas, actividades de acercamiento a la práctica escolar y práctica intensiva en condiciones reales de trabajo. Este plan de estudios pretende que los estudiantes normalistas adquieran una formación centrada en el conocimiento del estudiante de secundaria, en la pedagogía y en la didáctica de alguna disciplina específica. A fin de titularse, los aspirantes a docentes en el último año de su formación, deben realizar un documento recepcional, el cual es un ensayo en el que reflexiona sobre su práctica docente. Una vez concluida su formación, los aspirantes a docentes deben presentar el examen de oposición a fin ingresar al servicio profesional docente

1.2 La formación especifica de los futuros docentes de matemáticas en Francia y México.

En Francia la formación de docentes de matemáticas de segundo grado *(collège – lycée)* - lo equivalente en México seria profesor de secundaria y bachillerato-, ha sido un tema de vital importancia, así lo expresan varios investigadores matemáticos franceses como Artigue (1995) y Chabanes (1996) entre otros, debido a que se pensaba que los futuros profesores de secundaria de matemáticas deberían tener sólo un dominio de la disciplina que iban a enseñar, sin considerar las condiciones de la población a la que le impartirían clases. La formación profesional de los docentes de matemáticas en Francia constituye un elemento fundamental en la construcción de un sistema eficaz de enseñanza matemática (ICMI, 2005). Los estudiantes que han cursado una licenciatura en matemáticas en la universidad, han recibido una enseñanza que trata de las estructuras algebraicas, las definiciones formales de las bases del cálculo (como la de límite), las demostraciones de los teoremas fundamentales y teorías como la de integración de Rienman.

El programa se centra en el álgebra y el análisis, en la mayoría de las universidades la geometría que juega un papel muy importante en el segundo grado casi ha desaparecido, salvo un poco de geometría analítica. En relación con el algebra lineal, en tercer año de la licenciatura hay un salto cualitativo desde el punto de vista de la abstracción con los cursos de topología general, el cálculo diferencial en los espacios vectoriales normados, la integración, el análisis funcional, y las estructuras algebraicas abstractas (Dorier, 2007). Después del tercer año, se dan cursos de informática en todas las universidades y los estudiantes se inician a menudo en los programas de cálculo formal como *maple, mathematica o matlab.* En cambio, las relaciones con las otras disciplinas, las aplicaciones y la modelización, las estadísticas y el análisis numérico están en general ausentes del currículum hasta la licenciatura y solamente son opcionales a nivel de maestria.

En México, la formación de docentes de matemáticas, se rige con el plan de estudios 1999, en su oferta educativa se encuentra la licenciatura en educación secundaria con diferentes especialidades entre las cuales se encuentra la de matemáticas. Este plan de estudios pertenece a un marco común para la formación de maestros de educación básica, teniendo los siguientes campos de formación: formación general para educación básica, formación común para todas las especialidades de educación secundaria; y la formación específica por especialidad. Se pretende que los futuros maestros adquieran las competencias y la sensibilidad necesarias para actuar como educadores de adolescentes y que, además sean capaces de trabajar con los contenidos de la asignatura de la especialidad en que se forman.

El objetivo fundamental del plan de estudios de la licenciatura en educación secundaria, es que los futuros maestros de secundaria con especialidad en matemáticas desarrollen habilidades que les permitan manejar con profundidad los contenidos matemáticos del nivel básico y analizar situaciones didácticas que, al ser aplicadas a los alumnos, favorezcan en éstos un conocimiento significativo y funcional (SEP, 1999). La formación disciplinaria de la especialidad de matemáticas contempla catorce cursos escolarizados sobre contenidos y competencias didácticas cada uno con una duración promedio de cuatro horas semanales, las cuales son: Introducción a la enseñanza de las matemáticas; pensamiento algebraico; los números y sus relaciones; figuras y cuerpos geométricos; plano cartesiano y funciones; procesos de cambio o variación; medición y cálculo geométrico; procesos cognitivos y cambio conceptual en matemáticas y ciencias; escalas y semejanza; seminario de temas selectos de historia de las matemáticas; seminario de investigación en educación matemática; tecnología y didáctica de las matemáticas; la predicción y el azar; presentación y tratamiento de la información.

En las siguientes tablas se observa la trayectoria de formación de los docentes de matemáticas en Francia y México.

Tabla 1.

Trayectoria de formación de los profesores de matemáticas en Francia.

	Niveles educativos							Examen nacional de oposición (escrito) en el primer año de maestría
Edad	École maternelle 3 – 6 años	Primaria 6 – 11 años	Collège 11 – 15 años	Lycée 15 – 18 años	Licence mathématiques 18 – 21 años	• Investigación • Enseñanza • École de ingénieurs • Vida laboral	Maestría 21 – 23 años 2 años	Total de años en formación = 19 años
	Años de escolaridad							
	3 años	5 años	4 años	3 años	3 años			

Fuente: Elaboración propia a partir de la consulta de los documentos oficiales.

Tabla 2.

Trayectoria de formación de los profesores de matemáticas en México.

	Niveles educativos						Formación continua
Edad	Preescolar 3 – 6 años	Primaria 6 – 12 años	Secundaria 12 – 15 años	Bachillerato 15 – 18 años	Escuela Normal Superior 18 – 22 años	Examen nacional de oposición Total de años en formación = 19 años	
	Años de escolaridad						Maestría Doctorado
	3 años	6 años	3 años	3 años	4 años		

Fuente: Elaboración propia a partir de la consulta de los documentos oficiales.

En la tabla anterior, se puede observar que tanto en Francia como en México la trayectoria de un estudiante regular que ha decidido formarse para ser profesor de matemáticas es de diecinueve años, hasta el momento en que se presenta a las pruebas nacionales de oposición, a las que se deben someter los futuros profesores de matemáticas en la última parte de su formación para obtener una plaza de profesor de matemáticas.

1.3 Las pruebas nacionales de oposición

Los documentos analizados fueron en el caso de Francia: "*CAPES EXTERNE DE MATEMATIQUES"* (EDUSCOL, 2015), y en el caso de México, la "Guía para el sustentante del examen nacional de conocimientos y habilidades docentes para matemáticas en secundaria", para participar en el concurso nacional para el otorgamiento de plazas docentes durante el ciclo escolar 2014- 2015 (SEP, 2015). A partir del estudio y análisis de ambos documentos, podemos decir que en el caso de Francia la prueba *CAPES* (*Certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré)* mediante la cual el gobierno francés otorga un diploma a los estudiantes que obtuvieron resultados idóneos para obtener una plaza de profesor de secundaria o bachillerato, privilegia el dominio disciplinar de la matemática. El tiempo previsto para la aplicación es de aproximadamente cinco horas, además de que deben hacer una prueba oral a partir de un listado de ochenta temas del currículo de matemáticas cuya duración es de dos horas y media. La prueba oral permite que el candidato demuestre su cultura matemática profesional y el conocimiento de los contenidos de los programas de enseñanza.

Es importante mencionar que en Francia a partir del ciclo escolar 2010-2011, entre los requisitos de registro para presentar la prueba *CAPES* por parte de los futuros profesores de matemáticas deberán contar con el grado de maestría o el equivalente, (Ministerio de Educación Nacional Francés, 2012).

En el caso de México, en mayo 2008 se firmó un documento denominado: "Alianza por la calidad de la educación" por los representantes del gobierno federal y el Sindicato Nacional de los Trabajadores de la Educación (SNTE). En dicho documento, se menciona que el ingreso y promoción de todas las nuevas plazas docentes y las vacantes definitivas serán asignadas a los futuros docentes por medio de un concurso nacional de oposición (SEP, 2011). A partir de la disposición anterior, en el ciclo escolar 2009-2010 se realizó un examen nacional de oposición para ocupar las plazas docentes.

Para presentar la prueba de oposición, los aspirantes deben ser egresados de las instituciones formadoras de docentes públicas y privadas y de las especialidades indicadas en el anexo técnico de cada entidad federativa. En el caso específico del aspirante a ocupar una plaza de profesor de educación secundaria de matemáticas (asignaturas académicas), sólo pueden presentar examen los egresados de las escuelas normales. Para el caso del aspirante a ocupar una plaza en secundarias técnicas (actividades tecnológicas), pueden presentar examen los egresados de licenciatura y de ingenierías. A diferencia de Francia, en México no se efectúan las pruebas orales. En el siguiente cuadro, se pueden observar los contenidos sobre los que se basan las pruebas nacionales de oposición a las que se someten los candidatos, existe una correspondencia entre los planes de estudio y las pruebas nacionales de oposición; en el caso de México, existe una menor cantidad de contenidos matemáticos en comparación con Francia.

Tabla 3.

Contenidos de las pruebas nacionales de oposición en Francia y en México

Francia	México
Aritmética	Aritmética
Lógica y conjuntos	Álgebra
Álgebra y geometría	Geometría
Funciones	Trigonometría
Aplicaciones matrilineales, determinantes	Probabilidad
Matriz de cálculo	Estrategias de enseñanza que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas
Geometría vectorial euclidiana	
Integrales	Propósitos para la enseñanza, el aprendizaje y el estudio de las matemáticas en la escuela secundaria
Cálculo diferencial e integral	
Series de números reales o complejos	
Probabilidad y estadística	

Fuente: *Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche* (2015) y SEP, 2015

Como se puede ver en la tabla anterior, las áreas de matemáticas en común de las pruebas nacionales de oposición de ambos países son: aritmética, álgebra, y probabilidad pues geometría en Francia va en conjunto con el álgebra y además es mucho más especifica al ser geometría vectorial euclidiana; en Francia, los candidatos a ser profesores de matemáticas realizan dos tipos de pruebas, oral y escrita; en México sólo realizan la prueba escrita. En Francia, la prueba CAPES presenta temas de la disciplina matemática de mayor complejidad por ejemplo, el cálculo diferencial e integral, las series de números reales o complejos. En cambio en México, las pruebas nacionales de oposición, de los temas que propone sólo es álgebra, no presenta ningún tipo de cálculo, además de los contenidos básicos que corresponden a los programas de educación básica.

2. Marco teórico

Antes de presentar el marco teórico que se realizó, son pertinentes las siguientes consideraciones en torno al uso que se da de estos constructos.

2.1 Creencias, percepciones y concepciones.

Según el diccionario de la Real Academia Española (2017), la percepción es un conocimiento o una idea. Se han realizado diversas investigaciones en relación a las percepciones de los docentes pero también de las creencias, motivo por el cual es pertinente mencionar que una creencia es un pensamiento o una opinión de algo. Gilbert (1991) señala que las diferencias son mínimas y no vale la pena tenerlas en cuenta. Thompson consideraba que las creencias formaban parte de las concepciones, mientras que Ponte (1992) afirmaba que las creencias tenían una naturaleza proposicional y que las concepciones no eran más que constructos cognitivos que podían verse como el marco subyacente que organiza los conceptos en el individuo.

Gómez-Chacón (2000) consideró como sinónimos las palabras percepciones y creencias evitando establecer mayores diferencias entre ambas. Para García y et. al. (2006), las creencias son ideas poco elaboradas generales o específicas, que forman parte del conocimiento que posee la persona (docente, estudiante) e influyen de manera directa en su desempeño.

Una de las principales disciplinas que se ha encargado del estudio de la percepción ha sido la psicología, tradicionalmente este campo ha definido a la percepción como el proceso cognitivo de la conciencia que consiste en el reconocimiento, interpretación y significación para la elaboración de juicios en torno a las sensaciones obtenidas del ambiente físico y social en el que intervienen otros procesos psíquicos entre los que se encuentran el aprendizaje, la memoria y la simbolización (Godoy, 2012).

En la presente investigación se consideraran como percepciones a aquellas ideas que tienen las futuros docentes de matemáticas de Francia y de México acerca de la formación recibida en las instituciones formadoras de docentes.

En los siguientes párrafos se describen algunas investigaciones que se han realizado en las últimas dos décadas, cuyos objetos de estudio han sido conocer las percepciones y/o concepciones de los profesores y/o estudiantes.

En un estudio reciente efectuado por Friz M. y et. al. (2018), denominado: “El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Concepciones de los futuros profesores del sur de Chile”; el propósito del estudio fue analizar las concepciones que poseían estudiantes de pedagogía del primer y último año de titulación (n=50) hacia la enseñanza de las matemáticas a partir de tres dimensiones: 1) las matemáticas como objeto de estudio, 2) utilidad de las matemáticas y 3) enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Utilizando un enfoque cuantitativo de diseño descriptivo y comparativo, los resultados demostraron el predominio de la concepción de las matemáticas como una disciplina instrumental asistida principalmente por el uso de textos escolares en los estudiantes de primer año, aspecto que es modificado en el último curso, cuando se integran elementos culturales y comunicativos de las matemáticas, así como un carácter interdisciplinario.

Chaves, et. al. (2016), en su investigación titulada: "Percepción de los docentes de primaria en ejercicio, acerca de las matemáticas y su enseñanza en relación con los programas oficiales del Ministerio de Educación Pública (MEP)", reportan las percepciones que un grupo de docentes de primaria en ejercicio tiene sobre las matemáticas y su enseñanza. La información se recabó por medio de un cuestionario de sesenta y seis preguntas, dirigidas a determinar su percepción de las matemáticas y su enseñanza en relación con los actuales programas del Ministerio de Educación Pública; además, de su percepción sobre la formación inicial recibida y en los procesos de capacitación. Se obtuvo la respuesta de 87 docentes en servicio. Los principales hallazgos fueron: su percepción fue positiva en cuanto a las matemáticas y su enseñanza; el uso de la resolución de problemas y las aplicaciones de las matemáticas en la clase, en vez de procedimientos rutinarios y reglas memorizadas; los docentes sienten poca satisfacción en lo relativo a aspectos teóricos, estrategias de enseñanza y de evaluación; y piensan que su formación inicial no guarda estrecha relación con la labor profesional que realizan en las aulas. La relevancia de la investigación radicó en que el autor identificó lo que pensaban los docentes acerca de su formación inicial: no aporta elementos suficientes para hacer frente a la realidad escolar, fue una contribución importante para los diseñadores de políticas educativas, para los tomadores de decisiones en relación a las reformas educativas y revisores de programas educativos.

Rojas, F. y Deulofeu J. (2015), en su artículo denominado: "El formador de profesores de matemática: un análisis de las percepciones de sus prácticas instruccionales desde la tensión estudiante - formador", considerando el contexto de un máster de formación de profesorado, los autores analizaron las percepciones de estudiantes y formadores sobre la actividad instruccional experimentada en cursos de tipo didáctico. Las opiniones las recogieron por medio de dos grupos focales, construidos de forma secuencial e inclusiva. Un aspecto que resultó clave para los estudiantes en tanto una característica fundamental de las prácticas instruccionales de sus formadores tiene relación con la coherencia entre las prácticas instruccionales de estos y la racionalidad formativa que se busca para la gestión de las actividades didáctico-matemáticas realizadas.

En México, sería importante realizar una investigación similar en las instituciones formadoras de docentes; para identificar si existe la coherencia entre prácticas instruccionales de los formadores de formadores y su desempeño en las aulas, es común que los formadores expliquen a los futuros docentes como deberían dar una clase a los alumnos, pero ¿habrá formador de formadores que ponga en práctica las recomendaciones que hacen a los futuros docentes?; seria conveniente revisar ¿quiénes son los formadores de formadores?, ¿qué perfil académico tienen?, ¿cuál es su experiencia pedagógica con los alumnos de educación primaria y/o secundaria? Al respecto, Vaillant, (2009), menciona que debe existir una selección rigurosa de los formadores de formadores que respondan eficazmente a los nuevos requerimientos del desarrollo profesional docente que puedan revisar sus marcos conceptuales y sus prácticas docentes.

Badia. et. al. (2015), en su investigación “Factores que influyen en la percepción de los profesores de los beneficios instruccionales de los medios educativos digitales”; se recogieron datos de setecientos dos profesores de trescientos cincuenta y seis escuelas de educación primaria y secundaria en España con un cuestionario. Mediante análisis de correlación múltiple y de regresión jerárquica examinaron la relación entre las variables independientes y las percepciones de los profesores. Los resultados mostraron una fuerte relación entre estas percepciones y las características tecnológicas del profesor. Los factores más predictivos son el área de enseñanza, la alfabetización digital, la formación en tecnología educativa y la frecuencia de acceso a internet, dentro y fuera de la escuela. Por último, sugieren que la integración de los medios educativos digitales en el aula no sea un objetivo aislado que deba ser alcanzado por separado de los objetivos pedagógicos, sino que sea un objetivo totalmente interrelacionado con las finalidades instruccionales de los profesores.

Sotomayor, et. al. (2013), en su investigación intitulada “Percepción de los estudiantes de pedagogía sobre su formación inicial”, tuvo como objetivo conocer la percepción de los estudiantes de pedagogía en educación básica sobre la formación recibida en el área de lenguaje y el grado de preparación que perciben para enseñar en esta área. Los resultados del estudio mostraron que los estudiantes tenían una valoración positiva de la formación recibida y que otorgaban mayor importancia a la formación práctica que a la teórica. Es evidente que la formación de los docentes que demanda la sociedad del conocimiento requieren de una sólida formación pedagógica y disciplinar en la que integren un conocimiento práctico, lo que obliga a que instituciones formadoras y escuelas construyan vínculos de mutuo beneficio para mejorar sus respectivas tareas.

Al respecto, Ortega y Castañeda (2009) mencionan que la experiencia de inmersión en las escuelas como aporte central para la formación de los estudiantes constituye el principal acierto del currículo, pero las dificultades en su aplicación han tenido que ver precisamente con la práctica, debido a la distancia de los formadores respecto a los problemas y culturas escolares, a la falta de regulación y organización para asegurar la asesoría a los practicantes y a que los formadores no siempre poseen habilidades reflexivas y críticas sobre la propia actuación para que, a partir de ello, reorienten la práctica educativa de sus alumnos.

Cortés y Sanabria (2012), En su investigación titulada: “Concepciones y creencias de profesores de matemáticas sobre resolución de problemas: un estudio de casos”. Desde un enfoque cualitativo de carácter exploratorio y descriptivo, se realizó un estudio de casos con un profesor en ejercicio y en formación inicial del programa de licenciatura en matemáticas y física de la Universidad del Valle, teniendo en cuenta elementos teórico-prácticos del referente didáctico de los *organizadores del currículo* y del *análisis didáctico* planteados inicialmente por el grupo *Pensamiento Numérico y Algebraico* (PNA) de España. En este trabajo se adoptó la propuesta de análisis didáctico como estrategia metodológica de investigación y de formación. Los resultados obtenidos mostraron la pertinencia de que la resolución de problemas sea planteada como un *organizador del currículo*, ya que a través de la aplicación de esta propuesta se pueden obtener procesos dinámicos y mejores resultados en la formación del profesor y por consiguiente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Madrigal, E. (2011). En su estudio titulado: "Percepción de docentes sobre las competencias matemáticas y pedagógicas recibidas en su formación inicial"; tuvo como objetivo analizar la percepción de los profesores de matemáticas en servicio ante la formación de competencias recibidas durante su formación en la Universidad Nacional de Costa Rica; específicamente en áreas como geometría, álgebra, cálculo, análisis, evaluación, currículo y planeamiento, pedagogía y teoría de los aprendizajes. Este estudio se enmarcó en el procedimiento metodológico de tipo colaborativo para la intención. El enfoque al que se hizo mención fue cualitativo, ya que se buscó llegar al conocimiento por medio del entendimiento de intenciones y usando la empatía, para comprender en profundidad las experiencias de cada docente y así obtener la percepción de los participantes en relación a las competencias adquiridas en el proceso de su formación y conocer cómo este aporte impacta su labor en el aula.

Chaves, (2011). En su artículo denominado "Percepción de una muestra de profesores de matemáticas sobre la formación recibida en la universidad", menciona que el objetivo fundamental del estudio fue determinar la percepción de una muestra de doscientos cuarenta y nueve profesores de matemáticas de educación secundaria con respecto a la formación recibida en la universidad. Se identificaron fortalezas y debilidades de los programas académicos que formaron al profesorado de matemáticas en Costa Rica, según el criterio de los docentes. La información fue recolectada por medio de la aplicación de un cuestionario.

En términos generales, los educadores percibieron su formación en matemáticas teóricas como la principal fortaleza. No obstante, de acuerdo con la escala empleada, todos los demás aspectos vinculados con el proceso formativo de un educador matemático presentaron una percepción baja. Dentro de las debilidades mencionaron: la formación en elementos pedagógicos, evaluativos, metodológicos, filosóficos, sicológicos y de historia; así como la carencia de una adecuada preparación en el uso de recursos tecnológicos para la enseñanza. Este tipo de estudio es importante, en la medida en que nos permita identificar las fortalezas, pero sobre todo las debilidades en el proceso de formación de los futuros docentes de matemáticas, para poner especial atención en reorientar las acciones pedagógicas en las instituciones formadoras de docentes.

Friz (2010) en su ponencia titulada "Concepciones de los futuros profesores de matemáticas sobre las competencias profesionales implicadas en la enseñanza de la estadística", presentada en el segundo congreso internacional de *DIDACTIQUES* analizó las concepciones que poseen los estudiantes para profesor sobre la enseñanza y aprendizaje de la estadística. El autor partió del supuesto de que los estudiantes para profesor ponen en juego diferentes concepciones (conocimientos y creencias) de las matemáticas que tienen que ver con sus propias experiencias y que inciden en las tareas profesionales que ellos trasladan al aula en el desarrollo de prácticas profesionales y/o en el propio ejercicio de la profesión. Los resultados mostraron que al inicio del curso los estudiantes valoran principalmente el conocimiento pedagógico procedente de la pedagogía o de la psicología, lo que podría explicarse por la formación recibida; sin embargo, sus competencias y conocimientos se van modificando en la medida en que interactúan con el entorno de aprendizaje.

Friz et. al. (2009), en su estudio "Concepciones en la enseñanza de la matemática en educación infantil", evaluaron las concepciones sobre las tareas profesionales implicadas en la enseñanza de las matemáticas en tres dimensiones: a) conocimiento de la disciplina matemática, b) habilidades para la puesta en práctica de situaciones matemáticas y c) actitudes hacia el currículo oficial en el ámbito de matemáticas. Se adoptó un enfoque metodológico cuantitativo, diseño no-experimental descriptivo del tipo encuesta. El análisis de los datos se realizó mediante paquete estadístico SPSS 14.0 y las técnicas utilizadas fueron descriptivos, frecuencias y porcentajes, técnicas de reducción de datos (análisis factorial) e inferencia estadística (comparación, medias y porcentajes). Los resultados demostraron que existía en ese momento un escaso dominio en aspectos importantes de las matemáticas como la geometría, numeración y uso de la tecnología educativa. Las diferencias observadas entre grupos hacen aconsejable promover programas de formación continua en esta área y fortalecer la formación inicial docente.

Mora y Barrantes (2008). En su estudio: "¿Qué es matemática? Creencias y concepciones en la enseñanza media costarricense", los autores afirmaron en este estudio que el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas se vio influenciado por las creencias que tanto estudiantes como profesores tenían acerca de esta disciplina. Se hizo una encuesta a treinta y seis profesores de los que un poco más de la mitad coincidieron en que era importante crear en los estudiantes las destrezas matemáticas para enfrentar creativamente la solución de problemas abstractos o prácticos. En cuanto a los estudiantes, los autores mencionaron que éstos no tenían una concepción clara de esta disciplina pues presentaban una confusión en cuanto a la importancia de la comprensión conceptual, en cierta medida se debió a que los estudiantes consideraron que era suficiente memorizar procedimientos para obtener buenos rendimientos en pruebas estandarizadas.

Moreno y Azcárate (2003). Realizaron una investigación titulada: "Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales", la cual se caracterizó por ser de carácter cualitativo, exploratorio, descriptivo y explicativo. Dada la importancia de disponer de diferentes instrumentos de recogida de información que permitieran triangular los resultados, a parte del cuestionario y la correspondiente entrevista grabada, se dispuso de otros instrumentos de recogida de información, como: programas oficiales, hojas de ejercicios y problemas propuestos, referencias bibliográficas recomendadas a los estudiantes y, en algún caso, dossier de apuntes preparado por los profesores para el seguimiento de la asignatura. Los participantes del estudio fueron seis profesores universitarios, todos ellos matemáticos, expertos en matemática aplicada y que impartían docencia, entre otros, a estudiantes de química, biología y veterinaria. Los profesores consideraban que la buena enseñanza estaba casi exclusivamente relacionada con el nivel de conocimientos matemáticos del profesor; de ahí que no se plantearan la necesidad de una formación didáctica que les proporcionara herramientas de trabajo en clase.

Se puede observar en los diferentes estudios que se han descrito que los autores se han preocupado por identificar las percepciones y/o concepciones que tienen los docentes acerca de su formación docente inicial recibida en las universidades, sobre todo, identificar las fortalezas y debilidades que se encuentran en los planes de estudio, así como proponer cursos de formación continua a los docentes que les permitan afrontar las demandas de una sociedad del conocimiento compleja. Al hacer la revisión teórica no se encontró algún estudio que muestre la percepción que tienen los profesores de matemáticas que se hayan formado en una escuela normal de México más aún que se le contraste con las percepciones que tienen los profesores de matemáticas de algún otro país. Por lo que es pertinente plantear la siguiente pregunta: **¿Cuáles son las percepciones sobre su formación que tienen los futuros profesores de matemáticas de Francia y México?**

En la siguiente tabla se muestran a manera de síntesis las investigaciones encontradas, considerando el orden cronológico en el que fueron apareciendo.

Tabla 4.

Síntesis de la revisión teórica.

Año	Autor (es)	Título de la investigación	Objeto de estudio	Metodología
2018	Friz, M. y et. al	El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Concepciones de los futuros profesores del sur de Chile.	Las concepciones de estudiantes de Pedagogía hacia la enseñanza de las Matemáticas a partir de tres dimensiones: 1) las matemáticas como objeto de estudio. 2) utilidad de las matemáticas 3) enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.	Enfoque cuantitativo de diseño descriptivo y comparativo
2016	Chaves E. y et. al	Percepción de los docentes de primaria en ejercicio, acerca de las matemáticas y su enseñanza en relación con los programas oficiales del MEP	La percepción que un grupo de ochenta y siete docentes de primaria en ejercicio tiene sobre las matemáticas y su enseñanza	Cuantitativa, no experimental, descriptiva.
2015	Rojas, F. y Deulofeu J.	El formador de profesores de matemática: un análisis de las percepciones de sus prácticas instruccionales desde la tensión estudiante-formador.	Las percepciones de estudiantes y formadores sobre la actividad instruccional experimentada en cursos de tipo didáctico.	Cualitativa, estableciendo dos grupos focales
2015	Badia, A. y et. al.	Factores que influyen en la percepción de los profesores de los beneficios instruccionales de los medios educativos digitales	Los factores que influyen en las percepciones de los profesores sobre los beneficios de los medios educativos digitales para la enseñanza y el aprendizaje.	Cuantitativa, descriptiva.
2013	Sotomayor C. et. al.	Percepción de estudiantes de pedagogía sobre su formación inicial.	La percepción de los estudiantes de Pedagogía sobre la formación recibida en el área de lenguaje y el grado de preparación que perciben para enseñar en esta área.	Descriptivo transversal

2012	Cortés J. y Sanabria F.	Concepciones y creencias de profesores de matemáticas sobre resolución de problemas: un estudio de casos	Reconocer y describir algunas *concepciones y creencias* de profesores de matemáticas sobre la resolución de problemas, y analizar de qué manera éstas operan en sus prácticas educativas, específicamente en la clase de álgebra y geometría.	Enfoque cualitativo, exploratorio y descriptivo
2011	Madrigal, E.	Percepción de docentes sobre las competencias matemáticas y pedagógicas recibidas en su formación inicial	La percepción de los profesores de matemáticas en servicio ante la formación de competencias recibidas durante su formación en la Universidad Nacional de Costa Rica.	Cualitativo
2011	Chavés, E.	Percepción de una muestra de profesores de matemáticas sobre la formación recibida en la universidad	La percepción de una muestra de 249 profesores de matemáticas de educación secundaria con respecto a la formación recibida en la universidad.	Cuantitativo por medio de un cuestionario auto-administrado
2010	Friz, M.	Concepciones de los futuros profesores de matemáticas sobre las competencias profesionales implicadas en la enseñanza de la estadística	Las concepciones (conocimientos y creencias) que poseen los estudiantes para profesor sobre la enseñanza y aprendizaje de la estadística.	Enfoque metodológico cuantitativo, diseño no experimental, descriptivo del tipo encuesta.
2009	Friz, M. et. al.	Concepciones en la enseñanza de la matemática en educación infantil	Las concepciones sobre las tareas profesionales implicadas en la enseñanza de las matemáticas en tres dimensiones: a) conocimiento de la disciplina matemática, b) habilidades para la puesta en práctica de situaciones matemáticas y c) actitudes hacia el currículo oficial en el ámbito de matemáticas.	Enfoque metodológico cuantitativo, diseño no-experimental descriptivo del tipo encuesta
2009	Godino, J. D.	Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas	Propone un modelo que comprende categorías de análisis más finas de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor	Exploratorio y descriptivo
2008	Mora F. y Barrantes H.	¿Qué es matemática? Creencias y concepciones en la enseñanza media costarricense	Creencias de estudiantes y profesores acerca del significado de esta disciplina.	Cuantitativo
2003	Moreno, M. y Azcarate C.	Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales	Las concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en estudios científico-experimentales.	Cualitativo, constructivo, exploratorio, descriptivo y explicativo.

Fuente: Elaboración propia a partir de la revisión teórica.

A la luz del estado del conocimiento, se identificó que no se ha efectuado algún estudio similar que planteará conocer las percepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas de alguna escuela normal en México con relación a la formación recibida.

3. Metodología

El enfoque de esta investigación fue cuantitativo. Para conocer las percepciones de los futuros docentes de matemáticas de Francia y México se elaboró y aplicó un cuestionario de catorce preguntas, que consideró cuatro categorías. Dicho instrumento se sustenta en las aportaciones que hace Godino (2009), a partir de Shulman (1987).

Las categorías de análisis fueron: motivación, el conocimiento del contenido matemático para la enseñanza, la experiencia docente que otorga la práctica misma y el conocimiento de los fines y propósitos de la enseñanza, En la tabla cinco, se puede observar la organización de las preguntas en categorías de análisis.

Tabla 5.

Categorías de análisis que conformaron el cuestionario.

Categorías	Sub categorías	Preguntas	Buscó conocer
1. Motivación	El ingreso a la carrera docente	1-4	Cuándo decidió formarse como profesor de matemáticas y cuáles fueron los factores que influyeron en su decisión
2. El conocimiento del contenido matemático para la enseñanza	Conocimiento matemático para la enseñanza	5-8	Si tiene otros estudios de nivel terciario y como es que consideran su nivel de conocimientos matemáticos y pedagógicos para enseñar en secundaria
3. La experiencia docente que otorga la práctica misma.	La experiencia personal relacionada con la educación	9-10	La práctica docente que han tenido al impartir clases de matemáticas con alumnos de secundaria, brindando ésta cierta experiencia docente a los futuros profesores de matemáticas
4. El conocimiento de los fines y propósitos de la enseñanza	La opinión sobre la enseñanza de las matemáticas en secundaria y su finalidad	11-14	Su opinión sobre si la enseñanza de las matemáticas está acorde con lo que necesita la sociedad; si un objetivo prioritario de la formación matemática de la escuela secundaria es la formación de ciudadanos responsables; si la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria debe participar en la formación de científicos y técnicos de buen nivel y si el papel de las matemáticas es un filtro para continuar estudios superiores

Fuente: Elaboración propia a partir de las categorías de análisis de Godino (2009).

Para seleccionar a los sujetos participantes se recurrió al muestreo no probabilístico discrecional; se eligieron a aquéllos estudiantes que obtuvieron los más altos puntajes en las pruebas de oposición durante el ciclo escolar 2014-2015, en el caso de Francia fue la Universidad Paris Diderot-VII, siendo doce estudiantes con edades entre veintidós y veinticinco años; y en el caso de México se eligió a la Escuela Normal Superior de Toluca, con diecisiete estudiantes con edades entre veintidós y veintisiete años; siendo un total de veintinueve.

4. Resultados.

Los resultados se organizaron a partir de las siguientes categorías.

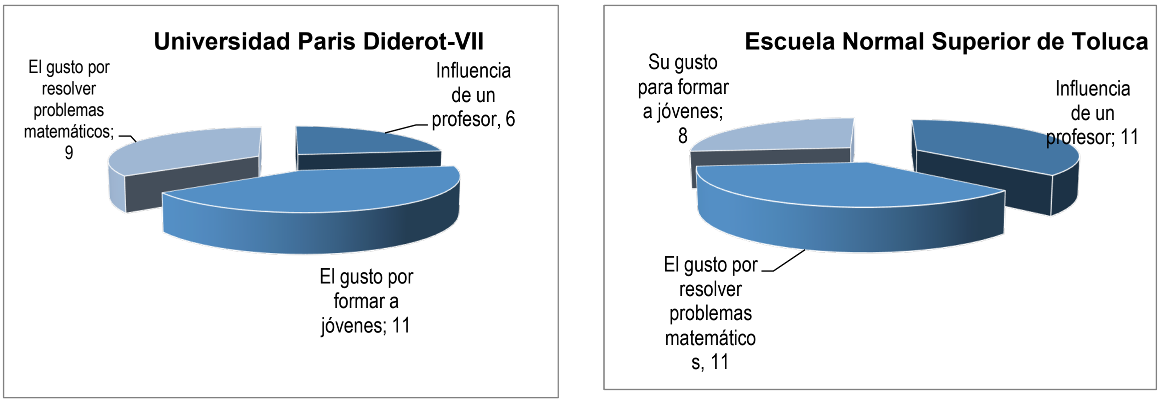
Tabla 6.

Categorías de análisis elaboradas para este estudio

1	La motivación de los estudiantes para formarse como profesor de matemáticas.
2	El conocimiento del contenido matemático para la enseñanza.
3	La experiencia docente que otorga la práctica misma.
4	El conocimiento de los fines y propósitos de la enseñanza.

Fuente: Elaboración propia a partir de Godino (2009).

Figura 1. Categoría 1. La motivación de los estudiantes para formarse como profesor de matemáticas.

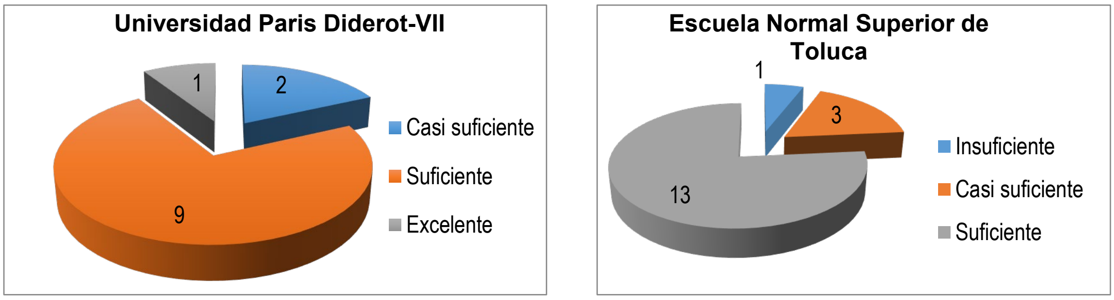


Fuente: Elaboración propia a partir de las respuestas emitidas de los estudiantes.

Las preguntas que se formularon en la primera parte del instrumento permitieron conocer las causas que motivaron a los alumnos para formarse como profesores de matemáticas y se refieren a: el gusto por formar jóvenes; influencia de un profesor y el gusto por resolver problemas matemáticos.

Respecto al gusto por formar a jóvenes: En el caso de Francia once de los doce alumnos refieren haber encontrado mayor motivación, mientras que en México ocho de los diecisiete alumnos resultaron motivados. Se aprecia que los estudiantes franceses se ven altamente motivados para formarse como profesores de matemáticas, por el gusto de formar a jóvenes. Mientras que en el caso de México menos de la mitad de los estudiantes se encontraron motivados por esta razón.

Figura 2. Categoría 2. El conocimiento del contenido matemático para la enseñanza.



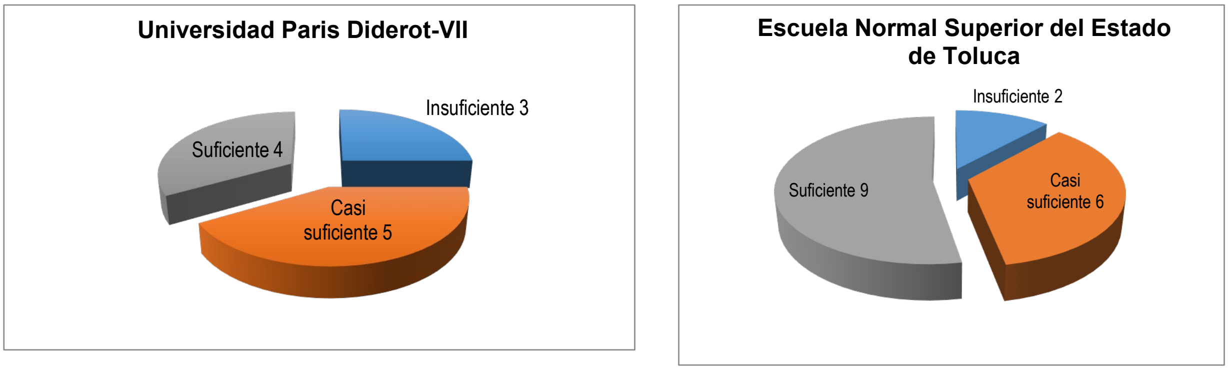
Fuente: Elaboración propia a partir de las respuestas emitidas de los estudiantes.

La categoría dos, nos permitió conocer la percepción de los estudiantes acerca de cual es su nivel de conocimientos de la disciplina de las matemáticas.

Como se puede observar en la gráfica anterior, un estudiante francés consideró contar con un nivel excelente de conocimientos; es preciso mencionar que éste ya contaba con una maestría en matemáticas aplicadas, sin embargo el Ministerio de Educación Francés determinó que para poder dar clases de matemáticas era necesario contar con estudios de matemáticas con terminación en la enseñanza; por lo que el estudiante se vio obligado a cursar otra maestría. En el caso mexicano ningún estudiante refirió contar con un nivel excelente de conocimientos. Esto nos indica que desde el punto de vista de los estudiantes mexicanos hace falta estudiar más a profundidad la disciplina de las matemáticas.

Nueve de doce estudiantes franceses coincidieron en su percepción de que su nivel de conocimientos matemáticos era suficiente, en el caso de los estudiantes mexicanos fueron trece de diecisiete quienes mencionaron que sus conocimientos también eran suficientes. En cuanto al nivel de conocimientos que tienen los futuros docentes para enseñar matemáticas, los resultados se pueden observar en la siguiente figura.

Figura 3. Categoría 2.1. El conocimiento del contenido pedagógico para la enseñanza.

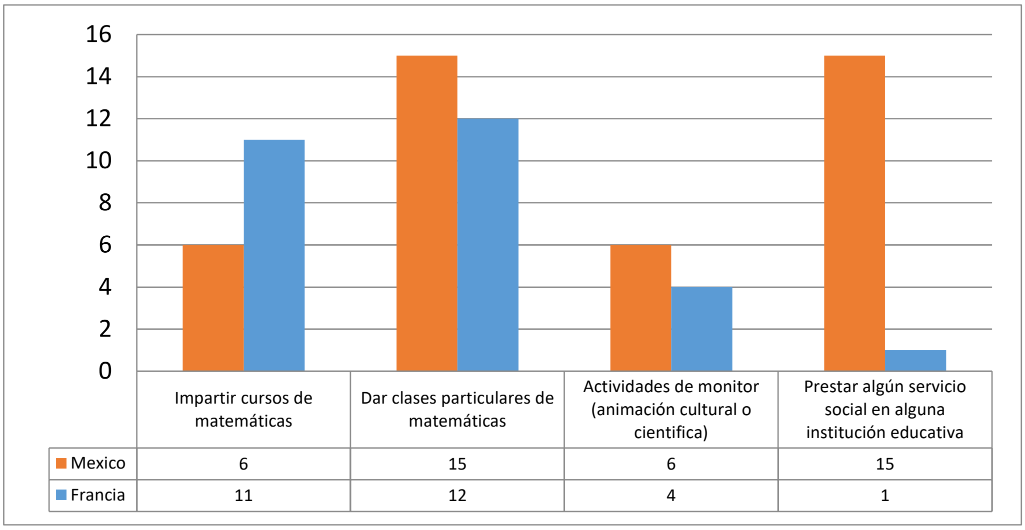


Fuente: Elaboración propia a partir de las respuestas emitidas de los estudiantes.

En el caso de los estudiantes franceses una tercera parte mencionó contar con conocimientos suficientes, al contrario de los estudiantes mexicanos nueve de diecisiete consideraron tener los conocimientos suficientes; esta situación se pudiera explicar debido a que en el caso mexicano el plan de estudios con el que se forman los futuros docentes contempla por ejemplo la asignatura: “La enseñanza en la escuela secundaria. Cuestiones básicas I y II”, durante dos semestres.

Tres de doce estudiantes franceses, consideraron que los conocimientos para enseñar son insuficientes, incluso una estudiante refirió que lamentaba desconocer algunos referentes teóricos para la enseñanza de las matemáticas, en el caso mexicano fueron dos de diecisiete.

Figura 3. Categoría 3. Experiencia personal relacionada con la educación.



Fuente: Elaboración propia a partir de las respuestas emitidas de los estudiantes.

La experiencia personal relacionada con la educación que tuvieron los estudiantes franceses y mexicanos coincide en que han impartido clases particulares de matemáticas. En Francia, los doce estudiantes que contestaron el cuestionario de la Universidad Paris Diderot-VII ha tenido ese acercamiento con la enseñanza de las matemáticas de manera particular; en México, de los diecisiete estudiantes que contestaron el cuestionario, quince mencionaron haber dado clases particulares de matemáticas.

Tanto los estudiantes franceses como mexicanos se han visto favorecidos al obtener esa experiencia en el proceso de enseñanza, pues al dar clases particulares de un tema en especifico de matemáticas para alumnos de primaria y/o secundaria se vieron obligados a buscar estrategias didácticas que favorecieran el logro del aprendizaje en los niños.

De los doce estudiantes franceses, sólo uno mencionó haber prestado un servicio social en una institución educativa por un periodo de tres meses, en cambio de los diecisiete estudiantes de México, quince dijeron haber prestado un servicio social en alguna institución educativa, dos estudiantes no contestaron. Esto en muy buena medida se explica por el plan de estudios de la escuela normal, pues establece que los alumnos que lleguen al séptimo semestre de la licenciatura deben realizar periodos de práctica intensiva repartidos a lo largo del ciclo escolar, hasta juntar 480 horas, las cuales se deben trabajar impartiendo clases de matemáticas, lo que es considerado como un servicio social a las escuelas secundarias.

Categoría 4: El conocimiento de los fines y propósitos de la enseñanza

La opinión de los estudiantes franceses y mexicanos sobre la enseñanza de las matemáticas en secundaria presenta diferencias, por ejemplo, nueve de los doce estudiantes franceses mencionaron que es suficiente para lo que necesita la sociedad, en cambio de los diecisiete estudiantes mexicanos, cinco dijeron que era suficiente para lo que necesita la sociedad.

En Francia, la enseñanza de las matemáticas en secundaria es considerada como un elemento de la cultura científica y va asociada al desarrollo de la ciencia y la tecnología, eso podría explicar la respuesta de los estudiantes de la Universidad Paris Diderot-VII. En México, el enfoque de la enseñanza de las matemáticas en secundaria es a partir de la resolución de problemas, se trata de que los alumnos sean capaces de resolverlos utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles fueron más eficaces; o bien, que puedan probar la eficacia de una forma de resolución al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para generalizar maneras de resolución (SEP, 2011).

Mientras que la enseñanza de las matemáticas en secundaria en México pretende desarrollar competencias como resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados y manejar técnicas eficientemente, en Francia los alumnos de secundaria realizan investigación matemática, desarrollan la imaginación y la capacidad de abstracción. Por esa razón, once de los diecisiete estudiantes mexicanos, coinciden en la opinión de que la enseñanza de las matemáticas en secundaria es inferior para lo que necesita la sociedad.

Conclusiones.

Las percepciones con respecto a lo que motivó a los estudiantes de ambos países para formarse como profesores de matemáticas coinciden en que tienen su origen en el gusto por resolver problemas matemáticos y por formar a jóvenes de secundaria. Además reconocen que durante el trayecto de su formación académica influyó algún profesor de matemáticas por la forma en que impartía los contenidos, lo que remite a pensar en la importancia del conocimiento pedagógico del contenido, que tiene a su vez sustento en la formación académica disciplinar de dicho profesor.

El conocimiento del contenido de las matemáticas así como el conocimiento del contenido pedagógico, son dimensiones fundamentales para la enseñanza; en este caso los estudiantes de ambos países percibieron como insuficiente dichos conocimientos. Este hallazgo es importante, ya que se puede contar con un currículum pertinente pero con un docente que carece del conocimiento del contenido y del conocimiento pedagógico, lo que podría generar una enseñanza insuficiente. Una línea de investigación que se podría generar a partir de lo anterior es la caracterización del conocimiento pedagógico de futuros profesores de matemáticas.

Con respecto a la experiencia personal que han tenido los estudiantes de Francia y de México referente a la experiencia docente que otorga la práctica misma, si bien dicha práctica docente ofrece altas posibilidades de lograr una enseñanza pertinente siempre que en ella se conjuguen los conocimientos disciplinares y pedagógicos de las matemáticas, con los conocimientos de los contextos que incluyen las características de los alumnos; en este estudio se puede apreciar que contar con mayor número de horas destinadas a la práctica docente no garantizan una mejor formación.

Un componente más que influye de manera directa en la formación de los docentes de matemáticas es el conocimiento de los fines y propósitos de la enseñanza; contar con dichos conocimientos ofrecerá una mayor claridad en los futuros profesores sobre su quehacer pedagógico.

Por último, es conveniente tener presente que las categorías abordadas en este estudio no concurren en el futuro profesor de manera estática, por lo que valdría la pena investigar como influye este dinamismo en la formación del profesorado de matemáticas.

Referencias

Acuerdo Nacional de Modernización de Educación Básica, ANMEB (1992). Diario Oficial de la Federación. Pág. 12. Recuperado de: http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/b490561c-5c33-4254-ad1c-aad33765928a/07104.pdf.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica, en ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá. Colombia. Impreso en México.

Badia, A. (2015). Factores que influyen en la percepción de los profesores de los beneficios instruccionales de los medios educativos digitales. En Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa. Vol. 21. Núm. 2. Universidad de Valencia. Recuperado de: https://ojs.uv.es/index.php/RELIEVE/article/view/7204/6869.

Chabanes, R. (1996). La formación de profesores en Francia. En Revista de Educación y Pedagogía. Recuperado de: http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/5729/5149

Chaves, E. (2011). Percepción de una muestra de profesores de matemáticas sobre la formación recibida en la universidad en Revista UNICIENCIA. Vol. 27 No. 2. ISSN electrónico 2214-3470. Universidad de Costa Rica.

Chaves, E. (2016). “Percepción de los docentes de primaria en ejercicio, acerca de las matemáticas y su enseñanza en relación con los programas oficiales del MEP”. En Revista UNICIENCIA. Vol. 30. No.1 ISSN electrónico 2215-3470. Universidad de Costa Rica.

Cortés y Sanabria (2012). Concepciones y creencias de profesores de matemáticas sobre resolución de problemas: un estudio de casos. En Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía. Santiago de Cali, Colombia.

Diccionario de la Real Academia Española (2017). Recuperado de: http://dle.rae.es/?w=diccionario

Dorier, J. L. (2007). Panorama de las matemáticas en la educación francesa desde el parvulario hasta la universidad. Publicado por el *Institut de Recherche sur l`enseignement des mathématiques de Paris* 7. Recuperado de: http://www.cfem.asso.fr/sysedufresp.pdf

EDUSCOL, (2013). *Les sites ressources des Écoles normales supérieures en Le site des professionnels de l`éducation.* Recuperado de: http://eduscol.education.fr/cid45856/sites-experts-ens.html

EDUSCOL, (2015). *Portail national des professionnels de l´éducation. Écoles supérieures du professorat et de l ´éducation. Ouverture des ESPE à la rentrée 2013.* Recuperado de*: http://eduscol.education.fr/cid66830/espe.html*

Friz, M. (2009). Concepciones en la enseñanza de la matemática en educación infantil". En Revista Perfiles Educativos. En Vol. 31. Núm. 25. México, D. F. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982009000300005

Friz, M, (2018). El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Concepciones de los futuros profesores del sur de Chile. En Revista Electrónica de Investigación Educativa. REDIE. Vol. 20. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1607-40412018000100059&script=sci_arttext

Friz, M. (2010). Concepciones de los futuros profesores de matemáticas sobre las competencias profesionales implicadas en la enseñanza de la estadística. II Congrés Internacional de DIDACTIQUES. Universidad Bio-Bio Chile. Recuperado de http://www.udg.edu/portals/3/didactiques2010/guiacdii/ACABADES%20FINALS/470.pdf

Friz, M. (2009). Concepciones en la enseñanza de la matemática en educación infantil. En Revista Perfiles Educativos. Vol 31. No. 125. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982009000300005

García, L., Azcarate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000100005

Gilbert, D. (1991). How mental systems relieve. American Psychology, 46 (2).

Godino J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. España. En Revista de Educación Iberoamericana de Educación Matemática. No. 20.

Godoy, F. A. (2012). Actitudes y percepciones de los estudiantes reprobados hacia las matemáticas : Un estudio de caso en el Tercer ciclo del Centro de Educación Básica Francisco Morazan, Municipio de Danlí, Departamento de El Paraíso. Tesis para obtener el grado Maestría.

Gómez-Chacón I. M. (2000). Matemática emocional. Los afectos del aprendizaje matemático. Editorial Narcea. Madrid, España.

ICMI, 2005. Comisión Internacional de Instrucción Matemática. *Quinzième Étude. La formation initiale et continue des professeurs de mathématiques*. Recuperado de: http://www-personal.umich.edu-dball/icmistudy15.html

Madrigal, E. (2011). Percepción de docentes sobre las competencias matemáticas y pedagógicas recibidas en su formación inicial. Reporte de tesis sobre la Percepción de docentes en servicio sobre las competencias matemáticas y pedagógicas recibidas en la carrera de bachillerato y Licenciatura en enseñanza de la matemática en la Universidad Nacional de Costa Rica. En Cuadernos de Investigación y Formación Matemática. Año 6. Número 9.

Ministerio de Educación Nacional Francés, (2012). *S`inscrire. Postes et contrats offerts aux concours du second dégrée. Session 2012*. Recuperado de: http://www.education.gouv.fr/cid4605/postes-offerts-aux-concours-de-la-session-2012.html#Concours de l'enseignement public

Mora y Barrantes (2008). "¿Qué es matemática? Creencias y concepciones en la enseñanza media costarricense". En cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Año 3. Núm. 4. Recuperado de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno4/cuaderno4_c4.pdf

Moreno y Azcarate (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. En Revista de Investigación Didáctica.. Vol. 21. Número 2. Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/13268099.pdf

Murillo J. y Román M. (2008). Resultados de aprendizaje en América Latina a partir de las evaluaciones nacionales. En Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa. Evaluación, Investigación e innovación. Vol. 1, Número 1. Recuperado de: http://www.rinace.net/riee/numeros/vol1-num1/art1_htm.html

Ortega, S. Y Castañeda M. A. (2009). El formador de formadores en México: entre la escuela y la academia. En aprendizaje y desarrollo profesional docente. Metas educativas 2021. Organización de los Estados Iberoamericanos. Fundación Santillana. Madrid, España.

Otero, M. R y et al. (2001). El conocimiento matemático de los estudiantes que ingresan a la universidad. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 4. Núm., 3. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México, D. F.

Ponte, J. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In J. P. Ponte (Ed.), Educação matemática: Temas de investigação. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. Recuperado de: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte

Rojas, F. y Deulofeu J. (2015). El formador de profesores de matemática: un análisis de las percepciones de sus prácticas instruccionales desde la tensión estudiante-formador. En Revista Enseñanza de las Ciencias. Vol. 33, tomo 1. Investigaciones didácticas. ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Shulman, L. S. (1987). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), Published by: American Educational Research Association. Recuperado de: https://www.jstor.org/stable/1175860?seq=1#metadata_info_tab_contents

SEP, (1999). Plan de estudios. Licenciatura en educación secundaria. Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académico de las Escuelas Normales PTFAEN. México.

