REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XIV – Número 53 – Agosto 2018

http://www.revistaunion.org

ÍNDICE

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 01-189

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene ahora una periodicidad quadrimestral, de modo que se publican três números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database***, está incluida en el catálogo ***Latindex, CAPES*** y otros.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 02-07

EDITORIAL

Estimados colegas y amigos:

Llegamos al número 53 de la revista Unión. Como siempre hay diferentes investigaciones y distintos temas de interés para la educación matemática en sus diferentes niveles. La calidad de los artículos ha sido mantenida por la evaluación rigurosa de los revisores. Para que la producción dignifique el área de la educación matemática iberoamericana contamos siempre con la colaboración de todos, tanto autores como revisores.

En este número en la sesión firma invitada aparece un artículo de Pablo Flores Martinez, profesor del Departamento de Didáctica de la Universidad de Granada. En el artículo: "**¿Por qué multiplicar en cruz? Formación inicial de profesores de Primaria, en el área de Matemáticas"** el autor argumenta que el algoritmo de la división de fracciones es de los más sencillos de aprender y aplicar, pero los problemas que lo requieren son difíciles de enunciar y resolver. Relata el proceso formativo que está llevando a cabo desde el Departamento de Didáctica de su Universidad dentro del plan de formación y describe las dimensiones sobre las que se apoya el curso, el papel profesional del docente, el análisis didáctico y el conocimiento matemático para la enseñanza.

Este volumen lo componen seis artículos, una propuesta de aula, un artículo de la sección dedicada a historia social de la Educación Matemática en Iberoamérica, una reseña de un libro y la habitual sección de problemas.

"Conocimiento matemático de profesionistas de Educación Especial en su formación inicial", es el primer artículo, escrito porJ. Marcos López-Mojica, Lilia P. Aké y Karina Cruz. Los autores analizan los elementos teóricos que permitieron caracterizar el conocimiento matemático de los futuros licenciados en Educación Especial sobre fracciones: el pensamiento matemático, conocimiento de las fracciones, formación del docente y la profesionalización del docente en esta área. Jean Lázaro da Encarnação Coutinho y Jonei Cerqueira Barbosa presentan un estudio en el que se modeló una matemática para la enseñanza del concepto de combinación simple, estructurado metodológicamente en el estudio del concepto, a través de una revisión sistemática de la literatura y del estudio colectivo de los maestros que trabajan en la educación primaria, secundaria y/o superior, con experiencia en la enseñanza del análisis combinatorio. El artículo lleva por título "**Modelo de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Combinação Simples**". El artículo tercero de título **"Esquemas mobilizados por crianças da Educação Infantil em uma situaçãoe nvolvendo chance"** es de los autores Irlene Silva de Almeida, Verônica Yumi Kataoka, Aida Carvalho Vita y Eurivalda R. dos S. Santana. En este artículo se pretende analizar los esquemas movilizados por niños de la Educación Infantil de una escuela privada del sur de Bahía, en la resolución de una situación que involucra el campo conceptual de cambio. Gustavo R. Cañadas de la Fuente, Elena Molina Portillo, José Miguel Contreras y Rocío Álvarez Arroyo son los autores del artículo **"Estudiantes de psicología trabajando con las medidas de posición central".** En este trabajo describen un estudio sobre respuestas en dos ítems sobre estos estadísticos en un conjunto de datos representados mediante un gráfico estadístico, en estudiantes de primer curso de psicología. Y a continuación puede encontrar el artículo de Francisco Regis Vieira Alves y Rannyell y Rodrigues de Oliveira, **"Uma proposta de situação didática no contexto de investigação histórica das relações recorrentes bidimensionais para os números complexos de Fibonacci"** en el que presentan una propuesta en un enfoque de investigación histórica, para un contexto de enseñanza superior, para profesores en formación inicial, algunas de las relaciones y fórmulas abordadas que pueden conducir a futuras investigaciones derivadas de la generalización del modelo de recurrencia de Fibonacci. Por último, aparece el artículo **"Desarrollo histórico e implicancias en el aprendizaje del infinito: estudiar la evolución de su tratamiento para desarrollar estrategias que favorezcan su comprensión"** de los autores Mario Garelik y Fabiana Montenegro en el que argumentan como la convivencia del infinito como adjetivo o proceso y como sustantivo ha sido tan relevante como problemático a lo largo de la historia de la humanidad. Este artículo se inicia con una reseña de las dos acepciones de la noción de infinito: el potencial y el actual. Como propuesta de aula Carlos de Castro Hernández y Mónica Ramírez García presentan **"El papel de las imágenes en el proyecto "¡A contar!" para el aprendizaje de matemáticas importantes en la Educación Infantil"**. Estos dos autores explican la relación que se establece entre las imágenes de los cuentos, sus características matemáticas, las tareas que proponen a los niños de 3 años y el conocimiento matemático que desarrollan los niños en este contexto.

En la sesión de historia social, Vanesa Pacheco Moros, Oswaldo Jesús Martínez Padrón y Fredy Enrique González escriben un artículo titulado “**Análisis de los Trabajos de Grado de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Carabobo: 2005-2014”** en el que realizan un análisis bibliométrico de los Trabajos de Grado de la Maestría en Educación Matemática (TgMEM) aprobados en la Universidad de Carabobo, durante el período 2005-2014. En este número también aparece la reseña elaborada por Israel García Alonso del libro **“Aprendiendo Matemáticas con los Grandes Maestros”** del autor Vicente Meavilla, que presenta diversos autores con sus pensamientos que dieron un impulso a la matemática. El problema de este número 53 es “**Situaciones, problemas y “problemas inversos””** es la propuesta de nuestro colaborador habitual, el profesor **Uldarico Malaspina Jurado** de la Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM, que surgió en un taller con profesores de matemática en ejercicio, sobre creación de problemas. Estamos convencidas que este número contiene artículos para todos los gustos y proporciona reflexiones sobre educación matemática.

Agradecemos a los autores y revisores, e invitamos a todos a una buena lectura.

EDITORAS

Celina Abar e Sonia Igliori

EDITORIAL

Estimados colegas e amigos*:*

Chegamos ao número 53 da Revista UNION. Como sempre há diversas direções de pesquisa e com vários temas de interesse do ensino de matemática em seus diferentes níveis. A qualidade dos artigos tem sido mantida pela avaliação rigorosa de nossos pareceristas. Para que a produção dignifique a área da Educação Matemática Iberoamericana contamos sempre com a colaboração de todos autores e revisores.

Nesse número na sessão Firma Invitada temos o artigo do pesquisador Pablo Flores Martinez, professor do Departamento de Didática da Universidade de Granada. No artigo: **“Por quê multiplicar em cruz? Formação inicial de professores do ensino fundamental na área de Matemática”** o autor argumenta que o algoritmo da divisão de frações é um dos mais simples de aprender e aplicar, mas os problemas que o envolvem são difíceis de enunciar e resolver. Descreve o processo de formação desenvolvido no Departamento de Didática da Matemática e as dimensões em que o curso se apoia, as atribuições profissionais do professor, a análise didática e o conhecimento matemático para ensinar.

No corpo do volume encontram-se seis artigos, uma propostas de aula, um artigo da seção dedicada à História Social de la Educación Matemática en Iberoamérica, uma resenha de livro.e a sessão de Problemas.

“Conocimiento matemático de profesionistas de Educación Especial en su formación inicial”, o primeiro artigo é de autoria de J. Marcos López-Mojica, Lilia P. Aké e Karina Cruz. Nele os autores analisam os elementos teóricos que permitem caracterizar o conhecimento matemático dos futuros licenciados em Educação Especial sobre o pensamento matemático, o conhecimento de frações, formação de professores e profissionalização dos profesores. Jean Lázaro da Encarnação Coutinho e Jonei Cerqueira Barbosa apresentam um estudo no qual modelam uma Matemática para o Ensino do conceito de combinação simples, estruturado metodologicamente no Estudo do Conceito a partir de uma Revisão Sistemática da literatura e um estudo coletivo com professores atuantes nos níveis fundamental, médio e/ou superior com experiência no ensino de Análise Combinatória. Esse artigo é intitulado: “**Modelo de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Combinação Simples**”. O terceiro artigo de título **“Esquemas mobilizados por crianças da Educação Infantil em uma situação envolvendo chance”** tem autoría de Irlene Silva de Almeida, Verônica Yumi Kataoka, Aida Carvalho Vita e Eurivalda R. dos S. Santana. Esse artigo apresenta uma análise sobre os esquemas mobilizados por crianças da Educação Infantil de uma escola privada do sul da Bahia, na resolução de uma situação envolvendo o campo conceitual de chance. Gustavo R. Cañadas de la Fuente, Elena Molina Portillo, José Miguel Contreras e Rocío Álvarez Arroyo são os autores do artigo **"Estudiantes de psicología trabajando con las medidas de posición central"** no qual descrevem um estudo sobre duas respostas de itens em medidas de posíção central em um conjunto de dados representado por um gráfico estatístico, em alunos do primeiro curso de psicologia. E no que segue podem encontrar o artigo de Francisco Regis Vieira Alves e Rannyelly Rodrigues de Oliveira **"Uma proposta de situação didática no contexto de investigação histórica das relações recorrentes bidimensionais para os números complexos de Fibonacci"** no qual apresentam uma proposta, numa abordagem de investigação histórica e um contexto de ensino superior, para professores em formação inicial, relações recorrentes bidimensionais definidas a partir dos valores da sequência de Fibonacci. Por último, está o artigo **"Desarrollo histórico e implicancias en el aprendizaje del infinito: estudiar la evolución de su tratamiento para desarrollar estrategias que favorezcan su comprensión".** escrito por Mario Garelik e Fabiana Montenegro no qual argumentam como o convívio do infinito como *adjetivo* ou *processo* e como *substantivo* tem sido tanto relevante como problemático ao longo da história da humanidade iniciando o artigo com uma resenha das duas acepções da noção de infinito: o potencial e o atual. Como proposta de aula Carlos de Castro Hernández e Mónica Ramírez García apresentam a temática **"El papel de las imágenes en el proyecto "¡A contar!" para el aprendizaje de matemáticas importantes en la educación infantil"**. Esses dois autores explica**m** a relação estabelecida entre as imagens dos contos, as suas características matemáticas, os problemas propostos a crianças de 3 anos e o conhecimento matemático que as crianças desenvolvem neste contexto. Na sessão de História Vanesa Pacheco Moros, Oswaldo Jesús Martínez Padrón e Fredy Enrique González escrevem o artigo "**Análisis de los Trabajos de Grado de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Carabobo: 2005-2014"** no qual realizam uma análise bibliométrica do Mestrado em Educação Matemática (TgMEM) aprovado na Universidade de Carabobo, no período de 2005-2014. Pode-se ainda tomar conhecimento da resenha elaborada por Israel García Alonso do livro **"Aprendiendo Matemáticas con los Grandes Maestros"** do autor

Vicente Meavilla no qual apresenta diferentes autores que com os respectivos pensamentos deram um impulso decisivo para a Matemática. O problema do número 53 **Situaciones, problemas y “problemas inversos”** é proposto por nosso colaborador habitual, o professor **Uldarico Malaspina Jurado** da Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM, e foi inspirado em uma oficina com professores de Matemática em exercício sobre a criação de problemas. Esse número certamente tem assunto para todos os gostos e possibilita reflexões sobre a educação matemática. Agradecemos aos autores e aos revisores e convidamos a todos para uma boa leitura!

EDITORAS

Celina Abar e Sonia Igliori

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 08

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

FIRMA INVITADA

Pablo Flores Martínez

Doctor en Didáctica de la Matemática y Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada, España, licenciado en Ciencias de la Educación por la UNED. Intereses investigadores principales, caracterizar conocimiento y la labor profesional del profesor de matemáticas y profundizar sobre recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas, especialmente los recursos evocadores, como el humor y los materiales manipulativos. Experiencia profesional como profesor de matemáticas de secundaria, desde 1990 profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática, en la Faculta de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, España, miembro del grupo de investigación Didáctica de la Matemática, Pensamiento Numérico.

direcciones: pflores@ugr.es

http://www.ugr.es/~pflores/

https://fqm193.ugr.es/

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 09-29

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

¿Por qué multiplicar en cruz? Formación inicial de profesores de primaria en el área de Matemáticas[1]

Why multiply in cross? Initial training of primary teachers in the Mathematics area

Pablo Flores Martínez

Resumen	El algoritmo de la división de fracciones es de los más sencillos de aprender y aplicar, pero los problemas que lo requieren son difíciles de enunciar y resolver. Justificar este algoritmo requiere comprender los problemas de fraccionamiento, de fracción de fracción, y las operaciones inversas. Un profesor de matemáticas que enseñe la división de fracciones tiene que manejar con soltura estos conceptos para que sus alumnos la aprendan de manera significativa y funcional. En la Universidad de Granada, España, llevamos a cabo la formación inicial de profesores de primaria, en el área de Matemáticas, teniendo como uno de los objetivos que los estudiantes para profesor comprendan los contenidos matemáticos del nivel educativo que impartirán, entre ellos la división de fracciones, y puedan diseñar buenas unidades didácticas para lograr su aprendizaje. En este trabalho se describe el proceso formativo que estamos llevando a cabo desde el Departamento de Didáctica de la Matemática dentro del plan de formación. Para ello describimos las dimensiones sobre las que se aposenta el curso, el papel *profesional del docente*, el *análisis didáctico* y el *conocimiento matemático para la enseñanza*. **Palabras clave**: Profesores de Matemáticas, Formación inicial, Plan de formación
Abstract	The fraction division algorithm is one of the simplest to learn and apply, but the problems in wich you can use it are difficult to formulate and solve. Justifying this algorithm requires

[1] Trabajo realizado en el Proyecto EDU2012-33030, Proceso de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación, del Ministerio de Economía y competitividad, España.

	understanding the problems of fractionation, fraction fraction, and inverse operations. A math teacher who teaches the division of fractions has to handle these concepts with ease so that his students learn it in a meaningful and functional way. At the University of Granada, Spain, we carry out the initial training of Primary School teachers, in Mathematics area, having as one of the aims that students for teacher understand the mathematical contents of the educational level that they will teach, among them the division of fractions, and can design good didactic units to achieve their learning. This paper describes the training process that we are carrying out from the Department of Mathematics Didactics within the training plan. We describe the dimensions on which this course takes placed, the professional role of the teacher, the didactic analysis and the mathematical knowledge for teaching. **Key words**: Teachers of Mathematics, Initial training, Training plan
Resumo	O algoritmo da divisão de frações é um dos mais simples de aprender e aplicar, mas os problemas que o envolvem são difíceis de enunciar e resolver. Justificar este algoritmo implica a compreensão dos problemas de fracionamento, de fração de uma fração e as operações inversas. Um professor de matemática que ensina a divisão de frações tem que lidar, com desenvoltura, com estes conceitos para que os seus alunos a aprendam de forma significativa e funcional. Na Universidade de Granada, em Espanha, realizamos formação inicial de professores do ensino fundamental, na área de Matemática, tendo como um dos objetivos que os futuros professores compreendam os conteúdos matemáticos do nível de escolaridade em que irão ministrar, de entre eles a divisão. de frações, e possam construir unidades didáticas eficazes para alcançar a sua aprendizagem. Neste trabalho, descreve-se o processo de formação que estamos a desenvolver no Departamento de Didática da Matemática, enquadrado no plano de formação. Para isso, descrevemos as dimensões em que o curso se apoia, as atribuições profissionais do professor, a análise didática e o conhecimento matemático para ensinar. **Palavras chave:** Professores de Matemática, Treinamento inicial, Plano de treinamento

Introducción

El algoritmo clásico de la división de fracciones consiste en "multiplicar en cruz", numerador del dividendo por denominador del divisor y denominador del dividendo por el numerador del divisor. Hay incluso muchas reglas mnemotécnicas que facilitan su recuerdo. No requiere preparar las fracciones antes de dividirlas, y el resultado es directamente la fracción cociente. Esto hace que este procedimiento sea muy simple y fácil de aprender. Pero ¿se puede identificar dividir fracciones con realizar el algoritmo? ¿No sería más formativo saber identificar qué problemas requieren dividir fracciones, qué significa el resultado, a qué unidad se refiere, etc.?

Como veremos, los problemas que requieren dividir números racionales resultan complejos, pues rompen la identificación tradicional de la división con el reparto. Por tanto, resultan difíciles de enunciar, y por supuesto de resolver.

Para poder enseñar la división de fracciones de una manera fundamentada, el profesor de matemáticas tiene que comprender este algoritmo, lo que requiere profundizar en el significado de fracción y los tipos de problemas multiplicativos de números racionales.

En esta conferencia describimos el plan formativo que estamos llevando a cabo en la Universidad de Granada, España, en la formación inicial de profesores de primaria, en el área de Matemáticas, en el que arrancamos de considerar que los estudiantes para profesor tienen que comprender los contenidos matemáticos de primaria, entre ellos la división de fracciones, para diseñar su enseñanza de estos contenidos. Utilizamos para esta descripción dimensiones habituales en la línea de investigación sobre formación de profesores, , el papel *profesional del docente* y el *conocimiento matemático para la enseñanza*, pero también una herramienta que nos permite dar una intención funcional a la formación, el análisis didáctico.

El plan de formación pretende formar docentes de matemáticas que sean profesionales, por lo que analizamos sus funciones, prestando especial interés al diseño e implementación de unidades didácticas. La preparación sistemática del diseño e implementación se afrontan desde el *análisis didáctico* de los contenidos matemáticos, compuesto del análisis del *contenido*, *cognitivo*, de *instrucción* y de *actuación*. El primero explora el significado del contenido, o sea, conceptos, formas de representación y fenómenos relacionados con él. El segundo examina las oportunidades y limitaciones de aprendizaje. El análisis de instrucción profundiza sobre tareas y secuencias de enseñanza. Cada uno de estos análisis corresponde con uno de los cursos del proceso formativo. Los cursos afrontan el *conocimiento profesional del profesor de matemáticas*, centrándose en el conocimiento matemático para la enseñanza. El análisis de contenido exige y ayuda a que los estudiantes desarrollen conocimiento común y especializado de cada contenido matemático, mientras que el análisis cognitivo y de instrucción requieren desarrollar conocimiento matemático de la enseñanza y el aprendizaje, así como conocimiento curricular. Realizar el análisis didáctico de la división de fracciones prepara al docente para diseñar e implementar la enseñanza para que los alumnos la aprendan de manera significativa.

El escrito arranca de mostrar la complejidad de la división de fracciones, para expresar la finalidad del proceso formativo, lograr que los estudiantes comprendan los contenidos matemáticos que tienen que enseñar (la división de fracciones, en este caso, como ejemplo), para lo que proponemos que los estudiantes realicen análisis didáctico de dichos contenidos. Examinar las partes del análisis didáctico nos permite describir las asignaturas que constituyen el plan de formación.

1. Complejidad de la división de fracciones

La operación $1:\frac{2}{5}$, acepta, al menos, dos formas de obtener el resultado:

a) $$\begin{array}{l|l} 1=\frac{5}{5} & \frac{2}{5} \\ \cline{2-2} \frac{1}{5} & \mathbf{2} \end{array}$$ 2 cociente y $\frac{1}{5}$ resto

b) $1:\frac{2}{5}=1\times\frac{5}{2}=\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}$ 2 cociente y $\frac{1}{2}$ resto

Obtener resultados diferentes obliga a justificar cuál es el adecuado. Para ello hay diversas estrategias.

La más inmediata parte de la práctica. No es frecuente la división de racionales con el algoritmo de Euclides de la división entera. Surge un primer interrogante <u>(1) ¿Es posible emplear este algoritmo para la división de racionales?</u>

Más interesante es buscar el significado de los cálculos relacionándolos con problemas reales. División se identifica con reparto. Repartimos 1 (una tableta de chocolate, muy socorrida para las fracciones), entre …. 2/5 de.. ¿qué? ¡Ah! Entre 2/5 de los habitantes de la casa. Ya está. En casa somos 5 personas, por lo tanto el problema es: *"si repartimos chocolate entre* (2/5 de 5 es 2) *2 personas ¿cuánto toca a cada una?...* Pues a 1/2. ¡Esto

[2] En España el algoritmo de la división entera se realiza de esta forma, colocando el divisor en una "caja", a la misma altura que el dividendo, y debajo del divisor se coloca el cociente. El resto aparece debajo del dividendo, tras hacer las restas sucesivas, según se van añadiendo cifras al cociente. En otros países este algoritmo es diferente.

no tiene nada que ver con las operaciones anteriores! En un reparto necesitamos saber entre cuántos se reparte, y esto siempre será un entero. No nos vale para $1:\frac{2}{5}$. Surge una segunda pregunta <u>(2) ¿Qué tipo de problemas requieren dividir números racionales?</u>

El reparto anterior utiliza los siguientes datos: 1 tableta de chocolate, 2 personas, y el resultado es (media) ½ tableta, o sea, ½ tableta por persona. Los problemas de reparto usan datos de tres magnitudes: tabletas, personas y tabletas/persona, lo que llamamos *tasa*. En este caso la incógnita es la porción, la tasa, lo que corresponde a cada persona. Podemos cambiar la incógnita de lugar, por ejemplo, situarla en el divisor y surge el siguiente problema:

Repartimos una tableta de chocolate dándole a cada uno una porción de 2/5 de tableta ¿cuántas personas reciben ración?