SEP, (2011). Plan de estudios 2011. Educación Básica. Dirección General de Desarrollo Curricular. Primera edición México. D.F. Recuperado de: http://basica.sep.gob.mx/reformaintegral/sitio/pdf/secundaria/plan/PlanEstudios11.pdf

SEP, (2015). Guía para el sustentante. Concurso nacional para el otorgamiento de plazas docentes 2012-2013. Examen nacional de conocimientos, habilidades y competencias docentes para matemáticas en secundaria. Recuperado de: http://concursonacional.sep.gob.mx/CONAPD12/guias/guia_302.pdf

Sotomayor, C. y et. al. (2013). Percepción de los estudiantes de pedagogía sobre su formación inicial. En Revista Internacional de Investigación en Educación. Vol. 5. Número 11. ISSN 2027-1174. Bogotá, Colombia.

Vaillant, (2009). La formación de docentes de matemática: reveladores hallazgos. Grupo de Trabajo sobre Desarrollo Profesional Docente en América Latina. Programa de Promoción de la Reforma Educativa de América Latina y el Caribe. (Disponible en: http://www.preal.org/Grupo3NN.asp?Id_Noticia=215)

Vassiliou, A. (2012). La enseñanza de las matemáticas en Europa. Retos comunes y políticas nacionales. Red española de información sobre educación. Gobierno de España. Ministerio de Educación, cultura y deporte. EURYDICE Comisión Europea. Recuperado de: http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice

UNESCO, 2014. Enseñanza y aprendizaje. Lograr la calidad para todos. Informe de Seguimiento de la Educación Para Todos (EPT). Resumen. Informe de Seguimiento de la EPT en el mundo. París, Francia. Recuperado de: http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002256/225654s.pdf

Datos de autoras:

1. María del Rocío Juárez Eugenio. Doctora en Educación por la Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM). Maestría en Educación Superior por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). Miembro de la Sociedad Matemática Mexicana. Profesora-Investigadora de Tiempo Completo en la BUAP y Profesora (hora-clase) del Benemérito Instituto Normal del Estado de Puebla. Estudia la formación de docentes de matemáticas y la enseñanza de las matemáticas. Tel. 012228666413. Correo electrónico: rocil_1978@hotmail.com

2. María Anabell Aguilar Zaldívar. Doctora en Pedagogía por la Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla. Maestría en Educación Superior por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). Profesora-Investigadora de Tiempo Completo en el Benemérito Instituto Normal del Estado de Puebla (BINE). Perfil PRODEP (RPD). Responsable del Área de Investigación de la LEEAI del BINE. Estudia: Calidad educativa. Tel. 012227081588. Correo electrónico: bellz40@hotmail.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 55. Abril 2019
Páginas 54-70

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

A praxeological model of reference related to costs calculation: comparison with the ones developed in a research and study path at university level

Diana Patricia Salgado, María Rita Otero, Verónica Parra

Fecha de recepción:13/08/2018
Fecha de aceptación: 15/04/2019

Resumen	Este trabajo se encuadra dentro de una investigación más amplia cuyo objetivo general es enseñar matemática para no matemáticos en la universidad, adoptando las nociones centrales de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Se propone un modelo praxeológico de referencia sobre el cálculo de costos de un micro-emprendimiento y se lo compara con el modelo efectivamente desarrollado. La pregunta generatriz estudiada ¿Cómo calcular los costos en un micro-emprendimiento? involucra praxeologías matemáticas y económicas. Este modelo permite cubrir una parte del programa de estudios de un curso de Cálculo del nivel universitario. **Palabras clave**: cálculo, universidad, modelo praxeológico de referencia, teoría antropológica de lo didáctico.
Abstract	This work fits within a wider research whose general objective is teaching mathematics to non-mathematicians at the university, taking central assumptions of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). This work proposes a praxeological model of reference related to a micro-entrepreneurship costs calculation in comparison with the effectively developed model. The generative question How to calculate micro-entrepreneurship costs? links mathematical and economic praxeologies. This model allows to go through a part of the study programme of a university calculus course. **Keywords**: calculus, university, praxeological model of reference, anthropological theory of the didactic.
Resumo	Este trabalho enquadra-se dentro de uma investigação mais ampla cujo objetivo geral é ensinar matemática para não matemáticos na universidade, adotando as noções centrais da Teoría Antropológica do Didático (TAD). Propõe-se um modelo praxeológico de referência sobre o cálculo de custos de um micro-empreendimento e compará-lo com o modelo efetivamente desenvolvido. A pergunta geradora estudada: Como calcular os custos num micro-empreendimiento? envolve praxeologías matemáticas e económicas. Este modelo permite cobrir uma parte do programa de estudos de um curso de Cálculo do nível universitário. **Palabra-chave: cálculo, universidade, modelo praxeológico de referência, teoria antropológica do didático.**

1. Introduction

This work is part of a didactic research developed at university level. The institution is a public Argentine university, Universidad Nacional del Sur (UNS). Mathematics teaching characteristics at UNS satisfy the conditions that the ATD describes as visits to works. One of the objectives of the didactic research that is being realised refers to the analysis of the possibility conditions to deal with this phenomenon at least locally, taking the developments of the ATD such as the notions of research and study paths (RSP) and praxeological model of reference (PMR).

The RSP proposed has been implemented in two opportunities (N=38 and N=35 students) in a mathematics course corresponding to Enterprise Administration and Public Accountancy at the UNS. It begins with a question related to economy: *how to calculate micro-entrepreneurship costs?*

Firstly, a description of the PMR is presented in this article. It has been designed previous to these implementations. It would be possible through this RSP not only to study different institutional culture works, but also to produce the emergence of other researches. This model also helps us to detect which these “works” are and which of them are linked to the proposed curriculum.

In this PMR the mathematical and economic organizations giving answer to the generative and derived questions are presented. Particularly, the RSP would allow rebuilding mathematical organizations related to two-variable Calculus and an important part of the institutional proposed curriculum. Also, it would be possible to manage the involved organizations integration.

Secondly a general description of the developed RSP is commentated. Finally it is possible to make a comparison between the reference model and the implemented one giving answer to these questions: which paths do the teacher and the students go through? does this path coincide with any presented in the PMR? does it lead really to the study of part of the proposed curriculum? which are the effectively studied praxeologies?

Thus it is confirmed that the path followed by the groups of study is one of the possible paths detected by the PMR, between other conclusions.

In this way we highlight the importance of the PMR as an instrument of didactic and praxeological analysis even if the realization or not of an RSP.

2. Previous Researches

Different Calculus teaching researches are related to the didactical phenomenon of mathematical content disconnection, rigidity and atomization of mathematical organizations (Lucas, 2015; Trigueros, 2005). At university level and from ATD point of view, some investigations propose an inquiry-based calculus teaching (Barquero, 2009; Serrano, Bosch & Gascón, 2007).

Lucas (2015) points up the main characteristics of an MER (epistemological model of reference) structured by an activity diagram containing different mathematics paths in an RSP. The importance of the MER is emphasised as a provisional and relative system of reference from which the formulation of new didactic problems is possible.

Costa, Arlego and Otero (2013) design and implement a teaching by RSP in the context of an Engineering Faculty in Argentina. Recovering the vectorial calculus sense and *raisons d'être* was attempted in this path, integrating physic notions. The path permitted the approach to mathematical organizations included in the institutional curriculum.

On the other hand, Otero et al. (2013) promote and analyse the possibility conditions of a teaching in the sense proposed by the ATD at university level.

The PMR proposed in this work shows different paths in a teaching by RSP, in a regular math course at university level, integrating two-variable Calculus and Economy notions. Some results obtained in the RSP implemented can be found in Salgado, Otero and Parra (2017).

3. Theoretical framework

The reference knowledge analysis involved in a Research and Study Path (RSP) is an action the didactic researcher must be able to realize before carry out the teaching by RSP. This knowledge integrates the praxeological model of reference (PMR) (Chevallard, 2013) consisting in an always provisory and open analysis of the organizations or praxeologies of one or more disciplines, mathematics and economy in this case, the researcher would meet, or meet again, studying a question Q_0. What he must know or give himself the liberty to learn about Q_0 is not identified with what a professor knows or with the way he would answer Q_0. On the contrary, the researcher must adopt a precognitive posture, "ask the world" in which he is situated. In summary, the PMR underlies the whole teacher, student and researcher activity.

A PMR elaboration importance lies in its utility as a tool of didactic and praxeological analysis, being always of dynamic nature. Following up on the praxeological analysis implies formulating didactic questions as: Where does this "work" come from? Why is it there? How has it been learned by the institution? Which transformations has it suffered? On the other hand, all didactic analysis implies considering how is the praxeology pretended to teach so that it leads to identify the structure and the studied work functioning (Lucas, 2015).

A PMR elaboration is also important facing the didactic phenomenon that Chevallard (2005) metaphorically describes as *monumentalism*. Monumentalism is the predominant epistemological view of the traditional mathematics and other disciplines teaching, consisting in showing the knowledge already constructed. It is characterised by considering knowledge as a monument, that only could be admired, venerated, but never altered or deconstructed. Thus there is only one and monolithic mathematics and it has been and will be always the same. This monumentalistic epistemological conception promotes the idea that the mathematical knowledge is not the problem when teachers are organizing teaching and also, that mathematics is evident and transparent in the teaching process. Contrary, the ATD advocates for a new, emergent and non-monumental paradigm where the research and questioning the world are the rule. In this paradigm, knowledge is the product of questions related to social necessities into a given historical moment, affected by conditions and constraints of different levels, included humanity, society, pedagogy, social institutions, etc. This includes the moment where some mathematical knowledge has to be taught and studied at university in a certain moment. One relevant consequence originated by this epistemological point of point is that mathematics is useful treating everyday problems, like decisions making in economical, commercial, domains.

4. Description of the reference institution and the course

The institution is a public Argentine university, Universidad Nacional del Sur (UNS), with a departmental organization, so that exclusively the Mathematics Department lecture mathematics courses of all majors. Also, the courses are developed in a four-month form, the first one from March to June and the second one, from august to November. Particularly the mathematics courses have a theory-practice modality, where a professor lectures the theory class and one or more assistants are in charge of the practice class. This institution is characterised by a monumental viewpoint of mathematics teaching, like all those who respond to an official curriculum.

The proposed RSP pretends to go through the contents of the first year subject Matemática IIC (MIIC), second four-month period, in the degree of Enterprise Administration and Public Accountancy at the UNS. This subject study programme is divided in four modules:

- Sequences and series
- Linear equations systems. Matrix Algebra
- Several-variable functions
- Extremes of several-variable functions. Linear Programming.

The main objective of MIIC is to acquire notions related to the more-than-one variable functions analysis, placing emphasis in its application to administration and economic concrete problems. The programme is developed in two theoretical and two practical weekly classes of two hours each. The evaluation modality includes the approval of partial exams and a final one, both written ones.

5. Praxeological model of reference related to costs calculation

5.1. Generative question analysis

The PMR described in this work allows us to delimit and analyse the possible research and study paths that arise from the question Q_0: *How to calculate micro-*

entrepreneurship costs? We will see that the elaboration of a possible answer to Q_0 results in the study of different mathematical and economic organizations, for example, a mathematical organization (MO) related to differential Calculus and other economic one (EO) linked to costs calculation.

The starting question Q_0 allows the emergence of multiple economic questions as, for example, what is a micro-entrepreneurship about? which are the generated costs? which is the purpose of doing a costs calculation?, among others.

First questioning belongs to the notion of micro-entrepreneurship. If its definition and central characteristics are looked up in the Internet, one can find statements such as: micro-entrepreneurship is an earning generating company owned and run by its own entrepreneurs. They themselves work at these companies, in general, without employees. It is an individual or family project requiring very low capital investment. The notion of micro-entrepreneurship is associated to the idea of micro-credits, born in Bangladesh in the 70's when the economist Muhammad Yunus gave economic aid to a group of poor women to carry out a small business. This initiative led to the foundation of a social bank orientated to the poorest so they could go out of their misery.

The second questioning comes from the notion "costs", understood as all the money needed to produce and commercialise products, it is all that will be used to manufacture the products that will be sold later. So that, not everything that is an expense represents a cost. An important part corresponds to the necessary capital in order that the micro-enterprise could work. The capital is the value of what is possessed, whereas the cost is the value of what the company uses to generate a product.

Finally, the questioning about "why" a costs calculation must be done is very important for the micro-entrepreneur. In general, a costs study and calculation are needed to fix sale prices. Most enterprises fix their prices, principally and exclusively, taking into account costs, but also costs determination is elementary for decision making because it allows, for example:

- Determine business results (profit or loss)
- Evaluate the level of competitiveness
- Determine the marginal contribution and the equilibrium point
- Plan future investments
- Analyse the incorporation of new products.

Only over costs it is possible to make an enterprise control or manage because the sale price of a product can be fixed by the market.

5.2. First possible answers to the generative question

The first stage in the construction of an answer to Q_0 refers to the different hypotheses analysis that will determine, for example, the variables of the system. De Renolfi and Cardona (2007) affirm that different alternatives require the application of different types of costs, it does not exist an only one cost but different ones for different purposes. These authors consider that different hypotheses related to costs calculation exist; namely,

- H_1: costs behaviour following an independent variable
- H_2: costs relation to the possible product allocation
- H_3: calculation extension
- H_4: costs considering the relationship to the moment of the calculation
- H_5: the relationship to the decision making.

Taking into account the above-mentioned hypotheses, different costs considering each one are described below:

H_1: *costs behaviour following an independent variable*. This hypothesis is considered when the system to model refers to an enterprise whose objective is to fix the article sale price, to cover the minimal cost. Under H_1, the cost depends on one or more independent variables, for instance, production, level of activity, supplies, etc. In this case, costs are classified as fixed (FC) and variable (VC) costs. As a consequence, the total cost is the addition of both: C=FC+VC, which represents a first answer to Q_0. A fixed cost is that whose amount is constant, whatever the value of the independent variable. This does not mean that it is invariable in the long-term; for example, rent, insurances, etc. A variable cost is the one modified in relation to the independent variable value; for example, raw material, direct manpower, etc.

H_2: *Considering costs relation to the possible product allocation*, costs are classified as direct and indirect. Direct ones are those identified in every produced article, either in its physical aspect, or in its value. They are produced when the activity is carried out; they depend on the realization or not of it, for example, supplies, manpower related to the activity, etc. Indirect costs are those related indirectly to the articles. They are produced independently of the realization or not of a certain activity; for example, taxes, general accounts, fuel expenses, etc. In this case, the cost (C) is given by the addition of the direct (DC) and indirect (IC) costs: C=DC+IC, which represents a second answer to Q_0.

H_3: *considering the calculation extension*, costs are classified as total and partial. Total ones are those involved in the totality of a certain activity, while partial ones are those referring to a specific aspect of the activity. In this case, the cost (C) is given by the addition of the total (TC) and partial (PC) costs: C=TC+PC, which represents a third answer to Q_0.

H_4: *considering the relationship to the moment of the calculation*, costs are classified as real and estimated. Real costs also called historical, retrospective or resulting are those in which the enterprise incurred in a past activity. They are used to evaluate past actions and to control the management of the enterprise. Estimated costs, also called future, prospective or budgeted are those that could happen in a future situation during the manufacturing of a product.

H_5: *considering the relation to the decision making*, costs are classified as marginal, incremental, relevant and opportunity costs. Marginal cost is the cost of the last produced article or the cost required to increase the production in a unit. Incremental cost refers to how much the cost was raised on having increased the activity at a certain level. Relevant costs are those that have a special opportunity for every decision making. Finally, opportunity costs refer to the value of the rent that might be obtained if the resource was used in its better alternative.

The unitary cost is not included in this classification made by De Renolfi and Cardona. It represents the production cost of an article and it is important to fix the sale price. However, searching the Internet how to calculate the costs of a micro-entrepreneurship, principally the fixed, variable, total and unitary costs, are mentioned.

5.3. Construction of two models

After performing a costs analysis, the micro-entrepreneur estimates total production costs; he puts up all data in tables -considering hypotheses H_1 to H_5, or even a combination of them- and performs simple arithmetic operations to answer Q_0, by adding the registered information. This leads to consider both a mathematical organization related to arithmetic operations and an economic one referred to costs according each hypothesis.

Supposing that one wants to calculate the total costs, under H_1, it is necessary to determine the fixed and variable costs for the manufacturing of a product. Whereas the fixed ones (rent, salaries, electricity, gas, etc.) can be calculated monthly, the variable ones (materials for the production, packaging, delivery costs, etc.) can be calculated by produced unit. Table 1 shows a list of costs if only one product is manufactured:

Fixed	per month	Variable	per unit
Gas	F1	Materials	V1
Electricity	F2	Labels	V2
Rent	F3	Package	V3
Taxes	F4		
Fixed Costs per month	FC=F1+F2+F3	Total Variable Costs	VC=V1+V2+V3

Table 1. Costs in the manufacturing of an article

The total fixed monthly costs FC emerges from the addition of all fixed costs. The total variable costs per unit VC is the addition of the different manufacturing expenses. If x is the number of manufactured products in a month, the total cost is given by: $C = FC + VC \cdot x$, with FC, VC no negative real numbers.

If on the other hand, two articles are manufactured, variable costs are calculated per unit (see Table 2). The fixed monthly costs FC emerge from the addition of all fixed costs. VC1 and VC2 are the variable costs to manufacture articles 1 and 2, respectively.

Fixed	Per month	Variable		Per unit	total per unit
Gas	F1	Art. 1	Materials	V11	VC1=V11+V12+V13
Electricity	F2		Labels	V12	
Rent	F3		Package	V13	
Taxes	F4				
		Art. 2	Materials	V21	VC2=V21+V22+V23
			Labels	V22	
			Package	V23	
Fixed Costs	FC=F1+F2+F3+F4				

Table 2: Costs in the manufacture of two articles

If x and y are the number of articles 1 and 2 manufactured in a month, respectively, the total cost is given by: $C = FC + VC1 \cdot x + VC2 \cdot y$, with FC, $VC1$, $VC2$ no negative real numbers.

5.4. Derived questions from Q_0

The search of an answer to Q_0 originates more questions, such as:

Q_1: How many articles can one make with a certain amount of money?

Q_2: Which is the marginal cost?

Q_3: How does the total cost change considering a modification in the variable costs?

Q_4: Which are the maximum and the minimum cost?

A questioning about how to answer Q_1 to Q_4 emerges, what techniques to use, that we resume in Q_5: How do we reply to each of Q_1 to Q_4?

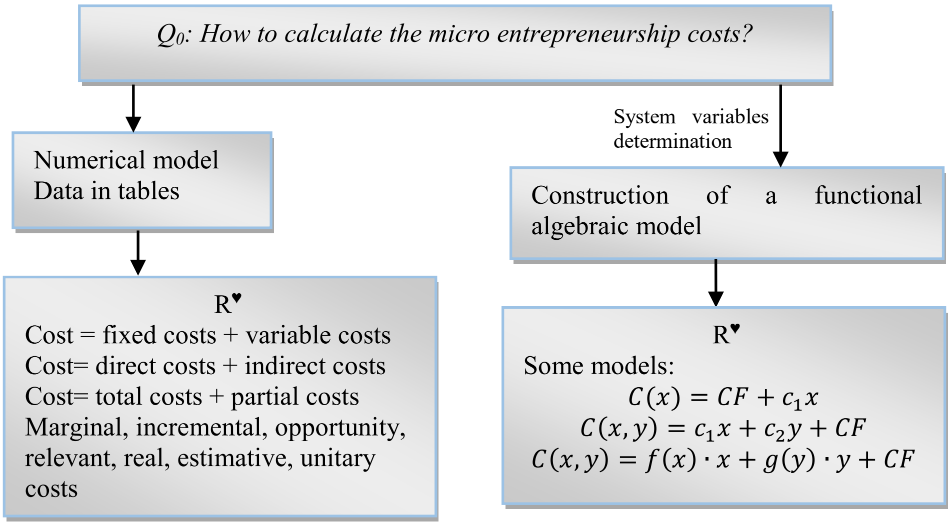
Considering a numerical model, where the micro-entrepreneur performs a regular register of the costs, one can deduce conclusions from these data in tables; such as, estimating short term costs, calculating marginal costs, analysing cost variation, determining how many articles can one manufacture with a certain budget, etc. From specific data, estimations or exact calculation will possibly be done in order to answer Q_1 to Q_4, among other questions.

Considering a functional algebraic model, if the micro-entrepreneurship, for example, is engaged in the production of two articles and it must face fixed and variable costs, the model $C = FC + VC1 \cdot x + VC2 \cdot y$, with FC, $VC1$, $VC2$ no negative real numbers, can be written as:

$$C(x, y) = c_1x + c_2y + FC$$

with FC representing fixed costs (rent, electricity, etc.), c_1, c_2 variable ones, and $C(x, y)$ the cost function with variables x and y. It will be showed that this model also allows us to answer *Q₁* to *Q₄*.

Up to here, two possible paths are detected (see Scheme 1). They allow to find answers not only to the generative question, but also to the derived ones.



Scheme 1: Two possible paths detected

Considering the functional algebraic model, one can describe an answer to *Q_1*. Supposing a certain amount of money or budget for expenses, the answer will indicate which the production with this budget is, which possibilities with this constraint are contemplated.

If one has an amount of *K* monetary units to carry out the project and to use it completely, one models this situation by the equation $C(x, y) = K$, which represents a level curve of the surface whose equation is $z = C(x, y)$. The curve corresponds to a set of points in the *XY* plane for which $z = K$, with K a positive constant. From an economic point of view, this is an isocost curve (Mochón and Beker, 2003) or boundary of possibilities. Every point (x, y) belonging to it brings a production level for which the cost is constant. If a point (x, y) doesn't belong to the curve, it means that, either the budget is exceeded or it is not used totally. Thus, all the points verifying $C(x, y) = c_1x + c_2y + FC = K$ represent possible solutions to *Q_1*. In this way, this analysis that answer *Q_1* allows to get into an economic organization related to costs and a mathematical one referred to two-variable calculus and notions of analytic geometry in the plane.

With regards to *Q_2: which is the marginal cost?* this means: how much the cost varies given an increase in one unit in the production level? In the case of the functional algebraic model in two variables considered here, the question can be reformulated as: *Given a fixed number of manufactured articles of one type, how* *does the cost change if an increase in the number of manufactured units of the other type happens?*

The rate of change of a variable in relation to another, here, how does C change given an increment of x or of y, requires to get into the "work" of derivative. In this way, given the function $z = C(x, y)$, one can answer *Q*2 by taking partial derivatives: $\frac{\partial C}{\partial x}$ and $\frac{\partial C}{\partial y}$. These derivatives evaluated in a point (x_0, y_0), have an economic interpretation, represent the approximated change of C for each unit increase in x (or y) keeping y (or x) fixed, which are called marginal costs.

For example, $\frac{\partial C}{\partial x}(x_0, y_0)$ represents the approximated change of C for each unit increase in x, keeping y fixed, at the moment in which the production level is $x = x_0$ and $y = y_0$.

Similarly, $\frac{\partial C}{\partial y}(x_0, y_0)$ represents the approximated change of C for each unit increase in y, keeping x fixed, at the moment in which the production level is $x = x_0$ and $y = y_0$.

The question *Q*3*: How does the total cost change considering a modification in the variable costs?* states that the parameters c_1 and c_2 can change. Supposing that one of these parameters changes and the other remains constant, the question can be reformulated as: *considering a fixed manufacturing cost of one of the articles, how does the total cost vary if an increase or decrease in the manufacturing cost of the other article happens?*

If c_1 and c_2 depend on the production, for example, $c_1 = f(x)$ and $c_2 = g(y)$, $C(x, y) = f(x) \cdot x + g(y) \cdot y + FC$, then the approximated changes of C are given by:

$\frac{\partial C}{\partial x} = f'(x) \cdot x + f(x) = c_1'(x) \cdot x + c_1$ and $\frac{\partial C}{\partial y} = g'(y) \cdot y + g(y) = c_2'(y) \cdot y + c_2$.

In this way, answering *Q*2 and *Q*3, one gets into an economic organization related to costs, specifically marginal costs, and a mathematical one referred to two-variable differential calculus.

Finally, considering the functional algebraic model, an answer to *Q*4*: Which are the maximum and the minimum cost?* can be found studying a mathematical organization referred to two-variable Differential Calculus.

The search of an answer to *Q*4 can generate more questions: how to calculate maximum (minimum) cost? what techniques to employ?, what constraints do the independent variables x and y have, if any? These questions are solved using techniques to find relative or absolute extreme values of the cost function $C(x, y)$. If there are not constraints for the variables, one can use techniques to find local or relative extreme values of $C(x, y)$, named stationary values. One of these techniques, under some assumptions, refers to finding the points where the partial derivatives are simultaneously equal to zero:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial C}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

On the other hand, if there are constrains, one employ techniques of constrained optimization. In the case that we are considering, the variables take positive values, then one has at least the restrictions: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Another possible constraint is that of fixing the production in a units so that one has to find the extremes of the cost function knowing that the total production is a units. This leads to search for the extremes of $C(x, y)$ subject to the equality $x + y = a$, with a positive integer, or the constraint could be an inequality $x + y \leq a$, if the production is up to a units. One can use techniques of extreme values calculation to solve this kind of problems, for example, the method of Lagrange multiplier - constraints given by one or more equalities- or techniques of linear programming - linear constraints, given by inequalities and linear cost function-, by solving the following systems respectively:

Extreme values with constraints given by equalities

$$\begin{cases} C(x,y)\text{: function to optimise} \\ \text{constraint given by: } a_1x + a_2y = a \\ \text{with } x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Linear programming

$$\begin{cases} C(x,y)\text{: linear function to optimise} \\ \text{constraints of the form: } a_1x + a_2y \leq a \\ \text{with } x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

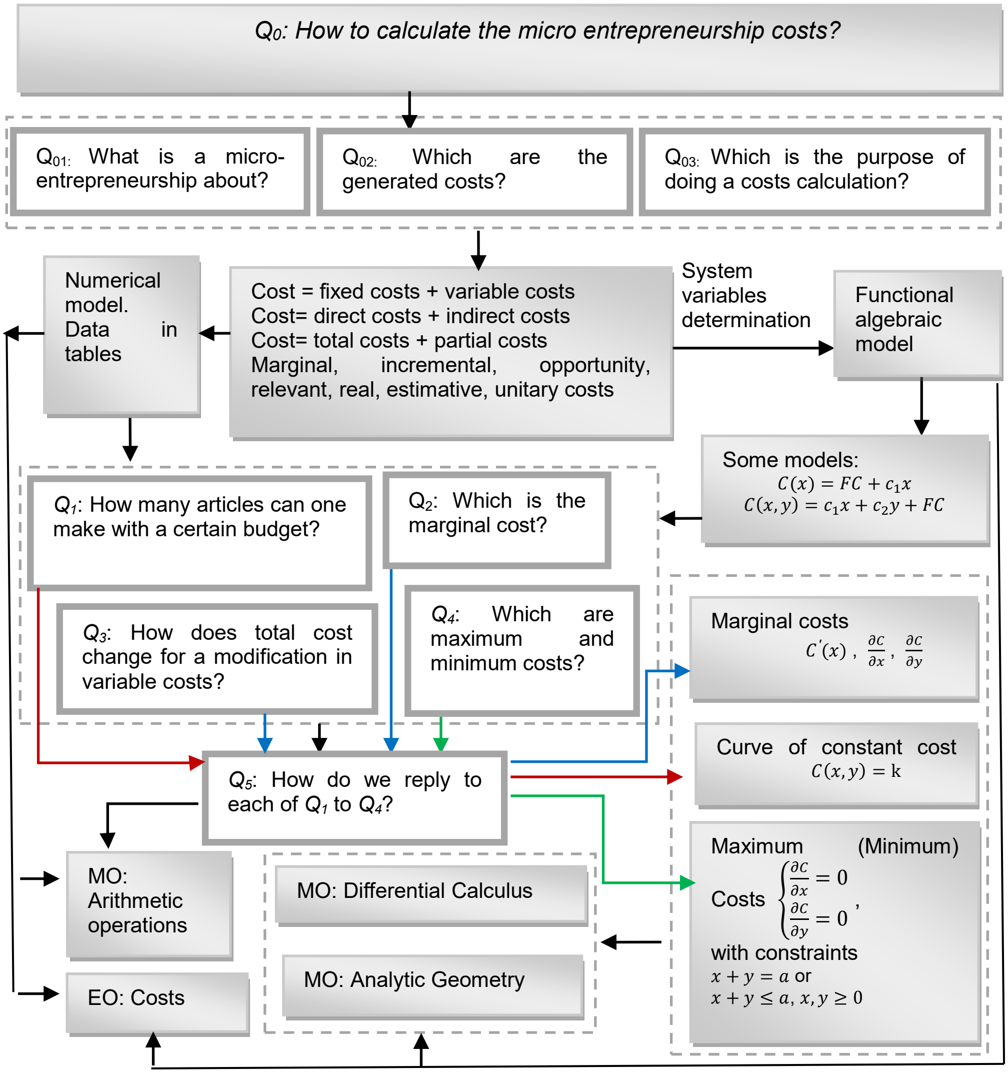


Figure 1: Generative and derived questions. Possible MO and EO to rebuild in the SRP

It is easily seen that considering the functional algebraic model the search of answers to questions Q_2 to Q_5, leads to the study of mathematical organizations referred to two-variable Differential Calculus, which includes dealing with functions of two variables, the calculation of partial derivatives and extreme values. The generative and derived questions are shown in Figure 1, as well as the possible organizations to rebuild in the research and study path.

6. Implemented Research and Study Path

The research and study path proposed was implemented in two opportunities, implementation 1 (IMPL1) and implementation 2 (IMPL2) during 2014 and 2015 respectively, in a course of Matemática IIA (MIIA) in the degree of Enterprise Administration and Public Accountancy at the UNS. Actually some changes have been carried out in the study programmes of these majors so that MIIA has been modified and was renamed as MIIC.

A detailed description of each performed path is not included in this work whose only objective is to compare these paths with the praxeological model of reference described in the last section, indicating principally which trajectories have been taken in IMPL1 and IMPL2 respectively.

Students were distributed in groups of 3 or 4 members each. Beginning the research and study path with the generative question Q_0, an important number of derived questions arose (see Table 3).

Derived questions in IMPL1	Derived questions in IMPL2
Q_1: Which is the cost to manufacture every article? Q_2: How can we predict the manufacturing cost of a certain amount of articles of each type? Q_3: How many articles of each type could we manufacture with a certain amount of money? Q_4: Which is the cost to produce one more unit of each product? $Q_{4,1}$: How is the relation between marginal and variable costs? $Q_{4,2}$: If total cost function were quadratic, how we could calculate marginal costs? $Q_{4,3}$: What are partial derivatives? How to calculate them? $Q_{4,3,1}$: Is the increase of a function equal to the derivative? Is it correct to write $C'(x_0, y_0) = C(x_0 + 1, y_0) - C(x_0, y_0)$? $Q_{4,3,2}$: If a partial derivative represents the slope of a tangent line, which is this tangent line? $Q_{4,3,3}$: Which are the two variable-function, tangent line and tangent plane graphics? $Q_{4,4}$: If a function is derivable in a point, this means that it is continuous in this point? $Q_{4,4,1}$: Derivable is the same that differentiable? Q_5: How does the demanded quantity vary with respect to the price? Q_6: How to minimize the costs, to produce more quantity at the same cost?	Q_{01}: What is a micro-entrepreneurship about? Q_{02}: Which are the generated costs? Which types of costs exist? Q_{03}: How to calculate them? Q_1: How to calculate the marginal cost? $Q_{1,1}$: Which would be the cost function if two articles are manufactured? $Q_{1,1,1}$: How is the proposed cost function graphic? $Q_{1,1,2}$: Which is the domain? $Q_{1,2}$: How to calculate the marginal cost of a two-variable function? $Q_{1,2,1}$: How to calculate partial derivatives? $Q_{1,2,2}$: If a function is derivable, it is also continuous? $Q_{1,2,3}$: What is a directional limit and what situations are presented in the cost calculation? $Q_{1,2,4}$: We know that the tangent line is related to the covered topics, how could we apply it to the micro-entrepreneurship example? Q_2: How many articles can we manufacture with a certain budget? Q_3: How does the time influence on our costs? Q_4: How does the cost vary in case of an increment in the number of manufactured articles? $Q_{4,1}$: What is a differentiable function? $Q_{4,2}$: How can I demonstrate that a function is differentiable? Q_5: How many articles do I have to sell monthly in order to have no loss? What is the minimum to produce in order to have no loss? $Q_{5,1}$: How to find the extremes of a two-variable function? $Q_{5,2}$: Which is the maximum utility that a micro-entrepreneurship can obtain? Which is the number of articles of every type that leads to that utility? $Q_{5,3}$: Which is the maximum or minimum utility according to a given budget? Idem for the maximum or minimum production. Q_6: How to calculate the total cost based on the marginal cost?

Table 3: Derived questions from Q_0

Referring to the trajectory gone through by the study groups (teacher and students) and the studied mathematical and economic organizations, both experiences showed similar results. The study group at each opportunity opted to a functional algebraic model as an instrument to answer Q_0 and the derived questions mentioned in Table 3. They determined the variables of the system and formulated a cost function that would allow to calculate the costs in a specific micro-entrepreneurship, performing simple arithmetic calculation to estimate some parameters (fixed and variable costs). Students choose this model because they expressed being part of a mathematics course so that they had to formulate a expression as a function.

The answers to questions, using the functional algebraic model led to the study of a mathematical organization related to two-variable differential Calculus including different works of the institutional culture (see Table 4). In this way it was possible to cover part of MIIA study programme.

Studied works in IMPL1	**Studied works in IMPL2**
Two variable-functions. Partial derivatives. Differentiability. Maximum and minimum calculation with and without constraints. Costs: fixed, variable and marginal costs.	Two variable-functions. Partial derivatives. Differentiability. Directional derivative. Maximum and minimum calculation with and without constraints. Costs: fixed, variable and marginal costs.

Table 4: Studied works

Also, it was possible to rejoin an economic organization related to costs. Both study groups studied marginal costs, isocost curves and extreme values of the cost function always taking the functional algebraic model as a reference. Although they began with a question referred to a micro-entrepreneurship, they did not make a deep economic study and they focused on the mathematical details trying to put results into context.

7. Discussion

Firstly, the praxeological model of reference shows that Q_0 is open and generates multiple questions that can result in the study and research of mathematical and economic organizations. Two possible paths are detected in order to search an answer to Q_0 one path using a numerical model and another, a functional algebraic one. In the first one, adequate costs are considered according to the micro-entrepreneur objectives which lead to meet an economic organization related to costs and a mathematical one referred to arithmetical operations. In the second one, the variable number determination will imply the one or more variable functions study. Therefore, to answer the derived questions, for instance, one will get into the mathematical organization study related to two-variable differential calculus. Another possible path is to consider firstly the numerical model and then to decide to take the functional model. While on the other hand the path corresponding to a functional algebraic model was the only one followed by IMPL1 and IMPL2.

In the mathematics university level course where the research and study path is performed, the search of an answer to Q_0 and its derived questions would allow, at least, rejoining a mathematical organization relative to two-variable calculus and an economic one referred to costs. This fact was confirmed by the performed IMPL1 and IMPL2, leading to the study of these contents related to the two-variable differential calculus: partial derivatives of, differentiability, directional derivative and maximum and minimum calculation with and without constraints. It led also to the study of different types of costs such as fixed, variable and marginal costs.

The answers to questions Q_0 to Q_5, described in the praxeological model of reference, using the functional algebraic model, could lead to the study of a mathematical organization related to two-variable differential calculus, which are part of modules 3 and 4 of MIIC study programme. Referring to this point, the performed implementations confirmed us that a research and study path beginning with Q_0 is an instrument to cover part of this subject study programme.

Referring specifically on the questions, an important number of them arose from the generative one during both experiences, remarking the open character of Q_0. Furthermore, different questions arose, different than those presented in the praxeological model of reference, which led to cover the same contents.

At last, we remark that it would be possible to go over the institutional proposed curriculum using a different pedagogy.

7. Conclusions

In this work we have initially presented a praxeological model of reference belonging to a research and study path related to a micro-entrepreneurship costs calculation and then some details of the one corresponding to an implemented research and study path. Later we emphasise the most important characteristics shared by them.

Possible paths are detected and pointed out in the praxeological model of reference; namely the one using a numerical model and a functional algebraic one. Besides, it is shown that these paths would allow going through a part of the reference institutional proposed curriculum.

This praxeological model of reference also shows that Q_0 is open and generates multiple questions that can result in the study and research of mathematical and economic organizations.

Two possible paths are observed in order to search and find an answer to Q_0, one path using a numerical model and another, a functional algebraic one. We notice that the last one was chosen by the study group in both implementations.

In the mathematics university level course where the research and study path is performed, Q_0 effectively allowed rejoining a mathematical organization relative to two-variable calculus and an economic one referred to costs. Therefore the answers to Q_0 and the derived questions, using the functional algebraic model, led to the study of mathematical organizations related to two-variable differential calculus, which are part of MIIC study programme. In this way, it was possible to go over the institutional proposed curriculum using a different pedagogy that introduce the mathematics in a university course where this discipline is not always well received by its students. Besides we make an alternative contribution to different proposed didactical researches in calculus teaching field (Sánchez-Matamoros, García & Llinares, 2008).

Further than the development of the research and study path, we remark the relevance of the praxeological model of reference as the didactic equipment of any teacher.

References

Barquero, B. (2009). Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2013). Analyses praxéologiques: esquisse d'un exemple. IUFM Toulouse, Francia. http://yves.chevallard.free.fr

Costa, V., Arlego, M. & Otero, M. R. (2013). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria, 7(14), 20-40.

De Renolfi, M. C. & Cardona, G. (2007). Costos forestales (Serie didáctica Nº 30). Universidad Nacional de Santiago del Estero. Argentina.

Lucas, C. (2015). Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional (Tesis Doctoral). Universidad de Vigo.

Mochón, F. & Beker, V. (2003). Economía: principios y aplicaciones. Buenos Aires: McGraw Hill Interamericana.

Otero, M.R., Fanaro, M.A., Corica, A.R., Llanos, V.C., Sureda P. & Parra, V. (2013). Teoría antropológica de lo Didáctico en el aula de matemática. Tandil, Buenos Aires: Dunken.

Salgado, D., Otero, M.R. & Parra, V. (2017). *Gestos didácticos en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación en el nivel universitario relativo al cálculo: el funcionamiento de las dialécticas. Perspectiva Educacional*, 56(1), 84-108.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la Matemática. RELIME*, *11*(2), 267-296.

Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Cómo hacer una previsión de ventas. Propuesta de un recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. Actas del II Congreso Internacional sobre la TAD. Francia. http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/25-Serrano_Bosch_Gascon_congres_TAD_2.pdf

Trigueros, M. (2005). *La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Educación Matemática*, 17(1), 5-31.

Autores:

Salgado Diana Patricia: Master in Mathematics by the National University of the South (UNS). Professor of Mathematics. Department of Mathematics (UNS). Bahía Blanca. Argentina. Student of the Ph.D. in Science Education at the National University of the Center of the Province of Buenos Aires (UNICEN). Email: dsalgado@uns.edu.ar

Otero María Rita: Profesora en Matemática y Física. Master in Educational Psychology by the National University of the Centre of the Province of Buenos Aires. Ph. D in Sciences teaching by the University of Burgos, Spain. Postdoctoral formation in the Université-Paris V. Principal Researcher in the CONICET and Professor of the Faculty of Sciences Exacts. Leader of the Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología. rotero@exa.unicen.edu.ar

Parra Verónica: Profesora en Matemática. Licenciada en Educacion Matemática, PhD in Science Teaching, Mathematics mention by the National University of the Centre of the Province of Buenos Aires (UNICEN). Postdoctoral formation in the University of Brest, France. Assistant Researcher in the CONICET and Professor of the Faculty of Sciences Exacts-UNICEN. Member of the Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). vparra@exa.unicen.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 55 – Abril 2019
Páginas 71-84

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Coordinación de Registros de Representación en el Aprendizaje de la Función Lineal

Marina Soto, Carlos Gabriel Herrera, Nora Elisa Pereyra

Fecha de recepción: 28/01/2019
Fecha de aceptación: 15/04/2019

Resumen	Teniendo en cuenta la teoría de Duval se plantea en esta investigación, analizar en alumnos que cursan tercer año de Escuela Secundaria, el nivel de coordinación entre registros de representación semiótica, de la función lineal. Se diseñó y aplicó un instrumento de recolección de datos, consistente en un cuestionario que implicó la realización de actividades cognitivas de tratamiento y conversión entre diferentes registros semióticos. Los resultados obtenidos demuestran, que en esta etapa, los alumnos presentan dificultades para realizar algunos tipos de conversiones, como así también en la actividad de tratamiento en un registro determinado, notándose además dificultades de interpretación, cuando la función es presentada en registro verbal o coloquial. **Palabras clave**: Registros Semióticos, Función Lineal
Abstract	According to Duval's theory, the objetive this research is to analyze the level of coordination among semiotic representations in the learning of the linear function, in the third year of the Secondary School, A data collection instrument consisting of a questionnaire that involved the realization of cognitive activities of treatment and conversion between semiotic registers, was designed and applied during the process of learning the concept. Results obtained show that the students have difficulties to perform some types of semiotic transformations, as well as in the treatment activity in a particular representation, and there were interpretation difficulties, when the function is presented in colloquial register. **Keywords**: Semiotic Representations, Linear Function
Resumo	Tendo em conta a teoria de Duval, esta pesquisa tem como objetivo analisar o nível de coordenação entre os registros de representação semiótica da função linear em alunos que estão em seu terceiro ano do ensino médio. Um instrumento de coleta de dados foi elaborado e aplicado, constituído por um questionário que envolveu a realização de atividades cognitivas de tratamento e conversão entre diferentes registros semióticos. Os resultados obtidos mostram que, nessa etapa, os alunos têm dificuldades para realizar alguns tipos de conversões, bem como na atividade de tratamento em um determinado registro, percebendo também dificuldades de interpretação, quando a função é apresentada em registro verbal ou coloquial. **Palavras-chave: R**egistros de Representação Semiótica, Função Linear

1. Introducción

Los objetos matemáticos son entes abstractos y por lo tanto su visualización se realiza a través de diferentes representaciones semióticas. Así por ejemplo, una función o una relación matemática entre dos variables puede expresarse a través de un conjunto de pares ordenados, de una tabla, de un gráfico o de una ecuación entre otros sistemas.
En ese contexto Duval (2006, p. 145) afirma

> “La actividad matemática requiere que aunque los individuos emplean diversos sistemas de representación semiótica (registros de representación), sólo elijan una según el propósito de la actividad. En otras palabras, la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados. Sin esta coordinación, dos representaciones diferentes significarían dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si se tratara de dos contextos de representación diferentes del mismo objeto”. (Duval, 2006, p. 145)

El concepto matemático función se puede expresar en una multiplicidad de registros y genera diferentes niveles de abstracción y de significados, siendo considerado además como uno de los puntos centrales en los currículos escolares, comenzando su estudio en niveles de educación secundario donde se trabaja con distintos tipos de funciones empezando por la función lineal, que es el punto de análisis en este trabajo.

> “En el caso del concepto matemático función, se documenta que existe una amplia variedad de obstáculos y dificultades en el aprendizaje de los significados asociados a su estudio, especialmente en la etapa transitoria, desde una etapa inicial de comprensión, donde el citado concepto es concebido de una manera intuitiva o basado en la experiencia, a otra etapa, cuando se especifica mediante una definición formal a través de la deducción lógica” (Cuesta Borges, Piquet, Méndez Salazar, 2010, p. 8).

Algunas de estas dificultades se hallan en la articulación entre las diferentes maneras de representar el concepto; la idea de traducción surge de los trabajos de Janvier (1987), en cuyo análisis se abordan las conversiones entre distintos tipos de representación tales como verbal, tabular, gráfica, expresión algebraica.

Diversas investigaciones abordan el estudio del proceso de aprendizaje del concepto de función desde la perspectiva de los registros semióticos de representación, como por ejemplo (Prada-Núñez, Hernández-Suárez, Ramírez-Leal, 2016) quienes concluyen que existen deficiencias en el manejo del concepto función y dificultades en las representaciones semióticas en especial en lo referente a la lectura y comprensión de gráficos. También la noción que poseen los estudiantes no se corresponde con una definición formal; en su lugar, manifiestan una serie de variaciones conceptuales que, en algunos casos, se encuentran más próximas a una noción intuitiva (Núñez, Hernández-Suárez, Contreras, 2017). En el mismo sentido (Perdomo, Tafur, Martínez, 2015) consideran además los criterios de congruencia en las actividades cognitivas de conversión de representaciones semióticas del concepto función lineal. Es decir que se ha detectado en diferentes investigaciones que la comprensión del concepto está estrechamente vinculado a las actividades de conversión de los diferentes registros de representación del objeto matemático. En (Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen, Gorrochategui, 2012) se hace mención a la importancia en la enseñanza de la matemática del dominio de los registros semióticos y el manejo de más de uno de ellos implica una mejor comprensión. Retamal (1998) concluye que los estudiantes tienden a trabajar en un solo registro con prevalencia del registro algebraico, situación que también se ha detectado en alumnos que finalizaron este ciclo y se encuentran en etapa de ingresar a la Universidad. (Sastre Vázquez, D'Andrea, Villacampa, Navarro González, 2013).

La presente investigación se plantea en el marco de una escuela secundaria de la ciudad de Catamarca, Argentina, en el tercer curso del Ciclo Básico de Nueva Escuela Secundaria (14 años de edad) durante el proceso de aprendizaje del concepto Función Lineal. Este concepto aparece en los diseños curriculares del Ciclo Básico de la Escuela Secundaria, por ejemplo (Ministerio de Educación de Chubut, 2014, p. 10) donde se explicita que el alumno debe "Reconocer y formular funciones lineales en diversos registros" en el tercer año de este ciclo.

En ese sentido y de acuerdo a lo citado precedentemente se planteó como objetivo de la investigación:

Analizar, en alumnos que cursan el tercer año del ciclo Nueva Escuela Secundaria, el nivel de coordinación entre registros de representación semiótica en el aprendizaje del concepto matemático función.

Se trata de una investigación de carácter descriptivo, ya que intenta describir situaciones y eventos. "Los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que sea sometido a análisis (Dankhe, 1986 citado por Hernández Sampieri). La población en estudio corresponde a alumnos que cursan el tercer año de la Nueva Escuela Secundaria (14 años), en la ciudad de Catamarca, República Argentina, habiéndose considerado para el análisis, un grupo de nueve (9) alumnos.

El instrumento de recolección de datos consistió en un cuestionario consistente en tres ítems, cuyo objetivo fue analizar si identifican una función a partir de diferentes registros de representación y además, realizar actividades cognitivas de tratamiento y conversión entre dichos registros.

2 Marco Teórico

2.1 Registros Semióticos de Duval

La investigación está fundamentada en la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas propuesta por Duval, (1998) quien sostiene que los objetos matemáticos sólo son accesibles mediante sus respectivos registros de representación; siendo fundamental en el proceso de aprendizaje, que los alumnos logren identificar un objeto matemático a partir de diferentes representaciones semióticas y de este modo puedan coordinar dichos registros a través de actividades cognitivas de tratamiento y conversión.

> "Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación. Una

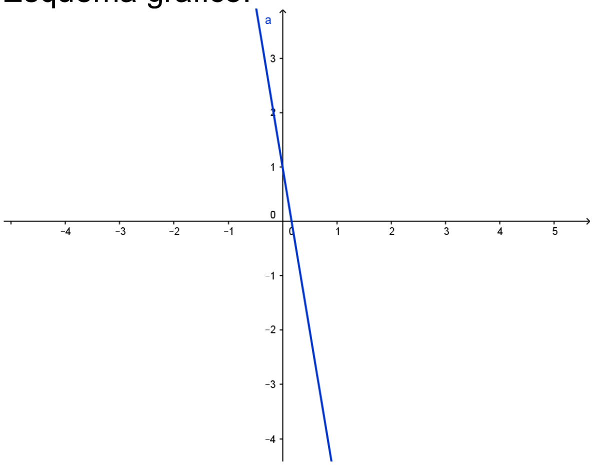
> figura geométrica, un enunciado en lenguaje natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes" (Duval, 1998, p. 175)

Según (Duval, 1998) para que un sistema semiótico pueda constituir un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

- La formación de una representación identificable dentro de un registro dado. Esta formación debe respetar las reglas propias del registro semiótico en el cual se produce la representación, la función de estas reglas es asegurar las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación, así como también la posibilidad de su utilización para los tratamientos.
- El tratamiento de una representación, que es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna equivalente en un registro. Por ejemplo, la transformación equivalente de una expresión algebraica.
- La conversión de una representación, que es la transformación de esta representación en una representación dentro de otro registro, conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. Por ejemplo, la transformación de una expresión algebraica en una gráfica, o viceversa.

En el caso de la función lineal existen diferentes representaciones semióticas como por ejemplo (Oviedo et.al, 2012):

a) Registro Semiótico: lenguaje algebraico, mencionando dos tipos de representaciones la escritura conjuntista $\{(x, y) / y = -6x +1, x \in R \}$ y la escritura funcional $(y = f(x) : x \rightarrow -6x+1)$
b) Esquema gráfico:



c) Registro Semiótico: lenguaje coloquial, diferenciando dos tipos de representaciones semióticas "una recta de pendiente -6 y ordenada del origen 1" ó "a la variable x se la multiplica por -6 y se le suma 1". (Oviedo et.al, 2012, p. 33)

De acuerdo a este autor existen diversos registros semióticos del concepto función lineal que a su vez pueden tener más de una representación.

A los efectos de esta investigación, se emplearon cuatro tipos de representaciones semióticas de la función lineal: lenguaje coloquial, esquema gráfico, lenguaje algebraico (escritura funcional) y se añade la representación tabular.

Otro elemento a tener en cuenta en las actividades de conversión, es la congruencia o no congruencia, entre los registros de representación. Según Duval (1999), la conversión entre dos representaciones es congruente, si al segmentar cada una de las representaciones en sus unidades significantes, se cumplen tres criterios: correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro, univocidad semántica terminal y conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones. El primero de estos criterios hace referencia a que a cada unidad significante del registro de partida, se le puede asociar una unidad significante elemental en el registro de llegada; el segundo, que a cada unidad significante elemental de la representación de partida, se la relaciona con una única unidad significante elemental en el registro de llegada, y el tercero se refiere a que debe existir igual orden entre las unidades significantes en las dos representaciones. (Duval, 1999)

3 – Metodología

3.1 Instrumento de recolección de datos

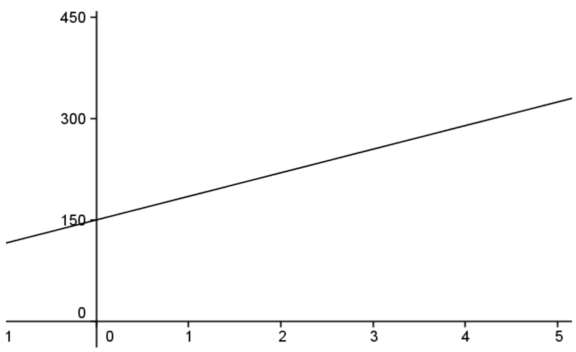
El instrumento de recolección de datos se aplicó durante el proceso de enseñanza del tema en estudio: el concepto función. Se describen a continuación cada una de las situaciones planteadas a los alumnos:

Item 1 ¿Crees que las siguientes expresiones representan la misma situación? Justifica tu respuesta.

a) Daiana cobra un sueldo fijo de $150,00 más una comisión de $35,00 por cada libro que vende.
b) Si x representa los libros que vende e “y” representa sueldo mas comisión:

x	0	1	2	4
y	150	185	220	290

c) y = 35x + 150
d)



Objetivo: reconocer una función lineal a partir de diferentes registros de representación semiótica. Esta actividad requiere diferentes actividades de conversión de registros de representación semiótica, ya que el enunciado está presentado en registro coloquial, y los estudiantes deben indicar si la tabla que se presenta en el inciso b) se corresponde con la expresión dada en el inciso a) de este ejercicio, lo cual conlleva una conversión del registro verbal al tabular. Luego, deben llevar a cabo la conversión al registro algebraico y gráfico.

Ítem 2: Gastón contrato el servicio telefónico de internet a una empresa que cobra $120,00 fijos por mes, más $2,00 por hora de conexión.

a) Completen la tabla de valores, siendo la variable **"X",** las horas de conexión mientras que la variable **"Y"** representa el valor del servicio telefónico.