Este problema corresponde con el enunciado $1:\frac{2}{5}$. ¿Cuál de las soluciones planteadas es más adecuada? En las condiciones del problema, tenemos para dar la porción a dos personas y sobra … ¿1/5? ¿o sobra ½? Surge ahí una tercera cuestión: <u>(3) ¿Qué significan los datos y el resultado de la división de fracciones?</u>

Al tener un problema, podemos resolverlo empíricamente, o al menos con representaciones icónicas (Figura 1).

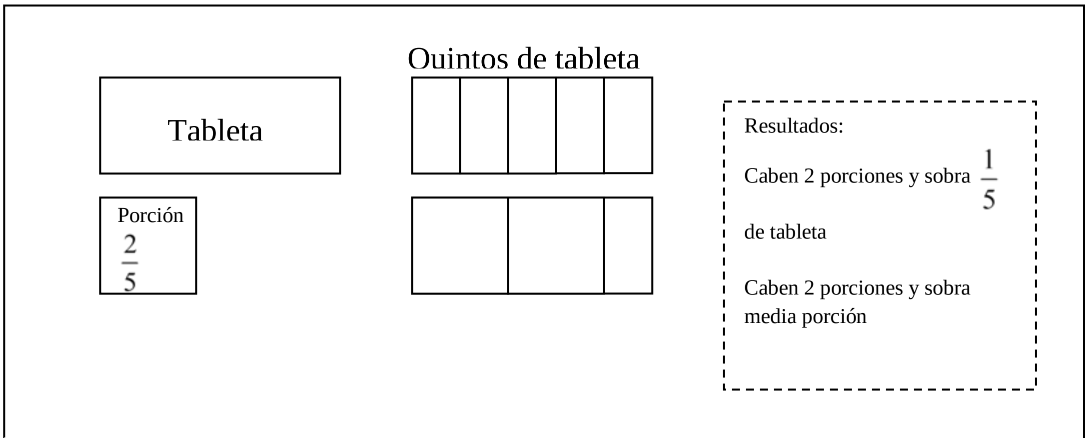


Figura 1. División mediante representación icónica

Con este preámbulo mostramos que una operación tan fácil de realizar, como la división de fracciones, puede crearnos complicaciones, si no la dominamos con profundidad. De hecho, el procedimiento de dividir fracciones es relativamente sencillo, consiste en "multiplicar en cruz". Pero, y esta es la cuarta pregunta <u>(4) ¿Por qué se multiplican en cruz las fracciones para dividirlas?</u>

Este es el título de esta conferencia. Y es que esta sencilla pregunta nos ayuda a pensar qué conocimiento tiene que tener un profesor para enseñar la división de fracciones, de manera que los alumnos entiendan lo que están haciendo, y no solo aprendan a resolver operaciones sin sentido. Hemos tomado esta pregunta para ir examinando qué aspectos tenemos que cubrir en la formación inicial de profesores de matemáticas de educación primaria (niños entre 6 y 12 años), para que puedan llegar a enseñar unas matemáticas en las que no quepan "la multiplicación en cruz", sino que se de más importancia a comprender lo que se está haciendo.

A continuación, vamos a basarnos en este razonamiento para mostrar el plan de formación de matemática de profesores de Primaria, que se está poniendo en práctica en la Universidad de Granada, empleando las cuestiones que vamos planteando, para ejemplificar procesos y contenidos. Añadimos nuevas como las siguientes:

(5) ¿Qué tienen que aprender los alumnos de primaria de la división de fracciones?

(6) ¿Cómo enseñar la división de fracciones para que la entiendan los alumnos?

(7) ¿Cómo evaluar este aprendizaje?

2. "Sólo el que comprende puede enseñar"

Con esta frase responde Lee Shulman, pedagogo americano, a otra frase perversa que seguro hemos escuchado alguna vez: "*El que sabe, hace. El que no sabe, enseña*". Shulman (1989) resume en ella sus apreciaciones sobre el conocimiento del profesor.

¿Cómo hacer que los futuros maestros *comprendan* (las matemáticas, la división de fracciones), para poder enseñarla a sus alumnos?

En la Universidad de Granada hemos partido de que el proceso formativo tiene que dirigirse a formar un profesor profesional, que comprenda las matemáticas que va a enseñar. Por tanto, el currículo de la formación matemática para los futuros maestros tiene que:

- Favorecer la comprensión de los conceptos matemáticos, profundizando hasta poder responder a las cuestiones planteadas al principio de esta conferencia.
- Poner al estudiante para profesor en contacto con lecturas y resultados alcanzados en las didácticas de los temas matemáticos.
- Hacer que lo refleje profundizando en el significado de los contenidos matemáticos (como la división de fracciones), para comprenderla y para diseñar sesiones de clase encaminadas a lograr su aprendizaje.

3. El Análisis didáctico

En el grupo de investigación Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico, FQ193, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, se ha aposentado el Análisis Didáctico como una herramienta que combina la comprensión con la profesionalización. Arranca de los trabajos de Luis Rico (1997a y b), quien establece cuatro dimensiones del currículo (dimensión cultural/conceptual, cognitiva, ética o formativa y social), que se manifiestan en diferentes niveles de desarrollo del currículo (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

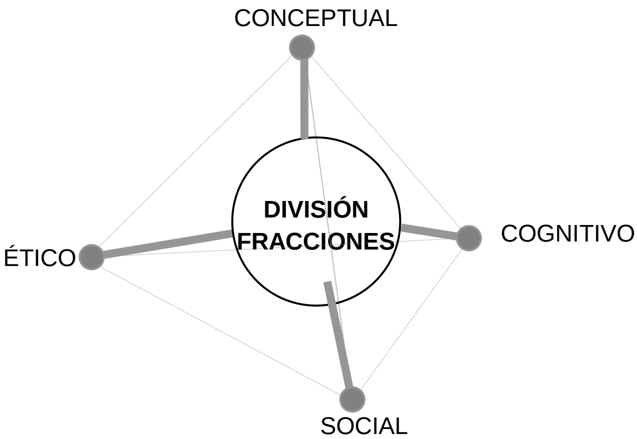


Figura 2. Análisis curricular de un contenido matemático

Un nivel especialmente importante para el desempeño profesional del profesor, es el que corresponde al diseño e implementación de la enseñanza de un contenido. Para llevar a cabo esta tarea, Rico (1997a) define cuatro análisis sobre la enseñanza del contenido, correspondientes a las dimensiones anteriores. El currículo refleja un aspecto cultural/conceptual que se concreta en el contenido matemático a enseñar, para lo que el profesor necesita realizar un *análisis del contenido*. Pero además tiene que preocuparse del alumno, sus posibilidades y obstáculos de aprendizaje, realizando un *análisis cognitivo*. La actuación del profesor refleja la dimensión ética o formativa, que requiere *analizar la instrucción*, para determinar tareas que procuren el aprendizaje pretendido. Por último, el profesor tiene que dar cuenta a la sociedad de su enseñanza, realizando el *análisis de actuación*, para valorar tanto los logros como el proceso.

El ***contenido*** matemático queda definido para Rico (1997a) mediante el triángulo semántico de Frege, cuyos vértices son, referencia, signo y sentido. En el primer vértice (referencia), se sitúa la *estructura conceptual*, que requiere examinar los conceptos y procedimientos matemáticos, tanto actuales como en otros momentos de la historia de las matemáticas (*evolución histórica*). El vértice signo está ocupado por las representaciones empleadas para expresar el contenido y los modelos que pueden emplearse para materializar los conceptos. El sentido de un contenido lo marcan los fenómenos que se organizan a través de dicho contenido, sus aplicaciones prácticas y los contextos en que se ponen en marcha. Por tanto el *análisis de contenido* abarca el estudio de las *estructuras conceptuales*, *evolución histórica*, *sistemas de representación y modelos*, y *análisis fenomenológico*.

El profesor planifica el aprendizaje del alumno a partir de la dimensión ***cognitiva*** del contenido. Examinando las cualidades cognitivas del alumno en relación al contenido, llega a establecer las finalidades de aprendizaje, formuladas en forma de objetivos y competencias, así como las limitaciones, considerando qué errores y dificultades se detectan habitualmente en el aprendizaje del tema matemático. Expectativas y limitaciones de aprendizaje permiten construir secuencias de capacidades que los alumnos tienen que aprender a poner en juego para resolver las tareas y llevar a cabo los aprendizajes previstos.

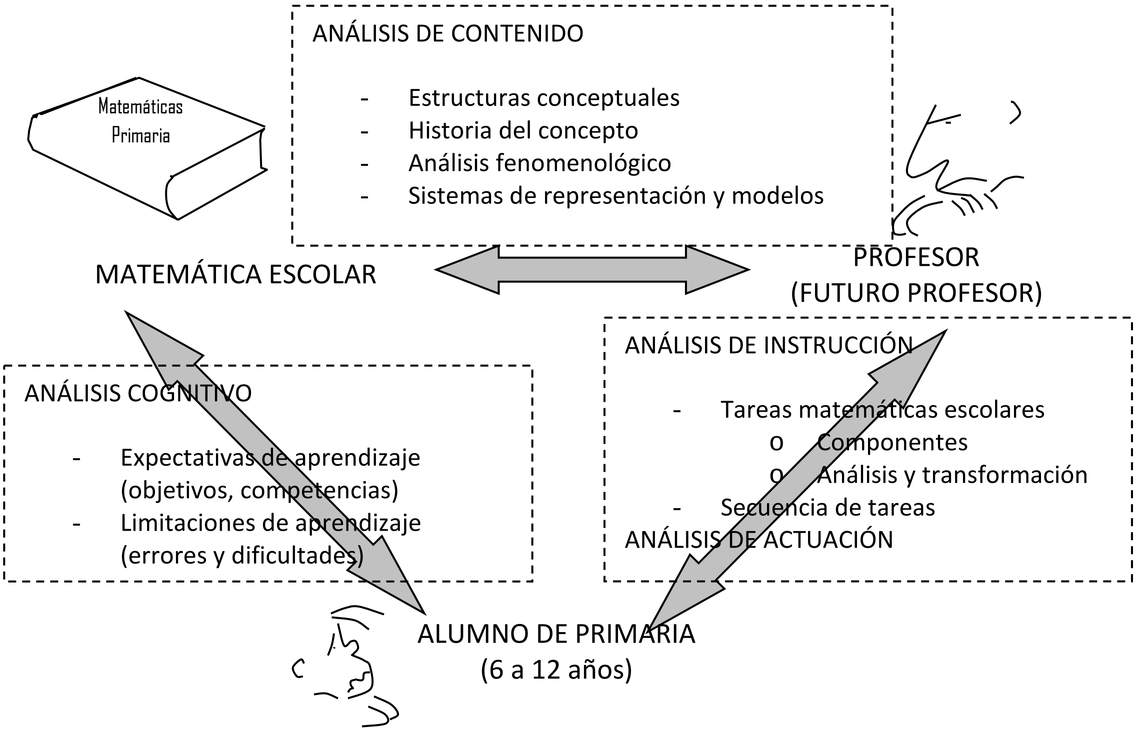


Figura 3. Análisis Didáctico en el proceso de enseñanza/aprendizaje matemático

La profesión docente es una tarea práctica, en el sentido aristotélico. La acción es tan importante como los fines. La dimensión ética o formativa debe llevar al profesor a examinar qué tareas, medios, recursos y prácticas, son las más adecuadas para alcanzar los objetivos de aprendizaje. El análisis de ***instrucción*** se centra tanto en buscar tareas matemáticas escolares, como en diseñar secuencias de tareas.

Prever instrumentos, criterios y formas de poner en práctica la evaluación, de forma que se aprecien logros en forma de competencias, da la ocasión al profesor de cerrar el proceso formativo de manera coherente, con lo que se constituye en el análisis de ***actuación***.

4. Formar profesores profesionales que comprendan

Para describir un plan de formación hay que clarificar, dos componentes al menos, el proceso formativo y el su contenido, el conocimiento en que se forma. El genial Francesco Tonucci ha dibujado una viñeta en la que enfatiza le papel ambiguo del profesor en formación, en el centro de un sistema doble, ya que siempre tiene que tener de referencia su actuación en el sistema didáctico de la educación Primaria. Aprovechamos esta viñeta para diseñar el diagrama de formación (figura 4).

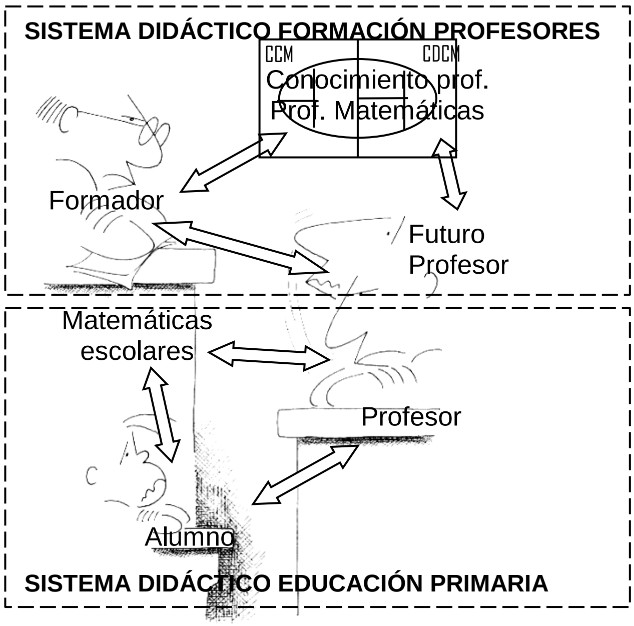


Figura 4. Sistemas didácticos implicados en Formación de Profesores de Matemáticas

Establecer dos premisas (comprender y profesionalizar), mediante una herramienta (el análisis didáctico), ha dado lugar a un proceso formativo que se ubica en la tradición profesional de formación Zeichner (1983), concibiendo al maestro de educación primaria como un educador con intención instructiva, que pueda lograr que el alumno de 6 a 12 años desarrolle competencias básicas relacionadas con las matemáticas, sobre las que poder continuar su formación como ciudadano para afrontar los retos de la sociedad actual.

Se trata de un plan de formación profesional, que parte del conocimiento matemático de la educación primaria, concibiéndolo como problemático, no completamente definido

(Zeichner, 1983), y completado con conocimiento de Didáctica de la Matemática, concebida como instrumento para el desempeño profesional, con lo que interesa más ahondar en sus problemas que en sus resultados.

El contenido de los cursos de formación matemática de los futuros maestros, se centra, fundamentalmente, en "conocimiento profesional del profesor de matemáticas", entendido tal como lo hace Deborah Ball y su equipo de la Universidad de Michigan (Hill et al., 2008), el Conocimiento del Profesor de Matemáticas (Mathematical Knowledge Teaching). En este modelo se distinguen dos componentes, la primera de conocimiento matemático, que tiene tres subdominios (conocimiento común de las matemáticas, conocimiento especializado de las matemáticas y conocimiento del horizonte matemático) y la segunda el conocimiento didáctico del contenido matemático, con otros tres (conocimiento de las matemáticas y la enseñanza, de las matemáticas y los alumnos, y el conocimiento curricular).

Tabla 1. Créditos de la titulación del Grado de Educación Primaria, Universidad Granada

	ASIGNATURA	**Créditos**	
		Obligatorios	**Optativos**
General	Psicología	18	9
	Didáctica y Pedagogía	36	9
	Sociología de la educación	6	
Didáctica Específica Instrumental	**Didáctica de la Matemática**	**22**	**6**
	Didáctica de la Lengua Española y Literatura	21	18
	Didáctica Ciencias Sociales	15	6
	Didáctica de las Ciencias Experimentales	15	6
	Didáctica de Artes Visuales y Plásticas	9	6
Didáctica específica especialidad	Idioma Extranjero y su Didáctica	6	12+12
	Didáctica Educación Física	6	24
	Educación Musical	6	24
	MATERIAS OPTATIVAS	Elegir 30 créditos de las ofertadas	
Profesional	Práctica pedagógica	44	
	Trabajo FIN DE GRADO	6	
	Total	240 créditos en 8 semestres	

La formación inicial de profesores de Primaria, en la Universidad de Granada, abarca 4 cursos (8 semestres), durante los cuales se imparten asignaturas por áreas educativas generales (Didáctica y Organización Escolar, Psicología de la Educación y Evolutiva, Sociología Pedagogía y MIDE), asignaturas impartidas por áreas de didácticas específicas instrumentales (Didáctica de la Lengua española, de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales, de las Ciencias Experimentales y de la Formación artística), y didácticas específicas de especialidad (Didáctica de lengua extranjera, de la Educación Física y de la Música). La tabla 1, refleja la cantidad de créditos que comporta cada una de estas áreas.

La formación matemática se cubre de manera obligatoria, por 3 asignaturas: Bases Matemáticas, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas y Diseño y Desarrollo del Currículo, siempre de Matemáticas en Educación Primaria. (Figura 5), y una optativa.

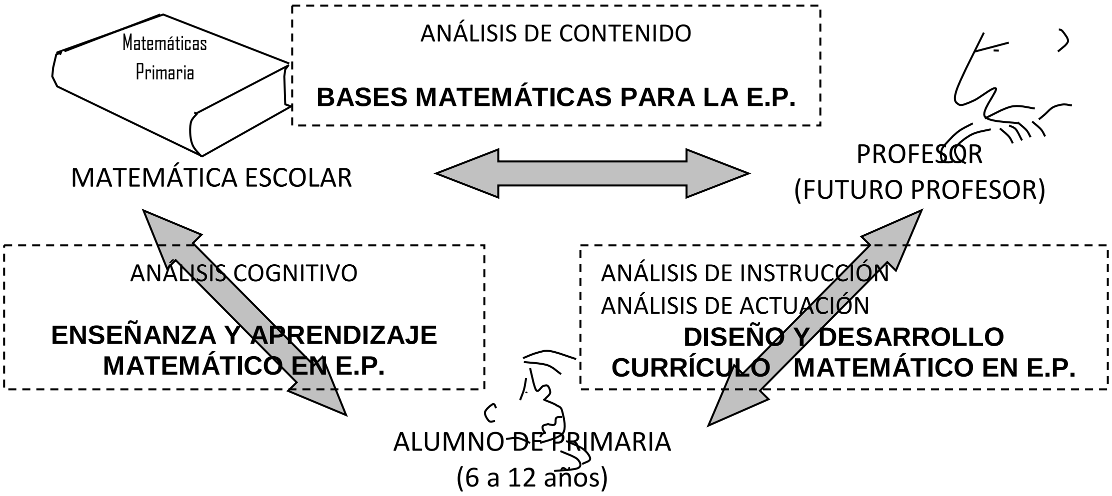


Figura 5. Análisis Didáctico en el Plan de Formación de Maestros

Bases Matemáticas para la Educación Primaria

Para poder diseñar e implementar enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria, el maestro necesita conocimientos matemáticos, especialmente de los contenidos que se imparten en dicho ciclo educativo. Determinar qué tipo de conocimiento se requiere para este desempeño ha sido objeto de reflexiones y trabajos compartidos por los componentes del departamento de Didáctica de la Matemática de la UGR, desde hace más de 10 años, en los cuales se han llevado a cabo 7 proyectos de innovación docente, y formado parte de tres proyectos de investigación. La decisión sobre qué conocimiento matemático requiere el futuro maestro se ha fundamentado en el Análisis Didáctico es decir, el conocimiento matemático resultante de realizar un análisis del contenido de los núcleos temáticos de las Matemáticas de Primaria.

El estudio de esta asignatura debe lograr que los estudiantes respondan a las cuestiones 1, 2, 3 y 4 planteadas en la introducción de esta conferencia, sobre la división de fracciones.

Decidir sobre el empleo del algoritmo de Euclides en la división de racionales (1), requiere profundizar en su significado. Estimulemos a que los estudiantes utilicen situaciones próximas, por ejemplo, empleando calculadoras didácticas que incluyan la división entera (tecla **├─)**. Cuando se introduce en la calculadora la secuencia del problema planteado (<1>, <├─>, <2/5>), se observa que al colocar el divisor, aparece *Error*. La calculadora no puede hacer esta división entera. Podríamos concluir que no es posible aplicar el algoritmo de la división entera a los racionales, pero hemos mostrado que la operación era correcta y corresponde a una acción real (ver cuántas veces 1 contiene a 2/5). Nuevo dilema. El análisis de contenido de la división de fracciones tiene que llevar al estudiante a tener más argumentos. Parece que la división, al igual que la resta, no está definida formalmente como operación en Q, pese a que ambas son operaciones cerradas en este Conjunto. Ambas son operaciones inversas de la multiplicación y adición, respectivamente. La división es la multiplicación del dividendo por el inverso del divisor ¿Qué es entonces la división entera? Para comprenderla hay que ir a los números naturales, estudiar la relación de múltiplo y divisor, comprender que la división en N sólo es posible cuando el dividendo es mayor que el divisor y además cuando el dividendo es múltiplo del divisor. Si no es múltiplo, podemos obtener múltiplos próximos, lo que permite obtener cocientes por defecto, que son los que empleamos para definir y realizar la división entera. En Q, ¿se puede hablar de fracciones múltiplos de otras fracciones? Todo este estudio lleva a determinar estructuras conceptuales que subyacen a la división de fracciones, relacionándola con multiplicación y con la divisibilidad. Estudios históricos sobre las fracciones y sus problemas podrían ayudarnos a comprender mejor esta idea de división (Contreras, 2004). Estas profundizaciones se abordan desde el análisis de contenido, profundizando en sus tres vértices y relacionándolos entre sí, con lo que se amplía el conocimiento común sobre la división de fracciones.