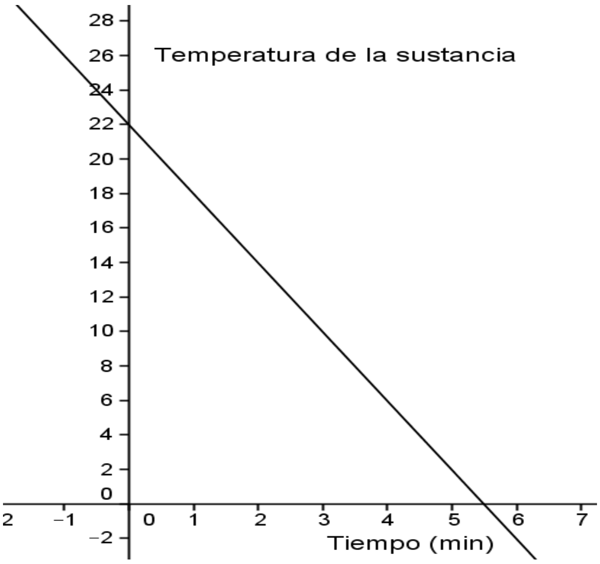
X	0	1	2	5
Y				

b) Realiza el gráfico correspondiente con los datos de la tabla.
c) Escriba la fórmula que permita calcular el costo total "**Y"** a pagar, sabiendo la cantidad de horas de conexión "**X"**.
d) ¿Cuál es el costo total que Gastón pagará por el servicio si utilizó 120 horas de internet en el mes?

Objetivo: Expresar una función dada en representación verbal o coloquial, en las representaciones tabular, algebraica y gráfica.

Desde el punto de vista de la Teoría de Duval, en esta actividad los estudiantes deben realizar actividades cognitivas de conversión de registros semióticos de representación; en un primer caso, de registro verbal a registro tabular (inciso a), en otro, teniendo en cuenta la tabla de valores, de registro tabular a registro gráfico (inciso b) y por último, de registro verbal a su respectivo registro algebraico (inciso c). Además, en el inciso d) tienen que llevar a cabo una actividad cognitiva que se conoce como tratamiento, el que se debe efectuar a partir de la ecuación obtenida en el inciso c) puesto que deben calcular el valor de variable "v" costo del servicio en función de la variable "h", cantidad de horas conectado.

Ítem 3: Una sustancia se encuentra a 22°C, y a partir del comienzo de un experimento su temperatura disminuye de manera uniforme a razón de 4°C por minuto, como lo muestra el siguiente gráfico



a) ¿Qué temperatura alcanzo la sustancia 6 minutos después del comienzo del experimento?
b) ¿Cuánto tiempo había transcurrido cuando la temperatura alcanzo los 0°C?
c) Si **X** representa el tiempo transcurrido en minutos desde que comienza el experimento, e **Y** representa la temperatura de la sustancia, ¿Cuál o cuáles de estas expresiones representa mejor la situación? ¿por qué?
$Y = 22 + 4X$
$Y = 22 – 4X$
$Y = 22 - X$
$Y = - 4X + 22$
$Y = - 4X - 22$

Objetivo: Analizar si interpretan la representación gráfica de la función, determinando el valor de una variable. Se trata de actividades cognitivas de tratamiento en el marco geométrico. En el tercer apartado se solicita que identifiquen la ecuación que representa la gráfica, lo que conlleva una actividad de conversión de registro gráfico al algebraico.

3.2 Análisis de congruencia entre las diferentes representaciones.

Para el análisis de congruencia en las actividades cognitivas de conversión de registros semióticos de representación, se determina, para el primer Ítem, las variables y unidades significantes correspondientes a cada registro de acuerdo a Tablas 1,2,3.

REGISTRO VERBAL	
VARIABLES	**UNIDADES SIGNIFICANTES**
Comisión por ventas	Se incrementa a razón constante. Cobra $ 35 adicionales por cada libro que vende
Sueldo fijo	$ 150.00

Tabla 1: análisis de variables y unidades significantes del registro verbal correspondientes al Ítem 1 del Instrumento de recolección de datos.

REGISTRO ALGEBRAICO y = 35.x + 150	
VARIABLES	**UNIDADES SIGNIFICANTES**
Pendiente de la recta: la relación entre variación de y, variación de x	m = 35
Sueldo inicial	El sueldo es de $150

Tabla 2: análisis de variables y unidades significantes del registro algebraico correspondientes al Ítem 1 del Instrumento de recolección de datos.

REGISTRO GRÁFICO	
VARIABLES	**UNIDADES SIGNIFICANTES**
Sentido de inclinación de la recta.	Ascendente de izquierda a derecha
La posición del trazo respecto al origen del eje vertical	Corta al eje de ordenadas por arriba del origen

Tabla 3: análisis de variables y unidades significantes del registro gráfico correspondientes al Ítem 1 del Instrumento de recolección de datos.

Del análisis de las variables y unidades significantes correspondientes a cada uno de los registros de representación semiótica de la función descripta en Ítem N° 1 del cuestionario, se puede afirmar que se cumple lo concerniente a correspondencia semántica, pues a cada unidad significante del registro verbal se le puede asignar una unidad significante en el registro algebraico y en el registro gráfico, tal como se puede observar en las Tablas 1,2,3.

Ejemplo: en registro verbal, el sueldo inicial se le asigna en el registro algebraico el valor del término independiente de la función \$ 150.00, que se corresponde con la intersección de la recta con el eje de ordenadas en el registro gráfico, y que se encuentra por arriba del origen de coordenadas, es un valor positivo. Esta relación es única, por lo que también se verifica la condición de univocidad terminal, como así también la conservación del orden. Estas condiciones también se cumplen para la otra variable y su unidad significante, que en el registro verbal, corresponde a la comisión por libro vendido, en el registro algebraico es la relación entre la variación del sueldo percibido respecto a la cantidad de libros vendidos, que es un valor constante, y que en el registro gráfico es el sentido de inclinación de la recta.

Córdoba (2008) sostiene que cuando la conversión se realiza desde la escritura algebraica hacia el gráfico, no parece haber inconvenientes, mientras que sí hay dificultad en la conversión inversa. Esto puede ser consecuencia de un desconocimiento de las unidades significantes del registro gráfico ya que estos no están determinados por la relación con los puntos constituidos en un sistema cartesiano. Es decir, que para la conversión del registro algebraico al registro gráfico se puede realizar a través del dibujo de una serie de puntos en un plano cartesiano sin que implique el conocimiento del registro gráfico, por ello la actividad inversa se les dificulta.

La conversión de registro tabular a registro gráfico puede ser congruente o no congruente, de acuerdo al criterio de aprehensión entre las unidades significantes, por ejemplo, si se invierte el orden correspondiente a la representación gráfica, la actividad de conversión no es congruente. (Perdomo, et al., 2015). Respecto a ítems 2 y 3 del cuestionario, se trata de funciones de similares características al ítem 1 por lo que también verifican los criterios de congruencia entre los diferentes registros de representación.

4 Resultados

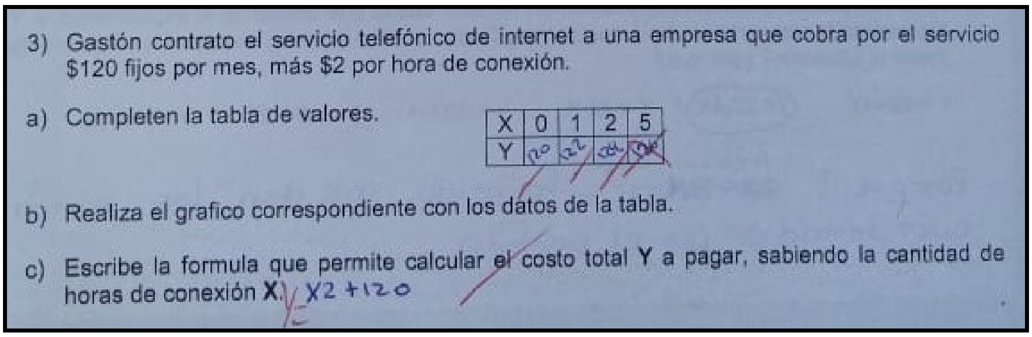
En Tabla 4 se presentan, en porcentajes, los resultados de las producciones de los alumnos respecto de los tres ítems del Instrumento de recolección de datos.

Respecto del primer ítem del instrumento, dos alumnos logran identificar la función a partir de los cuatro registros de representación presentados, realizando las actividades de conversión correctamente, siendo importante destacar que los alumnos obtienen la expresión algebraica, a partir de la gráfica de la función, la cual fue construida con ayuda de la tabla solicitada en el segundo apartado. Un grupo de tres alumnos determinan los valores de la tabla, realizan el gráfico a partir de tabla, pero no logran determinar la expresión algebraica de la función, dos alumnos tuvieron dificultades para tabular los datos, no logran realizar conversión a ningún otro registro de representación partiendo del registro coloquial mientras que dos alumnos no responden. Se observan dificultades en determinar la representación algebraica.

Item N°	*Tipo de Actividad Cognitiva*	*Respuestas Correctas*	*Respuestas parcialm. Correctas*	*Respuestas Incorrectas*	*No responde*
1	Conversión de registros de Representación	2	3	2	2
2	Conversión de registro verbal a tabular	6	3	0	0
	Conversión de registro tabular a gráfico	2	0	5	2
	Conversión de registro verbal a algebraico	5	0	1	3
	Actividad cognitiva de tratamiento en un registro determinado	2	3	1	3
3	Actividad cognitiva de tratamiento en un registro determinado	4	0	2	3
	Actividad cognitiva de tratamiento en un registro determinado	4	0	2	3
	Conversión de registro gráfico a algebraico	0	5	1	3

Tabla 4: frecuencias de respuestas de los diferentes ítems del instrumento de recolección de datos.

El segundo ítem se discrimina por actividad, observándose que en los dos primeros apartados, seis alumnos determinan los valores de la tabla pero sólo dos realizan la gráfica correctamente. Del mismo modo, cinco alumnos determinan la expresión algebraica de la función planteada, mientras que tuvieron dificultades en determinar el valor de una variable en función de otra, es decir, una actividad cognitiva de tratamiento que se solicitaba en el último apartado del ítem, y que sólo fue realizada por dos alumnos. Esta actividad requería de la formulación algebraica de la función. En Figuras 1, 2 se puede observar la producción de un alumno respecto a la resolución de los diferentes apartados del Ítem 2 del Instrumento de Recolección de Datos, quién tabula correctamente los valores de las variables de la función, identifica su ecuación y dibuja su correspondiente representación gráfica.


3) Gastón contrato el servicio telefónico de internet a una empresa que cobra por el servicio $120 fijos por mes, más $2 por hora de conexión.

a) Completen la tabla de valores.

X	0	1	2	5
Y	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

b) Realiza el grafico correspondiente con los datos de la tabla.

c) Escribe la formula que permite calcular el costo total Y a pagar, sabiendo la cantidad de horas de conexión X. Y= X2 +120

Figura 1: Producción de Alumno respecto al Ítem 2 del Instrumento de Recolección de Datos.

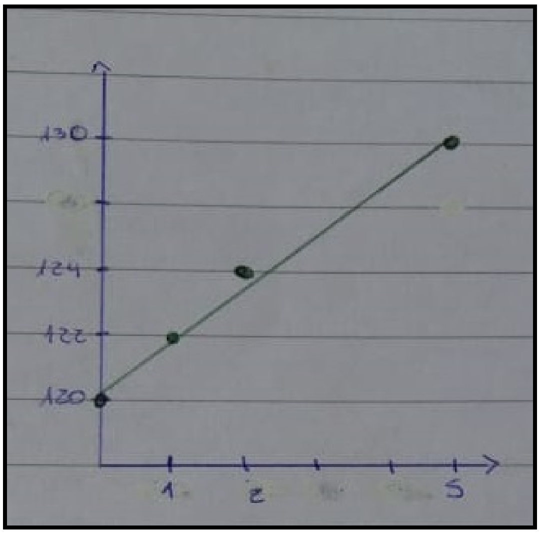
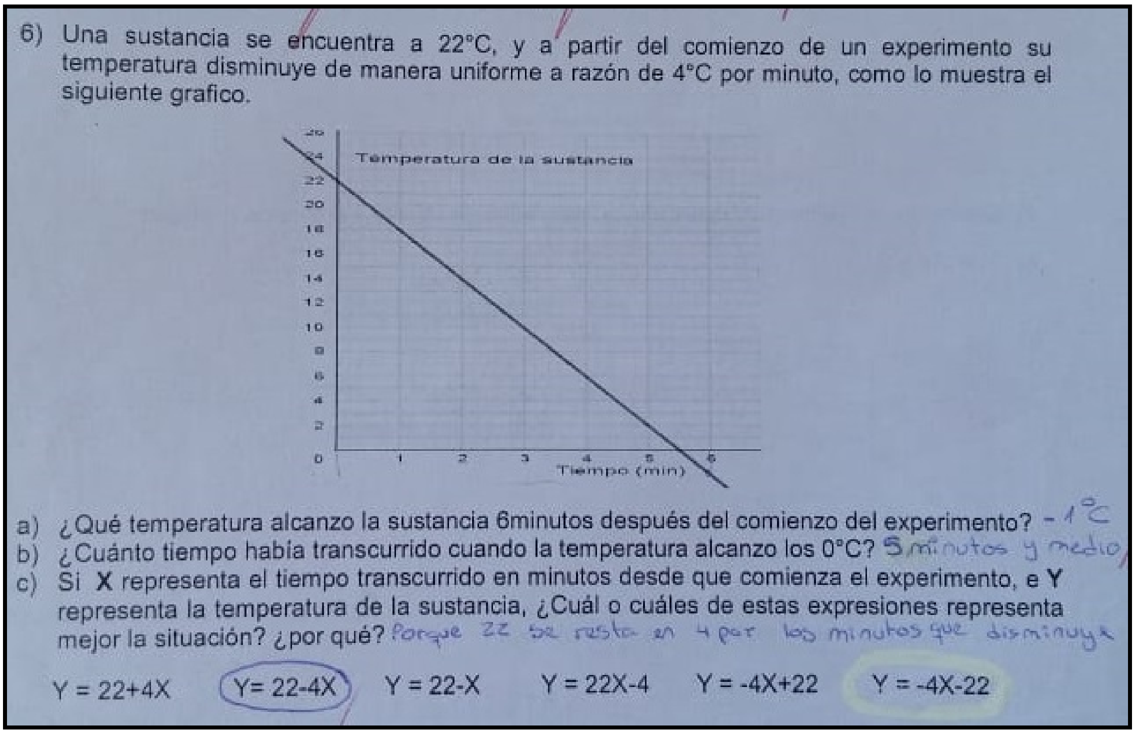


Figura 2: ¨Producción de Alumno respecto a la representación gráfica del Ítem 2 del Instrumento de Recolección de Datos.

En el tercer ítem del instrumento, cuatro alumnos responden correctamente los dos primeros apartados del mismo, es decir que pueden determinar el valor de las variables en función de otras (Temperatura en función de tiempo) a partir del registro gráfico, lo que de acuerdo al marco teórico se trata de una actividad cognitiva de tratamiento en dicho registro. El tercer apartado no es respondido por ningún alumno, es decir tuvieron dificultades para realizar la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico, ya que se solicitaba la ecuación y = f(x), siendo "y" la variable Temperatura y "x" es la variable tiempo. En Figura 3 se presenta la producción de otro alumno que responde correctamente los dos primeros apartados del Ítem 3, donde se solicita el valor de una variable de acuerdo al valor de la otra variable a partir de la representación gráfica y la ecuación de la función lineal que representa la línea recta.


6) Una sustancia se encuentra a 22°C, y a partir del comienzo de un experimento su temperatura disminuye de manera uniforme a razón de 4°C por minuto, como lo muestra el siguiente grafico.

a) ¿Qué temperatura alcanzo la sustancia 6minutos después del comienzo del experimento? -1°C
b) ¿Cuánto tiempo había transcurrido cuando la temperatura alcanzo los 0°C? 5 minutos y medio
c) Si **X** representa el tiempo transcurrido en minutos desde que comienza el experimento, e **Y** representa la temperatura de la sustancia, ¿Cuál o cuáles de estas expresiones representa mejor la situación? ¿por qué? Porque 22 se resta en 4 por los minutos que disminuye

Y = 22+4X   Y= 22-4X   Y = 22-X   Y = 22X-4   Y = -4X+22   Y = -4X-22

Figura 3: Producción de un Alumno respecto al Ítem 3 del Instrumento de Recolección de Datos

5 Conclusiones

Desde el punto de vista de la conversión de registros de representación semióticos, se observaron dificultades en algunos tipos de conversiones, especialmente del registro gráfico al registro algebraico y en el segundo ítem, la conversión del registro tabular al gráfico, posiblemente por la no congruencia de la conversión si se invierte el orden en la representación gráfica.

También se observan, en primera instancia, dificultades de interpretación cuando la situación es presentada en registro coloquial, posiblemente por la falta de entrenamiento en problemas planteados en este tipo de registro.

Si bien no se observa en este grupo de alumnos, que las actividades de coordinación entre diferentes representaciones semióticas del concepto en estudio se lleve a cabo en forma espontánea, esto se justificaría, por tratarse de alumnos que se encuentran en una etapa inicial del estudio de relaciones y funciones.

En algunos, casos la falta de coordinación de registros, puede ser consecuencia del desconocimiento de alguno de ellos por parte de los estudiantes, y no porque la actividad de conversión sea congruente o no congruente. Por ejemplo, el pasaje del registro tabular al registro gráfico en este tipo de funciones, no implica que el alumno identifique correctamente las variables y unidades significantes en este registro, sino que la conversión se puede realizar marcando puntos en el plano cartesiano.

La coordinación entre diferentes registros de representación de la función lineal es una actividad que no es sencilla por parte de los estudiantes. Esta actividad puede ser fortalecida por el uso de diferentes herramientas tecnológicas en la etapa instructiva del estudio de funciones, como por ejemplo el uso software de geometría dinámica que permita trabajar en un marco algebraico, y un marco geométrico simultáneamente.

Bibliografía

Córdoba, A. (2008). *Análisis semiótico de la función lineal en el álgebra de Baldor*. Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Repositorio Digital de Educación Matemática. Universidad de los Andes. Colombia. http://funes.uniandes.edu.co/11917/1/Cordoba2008Analisis.pdf

Cuesta Borges, A., Deulofeu Piquet, Méndez Salazar, M. A. (2010). *Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía. Educación matemática, 22*(3), 5-21.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173–201. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes*. Universidad del Valle. Cali. Colombia

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 9(1), 143-168.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill. DF México.

Janvier, C. E. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates. Montreal

Prada-Núñez, R., Hernández-Suárez, C., Ramírez-Leal, P. (2016). *Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de Ingeniería. Revista Científica*, 2(25), 188-205.

Prada-Núñez, R. P., Hernández-Suárez, C. A., Contreras, L. A. J. (2017). *Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del Colegio a la Universidad. Panorama*, 11(20), 34-44.

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., Gorrochategui, M. (2012). *Los registros semióticos de representación en matemática. Aula Universitaria*, 1(13), 29-36.

Perdomo, E., Tafur, Y., Martínez, J. (2015). *La conversión entre los registros de representación de la función lineal y criterios de congruencia entre algunas de sus representaciones. RECME*, 1(1), 72-77.

Provincia de Chubut. Argentina. Ministerio de Educación. Resolución 324/14. Diseño Curricular Educación Secundaria. 2014.

http://www.chubut.edu.ar/descargas/recursos/secundaria/Dis_curricular/Matematica.pdf

Retamal, I. G. (1998). *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 1(1), 5-21.

Sastre Vázquez, P., D'Andrea, R., Villacampa, Y., Navarro González, F. J. (2013). *Do first-year University students understand the language of Mathematics? Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *93*, 1658-1662.

Autores:

Marina Soto: Profesora de Matemáticas. Actualmente en etapa final de Licenciatura en Enseñanza de la Matemáticas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Catamarca. Argentina.
marina_cecis@hotmail.com

Carlos Gabriel Herrera: Ingeniero Civil. Magister en Docencia Universitaria de Disciplinas Tecnológicas. Profesor Titular Cátedra Algebra. Departamento de Formación Básica. Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas. Universidad Nacional de Catamarca.
cgherrera@tecno.unca.edu.ar

Nora Elisa Pereyra: Licenciada en Matemáticas. Magister en Docencia Universitaria de Disciplinas Tecnológicas. Profesor Adjunto Cátedra Análisis Matemático I. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Catamarca.
npereyra46@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 55. Abril 2019
Páginas 85-108

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

La evaluación de la competencia matemática desde la escuela y para la escuela

Ángel Alsina, Miquel García, Eduard Torrent

Fecha de recepción: 14/01/2019
Fecha de aceptación: 15/04/2019

Resumen	En este artículo se ofrecen orientaciones y recursos didácticos para evaluar la competencia matemática en Educación Primaria. A partir de la descripción y análisis del proceso de toma de decisiones y el conjunto de estrategias e instrumentos que se han incorporado en una escuela, se propone un modelo que consta de cinco fases: 1) organización de la enseñanza de las matemáticas; 2) búsqueda de actividades matemáticas competenciales ricas; 3) concreción de las dimensiones y competencias del conocimiento matemático que deben evaluarse; 4) selección de las dimensiones y competencias que se evalúan en cada actividad; 5) diseño de instrumentos específicos de evaluación, especialmente rúbricas. Se concluye que este modelo puede contribuir a que otras escuelas preocupadas por ofrecer una educación matemática adecuada a las necesidades del S. XXI puedan iniciar procesos similares, adaptados a su propia realidad. **Palabras clave**: Competencia matemática, evaluación de la competencia matemática, evaluación formativa, evaluación formadora, Educación Primaria.
Abstract	This article offers guidelines and didactic resources for evaluating the mathematics competence of primary school students. A model is presented based on a description and analysis of the decision-making process and set of strategies and instruments that a specific school has introduced. The model includes five phases: 1) organisation of mathematics teaching; 2) search for rich competency-based mathematics activities; 3) specification of the dimensions and competences of mathematics knowledge that should be assessed; 4) selection of the dimensions and competences assessed in each activity; 5) design of specific assessment instruments, especially rubrics. The article concludes by suggesting that the model could help other schools eager to provide mathematics education in line with 21st century needs to embark on similar processes, adapted to their own specific contexts. **Keywords:** Mathematics competence, assessment of mathematics competence, formative assessment, developmental evaluation, primary education.
Resumo	Neste artigo oferecemos orientações e recursos didáticos para avaliar a competência matemática no Ensino Fundamental. A partir da descrição e

análise do processo de tomada de decisão e do conjunto de estratégias e instrumentos que foram incorporados em uma escola, é apresentado um modelo que consiste em cinco fases: 1 organização do ensino de matemática; 2) busca de atividades ricas de competência matemática; 3) especificação das dimensões e competências do conhecimento matemático que deve ser avaliado; 4) seleção das dimensões e competências avaliadas em cada atividade; 5) desenho de instrumentos de avaliação específicos, especialmente rubricas. Este modelo pode contribuir para outras escolas preocupadas em oferecer uma educação matemática adequada às necessidades do século XXI, para iniciar processos semelhantes, adaptados à sua própria realidade.
Palavras-chave: Competência matemática, avaliação de competência matemática, avaliação formativa, avaliação formativa, Ensino Fundamental.

1. Introducción

La competencia matemática y, de forma más concreta, la evaluación de la competencia matemática es un tema de candente actualidad en todos los países en los que se ha incorporado el enfoque competencial para la enseñanza de las matemáticas. Este enfoque deja claro que es necesario substituir un currículum orientado exclusivamente a la adquisición de contenidos para obtener éxito escolar. En su lugar, se requiere un currículum que esté orientado a alfabetizar matemáticamente a los alumnos, con el propósito que puedan usar de manera comprensiva y eficaz los conocimientos matemáticos en todas las situaciones de su vida cotidiana en las que dichos conocimientos son necesarios (Alsina, 2012, 2016). Se trata, en definitiva, de enseñar para la vida y no para la escuela o, por lo menos, no sólo para la escuela.

El enfoque competencial en el contexto escolar surge a partir del proyecto DeSeCo de la OCDE, en el que se establecen unas competencias clave que los alumnos deben adquirir a lo largo de su escolaridad (Delors, 1996; Rychen y Salganik, 2004). La principal finalidad de este enfoque es formar a ciudadanos competentes, es decir, que sepan desenvolverse adecuadamente en una sociedad compleja como la actual. En el caso de la competencia matemática, la clave para su desarrollo está en centrar la enseñanza de los contenidos mediante los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación. Estos procesos permiten poner de relieve las formas de adquisición y uso del conocimiento matemático: pensar, razonar, relacionar, modelizar, representar, etc. De acuerdo con Alsina (2016), la planificación y gestión de la enseñanza de los contenidos mediante los procesos favorece nuevas miradas que enfatizan las relaciones que se establecen entre ellos. Además, progresa el conocimiento de la disciplina y crece la habilidad para aplicar conceptos y destrezas con más eficacia en diferentes ámbitos de la vida cotidiana.

Este enfoque, que está calando con fuerza, ha venido acompañado de orientaciones generales por parte de algunas Administraciones educativas (consultar, por ejemplo, Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament, 2013). Sin embargo, la concreción de estrategias e instrumentos específicos para incorporar este planteamiento competencial en las escuelas ha sido escasa o nula, sobre todo en lo que se refiere a la evaluación. Con el propósito de intentar subsanar esta situación, en Alsina (2018) se publicó un decálogo con diez ideas clave acerca de la evaluación de la competencia matemática: 1) forma parte del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; 2) sólo tiene sentido si se trabaja en la línea de desarrollar la competencia matemática; 3) implica evaluar los procesos matemáticos, más que los contenidos; 4) requiere, a menudo, el uso de rúbricas o bases de orientación; e implica, además: 5) evaluar el grado de riqueza competencial de las actividades; 6) analizar la práctica docente del profesorado; 7) plantear claramente los aspectos que se quieren evaluar; 8) analizar si se han trabajado todas las competencias; 9) aportar evidencias; y, finalmente, 10) establecer niveles de adquisición. Además, se aportaron también algunos recursos -principalmente en forma de rúbricas e indicadores- para valorar el grado de riqueza competencial de las actividades, para analizar la práctica docente del profesorado y para valorar la competencia matemática de los alumnos, además de establecer el nivel óptimo de adquisición. En concreto, en la rúbrica "Niveles de Adquisición de la Competencia Matemática de 6 a 12 años" (NACMAT 6-12) se establecían los indicadores que se deberían evaluar en Educación Primaria y, para cada indicador, se rubricaban tres posibles niveles de adquisición. Estos indicadores son los siguientes: 1) comprender y traducir una situación problemática a lenguaje matemático; 2) aplicar estrategias de resolución de problemas y comprobar las soluciones; 3) plantearse preguntas acerca de las ideas matemáticas; 4) hacer conjeturas o suposiciones; 5) argumentar sobre las ideas matemáticas; 6) expresar ideas matemáticas; 7) establecer relaciones entre diferentes ideas matemáticas; 8) establecer relaciones con otras disciplinas y con el entorno; 9) utilizar diferentes formas de representación; y 10) utilizar la tecnología. El principal mensaje que se pretendía ofrecer a los maestros es que:

> La evaluación competencial implica un cambio de chip, un cambio de mirada, que supone poder valorar con precisión cada uno de los diez aspectos de la competencia matemática expuestos. En lugar de poner el foco en si un alumno, a modo de ejemplo, sabe hacer divisiones, conoce los polígonos regulares o tiene la noción de media aritmética, se trata de identificar si el alumno sabe resolver problemas de reparto, si identifica distintos tipos de polígonos en un determinado contexto o bien si usa de forma comprensiva y razonada medidas de tendencia central (como por ejemplo la media aritmética) para interpretar los datos y obtener conclusiones de una determinada investigación estadística (Alsina, 2018, p. 19).

Evidentemente, el cambio de chip o cambio de mirada implica que, desde la escuela, se tomen decisiones que den una respuesta eficaz al enfoque competencial de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, incluida la evaluación. Desde este prisma, la finalidad de este artículo es ofrecer orientaciones específicas y, a la vez, ejemplificar cómo se puede llevar a cabo este cambio, que ha venido para quedarse. Para ello, se va a mostrar el proceso de toma de decisiones y el conjunto de estrategias e instrumentos que, desde una escuela en concreto, se han incorporado para fomentar la adquisición y el desarrollo progresivo de la competencia matemática y su evaluación.

2. El desarrollo y la evaluación de la competencia matemática: decisiones desde la escuela

La escuela pública "Els Estanys" de Sils (Girona, España) es de una línea, desde los 3 años hasta 12 años. Desde su creación, en 2009, se ha caracterizado por ser una escuela participativa, activa e innovadora; para la diversidad; solidaria, tolerante y educadora en los valores; comprometida con el medio ambiente dialogante; además de abierta a los padres y a su entorno, como se indica en su Proyecto Educativo (http://www.elsestanys.cat/projectes). En este sentido, uno de sus objetivos prioritarios es activar aprendizajes competenciales útiles para la vida dentro y fuera de la escuela, de manera que cuestiones como ¿qué debe enseñarse?, ¿cómo debe enseñarse?, ¿para qué debe enseñarse? o bien ¿cómo debe evaluarse lo que aprenden los alumnos? rigen el día a día de las reuniones pedagógicas del profesorado.

Desde esta perspectiva, se van a describir detalladamente el conjunto de decisiones que desde la escuela se han tomado para desarrollar la competencia matemática de los alumnos y evaluar su nivel de desarrollo, tomando como punto de partida las directrices curriculares establecidas por la Administración educativa. Estas decisiones se sintetizan en cinco puntos: 1) organización de la enseñanza de las matemáticas; 2) búsqueda de actividades matemáticas competenciales ricas; 3) concreción de las dimensiones y competencias del conocimiento matemático que deben evaluarse; 4) selección de las dimensiones y competencias que se evalúan en cada actividad; 5) diseño de instrumentos específicos de evaluación, especialmente rúbricas.

2.1. Organización de la enseñanza de las matemáticas

La organización de la enseñanza de las matemáticas se ha llevado a cabo a partir de diversos contextos de aprendizaje, considerando para ello que los alumnos tengan la oportunidad de establecer contacto con el conocimiento matemático en situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos, juegos, entornos simulados o bien gráficos, respetando de esta forma el principio de abstracción progresiva (Freudenthal, 1991), que parte de la base que los alumnos inician el aprendizaje de las matemáticas en contextos reales y lo formalizan en contextos más abstractos. Además, el eje común de todos estos contextos es la resolución de problemas, entendido como el marco para pensar, argumentar, justificar, comunicar, conectar y representar ideas matemáticas. Desde este punto de vista, en la escuela "Els Estanys" se han establecido cinco contextos de enseñanza: 1) retos; 2) actividades manipulativas; 3) juegos de mesa; 4) resolución de problemas; 5) cálculo mental. Estos contextos, aún presentados por separado para facilitar su organización, se relacionan entre ellos potenciando un trabajo global tanto en sesiones concretas de matemáticas como en sesiones dedicadas a trabajar por proyectos dentro del horario escolar. A continuación se describen las principales características de cada contexto de enseñanza:

Retos: se plantean mediante dos recursos didácticos diferentes, en función del nivel que cursan los alumnos. En 1º y 2º, el maestro propone actividades en pequeños grupos con materiales manipulativos (geoplanos, regletas, multicubos y bloques lógicos). Acostumbran a ser retos en los que debe comprender el criterio de una serie y construirla, o bien razonar dicho criterio a partir de una serie predeterminada. En otras ocasiones, tienen que observar distintos modelos para establecer conjeturas y, si es necesario, modificarlas para que sean ciertas o falsas. De 3º a 6º, las actividades se proponen a través del "rincón de los retos": suelen ser situaciones relacionadas con la aplicación del cálculo, la geometría, la medida, la estadística, etc. Los retos propuestos a menudo requieren el uso de materiales manipulativos, gráficos, dibujos o esquemas para resolverlos, y otras veces se resuelven simplemente aplicando estrategias de cálculo. Una vez resuelto el reto, los alumnos comunican no solo el resultado, sino también el proceso seguido para llegar a la solución o bien el razonamiento matemático realizado. Estos retos se llevan a cabo tanto de manera individual como en pequeños grupos.

Actividades manipulativas: en este contexto, los materiales manipulativos se utilizan para introducir o bien repasar los contenidos matemáticos de los distintos bloques (numeración y cálculo, álgebra temprana, geometría, medida, estadística y probabilidad), por lo que se dispone de una amplia variedad de materiales de distinta naturaleza (inespecíficos, diseñados por el profesorado o bien comercializados) que permiten recubrir prácticamente todo el currículum de matemáticas de Educación Primaria.

Juegos de mesa: al igual que los materiales manipulativos, también se usan para practicar diferentes contenidos y, en el caso del bloque de numeración y cálculo, se dedica especial atención al desarrollo de estrategias de cálculo mental. Normalmente se juega en pequeños grupos y con diferentes juegos, en función de los contenidos o estrategias de cálculo que se quieran potenciar.

Resolución de problemas: este contexto, como ya se ha comentado, es el eje común de todos los contextos tanto para trabajar como para evaluar todas las dimensiones y competencias. Las actividades de resolución de problemas se proponen tanto en equipo como individualmente, e incluyen situaciones escritas (siempre a partir de contextos reales como mapas del metro, horarios de trenes o autobuses, calendarios, folletos de tiendas con ofertas, planos, etc.) y situaciones de la vida cotidiana (como por ejemplo campañas de recogida de ropa o alimentos, la recogida de castañas para la celebración de una fiesta tradicional, etc.), en las que suele ser importante la parte vivencial y manipulativa. Además, se propone también la creación de problemas por parte del alumnado.

Cálculo mental: partiendo de la base que el cálculo es una herramienta para la resolución de problemas, la escuela "Els Estanys" tiene un proyecto específico para trabajar y desarrollar el cálculo mental basado en la supresión de los algoritmos tradicionales y en el trabajo y descubrimiento de otros algoritmos y de múltiples estrategias. El hecho de ofrecer diversos algoritmos y estrategias permite una mejor adaptación tanto a los diferentes niveles como a las distintas maneras de pensar de cada niño. En este proyecto cobra vital importancia la verbalización del proceso utilizado para calcular, observar claramente las estrategias utilizadas, las conexiones, el razonamiento matemático y la capacidad comunicativa.

2.2. Búsqueda de actividades matemáticas competenciales ricas

Una vez establecidos los contextos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, el siguiente paso ha sido iniciar una exhaustiva investigación con el propósito de localizar actividades matemáticas competenciales en diversas fuentes (organismos y autores de reconocido prestigio, blogs, museos de las matemáticas, etc.). Se trata de un proceso dinámico de búsqueda de actividades que el profesorado de la escuela realiza de forma continua y sistemática, para diversificar de esta forma las propuestas que se presentan a los alumnos. El criterio para seleccionar las actividades es que sean competencialmente ricas. Planas y Alsina (2014) describen algunos de los principales rasgos de este tipo de actividades, considerando para ello los siete principios clásicos de la enseñanza de las matemáticas elaborados por el matemático inglés John Perry y sintetizados en Price (1986, p. 114) y, a modo de decálogo, los completan con tres principios más, ubicados al final de la lista para concretar las características de una buena práctica matemática: tener en cuenta la motivación y los intereses del alumnado; basar lo abstracto en la experiencia concreta para promover la comprensión; emplear actividades que supongan el uso de la mano y el ojo, y no solo de la oreja, en conjunción con el cerebro, así como de los métodos gráficos; adoptar métodos experimentales y heurísticos: experimento, estimación, aproximación, observación, inducción, intuición, sentido común, etc.; retrasar el rigor lógico y la preocupación inicial por los fundamentos, y restringir los elementos deductivos formales, admitiendo diversas formas de demostración; simplificar, ensanchar y unificar la materia-disciplina de las matemáticas, e ignorar las divisiones artificiales tradicionales; correlacionar las matemáticas con la ciencia y el trabajo de laboratorio, y relacionar las matemáticas con la vida y sus aplicaciones; recordar la necesidad de incorporar el rigor lógico y la preocupación por los fundamentos en los momentos posteriores a la experiencia concreta; introducir formas de validación de la práctica matemática que no hayan surgido de la implicación del alumnado en las actividades propuestas; y generar motivación e interés en el alumnado por problemas matemáticos.

Los tres últimos principios se añaden con la intención de cerrar “mejor” el círculo, retomando cuestiones y prácticas matemáticas de importancia que podrían no ser incorporadas en el desarrollo del currículo si solo se tuvieran en cuenta la motivación y los intereses del alumnado o si se retrasara tanto el rigor lógico y la preocupación por los fundamentos que, finalmente, no se volviera a ellos. Se trata, en definitiva, de ofrecer actividades que “involucren a los alumnos en un aprendizaje significativo mediante experiencias individuales y colaborativas que fomenten su habilidad para dar sentido a las ideas matemáticas y para razonar de una manera matemática” (NCTM, 2014, p. 7). Desde este prisma, el NCTM (2014, p. 9) identifica ocho prácticas de enseñanza de las matemáticas que “representan un conjunto esencial de prácticas de alto impacto y de habilidades esenciales de enseñanza que se requieren para desarrollar un profundo aprendizaje de las matemáticas", y que también se han considerado de forma implícita para la selección de las actividades:

- Establecimiento de metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje: determinar objetivos claros en relación a las matemáticas que los alumnos están aprendiendo, para guiar la enseñanza.
- Implementación de tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas: seleccionar actividades que permitan abordar la resolución de problemas desde múltiples perspectivas, argumentándolas adecuadamente.
- Uso y vinculación de las representaciones matemáticas: relacionar representaciones matemáticas diferentes para favorecer la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos necesarios para la resolución de problemas.
- Impulso del discurso matemático significativo: promover el diálogo con los alumnos para co-construir el conocimiento matemático mediante el andamiaje colectivo, a través del análisis y la comparación de distintos enfoques y argumentos.
- Planteamiento de preguntas deliberadas: pensar buenas preguntas para favorecer y evaluar el razonamiento de los alumnos.
- Elaboración de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual: favorecer el uso flexible y eficaz de procedimientos matemáticos basados en la comprensión de los conceptos.
- Impulso del esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas: ofrecer a los alumnos, de manera individual y colectiva, las oportunidades y los apoyos necesarios para que se involucren en esfuerzos productivos a medida que abordan ideas y relaciones matemáticas.
- Obtención y utilización del pensamiento de los alumnos: obtener evidencias del pensamiento de los alumnos que permitan evaluar su progreso en la comprensión matemática y adecuar la enseñanza para apoyar y extender el aprendizaje.

Considerando estos antecedentes, a continuación se presenta una breve selección de actividades que se plantean en el marco de los distintos contextos de enseñanza, destinadas a alumnos de 2º y 5º de Educación Primaria (7-8 años y 10-11 años respectivamente).

2.2.1. Ejemplos de retos

En 2º de Educación Primaria (7-8 años) los retos suelen consistir en comprender el criterio de una serie y construirla, o bien a partir de una serie predeterminada razonar dicho criterio (figuras 1 y 2): en la primera actividad los alumnos deben construir las series en función de los criterios planteados; en la segunda actividad cada círculo representa una de las regletas de Cuisenaire y, observándolos, deben decir si las conjeturas planteadas por el maestro son ciertas o falsas (si son falsas tendrán que eliminar uno de los círculos para que sea cierta); finalmente, en la tercera actividad son los alumnos quienes deciden los colores de los círculos y plantean las conjeturas correspondientes. Normalmente, la resolución de estos retos se inicia con un trabajo en gran grupo para conocer la actividad y su funcionamiento; siguen haciéndolo en pequeños grupos donde se potencia la contraposición de ideas; y acaban con un trabajo individual, normalmente evaluable.

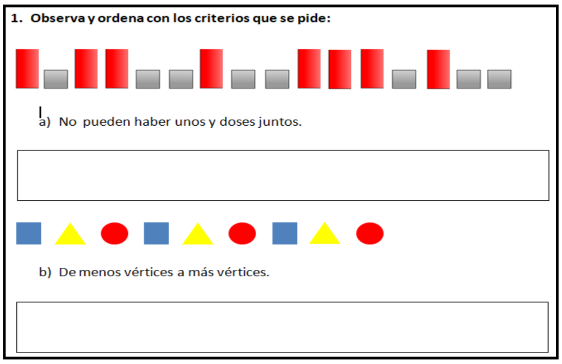


Figura 1. Construcción de series en función del criterio planteado

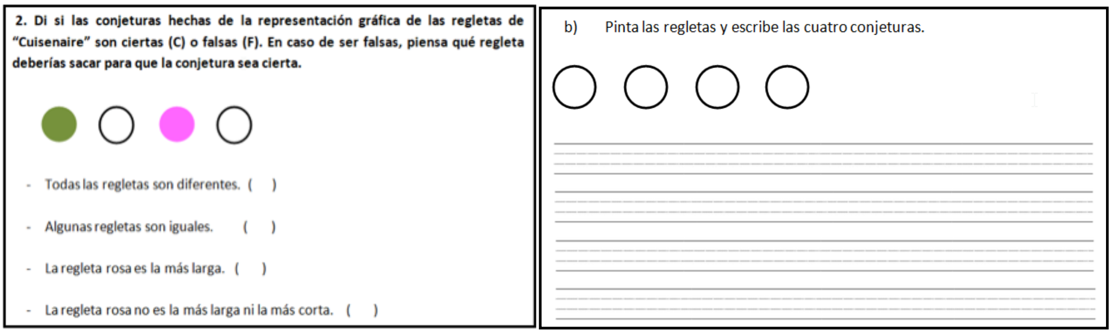


Figura 2. Verificación y elaboración de conjeturas

En 5º de Educación Primaria (10-11 años) los retos son de dos tipos: los primeros están relacionados casi siempre con el cálculo y la lógica. Algunos son sencillos, del tipo "¿Cuál es el número que es la mitad de la cuarta parte de la décima parte de 400?" o bien "Multiplicando un número por 5 obtienes el mismo resultado que si le sumas 12. ¿Qué número es?". Estos retos sirven para practicar el cálculo y las estrategias de cálculo, pero rara vez se evalúan. También hay otros retos más complejos que requieren razonar más, establecer relaciones o descubrir la solución válida entre varias (figura 3). Acabado el tiempo establecido, se exponen oralmente las respuestas y las estrategias usadas para resolver el reto.

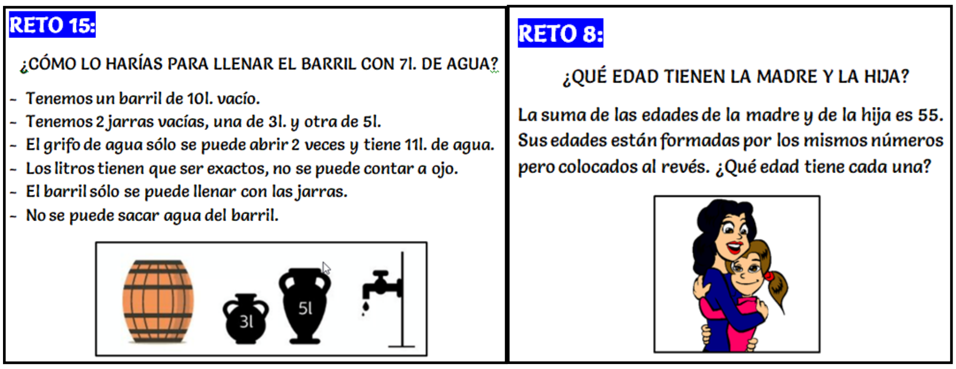


Figura 3. Retos numéricos

Los otros retos están relacionados con la geometría, la medida o la estadística: se plantea una situación con una afirmación y los alumnos tienen que determinar si es cierta o falsa. Estos retos van acompañados de una ficha en la que los alumnos, individualmente, explican la situación y la conclusión a la que han llegado; pero la parte más importante, la que se evalúa, es en la que argumentan cómo han llegado a esta conclusión. En función del reto, se explican las razones matemáticas o bien los pasos seguidos para resolver el reto.

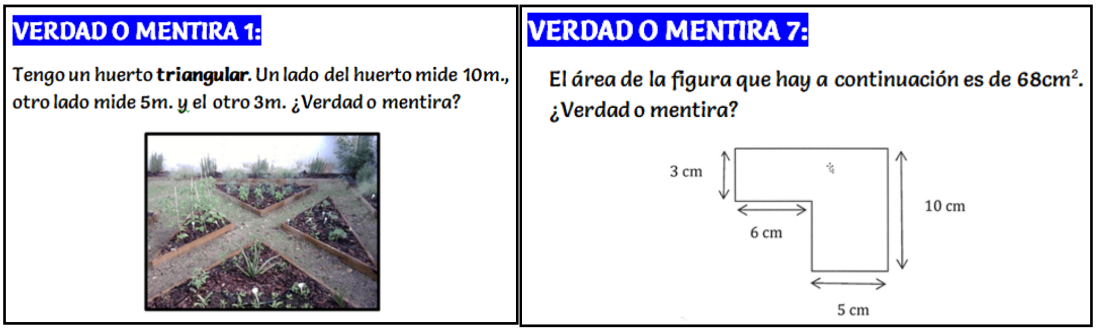


Figura 4. Retos geométricos

2.2.2. Ejemplos de actividades manipulativas

Como se ha indicado, en la escuela hay múltiples materiales manipulativos que se usan para introducir y repasar los distintos contenidos. En las actividades de 2º de Educación Primaria que se muestran en la figura 5, por ejemplo, los alumnos representan una fracción con el geoplano y realizan actividades de compra-venta como se estuvieran en un supermercado, respectivamente. En todos los casos, además de observar las producciones de los alumnos, se analiza también si son capaces de cuestionarse las afirmaciones de los compañeros.

Figura 5. Uso de geoplanos para representar fracciones y materiales inespecíficos y monedas para situaciones de compra-venta

En la figura 6 se muestran diversos ejemplos en los que los alumnos de 5º de Educación Primaria, a través de las regletas Cuisenaire, repasan la noción de área y cómo calcularla en cuadrados y rectángulos.

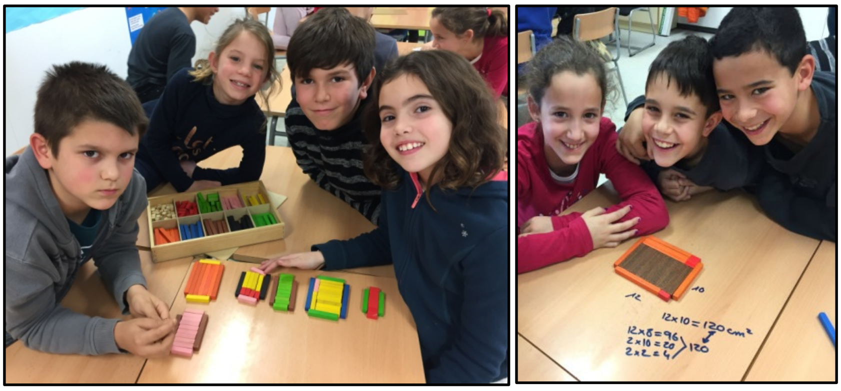


Figura 6. Uso de regletas para comprender la noción de área y cómo calcularla.

2.2.3. Ejemplos de juegos de mesa

Uno de los juegos de mesa que se usa en 2º de Educación Primaria es “Código secreto 13+4”, que sirve para fomentar el cálculo mental de sumas y restas, aunque en cursos superiores también se puede usar con multiplicaciones, divisiones y operaciones combinadas. Los jugadores tiran los dados y, con los números que han obtenido, tienen que buscar una operación que les permita obtener el número que aparece en la tarjeta deseada del tablero de juego para poder avanzar.

Figura 7. Cálculo mental con el juego “Código secreto 13+4”

Un ejemplo de juego de mesa para 5º de Educación Primaria es “Structuro”, que sirve principalmente para trabajar la visualización geométrica. Este juego consta de una serie de cubos de plástico con las caras opuestas pintadas del mismo color (rojo, amarillo y azul) y de una serie de tarjetas clasificadas en 4 niveles (A, B, C y D). El ejemplo que se muestra en la figura 8 corresponde a una tarjeta del grupo D en la que, observando las proyecciones de las caras (frontal, lateral y cenital), los alumnos tienen que construir con los cubos la forma correspondiente, respetando los colores.

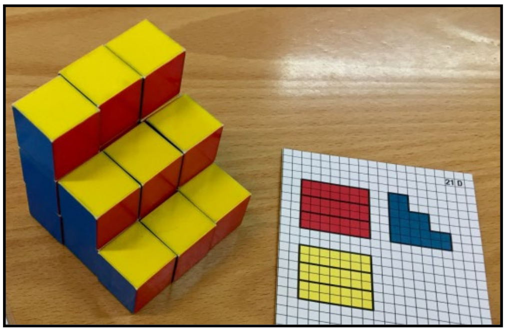
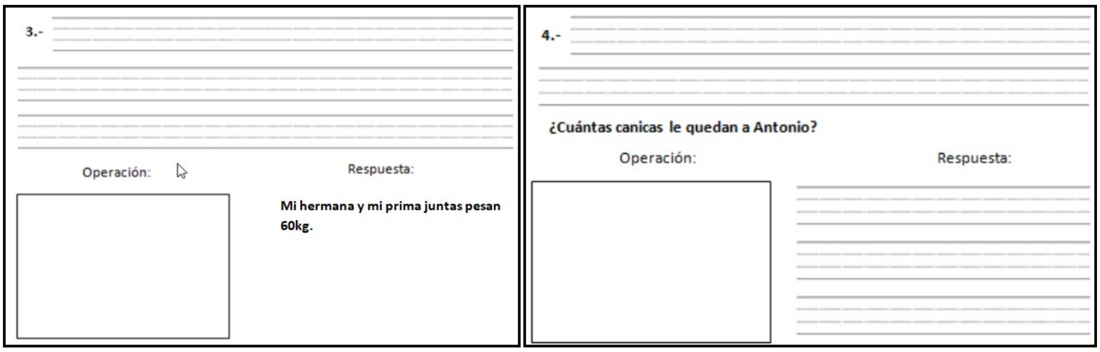


Figura 8. Visualización geométrica con el juego “Structuro”

2.2.4. Ejemplos de resolución de problemas

Como se ha indicado, uno de los tipos de actividades de resolución de problemas que se fomenta en la escuela “Els Estanys” es la creación de problemas. Para ello, se insiste primero en que analicen y distingan las partes de diferentes problemas (enunciado, pregunta, operación/es y respuesta). En la figura 9, por ejemplo, se muestran actividades de creación de problemas en las que los alumnos de 2º de Educación Primaria tienen que escribir, por un lado, un problema conociendo sólo la respuesta, y por otro lado, crear un problema a partir de la pregunta.


3.-

Operación:

Respuesta:

Mi hermana y mi prima juntas pesan 60kg.

4.-

¿Cuántas canicas le quedan a Antonio?

Operación:

Respuesta:

Figura 9. Creación de problemas

El ejemplo de resolución de problemas para alumnos de 5º de Educación Primaria que se muestra en la figura 10 corresponde al grupo de problemas competenciales que parten de situaciones reales o cotidianas. En este caso, desde la escuela se organizó una recogida de alimentos en favor de una organización de ayuda a personas necesitadas. Con todos los alimentos recogidos se hizo un trabajo de clasificación y de recuento, previo al trabajo estadístico de elaboración de gráficos y análisis de datos. Otros contenidos trabajados fueron las equivalencias entre las unidades de medida con los paquetes de arroz, lentejas, etc.; la estimación de los kilos de alimentos recogidos, seguido del cálculo real; y finalmente nos planteamos si las cajas facilitadas por la fundación eran las más adecuadas para la recogida de los alimentos o si serían mejor de otra forma o medida.

Figura 10. Resolución de problemas a partir de una campaña de recogida de alimentos

2.2.5. Ejemplos de cálculo mental

En la figura 11 se muestra un ejemplo de estrategia de cálculo mental que usan los alumnos de 2º de Educación Primaria para resolver una resta a partir de la descomposición del minuendo. Los números que se suman al sustraendo pueden variar de un alumno a otro, haciendo que la descomposición sea más o menos larga, por lo tanto, este algoritmo se adapta a los distintos niveles de los alumnos.

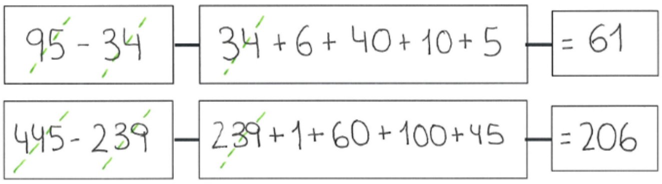


Figura 11. Resolución de restas a partir de la descomposición del minuendo

Finalmente, en la figura 12 se muestra una estrategia que usan los alumnos de 5º de Educación Primaria para realizar divisiones con resultado decimal, es decir, enteras. Por ejemplo, en la división 48 : 5, la alumna descompone mentalmente el 48 en 45 y 3 para después dividir 45 entre 5 (que es 9) y 3 entre 5:

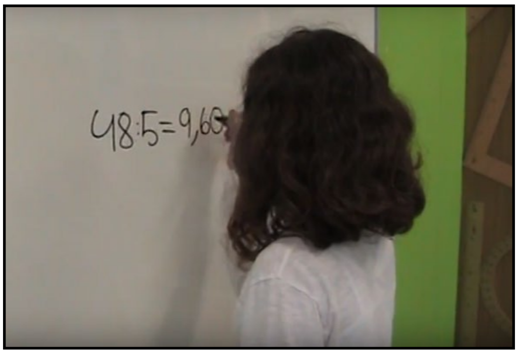


Figura 12. Realización de divisiones enteras

Alumna: “como una división es igual a una fracción, 3 entre 5 es igual que tres quintas partes; y como una quinta parte es 0,20, tres quintas partes son 0,60. Así que el resultado final es 9+0,60=9,60”.