Una forma de resolver el dilema sobre los restos ha sido plantear situaciones reales de división de fracciones. Pero ¿qué tipos de problemas pueden plantearse? (cuestión 2). Buscar problemas de división requiere examinar qué es multiplicar fracciones, arrancando de problemas multiplicativos con naturales. El trabajo de Greer (1992) sobre problemas multiplicativos, nos permite ver cuáles aceptan que los términos sean números racionales. El análisis fenomenológico del contenido, en el vértice “sentido” del triángulo semántico de Frege, atiende a conocimiento especializado para la enseñanza, ya que interesa a los profesores que enseñan la división de fracciones.

Este análisis fenomenológico nos permite clarificar los términos de los problemas multiplicativos, apreciando la existencia de la tasa en los problemas de proporcionalidad directa. Además, en los problemas multiplicativos racionales, cada factor se relaciona con un todo o unidad particular, pues la proporcionalidad directa se refiere a correspondencia entre dos magnitudes (tableta de chocolate y tamaño de porción). El análisis de contenido nos aclara estos términos, tanto en un conocimiento común (saber identificar unidad de referencia de cada fracción), como para comprender su importancia cara a resolver los problemas multiplicativos (conocimiento especializado). Con estos conocimientos responderían los estudiantes a la cuestión 3.

Para justificar por qué multiplicar en cruz (cuestión 3), hay que examinar la correspondencia entre acciones concretas y acciones simbólicas en la proporcionalidad (figura 6). Pasar de la correspondencia, 1 ración frente a 2/5 de la tableta, a buscar la cantidad de raciones para 1 tableta, lo que exige llevar el segundo término a la unidad mediante operaciones multiplicativas, y aplicar las mismas operaciones en el otro conjunto. Finalmente se aprecia que la resolución requiere realizar la fracción operador inversa de la del divisor, abarcando nuevo conocimiento especializado para la enseñanza, fruto del análisis de contenido.

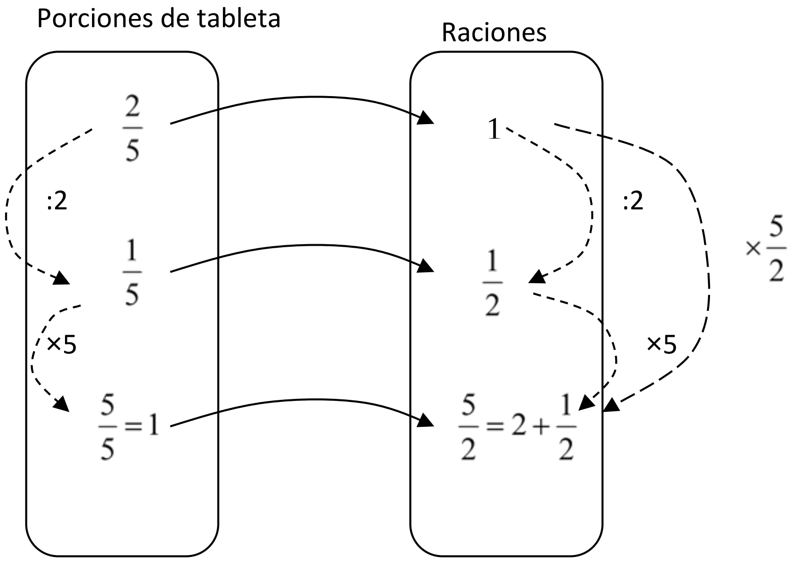


Figura 6. Justificación de multiplicar por el inverso para dividir fracciones

Con estas cuestiones hemos mostrado el objeto de esta asignatura: Bases Matemáticas para el maestro de Educación Primaria. Se trata de conocimiento matemático común suficiente para desempeñarse en situaciones como la planteada al principio, y manejar el conocimiento especializado en forma de “sentidos de las operaciones”, “formas de representarlas”, “magnitudes a las que se refieren los datos”, “acciones que se realizan con ellos”, “correspondencias entre acciones con elementos y operaciones con representaciones simbólicas”, etc. Esta asignatura pretende, pues, cubrir el primer criterio que hemos planteado: sólo el que comprende puede enseñar matemáticas.

Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria

Los estudiantes que comprenden el contenido tienen mayores oportunidades para enseñarlo, pero no basta con ello. Para completar la formación, las otras asignaturas de Matemáticas hacen que los futuros maestros se relacionen con la Didáctica de la Matemática, profundizando en el conocimiento didáctico del contenido matemático. La Didáctica de la Matemática ha llegado a consensuar un cuerpo de conocimiento específico, pero hay que reconocer que su origen y desarrollo obedecen más a la lógica de la investigación que a la de los profesores que están enseñando Matemáticas en la enseñanza obligatoria. Falta mucho para que la Didáctica de la Matemática atienda a las necesidades de los profesores en su trabajo, por lo que no podemos pretender formar maestros eruditos en un saber que los va a distanciar de sus pares, cuando se incorporen a la escuela.

Tomando en cuenta esta circunstancia, el proceso formativo en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, se hace más profesionalizador, con un contenido menos definido, más problemático. Trata de responder a cuestiones como ¿Qué debemos lograr que aprendan los alumnos de primaria? ¿Cómo podemos salvar sus dificultades y errores? Son cuestiones que afrontamos en la asignatura “Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas”, cuyo foco de atención es la profundización en aspectos cognitivos del aprendizaje matemático. Esta asignatura se propone una intención más práctica, sin pretender ser exhaustivos. Las herramientas, en forma de textos sobre didáctica de cada contenido, están al servicio de los estudiantes, quienes tienen que localizarlos, darle sentido y aplicarlos a la enseñanza y aprendizaje de temas concretos. Otras asignaturas generales (psicología del aprendizaje, psicología evolutiva y de la educación, etc.), suministran referentes que ayudan a comprender los resultados que encontrarán en textos de didáctica del tema que corresponde a cada equipo de trabajo.

El resultado de este curso debe ser un análisis cognitivo en profundidad de un tema de matemáticas de Primaria (como “Unidad, decena y centena”, para 7 años, “Los polígonos”, para 9 años, etc.). Los futuros maestros, trabajando en grupos, tienen que buscar fuentes de información sobre la didáctica del tema que les corresponde, examinar qué objetivos de enseñanza pueden pretender en el curso o ciclo adecuado, y qué limitaciones (dificultades y errores), son más frecuentes para los alumnos. Este trabajo final, que se va completando a lo largo de las 18 semanas del semestre, cubrirá una parte del desempeño profesional para el que se están preparando. (En la figura 7 aparece el esquema de actuación con el tema ejemplo: la división de fracciones para niños de 11-12 años).

Esta asignatura se enfoca en el conocimiento profesional del profesor sobre las Matemáticas y los alumnos. Profundizando en ella podemos responder a la cuestión 5.

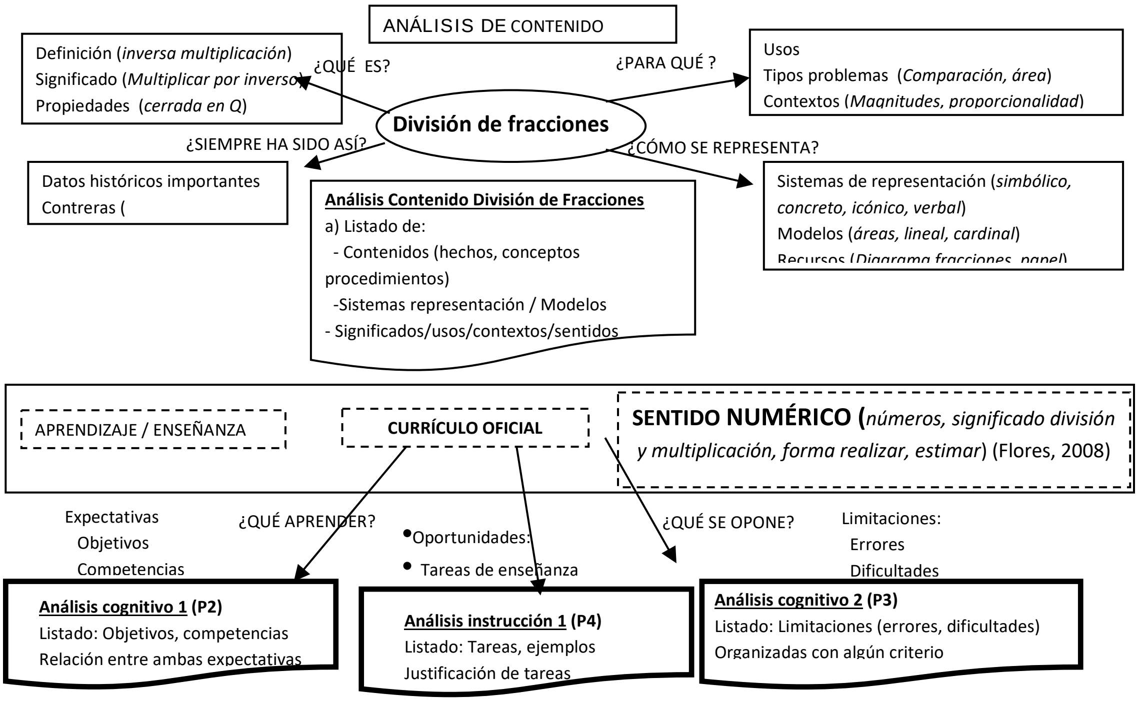


Figura 7. Esquema de actuación en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

¿Cómo conjugar la profundización en la didáctica de un tema con una visión más amplia sobre las didácticas de los demás temas? Este interrogante nos ha llevado a frecuentes debates entre los profesores, especialmente por que nuestras raíces se aposentan en tierra enciclopédica, en la que la enseñanza tiene que barrer todo lo que se sabe de un tema. Una solución de consenso ha tomado en cuenta la orientación actual de la enseñanza de las Matemáticas en los niveles obligatorios, en los que predomina pretensión funcional, es decir, encaminada a desarrollar competencias. Una manera de ver al niño como sujeto matemáticamente competente, es considerarlo como alguien que emplea las matemáticas "con sentido". Esta idea de "sentido matemático" está inspirada en aportes recientes sobre "sentido numérico", "sentido espacial", "sentido de medida" y "sentido estocástico". En esta asignatura se ha introducido un tema llamado "Sentido matemático", que muestra esta orientación en el aprendizaje matemático, cubriendo las componentes de cada uno de estos sentidos, pero realzando la importancia de desarrollarlas de manera coordinada. Esto hace que en la parte práctica de este curso se realicen análisis de hasta qué punto se logra desarrollar sentido matemático resolviendo tareas matemáticas escolares, y se utilicen estas componentes para decidir qué objetivos de aprendizaje se deben pretender.

Entender que para manejar la división de fracciones con sentido hay que atender tanto al concepto y la representación de los números racionales, como al significado de las operaciones y los procesos de obtención de resultados, lleva a enfatizar objetivos que abarquen todos estos campos. Por ello, los objetivos de aprendizaje de la división de fracciones pueden ser los expresados en la tabla 2.

Tabla 2: Objetivos de la división de fracciones en Educación Primaria

Que los alumnos: - enuncien frases que expresen comparaciones multiplicativas de fracciones - expresen esta comparación en forma simbólica - traduzcan una expresión simbólica de división mediante un problema de comparación, - resuelvan de manera manipulativa situaciones de comparación multiplicativa de fracciones

Igualmente, dificultades y errores posibles en el aprendizaje de la división de fracciones aparecen en la tabla 3, con lo que se responde a la cuestión 5 (Flores, 2008).

Tabla 3: Dificultades y errores en el aprendizaje de la división de fracciones

Dificultades	Errores
Identificar situaciones de división de fracciones	Realizan cálculo simbólico, sin identificar significado de fracción cociente No identifican operación correspondiente a un problema de comparación o de área
Considerar fracción como par de números naturales	Separan la división en división de numeradores y denominadores, sin relacionar cocientes entre sí
Identificar unidad de cada fracción	No identifican resultado de división en relación al problema planteado

Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas en Educación Primaria

Una vez comprendido el contenido y examinado los objetivos de aprendizaje, se pasa a estudiar cómo enseñarlo. Para ello se emplean los análisis realizados en cursos anteriores, dándoles una nueva vuelta de tuerca, que consiste en apreciar las cualidades educativas que tienen los recursos didácticos, así como la forma de llevar a cabo una enseñanza constructivista, siguiendo las ideas de asignaturas generales (Didáctica General, Psicología de la enseñanza, etc.).

Para responder a la cuestión 6 (¿Cómo enseñar la división de fracciones?) hay que haber respondido a varias de las cuestiones anteriores, realizando el análisis de contenido, el cognitivo y disponiendo de una visión constructivista de la enseñanza. Distinguir tareas matemáticas escolares para enseñar la división de fracciones, identificar en ellas sus elementos, percibir si promueven que el alumno ponga en juego sus conocimientos anteriores, si le lleva a realizar acciones con varias formas de representar las fracciones y las operaciones, si le obliga a explicar a otros los procedimientos ejecutados, a mostrar su lógica y relación con el problema planteado (que tiene que estar bien seleccionado), requiere entender ideas como “enseñanza significativa”, “resolución de problemas”, “comprensión de un concepto”, etc.

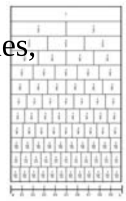
En esta asignatura los estudiantes tienen que planificar una unidad didáctica sobre un tema matemático específico de primaria. Para ello deben llevar a cabo los dos análisis realizados en cursos anteriores. El análisis de contenido emplea como referentes libros de Matemáticas para maestros. El análisis cognitivo utiliza textos específicos de didáctica del bloque de contenido que le corresponda.

Posteriormente deben buscar tareas matemáticas escolares, desmenuzarlas para apreciar sus cualidades educativas, analizarlas en relación a las teorías del aprendizaje propuesto, y secuenciarlas para facilitar que los alumnos lleven a cabo la secuencia de aprendizaje adecuado a sus objetivos. Requiere poner en juego y comenzar a familiarizarse con el conocimiento Didáctico del contenido matemático, concretamente del conocimiento de Matemáticas y enseñanza, del conocimiento curricular, ya que, como en las asignaturas anteriores, el estudiante para maestro tiene que examinar los documentos oficiales, tanto nacionales como de otros lugares para ubicar su responsabilidad profesional.

Un ejemplo de tarea que facilita el aprendizaje de la división de fracciones es la expresada en la figura 8.

<u>Tarea matemática</u>

a) Utilizando la Tabla de Fracciones y el puzzle de fracciones, podemos ver que **"**½ es el doble de ¼**"**. Completa las siguientes frases empleando estos materiales.



$\frac{1}{2}$ contiene _____ veces a $\frac{1}{8}$

_____ está contenido 2 veces en $\frac{1}{3}$

Si hago la mitad de $\frac{1}{4}$ obtengo _____

La cuarta parte del doble de $\frac{1}{3}$ es ______

b) *"½ es el doble de ¼"* se puede expresar simbólicamente de las siguientes formas:

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2 \qquad \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Expresa las frases anteriores en forma simbólica, empleando operaciones con fracciones

c) Busca nuevas comparaciones multiplicativas de fracciones, empleando los materiales didácticos, y exprésalas en forma verbal y simbólica.

Figura 8: Tarea matemática escolar para el aprendizaje de la división de fracciones

Para completar la unidad didáctica, los alumnos tienen que planificar cómo van a evaluar el aprendizaje, interpretando los criterios que se proponen en los documentos oficiales, y diseñando instrumentos de evaluación. Con ello realizan un análisis de actuación, que pueden apoyar en las experiencias de enseñanza que han llevado a cabo en la práctica pedagógica, que se desarrolla en el semestre anterior (figura 9).

Es importante realzar el papel destacado que juegan los créditos prácticos de formación, que ocupan, al menos, el 50% de la carga de créditos total. Entendemos por preparación práctica la que hace que los estudiantes sean protagonistas de su trabajo. Para desarrollarla, se descomponen cada grupo (de unos 70 alumnos), en tres partes de unos 23 alumnos, que trabajan en equipos de 4, para resolver de manera personal, tareas relacionadas con cada uno de los cursos.

Fruto de la experiencia de formación se han elaborado varios libros para apoyarla[3]. Igualmente se han publicado los trabajos prácticos, especialmente de Bases Matemáticas[4]. Durante su implementación hemos llevado a cabo 6 proyectos de innovación docente, lo que ha supuesto muchas horas de compartir, revisar y poner al día, el diseño de las asignaturas. Fruto de ello es la elaboración de 3 artículos de revista[5], y de la presentación en varios congresos[6].

La aplicación del proceso formativo ha sido objeto de una primera evaluación, especialmente de sus créditos prácticos, mediante una tesis doctoral[7], y va a ser objeto de otra revisión en el mismo formato.

5. Conclusiones

A lo largo de esta conferencia hemos querido mostrar un proceso formativo que atiende a la formación inicial de profesores de niños de 6 a 12 años, en el área de Matemáticas, que se está aplicando en la Universidad de Granada, España. En este proceso se han

---

[3] Castro, E. (Ed.) (2001). Didáctica de la matemática en educación primaria. Madrid: Síntesis.
Flores, P. y Rico, L. (Eds.) (2015). *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria*. Madrid, Pirámide.
Godino, J. D. (Dir.) (2004a). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Y *Matemáticas para maestros.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada http://www.ugr.es/local/jgodino/.

[4] Flores, P. y Segovia, I. (2004). *Prácticas de matemáticas para maestros*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

[5] Lupiáñez, J.L., Molina, M., Flores, P. & Segovia, I. (2007). Mathematics Primary Teacher Training in the Context of the European Higher Education Area. The International *Journal of Interdisciplinary Social Sciences.* Vol. 2, 2007. http://www.SocialSciences-Journal.com.
Segovia, I., Lupiáñez, J.L. y Flores, P. (2006). Formación práctica en educación matemática del profesor de primaria para la Europa del siglo XXI. (177-208). En Benítez, J.L., Gª Berbén, Ana B., Justicia, F. y De la Fuente, J. (Eds.). *La Universidad ante el reto del Espacio Europeo de Educación Superior: Investigaciones recientes.* Madrid, EOS. ISBN: 84-9727-195-5.
Ruiz, F., Molina, M., Lupiáñez, J.L., Segovia, I. & Flores, P. (2009). Mathematics Primary Teachers Training at the University of Granada. An Adaptation to the EHEA. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), ISSN: 1696-2095.

[6] Flores, P., Segovia, I., Lupiáñez, J.L., Molina, M. (2007). *Innovación en la formación matemática de maestros.* Jornadas de Innovación Docente Universitaria en el Marco del EEES. Granada, 16 Junio 2007.
Molina, M. Lupiáñez, J.L,, Segovia, I., Flores, P. (2008). *Mathematics for Prospective Primary Teachers. A Pilot Experience for Adapting to the European Higher Education Area.* ICMI 11. México, Julio 2008.
Molina, M., Segovia, I., Flores, P. (2010).Una experiencia de innovación docente dirigida a los alumnos repetidores en la formación de maestros en Didáctica de la Matemática. *Comunicación en CiDd: II Congrés Internacional de Didàctiques 2010: L'activitat del docent: Intervenció, Innovació, Investigació.* Girona, 3 a 6 de febrero.

[7] Cecilia, L.M. (2007). *Estudio de un programa de prácticas de matemáticas para la formación inicial de maestros*. Tesis de Maestría. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

conjugado la intención de que los estudiantes comprendan los contenidos matemáticos del ciclo educativo que impartirán, desde una perspectiva que favorezca su profesionalización.

Se aprecia que dicho modelo abarca todos los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza, según el modelo MKT (Hill et al., 2008). En el primer curso se atiende a la formación matemática de los estudiantes, promoviendo una profundización en el significado de los contenidos en aritmética, medida, geometría y estadística. El conocimiento común, que ha formado parte de la formación anterior de estos estudiantes, se ve reforzado por la búsqueda de significados de los contenidos trabajados, profundizando en el conocimiento especializado. La poca alusión al conocimiento del horizonte matemático, la reconocemos como una debilidad que tenemos que abordar. Los cursos de Didáctica de las Matemáticas cubren todas las componentes del conocimiento didáctico del contenido matemático, aunque la propuesta formativa comienza con el análisis cognitivo, que lleva a profundizar en el conocimiento del alumno. Posteriormente, el diseño de unidades acarrea una revisión sobre el conocimiento de las Matemáticas y la enseñanza. Durante toda la formación se atiende al currículo de Matemáticas de la Educación Primaria, con lo que el conocimiento del currículo está presente en todo el plan formativo.

El proceso formativo da mucho protagonismo a los estudiantes, quienes tienen que ir realizando los diferentes análisis que componen la herramienta idiosincrática de nuestro plan. Esto da lugar a que la formación en Didáctica de la Matemática no sea exhaustiva, concibiéndola más como herramientas que prepara para el desempeño profesional, que como contenido erudito.

Tal como hemos mostrado con la división de fracciones, el proceso formativo pretende generar hábitos para que los estudiantes puedan profundizar en el problema planteado en la introducción, para ir respondiendo a las cuestiones que surgieron en ella.

Que aprecien el interés del algoritmo de la división euclídea entre racionales, y le den sentido apoyándolo en problemas, percibiendo la ventaja que presenta para identificar claramente las magnitudes a las que se refieren las fracciones (1 y $\frac{1}{5}$ se refieren a la tableta, 2 a las raciones) (cuestión 1). Que lo relacionen con el algoritmo de la división racional, apreciando que el resultado es único ($\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, cantidad de porciones), y que $\frac{1}{2}$ es media ración, que, por tanto corresponde a $\frac{1}{5}$ de tableta (cuestión 2). Que identifiquen problemas de división de fracción como situaciones de comparación (cuántas veces cabe

$\frac{2}{5}$ de tableta en 1 tableta), o de áreas (cuestión 3). Que observen que si se establece una relación entre las raciones y la tableta, a una ración corresponde $\frac{2}{5}$ de tableta, por lo que para llegar a considerar las raciones de 1 tableta habrá que dividir por 2, para obtener cuánto corresponde a $\frac{1}{5}$ de tableta, y multiplicar por 5, para ver cuántas raciones corresponden a la tableta completa ($\frac{5}{5}$), con lo que aparece la multiplicación en cruz (cuestión 4, todas ellas en la formación matemática de los maestros).

Pero también el proceso ayudará a mostrar que en Educación Primaria nos contentamos con que los alumnos sean capaces de realizar divisiones de fracciones en situaciones sencillas, en las que se aprecien relaciones multiplicativas entre fracciones, con lo que las expresiones simbólicas que corresponden a estas operaciones provendrán de estas relaciones, y no tendrán que ir más allá (cuestión 5). Así, por ejemplo, las tareas de enseñanza de la división de fracciones de este ciclo educativo se limitarán a que los alumnos manipulen representaciones de fracciones y establezcan relaciones multiplicativas, sin llegar a construir los elementos formales que les corresponden, como la multiplicación en cruz (cuestión 6).

Como se aprecia, el proceso formativo está muy centrado en el contenido matemático, aunque tome en consideración apreciaciones sobre su enseñanza y aprendizaje, siempre basadas en resultados suficientemente afianzados en la investigación en la didáctica de la aritmética, para el caso de la división de fracciones.

Esperamos que los estudiantes comprendan la división de fracciones, aunque sea para apreciar que no es un contenido específico de la Educación Primaria. Que perciban que la división de fracciones en este ciclo se limita a expresar relaciones de comparación que pueden obtener los alumnos mediante actuaciones concretas. Que dejen el algoritmo (tan fácil, pero tan perverso) de multiplicar en cruz para cuando los alumnos estén suficientemente maduros para trabajar con la operatoria. Y que basen todas estas apreciaciones en su comprensión y en las informaciones didácticas que lo han investigado. Con esta breve idea se resume el proceso. Si a los propios formadores se les plantean dificultades de comprensión de la división de fracciones (mediante la multiplicación en cruz), ¿para qué enseñar a multiplicar en cruz antes de tiempo?

Referencias bibliográficas

Contreras, M. (2004). La división de fracciones: un algoritmo misterioso. Comunicación en *VI Jornades d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana*. Societat "Al−Khwarizmi".

Flores, P. (2008). El algoritmo de la división de fracciones. *Épsilon Vol. 25*(3). 27-40.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D.A. Grouw (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.

Rico, L. (1997a). *Bases teóricas del currículo de matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. (1997b). *La enseñanza de las matemáticas en educación secundaria*. Barcelona: Horsori.

Rico, L., Lupiáñez, J.L y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática*. Granada, España: Universidad de Granada.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Zeichner, K. (1983). Alternative paradigms of teacher education. *Journal of Teacher Education, Vol XXXIV*, No 3, pp. 3-9.

Pablo Flores Martínez

Doctor en Didáctica de la Matemática y Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada, España, licenciado en Ciencias de la Educación por la UNED. Intereses investigadores principales, caracterizar conocimiento y la labor profesional del profesor de matemáticas y profundizar sobre recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas, especialmente los recursos evocadores, como el humor y los materiales manipulativos. Experiencia profesional como profesor de matemáticas de secundaria, desde 1990 profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática, en la Faculta de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, España, miembro del grupo de investigación Didáctica de la Matemática, Pensamiento Numérico.

direcciones: pflores@ugr.es, http://www.ugr.es/~pflores/, https://fqm193.ugr.es/

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 30-45

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Conocimiento matemático de profesionistas de Educación Especial en su formación inicial

J. Marcos López-Mojica, Lilia P. Aké, Karina Cruz

Fecha de recepción: 08/03/2017
Fecha de aceptación: 06/06/2018

Resumen	Los elementos teóricos que permitieron caracterizar el conocimiento matemático de los futuros licenciados en Educación Especial sobre fracciones son: el pensamiento matemático, conocimiento de las fracciones, formación del docente y la profesionalización del docente en esta área. La investigación cualitativa, se desarrolló en tres fases: la primera analizó el plan de estudios del nivel educativo en cuestión, en la segunda se diseñó y aplicó un cuestionario sobre fracciones: solución de operaciones, representación gráfica y orden. En la tercera se realizaron entrevistas individuales. De una categoría de análisis los estudiantes se encuentran en el nivel más bajo. Reflexionamos sobre qué tipo de matemáticas se requieren para el área en cuestión y qué tipo de conocimiento matemático deberían desarrollar los profesionistas en su formación inicial para garantizar una educación básica integral. **Palabras clave**: Pensamiento matemático, educación especial, profesionistas.
Abstract	The theoretical elements that allowed to characterize the mathematical knowledge of the future graduates in Special Education on fractions are: mathematical thinking, knowledge of fractions, teacher training and teacher professionalization. The qualitative research was developed in three phases: the first analyzed the curriculum of the educational level in question, the second was designed and applied a questionnaire on fractions: operations solution, graphic representation and order. In the third stage interviews were conducted to whom? From a category of analysis, students are at the lowest level. We reflect on what kind of mathematics are required for the area in question and what kind of mathematical knowledge professionals should develop in their initial training to ensure an integral basic education. **Keywords**: Mathematical thinking, special education, professionals.
Resumo	Os elementos teóricos que permitiram caracterizar o conhecimento matemático dos futuros licenciados em frações de Educação Especial são: pensamento matemático, o conhecimento de frações, formação de professores e profissionalização dos professores. A pesquisa qualitativa foi realizada em três fases: a primeira análise do currículo do nível de ensino em questão, a segunda foi concebido e aplicado um questionário sobre frações: solução de operações, representação gráfica e ordem. Na

	terceira entrevistas. De uma categoria de análise os estudantes estão no nível mais baixo. Refletimos sobre o tipo de matemática é necessária para a área em questão e que tipo de conhecimento matemático deve desenvolver os profissionais em sua formação inicial para garantir uma educação básica completa. **Palavras-chave:** Pensamento matemático, educação especial, profissionais.

1. Introducción y planteamiento del problema

En tiempos actuales se requiere que todo ciudadano domine los conocimientos que se marcan en la educación básica, lo anterior fomentaría un mejor acceso a la información y sentaría bases para una sociedad informada. Desde el enfoque de la integración, es imperante que los profesionistas (profesores y especialistas) de la educación especial dominen aquellos conocimientos para poder ofrecer una educación integral a niños con Necesidades Educativas Especiales (NEE) asociadas o no a una discapacidad. En ese sentido, los profesionales de esta área deben estar preparados para poder orientar y capacitar al docente de primaria regular sobre la atención a niños con tales características. Por lo tanto, es imperante que todo profesionista domine los contenidos como parte de su cultura y contribuya a una sociedad del conocimiento (Castells, 1999). Pero, ¿éstos les permiten ofrecer una enseñanza adecuada a los niños con NEE con o sin discapacidad?

Tec, Martín y Pérez (2011) argumentan que la educación especial surge con un enfoque positivista. Es decir, históricamente tuvo un rumbo clínico-médico, basaban sus intervenciones en una buena anamnesis y en los más certeros diagnósticos, por lo que un mejor diagnóstico orientaba un mejor tratamiento.

Por otra parte, Guajardo (2010) expresa que al cambiar el llamado *paradigma* en educación especial del modelo médico al modelo educativo, promovido por la Conferencia Mundial de Salamanca (1994), los profesores de esta disciplina en México viven un proceso de *desprofesionalización* (Guajardo, 2010). Según el autor, toda su formación bajo el modelo médico es incompatible en el modelo educativo y a los asesores pedagógicos se les ha complicado actualizarlos.

De lo anterior surge una interrogante ¿los futuros licenciados en educación especial están preparados para poder orientar, diseñar, implementar o evaluar los conocimientos matemáticos de niños con discapacidad? El presente informe de investigación forma parte de un proyecto más amplio, el cual se interesó por caracterizar el conocimiento matemático en fracciones que tienen los estudiantes de esta licenciatura de la Universidad de Colima.

El problema de investigación surge después de analizar el plan de estudios de la licenciatura, particularmente el perfil de egreso que establece: “El egresado diseña, implementa y evalúa propuestas de atención e intervención pedagógica dirigida a personas que presentan NEE asociadas o no a una discapacidad, trastorno o aptitud sobresaliente para lograr su integración escolar, social y laboral” (CICA, 2011, p. 71). Por lo que, ¿el estudiante está capacitado para aplicar sus competencias en el área de las matemáticas para la educación primaria regular u otro nivel educativo? Más aun, ¿presenta las competencias para poder orientar, asesorar, diseñar o intervenir en los casos de aptitudes sobresalientes?

La investigación permite reflexionar sobre el grado de complejidad a la que se enfrentan los futuros profesionistas en el aula. Desarrollar un buen nivel de competencias en cada uno de los niños con NEE con o sin discapacidad implicaría desarrollar estrategias de enseñanza adecuadas a cada una de las discapacidades y en función al nivel educativo en el que se encuentre el niño. Es decir, es necesario promover la idea de currículo flexible, a manera que permitan a los estudiantes avanzar a sus propios ritmos (Larrain, 2016). Por lo anterior, es importante que en la formación inicial de los profesionistas de la educación especial se traten a profundidad los temas matemáticos, para que éstos les otorguen sentido por su uso y así estimular un conocimiento común (Hill, Ball y Schilling, 2008).

2. Antecedentes de la investigación

Los antecedentes se enmarcan en tres generalidades, por un lado dar a conocer la necesidad de la preparación/actualización de los docentes de educación especial en matemáticas; por el otro, reflexionar sobre el acercamiento de los profesores de matemáticas en temas de inclusión educativa; por último, la promoción del conocimiento de la educación básica como parte de una cultura general. Así pues, desde la educación matemática es indudable comenzar a mirar otros escenarios que también forman parte de los fenómenos que estudiaría nuestra disciplina.

Hasta el 2008, la educación especial fue una de las área de la educación que más se ha desarrollado, el estado actual de la investigación en esta disciplina ha llevado a “la configuración de su propia realidad interpretada en las conceptualizaciones holísticas de las personas y sus déficits, de los profesores, la enseñanza y los procesos de aprendizaje, que demandan un nuevo modelo de investigación” (Fernández, 2008, p. 9). Según la tendencia es indagar sobre las consecuencias sociales y subjetivas de la discapacidad, y la educación inclusiva como comunidad de intereses (Fernández, 2008). En ese sentido, Chiner (2011) expresa que las investigaciones desde la educación especial se preocupan por ahondar sobre las percepciones, actitudes y creencias de los maestros de primaria regular ante la inclusión educativa, sin realizar un énfasis en el conocimiento en general o el tipo de estrategias para poder promover un pensamiento matemático. En contraposición a esta tendencia desde la educación matemática una de las líneas de interés, es precisamente el tipo de conocimiento matemático que se puede desarrollar para ofrecer una educación matemática básica integral a los niños con NEE asociadas o no a una discapacidad.

En López-Mojica y Ojeda (2013) se argumentó la importancia de tratar los temas de probabilidad y de estadística en la educación especial. En su investigación, los autores informaron sobre la comprensión de conceptos de probabilidad de docentes de ese nivel educativo, identificaron nociones de espacio muestra, medida de probabilidad y variable aleatoria. Además, las docentes participantes propusieron actividades de enseñanza para esos temas después de su tratamiento en el escenario de *estudio dirigido*, espacio donde confluyen docencia e investigación (Ojeda, 2006). Los autores concluyeron que no se pueden enseñar los temas de matemáticas si no se conocen, además justifican que no basta con un curso de matemáticas en la formación inicial de los docentes de esta área para desarrollar el pensamiento matemático y, sobre todo, para la enseñanza de esos temas a los niños con discapacidad.

Por su parte, Aké (2016) reflexiona sobre la preparación de los futuros profesores de matemáticas ante la inclusión educativa. En su documento ponderan la posibilidad de preparar a los profesores de matemáticas para atender a los niños con NEE, enfatiza la carencia de investigaciones que permitan orientar a una mejor formación de los niños con discapacidad en matemáticas y ponen de manifiesto la complejidad de preparar al docente de matemáticas ante estos temas, pues implicaría diseñar estrategias de enseñanza para cada necesidad educativa especial, lo cual limita la labor del docente. Por lo que proponen un acercamiento entre las dos disciplinas.

Motivó la realización de una investigación como tal las ideas planteadas en el artículo de Guajardo (2010), en el que se da evidencia de la desprofesionalización docente. Si bien la población con la que se trabajó en la presente no se forman como docentes, pero sí como especialistas que podrían asesorar a los primeros en sus aulas y en temas de la educación básica regular, agregamos a esto que deben tener conocimiento sobre las personas que presentan NEE asociadas o no a una discapacidad, trastorno o aptitud sobresaliente de manera específica.

Los conocimientos básicos de matemáticas son elementales para una cultura general. Las matemáticas se usan en varios aspectos de la vida, cambio monetario, compra-venta, en el peso de productos como frutos, semillas, etc. Este tipo de aspectos deberían ser considerados en la enseñanza en todos los niveles educativos. De manera imperante, bajo el modelo de la inclusión educativa, las matemáticas deberían ser un conocimiento para todos (Aké, 2016).

3. Elementos teóricos

Por el tipo de estudio de la investigación, los elementos teóricos se organizan en cuatro aspectos: pensamiento matemático, conocimiento de fracciones, formación del docente y la profesionalización del docente de educación especial. Es pertinente aclarar que si bien los estudiantes participantes no serán futuros docentes de educación especial, pero sí profesionistas de esa área, es necesaria la información sobre la formación docente, pues ellos serán los que apoyen a los primeros en sus aulas, respecto al conocimiento de los niños con NEE con discapacidad o sin ella, o bien aquellos con aptitud sobresaliente.

En ese sentido, según Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza (2003) el pensamiento matemático no se limita a las acciones de los matemáticos, éste refiere también a procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación. Según los autores, desde esta perspectiva están incluidas todas las formas posibles de construcción de ideas matemáticas. Por lo tanto, el pensamiento matemático *se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a sus múltiples tareas* (Cantoral *et al*, 2003, p. 19). En ese sentido "no está enraizado ni en los fundamentos de la matemática ni en la práctica exclusiva de los matemáticos, sino que *trata de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas*” (ibidem, p. 19; agregamos cursivas). Por lo tanto, es importante evidenciar las producciones de los profesionistas de educación especial en lo relativo al conocimiento matemático común, para tener un acercamiento a su pensamiento matemático.

García Díaz (2012) presenta una síntesis sobre el concepto de fracciones, sus propiedades y tipos de operaciones para entender los diversos significados. La autora define a una fracción como un número de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$. En la que b se conoce como denominador y el elemento a como numerador (p. 10). En la Tabla 1 se sintetizan los procedimientos para la solución de operaciones aritméticas con fracciones.

Operaciones	Expresión matemática	
	Igual denominador	Distinto denominador
Suma	$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(a\times d)+(b\times c)}{b\times d}$
Diferencia	$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{(a\times d)-(b\times c)}{b\times d}$
Producto	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$	
Cociente	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times c}$	

Tabla 1. Operación de fracciones (Fuente García-Díaz, 2012; pp.11, 12).

Respecto al orden de los números fraccionarios es necesaria la comparación entre éstos. Para determinar qué fracción es mayor o menor respecto a otra, se deben tomar en cuenta los numeradores y los denominadores:

- Dadas dos fracciones con el mismo denominador es menor la que tiene el menor numerador;
- Si las fracciones tiene igual numerador será menor la que tenga el mayor denominador;
- Si los numeradores y los denominadores son diferentes, se reducen a común numerador o denominador y se aplica una de las reglas anteriores (García-Díaz, 2012, p. 12)

García-Díaz (2012) argumenta que el concepto fracción se considera fundamental en la formación básica del estudiante, esto por el conocimiento que implica: las relaciones entre él y sus procedimientos. “La fracción se obtiene de manera gradual y ocurre a partir de la enseñanza básica” (p. 60). Se espera entonces que a nivel universitario sea consolidado y pase a formar parte del bagaje cultural del ciudadano.

Por otra parte, fue de interés indagar sobre la formación docente considerando el Conocimiento profesional del profesor, cuyos inicios tienen su origen en la propuesta de Shulman (1986). Esta propuesta surge como respuesta a las preocupaciones por los resultados desfavorables de los estudiantes de secundaria en exámenes nacionales e internacionales, buscando esencialmente determinar el conocimiento base requerido para la enseñanza y con ello rediseñar los currículos para la formación del profesorado de diversas áreas. Cobra especial relevancia, considerar aspectos del conocimiento debido a que éste influye en qué y cómo aprenden los estudiantes. En este sentido, aunque los profesionistas de Educación Especial no serán profesores, según su plan curricular, su conocimiento profesional influye directamente en las actividades de enseñanza en el aula regular para los niños con NEE asociadas o no a una discapacidad.

Por tal motivo, para la investigación se consideran los modelos actuales de conocimiento y se indaga sobre el *conocimiento común* (Hill, Ball y Schilling, 2008) sobre fracciones de los profesionistas de educación especial. Éste, según los autores, es aquel "conocimiento que es usado en el trabajo de enseñanza en formas comunes a como se utiliza en muchas otras profesiones u ocupaciones" (p. 37). Es importante señalar que aunque el modelo que proponen los autores se dirige hacia el conocimiento matemático de los profesores de esta área, la propuesta de conocimiento común es pertinente debido al perfil del Licenciado en Educación Especial y sus competencias profesionales.

Guajardo (2010) cita que desde la Conferencia Mundial de Salamanca en 1994 (UNESCO, 1994), en el 2007 en México egresan los primeros licenciados en educación especial formados con los Planes de Estudio de la Licenciatura que adoptaron el modelo educativo y centraron la atención en la integración educativa (Guajardo, 2010, p. 119).

Para el autor la profesionalización del docente está constituida por la *formación inicial* y la práctica profesional (Guajardo, 2010). La primera se refiere a la preparación para el tratamiento educativo de los niños con discapacidad. La enseñanza del español y un curso de matemáticas, así como materias relativas al tratamiento de las discapacidades, son parte de los temas de la propuesta curricular de la licenciatura de la educación especial. La práctica profesional tiene que ver con la aplicación de lo que aprendieron en su formación inicial. Para abordar esa práctica, los futuros docentes se incorporan en el último año a una institución encargada de ofrecer los servicios educativos a niños con discapacidad. Por lo que, es importante que los futuros profesores dominen el contenido de la educación básica para así poder acercarlo a los niños que requieren educación especial (Guajardo, 2010).

Así, la labor de los licenciados de educación especial de la Universidad de Colima, implicaría no sólo el dominio del contenido de la educación básica. Al ser especialistas, deberán estar capacitados para orientar a todos los profesores del aula regular en los distintos niveles educativos sobre propuestas de atención e intervención pedagógica para los niños con discapacidad o sin ella, incluyendo también a los de aptitudes sobresalientes.

4. Método

La investigación de tipo cualitativa (Vasilachis, 2006) se desarrolló en tres fases. La primera de tipo documental, tiene que ver con el análisis del plan de estudios de la licenciatura en Educación Especial de la Universidad de Colima. En la segunda fase se identificaron los conocimientos matemáticos respecto a fracciones que tienen los estudiantes de la licenciatura, por medio de la aplicación de un cuestionario. En la tercera fase se aplicaron entrevistas individuales semiestructuradas a tres estudiantes de la licenciatura. Como instrumentos de la investigación fueron un cuestionario y un guion para las entrevistas individuales semiestructuradas. Las técnicas de registro de información fueron la escritura en papel y la videograbación. En la siguiente figura se esquematizan los métodos, instrumentos y las técnicas para cada fase de la investigación. El cuestionario se aplicó a los dos grupos del quinto semestre de la licenciatura en Educación Especial, con un promedio de 30 estudiantes cada grupo.

Figura 1. Organización de la investigación.
Fuente: Elaboración propia.

4.1. El cuestionario

El cuestionario se diseñó incluyendo operaciones con Fracciones: suma, resta, multiplicación y división de fracciones con numerador y denominador diferentes. Este contenido es la primera parte del cuestionario. El objetivo del primer inciso fue determinar el procedimiento que utilizan los estudiantes al resolver ejercicios de operaciones con fracciones.

Realiza las operaciones que se solicitan.

Realiza las siguientes operaciones con fracciones y simplifica el resultado.

1.- $\frac{6}{5} + \frac{4}{3} =$

2.- $\frac{9}{10} - \frac{15}{20} =$

3.- $\frac{3}{7} * \frac{6}{8} =$

4.- $\frac{4}{6} \div \frac{4}{3} =$

Figura 2. Operación con fracciones.

Otro de los incisos tenía como objetivo identificar si los estudiantes reconocían el orden de los números fraccionarios en una recta numérica. En la figura 3 se muestra el inciso en el que se le solicitó al estudiante marcar una fracción entre 1/5 y 2/5.