2.3. Concreción de las dimensiones y competencias del conocimiento matemático que deben evaluarse.

Una de las cuestiones más delicadas en el marco de la evaluación de la competencia matemática consiste en concretar qué aspectos deben evaluarse. Si se asume, como se ha indicado, que no se trata de evaluar si los alumnos saben resolver operaciones aritméticas, sino de identificar si saben resolver problemas en las que dichas operaciones son necesarias, entonces es imprescindible pensar la evaluación desde los procesos matemáticos y establecer qué dimensiones específicas del conocimiento matemático deberían evaluarse. En este sentido, se ha tomado como base la legislación educativa en materia de evaluación del Departament d’Ensenyament de la Generalitat de Catalunya (ver Tabla 1):

Dimensiones	Competencias
Resolución de problemas	Competencia 1. Traducir un problema a una representación matemática y emplear conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolverlo.

	Competencia 2. Dar y comprobar la solución de un problema de acuerdo con las preguntas planteadas. Competencia 3. Hacer preguntas y generar problemas de tipo matemático.
Razonamiento y prueba	Competencia 4. Hacer conjeturas matemáticas adecuadas en situaciones cotidianas y comprobarlas. Competencia 5. Argumentar las afirmaciones y los procesos matemáticos realizados en contextos cercanos.
Conexiones	Competencia 6. Establecer relaciones entre diferentes conceptos, así como entre los diversos significados de un mismo concepto. Competencia 7. Identificar las matemáticas implicadas en situaciones cotidianas y escolares y buscar situaciones que se puedan relacionar con ideas matemáticas concretas.
Comunicación y representación	Competencia 8. Expresar ideas y procesos matemáticos de manera comprensible empleando el lenguaje verbal (oral y escrito). Competencia 9. Usar las diversas representaciones de los conceptos y relaciones para expresar matemáticamente una situación. Competencia 10. Usar las herramientas tecnológicas con criterio, de forma ajustada a la situación, e interpretar las representaciones matemáticas que ofrecen.

Tabla 1. Dimensiones y competencias matemáticas (DECRETO 119/2015, de 23 de junio, de ordenación de las enseñanzas de la educación primaria, se establecen cuatro dimensiones que incluyen diez competencias)

Además, en la ORDEN NOS/164/2016, de 14 de junio, por la cual se determinan el procedimiento y los documentos y requisitos formales del proceso de evaluación en la educación primaria, se establece que:

> Los diferentes elementos que integran el currículum son los referentes para la evaluación. Los criterios de evaluación de las áreas muestran el grado de logro de las competencias básicas propias de cada ámbito, establecidos en el artículo 15 del Decreto 119/2015, de 23 de junio, de ordenación de las enseñanzas de la educación primaria" (p. 2).

Con base a estas directrices, en la Escuela "Els Estanys" la evaluación de la competencia matemática se ha organizado de acuerdo con las cuatro dimensiones y las diez competencias matemáticas expuestas en la tabla 1, Con ello se pretende que tanto el profesorado como los alumnos puedan identificar las dificultades y los errores que surgen a lo largo del proceso educativo y tomar las decisiones oportunas para lograr los objetivos. Así, pues, se informa a los alumnos de antemano sobre los objetivos de aprendizaje, los criterios y los procedimientos con los cuales se los evalúa.

2.4. Selección de las dimensiones y competencias que se evalúan en cada actividad.

Una vez establecidas las dimensiones del conocimiento matemático que deben ser evaluadas (resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación) a través de las diez competencias matemáticas descritas, el siguiente paso ha consistido en determinar las dimensiones/competencias matemáticas específicas que se evalúan en cada contexto a partir de los que se ha organizado la enseñanza de las matemáticas: 1) retos; 2) actividades manipulativas; 3) juegos de mesa; 4) resolución de problemas; 5) cálculo mental.

Desde este prisma, el equipo de profesores de la Escuela “Els Estanys” ha fijado los aspectos que se quieren evaluar en cada contexto, sin necesidad de que se evalúen todos en cada uno (Tabla 2), pero garantizando que a lo largo del curso se trabajen (y evalúen) todas las dimensiones y competencias, tal como indica Alsina (2018).

		Retos	Actividades Manipulativas	Juegos de mesa	Resolución de problemas	Cálculo mental
Resolución de problemas	1. Traducir un problema a una representación matemática y emplear conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolverlo.	X		X	X	
	2. Dar y comprobar la solución de un problema de acuerdo con las preguntas planteadas.	X		X	X	
	3. Hacer preguntas y generar problemas de tipo matemático.		X		X	X
Razonamiento y prueba	4. Hacer conjeturas matemáticas adecuadas en situaciones cotidianas y comprobarlas.	X	X			
	5. Argumentar las afirmaciones y los procesos matemáticos realizados en contextos cercanos.	X	X		X	
Conexiones	6. Establecer relaciones entre diferentes conceptos, así como entre los diversos significados de un mismo concepto.		X	X	X	X
	7. Identificar las matemáticas implicadas en situaciones cotidianas y escolares y buscar situaciones que se puedan relacionar con ideas matemáticas concretas.	X			X	
Comunicación y representación	8. Expresar ideas y procesos matemáticos de manera comprensible empleando el lenguaje verbal (oral y escrito).	X	X		X	X
	9. Usar las diversas representaciones de los conceptos y relaciones para expresar matemáticamente una situación.		X	X	X	
	10. Usar las herramientas tecnológicas con criterio, de forma ajustada a la situación, e interpretar las representaciones matemáticas que ofrecen.				X	X

Tabla 2. Dimensiones y competencias matemáticas evaluadas en cada contexto

2.5. Diseño de instrumentos específicos de evaluación, especialmente rúbricas.

La evaluación de la competencia matemática consiste en un tipo de evaluación que requiere aportar evidencias que pongan de manifiesto lo que cada alumno es capaz de hacer y saber aplicarlo a un determinado contexto (Ascher, 1990). En este sentido, Goñi (2008, p. 177) expone que "la evaluación de una competencia supone la emisión de un juicio valorativo sobre la pertinencia y la calidad de la evidencia aportada". De acuerdo con Alsina (2018), esto implica que, por un lado, se garantice que las evidencias estén relacionadas con la competencia que se quiere valorar; y por otro lado, se tenga en cuenta que no todas las actuaciones de los alumnos son de la misma calidad, y por lo tanto, se deberían determinar niveles de adquisición. En la literatura sobre evaluación, los niveles de adquisición tienden a denominarse "criterios de evaluación", y se refieren a las normas de actuación que permiten la valoración de las competencias (Sanmartí, 2007).

Uno de los instrumentos que se ajustan a este planteamiento son las rúbricas, que son guías o escalas de evaluación donde se establecen niveles progresivos de dominio o pericia relativos al desarrollo que muestra una persona respecto a un proceso o producción determinada (Díaz-Barriga, 2006). Desde esta perspectiva, se trata de instrumentos dinámicos que se pueden modificar y ajustar durante la práctica para así encontrar el valor justo que se pretende que los alumnos alcancen. Goodrich (2000) expone que las principales ventajas del uso de rúbricas en los procesos educativos son las siguientes: 1) se trata de una herramienta poderosa que permite conocer los distintos niveles de adquisición, puesto que los criterios son explícitos y los mismos para todos los alumnos; 2) proporcionan criterios específicos para analizar y documentar el progreso del alumno; 3) son fáciles de utilizar y de explicar; 4) orientan sobre qué es lo que se espera de los alumnos o del propio maestro. Considerando estos aspectos, el profesorado de la Escuela "Els Estanys" ha diseñado una rúbrica para evaluar las actividades de cada contexto de enseñanza-aprendizaje, además de los criterios de pericia para asignar el dominio de cierto nivel. A modo de ejemplo, se muestran las rúbricas para evaluar las actividades de retos y cálculo mental (tablas 3 y 4).

	NIVEL 4	NIVEL 3	NIVEL 2	NIVEL 1
ESCOLA ELS ESTANYS (Sils)	4	3	2	1
RAZONAMIENTO	Todo el pensamiento matemático es correcto y explica la norma o razones matemáticas que le han ayudado a resolverlo.	Todo el pensamiento matemático es correcto.	Parte del pensamiento matemático es correcto.	El pensamiento matemático no es correcto.
COMUNICACIÓN	Utiliza mucho lenguaje matemático o anotaciones detalladas.	Utiliza lenguaje matemático o anotaciones más o menos detalladas.	Utiliza un lenguaje matemático y/o anotaciones pobres.	No utiliza lenguaje matemático en las explicaciones y/o anotaciones.
CONEXIONES	Ha encontrado conexiones en el problema o en los números, las ha utilizado para alargar o completar la respuesta y/o ha relacionado este problema con otro parecido.	Ha encontrado alguna conexión en el problema o en los números.	Ha intentado conectar alguna cosa pero no tenía relación con las matemáticas del problema/reto.	No ha conectado nada del problema ni de los números.
ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIÓN	Las representaciones (gráficos o dibujos) son claras y ayudan a entender la resolución del problema/reto.	Las representaciones (gráficos o dibujos) son claras y fáciles de entender.	Las representaciones (gráficos o dibujos) son un poco difíciles de entender.	Las representaciones (gráficos o dibujos) no se entienden o no hay.

Tabla 3. Rúbrica para evaluar los retos

ESCOLA ELS ESTANYS (Sils)	NIVEL 4	NIVEL 3	NIVEL 2	NIVEL 1
	4	3	2	1
ESTRATEGIAS	Aplica las diferentes estrategias trabajadas y lo hace con agilidad.	Aplica las estrategias trabajadas pero le falta un poco de agilidad.	Aplica sólo algunas de las estrategias básicas trabajadas.	Le cuesta aplicar las estrategias básicas trabajadas.
COMUNICACIÓN	Explica todos los pasos seguidos con detalle, de manera ordenada y con un vocabulario adecuado.	Explica casi todos los pasos seguidos, de manera ordenada con algun error de vocabulario.	Omite algunos de los pasos seguidos o lo explica de manera desordenada.	Cuesta entender la explicación de lo que ha hecho.
CONEXIONES	Relaciona diferentes conceptos para facilitar la resolución de las operaciones.	Relaciona algun concepto sin ayuda.	Relaciona algun concepto con ayuda.	No relaciona ningún concepto.
CREACIÓN DE PROBLEMAS	Genera problemas según diferentes estrategias con facilidad y es capaz de detectar errores en los que generan los compañeros.	Genera problemas según diferentes estrategias con facilidad.	Genera problemas según diferentes estrategias con un poco de ayuda.	Le cuesta generar problemas según diferentes estrategias o los que genera no son correctos.

Tabla 4. Rúbrica para evaluar el cálculo mental

Estas rúbricas han sido consensuadas por todo el profesorado del centro y, como se ha indicado, son dinámicas. Tanto los indicadores de las rúbricas, como los criterios de pericia establecidos para asignar el dominio de cierto nivel, pueden ser modificados y ajustados para afinarlos al máximo, con el propósito de determinar de la forma más precisa posible el nivel de desarrollo de la competencia matemática de los alumnos.

Con estos instrumentos, además de la evaluación formativa (la que realiza el profesorado), se fomenta la evaluación formadora (de los propios alumnos). La evaluación formadora se impulsa mediante estrategias como la coevaluación y la autoevaluación, sobre todo en los últimos niveles. Partiendo de la base que las personas que aprenden son aquellas que saben autoevaluarse (Sanmartí, 2007), mediante la coevaluación se pretende que sean los mismos alumnos, que son los que tienen la misión de aprender, los que se coloquen por un momento en el papel del docente y evalúen los conocimientos adquiridos por un compañero.

En relación a la autoevaluación, algunos de sus principales beneficios son los siguientes (Calatayud, 1999, 2002): a) es uno de los medios para que el alumno conozca y tome conciencia de cuál es su progreso individual en el proceso de enseñanza y aprendizaje; b) ayuda a los alumnos a responsabilizarse de sus actividades, a la vez que desarrollan la capacidad de autogobierno; c) es un factor básico de motivación y refuerzo del aprendizaje; d) es una estrategia que permite al profesorado conocer cuál es la valoración que éstos hacen del aprendizaje, de los contenidos que en el aula se trabajan, de la metodología utilizada, etc.; e) es una actividad de aprendizaje que ayuda a reflexionar individualmente sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje realizado; f) es una estrategia que puede sustituir a otras formas de evaluación más tradicionales; g) es una actividad que ayuda a profundizar en un mayor autoconocimiento y comprensión del proceso realizado; y h) es una estrategia que posibilita la autonomía y autogestión del aprendizaje del alumno.

ESCOLA ELS ESTANYS (Sils)	NIVEL 4	NIVEL 3	NIVEL 2	NIVEL 1	Pond.
	4	3	2	1	
ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIÓN	Hemos tenido muy claro como hacer las representaciones gráficas o los dibujos.	No nos ha costado mucho hacer las representaciones gráficas o los dibujos.	Nos ha costado bastante hacer las representaciones gráficas o los dibujos.	No hay representaciones gráficas ni dibujos.	20%
EXPLICACIÓN (Oral y/o escrita)	Hemos tenido muy claro como hacer las explicaciones y las hemos hecho detalladas.	No nos ha costado mucho hacer las explicaciones pero podrían ser más detalladas.	Nos ha costado bastante hacer la explicación.	No hemos escrito ninguna explicación.	20%
PULIDEZ Y ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN	La presentación tiene los 3 componentes: es limpia, clara y organizada.	A la presentación le falla uno de los componentes.	A la presentación le fallan dos de los componentes.	A la presentación le fallan los tres componentes.	10%
COMPLECIÓN (de 5 o 6 problemas)	Hemos hecho todos los problemas.	Hemos hecho todos los problemes menos uno.	Hemos hecho todos los problemes menos dos.	Hay tres o más problemas sin hacer.	20%
TRABAJO EN GRUPO	Todos los componentes del grupo nos hemos esforzado y hemos trabajado juntos.	Casi siempre nos hemos esforzado y hemos trabajado juntos.	Algunos nos hemos esforzado pero nos ha costado trabajar juntos.	No hemos sabido trabajar en grupo.	10%
IMPLICACIÓN PERSONAL	He aportado ideas al grupo y he ayudado a los compañeros.	He aportado ideas al grupo.	He aportado alguna idea al grupo.	No he aportado ideas al grupo o muy pocas.	20%

Tabla 5. Rúbrica para autoevaluar y coevaluar la resolución de problemas en grupo

Finalmente, cabe señalar que para apoyar todo el proceso de evaluación de la competencia matemática a través de rúbricas, en la Escuela "Els Estanys" se utiliza *Corubrics.* Se trata de un complemento para hojas de cálculo de *Google* de acceso abierto, disponible en https://corubrics-es.tecnocentres.org, que permite realizar un proceso completo de evaluación con rúbricas. Sirve para que el profesorado evalúe a los alumnos (o grupos de alumnos) con una rúbrica y también para que los alumnos se coevalúen entre ellos o bien se autoevalúen con una rúbrica. Sólo se puede utilizar si alumnos y profesores están en el mismo dominio de *G suite.*

Para ello, primero se debe definir la rúbrica que se pretende usar (figura 15) y, a continuación, indicar los alumnos y sus correos electrónicos. Una vez hecho, el complemento (o la plantilla) se encarga de crear un formulario con los contenidos de la rúbrica y enviar por mail este formulario a los alumnos o dar el enlace (si sólo corrige el profesor). Una vez contestado el formulario (por los alumnos y/o por el profesor), permite procesar los datos para obtener las medias. Además, *CoRubrics* permite hacer comentarios a los alumnos y al profesorado cuando se contesta la rúbrica.

Núm.	Alumno/a evaluado	Número de puntuaciones			ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIÓN			EXPLICACIÓN (Oral y/o escrita)			PULIDEZ Y ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN			COMPLECIÓN (de 5 o 6 problemas)			TRABAJO EN GRUPO			IMPLICACIÓN PERSONAL			Nota cuantitativa (haciendo la media ponderada de todos los ítems)				Comentarios de los alumnos (coevaluación)	Comentarios del propio alumno (autoevaluación)
					20%			20%			10%			20%			10%			20%			100%					
		Coev	Auto	Prof	Coev	Auto	Prof	Coev	Auto	Prof	Coev	Auto	Prof	Coev	Auto	Prof	Coev	Auto	Prof	Coev	Auto	Prof	Coev	Auto	Prof	Final		
1	ALUMNO/A 1	1	1	-	4	3	-	3	3	-	4	4	-	3	3	-	3	2	-	4	4	-	8,75	8	-	8,38	"Alumno 1" creo que no tienes nada para mejorar. La mayoría de problemas los hemos resuleto gracias a ti y me has ayudado.	He trabajado bien y me he esforzado siempre. Un problema nos ha costado mucho y no hemos sabido hacerlo. Mi compañero me ha ayudado muy poco.
2	ALUMNO/A 2	1	1	-	3	2	-	2	2	-	4	4	-	3	3	-	2	2	-	1	2	-	6	6	-	6,00	"Alumno 2" creo que puedes mejorar esforzándote más y estando más concentrado en lo que estamos haciendo y no distraerte con los compañeros de otros grupos.	Me he distraído mucho y tendría que esforzarme más.

Tabla 6. Ejemplo de rúbrica con *Corubrics*

En el ejemplo de la tabla 6 se puede observar cómo, en función de la rúbrica presentada, una pareja se ha autoevaluado y coevaluado y que, en este caso, el profesor no ha evaluado la actividad. En las columnas finales aparecen las notas medias y los comentarios.

Aprovechando la generación automática de datos de *Corubrics,* en la escuela se ha creado también una hoja de cálculo adjunta que genera, también de manera automática, un informe personalizado de cada alumno, como se aprecia en la tabla 7.

INFORME DE EVALUACIÓN - RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN GRUPO

ALUMNO/A: ALUMNO/A 1

RÚBRICA CON LA QUE HEMOS EVALUADO LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

ESCOLA ELS ESTANYS (Sils)	NIVEL 4	NIVEL 3	NIVEL 2	NIVEL 1	Pond.
	4	3	2	1	
ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIÓN	Hemos tenido muy claro como hacer las representaciones gráficas o los dibujos.	No nos ha costado mucho hacer las representaciones gráficas o los dibujos.	Nos ha costado bastante hacer las representaciones gráficas o los dibujos.	No hay representaciones gráficas ni dibujos.	20%
EXPLICACIÓN (Oral y/o escrita)	Hemos tenido muy claro como hacer las explicaciones y las hemos hecho detalladas.	No nos ha costado mucho hacer las explicaciones pero podrían ser más detalladas.	Nos ha costado bastante hacer la explicación.	No hemos escrito ninguna explicación.	20%
PULIDEZ Y ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN	La presentación tiene los 3 componentes	A la presentación le falla uno de los componentes.	A la presentación le fallan dos de los componentes.	A la presentación le fallan los tres componentes.	10%
COMPLECIÓN (de 5 o 6 problemas)	Hemos hecho todos los problemas.	Hemos hecho todos los problemes menos uno.	Hemos hecho todos los problemes menos dos.	Hay tres o más problemas sin hacer.	20%
TRABAJO EN GRUPO	Todos los componentes del grupo nos hemos esforzado y hemos trabajado juntos.	Casi siempre nos hemos esforzado y hemos trabajado juntos.	Algunos nos hemos esforzado pero nos ha costado trabajar juntos.	No hemos sabido trabajar en grupo.	10%
IMPLICACIÓN PERSONAL	He aportado ideas al grupo y he ayudado a los compañeros.	He aportado ideas al grupo.	He aportado alguna idea al grupo.	No he aportado ideas al grupo o muy pocas.	20%

RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN:

Coevaluación:	8,75
Autoevaluación:	8
Nota maestro/a:	-

Nota final de resolución de problemas en grupo: 8,38

COMENTARIOS DE LA EVALUACIÓN:

COMENTARIO DE LOS COMPAÑEROS:

"Alumno 1" creo que no tienes nada para mejorar. La mayoría de problemas los hemos resuleto gracias a ti y me has ayudado.

COMENTARIO DEL PROPIO ALUMNO/A:

He trabajado bien y me he esforzado siempre. Un problema nos ha costado mucho y no hemos sabido hacerlo. Mi compañero me ha ayudado muy poco.

COMENTARIO DEL MAESTRO/A:

Tabla 7. Informe personalizado

3. Consideraciones finales

En este artículo se ha puesto de manifiesto que la evaluación de la competencia matemática implica dejar de lado un modelo tradicional de evaluación basado exclusivamente en las valoraciones del profesorado sobre los aprendizajes de los alumnos. Así, pues, partiendo de la base que la evaluación ha dejado de ser un instrumento exclusivamente finalista y se ha convertido en algo más complejo, en un recurso de aprendizaje más, se ha entrado en la escuela para ver de primera mano qué hacen los maestros para adaptarse a este cambio educativo. Con este propósito, se ha descrito una experiencia educativa basada en evidencias que recoge el conjunto de decisiones y actuaciones que se han llevado a cabo para promover el desarrollo y la evaluación de la competencia matemática, considerando tanto las aportaciones de la Administración educativa como de la investigación educativa. En concreto, dicho proceso consta de cinco fases que se reproducen en la figura 13 a modo de modelo, que puede ser aplicado en otros centros escolares que decidan llevar a cabo este proceso de transformación con las adaptaciones que se consideren necesarias:

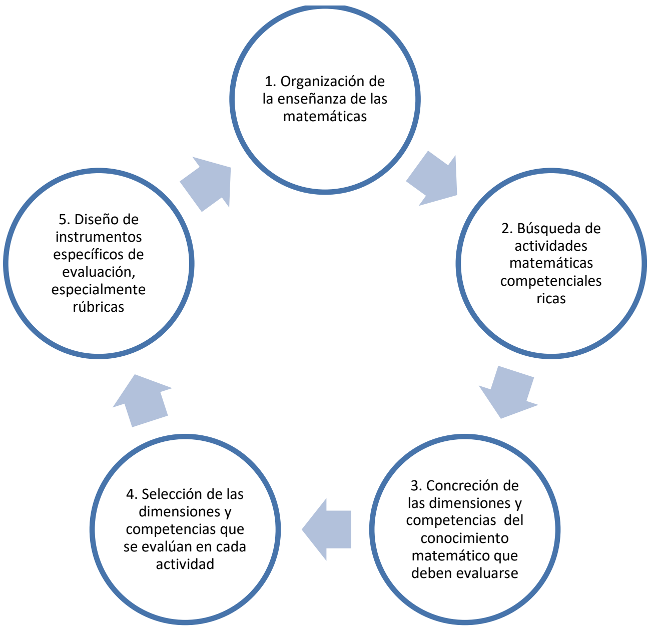


Figura 13. Hacia la definición de un modelo para la evaluación de la competencia matemática en la escuela

La descripción y el análisis de estas cinco fases y, en especial, la concreción de los aspectos que deberían considerarse en la escuela para poder llevar a cabo una evaluación competencial de las matemáticas, constituye probablemente la principal novedad de este artículo. A menudo, tal como se ha indicado en la introducción, uno de los principales problemas con los que se encuentra el profesorado es que, a pesar de que reciben orientaciones generales por parte de la Administración educativa, no disponen de instrucciones ni ejemplificaciones sobre cómo iniciar procesos de cambio adaptados. En este sentido, consideramos que el modelo descrito puede ayudar a que las escuelas preocupadas por ofrecer una educación adecuada a las necesidades del S. XXI puedan iniciar procesos similares, adaptados a su propia realidad. Otra aportación, centrada específicamente en los instrumentos propuestos en este artículo para evaluar la competencia matemática, se centra en el apoyo que pueden ofrecer entornos tecnológicos como *Corubrics*. Si bien en otros trabajos ya se ha insistido en la necesidad de realizar una evaluación mediante rúbricas (Alsina, 2018), el uso de *Corubrics* permite llevar a cabo una evaluación tanto formativa como formadora, puesto que facilita que los alumnos se coevalúen y autoevalúen.

Desde este prisma, en el modelo propuesto los procesos de coevaluación y autoevaluación adquieren un especial protagonismo, puesto que estudios previos han puesto de manifiesto que se trata de estrategias efectivas para el aprendizaje de las matemáticas (Klute, Apthorp, Harlacher y Reale, 2017). Sin embargo, González (2018) señala que, a pesar del importante impacto que puede tener este tipo de evaluación sobre el rendimiento de los alumnos, hay que considerar también sus debilidades, en vista de la multitud de factores que pueden reducir o enfatizar estos efectos. Para esta autora, “los beneficios de la evaluación no están garantizados en cualquier circunstancia, sino que necesitan distintos requisitos, algunos de los cuales dependen de los responsables políticos” (González, 2018, p. 16). En concreto, señala los siguientes requisitos para que este tipo de evaluación sea eficaz: a) los esfuerzos de evaluación se deberían hacer de la forma más eficiente y eficaz posible, por lo que es necesario formar al profesorado en instrumentos de evaluación formativa y acompañar a los centros en el diseño de sus planes de evaluación con el objetivo de incrementar el rendimiento de los alumnos; b) el contexto es muy relevante para el éxito de la evaluación formativa, por lo que ésta debería plantearse en el marco de un proceso de aprendizaje continuo, no finalista, en el que se delimiten claramente los objetivos de aprendizaje; c) ampliar los objetivos más allá del rendimiento, hacia otras esferas del aprendizaje como la autorregulación del alumnado a través de la autoevaluación; d) dotar a los centros escolares de herramientas para la evaluación diagnóstica que permitan afinar el diseño del proceso de aprendizaje; e) la administración pública precisa de datos y de información para diseñar mejor los procesos educativos, incluida la evaluación; y f) impulsar investigaciones que evalúen de forma más profunda el impacto de los distintos instrumentos de evaluación, la intermediación de otras variables, como la calidad del profesorado, y muy especialmente los efectos respecto al alumnado de bajo rendimiento.

Además de indagar en estos aspectos, en futuros trabajos será necesario incorporar de forma más explícita en los instrumentos descritos la evaluación de otros aspectos como por ejemplo las actitudes, considerando que las concepciones sobre las competencias en la bibliografía especializada son coincidentes en este sentido. Así, por ejemplo, Perrenoud (2004) plantea que son síntesis combinatorias, por un lado, de procesos cognitivos, saberes, habilidades, conductas en la acción y actitudes, y por otro, afirma que mediante ellas se logra una solución innovadora a los diversos problemas que plantea la vida humana y las organizaciones productivas. Del mismo modo, la Comisión Europea (2004) las caracteriza, primero mediante la conjunción de sus componentes, diciendo que son el conjunto de conocimientos, destrezas y actitudes, y segundo afirmando que todos los individuos las necesitan para su realización y desarrollo personal, inclusión y empleo. De la

Orden (2011) sintetiza esas dos características definiéndolas como un conjunto integrado de conocimientos, destrezas y actitudes y como desempeño exitoso de una función o un rol.

De este conjunto de requisitos se desprende que la transformación hacia un modelo de enseñanza y de evaluación competencial en general, y de las matemáticas en particular, es responsabilidad de todos: de la Administración educativa, de la investigación educativa y, cómo no, del profesorado. Desde este prisma, en este artículo se ha reflejado como la simbiosis de estos elementos es la que conduce a resultados satisfactorios.

Bibliografía

Alsina, Á. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 1-14.

Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Épsilon, Revista de Educación Matemática, 33*(1), 7-29

Alsina, Á. (2018). La evaluación de la competencia matemática: ideas clave y recursos para el aula. *Épsilon, Revista de Educación Matemática 98,* 7-23.

Ascher, C. (1990). *ERIC Clearinghouse on urban education*. Nueva York: ED327612.

Calatayud, A. (1999). La participación del alumno de Educación Primaria en el proceso evaluador. *Educadores: Revista de Renovación Pedagógica,189,* 79-97.

Calatayud. A. (2002). La cultura autoevaluativa, piedra filosofal de la calidad en educación. *Educadores: Revista de Renovación Pedagógica,204,* 357-375.

Comisión Europea. (2004). Competencias clave para el aprendizaje permanente. Un marco de referencia europeo. Recuperado de:
http://www.educastur.princast.es/ info/calidad/indicadores/doc/comision_europea.pdf

DECRETO 119/2015, de 23 de junio, de ordenación de las enseñanzas de la educación primaria. Recuperado de http://portaldogc.gencat.cat/utilsEADOP/PDF/6900/1431926.pdf

De la Orden, A. (2011). Reflexiones en torno a las competencias como objeto de evaluación en el ámbito educativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 13*(2), 1–21.

Delors, J. (1996). Los cuatro pilares de la Educación. En J. Delors et al. (Eds.), *La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XXI* (pp. 91-103). Madrid: Santillana/UNESCO.

Díaz-Barriga, F. (2006). *Enseñanza situada: vínculo entre la escuela y la vida.* México D.F: McGraw-Hill.

Freudenthal, H. (1991). *Revising mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Generalitat de Catalunya, Departament d’Ensenyament (2013). *Competències bàsiques de l’àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l’educació primària.* Barcelona: Servei de Comunicació i Publicacions.

González, S. (2018). ¿Es la evaluación del alumnado un mecanismo de mejora del rendimiento escolar? Recuperado de https://www.fbofill.cat/publicacions/es-la-evaluacion-del-alumnado-un-mecanismo-de-mejora-del-rendimiento-escolar.

Goñi, J. Mª. (2008). *3^2 – 2 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática.* Barcelona: Graó.

Goodrich, H. (2000). Using rubrics to promote thinking and learning. Educational *Leadership, 57*(5), 13-18.

Klute, M., Apthorp, H., Harlacher, J., y Reale, M. (2017). Formative assessment and elementary school student academic achievement: A review of the evidence (REL 2017–259). Washington, DC: U.S. Department of Education, Institute of Education Sciences, National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Regional Educational Laboratory Central. Recuperado de http://ies.ed.gov/ncee/edlabs.

NCTM (2014). D*e los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos.* Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

ORDEN NOS/164/2016, de 14 de junio, por la cual se determinan el procedimiento y los documentos y requisitos formales del proceso de evaluación en la educación primaria, recuperado de http://portaldogc.gencat.cat/utilsEADOP/PDF/7148/1508505.pdf

Perrenoud, P. (2004). La clave de los campos sociales: competencias del actor autónomo. En D. Rychen y L. Salganik (Eds.), *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida* (pp. 216−261). México: Fondo de Cultura Económica.

Planas, N. y Alsina, A. (2014). Epílogo. En N. Planas y A. Alsina (2009). *Educación matemática y buenas prácticas* (pp. 265-272). Barcelona: Graó (2ª edición).

Price, M.H. (1986). The Perry Movement in school mathematics. En M. H. Price (Ed.), *The development of the secondary curriculum* (pp. 7-27). Londres: Croom Helm.

Rychen, D.S. y Salganik, L.H. (2004). *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida.* México: Fondo de Cultura Económica.

Sanmartí, N. (2007). *10 ideas clave. Evaluar para aprender.* Barcelona: Graó.

Autores:

Primer autor: Alsina, Ángel**: Catedrático de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina. Email: angel.alsina@udg.edu**

Segundo autor: García, Miquel**: Maestro de Educación Primaria, actualmente en la escuela "Els Estanys" de Sils (Girona, España). Ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado relacionadas con las TAC (Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento). Ha organizado seminarios de matemáticas para el profesorado de la zona educativa donde trabaja y actualmente realiza conferencias, cursos y talleres de formación relacionados con la didáctica de las matemáticas. Email: mgarc692@gmail.com/ formacio.mat@gmail.com**

Tercer autor: Torrrent, Eduard:**Maestro de Educación Primaria, actualmente en la escuela "Els Estanys" de Sils (Girona, España). Ha organizado seminarios de matemáticas para el profesorado de la zona educativa donde trabaja y actualmente realiza conferencias, cursos y talleres de formación relacionados con la didáctica de las matemáticas. Email: et8862@gmail.com / formacio.mat@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 55. Abril 2019
Páginas 109-122

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

O Indivíduo, a Sociedade, o Conhecimento (Matemático) e a Educação (Matemática)

Lênio Fernandes Levy

Fecha de recepción: 30/01/2019
Fecha de aceptación: 15/04/2019

Resumen

En este trabajo, se abordan los papeles desempeñados por el individuo y la sociedad en lo que concierne a la construcción del conocimiento, con énfasis en el conocimiento matemático. Se trata de una investigación de naturaleza teórico-bibliográfica. Buscando identificar quién (Individuo? Sociedad? Ambos?) crea/creó, en el curso histórico, el conocimiento, incluso el conocimiento matemático, se hace, en la presente investigación, uso, como base teórica, del pensamiento complejo de Edgar Morin, así como de puntos comunes a ese pensamiento y a la noción de identidad pregonada por Claude Dubar. La adhesión del autor de este artículo a la visión compleja a propósito de la identidad de quien produce históricamente el conocimiento (siempre teniendo en cuenta la creación del conocimiento matemático) tiene que ver, en gran medida, con su defensa del principio de que hay relaciones entre sujeto y objeto, y entre individuo y sociedad. En fin, son resaltados y/o establecidos vínculos, por el autor del texto, entre, por un lado, la concepción compleja acerca de la identidad de quien construye, a lo largo del tiempo, el conocimiento (con destaque, en el artículo, al conocimiento matemático) y, por otro lado, la Educación y su historia, con realce del autor de la investigación a la Educación Matemática.
Palabras clave: individuo, sociedad, conocimiento, matemáticas, enseñanza.

Abstract

In this work, we discuss the roles played by the individual and the society in the construction of knowledge, with emphasis on mathematical knowledge. It is a research of theoretical-bibliographic nature. In order to identify who (individual? Society? Both?) Creates/created, in the course of history, the knowledge, including the mathematical knowledge, in the present investigation is made use, as a theoretical basis, the complex thinking of Edgar Morin, well as common points to this thought and to the notion of identity proclaimed by Claude Dubar. The adhesion of the author of this article to the complex view of the identity of the one who historically produces the knowledge (always taking into account the creation of mathematical knowledge) has to do with its defense of the principle that there are relations between the subject and the object, and between the individual and the society. Finally, the author of the text bounds and/or establisheds links between, on a hand, the complex conception of the identity of the person (or the society) who constructs, over time, the knowledge (with emphasis, in the article, to the mathematical knowledge) and, on an other hand, the Education and its history, with emphasis realizates by the author of this text on the Mathematics Education.
Keywords: individual, society, knowledge, mathematics, teaching.

Resumo	Neste trabalho, abordam-se os papéis desempenhados pelo indivíduo e pela sociedade no que respeita à construção do conhecimento, com ênfase ao conhecimento matemático. Trata-se de uma pesquisa de natureza teórico-bibliográfica. Almejando-se identificar quem (Indivíduo? Sociedade? Ambos?) cria/criou, no decorrer histórico, o conhecimento, inclusive o conhecimento matemático, faz-se, na presente investigação, uso, como base teórica, do pensamento complexo de Edgar Morin, assim como de pontos comuns a esse pensamento e à noção de identidade apregoada por Claude Dubar. A adesão do autor deste artigo à visão complexa a propósito da identidade de quem produz historicamente o conhecimento (sempre levando em conta a criação do conhecimento matemático) tem a ver, em grande medida, com sua defesa do princípio de que há relações entre sujeito e objeto, e entre indivíduo e sociedade. Enfim, são frisados e/ou estabelecidos liames, pelo autor do texto, entre, de um lado, a concepção complexa acerca da identidade de quem constrói, ao longo do tempo, o conhecimento (com destaque, no artigo, ao conhecimento matemático) e, de outro lado, a Educação e sua história, com realce do autor da investigação à Educação Matemática. **Palavras-chave:** indivíduo, sociedade, conhecimento, matemática, ensino.

1. Introdução

O conhecimento (com interesse, de nossa parte, pelo conhecimento matemático) deve-se ao indivíduo, à sociedade ou a ambos? Antes, porém: o que são conhecimento (em especial, para nós, conhecimento matemático), indivíduo e sociedade? Ademais: o sujeito e o objeto, juntos, influenciam a elaboração do conhecimento? Ou a criação do conhecimento depende apenas de um deles? Com o passar da *História*[1] da humanidade, as concepções sobre como o conhecimento é gerado e/ou sobre quem o gera (Indivíduo? Sociedade? Ambos?) modificaram-se? Tais concepções repercutiram na forma com que o universo escolar trabalhou o conhecimento no transcurso da História? Essas são algumas das interrogações de que tratamos no artigo.

O presente trabalho denota uma pesquisa teórica nos moldes preconizados por Prestes (2003), bem como por Moreira e Caleffe (2008). Trata-se de uma investigação básica (pura), em vez de aplicada (Moreira e Caleffe, 2008). Na condição de pesquisa não experimental: descreve e explica eventos e situações como existem ou existiram; avalia produtos ou processos; desenvolve inovações (Moreira e Caleffe, 2008). Ao mesmo tempo, este trabalho possui um cariz bibliográfico. Nesse sentido:

> A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. A pesquisa bibliográfica não deve ser confundida com a revisão ou a resenha bibliográfica, pois a pesquisa bibliográfica é por si só um tipo de pesquisa,

[1] O termo História, "que em geral significa pesquisa, informação ou narração e que já em grego era usado para indicar a resenha ou a narração dos fatos humanos, apresenta hoje uma ambigüidade fundamental: significa, por um lado, o conhecimento de tais fatos ou a ciência que disciplina e dirige esse conhecimento (*historia rerum gestarum*) e, por outro lado, os próprios fatos ou um conjunto ou a totalidade deles (*res gestae*)" (Abbagnano, 2000, p. 502).

> enquanto a revisão ou a resenha bibliográfica é um componente obrigatório de todo e qualquer tipo de pesquisa. (Moreira e Caleffe, 2008, p. 74).

Na seção inicial do texto, abordamos os temas *indivíduo, sociedade e complexidade*. Complexidade é a teoria filosófica em que nos amparamos para tentar responder, nesta pesquisa como um todo, às perguntas elencadas no parágrafo anterior.

Em seguida, tratamos do tema *conhecimento*, dispensando atenção a duas variantes: o conhecimento espontâneo e o conhecimento científico. Tanto no âmbito da cognição espontânea quanto naquele da cognição científica, entendemos que haja manifestação do conhecimento de tipo matemático.

Após essas reflexões e exposições, sempre subsidiados pelo ideário complexo, voltamo-nos para a *identidade* de quem constrói o conhecimento (nele incluído o conhecimento matemático), dando relevo às duas visões majoritárias que se adotaram a esse respeito no curso da História: protagonismo do indivíduo e protagonismo da sociedade. Ao lidarmos, no artigo, com o assunto *identidade*, destacamos e utilizamos elementos que, de nosso ponto de vista, são comuns ao pensamento complexo de Edgar Morin e ao corpo de ideias de Claude Dubar.

Na seção imediatamente precedente às considerações finais, argumentamos em prol dos vínculos que julgamos haver ou ter havido, no decurso da História, entre, de um lado, as concepções sobre quem (Indivíduo? Sociedade? Ambos?) dá ou dava origem ao conhecimento (com atenção nossa ao conhecimento matemático) e, de outro lado, a maneira segundo a qual o processo de ensino e de aprendizagem (com ênfase nossa à Matemática), no contexto escolar, acontece ou acontecia.

Em nossas conclusões, reiteramos o entrelaçamento da teoria filosófica da complexidade com os seguintes itens: indivíduo, sociedade, conhecimento, Matemática e Educação.

2. Indivíduo, sociedade e complexidade

A aproximação entre indivíduo e sociedade é descortinada (e/ou arquitetada), sobremaneira, pela descoberta da não existência (e/ou pela impossibilidade de engendramento) desta sem aquele, e vice-versa. Por sua vez, o distanciamento entre indivíduo e sociedade dá-se (e/ou é imaginado), sobretudo, pela percepção (e/ou pela elaboração da ideia) de que elemento e conjunto, denotando, entre outras coisas, singular e plural respectivamente, costumam alojar-se em polos diametralmente opostos. Entendemos, pois, que a relação entre indivíduo e sociedade seja complexa. Mas que significados tomamos por base com o intuito de discorrer sobre *indivíduo, sociedade e complexidade*?

Para efeito desta pesquisa, indivíduo é: “[...] tudo aquilo que constitui uma unidade, não podendo ser dividido sem descaracterizar-se como tal. Objeto simples, sem partes. Aquilo que é contável. Algo que possui características próprias que o distinguem das outras coisas” (Japiassú e Marcondes, 1996, p. 142). Neste texto, recorremos à palavra *indivíduo*, bem como aos correspondentes e supramencionados atributos, quando versamos – tanto em nível concreto quanto em nível conceitual – sobre a pessoa, o homem ou o ser humano.

A seu turno: “[...] a sociedade não é um mero conjunto de indivíduos vivendo juntos, em um determinado lugar, mas define-se essencialmente pela existência de uma organização, de instituições e leis que regem a vida desses indivíduos e suas relações mútuas” (Japiassú e Marcondes, 1996, p. 251). Em termos concretos/reais e em termos conceituais/virtuais, a sociedade não deixa de ser *indivíduo*, já que se constitui em unidade e possui aspectos próprios ou distintivos (Morin, 2003). No presente artigo, mantemos esse entendimento; no entanto, para evitar ambiguidades gramaticais envolvendo menções ao grupo social/comunitário e à pessoa, não utilizamos a palavra *indivíduo* quando fazemos referência à *sociedade/comunidade*.

Visando à fundamentação deste trabalho, aliamo-nos à teoria filosófica da complexidade, devida mormente aos esforços do pensador francês Edgar Morin. Três dos princípios de seu corpo teórico (com destaque nosso ao primeiro deles) servem de sustentáculo às argumentações que desenvolvemos nas páginas que se seguem. Esses princípios são:

(i) O dialógico: *na natureza, no homem, no conhecimento e/ou na sociedade, há contradições ou antagonismos que são, ao mesmo tempo, complementares*.

Exemplos: a partícula e a onda, no elétron, opõem-se uma à outra, mas também completam-se mutuamente; a razão e a emoção, no homem, equivalem aos dois lados da moeda, os quais são contrários, todavia necessários à existência dessa peça metálica; a espontaneidade e a sistematização, no conhecimento e na sua produção, embora digam respeito a processos distintos e mesmo adversos, estão ambas presentes, em maior ou em menor grau – conforme esclarecemos nas próximas páginas –, tanto no conhecimento espontâneo (e na sua criação) quanto no conhecimento sistematizado (e na sua elaboração); direitos e deveres, na sociedade, apesar de frequentemente se conflitarem, agregam-se com vistas à manutenção e ao desenvolvimento sociais.

(ii) O recursivo: *na natureza, no homem, no conhecimento e/ou na sociedade, a causa gera o efeito, que retroage sobre a causa, (re)gerando-a, num processo de circularidade*.

Exemplo (na natureza animal): aumento da quantidade de caçadores resultante do aumento da quantidade de presas => redução da quantidade de presas por causa do aumento da quantidade de caçadores => redução da quantidade de caçadores em virtude da redução da quantidade de presas => aumento da quantidade de presas decorrente da redução da quantidade de caçadores => aumento da quantidade de caçadores resultante do aumento da quantidade de presas.

(iii) O hologramático: *na natureza, no homem, no conhecimento e/ou na sociedade, a parte encontra-se no todo, e o todo acha-se em cada uma de suas partes*.

Exemplo (no ser humano, enquanto membro do contexto biológico): o homem integra uma espécie (vide o *homo sapiens*), a qual, por meio de seus processos reprodutores/mantenedores, notadamente o genético, situa-se no interior do homem ou de cada homem.

Podemos elencar características e articulações dos componentes da díade *indivíduo-sociedade* à luz dos supracitados princípios:

(i) De acordo com o princípio dialógico, o indivíduo e a sociedade antagonizam-se ou contradizem-se e, simultaneamente, complementam-se. “O princípio dialógico nos permite manter a dualidade no seio da unidade. Ele associa dois termos ao mesmo tempo complementares e antagônicos” (Morin, 2011, p. 74).

(ii) O princípio recursivo possibilita-nos afirmar que o indivíduo gera a sociedade, a qual gera o indivíduo. Por sinal:

> A ideia recursiva é, pois, uma ideia em ruptura com a ideia linear de causa/efeito, de produto/produtor, de estrutura/superestrutura, já que tudo o que é produzido volta-se sobre o que o produz num ciclo ele mesmo autoconstitutivo, auto-organizador e autoprodutor. (Morin, 2011, p. 74)

(iii) Segundo o princípio hologramático, o indivíduo está na sociedade, e a sociedade, com suas regras, seus tabus, suas tradições, suas peculiaridades etc., está no indivíduo. “Num holograma físico, o menor ponto da imagem do holograma contém a quase totalidade da informação do objeto representado. Não apenas a parte está no todo, mas o todo está na parte” (Morin, 2011, p. 74).

Na seção que se segue, abordamos o tema *conhecimento*, e, na seção imediatamente posterior, trabalhamos liames complexos envolvendo: conhecimento, identidade, indivíduo e sociedade.

3. Conhecimento

Conhecimento é representação do objeto, construída pelo sujeito, denotando ou tendendo a denotar uma analogia ou um *espelho*, em nível mental, de tal objeto (Morin, 1999). No conhecimento há, de algum modo, um diálogo contraditório ou antagônico e, ao mesmo tempo, complementar entre construção/interpretação e analogia/descoberta, entre subjetividade e objetividade (vide o *princípio dialógico*). Nesse sentido:

> A representação é o produto de um processo morfogenético e sintético que a constrói sob a forma de imagem global, imediatamente percebida como visão objetiva das coisas reais e apropriação subjetiva dessa visão objetiva (toda percepção comporta um implícito “eu percebo”). É, contudo, na própria apropriação subjetiva que a representação é percebida como presença objetiva da realidade das coisas e de modo algum como imagem. Pois esta “imagem”, projetada no mundo exterior, toma todo o lugar do mundo exterior ao identificar-se totalmente com ele, ou seja, identificando-o inteiramente com ela. (Morin, 1999, p. 119)

Conhecimento espontâneo ou do senso comum é aquele ligado diretamente à percepção, aos sentidos humanos, ao universo concreto; ele prevalece em nossas interações e manifestações cotidianas (Tunes, 1995; Levy, 2016).

Conhecimento científico ou acadêmico é o que se vincula, sobretudo, a processos sistemáticos de abstração e de generalização, demandando um rigor metodológico dedutivo e/ou indutivo; valemo-nos dele, sobremaneira, em ambientes escolares, acadêmicos ou de investigação científica (Tunes, 1995; Levy, 2016).

O conhecimento matemático de cariz acadêmico ou científico é prioritariamente marcado por uma dedução rigorosa, alicerçada em conceitos e em regras tidos como verdadeiros, que – mediante recurso, de nossa parte, a encadeamentos lógicos – permitem a constatação da veracidade de conceitos e de regras subsequentes (Levy, 2016).

O conhecimento matemático também pode ser espontâneo. Nesse caso, ele é predominantemente marcado por uma indução não rigorosa, a qual diz respeito à aquisição de certezas por meio da confirmação não sistemática de algumas supostas repetições ou semelhanças, que são atribuídas a ocorrências distintas (Levy, 2016).

O conhecimento matemático acadêmico ou científico resulta não apenas de uma dedução rigorosa, mas também de uma parcela, por menor que seja, de indução não rigorosa, já que, sendo construção, ele não se encontra independente da subjetividade humana e da presença dessa subjetividade no mundo. Os traços da indução não rigorosa tendem a ser cabalmente excluídos quando da exposição e/ou da comunicação formal do conhecimento matemático acadêmico ou científico (Levy, 2016).

Por sua vez, o conhecimento matemático espontâneo é fruto não somente da indução não rigorosa, mas também de uma parcela de dedução não rigorosa, a qual, apesar de sua flexibilidade e/ou de seu caráter assistemático, não prescinde (assim como a própria indução não rigorosa) de processos que levem em conta o abstrato e o geral (Levy, 2016).

Em suma, dedução e indução, rigorosas ou não, participam das (ou mesmo denotam as) dinâmicas cognitivas de um indivíduo considerado apto a atuar normalmente em sua sociedade; dinâmicas essas que, em maior ou em menor grau, são marcadas pelo abstrato e pelo geral (Morin, 1999; 2003).

Onde começa e onde termina a contribuição do indivíduo (outrossim, onde começa e onde termina a contribuição da sociedade) no que diz respeito à construção do conhecimento?

Não há certeza quanto a isso. É possível que a parcela de determinação ou certeza, nesse caso, seja bem menor do que a parcela de indeterminação. Somos, inclusive, conduzidos a aquiescer com a possibilidade de hegemonia da incerteza ou indeterminação. Por oportuno, no que se refere a saberes necessários à educação do futuro, Morin afirma que:

> Seria preciso ensinar princípios de estratégia que permitissem enfrentar os imprevistos, o inesperado e a incerteza, e modificar o seu desenvolvimento,

> em virtude das informações adquiridas ao longo do tempo. É preciso aprender a navegar em um oceano de incertezas em meio a arquipélagos de certeza. (Morin, 2002, p. 16)

A incerteza, em escala maior do que a certeza – de acordo com a nossa visão e/ou conforme o ideário filosófico da complexidade (Morin, 2002) –, perpassa o indivíduo, a sociedade, o conhecimento espontâneo, o conhecimento acadêmico ou científico e o conhecimento matemático (seja ele o conhecimento matemático espontâneo, seja ele o conhecimento matemático acadêmico ou científico). Entendemos ser plausível, em síntese, a assertiva de que: “[...] há uma relação de incerteza entre a idéia e o real. A idéia pode se impor ao real, mas nem por isso este se conformará à idéia. Os rebentos produzidos pelas copulações entre o real e a idéia não se assemelham a nenhum dos dois genitores” (Morin e Kern, 2002, p. 127).

A próxima seção deste trabalho é dedicada, justamente, à participação do indivíduo e/ou da sociedade na origem e no desenvolvimento do conhecimento.

4. Identidade de quem constrói conhecimento

Em nível teórico, no que tange a este texto, alicerçamo-nos essencialmente não apenas em Morin (1999; 2003), mas também em Dubar (2005) e em alguns aspectos da sua noção dual ou bidimensional a propósito da identidade, cabendo, pois, as seguintes perguntas no que diz respeito à conjunção de identidade e de elaboração cognitiva:

(i) Como o indivíduo vê-se ou identifica-se (dimensão *singular/real/concreta* da identidade), em se tratando da construção do conhecimento (interessando-nos, em particular, a construção do conhecimento matemático)?

(ii) Como o indivíduo é visto ou é identificado pelo *outro* (dimensão *virtual/conceitual/abstrata* da identidade), em se tratando da construção do conhecimento (especialmente, para nós, em se tratando da construção do conhecimento matemático)?

Assim sendo, a identidade é um processo dinâmico e dependente do diálogo que se estabelece entre o indivíduo e a sociedade, entre o *eu* e o *outro*; nesse sentido, sou identificado por mim e pelos demais de acordo com a maneira segundo a qual me vejo, aliada ao modo conforme o qual sou visto (Morin, 1999, 2003; Dubar, 2005). Em resumo: “[...] a identidade de uma pessoa não é feita à sua revelia, no entanto não podemos prescindir dos outros para forjar nossa própria identidade” (Dubar, 2005, p. 143).

Há/houve duas concepções majoritárias, defendidas ao longo da História, acerca da identificação de quem constrói o conhecimento (nele incluso o conhecimento matemático):

(i) Protagonismo atribuído ao indivíduo: tal concepção deveu sua origem, em grande parte, consoante Fara (2014), aos gregos antigos e foi bastante divulgada até algumas décadas atrás, sendo forte mesmo nos dias atuais. Roque (2012), mencionando Isaac Newton, não deixa passar despercebido o culto desproporcional, até hoje alimentado por alguns historiadores das Ciências e da Matemática, quanto à hegemonia, e mesmo quanto à exclusividade, na construção e/ou na descoberta do cabedal científico-matemático da humanidade, por parte de *indivíduos tidos como superdotados intelectualmente*:

> A lenda de que Newton descobriu a lei da gravidade quando uma maçã caiu em sua cabeça é bastante conhecida, e, apesar da evidente caricatura que representa, não é uma invenção recente. Traduz a visão de que a ciência é uma produção individual de gênios que, num rompante de iluminação, têm ideias inovadoras, difíceis de serem compreendidas pelos homens comuns. (Roque, 2012, p. 25)

(ii) Protagonismo atribuído à sociedade: essa concepção tem ganhado muitos adeptos, mundo afora, nos últimos decênios (Fara, 2014). Uma faceta negativa da assunção desse tipo de protagonismo ganha realce quando entra em jogo o afã de tentar-se considerar um grupo humano, ou uma sociedade em particular numa época determinada, acima dos demais grupos humanos, sociedades e períodos históricos. Roque (2012) assevera que:

> Os europeus foram erigidos em herdeiros privilegiados dos milagres gregos, e a ciência passou a ser vista como uma criação específica do mundo greco-ocidental. Essa reconstrução tem dois componentes: a exaltação do caráter teórico da matemática grega, cuja face perfeita é expressa pelo método axiomático [...]; e a depreciação das matemáticas da Antiguidade tardia e da Idade Média, associadas a problemas menores, ligados a demandas da vida comum dos homens. (Roque, 2012, p. 23)

A nossa concepção a propósito da identidade de quem constrói ou construiu o conhecimento (inclusive o conhecimento matemático) no decurso histórico constitui-se em uma terceira via, de natureza complexa dialógica. Em outras palavras, somos favoráveis à ideia de que tanto (i) *o indivíduo* quanto (ii) *a sociedade* (num dialogismo contraditório ou antagônico e, ao mesmo tempo, complementar) participaram (no decorrer histórico), participam e continuarão participando da construção do conhecimento (com interesse, de nossa parte, no tocante à construção do conhecimento matemático). Essa visão não deixa de guardar laços, igualmente, com o corpo teórico de Dubar (2005).