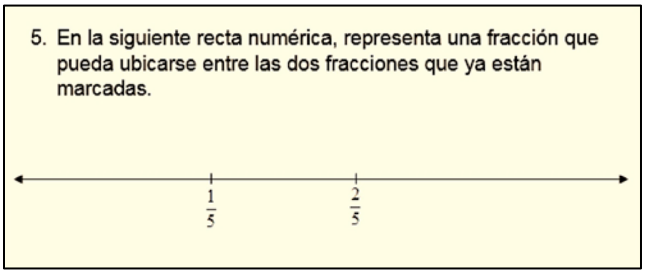


Figura 3. Presentación en recta numérica.

El tercer inciso se le planteó al estudiante con la intención de identificar si él podría señalar que el segmento dado estaba dividido en tres partes iguales y cuál era su forma de presentarlo.

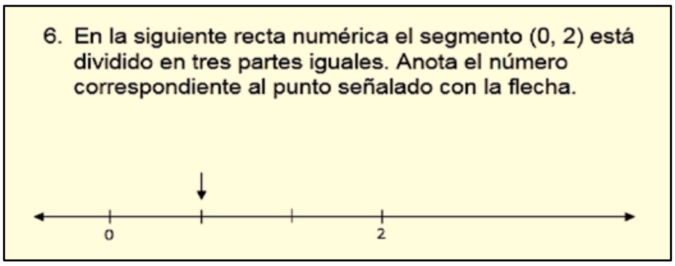


Figura 4. Segmentación de fracción.

Una idea intuitiva de la fracción corresponde a la de dividir una totalidad en partes iguales, como cuando hablamos, por ejemplo, de un cuarto de hora, de la mitad de un pastel o de las dos terceras partes de un depósito de gasolina. En ese sentido, se planteó en el último inciso del cuestionario representar de manera gráfica ¼ de ½.

7. Representa de manera gráfica ¼ de ½

Figura 5. Representación de fracciones.

4.2. La entrevista

Para la investigación, la entrevista "es la relación establecida entre el investigador y su objeto de estudio a través de individuos o grupos con el fin de obtener testimonios orales" (Tamayo y Tamayo, 2008, pág. 123). "El objetivo de una entrevista es permitir al entrevistado que exponga de manera natural su forma de pensar respecto a la situación que se está tratando" (diSessa, 2007, p. 525). En ese sentido el objetivo de la entrevista individual semiestructurada fue profundizar en los desempeños de los estudiantes sobre los cuestionarios. Se estableció un guion de entrevista que dependió de las respuestas. Las preguntas referían a las formas de resolver las operaciones de fracciones, profundizar sobre la comprensión del orden de los números fraccionarios y la representación gráficas de éstos. Se utilizaron fichas de trabajo para que en ellas las estudiantes anotaran sus contestaciones.

El guion de la entrevista semiestructurada se diseñó con el objetivo de identificar el conocimiento de los estudiantes respecto a los temas: resolución de operaciones básicas de fracciones, el procedimiento para resolver las operaciones con fracciones, el conocimiento de fracciones de menor a mayor y cómo las pueden ordenar en una recta numérica, sobre el significado de la fracción.

5. Resultados del análisis del Plan de Estudios

Para efectos del presente informe, sólo se muestran algunos resultados de las tres fases de la investigación que evidencian el conocimiento matemático de la población en cuestión. Para la primera se identificó que la formación que se ofrece a los futuros licenciados respecto a matemáticas es muy general. Durante los ocho semestres su acercamiento a la disciplina es en la asignatura "Adquisición, alteración y estrategias de atención de las matemáticas", que se cursa de manera modular en el quinto semestre, si bien no tiene la finalidad de enseñarles los conceptos matemáticos como tal, se debería considerar un apartado para recordar los temas que se han visto en niveles educativos anteriores y éstos relacionarlos con los problemas de aprendizaje de las matemáticas y las características de cada una de las discapacidades o lo relativo a las aptitudes sobresalientes.

El objetivo de la asignatura es "que los alumnos construyan conocimientos sobre la matemáticas y la forma en que se puede aplicar la misma a personas con discapacidad y/o trastorno así como aquellas con aptitudes sobresalientes para que desarrollen actitudes de integración, compromiso y responsabilidad social" (CICA, 2011; p. 274). Se plantea el contenido de la materia en tres unidades, predomina el tratamiento al número. En la Tabla 2 se puede notar el contenido específico para la asignatura.

Unidad I	Unidad II	Unidad III
- Operaciones infralógicas - Clasificación - Seriación - Conservación - Número - Diseño de evaluaciones de número - Diseño de perfiles	- El sistema decimal de numeración. - Bases para trabajar diferentes sistemas de numeración. - Diseño de instrumentos para trabajar el sistema decimal de numeración. - Diseño de perfiles grupales	- Problemas de estructura aditiva - Problemas de estructura multiplicativa - Diseño de evaluaciones para el trabajo de problemas de estructura aditiva y multiplicativa - Diseño de perfiles grupales - Diseño de actividades para

grupales - Diseño de actividades para trabajar el número	- Diseño de actividades para trabajar el S. D. N - Algoritmos (suma, resta, multiplicación y división) -Diseño de evaluaciones para los algoritmos. - Diseño de perfiles grupales. - Diseño de actividades para trabajar los algoritmos.	trabajar problemas de estructura aditiva y multiplicativa

Tabla 2. Contenido de la unidad de aprendizaje "Adquisición, alteraciones y estrategias de atención de las matemáticas" (CICA, 2011; pp. 274, 275).

Se percibe una contradicción, por una parte se pretende la inclusión de las personas con discapacidad en la sociedad, pero por otro lado no se les ofrece a los futuros profesionistas de educación especial una formación un poco más especializada en matemáticas, las cuales permitan realmente que el estudiante pueda resolver problemas de su vida cotidiana. Además, se evidencia que a partir de esta unidad de aprendizaje los especialistas tendrían limitaciones para diseñar propuestas de atención e intervención pedagógica para que las personas con discapacidad (en todos los niveles según se encuentren) construyan conocimientos sobre las matemáticas.

López-Mojica (2013) argumenta que para la educación especial, las matemáticas que se traten en este nivel educativo deben diferir de la matemática escolar de la Educación Regular sólo en la forma de presentarla. Es decir, el contenido matemático debería ser el mismo, pero las formas se deben ajustar a las particularidades de cada discapacidad. En ese sentido, no hay algún tema en la unidad de aprendizaje que promueva lo anterior.

6. Resultados del conocimiento matemático

A la manera en que Cantoral *et al* (2003) asume como pensamiento matemático y en el supuesto de que las fracciones pertenecen a un conocimiento común (Hill, Ball y Schilling, 2008), fue de interés analizar las respuestas de las estudiantes de educación especial. Los resultados se organizaron en tres categorías: ***en debilidad*** se ubican las respuestas que no se ajustan al procedimiento que se marca para la solución de operaciones con fracciones (García-Díaz, 2012), así como una ausencia en la ubicación de las fracciones en una recta numérica; ***en proceso*** se ubican las respuestas que presentan pocos detalles respecto a la solución de las operaciones, pero intentan dar una respuesta; finalmente ***en fortaleza*** encontramos las contestaciones de las estudiantes que al parecer no presentan alguna dificultad en las operaciones y en el significado de la fracción. Como se adelantó, el cuestionario se aplicó a 47 estudiantes de quinto semestre después de haber cursado la unidad de aprendizaje relacionada con las matemáticas.

6.1. El conocimiento matemático en el cuestionario

De los resultados se identificó que la mayoría no pudo aplicar el algoritmo de la adición de fracciones, por ejemplo 29 alumnos sumaron de manera directa el numerador y el denominador. Sólo 10 estudiantes pudieron aplicar el algoritmo de manera correcta. Un estudiante utilizó el mínimo común múltiplo para determinar el denominador de la nueva fracción, pero para encontrar el numerador sumó de manera directa como se señala en la siguiente Figura 6.

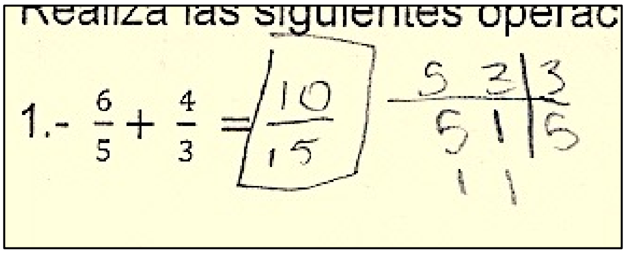


Figura 6. Uso del mínimo común múltiplo.

Otro de los estudiantes emplea la siguiente estrategia: suma de manera directa tanto el numerador como el denominador sin reflexionar o recordar el procedimiento adecuado. Es decir, suma $6+4=10$ y $5+3=8$:

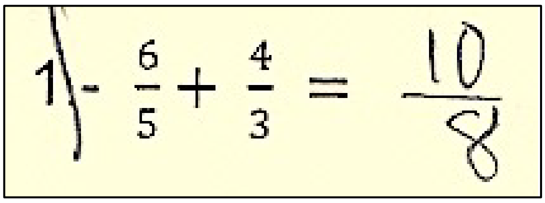


Figura 7. Suma directa de numeradores y denominadores.

Para la resta de fracciones, una estudiante resta los numeradores y los denominadores de las fracciones de manera correspondiente. Es decir, a $15-9=6$ y $20-10=10$, por lo que obtiene la fracción $6/10$ y a ella la simplifica $3/5$, no considera el signo de la fracción.

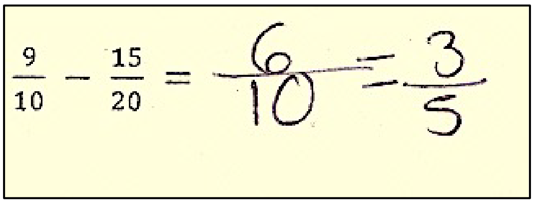


Figura 8. Forma de resolver la resta de fracciones por parte de una estudiante.

Para la multiplicación, 19 estudiantes aplicaron el algoritmo sin problema, multiplicaron ambos numeradores y ambos denominadores y simplificaron la fracción. Por otro lado, 17 estudiantes multiplicaron cruzado y seis estudiantes prefirieron no responder. Uno de los estudiantes aplicó el algoritmo de la suma para poder realizar la operación señalada. En la siguiente figura se puede notar lo anterior.

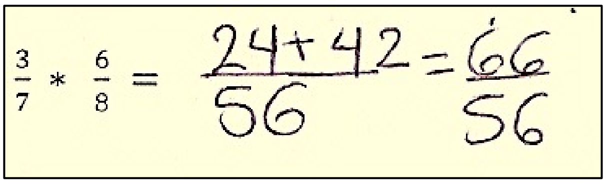


Figura 9. Utiliza el algoritmo de la suma para la multiplicación.

De manera similar, para la división de fracciones, uno de los casos al parecer no se dio cuenta del tipo de operación indicada, pues al desarrollar la división emplea el algoritmo de la adición para esta operación. El estudiante se ubica en la categoría en proceso, pues a pesar de no aplicar la estrategia adecuado, el algoritmo se la suma es correcto, pues logra simplificar la fracción.

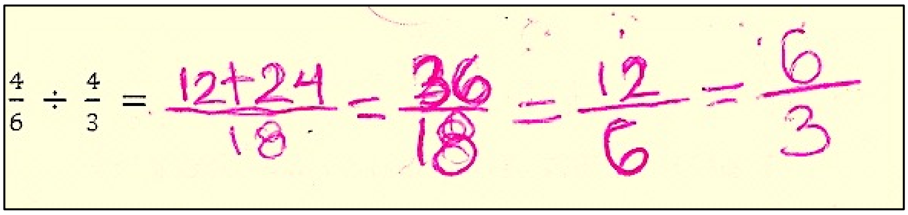
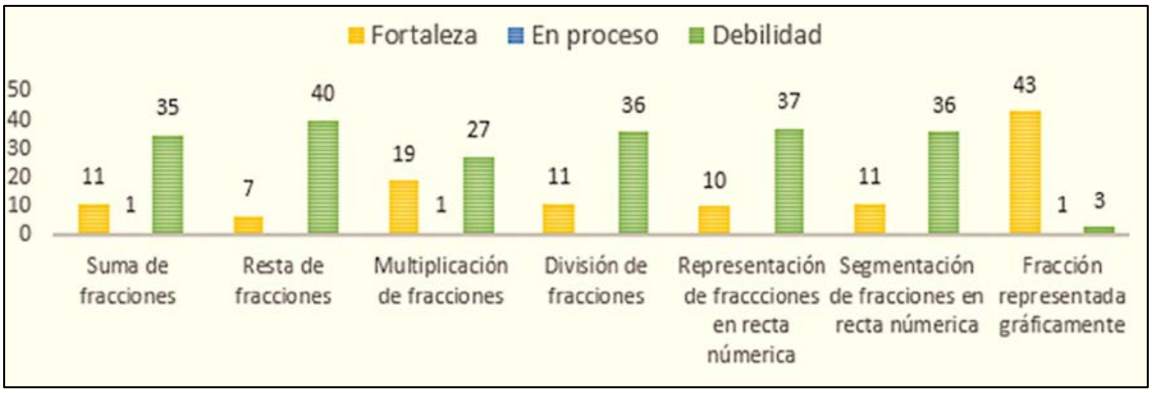


Figura 10. Uso del algoritmo de la adición para la división.

Los desempeños de los estudiantes según sus respuestas en los cuestionarios se caracterizaron en tres aspectos, según las *fortalezas* que pudieran señalarse en las respuestas, en *proceso* cuando no se aplicaba el algoritmo de manera correcta y *debilidad* cuando se confundían con la aplicación de los procedimientos. Como se podrá notar en la gráfica 1, el tema que presentó menor dificultad fue “Representación gráfica de la fracción”; en el resto existe una preocupante debilidad en los procesos.



Gráfica 1. Frecuencia de respuestas al cuestionario sobre fracciones.

De la gráfica de frecuencias, el reactivo sobre la suma de fracciones, de los cuarenta y siete estudiantes, once obtuvieron fortalezas. El ítem sobre la resta de fracciones, siete estudiantes obtuvieron fortalezas pero 40 debilidades. Cabe aclarar que al momento de aplicar el cuestionario, los estudiantes habían cursado la unidad de aprendizaje relacionada con matemáticas.

6.2. El conocimiento matemático en la entrevista

Se realizaron tres entrevistas individuales con formato semiestructurado (Zazkis y Hazzan, 1999), con el objetivo de identificar el conocimiento matemático en fracciones de las y los estudiantes. La selección de la primera entrevistada (E1) fue por las cualidades que presentó en su cuestionario, interesaron los procedimientos empleados en la solución a los problemas de operaciones de fracciones. La segunda estudiante (E2) se destacó por ser la única que respondió de manera adecuada todo el cuestionario, obteniendo así en los ítem la categoría de fortaleza. La tercera estudiante (E3) se eligió por tener en la mayoría de sus respuesta la categoría de debilidad. En resumen se seleccionaron tres estudiantes, una de cada nivel: E1 nivel medio, E2 nivel alto, E3 nivel bajo.

La estudiante E1, no mantuvo un avance en sus respuestas, no pudo colocar la serie de fracciones en la recta numérica. Aun persistió una debilidad en la solución a las operaciones básicas con fracciones, por lo que sigue en el nivel en proceso. La segunda estudiante, E2, según las respuestas proporcionadas, se mantiene en el nivel fortaleza, pues opera sin alguna dificultad la suma, resta, multiplicación y división de fracciones. Explica los procedimientos empleados y ubica las fracciones en la recta numérica (véase la Figura 11).

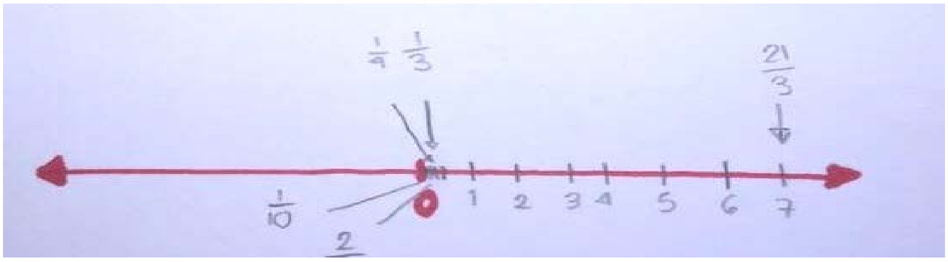


Figura 11. Producción de E2 al ubicar las fracciones en la recta numérica.

En cambio la estudiante E3 se mantiene en debilidad, pues sus contestaciones son muy deficientes respecto a las operaciones con fracciones, justifica haber olvidado (véase la Figura 12). cómo se resuelven los ejercicios, se le dificulta ubicar las fracciones en la recta numérica.

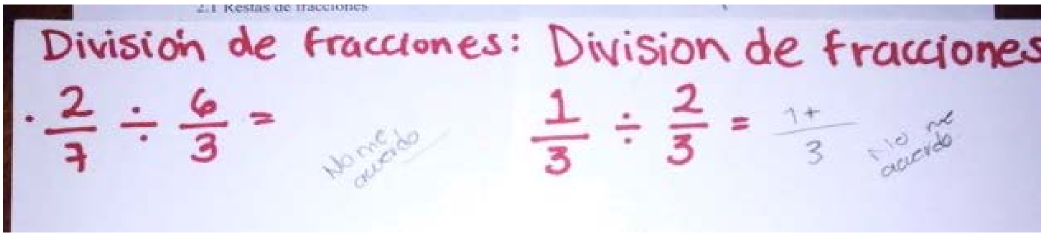


Figura 12. E3 responde haber olvidado el procedimiento.

De las entrevistas surge una reflexión respecto a si el futuro profesionista de educación especial está preparado para asesorar pedagógicamente a los maestros que en sus aulas tengan estudiantes con discapacidad, cuando el nivel de conocimiento matemático que presentan está ubicado en la categoría debilidad. Es pertinente mencionar que para este nivel educativo (licenciatura en educación especial en México), las y los estudiantes ya han cursado seis años de educación primaria, tres de educación secundaria y tres de bachillerato, en los cuales se han tratado el tema de fracciones.

De acuerdo con los resultados obtenidos en el cuestionario y a lo profundizado en las entrevistas, se evidencia que existe un limitado conocimiento común del contenido matemático (Hill, Ball y Schilling, 2008) de fracciones; es decir, el conocimiento que es usado en formas comunes a como se emplea en otras profesiones u ocupaciones.

7. Conclusiones y reflexiones

Respecto a la formación de futuros profesionistas, se evidenció que no basta con solo saber matemáticas para poder enseñarlas, pues éstas requieren de un tratamiento particular, tampoco es suficiente tener una formación disciplinar respecto a las afecciones presentes en la educación especial. Se requiere de un equilibro para poder promover una educación integral para las futuras generaciones. En ese sentido, es imperante la preparación desde la formación inicial de los estudiantes en áreas del conocimiento común (como son el español, matemáticas, ciencias, etc.) de la educación básica, pues esto permitiría una verdadera inclusión educativa en matemáticas (Aké, 2016; López-Mojica y Ojeda, 2013). Como lo plantea Larrain (2016) “para poder diseñar procesos de enseñanza y aprendizaje que se acomoden a las características de los alumnos, los docentes necesitan poseer conocimientos relevantes acerca del razonamiento matemático de sus estudiantes” (p. 159). Lo anterior aplicaría para la educación especial, es decir, no es enseñarles las matemáticas como tal, sino identificar los procesos que desarrolla el niño con discapacidad para poder promover su pensamiento matemático (López-Mojica, 2013).

De la propuesta institucional solo se tratan las operaciones básicas de la aritmética, descuidando por ejemplo los temas de geometría o probabilidad y estadística. Se identificó una carencia en temas matemáticos para ejercer y a atender a la diversidad, teniendo en cuenta el principio de igualdad y equidad para lograr el óptimo desarrollo de niños, niñas y jóvenes que se encuentran escolarizados en el sistema educativo y propiciar su pleno aprendizaje matemático siendo uno de los principales desafíos del profesionista en educación especial.

Según las contestaciones de las y los estudiantes, la mayoría se ubica en la categoría en debilidad. Con frecuencia hacen mal uso de la representación de la fracción, presentan problemas en ubicarla en la recta numérica, además del mal uso de los algoritmos para la suma, resta, multiplicación y división. En las entrevistas, de las tres participantes seleccionadas, no se vio un avance, las reflexiones en éstas permitieron argumentar su limitado conocimiento matemático.

Lo anterior es preocupante pues ellos serán quienes orienten a los docentes de educación especial y primaria regular que tengan niños con discapacidad en sus aulas. Por lo que, si no dominan los temas básicos de la educación regular en matemáticas, no tendrán elementos para una adecuada orientación, evaluación o implementación de estrategias pedagógicas requeridas según la discapacidad de que se trate.

Bibliografía

Aké, L. P. (2016). Matemáticas y educación especial: Realidades y desafíos en la formación de profesores. En J. López-Mojica y J. Cuevas (Coords.). *Educación especial y matemática educativa: Una aproximación desde la formación docente y procesos de enseñanza* (pp. 15-31). México: CENEJUS.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J. y Garza, A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Castells, M. (1999). *La Era de la Información: Economía, Sociedad y Cultura*. México: Siglo XXI.

CICA (2011). *Curriculum Integrado Centrado en el Aprendizaje. Licenciatura en Educación Especial*. México: Universidad de Colima.

Chiner, C. (2011*). Las percepciones y actitudes del profesorado hacia la inclusión del alumnado con necesidades educativas especiales como indicadores del uso de prácticas educativas inclusivas en el aula*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Alicante: España.