Exemplos de certezas e, simultaneamente, de dúvidas/incertezas relacionados à identificação de quem (Indivíduo? Sociedade? Ambos?) criou regras e definições matemáticas:

(i) De um lado, Tales, Pitágoras e Euclides, entre outros, podem ser encarados como gênios solitários que estabeleceram os rumos da Matemática dedutiva; mas isso não impede que, de acordo com uma significativa parcela de especialistas, esses sábios gregos jamais hajam transcendido o contexto da ficção, tanto no que concerne às suas obras quanto no que respeita à sua própria existência como indivíduos reais. Por sinal:

> Esse foco em celebridades vem dos gregos antigos, que sabiam: heróis atraem a atenção dos leitores e tornam as histórias memoráveis. Eles inventaram Aquiles e Ulisses e outros heróis mitológicos, cujos feitos são humanamente inalcançáveis. Ao mesmo tempo, como conferiam extremo valor às realizações intelectuais, converteram filósofos da vida real em figuras lendárias que realmente existiram, mas cujos feitos acadêmicos seriam impossíveis a um reles mortal. (Fara, 2014, p. 23)

(ii) De outro lado, o Egito, a Mesopotâmia, a Grécia, a China, a Índia e o Império Árabe, tanto quanto as sociedades europeias modernas, são exemplos recorrentes de culturas com acentuada contribuição histórica à Matemática. Todavia, existe quem seja levado a imaginar quantas e quais foram as pessoas que, de alguma forma, desempenharam um papel relevante no que tange a essa contribuição, tendo sido mantidas tais pessoas, mesmo assim, no anonimato histórico, a exemplo de várias mulheres contratadas entre 1800 e 1960 como uma espécie de “faz-tudo” no mundo da Ciência; mulheres inteligentes o bastante para realizarem cálculos sofisticados e suficientemente desesperadas por um emprego, a ponto de tolerarem a falta de reconhecimento ao seu serviço, bem como (a ponto de tolerarem) longas jornadas de trabalho por baixos salários (Fara, 2014). Relativamente ao conhecimento científico na Idade Moderna, Fara destaca que:

> Os primeiros filósofos experimentadores pediram orientação aos artesãos. Um dos mais famosos contemporâneos de Bacon foi o médico da rainha Elizabeth I, William Gilbert, hoje celebrado como um dos primeiros cientistas, e na época reconhecido por ter inventado bússolas mais eficientes, melhorando assim a navegação britânica. Quando começou a investigar o magnetismo, Gilbert buscava apoio não só em seus colegas acadêmicos, mas também na comunidade marítima. Embora escritos em um inglês simples, e não em latim erudito, os livros dos navegantes elisabetanos vinham cheios de instruções técnicas, Geometria euclidiana e discussões sobre os padrões magnéticos da Terra. Em vez de criações próprias, alguns dos instrumentos de Gilbert eram apenas versões melhoradas de ideias que ele havia encontrado em um livro escrito 20 anos antes por um fabricante de bússolas. (Fara, 2014, p. 164-165)

A assunção de que sempre houve um diálogo entre indivíduos e sociedades (em vez de processos encaminhados só por indivíduos ou unicamente por sociedades) quanto à elaboração de regras e definições matemáticas em particular, e no tocante à elaboração do conhecimento humano em geral, é uma posição aceitável por compatibilizar-se, reiteramos, com a teoria filosófica da complexidade (Morin, 1999; 2003).

Por um lado, o diálogo criativo envolvendo largamente ambos, ou seja, indivíduo e coletividade, no que toca à origem e ao desenvolvimento dos conhecimentos, não se submeteu, até certo ponto, às vontades, às concepções e aos relatos vigentes nas diversas épocas e nos vários locais, quer se tratasse do desejo, oficial ou não, de priorizarem-se indivíduos como autores, quer se tratasse do afã, oficial ou não, de priorizarem-se coletividades como autoras de tais conhecimentos e das respectivas transformações. Essa afirmação favorece a objetividade.

Por outro lado, o conhecimento sobre os objetos de estudo não se encontra isento de reinvenções, não se localiza fora de nossas possibilidades, não está livre do tempo e do espaço em que surge e se desenvolve, na medida em que (tal conhecimento) se constitui numa elaboração humana individual e/ou coletiva. Quer dizer, até certo ponto, as vontades, as concepções e os relatos vigentes (sejam/fossem em prol de indivíduos, sejam/fossem em prol de sociedades, sejam/fossem em prol de ambos), nas diversas épocas e nos vários locais, exercem/exerceram ingerência na construção do conhecimento. Essa asserção beneficia a subjetividade.

Em relação à construção do conhecimento, ratificamos (vide o *princípio complexo dialógico*) que objetividade e subjetividade dialogam entre si, num processo antagônico ou contraditório e, ao mesmo tempo, complementar.

5. Influxos na Educação (com atenção, de nossa parte, à Educação Matemática)

Qual foi e qual tem sido a repercussão na Educação, particularmente na Educação Matemática, da dinâmica histórica de que tratamos na seção anterior (dinâmica essa que, segundo cremos, amparados na teoria filosófica da complexidade, é, a um só tempo, objetiva e subjetiva)? Vejamos:

A concepção abraçada em épocas pregressas era mais voltada para a hegemonia ou para a valorização de atividades discentes individuais, não se distanciando da ideia, também majoritária nessas épocas, de que o conhecimento era ou seria criado por indivíduos isolados. Tal concepção, mesmo sendo repelida na atualidade por uma quantidade abundante de investigações, teorias e publicações acadêmicas, ainda possui um considerável número de adeptos.

Já a concepção de um ensino que dá primazia ou que dá grande valor a atividades discentes coletivas tem-se fortalecido na contemporaneidade e coaduna-se com o ponto de vista – crescente nas últimas décadas – de que a construção do conhecimento é social.

Argumentamos, neste artigo, a favor de uma terceira via, ou seja, a favor de que, na Educação (inclusivamente na Educação Matemática), ambos os polos, *individual* e *coletivo*, interagem e/ou devam interagir mutuamente. Por oportuno:

> [...] o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. (Brasil, 2000, p. 31)

Os preceitos de Brasil (2000) vão ao encontro de nossa propositura, a qual tem a ver com ações pedagógicas em que a parte (um aluno) e a totalidade (a turma inteira), bem como articulações entre essa parte e essa totalidade, possam receber destaque.

O *individual* e o *coletivo* dialogam entre si (*princípio complexo dialógico*), retroalimentando-se mutuamente (*princípio complexo recursivo*) e fazendo parte um do outro (*princípio complexo hologramático*). De acordo com Morin:

> *Dentro de cada sociedade, cada indivíduo é, ao mesmo tempo, um sujeito egocêntrico e um momento/elemento de um todo sociológico*.
> Esse todo constitui, ao mesmo tempo, um Nós (do qual o sujeito apropria-se e nele se inclui).
> O egocentrismo do sujeito inscreve-se no sociocentrismo da sociedade mesmo se conservando; e o sociocentrismo da sociedade inscreve-se no egocentrismo individual.
> A relação indivíduo-sociedade é hologramática, recursiva e dialógica [...]. (Morin, 2003, p. 167)

Esse diálogo entre o *individual* e o *coletivo* estaria em consonância com o que ocorre e ocorreu, em termos pretensamente objetivos, na construção histórica do conhecimento (interessando-nos, de modo estrito, a construção histórica do conhecimento matemático), porquanto existem evidências de que ambos, quer dizer, indivíduo e sociedade, são e foram determinantes nesse sentido. Naturalmente, há indivíduos e/ou membros de coletividades de pesquisa que apoiam tais evidências, a fim de que elas tornem-se evidências, e isso reforça a esfera subjetiva.

Esse diálogo também estaria em consonância com o nosso entendimento, que é subjetivo, acerca da dinâmica cognitiva, o qual ratificamos neste artigo. Mas, presumivelmente, o entendimento, em situações tidas como normais ou saudáveis, não se exime do contexto extra-humano, haja vista a inevitabilidade da relação entre sujeito e objeto, e isso traz certa força à esfera objetiva.

Voltamos a frisar que objetividade e subjetividade interagem, a nosso ver, de modo complexo (vide nossa defesa do *princípio dialógico*), antagonizando-se ou contradizendo-se e, concomitantemente, complementando-se.

6. Considerações finais

Enfatizamos a relação entre a construção do conhecimento (com reforço nosso à relação que envolve a construção do conhecimento matemático) e os princípios da complexidade. Isso implica, por exemplo, um conhecimento engenhado, ao mesmo tempo, pelo indivíduo e pela sociedade.

Discorremos sobre as mudanças históricas de concepções atinentes à identidade/identificação de quem (Indivíduo? Sociedade? Ambos?) constrói o conhecimento (incluído aí o conhecimento matemático). Frisamos que subjetividade e objetividade estão ou estiveram sempre presentes, em algum grau, nessas concepções, por mais que não se admitam as citadas presenças e/ou por mais que não se as tenham admitido no passado.

Cremos, além disso, haver relativa proximidade, em termos epistemológicos e identitários, entre os pensamentos de Morin (1999; 2003) e de Dubar (2005). Defendemos o diálogo (complexo/moriniano e, até certo ponto, dubariano) entre as dimensões individual e social no que tange à construção de conhecimentos (em especial – por conta de nosso interesse –, no que tange à construção de conhecimentos matemáticos).

Esse diálogo não deixa de pertencer a um contexto histórico. De um lado, o referido pertencimento mostra-se a nós como algo subjetivo, como algo dependente de nossa interpretação, já que não há objeto sem sujeito. Mas, de outro lado, parece-nos existir um quê de objetividade em tal pertencimento, porque não há sujeito sem objeto. Subjetividade e objetividade travam, uma com a outra, um incessante diálogo complexo de oposição e de complementaridade.

Frisamos e/ou (em alguma medida) concebemos articulações complexas envolvendo o indivíduo, a sociedade, o conhecimento e a Educação (notadamente, a Educação Matemática). Nesse sentido:

(i) Enfatizamos e/ou (em determinada escala) interpretamos, neste artigo, de que modo a História do conhecimento era encarada (construções cognitivas predominantemente individuais) e de que maneira ela é vista atualmente (construções cognitivas prioritariamente sociais).

(ii) Reforçamos e/ou (de certa forma) elaboramos, ao longo das presentes laudas, um modo alternativo, através do qual essa história pode ser encarada ou vista, isto é, abordamos o diálogo complexo entre indivíduo e coletividade. Acreditamos que nunca é excessivo mencionarmos que existem e/ou que podemos criar diálogos complexos entre o sujeito e o objeto, entre o *eu* e o *outro*, entre a interpretação e a analogia, entre a construção e a descoberta.

(iii) Enfim, valorizamos, no ambiente escolar, o papel individual, mas também o papel coletivo, ambos desempenhados pelos alunos. Sugerimos, pois, aulas nas quais a parte (um discente) e a totalidade (a classe inteira), bem como articulações envolvendo essa parte e essa totalidade, possam destacar-se. A citada valorização tem a ver com a nossa defesa do *diálogo complexo* entre indivíduo e coletividade no que se refere a construções cognitivas.

Bibliografia

Abbagnano, N. (2000). *Dicionário de filosofia*. Tradução da 1ª edição brasileira coordenada e revista por Alfredo Bosi; revisão da tradução e tradução dos novos textos por Ivone Castilho Benedetti. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes.

Brasil. (2000). *Parâmetros curriculares nacionais*: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A.

Dubar, C. (2005). *A socialização*: construção das identidades sociais e profissionais. Tradução de Andréa Stahel M. da Silva. São Paulo: Martins Fontes.

Fara, P. (2014). *Uma breve história da ciência*. [versão brasileira da editora]. 1. ed. São Paulo: Fundamento.

Japiassú, H., Marcondes, D. (1996). *Dicionário básico de filosofia*. 3. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Levy, L. F. Pode-se aprender matemática através da investigação de casos particulares?. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, Florianópolis, v. 9, n. 2, p. 287-301, nov. 2016. ISSN 1982-5153. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/1982-5153.2016v9n2p287. Acesso em: 06 jan. 2019. doi: https://doi.org/10.5007/1982-5153.2016v9n2p287.

Moreira, H; Caleffe, L. G. (2008). *Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador*. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina.

Morin, E. (1999). *O método 3*: o conhecimento do conhecimento. Tradução de Juremir Machado da Silva. 2. ed. Porto Alegre: Sulina.

Morin, E. (2002). *Os sete saberes necessários à educação do futuro*. Tradução de Catarina Eleonora F. da Silva e Jeanne Sawaia. 6. ed. São Paulo: Cortez; Brasília, DF: UNESCO.

Morin, E. (2003). *O método 5*: a humanidade da humanidade. Tradução de Juremir Machado da Silva. 2. ed. Porto Alegre: Sulina.

Morin, E. (2011). *Introdução ao pensamento complexo*. Tradução de Eliane Lisboa. 4. ed. Porto Alegre: Sulina.

Morin, E., Kern, A. B. (2002). *Terra-pátria*. Tradução de Paulo Azevedo Neves da Silva. Porto Alegre: Sulina.

Prestes, M. L. de M. (2003). *A pesquisa e a construção do conhecimento científico*: do planejamento aos textos, da escola à academia. 2. ed. São Paulo: Rêspel.

Roque, T. (2012). *História da matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar.

Tunes, E. (1995). Os conceitos científicos e o desenvolvimento do pensamento verbal. In: Oliveira, M. K. (Org.). *Implicações pedagógicas do modelo histórico-cultural*. Campinas: Papirus, pp. 29-39. Caderno CEDES, n. 35.

Dados do autor:

Nome: Lênio Fernandes Levy.

Formação: Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Pará / UFPA (1990), além de Mestre (2003) e Doutor (2013) em Educação Matemática, também pela UFPA.

Local de trabalho: [Professor Adjunto do] Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN) da UFPA. E-mail: leniolevy@ufpa.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 55. Abril 2019
Páginas 123-143

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Um estudo da Primeira Forma Quadrática: Uma proposta de ensino com construção dinâmica

Ana Carla Pimentel Paiva, Francisco Régis Vieira Alves

Fecha de recepción: 18/07/2018
Fecha de aceptación: 15/04/2019

Resumen	En este artículo se presenta un análise epistemológico de un concepto de la teoría matemática de las superficies, denominada Primera Forma Cuadrática. Ante el carácter reconocidamente abstracto de ese concepto, utilizaremos algunos elementos clásicos constituyentes de la Ingeniería Didáctica - ED para la investigación de la enseñanza del objeto matemático en cuestión. De este modo, presentaremos definiciones que nos permitan el cálculo y la comprensión del concepto. Además, utilizaremos el software GeoGebra, para evidenciar la interpretación y significación visual de los conceptos previos involucrados, ayudando así, de forma cualitativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto. **Palabras clave**: Primera forma cuadrática. Superficies. GeoGebra. Ingeniería Didáctica.
Abstract	In this article, we discuss an epistemological analysis of a concept of the vast mathematical theory of surfaces, called the First Quadratic Form Faced with the admittedly abstract character of this concept, we will use some classic elements of Didactic Engineering - ED to investigate the teaching of the mathematical object in question. In this way, we will present definitions that allow us to calculate and understand the concept. In addition, we will use GeoGebra software to highlight the interpretation and visual meaning of the previous concepts involved, thus helping, in a qualitative way, the teaching and learning process of the concept. **Keywords:** First quadratic form. Surface. GeoGebra. Didactic Engineering.
Resumo	Abordamos nesse artigo uma análise epistemológica de um conceito *da teoria matemática das superficies, denominado* Primeira Forma Quadrática Diante do caráter reconhecidamente abstrato desse conceito, utilizaremos alguns elementos clássicos constituintes da Engenharia Didática – ED para investigação do ensino do objeto matemático em questão. Desse modo, apresentaremos definições que nos permitam o cálculo e a compreensão do conceito. Além disso, utilizaremos o software GeoGebra, para evidenciarmos a interpretação e significação visual dos conceitos prévios envolvidos, auxiliando assim, de forma qualitativa no processo de ensino e aprendizagem do conceito. **Palavras-chave:** Primeira forma quadrática. Superfícies. GeoGebra. Engenharia Didática.

1. Introdução

Este artigo foi elaborado no âmbito de uma pesquisa preliminar e em andamento de uma dissertação do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, que busca utilizar a metodologia de pesquisa denominada Engenharia Didática. Baseado nessa metodologia, o nosso objetivo nesse artigo é a realização de uma análise preliminar de um importante conceito de Geometria Diferencial, intitulado primeira forma quadrática.

A Geometria Diferencial - GD é a área que estuda as propriedades geométricas de curvas, superfícies e suas generalizações, utilizando as técnicas do cálculo infinitesimal. Essa área da Matemática apresenta forte interação com outras áreas da ciência, desde sua origem, com a cartografia, passando pela Teoria da Relatividade, até os dia de hoje, onde é crescente o estudo de temas relacionados à Analise e à Física (Paiva, Alves, 2018).

Devido a esse caráter de interdisciplinaridade essa área tem mostrado grande vitalidade e se desenvolvido em várias direções do conhecimento e com considerável volume de pesquisa (Da Silva, 2009, p. 44). Contudo, apesar de sua relevância, Grande, Nunes e Silva (2015, p. 3) relatam um déficit de pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem de GD:

> No que tange às pesquisas em Educação Matemática sobre o ensino e aprendizagem de alguns tópicos da Geometria Diferencial observou-se uma escassez de trabalhos e pesquisas ligados ao assunto, o que se pode sugerir a possibilidade de investigações e uma maior exploração do tema em sala de aula por parte dos professores, com uma ampla gama de aplicações e conteúdos que podem ser envolvidos em seu estudo.

Além disso, os autores também enfatizam as diversas possibilidades que a exploração do ensino dessa área ofereceria:

> Além da possibilidade de relacionar diversos conteúdos, por meio do contexto histórico e suas aplicações, a Geometria Diferencial permite a exploração da intuição geométrica e da analogia com conceitos ligados à Física por meio da elaboração de conjecturas e hipóteses objetivando a construção do conhecimento matemático, sendo que o tratamento desses objetos se torna, com isso, uma valiosa experiência no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática (Grande, Nunes e Silva ,2015, p.3)

Por essa razão, pretendemos ao longo desse artigo realizar uma análise epistemológica desse conceito relacionado a superficies, o conceito de primeira forma quadrática. Portanto, iniciaremos esse artigo expondo uma sucinta descrição da metodologia de pesquisa que norteia a nossa análise.

Posteriormente, apresentaremos uma pequena digressão histórica que destaca nomes de grandes matemáticos que introduziram o conceito de superfícies e primeira forma quadrática, destacaram suas propriedades básicas e propuseram problemas relacionados a esses objetos matemáticos.

Por meio dessa fundamentação pretendemos iterar o ponto de vista defendido por Alves, Borges Neto e Maia (2012, p. 54) que enfatizam “a relevância do estudo da Matemática, por meio de sua História e Epistemologia”. Além disso, introduziremos uma fundamentação teórica, estabelecendo o formalismo matemático subjacente do estudo desse conceito.

Posteriormente, aprofundaremos uma discussão acerca de como a construção dinâmica de conceitos geométricos, por meio da utilização do *software GeoGebra*, facilita o entendimento das definições desses conceitos. Em seguida, utilizaremos essas construções no âmbito do ensino de superficies, com uma ênfase no conceito *primeira forma quadrática*.

Para realizarmos tal estudo, enfatizaremos e descreveremos situações em que a visualização de determinadas propriedades e a exploração perceptual garantido pelo emprego da tecnologia, no contexto do ensino, atribuam significados intuitivos, tácitos e heurísticos a determinados conceitos abstratos *(ALVES, 2012; 2013a; 2013b; 2015; 2016; 2017).* Por fim, tratraremos de conclusões e oportunas ponderações decorrentes deste trabalho.

1. Engenharia Didática – ED

A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada segundo Almouloud e Coutinho (2008, p.66) como "um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino."

Ainda segundo os autores, a metodologia caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre as análises iniciais e finais da pesquisas, denominadas de análises a priori e análises a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, que pode ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. A sistematização prevista pela ED, é composta por quatro fases: análises prévias, análises a priori, experimentação, análise a posteriori e validação.

Na primeira fase, as análises previas, na perspectiva de Artigue (1995), o pesquisador determina as principais dimensões que definem o problema a ser estudado e como se relacionam com o sistema de ensino, por exemplo: as dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas. A fase posterior, análises a priori, é a etapa em que o pesquisador elabora e analisa uma sequencia de situações didáticas (Almouloud,2007).

Do mesmo modo, Alves (2018,,p.13) retrata esta perspectiva, descrevendo que a dimensão epistemológica abrange as "características do saber em jogo", a dimensão cognitiva explora "as características cognitivas do público alvo" e por fim a dimensão didática que averigua "as características relacionadas ao funcionamento do sistema de ensino".

Por essa razão, nas análises prévias , pretendemos investigar a gênese do campo epistêmico matemático de GD e os respectivos conceitos matemáticos desse campo, realizando assim uma análise epistemológica do objeto matemático primeira forma quadrática.

Experimentação pode ser definida como a etapa que em ocorre a aplicação da sequência didática[1] , ou seja, é a etapa para garantir os resultados práticos com a análise teórica .(Almouloud, 2007).

Por fim, a análise a posteriori e a validação refere-se ao tratamento das informações obtidas por ocasião da aplicação da sequência didática, a etapa em que ocorre efetivamente a fase experimental da pesquisa (Almouloud, 2007).

Em relação ao âmbito de interesses da ED, assinalamos o entendimento e controle epistemológico, por parte do pesquisador, o permite o estudo das “representações epistemológicas” (Artigue, 1989, p. 1). Tal controle, segundo Artigue, funciona no sentido de: nos auxiliar a retomada da historicidade dos conceitos científicos matemáticos; e nos auxiliar compreender o papel das noções matemáticas, como o rigor, cultivado no ensino atual.

Assim, a vista do apresentado, determinamos que a utilização de tal metodologia é crucial, devido seus critérios sistemáticos e pressupostos que permitem o desenvolvimento adequado da pesquisa, além de permitir compreender de forma diferenciada o nosso fenômeno de interesse.

Vale ressaltar que nesse trabalho, iremos nos restringir apenas à análise prévia e construção de situações/análises a priori que permitem realizar a construção das sessões de ensino que detém a possibilidade de realizações didáticas em sala de aula, no contexto do ensino de GD.

Por esse motivo, analisaremos de acordo com ALMOULOUD (2007, p.172), a saber: estudo da organização matemática da Geometria Diferencial conjuntamente a uma análise didática do conceito primeira forma quadrática.

De modo específico, nos ateremos ao estudo das gêneses históricas envolvendo o conceito de primeira forma quadrática (apresentada na seção 2); sua funcionalidade atual na Matemática (limitações para o uso didático); obstáculos relativos ao conceito de primeira forma quadrática, conceitos reconhecidamente complexos vinculados ao conceito de primeira forma quadrática.

Após esta pequena descrição do método utilizado em nossa investigação, abordaremos, no próximo segmento, uma exposição histórica da gênese do conceito de primeira forma quadrática.

2. Enfoque histórico

Do ponto de vista de Eves (2004), a gênese em torno do estudo de superfícies, ocorreu por volta de 1772,quando Leonhard Euler (1707-1783),realizou um estudo da curvatura das seções planas de uma superfície[2], escrevendo sobre o problema de se determinar quando uma superfície pode ser desenvolvida isometricamente (isto é,

---

[1] Definiremos que uma sequência didática pode ser formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática.

[2] Essas são as curvas na superfície que são obtidas pela intersecção da superfície com um plano normal a ela. Uma bela apresentação desse assunto foi também elaborada pelo menos conhecido soldado francês Jean Baptiste Marie Meusnier (1754-1793).

sem distorcê-la) sobre um plano. O matemático descobriu que a condição necessária para que isso ocorra é que a superfície seja *regrada* (ou seja, folheada por retas).

O autor também menciona uma das mais significativas observações de Euler acerca da teoria de superfícies encontra-se num fragmento sem importância: "Et quia per naturam superficierum quaelibet coordinata debet esse functio binarium variabilium [3]". Apartir dessa observação que é o reconhecido o fato das coordenadas *(x,y,z)* dos pontos de uma superfície serem funções de duas variáveis independentes.Entretando nem Euler nem seus contemporâneos seguiram essa idéia de estudar superfícies através da representação das coordenadas *x, y, z* em termos de funções de duas variáveis.

A aplicação de tal idéia só ocorreu em 1827 ,quando o matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) na sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* utilizou tal representação paramétrica sistematicamente. As variáveis *u* e *v* foram definidas como "coordenadas curvilíneas" sobre a superfície.

Além disso,o matemático também introduziu a forma diferencial quadrática ds^2, hoje conhecida como *primeira forma fundamental*, que essencialmente exprime as distâncias sobre a superfície, e escreve ds^2 em termos de três funções *E, F* e *G* de *u* e *v* o que lhe permite escrever equações para as curvas geodésicas[4] (Eves,2004).

A seguir, explanaremos algumas definições que nos permitam o cálculo e a compreensão dos conceitos relacionados a *primeira forma quadrática* .

3. Fundamentação teórica

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superficie parametrizada regular .O plano tangente a X em ponto (u_0, v_0) é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_0, v_0), denotado por T_pX, onde $q = (u_0, v_0) \in U$. A aplicação desse plano tangente da superficie, $\forall\ q \in U$, dada por:

$$I_q : T_qX \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longrightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$$

é denominada a primeira forma quadrática de X em q. Teneblat (2008) representa um vetor $w \epsilon T_qX$ é da seguinte forma:

$$w = a\, X_u(u_0, v_0) + b\, X_v(u_0, v_0), \text{ onde } a, b \epsilon \mathbb{R}.$$

Portanto,

[3] Dada uma superfície de qualquer, a natureza das suas coordenadas devem ser uma função binária.

[4] Estas são as curvas na superfície com a propriedade que qualquer segmento suficientemente pequeno é o caminho mais curto entre os seus extremos.

$$I_q(w) = a^2 < X_u, X_u > (u_0, v_0) + 2ab < X_u, X_v > (u_0, v_0) + b^2 < X_v, X_v > (u_0, v_0) \quad *$$

Adotando a subsequente notação:

$$E(u_0, v_0) = < X_u, X_u > (u_0, v_0),$$

$$F(u_0, v_0) =< X_u, X_v > (u_0, v_0),$$

$$G(u_0, v_0) = < X_v, X_v > (u_0, v_0),$$

teremos que a primeira forma quadrática $*$ pode ser reescrita por:

$$I_q(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab\, F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0),$$

com $E(u, v) > 0$ e $G(u, v) > 0$ para todo (u, v),pois os vetores X_u e X_v não se anulam .

Variando (u, v), temos funções $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ diferenciáveis, que são denominadas *coeficientes da primeira forma quadrática* .

Propriedade (1): Seja $X : U \longrightarrow S$ uma parametrização de uma superficie e seja e $X^* : U \longrightarrow S^*$ outra parametrização de uma superficie distinta, tais que $E = E^*$, $F = F^*$, $G = G^*$ em U . Então a aplicação $\phi = E^* \circ E^{-1}: E(U) \longrightarrow S^*$ é uma isometria local, ou seja, existe uma deformação em X que a torna, a superficie X^* (Do Carmo,2012, p.263) .

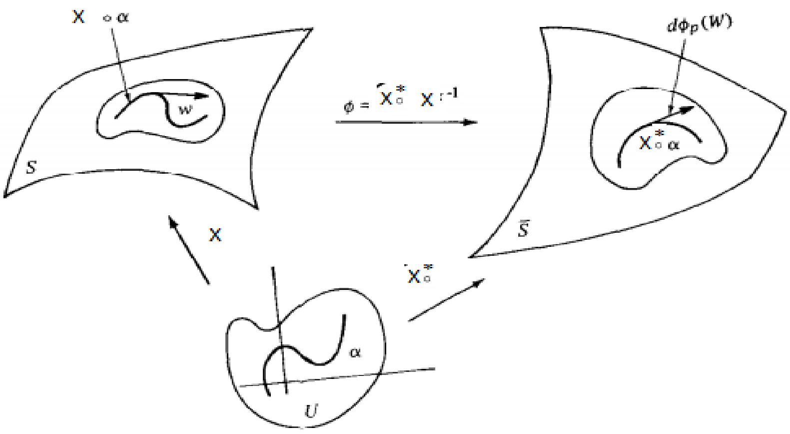


Figura 1 – Esquema de aplicação isométrica

Fonte :Manfredo (2012, p. 264).

Para o melhor entendimento dessa propriedade, exibiremos e ilustraremos um exemplo: deformação de duas superficies isométricas: a catenóide e a helicóide. A parametrização da catenóide é dada por $X(u, v) = (\, a \cosh v\; cosu, a \cosh v\; sen\; u, av)$

em que $0 < u < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$,com os respectivos coeficientes da primeira forma fundamental :

$$E(u,v) = a^2cosh^2v \text{ , } F(u,v) = 0, \; G(u,v) = a^2(1 + senh^2v) = a^2cosh^2v \text{ .}$$

Enquanto, a parametrização da helicóide é dada por por $X^*(u^*,v^*) = (v^* \cos u^*, v^* sen\, u^*, au^*)$, em que $0 < u^* < 2\pi$, $-\infty < v^* < \infty$. Definiremos uma reparametrização da helicóide para podermos usar a propriedade:

$$u^* = u \text{ ; } v^* = a\, senh\, v \text{ , em que } 0 < u < 2\pi \text{ , } -\infty < v < \infty$$

Assim, teremos: $X^*(u,v) = (a\, senh\, v \cos u, asenh\, v\, sen\, u, au)$, e os respectivos coeficientes da primeira forma coincidirão com os coeficientes obtidos na catenóide, $E*(u,v) = a^2cosh^2v$, $F*(u,v) = 0$, $G*(u,v) = a^2cosh^2v$. A figura abaixo, ilustra as etapas dessa deformação.

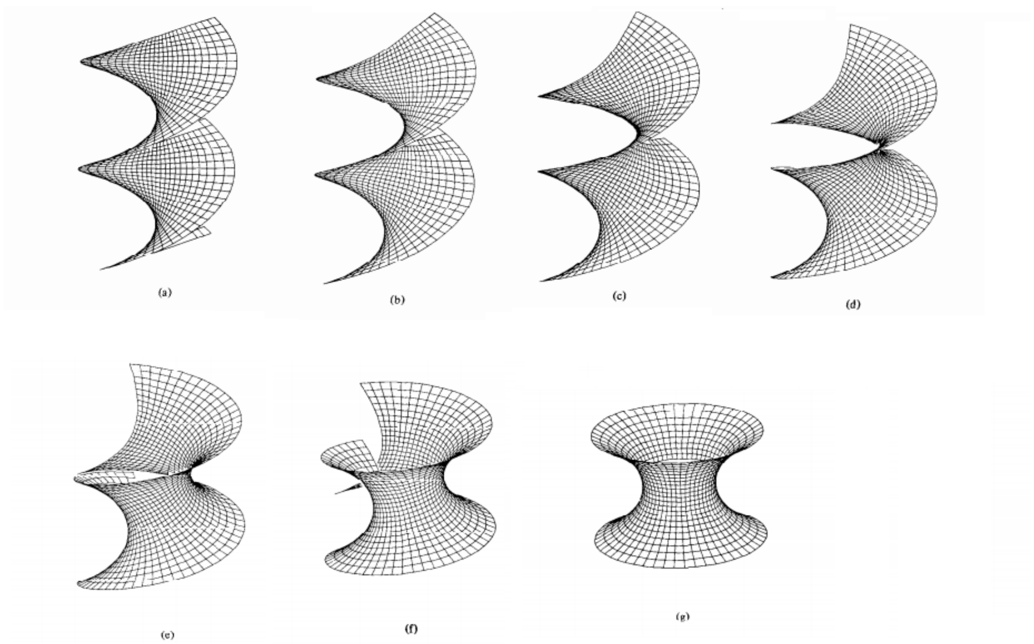


Figura 2 - Deformação isométrica do helicóide no catenóide.
Fonte: Do Carmo (2012, p. 267/268).

Ainda observe que, “se X e X^* são superfícies isométricas, então as propriedades geométricas das superfícies, que dependem apenas da primeira forma quadrática, são preservadas pela isometria” (Teneblat,2008, p.147). Dentre as propriedades que dependem da primeira forma quadrática, Teneblat (2008, p. 141) destaca as seguintes:

Propriedade (2) : Seja $X(u,v)$ uma superficie parametrizada regular. Se $\alpha(t) = X\big(u(t),v(t)\big), t \in I \subset \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável da superficie, então, para $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t$, o comprimento de t_0 a t_1 é dado por:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)|dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_{q(t)}(\alpha'(t))}\ dt,$$

onde usamos o fato de que $\alpha'(t)$ é um vetor tangente à superficie em que $q(t) = (u(t),v(t))$.

Propriedade (3) : Se duas curvas da superficie $\alpha(t) = X\big(u(t),v(t)\big)$ e $\beta(r) = X\big(u(r),v(r)\big)$ são tais que $(u(t_0),v(t_0)) = (u(r_0),v(r_0))$, então o ângulo θ com que as curvas se intersectam é dado por :

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0),\beta'(r_0)\rangle}{|\alpha'(t_0)||\beta'(r_0)|}.$$

Em particular, o ângulo formado pelas curvas coordenadas de $X(u,v)$ em (u_0,v_0) é dado por :

$$\cos\theta = \frac{\langle X_u, X_v\rangle}{|X_u||X_v|}(u_0,v_0) = \frac{F(u_0,v_0)}{\sqrt{E(u_0,v_0)G(u_0,v_0)}}.$$

Propriedade(4) : Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superficie parametrizada regular e $D \subset U$ uma região de $\mathbb{R}^2$, tal que X restrita ao interior de D é injetiva. A área da região $X(D)$ é dada por ;

$$A\big(X(D)\big) = \iint \sqrt{EG - F^2}\ dudv$$

Em que E , F, G são os coeficientes da primeira forma quadrática de X.

Após essa reduzida fundamentação matemática do conceito primeira forma quadrática de superficie e suas respectivas caracterizações, observamos a utilização de diversos conceitos relacionados ao Cálculo de Varias Variáveis - CVV. Alves (2012; 2013a; 2013b; 2015; 2016; 2017) defende a exploração gráfico-geométrica desses conceitos matemáticos relacionados a CVV,e o desenvolvimento de uma idéia intuitiva do conceito, como forma de facilitar o entendimento do mesmo.

Por esse motivo, na próxima seção, abordaremos, de acordo com o que assinalamos na introdução desse artigo, as potencialidades das construções dinâmicas que auxiliem a visualização desses conceitos.

4. O ensino com construções dinâmicas por meio do *software* GeoGebra

Conforme Nascimento (2012, p. 125), o uso de recursos tecnológicos digitais no contexto escolar constitui uma linha de trabalho que necessita se fortalecer, pois "há uma considerável distância entre os avanços tecnológicos na produção de *softwares* educacionais livres ou proprietários e a aceitação, compreensão e utilização desses recursos nas aulas pelos professores." Muitos professores ainda se utilizam da metodologia tradicional cuja principal característica é a repetição dos conceitos, em que o conhecimento é apenas memorizado e reproduzido (Anastasiou e Alves ,2003).

Faria, Souza e Fernandes (2015, p.68) defendem uma mudança na postura desses profissionais, em especial, os que lecionam as disciplinas de matemática, declarando que é papel desses docentes a busca por metodologias que motivem os alunos a aprender, declarando que:

> o docente deve buscar novos conhecimentos para aprimorar a sua formação, sobretudo dos recursos tecnológicos disponíveis em sua escola e assim criar métodos didáticos aplicáveis à sua disciplina, adequando à realidade dos discentes e fazendo-os perceber a Matemática de modo diferente.

Nascimento (2012, p. 03) explana acerca da utilização dos recursos tecnológicos no ensino de geometria, manifestando que "a proposta do uso de *softwares* de geometria dinâmica[5], no processo de ensino-aprendizagem em geometria pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange à visualização geométrica".

Dentre os *software*s de geometria dinâmica, o GeoGebra permite a exploração das propriedades gráficas e geométricas dos objetos matemáticos, permitindo assim o trabalho, com estudantes, das idéias intuitivas de conceitos de GD. (Grande, Nunes e Silva, 2015).

Em consonância, Ferri, Calejon e Schimiguel (2013) defendem que o *software* tem a capacidade de aumentar o componente visual da matemática atribuindo um papel importante na assimilação de conceitos e tornando o ambiente de aprendizagem mais atrativo.

Santos e Breda (2018, p.31) salientam que "o GeoGebra permite a manipulação de objetos no plano, no espaço e a representação de funções vetoriais reais uni ou bidimensionais de duas variáveis reais." Meier e Da Silva (2015, p. 137) esclarecem que por meio dessa manipulação, com sua movimentação dos objetos contruídos na tela do computador, "os alunos observam os resultados obtidos, inicialmente de forma empírica, porém após determinado tempo é possível estimular o desenvolvimento da argumentação, que visa explicar as regularidades percebidas".

Devido a essas potencialidades da utilização do *GeoGebra,* propomos o emprego das propriedades visuais do software, para uma ressignificação de conceitos, o que exige conhecimentos matemáticos mais sofisticados,

[5] Por Geometria Dinâmica pode-se entender como a geometria assistida por computador, em que os objetos matemáticos, como retas, ângulos e triângulos, podem ser movidos e manipulados, ao contrário da geometria em que os objetos são construídos com instrumentos euclidianos, como régua não graduada e compasso. (Grande, Nunes e Silva, 2015).

proporcionando diversas possibilidades no que diz respeito ao estudo de *primeira forma quadrática*. Dessa forma, na seção seguinte, apresentaremos algumas construções dinâmicas, cuja manipulada e exploração didática, estimulam a intuição geométrica auxiliando, dessa forma, na redução da abstração do conceito de primeira forma quadrática e facilita a aprendizagem relacionada ao mesmo.

5. Uma proposta de construção dinâmica

Apresentaremos uma proposta de utilização do GeoGebra baseado no ponto de vista de Alves (2012; 2013a; 2013b; 2015; 2016; 2017) que defende a utilização do *software* GeoGebra de forma a contribuir para uma ressignificação de conceitos, estabelecendo o conjecturas e verificando geometricamente suas veracidades, propiciando assim um processo de exploração e investigação matemática.Em conssonância, com base e amparo na ED , delinearemos questões (situações problema), formularemos determinadas hipóteses, que detém a possibilidade de serem investigadas, a posteriori, de modo empírico.

Construção (1) :Considere a superficie $X\,(u,v) = (\operatorname{sen} u, cos\ u, v)$, com $-10 < u < 10$, $-10 < v < 10$, que descreve um cilindro reto, sendo obtida por meio da rotação da reta $x = (1,0,v)$ em torno do eixo Oz .

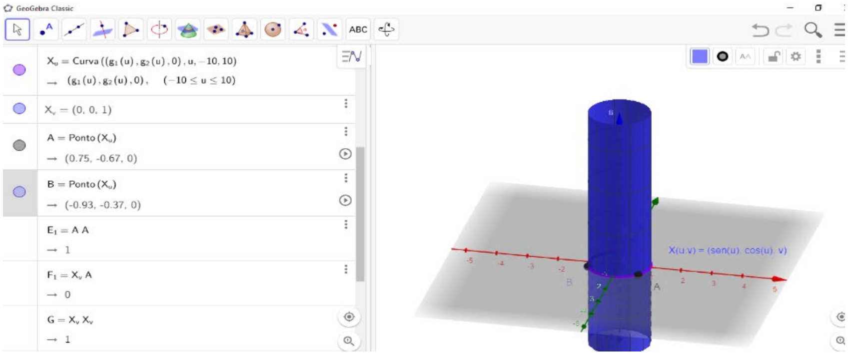


Figura 3 – Construção do cilindro no *software* GeoGebra
Fonte : Elaborado pelos autores

Tomaremos o ponto $\mathrm{A}\,(0.75, -0.67, 0)$ para a análise e obtenção do coeficientes da primeira forma quadrática , para isso, inicialmente calcularemos a derivada da superficie X em relação as variáveis u e v .Para isso, deveremos calcular as derivadas das coordenadas separadamente, denominado as funções coordenadas de f_n em que n designa a coordenada e as derivadas por g_1, g_2 as derivadas relativas a u e g_3 a derivada relativa a v .

Note que não definimos a derivada da terceira coordenada da superficie em relação a u , nem a derivada da primeira e segunda coordenada em relação a v ,por assumirem valores nulos. Assim calculamos no GeoGebra, apenas as derivadas diferentes de zero, encontrando $X_u = (cos(u), -sen\,(u), 0)$, e em relação a segunda variável $X_v = (0,0,1)$. Na figura abaixo, se encontra o protocolo de construção para o cálculo de tais derivadas.

⋮	Nome	Descrição	Valor
1	Função f_1		$f_1(u) = sen(u)$
2	Função f_2		$f_2(u) = cos(u)$
3	Função g_1	Derivada de f_1	$g_1(u) = cos(u)$
4	Função g_2	Derivada de f_2	$g_2(u) = -sen(u)$
5	Função f_3		$f_3(v) = v$
6	Função g_3	Derivada de f_3	$g_3(v) = 1$
7	Curva Paramétrica X_u	Curva((g_1(u), g_2(u), 0), u, -10, 10)	X_u:(cos(u), -sen(u), 0)
8	Ponto X_v(0, 0, 1)		X_v = (0, 0, 1)
9	Ponto A	Ponto sobre X_u	A = (0.75, -0.67, 0)
10	Ponto B	Ponto sobre X_u	B = (-0.93, -0.37, 0)
11	Número E_1	A A	$E_1 = 1$
12	Número F_1	X_v A	$F_1 = 0$
13	Número G	X_v X_v	G = 1
14	Número E_2	B B	$E_2 = 1$
15	Número F_2	X_v B	$F_2 = 0$
16	Superfície X	Superfície(sen(u), cos(u), v, u, -10, 10, v, -10, 10)	X(u,v) = (sen(u), cos(u), v)

Figura 4 – Protocolo de construção para o cálculo das derivadas parciais do cilindro
Fonte : GeoGebra

Ao analisarmos a derivada da superfície em relação a u , constatamos que se trata de uma função que depende do ponto escolhido, no caso o ponto A, enquanto que a derivada em relação a v , se trata de um vetor constante logo independe do ponto escolhido. Assim, com base nas ferramentas do *software*, calculamos os coeficientes da primeira forma quadrática no ponto A, obtendo $E_1(u,v) = 1$, $F_1(u,v) = 0$, $G(u,v) = 1$. Assim, como foi definido anteriormente, a primeira forma quadrática será dada por: $I_q\,(w) = a^2 + b^2$, em que $a\,,b \in \mathbb{R}$.

Veja que ao propor essa construção podemos, no GeoGebra, variar o ponto A e analisar o comportamento dos coeficientes da primeira forma quadrática. Por exemplo, variar o valor do ponto A , tomando um ponto $B(-0.93, -0.37, 0)$ podemos observar na figura 4, por meio dos cálculos dos produtos internos, que os valores dos E, F e G não variam, ou seja, apesar da derivada em relação a u não ser uma função constante ,os coeficientes da primeira forma quadrática são funções constantes,ou seja, independem do ponto escolhido.

Além disso, observa-se que os valores obtidos nos coeficientes da primeira forma quadrática do cilindro coincidem com os coeficientes da primeira forma quadrática do plano $X(u,v) = p_0 + uw_1 + vw_2$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, onde $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e w_1 , w_2 são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^3$. Apresentando as seguintes derivadas parciais $X_u = w_1 = (1{,}0{,}0)$ e $X_v = w_2 = (0{,}0{,}1)$. Se analisarmos as derivadas parciais desse plano, constatamos que se tratam de funções que independem do ponto escolhido, obtendo $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$. Veja na figura 5, um exemplo de tal plano.

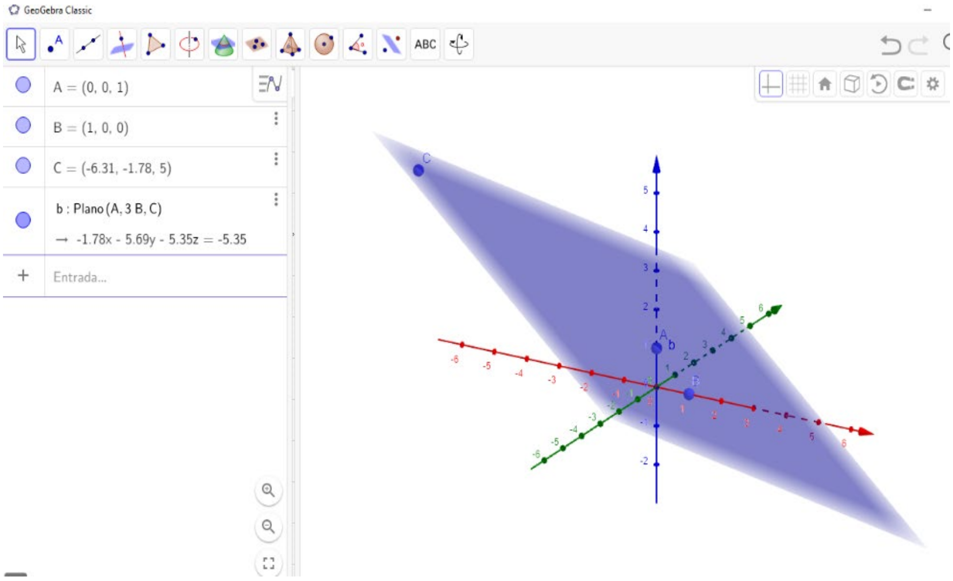


Figura 5 – Exemplo de planos formado por um ponto e dois vetores ortogonais distintos
Fonte : Elaborado pelos autores

Utilizando o fato dos coeficientes da primeira forma quadrática do cilindro e o plano assumirem valores constantes e congruentes, concluímos que estas superfícies são isométricas. Intuitivamente, podemos pensar no plano como uma folha de papel plana que pode ser enrolada em um cilindro, sem deformação.

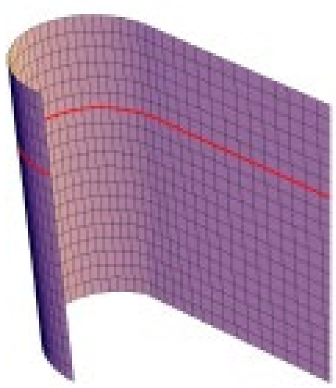


Figura 6 – Idéia intuitiva da transformação isométrica do plano em um cilindro
Fonte : Nunes(2010,p.37)

Veja que por meio dessa construção, assumimos o ponto de vista de Valente (1993), oportunizando o desenvolvimento de uma construção do conhecimento, com o aprendiz no centro do processo educativo compreendendo conceitos e reconhecendo a sua aplicabilidade em situações por ele vivenciadas, defendendo a utilização do computador como ferramenta facilitadora nesse proceso por auxiliar na descrição, reflexão e depuração de ideias.

Construção(2) : Proseguiremos, analizando a superficie obtida pela rotação da curva $a = (3 + r \cos u\, , r\, sen\, u, 0\,)$ em torno dos eixos xy, denominada de toro, cuja a aplicação é dada por: $X = ((3 + r \cos u) \cos v\ , (3 + r \cos u)\, sen\, v, u\,)$ em que adotamos r = 1.8 e $-2\,\pi < u < 2\,\pi\,,\ -3\,\pi < v < 3\,\pi$.

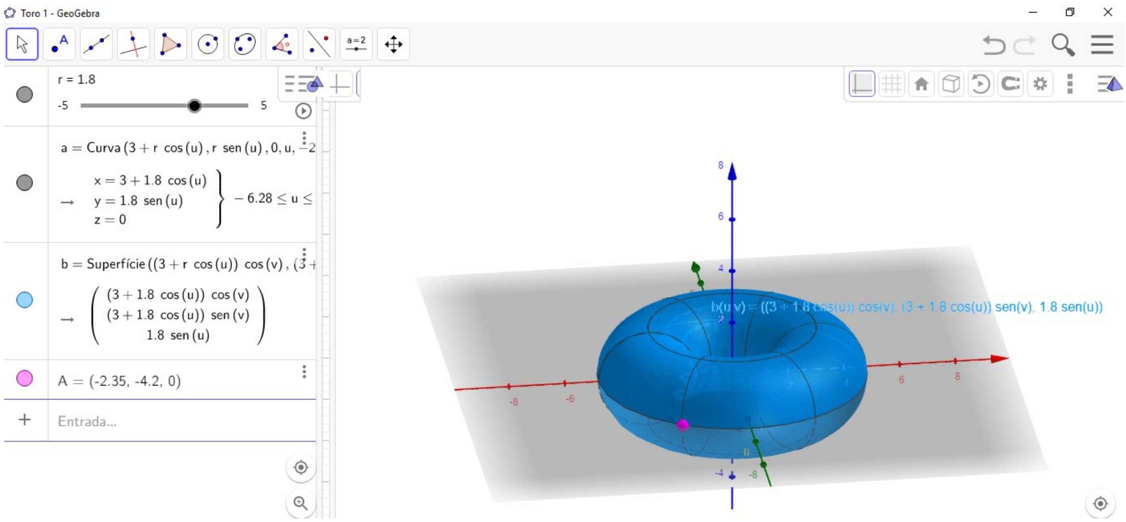


Figura 7 – Construção do toro no *software* GeoGebra
Fonte : Elaborado pelos autores

Para o cálculo das derivadas parciais, devido ao fato das funções coordenadas possuirem duas variáveis, o protocolo de construção dessa superficie torna-se mais dificultoso, fazendo-se uso de uma interface do GeoGebra denominada Cálculo Simbólico, representada pelo símbolo abaixo:

Figura 8 – Simbolização da função CAS no *software* GeoGebra
Fonte : GeoGebra

Veja que, essa função do GeoGebra assenta o pesamento de Almouloud et al. (2004, p.94), que atesta que os ambientes informáticos na educação proporcionam ao aluno condições favoráveis à aquisição de conhecimento e a superação das dificuldades na aprendizagem, por proporcionar o cálculo de operações complexas. Veja na figura 8, o uso da ferramenta CAS para o cálculo das derivadas parciais, vale lembrar que designamos as funções coordenadas de forma análoga a primeira construção.

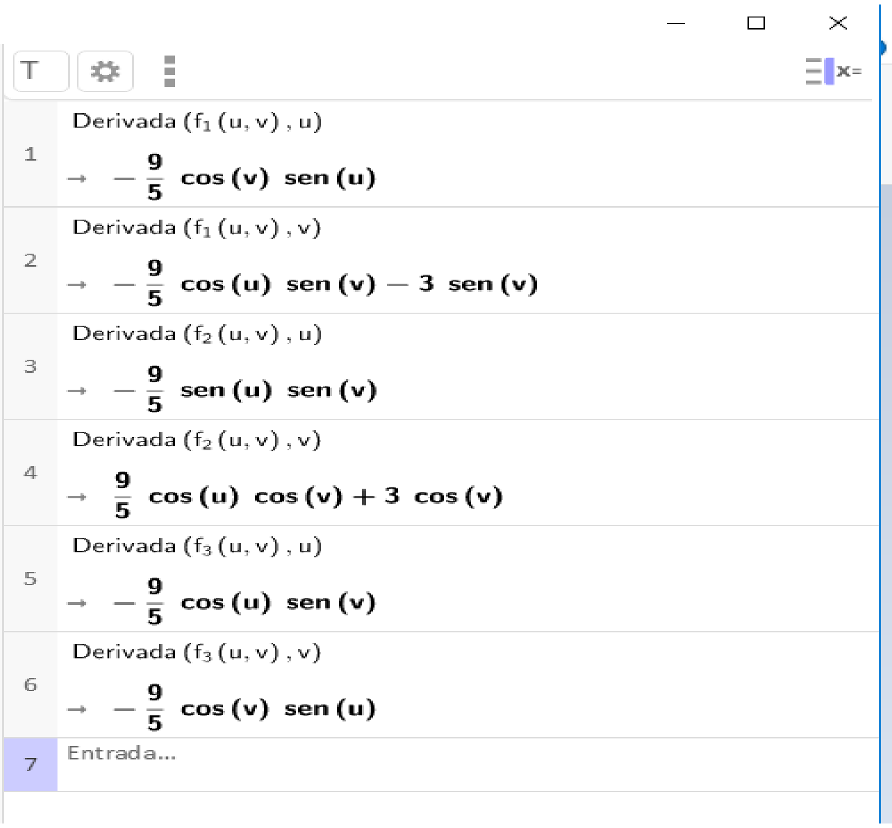


Figura 9 – Utilização da função CAS do *software* GeoGebra para o cálculo das derivadas parciais do toro
Fonte : Elaborado pelos autores

Considerando os dados apresentados na figura 9, concluímos que $X_u = \left(-\frac{9}{5}\cos v \sin u\,, -\frac{9}{5}\sin u \sin v\,, -\frac{9}{5}\cos u \sin v\,\right)$, e $X_v = (-\frac{9}{5}\sin u \sin v\,, \frac{9}{5}\cos u \cos v + 3\cos v, -\frac{9}{5}\cos v \sin u\,)$.