Declaración de Salamanca (1994). *Marco de Acción sobre Necesidades Educativas Especiales*. España: UNESCO.

diSessa, A. (2007). An interactional analysis of clinical interviewing. *Cognition and instruction, 25*(4), 523-565.

Fernández, J. M. (2008). La investigación en educación especial. Líneas temáticas y perspectivas de futuro*. Revista Perfiles Educativos*, *XXX*(119), 7-31.

García-Díaz, I. (2012). *Un estudio sobre el concepto de fracción en situaciones de medición, división y la relación parte-todo con estudiantes de nivel medio superior*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Guajardo, E. (2010). La desprofesionalización docente en educación especial. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva, 4*(1), 105-126.

Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008). Upacking pedagogical content knoledge conceptualizing and measuring teachers´topic-specific knowledge of students. *Journal of Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Larrain, M. (2016). Comprensión del razonamiento matemático de los estudiantes: una práctica pedagógica inclusiva. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática-UNION, 45*, 152-161.

López-Mojica J.M. y Ojeda A. M. (2013). La formación matemática del docente de Educación especial: una experiencia con estocasticos. En J. Carrillo, V. Ontiveros y P. Ceceñas (Coords). *Formación docente: Un análisis desde la práctica* (pp. 18-38). México: Red Durango de investigadores educativos.

López-Mojica, J. M. (2013). *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial*. Tesis de Doctorado no publicada. DME-Cinvestav, México.

Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed.). *Matemática Educativa, treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual* (195-214). México: Santillana.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Tamayo y Tamayo, M. (2008). *El proceso de la investigación científica*. México: Editorial Limusa.

Tec, M., Martín, S. y Pérez, M. (2011). *Educación especial en México y América Latina*. México: Trillas.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.

Zazkis, R. y Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics educations research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(4), 429-439.

Autores:
J. Marcos López-Mojica: Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, por el Cinvestav-IPN. Profesor-Investigador de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Líneas de investigación: Matemática Educativa Inclusiva y Comprensión de ideas fundamentales de probabilidad en edades tempranas. **mojicajm@gmail.com**

Lilia P. Aké: Doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Profesora-Investigadora de la Universidad de Colima, México. Líneas de investigación: Razonamiento algebraico y formación de profesores de matemáticas. **lake86@gmail.com**

Karina Cruz: Estudiante de Maestría en Educación en el Instituto de Educación Superior Federico Rangel. Licenciada en Educación Especial por la Universidad de Colima. Directora de la Escuela Primaria “Lázaro Cárdenas del Río”, Jalisco, México. **kari_cruzz@hotmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 46-67

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Modelo de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Combinação Simples

Jean Lázaro da Encarnação Coutinho, Jonei Cerqueira Barbosa

Fecha de recepción: 06/06/2017
Fecha de aceptación: 07/03/2018

Resumen	Este artículo presenta un estudio en el que se modeló una Matemática para la enseñanza del concepto de combinación simple, estructurado metodológicamente en el estudio del concepto, a través de una revisión sistemática de la literatura y del estudio colectivo de los maestros que trabajan en la educación primaria, secundaria y / o superior, con experiencia en la enseñanza del análisis combinatorio. Presentamos un modelo, en el que fueron clasificados cuatro panoramas: formal, instrumental, ilustrativos y comparativos. El resultado aporta un modelo que tiene potencial para la formación de los profesores y otras investigaciones en el campo de la educación matemática. ***Palabras clave:*** Matemáticas para la Enseñanza; Estudio de concepto; profesores; Análisis combinatorio.
Abstract	This article presents a study to set a model of Mathematical for Teaching the concept of simple combination. Its methodology consists of a concept study from a systematic review of literature and a collective study with teachers from primary, secondary, and/or higher education with experience in teaching combinatory analysis. The article presents a model categorized into four landscapes: formalist, instrumental, illustrative and comparative. The results bring a model that presents potential possibilities for teacher training and other researches in Mathematics education. ***Keywords:*** Mathematics for Teaching; Concept Study; Teachers; Combinatory Analysis.
Resumo	Este artigo apresenta um estudo no qual modelamos uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples,* estruturado metodologicamente no Estudo do Conceito a partir de uma Revisão Sistemática da literatura e do estudo coletivo com professores atuantes nos níveis fundamental, médio e/ou superior com experiência no ensino de Análise Combinatória. Apresentamos um modelo, no qual foram categorizados quatro panoramas: formalista, instrumental, ilustrativo e comparativo. O resultado traz um modelo que apresenta potencialidades para a formação de professores e para outras pesquisas no campo da Educação Matemática. ***Palavras-chave:*** Matemática para o Ensino; Estudo do Conceito; Professores; Análise Combinatória.

1. Introdução

Pesquisas, na área de Educação Matemática, discutem a ocorrência de uma matemática específica mobilizada por professores em suas tarefas de ensinar[1] que difere daquela mobilizada por profissionais de outras áreas diferentes do ensino (Adler, 2005; Bednarz & Proulx, 2009; Davis & Renert, 2009, 2012, 2014; Davis & Simmt, 2006). Esses autores discutem essa especificidade em termos de Matemática para o Ensino. Essa orientação nos permite investigar maneiras como essa especificidade se manifesta, tomando como parâmetro as fontes associadas à tarefa de ensinar do professor, como por exemplo, no modo como o professor ministra suas aulas, os textos dos livros didáticos que ele utiliza, as atividades que propõe, a forma de apropriação das orientações dos documentos oficiais que orientam a educação, entre outros.

Nesse cenário de especificidades que envolvem a tarefa de ensinar do professor de Matemática, nosso estudo enfocou as formas como determinado conceito matemático[2] vem sendo comunicado nos diversos contextos atrelados ao ensino. O foco em conceito matemático justifica-se por sua importância para a Matemática e pela diversidade de suas interpretações (Silveira, 2006). Sobre essa importância, Fernandes, Carvalho & Carvalho (2010) sintetizam pesquisas que evidenciam as potencialidades das diversas representações associadas a um determinado conceito que permitem diferentes formas de comunicá-lo, como exemplo, indicam o uso de tabelas, modelos concretos e listagens como formas de comunicar conceitos frentes a problemas combinatórios. Pessoa & Borba (2009) corroboram a necessidade de possibilitar situações diversas no ensino que permitam ao aluno estabelecer relações e construir seus próprios entendimentos.

As discussões suscitadas até aqui sugerem a existência de uma variabilidade de formas de como o professor de Matemática deve lidar/trabalhar com um conceito, em sua tarefa de ensinar. Essa inferência nos despertou o interesse por investigar essas possíveis formas de comunicação permeadas por aquela variabilidade. Neste estudo, interessa-nos o conceito de *combinação simples.* Consideramos que "*combinação simples* de *n* elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos" (Santos, Mello & Murari, 2007, p. 62).

A escolha por esse conceito específico se justifica por ele ter sido indicado na literatura como um dos conceitos de maior dificuldade no ensino e aprendizagem de Matemática (Alves & Segadas, 2012; Correa & Oliveira, 2011), resultante das dificuldades de se tratar a irrelevância que a mudança de ordem dos elementos escolhidos tem na formação dos agrupamentos (Pessoa & Borba, 2009; Santos-Wagner, Bortoloti & Ferreira, 2013).

Nossos materiais de análise provêm de duas fontes: a literatura científica publicada em periódicos de Educação Matemática, no Brasil, de 2004 a 2014, que

[1] Concebemos como tarefa de ensinar toda situação associada ao ensino, por exemplo, planejamento e execução de uma aula.

[2] Tomamos a definição de conceito matemático como uma combinação da palavra que indica o tema em discussão e seus símbolos, imagens, metáforas, analogias e outros recursos textuais que se reconhecem como parte da Matemática (Davis & Renert, 2009).

discute o conceito de *combinação simples* (Coutinho & Barbosa, 2016a), e um curso que reuniu professores de vários níveis de ensino e tempos de carreiras diferentes com experiência em Análise Combinatória (Coutinho & Barbosa, 2016b), contextos que serão caracterizados ao longo do trabalho.

A seguir, com o intuito de definir nosso objetivo em termos mais específicos, discorreremos sobre o que consideramos Matemática para o Ensino. Em seguida apresentaremos as informações obtidas em cada fonte já mencionada, e os analisaremos conjuntamente.

2. A Matemática específica do professor e o Estudo do Conceito

Como dito anteriormente, há uma especificidade na tarefa de ensinar do professor de Matemática que a difere da forma como outros profissionais mobilizam a Matemática em suas tarefas (Adler, 2005; Davis & Renert, 2009, 2012). Buscando uma ilustração para essas especificidades, Davis & Renert (2012) trazem um exemplo apresentado por Ball & Bass (2003), que evidenciam a diferença entre a tarefa do investigador matemático (formular e demonstrar teoremas e fórmulas matemáticas, por exemplo) e a tarefa do professor (descompactar a Matemática com objetivo de ensino).

As discussões sobre essa forma específica de mobilizar a Matemática utilizada pelos professores podem ser denominadas Matemática para o Ensino (Adler, 2005; Davis & Renert, 2014). Adler & Davis (2011) apresentam a Matemática para o Ensino como uma descrição do que ocorre na ação escolar do professor. Davis & Renert (2014) corroboram e substanciam que essa definição perpassa a organização e execução de uma aula em todas as suas nuances. Para os mesmos autores, a Matemática para o Ensino é o modo como o professor se relaciona com a Matemática que lhe possibilita organizar situações de ensino, interpretar ações dos alunos e promover entendimentos da disciplina. Em termos mais objetivos, assumimos a Matemática para o Ensino como o modo como o professor mobiliza a Matemática em sua tarefa de ensinar, como a Matemática específica do professor. Dessa forma, essa ação não pode ser vista como estática, mas, sim, emergindo na ação do professor (Davis & Renert, 2014).

Segundo Bednarz & Proulx (2009), na tarefa de ensinar, os professores propõem novos caminhos e novas representações em resposta às diferentes formas de fazer dos alunos, ou seja, o professor está munido de uma variabilidade de formas de comunicar Matemática em suas tarefas. Com intuito de fazer essa variabilidade emergir e suscitar essa Matemática para o Ensino, Davis & Simmt (2006) e Davis & Renert (2009, 2012, 2014) propõem o Estudo do Conceito (EC).

O EC é uma estrutura coletiva composta por professores da qual eles compartilham e na qual confrontam suas experiências e seus modos de comunicar Matemática em suas tarefas de ensinar (Davis & Renert, 2009, 2014). Nesse contexto, os professores são convidados a identificar, questionar, propor e elaborar metáforas, analogias, exemplos, aplicações de um determinado conceito matemático, com base no seu ensino (Davis & Simmt, 2006). A opção por trabalhar em cada EC com apenas um conceito justifica-se pelo fato de se considerar essa estrutura como ocasiões para escavar os significados existentes de conceitos (Davis & Renert, 2009), ou seja, esgotar, ao máximo, todas as possibilidades inerentes a cada conceito matemático.

Inspirados em Davis & Renert (2009), não consideramos os professores como agentes periféricos que apenas transmitem resultados matemáticos estabelecidos. Como os autores, concebemos os professores como participantes ativos na comunicação de possibilidades matemáticas que emergem da própria prática. Como estamos interessados no que o professor comunica ao ensinar, a estrutura do EC permite a observação coletiva de diversos professores, em um mesmo ambiente, e não de cada uma de suas respectivas salas de aula.

O EC está estruturado em quatro ênfases: *realizations (realizações), landscapes (panoramas), entailments (vinculações), blends (misturas)*[3] que emergem do ambiente participativo e partilhado, que gerarão divergências e convergências decorrentes das experiências dos professores participantes. Baseados nos estudos de Davis & Renert (2009, 2012, 2014), que trabalharam o conceito de multiplicação, apresentamos uma caracterização (Quadro 1) das três ênfases que discutimos neste trabalho. Assim como os autores, não temos intuito de julgar essas ênfases como certas ou erradas, mas, apenas como emergentes da tarefa de ensinar.

Quadro 1 - Caracterização das ênfases do EC

Ênfase	Caracterização
Realizações	Dizem respeito às diversas formas (definições, algoritmos, metáforas, imagens, aplicações, gestos) de que o professor faz uso na sua tarefa de comunicar um conceito matemático.
Panoramas	Representam uma visão mais ampla das *realizações* de um dado conceito. Dizem respeito à categorização dessas *realizações* em estruturas maiores a partir das relações de convergências (características semelhantes) que podem existir entre elas.
Vinculações	Caracterizadas pelas discussões em torno das *realizações* e/ou *panoramas*, buscam identificar, descrever e refletir sobre as diferentes implicações e relevâncias imbricadas em cada um deles.

Fonte: Davis & Renert (2009, 2014).

Podemos dizer que a Matemática para o Ensino é uma disposição específica que representa o modo que professor mobiliza a Matemática em sua tarefa, especificidade que pode apresentar uma variabilidade de formas de ensinar Matemática (Davis & Renert, 2009). Essa variabilidade vai depender do contexto - salas de aulas, curso com professores, livros didáticos, publicações científicas, entre outros - nos quais for observado, embora contextos de mesma natureza possam, também, apresentar diferenças na captura dessa variabilidade. Cada um deles nos fornece uma versão parcial da Matemática para o Ensino. No contexto de curso com professores, o EC representa a estrutura com a qual capturamos as *realizações* do conceito de *combinação simples*. O EC está interessado em fazer emergirem dessa estrutura coletiva possibilidades para o ensino de Matemática, além de organizar sistematicamente as formas de comunicação de um determinado conceito.

Inspirados na ideia de Matemática para o Ensino (Adler, 2005; Davis & Renert, 2009, 2012, 2014), o objetivo deste estudo é modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples* em Análise Combinatória. Consideramos apenas dois contextos: publicações científicas e o estudo com professores.

[3] A ênfase *misturas* não se manifestou em nosso estudo, por isso não a discutiremos neste trabalho.

No que tange às publicações científicas, partimos de uma pesquisa realizada a partir de uma Revisão Sistemática da literatura pertinente a fim de capturar informações (*realizações* do conceito de *combinação simples*) e analisadas inspirado na estrutura do EC (Coutinho & Barbosa, 2016a). No estudo com professores, utilizamos a própria estrutura do EC para dirigir uma discussão coletiva que nos permitiu coletar os dados para a análise (Coutinho & Barbosa, 2016b). O tópico a seguir, traz os procedimentos utilizados em cada contexto.

3. Procedimentos metodológicos

A Revisão Sistemática é um método de pesquisa bibliográfica que tem como meta detectar evidências de um assunto específico disponíveis em produções científicas (Victor, 2008), utilizando métodos rigorosos de seleção da literatura e coleta de informações (Petticrew & Roberts, 2006).

Esse rigor é justificado por Ramos, Faria & Faria (2014), quando indicam que os crescentes números de publicações, cientificamente confiáveis ou não, em ambientes digitais, tornam cada vez mais complexa a seleção destes trabalhos. É importante salientarmos que as Revisões Sistemáticas não configuram, simplesmente, um resumo da literatura selecionada, já que ela tem por caráter fornecer contextos para cumprimento de um objetivo bem definido (De-La-Torre-Ugarte-Guanillo, Takahashi & Bertolozzi, 2011; Petticrew & Roberts, 2006).

Utilizando tais pressupostos, Coutinho & Barbosa (2016a) listou a seleção de alguns periódicos brasileiros do campo da Educação Matemática classificadas pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - nas áreas de Educação e Ensino – com *qualis* A1 à B2, resultando a seleção em uma lista com oito periódicos (Quadro 2). A busca foi feita por títulos, resumos, palavras-chave e, quando necessário, leitura completa dos textos, chegando a uma lista de dez artigos, (Quadro 2) para posterior análise (Coutinho & Barbosa, 2016a).

Quadro 2 - Relação dos periódicos e artigos selecionados

Periódicos selecionados	Quantidade de artigos	Autores
ACTA SCIENTIAE - Revista de Ensino de Ciências e Matemática	01	Alves e Segadas (2012)
ALEXANDRIA - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia	01	Azevedo e Borba (2013a)
BOLEMA - Boletim de Educação Matemática	02	Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009); Serrazina e Ribeiro (2012).
BOLETIM GEPEM	00	-
Educação Matemática em Revista (São Paulo)	02	Borba e Azevedo (2012); Barreto e Borba (2012).
EMP – Educação Matemática Pesquisa	04	Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010); Landín e Sánchez (2010); Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013); Borba, Pessoa e Rocha (2013).
EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana	01	Pessoa e Borba (2010)

JIEEM - Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	01	Vega e Borba (2014)
Revista Eletrônica de Educação	01	Azevedo e Borba (2013b)
ZETETIKÉ - Revista de Educação Matemática	01	Pessoa e Borba (2009)

Fonte: Coutinho & Barbosa (2016a, p. 7)

Salientamos que os artigos listados no quadro anterior apresentaram – implícita ou explicitamente - formas de *realizações* do conceito de *combinação simples*.

Para identificar as *realizações* de *combinação simples* comunicadas por professores de Matemática no ensino deste conceito, utilizamos como contexto o EC (Davis, 2012; Davis & Renert, 2009, 2014; Davis & Simmt, 2006; Rangel & Giraldo; Maculan, 2014). Inspirados nos pressupostos do EC, compomos um grupo de seis professores atuantes nos níveis de ensino fundamental (6 – 14 anos), médio (15 – 18 anos) e superior (a partir de 18 anos) em instituições de ensino da cidade de Barreiras, cuja motivação foi um curso de extensão promovido no campus do Instituto Federal da Bahia, localizado na própria cidade. Para utilizarmos as potencialidades da estrutura colaborativa/coletiva proposta no Estudo do Conceito (Davis & Renert, 2009, 2014; Davis & Simmt, 2006) e capturarmos a Matemática que o professor pode mobilizar, ao comunicar o conceito de *combinação simples* em suas ações, o grupo (Quadro 3) foi formado com certos critérios como:

a) características em comum associadas ao tópico que está sendo pesquisado; no nosso trabalho, todos eram professores de Matemática com experiência no ensino de AC;
b) a heterogeneidade dos contextos no qual ocorrem suas práticas – no nosso trabalho, foram escolhidos professores que atuam em diferentes níveis de ensino;
c) anos de docência diferentes.

Quadro 3 - Perfil dos professores participantes[4]

Identificação[5]	Formação inicial	Tempo de docência	Nível de atuação em que trabalha ou trabalhou com ac
Professor Alberto	Licenciatura em Matemática	32 anos	Fundamental
Professor Biano	Licenciatura em Matemática	15 anos	Médio
Professora Carla	Licenciatura em Matemática	12 anos	Médio e Superior
Professor Diogo	Licenciatura em Matemática	13 anos	Fundamental, Médio e Superior
Professora Elba	Licenciatura em Matemática	15 anos	Fundamental e Médio
Professor Fausto	Licenciatura em Matemática (em curso)	06 meses	Médio

Fonte: Coutinho & Barbosa (2016b, p. 790)

[4] Resultado da aplicação de um questionário para caracterização.
[5] Na assinatura do Termo de Consentimento Livre e Declarado, os professores optaram por utilizar pseudônimos que foram escolhidos pelos pesquisadores.

O grupo foi convidado a refletir coletivamente, analisar e elaborar entendimentos sobre o conceito de *combinação simples* em AC. Os encontros foram devidamente registrados em gravações audiovisuais, além das anotações feitas com a observação dos pesquisadores, que foram posteriormente analisadas, para identificar as diferentes formas de *realizações* utilizadas ou comunicadas pelos professores.

Davis & Simmt (2006) evidenciam que o papel do pesquisador no EC é de propor tarefas e organizar o ambiente de forma a suscitar as *realizações* de um dado conceito. Seguindo essa orientação, conduzimos os encontros estruturando e propondo atividades de elaborações e resoluções de problemas; elaboração de listas indicando metáforas, interpretações, analogias que comunicassem o conceito; elaboração de planos de aulas; apresentação de aulas que tinham o conceito de *combinações simples* como foco.

No nosso terceiro encontro, propusemos um problema motivador: *Em uma sala de aula há 8 alunos. De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos três alunos para representar a turma?*

Para a solução deste problema, um dos integrantes explanou que se tratava de um problema de *combinação simples.* A partir daí, lançamos a pergunta diretriz: *O que é combinação?* As primeiras respostas, com tons próximos à definição formal, já apresentavam alguns modos de *realizar* utilizados pelos professores. Como nosso intuito era identificar outras formas, passamos a questionar o grupo com outras perguntas: *O que mais? E daí? Como vocês falam sobre isso para os alunos? E quando eles não entendem que estratégias vocês usam?*

As respostas a esses questionamentos e o desenvolvimento de todas as outras atividades citadas anteriormente fizeram emergir uma diversidade de *realizações* no que diz respeito ao conceito de *combinação simples* utilizadas pelos professores em suas tarefas de ensinar.

A partir das listas de *realizações* identificadas nos dois contextos propostos - publicações científicas e estudo com professores - enquadramos nossa análise na estrutura do EC. Sendo assim, após identificação e descrição das *realizações*, nós as organizamos em *panoramas*, propusemos uma discussão em torno de suas *vinculações* e sugerimos um modelo teórico de uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples* em Análise Combinatória.

4. Realizações do conceito de combinação simples

Como dito anteriormente, as *realizações* são as diversas formas (definições, algoritmos, metáforas, imagens, aplicações, gestos) de que o professor faz uso, na sua tarefa de comunicar um conceito matemático (Davis & Renert, 2014).