Por meio dessas derivadas , calculamos no GeoGebra, os coeficientes da primeira forma quadrática desta parametrização obtendo: $E(u,v) = \left(-\frac{9}{5}\right)^2 = (1.8)^2 = 3.24$, $F(u,v) = 0$ e $G(u,v) = (3 + 1.8\,cos\,u)^2 = (3 + 3.24\,cos\,u)^2$. Além disso, podemos definir a primeira forma como $I_q\,(w) = 3.24\,a^2 + b^2(3 + 3.24\,cos\,u)^2$.Observe que se variamos o ponto A ,os coeficientes da primeira forma quadrática variam seus valores, pois nem todos são funções constantes ,nesse caso o valor da primeira forma quadrática varia do ponto escolhido.

Não detalharemos o cálculo desses coeficientes, pois ao realizarmos essa construção, temos como objetivo elencar outra potencialidade do *software* no ensino de primeira forma quadrática, que remete a visualização e um melhor entendimento de um dos conceitos integrantes do cálculo do referido conceito, a derivada parcial. Por esse motivo, na figura abaixo, exibimos o comportamento das derivadas do toro.

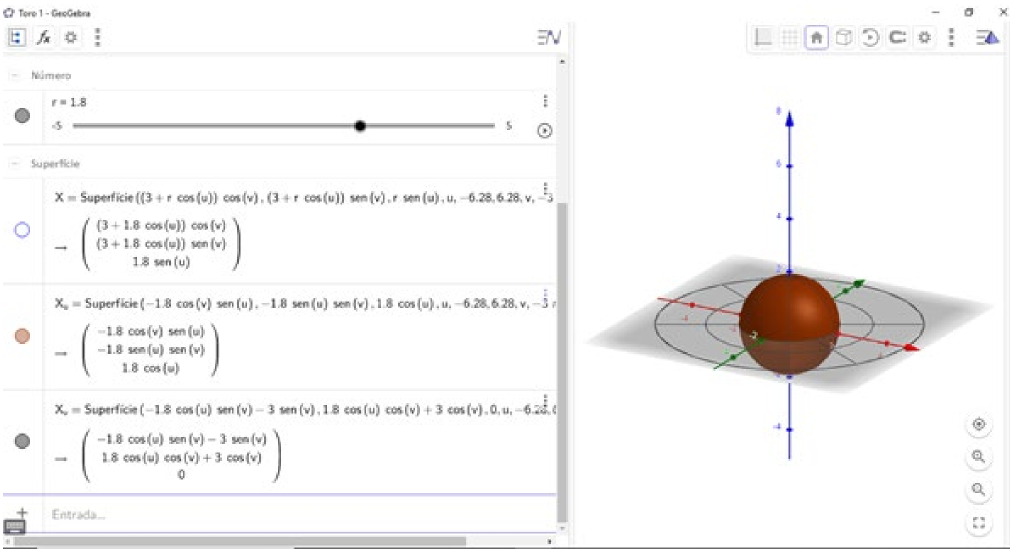


Figura 10 – Representação das derivadas parciais do toro no *software* GeoGebra
Fonte : Elaborado pelos autores

Note que o gráfico da derivada em relação a u , se trata de uma esfera , enquanto que a derivada em relação a v , se trata de uma curva planar. Segundo Guzmán (2002) por meio dessa construção dessa construção gráfica, no GeoGebra, podemos observar a continuidade das derivadas em um determinado ponto e explorar a noção do conceito. Entretanto vale ressaltar que para essa exploração, os alunos devem possuir uma boa fundamentação dos conceitos de domínio, imagem, raízes, pontos críticos, extremos, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, pontos de inflexão, limites no infinito e assíntotas.

Dessa forma, constatamos que, por meio do GeoGebra, podemos elaborar diversas abordagens, com diferentes viés em relação ao ensino de primeira forma quadrática. À vista disso, apresentaremos na construção a seguir, uma proposta relacionada ao conceito de primeira forma quadrática, priorizando as propriedades descritas por Teneblat (2008), no caso a propriedade referente ao cálculo da área da superfície.

Construção(3):Considere a superficie denominada de sela, cujo a função que a descreve é dada por : $f(u,v) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\,(16\,u^2+36)(16\,v^2+9)-144}$. Observe, na figura abaixo, a representação dessa superficie e o cálculo dos respectivos coeficientes da primeira forma quadrática.

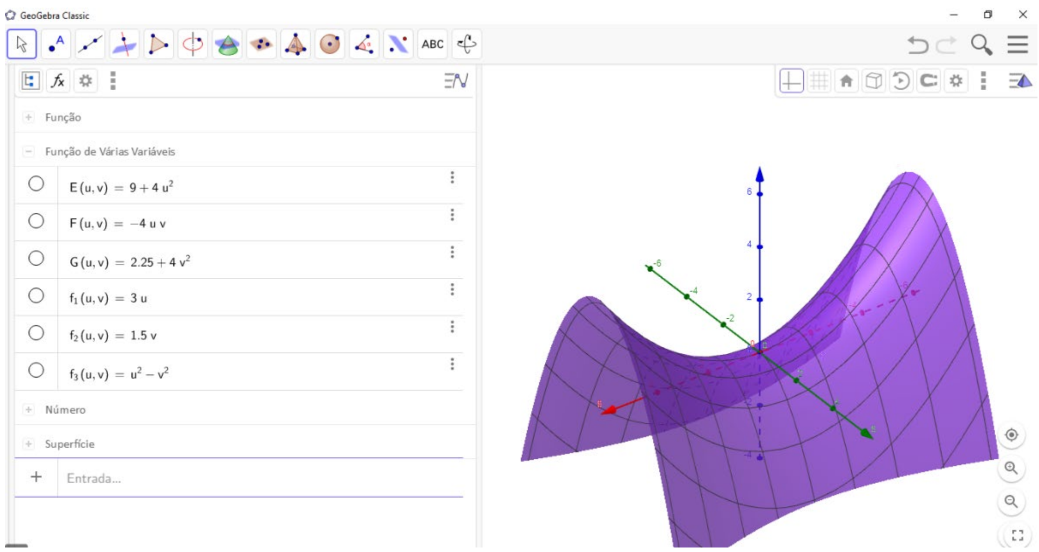


Figura 11 – Representação da superficie sela e os valores dos coeficientes da primeira forma quadrática

Fonte : Elaborado pelos autores

À vista do que mencionamos anteriormente, a finalidade dessa construção é a utilização do software para o cálculo da área da superficie. Para isso, precisamos obter a expressão definida na propriedade [4]:

$$A\big(X(D)\big) = \iint \sqrt{EG - F^2}\ dudv$$

Veja na figura abaixo, que utilizamos a janela CAS para o cálculo da expressão que deve ser integrada, e que além de nos fornecer a expressão, os comandos realizados nessa janela nos permitem obter os valores algébricos, como está exibido para o ponto $(0.6 - 1.3)$.

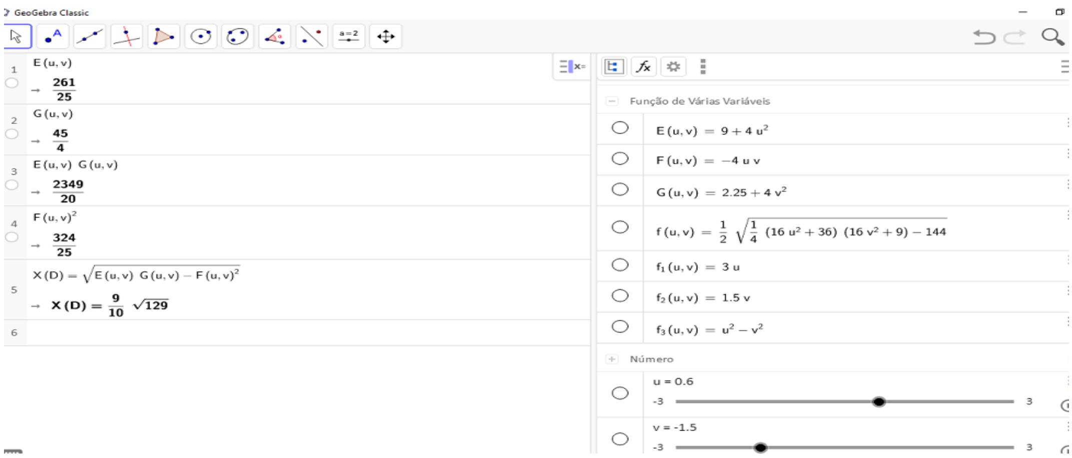


Figura 12 – Representação do cálculo da expressão $\sqrt{EG - F^2}$ dos coeficientes da superficie sela

Fonte : Elaborado pelos autores

Após o cálculo de tal função basta escolhermos o intervalo de integração para o cálculo da área da superficie. Conforme definido na propriedade[4], por se tratar de uma integral dupla, e inexistir, no *software*, comando direto para o cálculo de tal operação, nos baseamos nos algoritmos definidos em Ávila e De Araújo (2012), para contornar tal obstáculo.

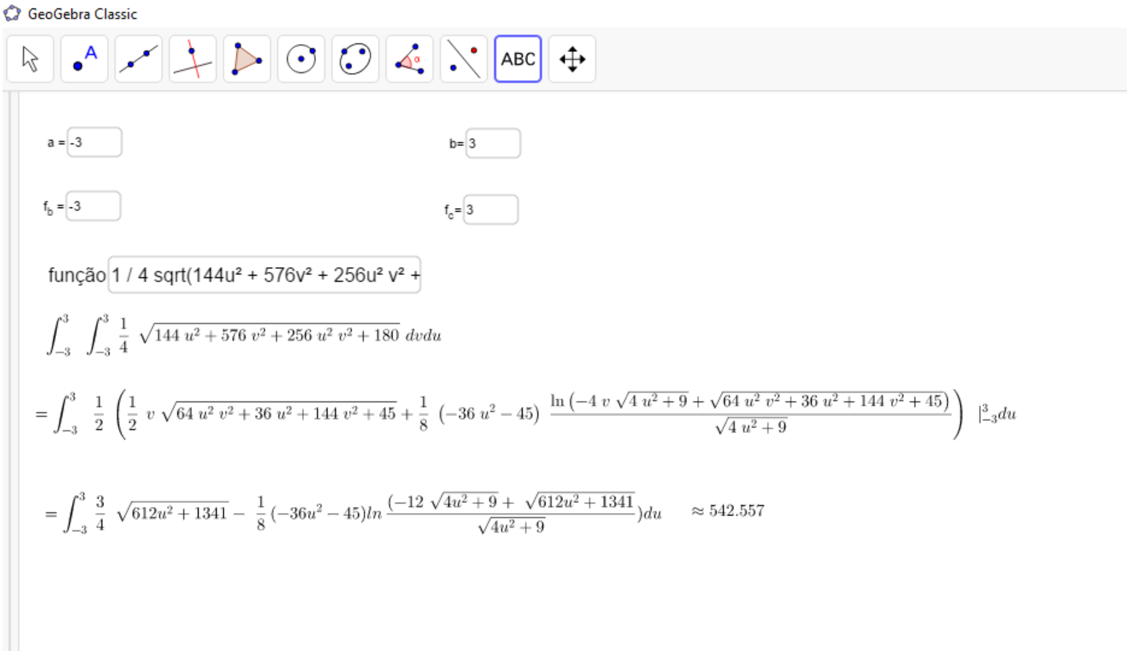


Figura 13 – Cálculo da área da superficie de sela
Fonte : Elaborado pelos autores baseado em Ávila e de Araújo(2012)

Através dessa construção, pretendemos por meio da visualização e das operações desenvolvidas, incitar os conhecimentos intuitivos sobre a integral, e exibir uma das aplicações relacionadas ao conceito de primeira forma quadrática.

Além disso, notamos que por meio dessa e das demais construções apresentadas, podemos mobilizar conhecimentos prévios(função, produto interno, derivada, etc),necessários para o entendimento do conceito em questão, e realizar uma articulação entre os conceitos álgebricos e suas respectivas configurações geométricas.

6. Considerações finais

Por meio desse estudo visamos sugerir uma proposta de ensino de um conceito de Geometria Diferencial, alicerçado por uma pesquisa fundamentada nos principios da Engenharia Didática. Inicialmente, constatamos que apesar da relevancia desse conceito, a quantidade pesquisas relacionadas ao ensino do mesmo é infima.

Para a fundamentação da pesquisa embasamos o conceito primeira forma quadrática históricamente e matematicamente, para que entendessemos a forma como o mesmo se desenvolveu. Após essa fundamentação histórica/matemática notamos que as operações necessárias para o cálculo do conceito, requeriam o uso, de modo frequente, tanto do conhecimento matemático, bem como das nossas habilidades de visualização e percepção. Diante do exposto e da complexidade do conceito, concluímos que essas características poderia indicar uma dificuldade/entrave na aprendizagem do mesmo. Assim, tendo em vista essa problemática, buscamos meios que facilitassem a compreensão do conceito, empregando a sistematização da ED.

Por essa razão decidimos utilizar um software que priorizasse a visualização do conceito em questão. Dessarte, norteados pelas investigações de Alves (2012; 2013a; 2013b; 2015; 2016; 2017), optamos pela a realização de uma breve análise acerca de que modo a utilização do *software* GeoGebra poderia colaborar com o ensino do conceito primeira forma quadrática, analizando as interfaces do *software* que melhor o elucidavam.

Em seguida, elaboramos construções dinâmicas que proporcionassem um desenvolvimento intuitivo estabelecendo conexões com os conteúdos necessários para o entendimento do conceito de primeira forma quadrática, visto que, esses são complexos e abstratos.

Dessa forma, concluímos que, por meio do GeoGebra priorizamos manipulações geométricas ao invés de execuções de natureza algébrico-analíticas, trazendo uma abordagem diferente dos livros que abordam esse conceito, que embora tragam noções intuitivas, requerem nas atividades apenas o cálculo dos conceitos sem a interpretação geométrica devida. Essa análise nos proporcionou a obtenção de elementos que nos permitem considerar primordial a utilização do GeoGebra na elaboração e desenvolvimento de atividades destinadas à compreensão dos significados do conceito primeira forma quadrática.

Bibliografía

ALVES, F. R. V. (*2012). Discussão da noção de integral imprópria com o auxílio do GeoGebra*. *In: Conferência Latinoamericana de GeoGebra*. Uruguay. 9-18. Acesso em 09 de julho de 2018, de http://www.GeoGebra.org.uy/2012/actas/73.pdf

ALVES, F. R. V. *(2013a). Visualizing in Polar Coordinates with GeoGebra. In: GeoGebra International of Romania.* p. 21-30. Acesso em 10 de julho de 2018, de http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/.

ALVES, F. R. V. *(2013b)*. *Exploring L´Hospital Rule with the GeoGebra*. *In: GeoGebra International of Romania. p. 15-20.* Acesso em 10 de julho de 2018*,* de http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/.

ALVES, F. R. V. *(2015). Visualização de Teoremas em Análise Complexa*: *exemplos no contexto da Transição Complexa do Cálculo. Revista Sinergia.* v. 16, nº 1, 65 – 76. Acesso em 10 de julho de 2018, de http://www.cefetsp.br/edu/prp/sinergia/

ALVES, F. R. V. *(2016)*. *Didática da Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva*. *Revista Interfaces da Educação***,** v. 7, nº 21, 131 – 150. Acesso em 10 de julho de 2018 , de https://periodicosonline.uems.br/index.php/interfaces article / /viewFile/1259/1183

ALVES, F. R. V. (2017). Engenharia didática com o tema integração de funções na variável complexa: análises preliminares, a priori e modelização de situações. Revista de Ensino de Ciências e Tecnologia*.v. 7, nº 1, 1 – 15.* Acesso em 10 de julho de 2018 , de http://www.redalyc.org/html/4675/467546204013/.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. C. (*2018). Engenharia Didática de Formação (EDF): Repercursões para a formação do professor de matemática no Brasil. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA–RS,* v. 2, n. 18. Acesso em 27 de maio de 2019, de http://sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/article/download/304/222

ALVES, F. R.V.; NETO, H. B.; MAIA, J. AD*.(2012). História da Matemática: os números figurais em 2D e 3D. Revista Conexões Ciência e Tecnologia*, v. 6, n. 2, p. 40-56.

ALMOULOUD, S. A. et al. *(2004).A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos.* Revista Brasileira de Educação, São Paulo, n.27, p. 94-108, set. /dez. Acesso em 10 de julho de 2018, de http://www.redalyc.org/html/275/27502707/.

ALMOULOUD, S. A.; DE QUEIROZ, C.; COUTINHO, S.(*2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 3, n. 1, p. 62-77. Acesso em 16 de julho de 2018, de https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/1981-1322.2008v3n1p62/12137

ALMOULOUD, A.S*.(2007).Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR.

ANASTASIOU, L. D. G. C.; ALVES, L.P. (Orgs.). *(2003).Processos de ensinagem na universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em aula*. Joinville: UNIVILLE.

ARTIGUE, M.*(1989). Ingénierie didactique. Publications mathématiques et informatique de Rennes*, v. 1989, n. S6, p. 124-128*.* Acesso em 16 de julho de 2018, de http://www.numdam.org/article/PSMIR_1989___S6_124_0.pdf

ARTIGUE, M.*(1995). Ingeniería didáctica*. Ingeniería didáctica en educación matemática, v. 33, p. 60. Acesso em 27 de maio de 2019, de http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf#page=41

ÁVILA, G.; DE ARAÚJO, L. C. L.*(2012). Cálculo - Ilustrado, Prático e Descomplicado*, ed. 1ª. Editora LTC*.* São Paulo*.*

DO CARMO, M. P. *(2012). Geometria diferencial de curvas e superfícies.* SBM.

DA SILVA, C. P.*(2009). Aspectos históricos do desenvolvimento da pesquisa matemática no Brasil*. Editora Livraria da Fisica.

EVES, H.*(2004) Introdução à história da matemática/Howard Eves*; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

FERRI, J.C.; CALEJON, L. M. C.; SCHIMIGUEL, J.*(2013). Uso do GeoGebra no Ensino de Matemática. Revista Gestão Universitária*, v. 1, p. 4. Acesso em 10 de julho de 2018 , de http://www.gestaouniversitaria.com.br/artigos/uso-do-GeoGebra-no-ensino-de-matematica--2

FARIA, I. G.; SOUZA, L. D. F. R.; FERNANDES, E. A.*(2015). Métodos informatizados contribuem para o ensino da Matemática: utilização do GeoGebra para o ensino de geometria-Revisão bibliográfica. Revista Eletrônica de Educação e Ciência*, v. 5, n. 1, p. 65-70. Acesso em10 de julho de 2018, de http://fira.edu.br/revista/wp-content/uploads/2015/03/2015_vol5_num1_pag65.pdf

GRANDE, A.L. NUNES, L.D.O. SILVA, M.P.D.*(2015). O estudo do Teorema Fundamental das Curvas Planas utilizando o GeoGebra*. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática*.* Tuxtla- Chiapas - México. Acesso em 10 de julho de 2018, de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/225/130

GUZMÁN, M. (2002).*The role of visualization in the teaching and learning of Mathematical Analysis*. In: 2 nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level, Hersonissos: University of Crete.p. 1-24. Acesso em 10 de julho de 2018, de https://eric.ed.gov/?id=ED472047.

MEIER, M.; DA SILVA, R. S.*(2015) O uso da Geometria Dinâmica em Modelagens Geométricas: possibilidade de construir conceitos no ensino fundamental*. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, v. 4, n. 6. Acesso em 10 de julho de 2018, de http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/936/pdf_113

NASCIMENTO, E. G.*(2012). Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN*, v. 8457, p.1808. Acesso em 10 de julho de 2018, de https://uol.unifor.br/oul/conteudosite/?cdConteudo=3363732

NUNES, B.*(2010) .Geometria Diferencial de Superfícies e o Teorema de Gauss-Bonnet*. Universidade Federal de Santa Catarian- Florianópolis. Monografia. Acesso em 10 de julho de 2018, de http://www.mtm.ufsc.br/~ebatista/Orientacoes_arquivos/tcc_bruna_certo.pdf

PAIVA, A. C. P.; ALVES, F. R. V.*(2018). Utilização do GeoGebra como auxílio no ensino de curvatura de curvas planas e espaciais. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo.* ISSN 2237-9657, v. 7, n. 2, p. 65-79.Acesso em 10 de julho de 2018, de https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/35458

DOS SANTOS, J. M. D. S.; BREDA, A. M. D.'A.*(2018). A projeção estereográfica no GeoGebra. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo.* ISSN 2237-9657, v. 7, n. 1, p. 31-40. Acesso em 16 de julho de 2018, de https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/viewFile/36164/24949

TENEBLAT, K. *(2008). Introdução à Geometria Diferencial.* ed. 2ª. Editora Blucher. São Paulo.

VALENTE, J. A.*(1993). Diferentes usos do computador na Educação*, *In: VALENTE, J. A. (org.), Computadores e conhecimento, repensando a Educação.* UNICAMP-NIED, p. 1-23.

Autores:

Ana Carla Pimentel Paiva: Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Ceará - UFC , Mestranda do programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PGECM do Instituto Federal de Educação,Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). E-mail:carlapimentel00@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves : Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Ceará – UFC, Mestrado em Matemática Pura pela Universidade Federal do Ceará - UFC , Mestrado em Educação, com ênfase em Educação Matemática, pela Universidade Federal do Ceará – UFC, Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Ceará, UFC, Brasil. E-mail: fregis@ifce.edu.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 55. Abril 2019
Páginas 159-183

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

La Demostración en Geometría desde una Perspectiva Didáctica

Martha de las Mercedes Iglesias Inojosa, José Ortiz Buitrago

Fecha de recepción: 09/11/2018
Fecha de aceptación:15/04/2019

Resumen	Se presenta un trabajo de revisión y análisis dirigido a caracterizar, desde una perspectiva didáctica, el escenario y las experiencias de aprendizaje que conforman un curso de resolución de problemas geométricos en ambientes de geometría dinámica; específicamente el caso de experiencias vinculadas a la demostración en Geometría. Las tareas se organizaron según el esquema: Construir → Explorar → Conjeturar → Validar. La resolución de problemas fue la principal estrategia de enseñanza y aprendizaje junto con el uso del Cabri II y el plegado de papel. Se corrobora la importancia de acercar los futuros profesores de matemática a la didáctica de la Geometría escolar. **Palabras clave**: Didáctica de la Geometría, demostración geométrica, formación inicial de profesores de matemática, razonamiento geométrico de Van Hiele.
Abstract	A review and analysis work is presented aimed at characterizing, from a didactic perspective, the scenario and the learning experiences that make up a course of solving geometric problems in environments of dynamic geometry; specifically the case of experiences related to the demonstration in Geometry. The tasks were organized according to the scheme: Build → Explore → Conjecture → Validate. Problem solving was the main teaching and learning strategy along with the use of Cabri II and paper folding. The importance of bringing future teachers to the didactic of school geometry is highlighted. **Keywords**: Didactic of Geometry, geometric demonstration, pre-service mathematics teachers, Van Hiele Theory.
Resumo	Um trabalho de revisão e análise é apresentado visando caracterizar, a partir de uma perspectiva didática, o cenário e as experiências de aprendizagem que compõem um curso de resolução de problemas geométricos em ambientes de geometria dinâmica; especificamente o caso de experiências relacionadas à demonstração em Geometria. As tarefas foram organizadas de acordo com o esquema: Build → Explore → Conjecture → Validate. Resolução de problemas foi a principal estratégia de ensino e aprendizagem, juntamente com o uso do Cabri II e dobra de papel. A importância de trazer futuros professores de matemática para a pedagogia da geometria escolar é corroborada. **Palavras-chave:** Didática geométrica, demonstração geométrica, formação inicial de professores em matemática, Teoria de Van Hiele.

1. Introducción

La preparación para enseñar Geometría es un asunto que involucra a los formadores de los futuros profesores de Matemática y, en este sentido, se han puesto en juego ciertas acciones dirigidas al desarrollo de competencias para la enseñanza de la Geometría en estudiantes de instituciones de formación docente, como puede apreciarse en Iglesias (2000), quien asumió el diseño y desarrollo de una propuesta integrada por elementos innovadores y de comprobado potencial didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, tales como: (a) el uso de un software de Geometría Dinámica; (b) la aplicación del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, y (c) el enfoque de resolución de problemas. Esta propuesta se materializó a través de un curso sobre *Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora* (en adelante, RPG-AC), el cual fue incorporado, como curso optativo de integración al diseño curricular 1996, aún vigente, de la especialidad de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL Maracay).

De modo que, ante la necesidad de comprender los diversos aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos relacionados con la demostración en ambientes de Geometría Dinámica, se ha llevado a cabo un trabajo de revisión y análisis documental dirigido a caracterizar, desde una perspectiva didáctica, el escenario y las experiencias de aprendizaje que conforman el curso de RPG-AC; experiencias especialmente vinculadas a la demostración en Geometría.

Cabe señalar que la integración de los componentes antes mencionados en un programa de formación de futuros profesores de Matemática se justifica porque el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele ha brindado a los docentes de Matemática una teoría coherente para entender y orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría (Jaime y Gutiérrez, 1990; Corberán, 1994; Gutiérrez, 2000; De Villiers, 2010; Aravena Díaz y Caamaño Espinoza, 2013) y, además, su aplicación es significativa en el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje asistidos por los software de Geometría Dinámica (SGD) (Iglesias, 2000). Estos son herramientas tecnológicas que permiten propiciar la construcción del conocimiento geométrico a través de diferentes etapas: (a) exploración de construcciones geométricas, (b) el reconocimiento de patrones o regularidades (propiedades invariantes en una construcción sometida a una transformación), (c) la formulación de conjeturas y (d) la validación de tales conjeturas. Así, pues, en correspondencia con la evolución histórica de la Geometría, los participantes evidenciarían que la intuición precede a los aspectos formales del conocimiento geométrico, sustituyéndose así la aproximación excesivamente rigurosa y axiomática a la Geometría en el ámbito escolar (Luengo González, Blanco Nieto, Mendoza García, Sánchez Pesquero, Márquez Zurita y Casas García, 1997), que ha ocasionado rechazo a esta área de la Matemática. Asimismo, la resolución de problemas geométricos está estrechamente vinculada con el desarrollo de las habilidades asociadas con cada uno de los niveles de razonamiento geométrico propuestos en el modelo de Van Hiele y con el uso de un SGD, asumido este como una herramienta para elaborar y explorar construcciones geométricas.

También es importante tener en cuenta que los conocimientos matemáticos son algo más que la simple sucesión lógica de definiciones y deducciones que constituyen el marco formal del asunto. Según Mills y Tall (1988), en la investigación matemática, en primer lugar, es necesario desarrollar una estructura en la cual se vinculan ciertas ideas antes que ellas se ordenen en una sucesión lógico - deductiva precisa; por consiguiente, es fundamental proporcionar a los estudiantes las bases cognitivas sobre las cuales los teoremas puedan ser construidos y demostrados.

En este orden de ideas, a continuación se abordara la caracterización de las experiencias de aprendizaje que han conformado el curso de RPG-AC (Iglesias, 2014), teniendo como referencia las actividades propuestas en tres (3) de los talleres realizados, como se muestra la Tabla 1, enfatizando en las construcciones geométricas con regla y compás en un ambiente de Geometría Dinámica (AGD), por tratarse de un asunto presente en cada uno de estos talleres.

Fases de Aprendizaje	**Taller nº 1**	**Taller nº 2**	**Taller nº 3**
Información	Revisar una presentación sobre la caracterización y relevancia histórica de las construcciones geométricas con regla y compás en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.	Leer y analizar el artículo "*Explorando ángulos y triángulos con doblado de papel*" (Arrieche e Iglesias, 2010).	Siguiendo el esquema de construir, explorar, conjeturar y validar, se plantearon problemas relacionados con el estudio de las definiciones y propiedades de los cuadriláteros concíclicos o circunscribibles y cuadriláteros inscribibles.
Orientación Dirigida	Realizar algunas construcciones con regla y compás, haciendo uso del Cabri – Géomètre II y, luego, elaborar las macros correspondientes.	Realizar la construcción de la herramienta triangular tanto con doblado de papel como en un ambiente de Geometría Dinámica.	
Explicitación	Analizar las construcciones geométricas con regla y compás previamente realizadas, lo cual implicaba la identificación de las definiciones y propiedades geométricas involucradas en cada una de tales construcciones	Analizar las construcciones geométricas previamente realizadas y dar respuesta a las preguntas planteadas en el artículo.	
Orientación Libre	Aplicar los conocimientos geométricos en la realización de construcciones geométricas con regla y compás, dados los objetos iniciales y los objetos finales, sin presentar, en forma explícita, un procedimiento que conduzca a una construcción consistente	Seleccionar la construcción de un objeto geométrico con doblado de papel y, luego, realizar la construcción equivalente con regla y compás en un AGD.	
Integración	Presentar, por escrito y en forma oral, los aspectos relevantes del trabajo realizado en las fases previas.	Presentar, por escrito y en forma oral, los aspectos relevantes del trabajo realizado en las fases previas.	

Tabla 1. Actividades didácticas propuestas en los talleres que conformaron el curso de RPG-AC

2. Las Construcciones con Regla y Compás en un Ambiente de Geometría Dinámica

Las construcciones con regla y compás han ocupado un puesto relevante en la enseñanza de la Geometría tanto por su utilidad práctica como por su contribución al desarrollo teórico.

Euclides, matemático griego, nos legó una manera de organizar el conocimiento aritmético y geométrico, haciendo uso del método axiomático; es decir, "una presentación lógica de la Geometría en la forma de una cadena de proposiciones basadas en unas cuantas definiciones y suposiciones iniciales" (Siñeriz, 2000, p. 194). Cabe recordar que, en la antigua Grecia, la Geometría abandonó su carácter empírico–práctico, adquiriendo así un carácter lógico–deductivo; teniéndose como punto de inflexión la publicación de una obra compilatoria del conocimiento matemático intitulada Elementos. En la versión actualizada y traducida al español por la Editorial Gredos, los Elementos son un conjunto de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y unas 465 proposiciones distribuidas en 13 libros. Estos trece libros abarcan los siguientes temas (libros): (a) Geometría Plana (I al IV). (b) Proporcionalidad (V y VI). (c) Aritmética (VII al IX). (d) Inconmensurabilidad (X). (e) Geometría del Espacio (XI al XIII).

Entre los métodos utilizados en los Elementos destaca el procedimiento de construcción de figuras con regla y compás; tales construcciones - como lo señala Siñeriz (2000) - no tenían por objetivo "la realización efectiva de la construcción, sino mostrar por un encadenamiento lógico de proposiciones que algo es construible con regla y compás" (p. 195). Las primeras tres proposiciones del Libro I sirven para ilustrar la metodología de trabajo empleada en los Elementos de Euclides y el uso de la regla y el compás: (I.1) Construir un triángulo equilátero dado uno de sus lados. (I.2) Transportar un segmento a un punto dado (como extremo). (I.3) Dados dos segmentos, cortar del mayor un segmento igual al menor. Cabe señalar que, para los antiguos geómetras griegos, la regla era ilimitada, sin marcas y tenía un solo borde y el compás era un instrumento que solo trazaba circunferencias de centro dado pasando por un punto dado; en otras palabras, ningún instrumento podía usarse para transportar distancias. Esto significa que la regla no podía marcarse, y que el compás había de tener la característica que si una de sus patas se levantaba del papel, el instrumento se cerraba. A diferencia del compás euclídeo, el compás moderno conserva su abertura y, por tanto, puede utilizarse para transportar distancias. Es necesario indicar que las primeras tres proposiciones del Libro I de Euclides establecen la equivalencia entre el compás euclídeo y el compás moderno.

Dada la relevancia histórica del tema, el primer taller del curso de RPG-AC se centró en el estudio de las construcciones geométricas con regla y compás en un ambiente de Geometría Dinámica, ya que, esto permitiría a los participantes: (a) Familiarizarse con los botones de herramientas disponibles en el Cabri Géomètre II (en adelante, Cabri II). (b) Realizar una construcción consistente con regla y compás de un(os) objeto(s) geométrico(s), a partir de un(os) objeto(s) inicial(es) dado(s). (c) Reconocer relaciones geométricas entre los objetos que conforman una construcción con regla y compás. (d) Identificar las definiciones y propiedades geométricas involucradas en cada una de las construcciones realizadas.

Para ello, las actividades propuestas – como se muestra en la Tabla 1 – se organizaron siguiendo las fases de aprendizaje propuestas en el modelo de Van Hiele; destacando que una vez realizada una exposición sobre la caracterización y relevancia histórica de las construcciones geométricas con regla y compás en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, se entregó una hoja de trabajo que contemplaba las actividades dirigidas y las actividades libres. Para su descripción es necesario tener en consideración que en una construcción geométrica, se pueden identificar los siguientes elementos: (a) Objetos iniciales (lo dado), (b) Procedimiento de construcción que incluye los objetos auxiliares, y (c) Objetos finales (lo que se quiere construir). Además, en los SGD, los objetos geométricos suelen ser clasificados atendiendo a dos criterios distintos, pero relacionados entre sí: modo de construcción y grados de libertad (Bainville, 2003).

En atención al modo de construcción, se establece la siguiente clasificación: (a) Objetos Elementales, entre los cuales se distinguen los objetos libres (punto, recta y circunferencia) y los objetos definidos por puntos (segmento, recta definida por dos puntos, semirrecta, vector, triángulo definido por tres puntos no alineados, polígonos y circunferencia definida por el centro y otro punto). (b) Objetos construidos: son todos aquellos objetos que pueden construirse haciendo uso de los botones construcciones y macro-construcciones.

En atención a los grados de libertad que poseen al ser desplazados sobre la hoja de trabajo, los objetos se clasifican en: (a) Objetos bases: Los objetos libres y los puntos construidos por objetos. (b) Objetos dependientes: Los objetos construidos (salvo los puntos definidos por objetos) y los objetos definidos por puntos. Esto es relevante, ya que, por ejemplo, al trazar la mediatriz de un segmento dado, haciendo uso del Cabri II, se establece una relación de dependencia entre el segmento dado (objeto inicial que funciona como un objeto base) y su correspondiente mediatriz (objeto dependiente).

<table>
<tr><td colspan="2">Actividades dirigidas: Lea atentamente el procedimiento señalado en cada una de las actividades propuestas y, luego, aplíquelo haciendo uso del Cabri II.</td></tr>
<tr><td>1. Construcción de un “compás”.</td><td>OBJETO(S) INICIAL(ES) DADO(S)</td></tr>
<tr><td>2. Trazado de una recta perpendicular en el punto medio de un segmento.</td><td rowspan="4">PROCEDIMIENTO DADO</td></tr>
<tr><td>3. Construcción de un ángulo que mida 60º usando solamente regla y compás.</td></tr>
<tr><td>4. Construcción de un ángulo que mida 45º usando solamente regla y compás.</td></tr>
<tr><td>5. Trazado de la bisectriz de un ángulo dado.</td></tr>
<tr><td>6. División de un segmento de recta en n partes iguales.</td><td>OBJETOS FINAL(ES) POR CONSTRUIR</td></tr>
</table>

Tabla 2. Actividades dirigidas propuestas en el Taller nº 1 del curso de RPG-AC

En las actividades dirigidas, como se muestra en la Tabla 2, a partir de los objetos iniciales, se indica el procedimiento a seguir para construir el objeto deseado; por ende, los participantes solo necesitan seguir el procedimiento indicado y utilizar adecuadamente los botones de herramientas disponibles en el Cabri II para realizar una construcción consistente. Sin embargo, el docente debe procurar que los estudiantes centren su atención en las relaciones existentes entre los objetos que conforman tal construcción y este es el punto clave para aproximarse al proceso de demostración en Geometría. Para ilustrar lo aquí planteado, se tomará como referencia la actividad dirigida nº 6, División de un segmento de recta en n partes iguales:

1. Trace el segmento AB.
2. Trace una semirrecta con origen en el punto A y que no esté contenida en el segmento AB.
3. Con el compás, haga centro en A y con una abertura arbitraria, trace un arco de circunferencia que corte a tal semirrecta en el punto 1. Utilizando la misma abertura de compás, haga centro en 1 y trace un arco de circunferencia que corte a la semirrecta en el punto 2. Así, sucesivamente, hasta trazar n divisiones en tal semirrecta.
4. Enumere los puntos de corte del 1 al n.
5. Une el punto n con el punto B.
6. Trace rectas paralelas al segmento nB que pasen por los puntos n – 1, n – 2, ..., 2, 1.
7. Determina los puntos de corte de estas rectas paralelas con el segmento AB.
8. ¿En cuáles definiciones y propiedades geométricas se sustenta esta construcción?

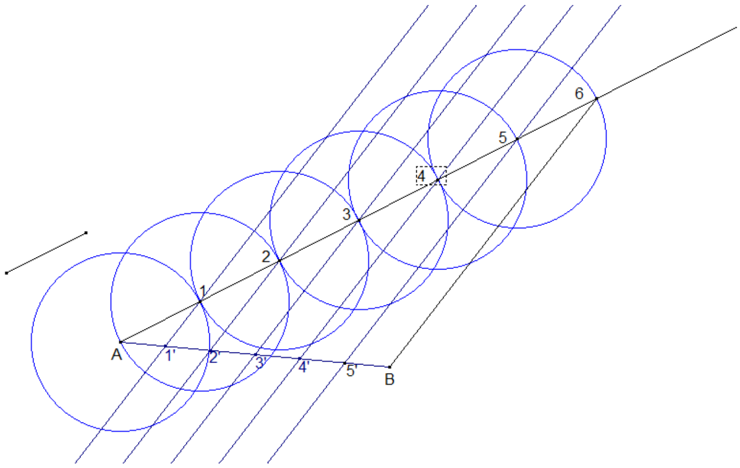


***Figura 1*. División de un segmento en n partes iguales (en este caso, n = 6).**

Esta actividad requería de la aplicación de los criterios de semejanza para triángulos, ya que, los triángulos Aii', con i: 1, 2, 3, 4, 5 y A6B son semejantes (ver Figura 1). Cabe señalar que, al revisar las construcciones realizadas por los cinco grupos de trabajo, se observó que siguieron el procedimiento dado y las herramientas utilizadas se corresponden con lo requerido en cada uno de los pasos como se muestra en la Tabla 3; solo hubo variaciones en el número de partes en las que dividieron el segmento AB.

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas

1. Trace el segmento AB.	A Punto B Punto Segmento: A, B
2. Trace una semirrecta con origen en el punto A y que no esté contenida en el segmento AB.	Semirrecta: A Punto Punto Segmento: _, _
3. Con el compás, haga centro en A y con una abertura arbitraria, trace un arco de circunferencia que corte a tal semirrecta en el punto 1. Utilizando la misma abertura de compás, haga centro en 1 y trace un arco de circunferencia que corte a la semirrecta en el punto 2. Así, sucesivamente, hasta trazar n divisiones en tal semirrecta. 4. Enumere los puntos de corte del 1 al n	C_1 Círculo (Compás): A, _ 1 Punto (Punto(s) de intersección): _, _ C_2 Círculo (Compás): 1, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 2 Punto (Punto(s) de intersección): _, _ C_3 Círculo (Compás): 2, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 3 Punto (Punto(s) de intersección): _, _ C_4 Círculo (Compás): 3, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 4 Punto (Punto(s) de intersección): _, _ C_5 Círculo (Compás): 4, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 5 Punto (Punto(s) de intersección): _, _ C_6 Círculo (Compás): 5, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 6 Punto (Punto(s) de intersección): _, _
5. Une el punto n con el punto B.	Segmento: B, 6
6. Trace rectas paralelas al segmento nB que pasen por los puntos n – 1, n – 2, ..., 2, 1.	L_5 Recta (Recta paralela): 5, _ L_4 Recta (Recta paralela): 4, _ L_3 Recta (Recta paralela): 3, _ L_2 Recta (Recta paralela): 2, _ L_1 Recta (Recta paralela): 1, _
7. Determina los puntos de corte de estas rectas paralelas con el segmento AB.	5' Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 4' Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 3' Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 2' Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 1' Punto (Punto(s) de intersección): _, _

Tabla 3. Correspondencia entre el procedimiento dado y las herramientas empleadas

En cuanto a las respuestas dadas a la pregunta: ¿En cuáles definiciones y propiedades geométricas se sustenta esta construcción?, pudiera decirse que el grupo nº 1 hace referencia a la aplicación de la generalización del teorema de Thales, aunque no lo aplican en forma explícita; previamente realizan un resumen del procedimiento empleado (entre corchetes), lo cual es un rasgo atribuido a los esquemas de argumentación fáctico: "[Cuando la semirrecta que tiene origen en A y no contiene el segmento AB, es dividida en (n) partes iguales con la longitud del segmento auxiliar PQ y luego se traza el segmento Bn, procedemos a trazar rectas paralelas a Bn que pasen por todos y cada uno de los puntos en lo que hemos dividido la semirrecta An]. Entonces el teorema de Thales nos permite asegurar que los puntos de intersección entre las paralelas al segmento Bn están dividiendo en n partes iguales al segmento AB". Cabe recordar que la generalización del teorema de Thales establece que: Si dos rectas r y s en un plano se cortan por varias rectas paralelas, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los segmentos correspondientes en la otra. Los segmentos que se determinan en una de ellas son proporcionales a sus correspondientes en la otra recta.

El grupo nº 2 trabajó con la división del segmento AB en tres partes iguales (ver Figura 2), siguiendo el procedimiento indicado por la facilitadora del curso de RPG-AC.

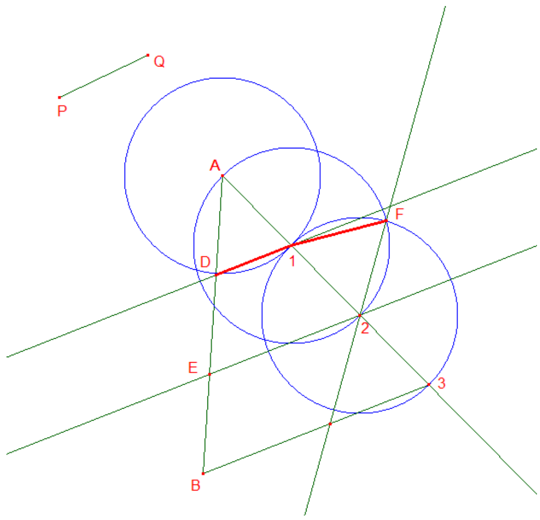


Figura 2. **División de un segmento en tres partes iguales (grupo nº 2)**

Nótese que los puntos D, 1 y F no están alineados y, por ello, los ángulos < D1A y < F12 no son ángulos opuestos por el vértice, aunque en ciertos casos pareciera que sí lo son. Por ende, como se comenta en la Tabla 4, donde se da a conocer la justificación dada por el grupo nº 2, se basan en premisas falsas, posiblemente dejándose llevar por su percepción visual, en vez de las relaciones existentes entre los objetos geométricos que intervienen en la construcción realizada. Además, sirve para ilustrar cómo es posible establecer conclusiones válidas a partir de premisas falsas, permitiendo probar lo que se pide (en este caso que AD = DE = EB).

Justificación dada	Observaciones
1. Los segmentos A1 y 12 son congruentes; por hipótesis (por construcción ambos segmentos tienen longitud PQ) 2. El segmento 1F es congruente con el segmento D1; por hipótesis “segmento auxiliar” 3. El ángulo D1A es congruente con el ángulo F12; por ser ángulos opuestos por el vértice **4. Los triángulos A1D y 21F son congruentes; criterio de congruencia LAL, afirmaciones 1,2 y 3** 5. Los ángulos AD1 y 2F1 son congruentes; por partes correspondientes de triángulos congruentes, afirmación 4 6. La recta DF es una secante del segmento AB y la recta GF; por hipótesis 7. El segmento AB y la recta GF son paralelos;	El segmento 1F es radio de la circunferencia C2 (1, PQ) y D1 no es radio de circunferencia alguna; aunque, en la Figura 2, pareciera que la circunferencia C1 (A, PQ) pasa por D. Además, los puntos D, 1 y F no están alineados y, por ello, los ángulos < D1A y < F12 no son ángulos opuestos por el vértice. Por lo tanto, no es posible garantizar que los triángulos AD1 y 2F1 son congruentes por el postulado LAL y que, por partes correspondientes de triángulos congruentes (PCTC),

Si una recta es secante de otras dos y sus ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas, afirmaciones 5 y 6 8. Los segmentos ED y F2 están contenidos en el segmento AB y la recta GF respectivamente, por información de la figura 9. Los segmentos AD y F2 son congruentes; afirmación 4. 10. Los segmentos ED y F2 son paralelos; afirmaciones 7 y 8 11. Los segmentos D1 y E2 son paralelos; por hipótesis 12. Los segmentos los segmentos DF y E2 son paralelos; afirmaciones 2 y 11 **13. El cuadrilátero DF2E es un paralelogramo; afirmaciones 10 y 12** 14. Los segmentos DE y F2 son congruentes; propiedad de paralelogramo, afirmación 13 15. El segmento DE es congruente con el segmento AD; afirmaciones 9 y 14 16. La recta DF es paralela al segmento B3; por hipótesis 17. El ángulo D1A es congruente con el ángulo B3A; definición de ángulos correspondientes 18. El ángulo G32 es congruente con el ángulo B3A; son el mismo ángulo 19. El ángulo G32 es congruente con el ángulo F12; afirmaciones 3, 17 y 18 20. Los ángulos 12F y 32G son congruentes; ángulos opuestos por el vértice 21. Los segmentos 12 y 23 son congruentes; hipótesis **22. El triángulo 23G es congruente con el triángulo 12F; afirmaciones 19, 20 y 21; criterio de congruencia LAL** 23. Los segmentos G2 y 2F son congruentes; afirmación 22 24. Los segmentos G2 y BE están contenidos en el segmentos AB y la recta GF respectivamente; por información de la figura 25. Los segmentos G2 y BE son paralelos; afirmaciones 7 y 24 26. Los segmentos E2 y BG son paralelos; hipótesis **27. El cuadrilátero BE2G es un paralelogramo; afirmaciones 25 y 26** 28. Los segmentos BE y G2 son congruentes; propiedad de los paralelogramos, afirmación 27 29. Los segmentos BE y DE son congruentes; afirmaciones 14 y 22 30. Los segmentos AD, DE y EB son congruentes; afirmaciones 15 y 29	los ángulos AD1 y 2F1 lo sean. Por lo cual, no están dadas las condiciones para aplicar el teorema AIP (ángulos alternos congruentes – rectas paralelas) en 7 y garantizar que los segmentos ED y F2 son paralelos en 10. Por lo tanto, se van estableciendo conclusiones válidas a partir de premisas falsas, siendo posible llegar a lo que se pide demostrar: AD = DE = EB Nótese que la demostración estuvo centrada en probar que los triángulos AD1, 2F1 y 2G3 son congruentes y que los cuadriláteros DF2E y BE2G son paralelogramos, lo cual hubiera sido valido, si por el punto 2 hubiesen trazado una paralela al segmento AB (ver afirmaciones nº 13, 22 y 27 y Figura 2). Sin embargo, se considera que utilizan un esquema de argumentación analítico, ya que, construyen una cadena lógico – deductiva sustentada en definiciones y propiedades geométricas conocidas.

Tabla 4. Justificación dada por el grupo nº 2 en la actividad dirigida nº 6

Los integrantes del grupo nº 3 siguieron las instrucciones y emplearon las herramientas de construcción adecuadas, pero no respondieron la pregunta formulada con lo cual no es posible la identificación de esquema de argumentación alguno.

El grupo nº 4 procedió a dividir al segmento AB en nueve partes iguales, observándose, al revisar la construcción, que existe correspondencia entre los pasos del procedimiento de construcción y las herramientas empleadas. A partir de la construcción y aplicando el teorema PAC garantizan por el criterio de semejanza AA que los triángulos indicados son semejantes y, por partes correspondientes de triángulos semejantes, que los pares de lados correspondientes son proporcionales:

> "Por el teorema de Thales, sean $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{An}$ dos rectas que se intersecan en el punto A, asimismo dichas rectas cortan a un conjunto n de rectas paralelas, formando así Δ A1'1, Δ A2'2, Δ A3'3, Δ A4'4, Δ A5'5, Δ A6'6, Δ A7'7, Δ A8'8, Δ ABn. Estos triángulos tienen un ángulo común A, además los ángulos con vértice en los puntos 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8', B son <u>iguales</u> por ser ángulos correspondientes entre rectas paralelas cortadas por una secante. Por el segundo criterio de semejanza (AA), se tiene A1'1 ~Δ A2'2~Δ A3'3 ~ Δ A4'4 ~ Δ A5'5~Δ A6'6 ~Δ A7'7 ~ Δ A8'8~ Δ ABn, en consecuencia:
>
> $$\frac{A1}{A1'}=\frac{12}{1'2'}=\frac{23}{2'3'}=\frac{34}{3'4'}=\frac{45}{4'5'}=\frac{56}{5'6'}=\frac{67}{6'7'}=\frac{78}{7'8'}=\frac{8n}{8'B}$$
>
> Por ende, queda determinada así la división del $\overline{AB}$ en n partes <u>proporcionales</u>".

Sin embargo, no demuestran que A1' = 1'2' = 2'3' = 3'4' = 4'5' = 5'6' = 6'7' = 7'8' = 8'B. Se considera que sería sencillo hacerlo conociendo que, por ser radios de circunferencias congruentes, los segmentos A1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 y 8n son congruentes y operando aritméticamente se llega a lo que se quiere demostrar. También, se observan ciertas imprecisiones en el uso del lenguaje porque hablan de ángulos iguales en vez de ángulos congruentes, así como la división del segmento AB en n partes proporcionales en vez de su división en n partes iguales. Se observa el uso de un esquema de argumentación analítico, asumiendo como hipótesis las condiciones que se deducen de la construcción realizada. Cabe señalar que el teorema PAC establece que: Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, cada dos ángulos correspondientes son congruentes; el criterio de semejanza AA señala que: si dos triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes, entonces ambos triángulos son semejantes y, por partes correspondientes de triángulos semejantes, los tres pares de lados correspondientes son proporcionales.

El grupo nº 5 dividió el segmento AB en cuatro partes iguales, siguiendo el procedimiento indicado; en cuanto a la justificación dada, esta es similar a la presentada por el grupo nº 4; por ende, se estaría en presencia de un esquema de argumentación analítico sustentado en las relaciones entre los objetos que intervienen en la construcción (radios de circunferencias congruentes y rectas paralelas cortadas por una secante).

Cuatro de los cinco grupos reconocieron que la división de un segmento en n partes iguales se sustenta en la generalización del teorema de Thales. Este tema junto con la semejanza de triángulos fue estudiado por los participantes en el curso de Geometría II.

Actividades libres: Describa un procedimiento para realizar una construcción geométrica consistente con R y C que les permita construir la figura geométrica señalada.	
1. Construcción de un triángulo dadas las longitudes de sus tres lados.	OBJETO(S) INICIAL(ES) DADOS
2. Construcción de un triángulo dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos.	PROCEDIMIENTO POR ESTABLECER
3. Construcción de un triángulo dadas las medidas de un par de ángulos y la longitud del lado comprendido entre ellos.	
4. Construcción de un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial).	
5. Construcción de un triángulo equilátero ABC dado uno de sus lados.	
6. Construcción de un rombo PQRS dadas sus diagonales PR y QS.	OBJETOS FINAL(ES) DADOS

Tabla 5. Actividades libres propuestas en el Taller nº 1 del curso de RPG-AC

En las *actividades libres*, como se muestra en la Tabla 5, a partir de los objetos iniciales, los participantes tienen que establecer un procedimiento que les permita realizar una construcción consistente con regla y compás del (los) objeto(s) final(es). Por ende, los participantes requieren establecer relaciones entre lo conocido y lo que les piden construir a partir de lo que conocen (definiciones y propiedades), para lograr establecer el procedimiento a seguir y, además, garantizar que el objeto construido es el esperado y no otro. Para ilustrar esta situación, se tendrá como referencia la actividad libre nº 4, construir un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial), la cual admite diferentes formas de construcción y, por ende, diferentes formas de validación. En la Tabla 6, a modo de ejemplificación, se muestra el procedimiento de construcción nº 1.