Passamos, agora, a apresentar, descrever e exemplificar todas as *realizações* identificadas (Quadro 4) com o intuito de construir *panoramas*. Nessa seção, vamos evidenciar como o conceito de *combinação simples* aparece, ou é entendido, pelos autores (nos artigos selecionados) e pelos professores durante o desenvolvimento do curso. Além disso, pretendemos evidenciar características semelhantes nas realizações que nos permitiram a elaboração dos *panoramas*.

Quadro 4 - Lista de *realizações* identificadas[6]

Realização identificada	Ocorrência na literatura	Ocorrência no curso com professores	Breve descrição
Diagrama de árvores das possibilidades	X	X	Tem como característica permitir a visualização e ilustração da estrutura da solução de um problema a partir da composição desta solução.
Tabelas	X		Tem como característica a representação de todas as possibilidades de combinação inerentes ao problema.
Desenhos	X		Assim como a tabela, tem como característica a representação de todas as possibilidades de combinação inerentes ao problema por meio de ilustrações dos objetos que compõem a situação.
Listagens dos agrupamentos	X	X	Tem como característica a enumeração das possibilidades de agrupamentos válidos na situação em questão, buscando esgotar todas as possibilidades.
Contagem dos agrupamentos usando modelos concretos ou virtuais	X	X	Além da visualização da solução, tem por característica permitir a manipulação dos objetos que compõem a solução de modo a representar as possibilidades de agrupamentos válidos.
Ordenação irrelevante dos elementos	X	X	Tem por característica comunicar que a ordenação dos elementos na composição dos agrupamentos não gera novas possibilidades.
Comparação com arranjo	X	X	Tem como propósito contrastar duas técnicas de contagem, arranjos e *combinações simples*, evidenciando a irrelevância na ordem dos elementos que compõem os agrupamentos quando se trata de combinação.
Definição formal	X	X	Tem como propósito apresentar os agrupamentos das *combinações simples* de modo formal, evidenciando as relações e propriedades que precisam ser consideradas na formação desses agrupamentos.
Fórmula	X	X	Tem por característica permitir a contagem de todos os agrupamentos de *combinações simples* sem a necessidade de enumeração.

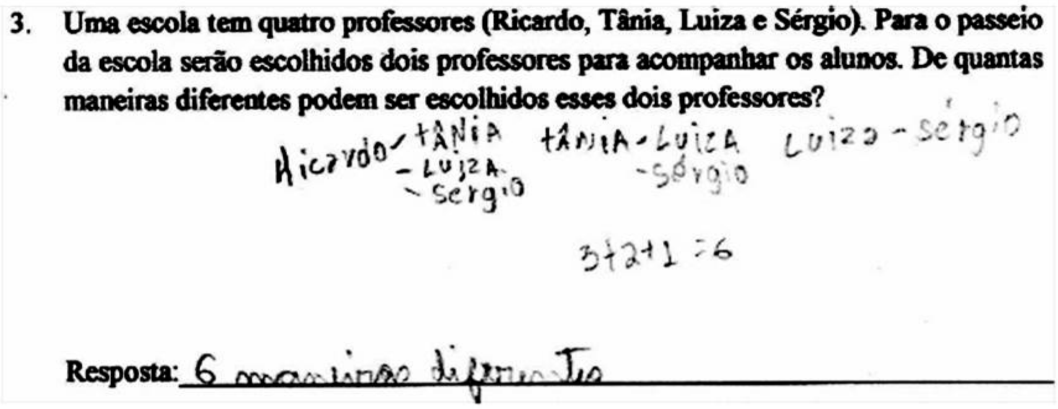
Fonte: Elaborado pelos autores

[6] A marcação com "X" informa que a realização ocorreu naquele contexto.

No intuito de ilustrar e fundamentar a descrição feita no quadro anterior, apresentamos, agora, uma série de exemplos das *realizações* do conceito de *combinação simples* retirados da literatura pesquisada ou do estudo com os professores. Ainda que a ocorrência tenha sido identificada tanto na literatura, quanto no curso com professores, optamos por apenas um exemplo para ilustrar cada *realização*.

Azevedo & Borba (2013a), em trabalho que analisou a influência do diagrama de árvores das possibilidades no ensino e a aprendizagem de Combinatória apresentaram a solução de um aluno pesquisado (Figura 1) que exemplifica o uso de tal diagrama.

Figura 1 - Exemplo da utilização da árvore de possibilidades


3. Uma escola tem quatro professores (Ricardo, Tânia, Luiza e Sérgio). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?

Ricardo - Tânia
- Luiza
- Sergio

Tânia - Luiza
- Sérgio

Luiza - Sergio

3+2+1 =6

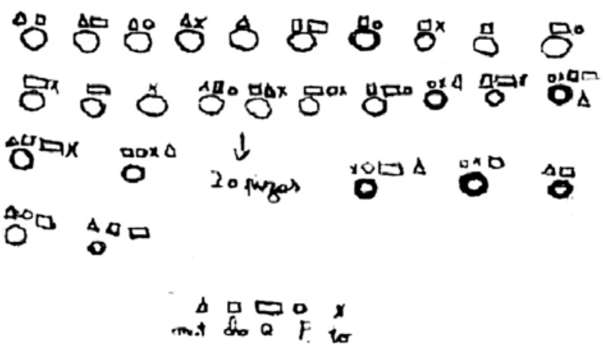
Resposta: 6 maneiras diferentes

Fonte: Azevedo & Borba (2013a, p. 133)

Corroborando com a descrição feita no Quadro 4, inferimos que a utilização do diagrama objetiva a organizar e ilustrar os agrupamentos que devem ser considerados na solução.

Serrazina & Ribeiro (2012) em estudo que explorou compreensões das interações que ocorrem num ambiente de resolução de problemas apresentam uma discussão em torno da solução de um problema de confecção de pizzas, a partir de cinco ingredientes diferentes. Na descrição dessa discussão, identificamos as *realizações* do conceito de *combinação simples* por desenho (Figura 2) e por tabela (Figura 3).

Figura 2 - Desenho utilizado por alunas na solução



Fonte: Serrazina & Ribeiro (2012, p. 1378)

Figura 3 - Tabela utilizada pela professora para apresentar a solução

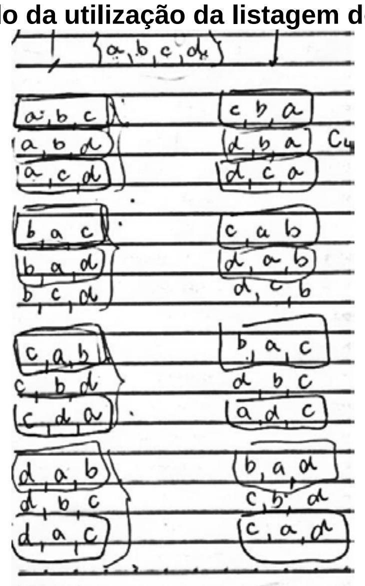
nº de ingredientes	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**TOTAL**
Combinações possíveis com ingredientes A, B, C, D, E	MASSA ou BASE	A B C D E	AB AC AD AR BC BD BE CD CE CE	ABC ABD ABE ACD ACE ADE BCD BCE BDE CDE	ABCD ABCE ABDE BCDE ACDE	ABCDE	
nº de pizzas diferentes	1	5	10	10	5	5	32

Fonte: Serrazina & Ribeiro (2012, p. 1379)

As figuras apresentadas sugerem, em consonância com a descrição do Quadro 4, que a comunicação do conceito de *combinação* por essas *realizações* tem por característica a tentativa de representar todas as possibilidades de agrupamentos válidos.

No estudo com os professores, em um problema que visava à construção de subconjuntos distintos com três elementos, a partir de um conjunto com quatro elementos {a, b, c, d}, identificamos, na solução do professor Diogo, a manifestação da listagem de agrupamentos (Figura 4).

Figura 4 - Exemplo da utilização da listagem dos agrupamentos

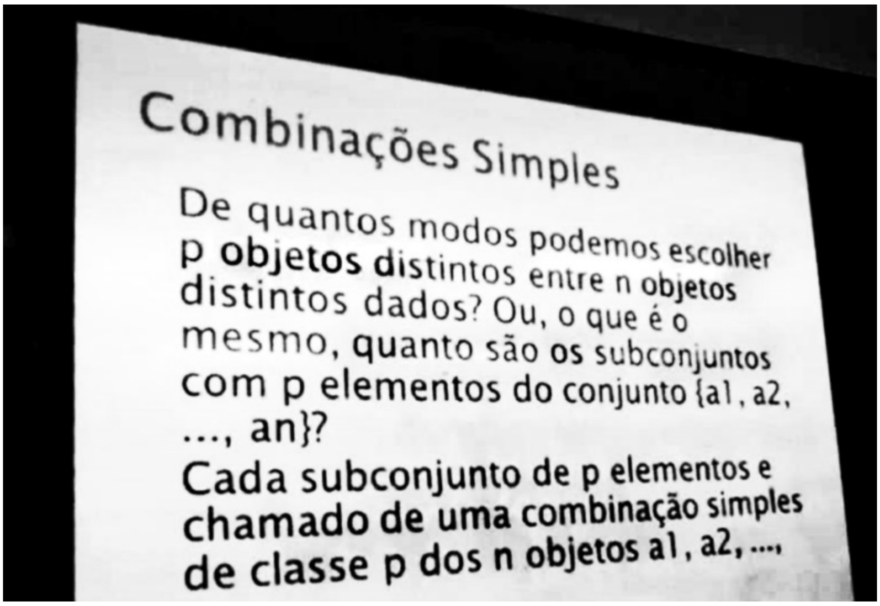


Fonte: Registros do Professor Diogo

O exemplo expresso na figura indica a tentativa do professor em enumerar todas as possibilidades para posterior contagem. Isso evidencia a descrição dessa *realização* no Quadro 4.

Um exemplo da *realização* de *combinação simples* como definição formal (Figura 5) também foi identificado no estudo com professores, durante o desenvolvimento de uma aula coordenada pelo mesmo professor Diogo.

Figura 5 – Exemplo de utilização da definição formal



Fonte: Registros do Professor Diogo

Percebemos a preocupação, nesta *realização*, da comunicação das relações e propriedades que transformam o agrupamento (subconjunto) em *combinação simples*. Dessa forma, o problema das *combinações* é saber a quantidade de maneiras diferentes com as quais podemos formar subconjuntos com *p* elementos, a partir de um conjunto com *n* elementos, sendo $p \leq n$. Cada subconjunto com *p* objetos é chamado de *combinação*.

Fernandes, Carvalho & Carvalho (2010) investigaram a influência do trabalho colaborativo no desenvolvimento da didática de duas professoras de Matemática em Combinatória. Nesta pesquisa, detectamos uma discussão entre professora e alunos (Quadro 5) em que a *realização* referente à irrelevância da ordem dos elementos na *combinação simples* emerge. Já no estudo com os professores, identificamos uma situação em que o professor Fausto faz emergir a *realização* que tem por característica a comparação com arranjo (Figura 6).

Quadro 5 - Exemplo de ordenação irrelevante e manipulação de objetos

Margarida: Ora, vamos fazer assim. Eu tenho aqui pessoas coloridas. Aluno: Oh professora, não me confunda. Aluna: Interessa escolher as pessoas, não interessa a ordem. Margarida: Não me confunda?! Eu vou te dar uma pessoa verde, uma branca e uma amarela, pode ser? Anda aqui explicar como é que o teu raciocínio bate certo. Tens aqui as pessoas, pega nelas. Pronto, então fazemos o seguinte, eu segura naquelas que tu rejeitas. Neste momento eu tenho-as todas. Aluno: Vou tirar AB. Margarida: Para já, AB. Para ti contou um caso? Aluno: Um caso.

Margarida: Um caso. E agora se a trocares de mão?
Aluno: E agora se eu a meter aí e tirar BA, é a mesma coisa.
Margarida: Por quê?
Aluna: São as mesmas cores.
Aluno: Mas são as mesmas pessoas, são é duas maneiras diferentes de escolher as pessoas.
Aluna: Mas neste caso não interessa a ordem com que são tiradas.

Fonte: Fernandes, Carvalho & Carvalho (2010, p. 65)

Quadro 6 - Exemplo da *realização* comparação com arranjo

PROBLEMA 01	**Entre quatro candidatos a, b, c e d, devem ser escolhidos três para ocupar três cargos distintos: programador, analista de sistema e supervisor de departamento de informática de uma empresa. Como os candidatos são igualmente capazes, a escolha será feita por sorteio. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?**
PROBLEMA 02	Entre quatro candidatos a, b, c e d, devem ser escolhidos três para ocupar três vagas de programador no departamento de informática de uma empresa. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?

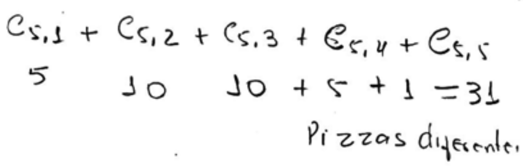
Fonte: Problemas propostos pelo Professor Fausto

Observamos que a discussão apresentada no Quadro 5, retrata a descrição desta *realização* feita no Quadro 4. Pelo Quadro 6, podemos inferir que a comunicação do conceito discutido neste estudo é feita, a partir da comparação de dois problemas cujas soluções levam ao contraste de dois agrupamentos: *combinação simples* e arranjo simples.

O mesmo Quadro 5 também evidencia a *realização* contagem de agrupamentos, utilizando modelos concretos. Na situação descrita, os agentes envolvidos manipulam os objetos característicos do problema em questão, para visualizar a irrelevância na ordem das escolhas.

Por fim, a exemplificação da *realização* do conceito, a partir da fórmula, foi identificada na tentativa de solução de um problema (Figura 6), pela professora Elba, no curso com os professores.

Figura 6 - Exemplo da realização fórmula



Fonte: Registros da Professora Elba

Solicitados a responderem quantas pizzas diferentes poderiam ser feitas a partir de 5 diferentes ingredientes, a professora Elba - enquanto outros integrantes do curso se utilizavam de listagens, diagramas, entre outros - utilizou a fórmula da *combinação simples* para a solução, chegando de forma mais rápida à resposta.

Inferimos que a utilização da fórmula permite a contagem dos agrupamentos envolvidos no problema em questão, sem que se precise enumerá-los, como sugere a descrição do Quadro 4.

A lista de *realizações* descritas nesta seção possibilita o reconhecimento da variabilidade de formas de comunicar o conceito de combinação simples. A diversidade de *realizações* de um determinado conceito pode contribuir para a organização de variadas estratégias de ensino (Rangel, Giraldo & Maculan, 2014).

No que diz respeito à Análise Combinatória, o reconhecimento dessas diversas formas de *realizar* um conceito vai ao encontro da necessidade de se considerar os variados significados e as várias representações que integram as situações combinatórias (Pessoa & Borba, 2010).

Considerando as características semelhantes entre algumas *realizações*, buscamos organizá-las em categorias mais amplas que, neste estudo, chamamos de *panoramas* (Davis & Renert, 2009, 2014). Essa categorização é apresentada, descrita e discutida na próxima seção.

5. Modelo de uma Matemática para o Ensino de combinação simples

Retomando nossa posição de modelar, teoricamente, uma Matemática para o Ensino de *combinação simples*, apresentamos, a partir de agora, os *panoramas* e *vinculações* associados a este conceito e que foram interpretados neste estudo. Ao final da seção, sugerimos um modelo dessa Matemática.

Inspirados em Davis & Renert (2009, 2014), já apresentamos os *panoramas* como uma visão em nível ampliado das *realizações* e as *vinculações* como discussões acerca das implicações e relevâncias imbricadas em cada *panorama*. Diante das características de cada *realização*, organizamos o Quadro 7.

Quadro 7 - Quadro panorâmico

	Realizações originárias	Característica principal em comum entre as realizações
Formalista	Definição formal	Caracterizado pela própria definição formal.
Instrumental	Fórmula	Caracterizado pela própria fórmula.
Ilustrativo	Contagem dos agrupamentos usando modelos concretos ou virtuais; diagrama de árvore das possibilidades; tabelas; desenhos; listagens dos agrupamentos.	Ilustração dos agrupamentos a serem contados.
Comparativo	Comparação com arranjo; ordenação irrelevante.	A ordem que os elementos são escolhidos para compor os agrupamentos não geram novas possibilidades.

Fonte: Elaborado pelos autores

No *panorama* formalista, o conceito de *combinação simples* é *realizado* pela definição formal. É caracterizado por comunicar a generalização, através de propriedades e relações, que leva ao reconhecimento de certo agrupamento como *combinação*. A estratégia utilizada na contagem é a compreensão de tais propriedades e relações que levam a contagem dos agrupamentos que satisfazem essas características.

Santos-Wagner, Bortoloti & Ferreira (2013) sublinham as formas erradas ou imprecisas com as quais os alunos descrevem conceitos combinatórios. Tratando das *combinações simples*, isso poderia ser reflexo da carga de abstração presente neste *panorama*, cuja comunicação está pautada na teoria de conjuntos. Isso pode ser visto em Lima, Carvalho, Wagner & Morgado (2004, p. 96): “Para resolver o problema das combinações simples basta notar que selecionar *p* entre os *n* objetos equivale a dividir os *n* objetos em um grupo de *p* objetos, que são os selecionados, e um grupo de *n – p* objetos, que são os não-selecionados”.

Essa situação também emergiu no curso com professores, quando o professor Diogo fez uma intervenção nesse sentido.

> Professor Diogo: Nas combinações, você está pegando subconjuntos de um conjunto. Tem que perceber, também, que esses subconjuntos pegos podem ser iguais. Que o conjunto {a, b, c, d} é a mesma coisa que o conjunto {d, c, b, a}. Então, essas situações tem que ser perceptíveis para o aluno. E, tem que perceber que você tem que ter essa diferenciação desses subconjuntos, quais são iguais e quais não são...

A preocupação do professor Diogo estava, justamente, no entendimento de que conjuntos com os mesmos elementos são considerados iguais, ou seja, se a definição formal fala em termos de subconjuntos, este não pode ser contado mais de uma vez. Dessa forma, o *panorama* formalista sugere que o entendimento sobre teoria dos subconjuntos é importante para a compreensão do que é comunicado pela definição formal de *combinação simples.*

No *panorama* instrumental, o conceito de *combinação simples* é *realizado* pela fórmula. É caracterizado por ser um procedimento mecânico em busca da contagem dos agrupamentos de *combinações simples*, sem a necessidade de listá-los através da utilização da fórmula $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. Nesta configuração, *n* representa a quantidade de elementos do conjunto do qual se quer tomar *p* elementos distintos.

As fórmulas, e por consequência o *panorama* instrumental, facilita a contagem dos agrupamentos, sem a necessidade de enumeração (Santos-wagner, Bortoloti & Ferreira, 2013). Essa vantagem destaca-se, principalmente, quando o problema traz um número grande de elementos (Pessoa & Borba, 2010), mas nem sempre é aplicada de maneira correta (Alves & Segadas, 2012).

Sobre equívocos e tentativas de enquadramento dos problemas combinatórios, e por consequência os de *combinações simples*, Santos-Wagner, Bortoloti & Ferreira (2013) trazem uma discussão entre professor e aluno:

Figura 8: Discussão sobre a utilização de fórmulas

Aluno L: [...] ele foi buscando modos pra satisfazer uma resposta [...]. Na verdade ele não compreendeu a pergunta da questão. Tipo assim ele só queria colocar isso na fórmula. Os dados que ele tinha ele queria colocar na fórmula e dar uma resposta [...]

Professor I: e porque você acha que o aluno faz isso?

Aluno L: ...ée... condicionado, a utilizar fórmulas... ele tem essa fórmula e ele tem alguns valores ele vai jogar na fórmula.

Fonte: Santos-Wagner, Bortoloti & Ferreira (2013, p. 619)

Discussões semelhantes foram registradas no curso com professores:

> Professor Diogo: Quando eu aprendi no Ensino Médio, os professores trabalhavam muito com a ideia da fórmula. E a ideia da fórmula é assim: você olhar para o problema e saber que fórmula usar? Aí, você tinha que ler o problema e não sabia se usava combinação, se usava arranjo ou que fórmula que era. [...] Como é que eu vou encaixar essa fórmula aqui? E, nem sempre, a fórmula se encaixa em determinadas situações.

> Professora Elba: Quando o aluno não tem essa apropriação do conceito, em toda situação, por mais elementar que seja, ele acha que tem que aplicar fórmula. Ele fica condicionado a só usar fórmula. O professor também já passa isso pra ele, né? Quando pergunta: *E essa questão, qual a fórmula?*

Essas discussões trazem à tona uma preocupação sublinhada por Alves & Segadas (2012) sobre a ênfase do ensino com o uso de fórmulas, "embora seja um caminho possível, não parece trazer grandes benefícios para a aprendizagem [...]" (Alves & Segadas, 2012, p. 415). E concluem que essa quase obrigatoriedade do uso de fórmula pode ser consequência da generalização precoce das técnicas de contagem.

No *panorama* ilustrativo, o conceito de *combinação simples* é comunicado através das r*ealizações*: contagem dos agrupamentos, usando modelos concretos ou virtuais; diagrama de árvore das possibilidades; tabelas; desenhos; listagens dos agrupamentos. É caracterizado por focar diversas ilustrações que permitem a visualização dos agrupamentos que estão sendo contados nos problemas de *combinações simples*. Essas estratégias ilustrativas podem auxiliar o ensino desse conceito antes de sua introdução formal (Pessoa & Borba, 2009).

Pessoa & Borba (2009) e Azevedo & Borba (2013a) sublinham que o uso do que aqui chamamos de *realizações* que compõem este *panorama* – principalmente em problemas com um número pequeno de objetos - contribuem para o fazer do aluno em Análise Combinatória e, por consequência, na comunicação do conceito de *combinação simples*, contribuindo para seu entendimento. Essa análise foi corroborada pelos professores no curso:

> Professor Fausto: Quando você trabalha só com quadro e listas de exercícios, os alunos imaginam o que tem o problema, mas talvez, o que ele imagina, não seja...

> Professor Diogo: A visualização com um modelo, por exemplo, é melhor.
>
> Professor Fausto: E, também, a gente pode manipular e desenhar. Sair daquela forma tradicional. Porque é algo mais claro. Quando você vai começar, você vai começar com problemas que envolvem valores pequenos. Então, você começa, desenhando (diagrama) e consegue contar, um por um, no diagrama de árvores. Você conta a quantidade de possibilidades para cada uma das escolhas. Então, fica bem mais claro.

Os professores discorriam sobre as potencialidades da utilização dos modelos concretos, diagrama de árvores e desenhos, para iniciarem a comunicação do conceito de combinação. As discussões em torno da fala desses professores e as indicações presentes na literatura pesquisada nos leva a sugerir que o *panorama* ilustrativo representa a visualização das *combinações*. Para Fernandes, Carvalho & Carvalho (2010), explorar o diagrama de árvores, por exemplo, pode levar a descobrir uma regra de cálculo. O *panorama* em questão pode levar a generalizações desse conceito que atendam às soluções de problemas com um número grande de objetos.

No *panorama* comparativo, o conceito de *combinação simples* é comunicado através das *realizações*: ordenação irrelevante dos elementos e comparação com arranjo. É caracterizado por comunicar o conceito de *combinação simples,* a partir do contraste com o conceito de arranjo simples, que difere, em sua natureza, pela relevância, ou não, da ordem nos elementos que compõem cada agrupamentos. Essa característica sugere que, na ocorrência deste *panorama*, o conceito de *combinação* precede o de arranjo. Borba, Pessoa & Rocha (2013) sublinham a dificuldade de alguns professores para comunicar o conceito de *combinação,* devido à irrelevância na ordem dos elementos.

A discussão proposta pelo professor Fausto, referente aos problemas apresentados na Figura 6, evidenciam o potencial deste *panorama*. Ao resolver o primeiro problema[7], professor Fausto deixou evidente que a permuta de candidatos se configurava em uma nova possibilidade. Para a solução do segundo problema[8], ele inicia, comparando com a solução do primeiro:

> Professor Fausto: No problema dois, temos, novamente, os mesmos quatro candidatos, nas mesmas situações, com a mesma capacidade. Só que eu não tenho três vagas diferentes, eu tenho uma vaga que é para programador... Se eu escolher {a, b, c} e {b, c, a}, eu vou ter os candidatos a, b e c, em ambas as situações.

Essas análises nos levam a sugerir que este *panorama* pode ser um potencial para a discussão da ordenação dos elementos nos agrupamentos nomeados por arranjos e *combinações*, uma vez que permitem comunicar os dois conceitos, ao mesmo tempo.

Diante do que foi apresentado e analisado nas duas últimas seções, apresentamos a proposta do modelo de uma Matemática para o ensino de

[7] Contar de quantas maneiras diferentes quatro candidatos poderiam ocupar três vagas distintas de analista, programador e supervisor de um departamento de informática.

[8] Contar de quantas maneiras diferentes quatro candidatos poderiam ocupar três vagas de programados de um departamento de informática.

combinação simples, a partir de um quadro-síntese (Quadro 8) que visa a convergir e complementar os Quadros 4 e 7.

Quadro 8 – Modelo

Panorama	Realizações originárias	Breve descrição	Nível de ensino com maior ocorrência[9]	A estratégia utilizada é...	O resultado é interpretado como...
Formalista	Definição formal	O conceito de *combinação simples* é *realizado* pela definição formal e é caracterizado por comunicar a generalização, através de propriedades e relações, que leva ao reconhecimento de certo agrupamento como *combinação*.	Ensino Médio e Superior.	A compreensão de propriedades e relações que levam a contagem dos agrupamentos que satisfazem as características de *combinações simples.*	Uma quantidade de agrupamentos que satisfazem as relações e propriedades pré-estabelecidas.
Instrumental	Fórmula	O conceito de *combinação simples* é *realizado* pela fórmula e é caracterizado por ser um procedimento mecânico na busca da contagem dos agrupamentos de *combinações simples* sem a necessidade de listá-los através da utilização da fórmula $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, em que *n* representa a	Ensino Médio e Superior.	Substituição na expressão $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)}$ de *n* pelo valor que representa a quantidade de elementos do conjunto do qual se quer selecionar objetos distintos e substituição de *p* pelo valor que representa a quantidade de elementos distintos que se quer escolher. Cada problema pode	O valor que resulta após operacionalização da substituição e do cálculo com base na fórmula $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

[9] Identificados a partir de análises da literatura utilizada na Revisão Sistemática e pelos próprios professores de diferentes níveis de ensino que compunham o grupo.

		quantidade de elementos do conjunto do qual se quer tomar *p* elementos distintos.		apresentar valores de *n* e *p* diferentes.	
Ilustrativo	Diagrama de árvores; Listagem dos agrupamentos; Contagem dos agrupamentos usando modelos concretos.	O conceito de *combinação simples* é comunicado através das *realizações*: contagem dos agrupamentos usando modelos concretos ou virtuais; diagrama de árvore das possibilidades; tabelas; desenhos; listagens dos agrupamentos. É caracterizado por focar diversas ilustrações que permitem a visualização dos agrupamentos que estão sendo contados nos problemas de *combinações simples*.	Ensino Fundamental e Médio.	Ilustração, a partir de uma das *realizações* que compõem o *panorama*, dos elementos que serão selecionados para compor o agrupamento em questão.	O total de agrupamentos que foram contados na ilustração escolhida para representar o problema.
Comparativo	Ordenação irrelevante dos elementos; Comparação com arranjo.	O conceito de *combinação simples* é comunicado através das *realizações*: ordenação irrelevante dos elementos e comparação com arranjo. É caracterizado por comunicar o conceito de *combinação simples* a partir do contraste	Ensino Fundamental e Médio.	Formar os agrupamentos com a quantidade de elementos requeridos no problema excluindo aqueles que diferem apenas pela ordem.	A quantidade de subconjuntos restantes após as exclusões.

		com o conceito de arranjo simples, que diferem em sua natureza pela relevância, ou não, da ordem nos elementos que compõe cada agrupamento.			

Fonte: Elaborado pelos autores

O resultado apresentado, no quadro anterior, aponta a variabilidade de formas de comunicar o conceito de *combinações simples* no ensino de Análise Combinatória, representando uma modelagem teórica.

6. Considerações finais

O objetivo deste estudo foi modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de combinação simples em Análise Combinatória. Para proceder a tal modelagem, coletamos os materiais de análise em duas fontes – publicações científicas rigorosamente selecionadas e um estudo com professores -, utilizando o Estudo do Conceito como ferramenta metodológica de estruturação.

O modelo compreende uma variabilidade de formas – aqui chamadas de realizações que foram categorizadas em panoramas – de comunicar o conceito de combinação simples, na tarefa de ensinar do professor. Há, no meio acadêmico, preocupações com as dificuldades do professor, e dos futuros professores, para tratar situações combinatórias, e, consequentemente, combinações simples (Alves & Segadas, 2012; Borba, Pessoa & Rocha, 2013). Além disso, considera-se a importância dos professores reconhecerem diferentes estratégias de comunicar um conceito matemático em sala de aula (Ribeiro, 2012). Por conta dessas análises, consideramos relevante a proposta aqui apresentada sobre o conceito de combinação simples, para o trabalho atrelado à prática de ensino.

Como sublinham Davis & Renert (2012), o objetivo deste tipo de trabalho não é criar uma Matemática formal, uma nova Matemática. Nosso interesse foi organizar, sistematicamente, possibilidades de ensino de uma Matemática já existente que circula nos ambientes formais de ensino. Essa sistematização oferece a pesquisadores e professores a variabilidade que pode ser encontrada, tendo como foco o conceito de combinação simples em Análise Combinatória.

Sugerimos a possibilidade de incorporação deste modelo na tarefa de ensinar combinações simples, como instrumento de auxilio aos professores, sobre os entendimentos das diversas formas de realizações deste conceito. Contudo, investigações sobre os impactos desses tipos de modelos – como o proposto neste estudo - no ensino, talvez, ainda estejam em fase embrionária nos estudos científicos (Davis & Renert, 2014).

É importante destacar que o modelo será enriquecido quanto mais fontes de materiais para análise forem observadas. Tudo isso conduz à necessidade de continuidade desta investigação, em pesquisas futuras que se debrucem sobre fontes como: análise de livros didáticos, de documentos oficiais e de estudo com alunos. Entendemos que ainda há muito o que se investigar, não apenas sobre o conceito de combinação simples, mas em termos de Matemática para o Ensino de Análise Combinatória.

O que apresentamos aqui foram resultados iniciais dessa agenda de pesquisa em Educação Matemática, na qual identificamos e discutimos a variabilidade de formas de comunicar o conceito de combinação simples na tarefa de ensinar do professor de Matemática.

Referências

Adler, J. (2005). Mathematics for teaching: what is it and why is it important that we talk about it? *Pythagoras:* University of the Witwatersrand.

Adler, J. & Davis, Z. (2011). Modelling teaching in mathematics teacher education and the constitution of mathematics for teaching. In: Rowland, T. & Ruthven, K. (Ed.) *Mathematical knowledge in teaching.* New York: Springer Netherlands.

Alves, R. & Segadas, C. (2012). Sobre o ensino da análise combinatória: fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas. *Acta Scientiae*, 14 (3), 405-420.

Azevedo, J. & Borba, R.E.S.R. (2013a). Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. *ALEXANDRIA- Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 6(2), 113-140.

__________________ (2013b). Construindo árvores de possibilidades virtuais: o que os alunos podem aprender discutindo relações combinatórias? *Revista Eletrônica de Educação*, 7(2), 39-62.

Ball, D.L. & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: Simmt, E. & Davis, Brent (Ed.). *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Canadá.

Barreto, F.L.S. & Borba, R.E.S.R. (2012). Estudantes de anos iniciais da Educação de Jovens e Adultos resolvendo problemas combinatórios com listagens e com árvores de possibilidades. *Educação Matemática em Revista (São Paulo)*, 35, 1-12.

Bednarz, N. & Proulx, J. (2009) Knowing and using mathematics in teaching: conceptual and epistemological clarifications. *For the learning of mathematics*, 29(3), 1-7. Disponível em: < http://flm-journal.org/Articles/90007B35446B191D39748441966D2.pdf> Acesso em: 01 ago. 2015.

Borba, R.E.S.R. & Azevedo, J. (2012). Construindo árvores de possibilidades para compreensão de relações combinatórias. *Educação Matemática em Revista (São Paulo)*, 31, 24-32.

Borba, R.E.S.R.; Pessoa, C.A.S. & Rocha, C.A. (2013). Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios. *Educação Matemática Pesquisa*, 15 (n. esp), 895-908.

Correa, J. & Oliveira, G. (2011). A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. *Educar em Revista*, 1(n. esp.), 77-91.

Coutinho, J.L.E & Barbosa, J.C. (2016a) Uma Matemática para o Ensino do conceito de combinação simples a partir de uma revisão sistemática de literatura. *EM TEIA| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 6 (2).

Coutinho, J.L.E & Barbosa, J.C. (2016b) Uma Matemática para o Ensino do conceito de combinação simples a partir de um estudo com professores. *Educação Matemática Pesquisa*, (São Paulo), 18 (2), 783-808.

Davis, B. (2012). Subtlety and complexity of mathematics teachers' disciplinary knowledge. In… *International Congress on Mathematical Education, 12*. Seoul, Korea: ICME.

Davis, B. & Renert, M. (2009). Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*, 29(3), 37-43.

___________________ (2012). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 245-265.

___________________ (2014). *The math teachers know: profound understanding of emergent mathematics*. New Yor: Routledge.

Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics,* 61(3), 293-319.

De-la-Torre-Ugarte-Guanilo, M.C.; Takahashi, R.F. & Bertolozzi, M.R. (2011). Revisão sistemática**:** noções gerais. *Revista da Escola de Enfermagem da USP*, 45(5), 1260-1266.

Fernandes, J.A.; Carvalho, B.A. & Carvalho, C.F. (2010). O trabalho colaborativo como meio de desenvolver o conhecimento didático de duas professoras em combinatória. *Educação Matemática Pesquisa,* 12(1), 43-74.

Groenwald, C.L.O.; Zoch Neto, L. & HOMA, A.I.R. (2009). Sequência didática com análise combinatória no padrão SCORM. *Bolema,* 22(34), 27-56.

Landín, P.R. & Sánchez, E. (2010). Níveis de razonamiento probabilístico de estudantes de bachillerato frente a tareas de distribucíon binomial. *Educação Matemática Pesquisa,* 12(3), 598-618.

Lima, E.L.; Carvalho, P.C.P.; Wagner, E. & Morgado, A.C. (2004). *A matemática do ensino médio (2).* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

Pessoa, C.A.S. & Borba, R.E.S.R. (2009). Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetiké,* 17(31), 105-150.

___________________ (2010). O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. *EM TEIA Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana,* 1(1).

Petticrew, M. & Roberts, H. (2006). ***Sistematic reviews in the social sciences:** a practical guide.* Oxford: Blackwell.

Ramos, A.; Faria, P.M. & Faria, Á. (2014). Revisão sistemática de literatura: contributo para a inovação na investigação em Ciências da Educação. *Revista Diálogo Educacional,* 14(41), 17-36.

Rangel, L.; Giraldo, V. & Maculan, N. (2014). Matemática elementar e saber pedagógico de conteúdo: estabelecendo relações. *Professor de Matemática Online – SBM,* 2(1), 1-14.

Ribeiro, A.J. (2012). Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a educação matemática. *Bolema: Boletima de Educação Matemática*, 26(42B). Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/> Acesso em: 02 ago. 2013.

Santos, J.P.O.; Mello, M.P. & Murari, I.T.C. (2007). *Introdução à análise combinatória.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.

Santos-Wagner, V.M.P.; Bortoloti, R.D.M. & Ferreira, J.R. (2013). Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa***,** 15(3), 606-629.

Serrazina, M.L. & Ribeiro, D. (2012). As Interações na atividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da capacidade de comunicar no ensino básico. *Bolema,* 26(44), 1367-1393.

Silveira, M.R.A. (2006). O conceito em matemática e seus contextos. *Educação Matemática em Revista*, 13(20/21), 47-58.

Vargas, P.R.L. & Sánchez, E. (2010). Níveis de razonamiento probabilístico de estudantes de bachillerato frente a tareas de distribucíon binomial. *Educação Matemática Pesquisa,* 12(3), 598-618.

Vega, D.A. & Borba, R.E.S.R. (2014). Etapas de escolha na resolução de produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 7(3).

Victor, L. (2008). *Systematic reviewing*. Social research update, Surrey, n. 54.

DADOS DOS AUTORES:

COUTINHO, Jean Lázaro da Encarnação:

É Mestre em Educação pela Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia (FACED-UFBA). Possui Especialização em Educação Matemática pela Universidade Católica de Salvador (UCSal). Atualmente Professor de Matemática e Educação Matemática no Instituto Federal da Bahia (IFBA). jeancoutinho@ifba.edu.br

BARBOSA, Jonei Cerqueira:

Possui pós-doutorado na London South Bank University (2008) e na University of London (2013-2014). Atualmente, é professor adjunto do Departamento II da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia (UFBA). É professor permanente no Programa de Pós-Graduação em Educação da UFBA e no Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da UFBA/UEFS. jonei.cerqueira@ufba.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 68-86

Esquemas mobilizados por crianças da Educação Infantil em uma situação envolvendo chance

Irlene Silva de Almeida, Verônica Yumi Kataoka, Aida Carvalho Vita, Eurivalda R. dos S. Santana

Fecha de recepción: 17/08/2017
Fecha de aceptación: 25/07/2018

Resumen	En este artículo se pretende analizar los esquemas movilizados por niños de la Educación Infantil de una escuela privada del sur de Bahía, en la resolución de una situación que involucra el campo conceptual de chance. El diseño del estudio consistió en la aplicación de la Secuencia de Enseñanza Paseos Aleatorios del Jefferson 3 amigos, cuyos resultados fueron analizados a la luz de la Teoría de los Campos Conceptuales. Esta Teoría concibe los esquemas como una organización invariante de la actividad para una clase de situaciones dada. Los resultados mostraron la utilización de invariantes operativos (conceptos en acción y teoremas en acción) por los sujetos involucrados y una noción intuitiva del concepto de chance lo que puede favorecer su inserción aún en la Educación Infantil. **Palabras-claves**: Esquemas; Chance; Educación Infantil; Teoría de los Campos Conceptuales.
Abstract	The objective of this article is to analyze the schemes mobilized by children of the Kindergarten of a private school in the south of Bahia, in the resolution of a situation involving the conceptual field of chance. The design of the study consisted in the application of the Teaching Sequence Jefferson's Random Walks 3 friends, whose results were analyzed in the light of Theory of Conceptual Field. This theory conceives of schemas as an invariant organization of activity for a given class of situations. The results showed the use of operative invariants (concepts in action and theorems in action) by the subjects involved and an intuitive notion of the concept of chance which may favor their insertion even in Kindergarten. **Keywords**: Schemas; Chance; Kindergarten, Theory of Conceptual Field.
Resumo	Neste artigo objetiva-se analisar os esquemas mobilizados por crianças da Educação Infantil de uma escola privada do sul da Bahia, na resolução de uma situação envolvendo o campo conceitual de chance. O design do estudo consistiu na aplicação da Sequência de Ensino Passeios Aleatórios do Jefferson 3 amigos (SE PAJ3), cujos resultados foram analisados à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Essa Teoria concebe os esquemas como uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dada. Os resultados mostraram a utilização de invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) pelos sujeitos envolvidos e uma noção intuitiva do conceito de

chance o que pode favorecer a sua inserção ainda na Educação Infantil.
Palavras-chave: Esquemas; Chance; Educação Infantil; Teoria dos Campos Conceituais

1. Introdução

O presente estudo é um recorte de uma pesquisa de Mestrado em Educação Matemática que buscou analisar os esquemas de crianças da Educação Infantil ao resolverem situações presentes na Sequência de Ensino Passeios Aleatórios do Jefferson 3 amigos (SE PAJ3), que envolvem o campo conceitual de chance no contexto da maquete tátil.

Nesse artigo temos como objetivo analisar os esquemas mobilizados por crianças da Educação Infantil de uma escola privada do sul da Bahia, na resolução de apenas uma situação dessa sequência, envolvendo o campo conceitual de chance. Utilizamos o termo chance em acordo com a definição apresentada por Watson (2006, p. 128) como "[...] uma aproximação da probabilidade, para distinguir aspectos mais intuitivos e experimentais do estudo da probabilidade teórica baseada nos espaços amostrais". Isso significa dizer que, quando se faz uma exploração mais intuitiva e experimental em que não se modela matematicamente o cálculo de probabilidade, podemos utilizar o termo chance.

Consideramos assim, que a exploração do conceito de chance pode auxiliar a criança a formar o conceito de Probabilidade. O conhecimento de conceitos probabilísticos pode ser interessante, uma vez que estamos frequentemente em contato com eles por meio das mídias escrita e falada, por exemplo, quando são apresentados os cálculos dos riscos de incidência de doenças, as aplicações de mercado, entre outras situações cotidianas como jogos de azar, previsões meteorológicas e a chance de um time passar para a segunda fase de um campeonato, que envolvem cálculos probabilísticos. Desse modo, acreditamos que seja possível trabalhar alguns desses conceitos, com alunos da educação infantil, amparados em estudos de pesquisadores, como Fischbein (1975), Tatsis, Kafoussi, Skoumpourdi (2008) e Hodnikýadež e Škrbec (2011).

De fato, Fischbein (1975) observou que, mesmo os alunos mais jovens, baseados em intuições são capazes de externarem ideias corretas e parcialmente formadas sobre os conceitos probabilísticos. Segundo ele, esse conhecimento intuitivo deve ser aceito como certo e evidente, mesmo que não seja baseado em evidência empírica ou em argumentos lógicos rigorosos. As intuições são admitidas por este autor como componentes da inteligência em ação que se desenvolve com o indivíduo e que intervêm diretamente nas ações práticas ou mentais. Elas relacionam-se entre si, formando estruturas de raciocínio adaptáveis e influenciáveis por uma instrução sistemática e são classificadas em dois tipos: primárias e secundárias. Ele ainda esclarece que as intuições primárias são crenças cognitivas que surgem das experiências do indivíduo, sem a necessidade de instrução sistemática; já as intuições secundárias são crenças cognitivas reestruturadas, adquiridas geralmente por meio de instrução no contexto de uma tarefa específica.

O estudo de Tatsis, Kafoussi, Skoumpourdi (2008) buscou investigar as formas com que 19 crianças de 5 anos de idade expressavam verbalmente seu pensamento e, em particular, as estratégias que eles usavam para justificar seus pontos de vista, ao tentar compreender a noção de equidade de um jogo e as estratégias do professor em estabelecer essa noção. Os resultados da pesquisa apontaram que o aparecimento de argumentos verbais revela a capacidade das crianças da Educação Infantil