Al revisar los informes escritos y los correspondientes archivos .fig (con la opción “mostrar la descripción”), se notó lo siguiente: (a) Cada uno de los grupos de trabajo inicia la construcción, teniendo en cuenta el objeto inicial: un lado del cuadrado; (b) además, en la descripción del procedimiento empleado para construir el cuadrado, dado uno de sus lados, emplean un vocabulario apropiado; (c) las herramientas empleadas se corresponden con lo establecido en cada uno de los pasos que conforman el procedimiento de construcción; (d) no justifican que la construcción realizada sea consistente; en algunos casos, se limitan a verificar empíricamente que el cuadrilátero construido es un cuadrado, ya sea, midiendo la longitud de cada uno de sus lados o marcando a cada uno de sus ángulos internos. Cabe decir que, en el Cabri II, cuando se marca un ángulo que resulta ser un ángulo recto, se coloca la marca acostumbrada.

Construcción nº 1	
Procedimiento	**Comentarios**

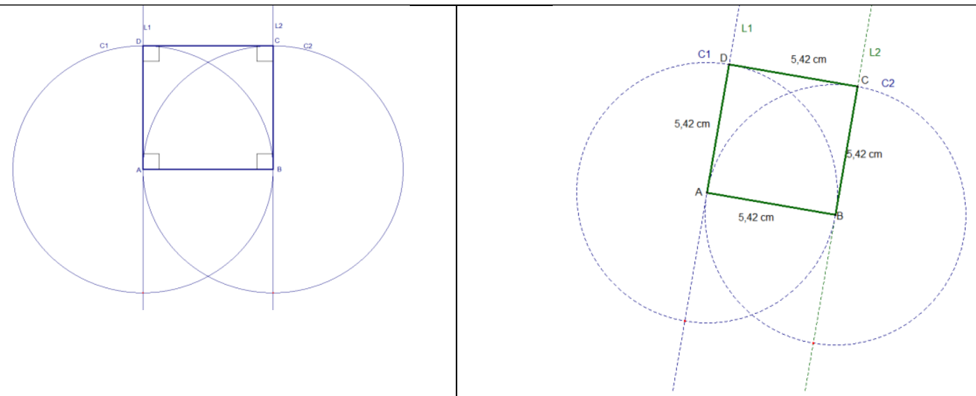
<table>
<tr><td>Dado un segmento de extremos A y B</td><td rowspan="6">Este procedimiento garantiza que, en el cuadrilátero ABCD se cumple que:

AB = AD = DC y que los ángulos < DAB y < ADC son rectos.

Haría falta probar que AB = AD = DC = CD y que los ángulos < DCB y < CBA son ángulos rectos.

En efecto, se conoce que, en un plano E, las rectas AB y L_2 son perpendiculares a la recta L_1 y, por ende, se tiene que AB ∥ L_2. Como, además, AB = DC y el segmento DC está contenido en la recta L_2, se cumple que, en el cuadrilátero ABCD, los segmentos AB y DC son paralelos y congruentes y, por tanto, tal cuadrilátero es un paralelogramo. Asimismo, se conoce que en un paralelogramo ambos pares de lados y ángulos opuestos son congruentes, con lo cual se establece que: AD = BC, m (< DCB) = 90º y m (< CBA) = 90º.</td></tr>
<tr><td>Se traza una recta L_1 perpendicular al segmento AB en A. Entonces el ángulo con vértice en A es un ángulo recto.</td></tr>
<tr><td>Con el compás, haciendo centro en A y pasando por el punto B, se traza una circunferencia C_1 que corta a la recta L_1 en D. Así, los segmentos AB y AD son congruentes por ser radios de una misma circunferencia.</td></tr>
<tr><td>Se traza una recta L_2 perpendicular al segmento AD en D. De modo que el ángulo con vértice en D es un ángulo recto.</td></tr>
<tr><td>Con el compás haciendo centro en D y pasando por el punto A, se traza una circunferencia que corta a la recta L_2 en C. Así se cumple que AD = DC (por ser radios de la circunferencia C_2).</td></tr>
<tr><td>Se traza el segmento CD.</td></tr>
</table>

Tabla 6. Construcción de un cuadrado dado uno de sus lados



Grupo n° 1 | Grupo n° 2

Figura 3. Verificación empírica de los atributos relevantes de un cuadrado

En la Figura 3, nótese que el grupo nº 1 verifica (marcándolos) que los ángulos internos del cuadrilátero ABCD son rectos, mientras que el grupo nº 2 verifica que los lados de tal cuadrilátero son congruentes entre sí. Ambos grupos, según el caso, no verifican que se satisfaga el otro atributo relevante para que el cuadrilátero ABCD sea un cuadrado [los lados de un cuadrado son congruentes entre sí (grupo nº 1) y sus cuatro ángulos internos son rectos (grupo nº 2)].

La construcción realizada por el grupo nº 4 también se corresponde con las realizadas por los grupos n° 1 y 2; pero, en este caso, no realizan verificación alguna (ni de la longitud de cada uno de los lados del cuadrilátero ABCD, ni de la medida de cada uno de sus ángulos internos).

El grupo n° 5 presentó la siguiente descripción del procedimiento de construcción empleado:

1. |Se coloca el lado AB (lado del cuadrado que se da como dato) en la posición de la base.
2. Por los extremos del segmento AB se trazan dos rectas perpendiculares al segmento.
3. Mediante dos arcos de circunferencia con el radio de la longitud del segmento dado, se traza una por el punto A y la otra por el punto B, cortando las rectas perpendiculares.
4. Se unen los cuatro puntos y se obtiene el cuadrado pedido.

Cabe preguntarse: ¿Qué significa que "*se coloca el segmento AB en la posición de la base*"? ¿Esto significa que lo colocan en posición horizontal? Pareciera que la presentación de las figuras geométricas en posiciones clásicas es una idea arraigada en la mente de los profesores en formación, a pesar de lo discutido en clases. Sin embargo, en el informe escrito, el grupo nº 5 agrega a la descripción el siguiente comentario (así lo denominan):

> "Nótese que la figura construida es un cuadrado, ya que, al partir de un lado para construir los otros tres, trazamos rectas perpendiculares a dicho segmento dado y luego sobre ellas copiamos la medida del segmento inicial AB con el compás, los segmentos AD y BC son congruentes entre sí por ser *(***radios de***)* circunferencias de un mismo radio, y que su vez son congruentes con el segmento AB. Luego unimos los puntos D y C que (**y el segmento DC**) es congruente con el segmento AB, en conclusión al ser todos sus lados iguales y poseer cuatro ángulos rectos por ser los segmentos DA perpendicular con el segmento AB, CB perpendicular con AB y los segmentos DA perpendicular con el segmento DC, CB perpendicular con DC, con lo que por definición el paralelogramo es un cuadrado".

Lo colocado entre paréntesis y en negritas ha sido agregado para mejor seguimiento de las ideas aquí planteadas. En el comentario, dan por cierto que los ángulos con vértice en los puntos C y D son rectos y CD = AB (lo que falta por demostrar); pero no lo demuestran como una consecuencia lógica de las relaciones establecidas entre los objetos que conforman esta construcción. Pudiera decirse que los integrantes del grupo nº 5 manifiestan un esquema de argumentación fáctico, al centrar su comentario en un recuento del procedimiento de construcción del cuadrado ABCD.

El grupo nº 3 siguió una construcción distinta a las previstas por los investigadores, ya que se limitó a trabajar con las herramientas que le permitiera trazar líneas rectas y circunferencias (tal como si estuvieran trabajando con regla y compás en un entorno de lápiz y papel); cabe advertir que en el Cabri II se dispone de botones de herramientas que permiten trazar de manera inmediata, por ejemplo, rectas perpendiculares o rectas paralelas, lo cual no es posible si se está trabajando solo con regla y compás (sin emplear las escuadras disponibles en un juego geométrico) (ver Figura 4). Este grupo no realizó verificación empírica alguna, ni justificó la validez de esta construcción.

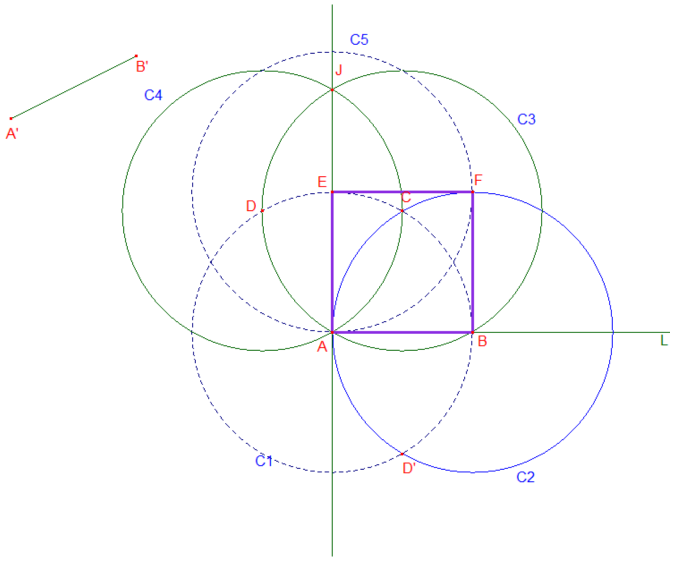


Figura 4. **Construcción de un cuadrado realizada por el grupo n° 3**

3. Construir, explorar, conjeturar y validar

Teniendo en cuenta que los estudiantes para profesores de Matemática, desde una perspectiva del aprendizaje situado, necesitan participar en tareas cercanas al quehacer matemático, susceptibles de ser puestas en práctica en el ámbito de la educación básica, las tareas matemáticas propuestas en el curso de RPG-AC se han organizado siguiendo el esquema:

Construir → Explorar → Conjeturar → Validar

Esquema que además ha sido tomado en consideración por otros educadores matemáticos como Alsina Catalá, Fortuny Aymemí y Pérez Gómez (1997), Perry Carrasco, Camargo Uribe, Samper de Caicedo y Rojas Morales (2006) y Flores (2007). Como se mostró en la Tabla 1, en el curso de RPG-AC se ha enfatizado en las construcciones geométricas con regla y compás haciendo uso de un SGD como el Cabri II y las construcciones geométricas con doblado de papel, ya que para realizar una construcción consistente, se requiere tener en cuenta las relaciones existentes entre los elementos que conforman una construcción (objetos iniciales, auxiliares y finales), para garantizar que se ha construido el objeto esperado, a partir de las condiciones dadas.

Según Alsina Catalá et al. (1997, p. 126), "el análisis de cuestiones métricas o algebraicas con la ayuda de Cabri permite inducir descubrimientos muy interesantes siguiendo, esencialmente, el proceso: Diseñar → Explorar →Modelizar→Conjeturar → Definir → Argumentar → Demostrar". Por ello, identifican siete (7) tipos de actividades geométricas con Cabri: (a) *Diseño* (manejar las herramientas disponibles en el software); (b) *Exploración* (seguir o elaborar procedimientos para construir figuras geométricas, incluyendo el reconocimiento de atributos relevantes); (c) *Modelización* (encontrar una estructura matemática que dote de sentido a una construcción o transformación geométrica); (d) *Formulación de conjeturas* (hallar una afirmación formal a partir de un descubrimiento); (e) *Definición* (nombrar y asignar caracterizaciones); (f) *Argumentación* (dar conjeturas en una manera descriptiva), (g) *Acercamiento deductivo* (validar haciendo uso de inferencias lógicas). Si bien los autores distinguen entre argumentación y acercamiento deductivo (demostración), reconocen el papel que juegan las prácticas argumentativas en una clase de Geometría ya que entre los indicadores de la argumentación (como Cabri – actividad), mencionan formular razonamientos basados en casos y generalizaciones simples, hacer sentencias declarativas y explicitar experiencias interesantes. Estos indicadores servirían de base para establecer razonamientos deductivos con inferencias lógicas que permitan probar una conjetura.

Asimismo, Perry Carrasco et al. (2006), al presentar una caracterización de la actividad demostrativa a través de manifestaciones de desempeño de las acciones realizadas por los participantes en un curso de Geometría Plana en la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá – Colombia), reconocen el fuerte lazo que habría que establecer entre la producción de una demostración formal y algunas acciones de carácter heurístico vinculadas con el proceso para la producción de una justificación (explicación, prueba y demostración formal). Además, señalan que la argumentación es el razonamiento asociado a todas las acciones que conforman la actividad demostrativa y, por ello, sirve de puente entre las acciones de proceso y producto.

Para Perry Carrasco et al. (2006, p. 27), entre las acciones de carácter heurístico, se encuentran:

1. *Visualización*: "Mirada sobre la representación gráfica que se enfoca".
2. *Exploración*: "Acción visible sobre la representación gráfica para estudiar una situación con un propósito específico relacionado con la solución del problema".
3. *Conjeturación*: "Establecimiento de un enunciado, del que se tiene seguridad, expresado en forma general, como una implicación".
4. *Verificación*: "Acciones visibles sobre la representación gráfica para poner a prueba la conjetura establecida".
5. *Análisis*: "Formulación de relaciones de dependencia entre propiedades geométricas presentes en la situación".

Flores (2007) diseñó un experimento de enseñanza con profesores de Matemática del bachillerato en México, haciendo uso del Geometer's Sketchpad, que incorporó actividades de construcción, de análisis y de discusión. Según el autor,

> Las actividades de construcción incluyen la explicación del por qué funciona la construcción, es decir, implican un proceso de formación y prueba de conjeturas; éstas son las más importantes de la propuesta, pues en ellas se tiene que poner atención a las relaciones entre los elementos que las conforman y el proceso de construcción en sí (p. 74).

Por ende, en el taller nº 3 del curso de RPG-AC, siguiendo el esquema de construir → explorar → conjeturar → validar, se plantearon problemas relacionados con el estudio de las definiciones y propiedades de los cuadriláteros concíclicos o circunscribibles y cuadriláteros inscribibles. Se trata de un tema no contemplado en los programas de los cursos de Geometría I y Geometría II, pero que se consideraba susceptible de ser abordado por los participantes en función de los conocimientos previos. Este taller se organizó en torno a siete (7) actividades; en la

Tabla 7, a modo de ilustración, se muestran las dos primeras. Cabe señalar que, para la realización del taller n° 3, los participantes del curso de RPG-AC se reorganizaron y conformaron tres grupos de trabajo.

Las actividades propuestas en el taller nº 3 comparten ciertos rasgos que Flores (2007) considera relevantes para las actividades a ser realizadas en un AGD: las propiedades geométricas pueden obtenerse como conjeturas a partir de la exploración de las construcciones realizadas, pero la validación de tales conjeturas no es inmediata; aunque, por lo general, exigen la puesta en práctica de conocimientos y habilidades geométricas vinculadas con la Geometría Plana (conceptos y propiedades que se estudian en los cursos previos del área de Geometría).

Nº	Actividades	Comentarios
1	Construya una circunferencia con centro en O y radio r. Trace una cuerda AB correspondiente a dicha circunferencia. La cuerda AB subtiende dos arcos de circunferencia: ACB y ADB. Construya el cuadrilátero ACBD. Se dice que el cuadrilátero ACBD es concíclico o circunscribible. Establezca la definición de cuadrilátero concíclico.	Se pretendía que, a partir de la construcción del cuadrilátero ACBD, se estableciera la definición de cuadrilátero concíclico, lo cual exige el reconocimiento de sus atributos relevantes. Uno de ellos: los vértices de un cuadrilátero concíclico pertenecen a una misma circunferencia.
2	Mida cada uno de los ángulos internos del cuadrilátero ACBD. Sume las medidas de sus ángulos opuestos. ¿Qué concluye? ¿Puede validar tal conjetura?	Teniendo como referencia el cuadrilátero previamente construido, se marcan cada uno de sus ángulos internos y, luego, se miden, obteniendo que las sumas de las medidas de los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico es 180º. La clave de la validación de esta conjetura está en reconocer que, por ejemplo, la diagonal AB descompone al cuadrilátero ABCD en dos triángulos, así como conocer y aplicar la propiedad que los ángulos inscritos a un mismo arco de circunferencia son congruentes.

Tabla 7. Actividades propuestas en el taller nº 3 del curso de RPG-AC

Los tres grupos demostraron tener dominio técnico de las herramientas disponibles en el Cabri II; se observa como el grupo nº 1 construyó una circunferencia con centro en O y radio r, donde r es la longitud de un segmento auxiliar, para así usar la opción *Círculo (Compás): O, r* ; mientras que, los grupos nº 2 y 3 emplearon la opción *Círculo: O, P*, donde O es el centro de la circunferencia y P un punto por el cual pasa. También se observa que el grupo nº 1 trazó la cuerda AB y ubicó los puntos C y D, pero no marcó - en forma explícita - los arcos ACB y ADB, cual sí lo hicieron los grupos nº 2 y 3. Para construir el cuadrilátero ACBD, los grupos n° 1 y 3 trazaron cada uno de sus lados AC, CB, BD y AD, mientras que el grupo nº 2 empleó la opción polígono: ACBD. También se observa que quizá teniendo en cuenta la siguiente actividad, los grupos nº 1 y 3 trazaron la otra diagonal CD del cuadrilátero, así que también que el grupo nº 3, procedió a marcar diversos ángulos (ver Figura 5).

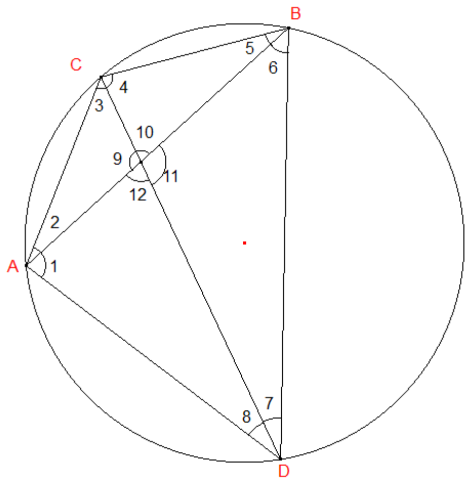


Figura 5. **Construcción del cuadrilátero concíclico ACBD realizada por el grupo nº 3**

Al leer las definiciones de cuadrilátero concíclico, se observa que los tres grupos reconocen que sus vértices pertenecen a una misma circunferencia y, además, los grupos nº 2 y 3 establecen que un cuadrilátero concíclico está inscrito en una circunferencia, con lo cual lo reconocen como parte de la clase de los polígonos inscritos en una circunferencia.

La actividad nº 2 establecía lo siguiente: Mida cada uno de los ángulos internos del cuadrilátero ACBD. Sume las medidas de sus ángulos opuestos. ¿Qué concluye? ¿Puede validar tal conjetura? Al marcar y medir los ángulos internos de un cuadrilátero concíclico o circunscribible (ver Figura 6), se observa que la suma de las medidas de sus ángulos opuestos es 180º; por ende, se puede decir que: En un cuadrilátero concíclico o circunscribible, los ángulos opuestos son suplementarios.

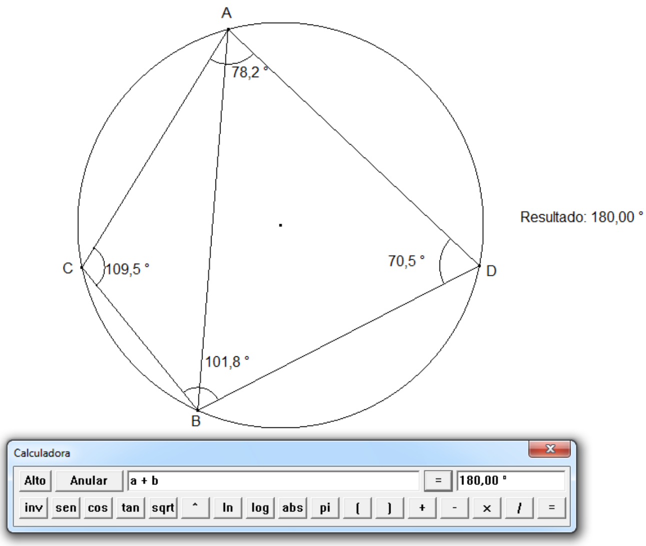


Figura 6. **En un cuadrilátero concíclico o circunscribible, los ángulos opuestos son suplementarios (verificación empírica)**

En los informes escritos dieron las siguientes respuestas: (Grupo nº 1) *De la medición de los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico se concluye que son suplementarios*; (Grupo nº 2) *Concluimos que la suma de las medidas de los ángulos opuestos es 180º; es decir, los ángulos opuestos son suplementarios. Según esto en un cuadrilátero concíclico se cumple que sus ángulos opuestos son suplementarios*; (Grupo nº 3) *Que la adición de los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico son suplementarios*. Cabe señalar que, con el Cabri II, es posible marcar y medir los ángulos internos del cuadrilátero ACBD y, luego, con la opción calculadora, seleccionar las medidas de los pares de ángulos opuestos, calcular su suma y obtener como resultado 180º. De esta manera, si se arrastra el vértice de uno de los ángulos, se observa que varía su medida, pero la suma sigue siendo 180º (ver Figura 6). Esto ayuda a convencerse que el resultado obtenido no es fortuito, sino que puede ser entendido como una propiedad que satisfacen los cuadriláteros concíclicos. Así, una vez establecida la conjetura, cada uno de los grupos se dedicó a validarla; de esta manera, se evidencia dominio de los usos heurísticos del Cabri II.

El grupo nº 1, teniendo en cuenta la figura abajo indicada (ver Figura 7), presentó la siguiente justificación:

1. Podemos observar que los ∢ BCD ≅∢BAD *por ser ángulos inscriptos a una misma circunferencia*. Ángulos a los cuales llamaremos (1).
2. De igual forma podemos concluir que los ángulos ∢ CBA ≅∢CDA a los cuales llamaremos (2).
3. Ahora podemos concluir que los ángulos ∢ ACD ≅∢ABD a los cuales llamaremos (3).
4. Por último podemos concluir que los ángulos ∢ CAB ≅∢CDB a los cuales llamaremos (4).
5. Ahora bien toda esta relación de congruencia de los ángulos nos va a permitir validar la conjetura que los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico son suplementarios. Ya que si consideramos el triángulo ⊿ CAD podemos detallar que *la suma de la medida angular de los ángulos 3, 2 con el ángulo de vértice A es igual a 180 por propiedad de los triángulos* y por la relación de congruencia que hemos establecido antes *la suma de la medida angular de 2 y 3 es igual al ángulo con el vértice B*, por lo tanto *los ángulos con vértice en A y B son suplementarios*, y un análisis análogo establece que los ángulos con vértices en D y C son suplementarios.

Justificación basada en la identificación de pares de ángulos inscritos a un mismo arco de circunferencia y la aplicación de la propiedad que establece que dos o más ángulos inscritos a un mismo arco de circunferencia son congruentes. En los primeros cuatro pasos de la prueba, identifica cuatro pares de ángulos congruentes por la razón antes mencionada. Luego, conociendo que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, establece que, en el ∆ ACD:

$$m\ (< CAD) + m\ (< 3) + m\ (< 2) = 180º,$$

donde, por el postulado de adición de ángulos, m (< 3) + m (< 2) = m (< CBD); llegando a que: m (< CAD) + m (< CBD) = 180º. Nótese que, según la Figura 7 elaborada por el grupo n° 1, en el ∆ ACD, se tiene que: < 3 = < ACD y < 2 = < ADC; mientras que en el ∆ BCD, < 2 = < CBA y < 3 = < DBA.

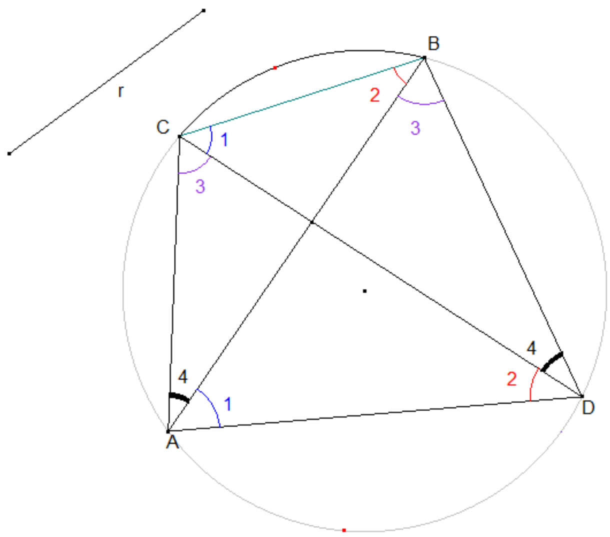


Figura 7. **Cuadrilátero concíclico elaborado por el grupo nº 1, en el cual se basan para probar que los ángulos opuestos son suplementarios**

El grupo nº 2 inicia la prueba señalando que "*utilizaremos la relación entre ángulos inscritos y centrales que abren el mismo arco de circunferencia*" y escriben las siguientes igualdades:

$\mathrm{m}\,(< BDA) = \frac{1}{2}\mathrm{m}(< BOA)$ y $\mathrm{m}\,(< ACB) = \frac{1}{2}\mathrm{m}(< AOB)$

Sumando estas ecuaciones se obtiene:

$$\mathrm{m}\,(< BDA) + m(< ACB) = \frac{1}{2}\mathrm{m}(< BOA) + \frac{1}{2}\mathrm{m}(< AOB)$$

$\mathrm{m}\,(< BDA) + m(< ACB) = \frac{1}{2}(\mathrm{m}\,(< BOA) + m(< AOB))$; por propiedad distributiva

$\mathrm{m}\,(< BDA) + m(< ACB) = \frac{1}{2}(360°)$; los dos arcos forman la circunferencia

$\mathrm{m}\,(< BDA) + m(< ACB) = 180°$; operando

Quedando demostrado que en un cuadrilátero concíclico los ángulos opuestos son suplementarios.

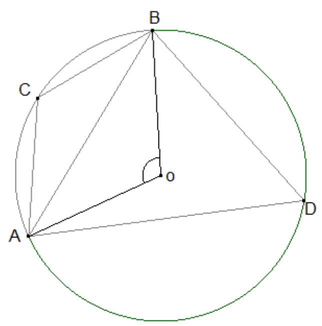


Figura 8. **Cuadrilátero concíclico elaborado por el grupo nº 2, en el cual se basan para probar que los ángulos opuestos son suplementarios.**

En la Figura 8, se observa que < BDA está inscrito en el arco de circunferencia BDA y < BOA es el correspondiente ángulo central, así como también < ACB está inscrito en el arco de circunferencia ACB y < AOB es el correspondiente ángulo central. Cabe recordar que un ángulo central es cualquier ángulo con vértice en el centro de la circunferencia y, en consecuencia, sus lados están determinados por radios de tal circunferencia; mientras que un ángulo inscrito a un mismo arco de circunferencia tiene vértice en un punto perteneciente a tal arco y sus lados cortan a la circunferencia en los extremos del arco. Además, aplican que la medida de un ángulo inscrito a un arco de circunferencia es la mitad de la del correspondiente ángulo central. Nótese que, aunque no lo señalan en el desarrollo de la prueba, los ángulos centrales < BOA y < AOB se asumen como diferentes, ya que se considera la orientación con respecto a las agujas del reloj siendo por ello que afirman que

m (< BOA) + m (< AOB) = 360º.

El grupo nº 3, teniendo como referencia la figura mostrada en la Figura 9, identificó hipótesis y tesis y, procedió a presentar la siguiente prueba siguiendo el esquema de afirmaciones y razones.

1. El cuadrilátero ABCD es concíclico; por hipótesis.

2. Por construcción auxiliar se traza la diagonal CD, dividiendo el cuadrilátero en cuatro triángulos.

3. Así <u>por propiedad de la cuerda</u> se tiene:

Con respecto a la cuerda AC. $<8 \cong <5$

Con respecto a la cuerda CB. $<7 \cong <2$

Con respecto a la cuerda AD. $<6 \cong <3$

Con respecto a la cuerda DB. $<1 \cong <4$

Entonces sustituyendo: El <1 por el <4, el <3 por el <6, <5 por el <8 y el <2 por el <7.

4. Tomando el ▲ACB:

m (<C) + m (<7) + m (<8) = 180º ; por suma interna de ángulos de un triángulo.

m (<C) = 180º- m (<7) – m (<8); despejando m (<C).

5. Tomando el ▲ADB:

m (<D) + m (<4) + m (<6) = 180º ; por suma interna de ángulos de un triángulo.

m (<D) = 180º- m (<4) – m (<6); despejando m (<D).

6. Así m (<ACB)+ m (<ADB)=180°, ya que, sustituyendo se tiene:

180º- m (<7) – m (<8) + 180º- m (<4) – m (<6) = X

- m (<7) – m (<8) – m (<4) – m (<6) + 360º = X

360º - X = m (<7) + m (<8) + m (<4) + m (<6)

360º - X = 180º

360º - 180º = X

7. Así se cumple que m(<ACB)+ m(<ADB)=180°

8. Tomando el ▲ACD:

m (<A) + m (<6) + m (<8) = 180º ; <u>por suma interna de ángulos de un triángulo</u>.

m (<A) = 180º- m (<6) – m (<8); despejando m (<A).

9. Tomando el ▲BCD:

m (<B) + m (<4) + m (<7) = 180º ; por suma interna de ángulos de un triángulo.

m (<B) = 180º- m (<4) – m (<7); despejando m (<B).

10. Así m (<CAD)+m (<CBD)=180°. Sustituyendo se tiene:

180º- m (<6) – m (<8) + 180º- m (<4) – m (<7) = 180º

360º- m (<6) – m (<8) – m (<4) – m (<7) = 180º

180º= m (<6) + m (<8) + m (<4) + m (<7).

11. Ser verifica que m (<CAD) + m (<CBD)=180°

12. Queda demostrado entonces que m (<ACB) + m (<ADB)=180° y m (<CAD) + m (<CBD)=180°; por pasos 7 y 11.

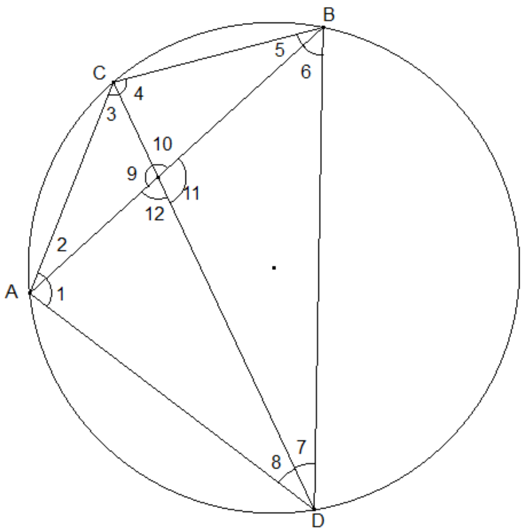


***Figura 9*. Cuadrilátero concíclico elaborado por el grupo nº 3, en el cual se basan para probar que los ángulos opuestos son suplementarios**

Cuando hacen referencia, en el paso 3, a la propiedad de la cuerda, se refieren a que una cuerda de una circunferencia determina dos arcos; así, por ejemplo, la cuerda AC determina los arcos CBA y CPA (donde el punto P pertenece a la circunferencia, pero no al arco CBA); y que, además, dos o más ángulos inscritos en un mismo arco de circunferencia son congruentes como lo son < CBA y < ADC con respecto al arco CBA. También aplican que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º. En los pasos nº 6 y 10, calculan las sumas de las medidas de los pares de ángulos opuestos del cuadrilátero ACBD, en función de las relaciones establecidas en los pasos 4 y 5, así como 8 y 9 respectivamente.

Se considera que los tres grupos presentaron pruebas de la conjetura formulada en la actividad nº 2 y que manifestaron un esquema de argumentación analítico, procurando presentar una serie de afirmaciones encadenadas lógicamente y debidamente justificadas, haciendo referencia a definiciones y propiedades geométricas conocidas.

4. Consideraciones Finales

El curso de RPG-AC ha sido asumido como *un escenario formativo e investigativo*, ya que, por una parte, forma parte como curso optativo de integración del plan de estudio del componente de formación especializada de la especialidad de Matemática en la UPEL Maracay y, por otra parte, es el contexto donde se ha abordado el estudio de las competencias matemáticas y didácticas que ponen en juego los participantes cuando realizan ciertas tareas (Iglesias, 2014).

Desde la planificación de las actividades de enseñanza y aprendizaje que lo conforman, el curso de RPG-AC se ha sustentado en el *planteamiento de tareas didáctico – matemáticas*, orientadas a la resolución de problemas geométricos, haciendo uso de un SGD como el Cabri II o al diseño de una unidad didáctica con contenidos geométricos para educación media (Iglesias y Ortiz, 2015).

Así, teniendo como referencia el mapa de enseñanza y aprendizaje (MEA) propuesto por Orellana Chacín (2002) y los componentes del análisis didáctico para la fase de diseño (Gómez, 2007; Rico y Fernández-Cano, 2013; Ortiz, Iglesias y Paredes, 2013), se planificaron tres talleres relacionados con los siguientes temas: (a) construcciones geométricas con regla y compás; (b) equivalencia entre dos maneras distintas de construir una figura; (c) cuadriláteros concíclicos y cuadriláteros inscribibles (ver Tabla 1).

De esta manera, se ha valorado el papel que han jugado las construcciones con regla y compás en el desarrollo teórico y las aplicaciones prácticas de la Geometría Euclidiana, procurando que así lo entiendan los participantes en el curso de RPG-AC. En este sentido, se considera clave identificar en una construcción geométrica los siguientes elementos: (a) lo dado (objetos iniciales); (b) el procedimiento de construcción (incluyendo los objetos auxiliares); (c) lo que se quiere construir (objetos finales). En atención a los elementos conocidos y lo planteado en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, las actividades se clasificaron en actividades dirigidas y actividades libres. Además, en estas actividades se emplearon los métodos de construcción mencionados por Siñeriz (2000): (a) el método de los dos lugares; (b) el método de la figura auxiliar y (c) el método de la figura semejante.

Para desarrollar la noción de equivalencia entre una construcción con doblado de papel y una construcción con regla y compás de una misma figura geométrica, se lograron identificar tres ideas matemáticas relevantes: (a) superposición de figuras geométricas; (b) correspondencia entre figuras geométricas y (c) puntos y rectas construibles (Arrieche e Iglesias, 2010; Iglesias, 2014).

Las actividades se organizaron siguiendo el esquema construir → explorar → conjeturar → validar, el cual se considera apropiado para emprender acciones de carácter heurístico como las planteadas por Alsina Catalá et al. (1997) y Perry Carrasco et al. (2006), especialmente cuando se sigue un enfoque de resolución de problemas y se incorpora el uso de un SGD.

La resolución de problemas geométricos vinculados con los temas seleccionados para cada uno de los talleres planificados fue la principal estrategia de enseñanza y aprendizaje junto con el uso del Cabri II y el plegado de papel (en el taller nº 2).

Con el diseño de una unidad didáctica con contenidos geométricos, basándose en la noción de análisis didáctico, se ha pretendido que los participantes – como profesores en formación - abordaran la problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría escolar (Iglesias y Ortiz, 2015); problemática entendida, atendiendo a lo propuesto por Azcárate Goded (2004) como un *ámbito de investigación profesional* (AIP).

Bibliografía

Alsina Catalá, C., Fortuny Aymemí, J.M. y Pérez Gómez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Síntesis, Madrid.

Aravena Díaz, M. y Caamaño Espinoza, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule, Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16 (2), 139 – 178.

Arrieche, B. e Iglesias, M. (2010). Explorando ángulos e triángulos com dobraduras em papel. *Boletim GEPEM*, 57, 105-117.

Azcárate Goded, P. (2004). *Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos*. Ponencia presentada en el Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Universidade da Coruña.

Bainville, E. (2003). *Cabri Géomètre II Plus. Manual del usuario*. Cabrilog, Grenoble, Francia.

Corberán, R. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele*. C.I.D.E., M.E.C., Madrid.

De Villiers, M. (2010). Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Educação Matemática Pesquisa*, 12 (3), 400 - 431.

Flores, A.H. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas del Bachillerato. *Educación Matemática*, 19 (1), 63-98.

Gómez, P. (2007). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas. En P. Gómez (Ed.), *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (pp. 31-116). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España.

Gutiérrez, A. (2000). Aportaciones de la investigación psicológica al aprendizaje de las matemáticas en secundaria. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 24, 23 – 33.

Iglesias, M. (2000). *Curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad

Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Iglesias, M. (2014). *La Demostración en Ambientes de Geometría Dinámica. Un Estudio con Futuros Docentes de Matemática*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Iglesias. M. y Ortiz, J. (2015). Competencias didácticas exhibidas por futuros profesores de Matemática. En J. Sanoja de Ramírez y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VIII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VII Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 352 – 367).Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay, Venezuela. Recuperado el 16 de octubre de 2018 de http://www.asovemat.org.ve/memorias.php

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp. 295 – 384). Sevilla: Alfar.

Luengo González, R., Blanco Nieto, L., Mendoza García, M., Sánchez Pesquero, C., Márquez Zurita, L. y Casas García, L.M. (1997). *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza*. Síntesis, Madrid.

Mills, J., Tall, D. (1988). From the visual to the logical in mathematics.*Bullettin of I.M.A.*, 21 11/12 Nov – Dec, 176 – 183.

Orellana Chacín, M. (2002).¿Qué enseñar de un Tópico o de un Tema? *Enseñanza de la Matemática* 11(2), 21- 42.

Ortiz, J., Iglesias, M. y Paredes, Z. (2013). El análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en matemáticas. En L. Rico, J.L. Lupiánez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 293 – 308). Comares, Granada, España.

Perry Carrasco, P., Camargo Uribe, L., Samper de Caicedo, C. y Rojas Morales, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En L. Rico, J.L. Lupiánez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 1 - 22). Comares, Granada, España.

Siñeriz, L. E. (2000). Los griegos, la heurística, la regla y el compás. En R.S. Abrate y M. D. Pochulu (comps.), *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática* (pp. 193 – 215). Universidad de Villa María; Argentina.

Autores:

Martha de las Mercedes Iglesias Inojosa: Profesora de Matemática con Maestría en Enseñanza de la Matemática y Doctorado en Educación; Integrante del Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática Usando Nuevas Tecnologías y del Núcleo de Investigación en Educación Matemática de la UPEL IP. de Maracay; Miembro de la Asociación Venezolana de Educación Matemática.mmiglesias@gmail.com

José Ortiz Buitrago: Profesor de Matemática con Doctorado en Educación Matemática. Coordina la línea de investigación en Pensamiento Algebraico y Educación Matemática. Investigador adscrito a la Unidad de Investigación del Ciclo Básico de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo, Núcleo Aragua y el Núcleo de Investigación en Educación Matemática de la UPEL IP. de Maracay. Miembro de la Asociación Venezolana de Educación Matemática. joseortiz.facesuc@gmail.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 55.Abril 2019
Páginas 144-158

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Una nueva mirada a los poliedros regulares: Construcciones que generan sorpresas

Magali Lucrecia Freyre, Ana María Mántica

Fecha de recepción: 28/01/2019
Fecha de aceptación: 15/04/2019

Resumen

En este trabajo se plantea el análisis de lo realizado por estudiantes de tercer año de profesorado en matemática en la resolución de dos problemas de geometría tridimensional con GeoGebra y Polydron. Para lograr en los alumnos una imagen conceptual rica del concepto de poliedro regular se propone la construcción con GeoGebra de poliedros que cumplan sólo algunas de las condiciones solicitadas por la definición de este tipo de sólidos. Los poliedros construidos representan una sorpresa para los estudiantes quienes no vislumbran en un principio la posibilidad de existencia de los mismos.
Palabras clave: GeoGebra - Poliedro regular - Construcciones - Conjeturas

Abstract

In this paper, the analysis of what was done by third-year students of mathematics teachers in solving two problems of three-dimensional geometry with GeoGebra and Polydron is presented. In order to achieve a rich conceptual image of the concept image of regular polyhedron in the students, we propose the construction with GeoGebra of polyhedrons that fulfill only some of the conditions requested by the definition of this type of solids. The constructed polyhedrons represent a surprise for the students who do not foresee in the beginning the possibility of their existence.
Keywords: GeoGebra - Regular polyhedron - Constructions - Conjectures

Resumo

Neste artigo é apressentada uma análise do que foi feito pelos estudantes do terceiro ano do professorado de matematica na resolução de dois problemas de geometria tridimensional com GeoGebra y Polydron. A fim de obter uma imagem rica sobre o conceito de poliedro regular nos estudantes, propomos a construção com GeoGebra de poliedros que preenchem apenas algumas das condições solicitadas pela definição deste tipo de solido. Os poliedros construídos representam uma supresa para os estudantes, que não vislumbram de início a possibilidade de existência dos mesmos.
Palavras-chave: GeoGebra - Poliedro regular - Construções - Conjecturas

1. Introducción

El trabajo en geometría posee una destacada importancia en el plan de estudio del profesorado en matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, como así también el uso de software de geometría dinámica (SGD) para la elaboración y validación de conjeturas.

Los problemas que se presentan en este trabajo tienen por objetivo resignificar el concepto de poliedro regular a partir de la construcción de poliedros no regulares que cumplen algunas de las condiciones exigidas por la definición de poliedro regular[1]. Los estudiantes de tercer año de este profesorado al resolver los problemas que se presentan en este trabajo, prueban la existencia de poliedros no regulares de caras triangulares que cumplen con esta característica. Esto permite no solo que se reflexione sobre los alcances de la definición de poliedro regular sino que al emplear GeoGebra y Polydron[2], se realicen exploraciones sobre las construcciones logradas para elaborar conjeturas acerca de la existencia de dichos poliedros y establecer argumentos que permitan validarlas. Los recursos posibilitan en este caso que se establezcan conjeturas que con lápiz y papel serían poco probables.

Este tipo de propuestas representa un ejemplo en el que la tecnología se integra a las prácticas favoreciendo especialmente que se cumplan los objetivos previstos. No solo por el dinamismo que ofrece el software para observar multiplicidad de casos con una única construcción, sino por las ventajas de construir representaciones dinámicas tridimensionales con solo hacer clic en las herramientas adecuadas (GeoGebra) o a partir del encastrado de polígonos (Polydron). Esto hace de la utilización del software un aspecto imprescindible para resolver los problemas, que revaloriza el trabajo en geometría tridimensional, particularmente en el desarrollo del concepto de poliedro regular. Los recursos empleados brindan la posibilidad de construir y explorar. Estas acciones tienden a formar imágenes conceptuales ricas de los conceptos (Vinner y Dreyfus, 1989).

Se pretende a través de la resolución de los problemas presentados enriquecer la imagen conceptual de poliedro regular que tienen los estudiantes, posibilitando que el conjunto de ejemplos de este concepto también se enriquezca. Esto permite que haya una mayor coincidencia entre ese conjunto y el determinado por la definición de poliedro regular.

La propuesta presentada tiende a sorprender a los estudiantes con la existencia de algunos poliedros en los que difícilmente hayan puesto su atención previamente. Cabe destacar que en numerosas oportunidades cuando los alumnos mencionan tetraedro, octaedro y dodecaedro por ejemplo, consideran que son regulares. Esto puede deberse a dos aspectos. Por un lado, el autor del material bibliográfico trabajado en la cátedra donde se desarrolla la experiencia, cuando

[1]Se consideran poliedros regulares convexos a aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas.

[2]Polydron es un recurso didáctico formado por polígonos realizados en plástico que poseen bisagras que permiten encastre. Los tipos de polígonos que lo forman son: triángulos equiláteros (pequeños y grandes), triángulos isósceles acutángulos, triángulos isósceles rectángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos regulares, hexágonos regulares y octógonos regulares.

presenta los poliedros regulares, expresa que se va a referir a ellos sin agregar la condición de regular dado que generalmente emplea este tipo de poliedros. Si en algún caso especial considera alguno de ellos no regular, lo explicita. Por otro lado, el software GeoGebra ofrece una herramienta de construcción denominada *Tetraedro*, con la cual se construye un tetraedro regular.

Se analiza lo realizado por los estudiantes al resolver los problemas planteados en relación a la elaboración y validación de sus conjeturas a partir de grabaciones de audio y video y archivos del software.

2. Marco de referencia

Se consideran referentes teóricos que estudian por un lado la enseñanza de poliedros con distintos materiales y de las relaciones entre sus elementos. Por otro los que analizan las ideas referidas a la influencia de las imágenes mentales que se tienen de un concepto y su definición. Así mismo referentes que trabajan sobre la influencia de un software de geometría dinámica (SGD) en la formulación y validación de conjeturas y el tipo de construcciones que se realizan con los mismos.

En lo referente al empleo de diferentes materiales para la construcción de sólidos, Guillén (2010) sostiene que prismas y pirámides pueden realizarse empleando distintos procedimientos, considerando objetos del entorno o plegado de papel. Plantea cómo determinados modelos pueden orientar a los estudiantes “a contar de manera estructurada su número de caras, vértices, aristas y otros elementos de los poliedros (ángulos de las caras, ángulos diedros, diagonales de las caras, diagonales del espacio)” (p.32), obtener una generalización y expresarla simbólicamente, pero esto conlleva mayor dificultad. Propone utilizar variadas herramientas de construcción que permitan centrar la atención en distintos elementos del poliedro y lleven a diferentes estrategias para hallar el número de ellos. Es interesante que estos números puedan determinarse a partir del modelo físico pero también sin tener como referencia la construcción, "apoyándose en la fuerza de los razonamientos deductivos y en el conocimiento que se tienen de las propiedades” (p.33) siendo esto más interesante cuando se trata de familias de poliedros que no son las habitualmente consideradas.

Por otra parte, Guillen (2010) sostiene que el trabajo con poliedros regulares y arquimedianos es muy interesante. Plantea actividades que permiten determinar las relaciones entre ellos, realizando construcciones para determinar composiciones y descomposiciones entre los mismos, estableciendo inscripciones, truncamientos, etc.

Así mismo Vinner y Dreyfus (1989) en lo que refiere a las imágenes mentales de un concepto y su definición, afirman que todos los conceptos matemáticos excepto los primitivos tienen definiciones formales. Los estudiantes no necesariamente usan las definiciones, aún cuando son trabajadas, para decidir si un objeto matemático dado es un ejemplo o un no ejemplo de un concepto. En la mayoría de los casos deciden en base a su imagen conceptual. Este término refiere al conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en la mente del estudiante con el nombre del concepto, junto con todas las propiedades que lo caracterizan. Por imagen mental se entiende a todo tipo de representación: símbolos, diagramas, gráficos, entre otras. La imagen del estudiante es un resultado de su experiencia con ejemplos y no ejemplos del concepto. El conjunto de los objetos matemáticos considerados por los estudiantes como ejemplos del concepto no es necesariamente el mismo que el conjunto de objetos matemáticos determinados por la definición. Si estos dos conjuntos no coinciden, el comportamiento del estudiante puede diferir de lo que el docente espera. Es importante entender por qué esta comunicación falla, explorando las imágenes de los estudiantes acerca de varios conceptos matemáticos.

Por otra parte, Tall (1989) sostiene que tradicionalmente la forma de enseñar matemática consiste en comenzar a partir de conceptos simples y familiares para el alumno para luego a partir de resolver secuencias de actividades, construir ideas más complejas. Esto puede causar serias dificultades en el aprendizaje dado que la mente humana no opera de una manera lógica. Si se presenta la matemática en un contexto simplificado, se muestran regularidades también simplificadas que aunque no sea la intención, se convierten en parte de la imagen conceptual del estudiante. De esta manera las estructuras cognitivas quedan arraigadas y pueden generar conflictos cognitivos que actúen como obstáculos para el aprendizaje. La computadora ofrece nuevas posibilidades en relación a este aspecto ya que permite que en un entorno de software, el alumno explore ideas más complejas desde el principio. Esta forma de aprendizaje implica una negociación del significado de los conceptos matemáticos modelados por la computadora en la que la organización del currículo y el papel del profesor es crucial.

Respecto al uso de software, Villella (2017) afirma que el hecho de incorporar TIC en la enseñanza de la matemática permite que los objetos matemáticos dejen de ser una sucesión de símbolos que a partir de algoritmos resuelven problemas estándar y se conviertan en objetos vivos para los que el estudiante puede formular conjeturas a partir de la exploración y verificarlas. Las construcciones logradas con software constituyen objetos de experimentación sobre la teoría contribuyendo a superar la tensión entre la visualización y la justificación. Aparecen prácticas directas que avala el software tales como arrastrar, ocultar, medir y dejar una traza, y también otras prácticas que el docente fomenta a partir de intervenciones planificadas tales como explorar, verificar y justificar. De esta manera no es suficiente con proponerles a los alumnos una construcción si se desea aprovechar el potencial al máximo. La tarea de construcción debe poner en juego los conocimientos previos y las posibilidades que brinda el software.

> Producir un dibujo en entornos favorecidos por las TIC implica preservar propiedades espaciales durante el arrastre; requiere del uso de propiedades geométricas para su construcción, y coloca en un segundo plano los procesos de ensayo y error controlados únicamente de manera perceptiva. (Villella, 2017, p.152)

También referido al uso de software, Arcavi y Hadas (2000) consideran que difícilmente los estudiantes experimenten de manera fructífera desde el comienzo de una actividad. Por esto es importante diseñar problemas de tal manera que los tipos de preguntas jueguen papeles significativos en la intensidad del aprendizaje experimental. Un tipo de preguntas que les permite acompañar la experimentación es proponer que los alumnos realicen predicciones explícitas e inteligentes sobre el resultado de las acciones que están por efectuar. De esta manera se logra alertar a los alumnos logrando claridad sobre cómo prevén lo que van a trabajar, orientarlos a la creación de predicciones propias que realizarán de manera cuidadosa comprometiéndose con la situación; creando motivaciones y expectativas sobre la experimentación real. Resulta un desafío entonces proponer situaciones en las que el resultado sea inesperado para que la sorpresa o desconcierto que se produce cree una diferencia clara con las predicciones enunciadas antes de la experimentación. La sorpresa, como característica de los entornos dinámicos, puede establecer de esta manera oportunidades para lograr aprendizajes significativos ya que nutre la necesidad propia de los estudiantes para re-analizar su conocimiento.

Por otra parte Healy (2000) expresa que es muy importante para los procesos de prueba que los objetos construidos con SGD sean manipulados por el estudiante de manera que pueda identificar propiedades y también clarificar las transformaciones, los pasos intermedios, por los cuales esas propiedades pueden ser inferidas de aquellas usadas por los estudiantes para la construcción. El software tiene un rol en ambos procesos, asistiendo en la formulación y validación de conjeturas y ofreciendo diferentes métodos a partir de los cuales los pasos de la prueba se pueden hacer más visibles. Distingue entre construcciones robustas y construcciones blandas. En las construcciones blandas no se utilizan todas las propiedades geométricas dadas. Una construcción robusta por otra parte, implica que la figura tiene todas las propiedades geométricas esperadas, por lo tanto, al realizar desplazamiento de puntos libres, la figura las mantiene. La diferencia entre los dos tipos de construcciones es la manera en que los estudiantes experimentan la dependencia geométrica. En construcciones robustas, la dependencia se demuestra con el hecho de que una relación permanece invariante a través del desplazamiento. Así, durante el desplazamiento se puede mover de lo general a una familia de dibujos con las mismas propiedades geométricas. En las construcciones blandas esto no ocurre. En este caso el desplazamiento es parte de la construcción, no una verificación. Los estudiantes observan cómo la propiedad dependiente se vuelve evidente en el punto en el que la otra propiedad es manualmente y visualmente satisfecha. Así, lo general puede emerger de lo específico a partir de la búsqueda de las posiciones en que las condiciones se cumplen.

3. Contexto de la experiencia

Los dos problemas presentados constituyen una parte de una secuencia didáctica cuyo objetivo es enriquecer la imagen conceptual de poliedro regular a partir de la construcción de poliedros no regulares que cumplan algunas de las condiciones exigidas por la definición de poliedro regular.

La experiencia tiene lugar dentro de un taller de GeoGebra propuesto en el marco de la cátedra Geometría Euclídea Espacial, al que asisten cuatro alumnos, correspondiente al tercer año del profesorado en matemática. El software es utilizado de manera fundamental en el cursado de la materia para realizar construcciones que permitan la exploración, la formulación de conjeturas acerca de propiedades y propiciar la validación de las mismas. Otro recurso utilizado por los estudiantes en las clases de la asignatura es el Polydron, que permite realizar construcciones tridimensionales a partir del encastrado de polígonos.

Para la resolución de los problemas presentados los alumnos cuentan además de GeoGebra con el Polydron. Trabajan en parejas y las producciones son socializadas posteriormente al grupo clase. Se consideran para el análisis de lo realizado por los estudiantes, los archivos en GeoGebra, que permiten identificar los procedimientos llevados a cabo a través del Protocolo de construcción que ofrece el software y las grabaciones de audio y video de los distintos momentos de la clase.

4. Discusión y resultados

Presentamos lo realizado por los estudiantes que participaron del taller, en cada uno de los problemas.

4.1. Problema 1

Se expone el análisis no solo de los procedimientos llevados a cabo por los estudiantes de los dos grupos con el software, sino del debate generado durante la puesta en común de los resultados del primer problema.

Consigna
Construir, si es posible, un poliedro no regular de modo que todas sus caras sean triángulos equiláteros iguales. Si no es posible, justifica la no existencia.

Tabla 1. Consigna del Problema 1

Los estudiantes comienzan a resolver el problema y se plantea un debate entre ellos. Consideran inicialmente que para que un poliedro sea regular debe cumplir solamente la condición que las caras sean polígonos regulares iguales. De esta manera, atienden sólo a una parte de la definición y por tanto no a todas las condiciones que debe cumplir un poliedro para ser regular.

Recurren en primera instancia a poliedros que corresponden a familias trabajadas en la cátedra: prismas, pirámides y poliedros regulares. La familia que primero consideran es la de prisma y dan muestras de una imagen conceptual estereotipada de la misma. Emplean las expresiones "arriba" y "abajo" para referirse a las bases de un prisma, lo que daría cuenta que lo consideran apoyado sobre una de sus bases. Intentan así, partiendo de un prisma realizar transformaciones de modo de obtener un poliedro que cumpla las condiciones pedidas.

Parecería que no consideran los polígonos caras del poliedro a construir, ni analizan los ángulos poliedros del mismo ya que no logran un análisis global del sólido que les permita desprenderse del modelo físico. La construcción es la referencia y no utilizan razonamientos deductivos más allá de la misma (Guillén, 2010). Los estudiantes comienzan a pensar en transformaciones de un poliedro conocido dado que el poliedro buscado no corresponde a una familia de las habitualmente trabajadas.

Como no logran obtener el sólido pedido, abandonan la construcción a partir de prismas y recurren al tetraedro regular. Comienzan a analizar qué ocurre si modifican el número de triángulos que concurren en uno de sus vértices. No obstante, no realizan un análisis similar al que hicieron para probar que no existen más de cinco poliedros regulares. Sólo consideran ese único vértice al que podrían concurrir cuatro triángulos pero piensan que en ese caso la quinta cara sería un cuadrilátero y por tanto no cumple la consigna (Figura 1).

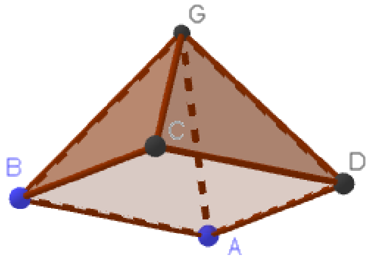


Figura 1. Construcción a partir de un tetraedro regular.

Vuelven a considerar el poliedro regular sin recurrir a la definición, por tanto tienen la imagen de los cinco poliedros regulares y consideran que negar la regularidad equivale a que las caras no sean iguales. Esto evidencia que el conjunto de ejemplos determinado por su imagen conceptual no se corresponde con el conjunto de ejemplos de la definición (Vinner y Dreyfus, 1989). Puede decirse que vuelven constantemente a sus imágenes de poliedros regulares, pero desde una visión global de las mismas, considerando sólo forma y regularidad de las caras y no los ángulos poliedros del sólido. La imagen conceptual que tienen de poliedro regular es tan resistente y estereotipada que condiciona un análisis minucioso de la definición.

Los estudiantes continúan debatiendo siempre refiriéndose a los cinco poliedros regulares convexos y haciendo hincapié en los polígonos que forman sus caras.

El docente sugiere la lectura de la definición de poliedro regular. Luego de analizarla los grupos logran realizar una construcción que cumple con lo pedido en la consigna sin mayores inconvenientes, no obstante utilizan distintas herramientas en sus procedimientos.

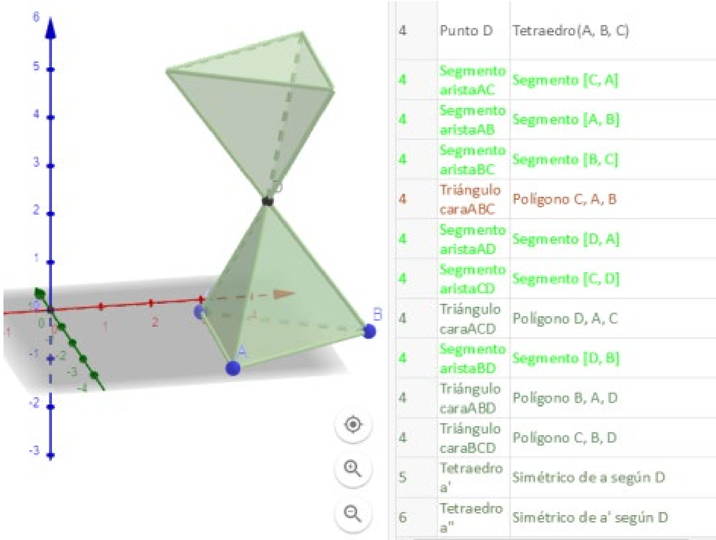
Un grupo emplea la herramienta Tetraedro y luego realiza una simetría central respecto de uno de sus vértices. Construyen de esta manera un sólido a partir de dos triedros opuestos por el vértice (Figura 2).

El docente al advertir la construcción plantea un debate en el grupo clase en torno a si la figura construida es o no un poliedro. Se discute sobre la definición acordada de poliedro[3] y se concluye que la figura obtenida no es un poliedro ya que

[3] "Llamaremos superficie poliédrica al conjunto de un número finito de polígonos, llamados caras de la superficie, que cumplan las siguientes condiciones:

- Cada lado de una cara pertenece también a otra y sólo otra. Ambas caras se llaman contiguas.
- Dos caras contiguas están en distinto plano.
- Dos caras no contiguas pueden unirse por una sucesión de caras contiguas.

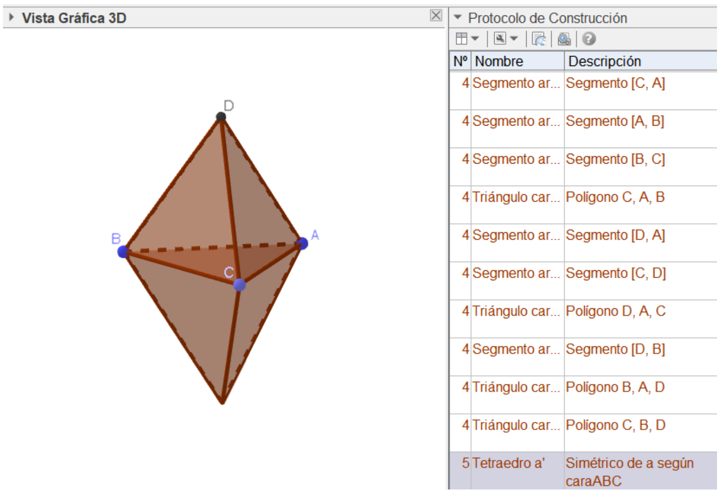
dos caras no contiguas no pueden unirse por una sucesión de caras contiguas, que es lo que establece la definición.



4	Punto D	Tetraedro(A, B, C)
4	Segmento aristaAC	Segmento [C, A]
4	Segmento aristaAB	Segmento [A, B]
4	Segmento aristaBC	Segmento [B, C]
4	Triángulo caraABC	Polígono C, A, B
4	Segmento aristaAD	Segmento [D, A]
4	Segmento aristaCD	Segmento [C, D]
4	Triángulo caraACD	Polígono D, A, C
4	Segmento aristaBD	Segmento [D, B]
4	Triángulo caraABD	Polígono B, A, D
4	Triángulo caraBCD	Polígono C, B, D
5	Tetraedro a'	Simétrico de a según D
6	Tetraedro a''	Simétrico de a' según D

Figura 2. Tetraedros opuestos por el vértice

A continuación, realizan una nueva construcción partiendo de un tetraedro regular al que le aplican una simetría especular respecto del plano que contiene a una de sus caras, obteniendo en este caso un poliedro que cumple con las condiciones solicitadas en la consigna (Figura 3).



Nº	Nombre	Descripción
4	Segmento ar...	Segmento [C, A]
4	Segmento ar...	Segmento [A, B]
4	Segmento ar...	Segmento [B, C]
4	Triángulo car...	Polígono C, A, B
4	Segmento ar...	Segmento [D, A]
4	Segmento ar...	Segmento [C, D]
4	Triángulo car...	Polígono D, A, C
4	Segmento ar...	Segmento [D, B]
4	Triángulo car...	Polígono B, A, D
4	Triángulo car...	Polígono C, B, D
5	Tetraedro a'	Simétrico de a según caraABC

- Dos caras no contiguas no pueden tener más punto común que un vértice y si lo tienen deben pertenecer ambas a un mismo ángulo poliedro.

La superficie poliédrica se llama convexa si además de las condiciones de la definición anterior se cumple que el plano de cada cara deja en un mismo semiespacio a las demás.
Llamaremos poliedro al conjunto de los puntos de la superficie poliédrica y los interiores a la misma. Los vértices y lados de las caras se llaman vértices y aristas del poliedro.
Si la superficie que determina al poliedro es convexa el poliedro se llama convexo. De lo contrario lo denominaremos poliedro cóncavo". (Mántica y Götte, 2018)

Figura 3. Bipirámide con la herramienta Simetría Especular.

Los estudiantes del otro grupo construyen un triángulo equilátero, determinan su circuncentro D y trazan una recta perpendicular al plano que contiene al triángulo por D. Luego emplean la herramienta Esfera (centro, punto) para determinar los vértices restantes del poliedro buscado (Figura 4).

Estos poliedros obtenidos son semejantes aunque involucran distintas herramientas y procedimientos de construcción.

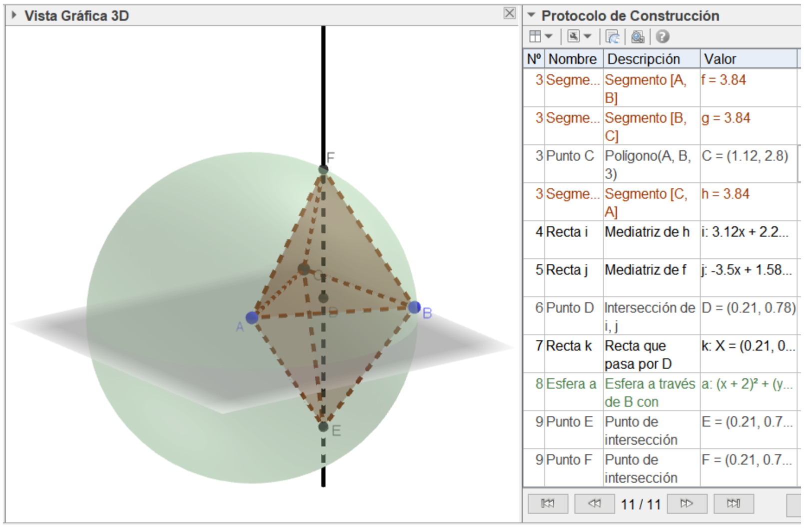


Figura 4. Bipirámide con la herramienta Esfera

Analizando las construcciones realizadas por los estudiantes en este problema puede decirse que son robustas puesto que todas las propiedades geométricas esperadas se cumplen en ambas (Healy, 2000).

Esta construcción genera en los estudiantes un elemento de sorpresa porque difiere de su supuesto en el que los poliedros, cuyas caras son triángulos equiláteros iguales, son siempre regulares. Esta desigualdad entre lo esperado por los alumnos antes de la experimentación y las construcciones realizadas con el software posibilita que reanalicen su conocimiento relacionado en este caso con el concepto de poliedro regular (Arcavi y Hadas, 2000).

4.2. Problema 2

Se presenta el análisis de lo realizado por las parejas de estudiantes durante la resolución del segundo problema, en la que utilizan Polydron y GeoGebra.

Consigna
Construir, si es posible, un tetraedro de caras iguales no regulares. Si no es posible, justifica la no existencia.

Tabla 2. Consigna del Problema 2

Los estudiantes conjeturan que sí es posible construir un tetraedro que cumpla con las condiciones solicitadas. Comienzan pensando que las caras del tetraedro pueden ser triángulos rectángulos, isósceles o escalenos y recurren al Polydron para la construcción, utilizando como caras, en primer lugar, triángulos isósceles acutángulos (Figura 5).

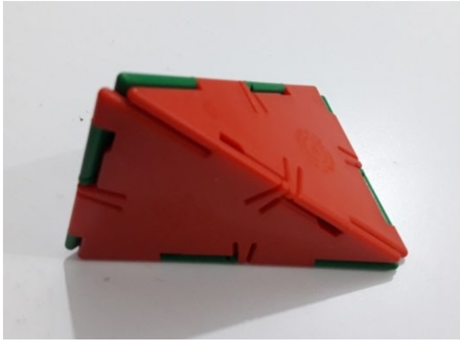


Figura 5. Tetraedro con Polydron

Luego intentan construir el tetraedro pedido empleando los triángulos isósceles rectángulos que les brinda el Polydron, pero no lo logran (Figura 6).

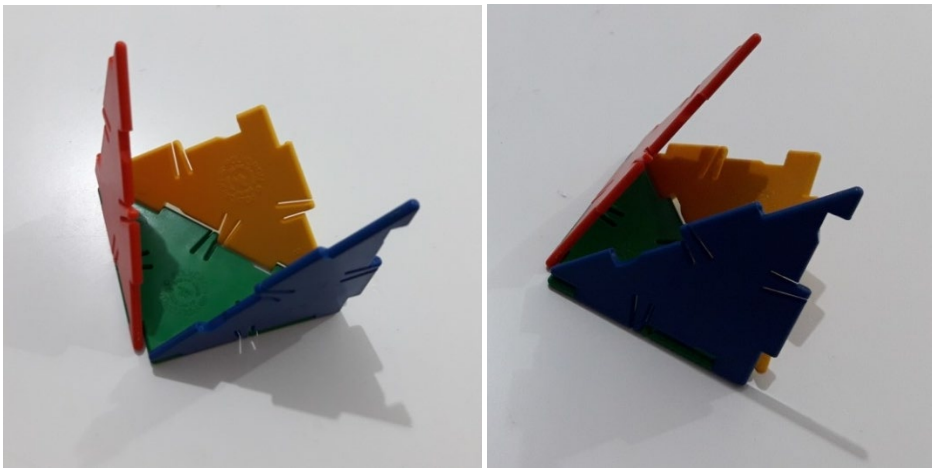


Figura 6. Ensayo de tetraedro.

Los estudiantes no analizan mientras ensayan la construcción con el Polydron si variando las longitudes de los lados de estos triángulos existe el tetraedro buscado, cuestión que podrían descartar rápidamente analizando los ángulos interiores de cada cara que concurren en un vértice (Figura 7). No obstante no disponen de otros triángulos no equiláteros para continuar explorando la posibilidad de la construcción, lo que evidencia la limitación del recurso utilizado.

Figura 7. Ensayo de desarrollo plano

Recurren al GeoGebra construyendo un triángulo isósceles y determinan esferas para asegurar la igualdad de los triángulos que forman las caras del poliedro. Consideran una circunferencia intersección de dos esferas en la que se encuentra el cuarto vértice (Figura 8).

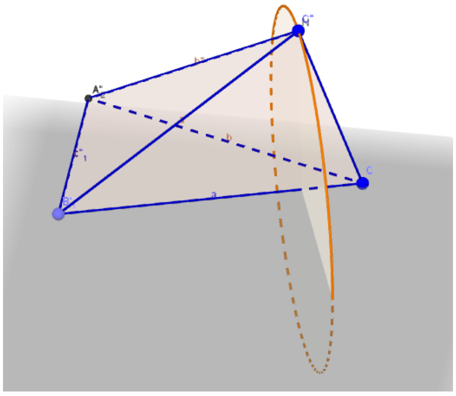


Figura 8. Tetraedro realizado con GeoGebra.

Si bien la figura presentada corresponde a un poliedro que cumple la consigna, los estudiantes se encargan de determinar el cuarto vértice de modo que esto ocurra. Si se hace uso del arrastre, se identifica que se trata de una construcción blanda (Healy, 2000). El vértice fue considerado a ojo dado que la construcción no cumple todas las propiedades geométricas esperadas y esto se comprueba al desplazar objetos libres. Los triángulos que quedan determinados en otras posiciones de los vértices del tetraedro no son congruentes, por lo tanto no cumplen lo solicitado (Figura 9).

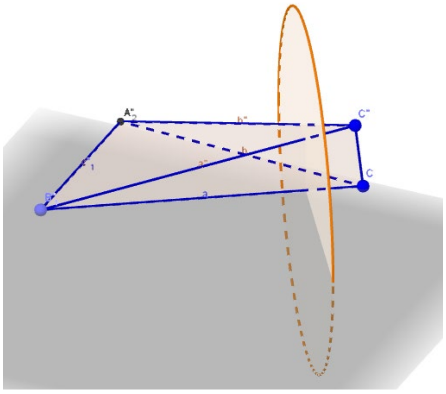


Figura 9. Tetraedro que no cumple con lo solicitado

La construcción blanda obtenida de esta manera no permite reflexionar acerca de la existencia de poliedros cuyas caras sean otros triángulos isósceles.

Los estudiantes del otro grupo abordan el problema considerando el desarrollo plano de un tetraedro cuyas caras son triángulos escalenos. Construyen un triángulo escaleno y a partir de este, otros iguales que compartan un lado con el primero. Intentan "levantar" estos últimos a partir del empleo de la herramienta Rotación Axial. Vale destacar que lo hacen considerando rotar los puntos con ángulos de 90° lo que imposibilita desplazar los triángulos para determinar si existe en este caso el cuarto vértice (Figura 10).

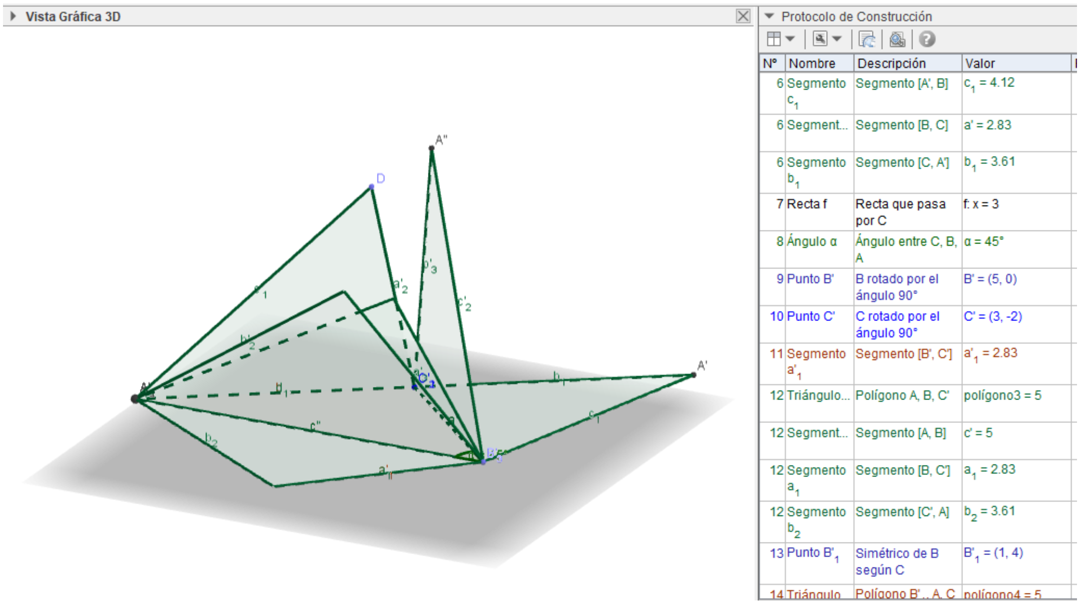


Figura 10. Figura tridimensional con la herramienta Rotación Axial

Estos estudiantes realizan un procedimiento similar al utilizado para probar la existencia de algunos poliedros regulares a partir de la construcción del desarrollo plano comenzando por una cara tratando de lograr el ángulo poliedro del sólido buscado. Vale destacar que no utilizan el arrastre para encontrar otros triángulos con esa misma construcción.

El uso del software para la elaboración de construcciones posibilita en este caso que se explore acerca de la posible existencia de los sólidos requeridos en la consigna utilizando herramientas disponibles que permiten de manera muy sencilla el empleo de propiedades geométricas. Así, la experimentación ensayo y error queda en segundo plano dando vida a los objetos matemáticos y empleando las construcciones como medio de experimentación (Villella, 2017).

Las construcciones presentadas por los estudiantes en este problema son blandas y no permiten por este motivo reflexionar sobre las condiciones posibles para la construcción del sólido solicitado. Por esta razón se decide presentar un archivo a los alumnos con una posible construcción robusta que da solución al problema y que permite visualizar que no siempre es posible encontrar el poliedro buscado (Figura 11).

El hecho de que los estudiantes puedan explorar sobre este archivo presentado revisando el protocolo de construcción, arrastrando objetos libres, entre otras acciones, permiten que el trabajo en el entorno de software no sea simplificado. Se pretende a partir de ideas complejas obtener conjeturas generales (Tall, 1989), en este caso relacionadas con las condiciones de existencia de un tetraedro de caras iguales no regulares.

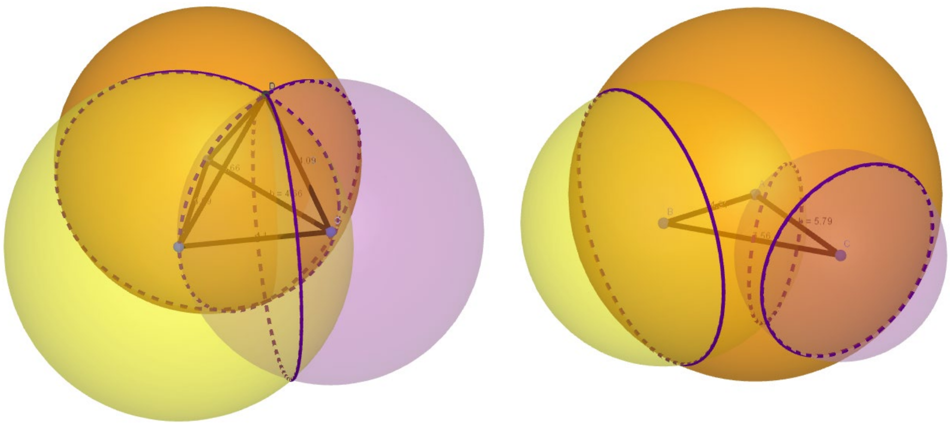


Figura 11. Construcción robusta presentada por el docente

5. Algunas reflexiones

El trabajo realizado por los estudiantes al resolver los problemas planteados permite que se reflexione en torno a algunos aspectos. Por un lado, si se consideran las relaciones que logran establecer entre los elementos de los poliedros construidos, puede decirse que determinan analogías y diferencias con los poliedros regulares, teniendo en cuenta la clase de polígonos de las caras y cuántas concurren en un vértice. Sin embargo, este análisis no es global ni exhaustivo ya que parecería que no consideran las condiciones que deben cumplirse para que el poliedro exista, y se limitan a ensayar construcciones que resultan de modificaciones de poliedros regulares. De esta manera juntan, descomponen y recomponen con la intención de generar sólidos que cumplan con lo solicitado, y estas acciones resultan interesantes en el contexto rico que ofrece el trabajo con poliedros según Guillén (2010).

Cabe destacar que la manipulación mencionada no solo se da con el Polydron sino también con el software, ambos recursos fundamentales para la resolución de los problemas. El Polydron por su parte permite que el estudiante conjeture rápidamente en algunos casos acerca de la posibilidad de existencia de los poliedros que solicita la consigna. Así, este recurso resulta útil para la elaboración de conjeturas sin aplicar necesariamente propiedades geométricas, como se da en una construcción robusta con GeoGebra. Este tipo de software posibilita una exploración más profunda y sistematizada habilitando al alumno al trabajo con situaciones complejas desde el principio y no en un contexto simplificado, lo que se opone a la tradicional forma de enseñar que según Tall (1989), conlleva grandes dificultades para los estudiantes. Las herramientas con las que cuentan los alumnos a la hora de realizar una construcción con GeoGebra les permiten en cuestión de minutos considerar propiedades geométricas y con el recurso del arrastre explorar con una multiplicidad de sólidos, lo que no sucede con el Polydron que sólo permite construcciones rígidas a partir de los polígonos disponibles.

De esta manera, los no ejemplos de poliedro regular que los alumnos ensayan con ambos recursos para la resolución de los problemas contribuyen a la formación de la imagen conceptual de poliedro regular. Así, teniendo en cuenta la influencia de las imágenes mentales que se tienen de un concepto y su definición, como sostienen Vinner y Dreyfus (1989), el trabajo analizado contribuye a que el conjunto de ejemplos determinados por la definición de poliedro regular coincida con el conjunto de ejemplos que consideran los estudiantes.

Presentarles a los estudiantes una construcción robusta es un ejemplo de una práctica planificada que pretende que experimenten con la construcción sobre los elementos teóricos involucrados (Villella, 2017). Esto posibilita la visualización, exploración y reflexión acerca de las posibilidades de construcción del poliedro pedido. De esta manera, si bien no son los estudiantes quienes realizan la construcción, pueden identificar propiedades y pasos intermedios empleados en la misma (Healy, 2000). Este tipo de propuestas les permiten apreciar las ventajas de estas construcciones empleando el software y las propiedades geométricas específicas involucradas, haciendo uso de la herramienta Distancia o longitud, revisando el Protocolo de construcción y arrastrando puntos libres, entre otras acciones posibles.

Resolver los problemas propuestos les permite a los alumnos encontrarse con situaciones inesperadas: poliedros no regulares que cumplen sólo algunas de las condiciones exigidas por la definición. La consigna en si misma se plantea para generar desconcierto (Arcavi y Hadas, 2000), y por esta razón representa una oportunidad para sembrar en el estudiante la necesidad no solo de considerar especialmente las definiciones y propiedades geométricas disponibles, sino de elaborar argumentos que validen sus conjeturas, más allá de los recursos utilizados, contribuyendo al método propio de la geometría euclídea.

Bibliografía

Arcavi, A y Hadas, N. (2000). *Computer mediated learning: an example of an approach. Revista International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*, 25 -45.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). SEIEM, Lleida.

Healy, L. (2000). *Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. In Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 1, 103-117.

Tall, D. (1989) *Concept Images, Computers, and Curriculum Change. Revista For the Learning of Mathematics,* (9),3 37- 42.

Villella, J. (2017). Revisitando la enseñanza de la geometría con ojos TIC: otro desafío para el desarrollo profesional docente. En G. Fioriti (Comp.), *Recursos tecnológicos en la enseñanza de la matemática* (pp. 143-157) Miño y Dávila Editores, Buenos Aires. Argentina.

Vinner, S y Dreyfus, T. (1989). *Images and definitions for the concept of function. Revista Journal for Research in Mathematics Education* (20), 4 356-366.

Magali Lucrecia Freyre,
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral - Argentina
magali.freyre@gmail.com

Ana María Mántica
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral - Argentina
ana.mantica@gmail.com

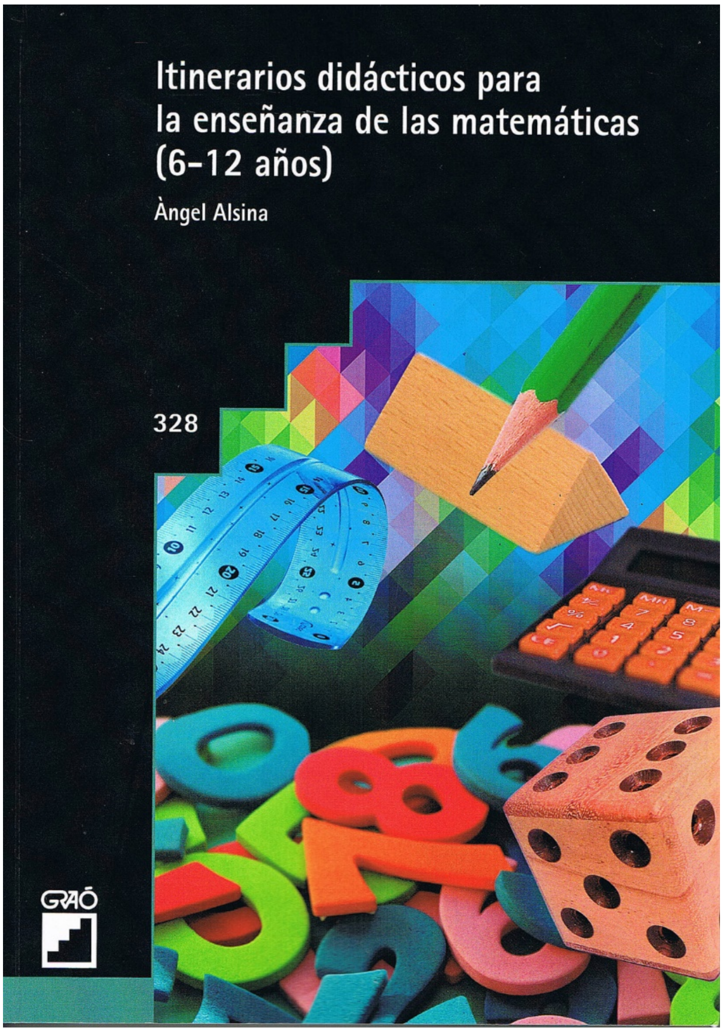
UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 55. Abril 2019
Páginas 184-186

RESEÑA: Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)

Yeni Acosta



Este libro, escrito por Ángel Alsina (Universidad de Girona, España), está dirigido a maestros en activo, futuros maestros, formadores de maestros y otros profesionales interesados en la educación matemática. El libro gira alrededor de dos grandes ejes: ¿qué matemáticas enseñar de 6 a 12 años y cómo enseñarlas?, alejándose intencionadamente de una visión tradicional de las matemáticas y su enseñanza. Para ir respondiendo a estos dos interrogantes, se organiza en tres partes:

La primera parte se conforma de dos capítulos (capítulos 1 y 2), que constituyen la fundamentación de libro. En el primer capítulo el autor argumenta de forma breve las razones que han dado lugar a la substitución paulatina de un currículo orientado a la adquisición de contenidos por un currículo que persigue la adquisición de la competencia matemática. A partir de diversos autores y organismos de prestigio (NCTM, 2000; Niss, 2002; OECD, 2004) se describe exhaustivamente en qué consiste la competencia matemática y cómo puede desarrollarse en el aula. Se muestra una variedad de contextos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en las aulas de Educación Primaria, y a la vez, se ofrecen elementos para poder analizar críticamente estos contextos y discriminar los que resultan más eficaces para poner en práctica actividades matemáticas competenciales ricas. En el capítulo 2 se presentan ideas clave para planificar y gestionar actividades matemáticas competenciales. Estas ideas, orientadas a mejorar la práctica docente del profesorado de esta etapa educativa, se focalizan en cómo trabajar la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y la representación en el aula de matemáticas.

La segunda parte (capítulos 3 a 7) se centra en los cinco bloques de contenido que se consideran en la mayoría de currículos de matemáticas de Educación Primaria: numeración y cálculo, álgebra temprana, geometría, medida y estadística y probabilidad. Cada capítulo sigue la misma estructura: en primer lugar se presentan los conocimientos matemáticos más importantes; en segundo lugar se describe una propuesta de distribución de contenidos por niveles; y en tercer lugar se presenta un itinerario didáctico para trabajar los distintos contenidos. En relación a la selección de los contenidos matemáticos importantes de cada bloque, se opta por enfatizar “algunos temas que quizás justifiquen una mayor atención, en vista de su ocurrencia frecuente en las matemáticas que los educandos utilizarán en el futuro, en sus estudios después de la secundaria o en su lugar de trabajo” (NCTM, 2015, p. 73). Para realizar la propuesta de distribución de contenidos, el autor considera 3 elementos: 1) las directrices contemporáneas tanto a nivel internacional como estatal acerca de los contenidos matemáticos que deberían aprender los alumnos desde los 6 hasta los 12 años; 2) los conocimientos experienciales de muchos maestros anónimos, que a través de sus prácticas docentes han podido constatar día a día y durante muchos años qué conocimientos de matemáticas aprenden la mayoría de alumnos de un determinado nivel, y que el autor ha ido recogiendo en múltiples actividades de formación permanente del profesorado; y 3) con el objeto de triangular los datos, el autor explica que se ha realizado también una observación sistemática a lo largo de varios años con el objeto de comprobar in situ los conocimientos matemáticos que aprenden los alumnos, poniendo

especial atención a los conocimientos que inicialmente han generado ciertas dudas sobre su posible ubicación en uno u otro nivel. Finalmente, cada capítulo se cierra con itinerarios didácticos, asumiendo que la palabra “itinerario” se refiere a una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres fases: 1) enseñanza en contextos informales: la enseñanza del contenido matemático se inicia en situaciones reales o realistas de los niños, como por ejemplo su entorno inmediato, o bien materiales manipulativos y juegos, en los que el conocimiento de la situación y las estrategias se utilizan en el contexto de la situación misma apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia; 2) enseñanza en contextos intermedios: la enseñanza del contenido prosigue en contextos que hacen de puente entre los contextos reales o realistas de la fase previa y los contextos formales de la fase posterior, como por ejemplo algunos recursos literarios (cuentos y canciones) y tecnológicos (Applets, robots educativos programables, etc.), que a través de la exploración y la reflexión conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático; 3) enseñanza en contextos formales: la enseñanza del contenido finaliza en contextos gráficos, como por ejemplo el lápiz y el papel, en los que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales. Desde este punto de vista, se presenta una amplísima variedad de recursos y estrategias didácticas, ilustrados con más de 300 imágenes a todo color, que van desde los contextos más concretos hasta los más abstractos para respetar de esta forma el proceso natural de aprendizaje de las matemáticas de los niños y niñas de 6 a 12 años.
La tercera parte (capítulo 8) presenta orientaciones para evaluar la competencia matemática: en concreto, se presenta un decálogo de ideas clave sobre la evaluación competencial de las matemáticas en el que se describen diversas estrategias didácticas y se aportan recursos específicos para evaluar el grado de riqueza competencial de las actividades matemáticas, la práctica del profesorado y el nivel de adquisición de los alumnos.

Editorial Graó, Barcelona (España).
https://www.grao.com/es/producto/itinerarios-didacticos-para-la-ensenanza-de-las-matematicas-ge328

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 55. Abril 2019
Páginas 187-194

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Porcentajes.
Reflexiones en un marco de creación de problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Una gasolinera vende gasolina por litros o por fracciones de litro, a $ 2.00 el litro, pero por las vacaciones escolares ha establecido una promoción del 15% de descuento.
Usa un sistema de coordenadas para representar los precios descontados que correspondan a las diversas ventas de gasolina.

Comentaremos diversas reflexiones didáctico-matemáticas originadas en la solución de un problema que no hace mención explícita al porcentaje, en un taller sobre creación de problemas, con profesores de secundaria en servicio. Una pista importante de reflexión, surge al constatar que la idea que predominó en torno a porcentajes, fue la parte operativa. No se le prestó atención, ni didáctica ni matemáticamente, a su relación estrecha con la proporcionalidad directa y en consecuencia, no se relacionó porcentaje con funciones lineales de una variable real.

El problema con el que comenzamos este artículo, fue creado por uno de los participantes, en el tramo final del taller.

El problema inicial en el taller, fue propuesto en el marco de la estrategia EPP (Episodio, Problema-pre, Problema-pos), expuesta ampliamente en Malaspina (2017), que venimos usándola en diversos talleres de formación de profesores, y para trabajos de tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas. El episodio presentado fue el siguiente:

La idea en la estrategia EPP es que, ante el episodio dado, los participantes – usando fichas preparadas para actividades individuales y grupales – desarrollen dos fases de trabajo. En la primera fase: a) resuelvan el problema; b) opinen sobre lo que dijeron los alumnos; c) creen y resuelvan un problema que ayude a entender y resolver el problema del episodio (a estos problemas los llamamos *problemas-pre*, respecto al problema del episodio); d) identifiquen en el problema sus cuatro elementos básicos: información, requerimiento, contexto y entorno matemático; e) expliciten razones por las cuales consideran, en cada grupo, que el problema creado es un problema-pre respecto al problema del episodio; f) intercambien los enunciados de los problemas-pre creados, para que sean resueltos por otro grupo; g) algunos grupos socialicen con todos los participantes su solución y comentarios del problema que resolvieron; y h) el conductor del taller, con base en sus observaciones a las actividades de los participantes durante el taller y a las exposiciones hechas de las soluciones, haga las aclaraciones didácticas y matemáticas que considere pertinentes, interactuando con los participantes.

En la segunda fase: i) creen y resuelvan un problema que sea más retador que el problema del episodio (a estos problemas los llamamos *problemas-pos*, en relación al problema del episodio); ii) identifiquen los cuatro elementos básicos del problema creado; iii) expliciten razones por las cuales consideran, en cada grupo, que el problema creado es un problema-pos respecto al problema del episodio. Las siguientes actividades son similares a las descritas para la primera fase, en los ítems (f), (g) y (h).

El episodio propuesto fue ideado con el propósito de hacer emerger la idea de proporcionalidad o de porcentaje y en el taller cumplió tal objetivo, en lo que se refiere a porcentajes, aunque hubo algunos pocos casos individuales en los que la respuesta a la pregunta fue “Jorge recibió el mejor descuento, porque le descontaron $10 soles y a María le descontaron solo $ 8”. Esta afirmación fue aclarada en los trabajos grupales, en los que se observó que, aunque cuantitativamente 10 es mayor que 8, proporcionalmente el descuento de $10 es respecto a un precio de $ 60, mientras que $8 es un descuento respecto a un

El profesor David, en una de sus clases de matemáticas, propuso el siguiente problema a sus alumnos del sexto grado de educación primaria:

> *En la feria del libro se hacen descuentos. María compró por $ 32 un libro cuyo precio sin descuento es $ 40 y Jorge compró por $ 50 un diccionario cuyo precio sin descuento es $ 60. ¿Cuál de ellos recibió el mejor descuento?*

Luego de unos minutos, algunos de los alumnos del profesor David dijeron:

- Alex: *Es obvio, Jorge*
- Marco: *A mí me parece que María*
- Julia: *Aunque no parece, seguramente la respuesta es María.*

precio de $ 40. Así, las respuestas grupales fueron, todas, que el mejor descuento lo recibió María, porque $ 8 es el 20 % de $ 40 (María recibió un descuento del 20%) y \$ 10 es el 16.67% de \$ 60 (Jorge recibió un descuento del 16.67%).

Cabe mencionar que en ningún grupo se resolvió el problema usando solo proporcionalidad; es decir, observando que

$$\frac{8}{40} > \frac{10}{60};$$

Lo cual equivale a afirmar que $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$.

Algo más, en casi todos los grupos se usó la "regla de tres simple" para obtener los porcentajes. En principio, no es malo usar esta regla, pero es pertinente hacer notar que no es conveniente tenerla como la única forma de resolver problemas de porcentaje; más aún, cuando muchas veces se aplica esta regla de manera mecánica y sin examinar detenidamente el razonamiento que hay en ella, en el marco del pensamiento proporcional.

Al asumir la actividad de crear problemas que faciliten la comprensión y solución del problema del episodio (problemas-pre, respecto a tal problema), se observó la tendencia en los participantes a crear problemas modificando ligeramente el enunciado del problema dado, usando de manera explícita los porcentajes, para tener un problema cuya solución se perciba más directamente, pero no un problema que realmente ayude a entender y usar un enfoque de proporcionalidad para resolver el problema del episodio. Las razones dadas para la creación de tal problema son su menor complejidad y requerir cálculos más directos. No explicitan la importancia de estimular la comprensión de la proporcionalidad y así facilitar la comprensión y solución del problema del episodio. En la Figura 1, mostramos un ejemplo de estos problemas:

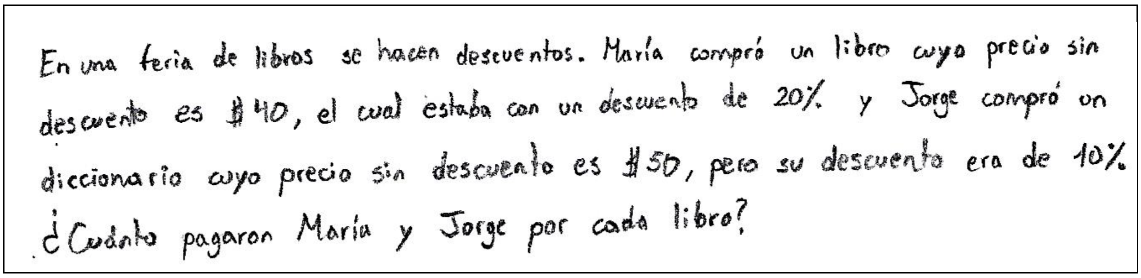

En una feria de libros se hacen descuentos. María compró un libro cuyo precio sin descuento es \$40, el cual estaba con un descuento de 20% y Jorge compró un diccionario cuyo precio sin descuento es \$50, pero su descuento era de 10% ¿Cuánto pagaron María y Jorge por cada libro?

Figura 1. Problema creado por el Grupo 5, intentando crear un problema-pre respecto al problema del episodio

En algunos grupos, el problema creado – a pesar de que su propósito era contribuir a la comprensión y solución del problema del episodio – fue de mayor complejidad que el problema del episodio, con un requerimiento que acentúa aspectos operativos de porcentajes. Un ejemplo es el que se muestra en la Figura 2.

En una feria del libro, se hace descuentos del 20% para libros y del 16,67% para los diccionarios. María compró un libro por \$32 y Jorge un diccionario por \$50. ¿Cuál fue el precio sin descuento del libro y diccionario adquiridos por María y Jorge?

Figura 2. Problema creado por el Grupo 1, intentando crear un problema-pre respecto al problema del episodio.

Al asumir la actividad de crear problemas más retadores que el problema del episodio (problemas-pos, respecto a tal problema), se observó que predomina la idea que un problema es más retador si requiere un mayor número de operaciones para resolverlo. Una muestra de esto es el problema que se muestra en la Figura 3.

En una librería se ofertó un paquete de libros en \$80, el paquete consta de 3 libros, de los cuales en otra tienda, el libro, 1, 2, 3 tienene un descuento de 5%, 7%, 10% respectivamente, si cada libro cuesta \$25, \$31 y \$39 sin descuento ¿Donde es mas conveniente comprar?

Figura 3: Problema creado por el Grupo 13, intentando crear un problema-pos respecto al problema del episodio

Cabe destacar que hubo algunos problemas cuyo requerimiento lleva a reflexionar sobre el significado del porcentaje, más allá de los aspectos operativos, como el que se muestra en la Figura 4

En una tienda de celulares, por la compra de un celular Huawei, se cancela, luego de aplicar un 10% de descuento, \$270, y por la compra de un iphone, luego de aplicar un 12% de descuento \$528. ¿Cuál es el porcentaje de descuento total por la compra de los dos celulares?

Figura 4. Problema-pos respecto al problema del episodio, creado por el Grupo 14

Luego de esta fase de trabajo grupal se hizo una reflexión más amplia sobre el significado del porcentaje. Se enfatizó su vinculación con la proporcionalidad directa, teniendo en cuenta tanto los problemas creados, como el hecho que solo uno de los 14 grupos de trabajo, consideró la proporcionalidad como parte del entorno matemático del problema que crearon.

Muy pocos participantes usaron ecuaciones lineales para resolver los problemas creados sobre porcentajes. Esta sería una de las razones por las que llamó la atención de los participantes que se muestre la obtención del 25% de cualquier número real no negativo x usando la función lineal f dada por

$$f(x) = 0{,}25x.$$

Más aún, que – como se muestra en las figuras 5 y 6 – con el gráfico de tal función, para $x \geq 0$, se puede visualizar soluciones de problemas básicos sobre porcentaje, como

Problema 1: Hallar el 25% de 30.

Problema 2: ¿El 25% de qué número es 11?

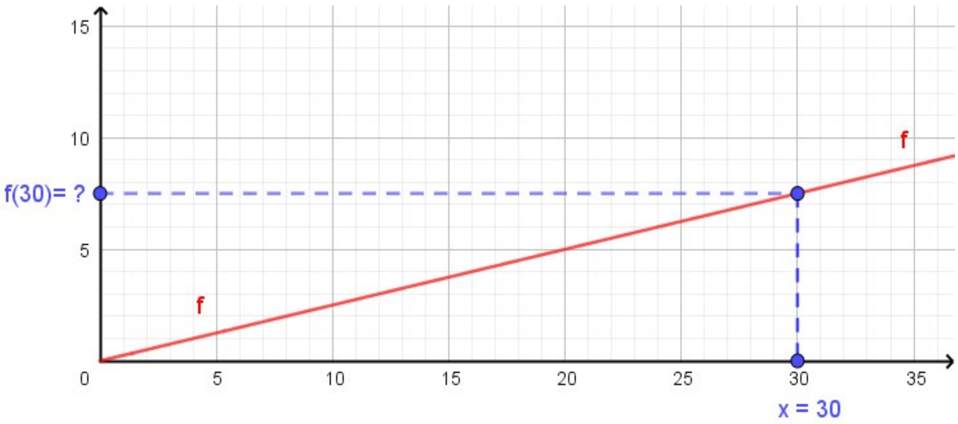


Figura 5. Visualización de la solución del Problema 1

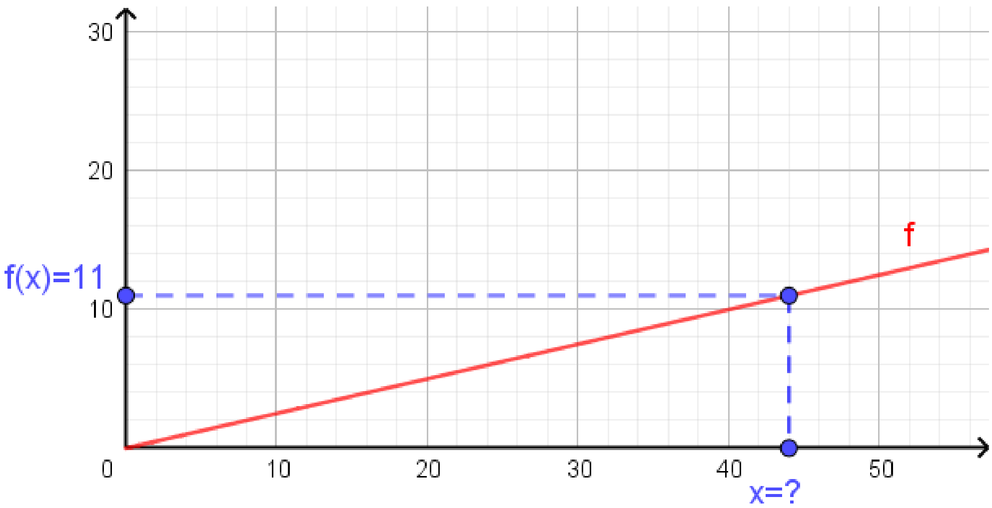


Figura 6. Visualización de la solución del Problema 2

Motivado por este enfoque de los porcentajes, uno de los participantes propuso el problema con el que iniciamos este artículo. En la Figura 7, mostramos un gráfico que responde al requerimiento del problema. El precio descontado es el 85% del precio original, por tener el 15% de descuento. Como el precio sin descuento del litro de gasolina es $ 2, el precio descontado de un litro de gasolina, en dólares, es 0.85x2; o sea $ 1.70. Así, se genera la función lineal g dada por

$$g(x) = 1.7x,$$

donde x es la cantidad de litros de gasolina y $g(x)$ el precio de esos x litros, con el 15% de descuento, sabiendo que el litro sin descuento cuesta $ 2.

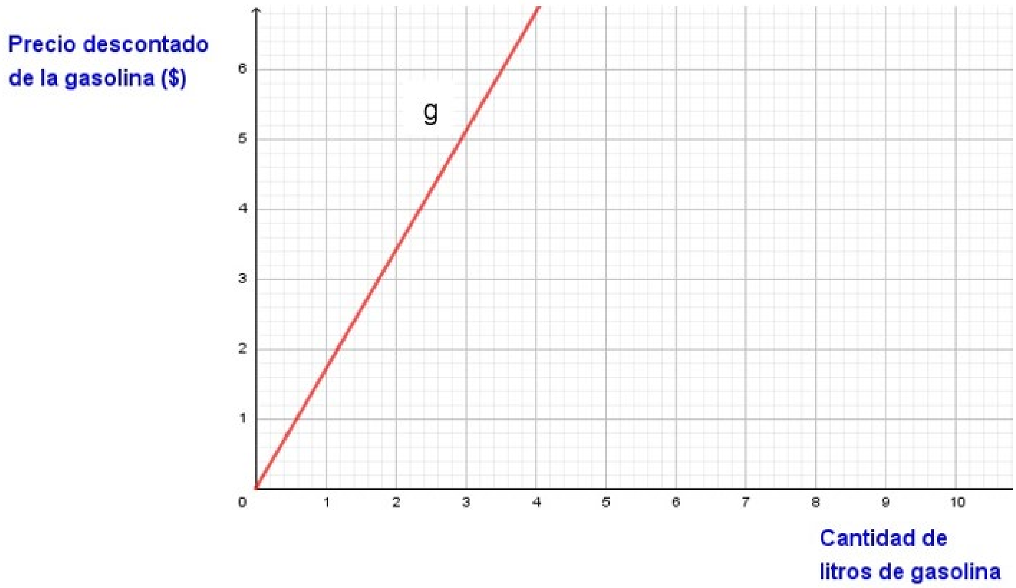


Figura 7: Gráfico correspondiente al problema inicial

Por el contexto del problema, solo debe considerarse el gráfico para $x \geq 0$. También cabe aclarar que la función lineal es un modelo matemático completamente pertinente en este contexto extra matemático, aunque, en rigor, el gráfico no sea una función continua, por no ser posible comprar, por ejemplo, $\sqrt{2}$ litros de gasolina.

Comentarios finales:

1. La experiencia didáctica nos muestra lo importante que es desarrollar las competencias didáctico-matemáticas de los profesores y futuros profesores. Ciertamente, se requiere dedicar tiempo para estimular reflexiones sobre los objetos matemáticos que van a integrar los contenidos a desarrollar con los estudiantes. Reflexiones que lleven a profundizar la comprensión de los conceptos, a establecer conexiones y a diseñar actividades que faciliten el aprendizaje de los estudiantes. La

creación de problemas es un gran medio, tanto para suscitar estas reflexiones como para evidenciar las competencias didáctico-matemáticas que tienen los profesores en servicio.

2. Específicamente, en relación a los porcentajes, es muy importante destacar, desde las clases introductorias, su vinculación estrecha con la proporcionalidad directa. Así, por ejemplo, aunque no se conozcan las cantidades en unidades específicas, si se prepara un refresco usando la cantidad de agua que contiene una determinada jarra y dos copas de esencia del jugo de una fruta, al preparar mayor cantidad de tal refresco, usando tres de esas jarras de agua y seis de esas copas, con esencia de jugo de fruta, se habrá mantenido el porcentaje de esencia del jugo de fruta, respecto a la cantidad de agua.
3. Como la proporcionalidad directa se expresa gráficamente mediante las funciones lineales, usando estas se puede ilustrar y resolver problemas sobre porcentajes, como hemos ilustrado en las figuras 5, 6 y 7. Es una oportunidad para mostrar las conexiones intra matemáticas entre los objetos matemáticos porcentaje, proporcionalidad, ecuaciones lineales y función lineal. La vinculación del porcentaje con la función lineal permite ilustrar el uso del porcentaje como operador.
4. El análisis de los problemas creados, sobre todo de los problemas-pre, respecto al problema dado en el episodio, puede enriquecerse usando los criterios de idoneidad didáctica; especialmente la idoneidad epistémica, cognitiva, mediacional, emocional y ecológica (Hummes, Font, & Breda, 2019).
5. En relación a la estrategia EPP para talleres de creación de problemas, es importante que antes de crear un problema pre o pos, respecto a un determinado problema considerado en un episodio, se socialicen las soluciones de tal problema y que el orientador del taller contribuya a que se adquiera mayor claridad sobre los procesos involucrados en la obtención de su requerimiento, como medio para desarrollar el pensamiento matemático, más allá de las operaciones a realizar. Esto ayudará a mejorar la calidad de los problemas que se creen en el taller, sobre todo de los problemas-pre, respecto al problema del episodio.

Referencias:

Hummes, V., Font, V., & Breda, A. (2019). Uso Combinado del Estudio de Clases y la Idoneidad Didáctica para el Desarrollo de la Reflexión sobre la Propia Práctica en la Formación de Profesores de Matemáticas. *Acta Scientiae*, *21,* 1, 64-82.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.*), Actas del Segundo Congreso International Virtual* *sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf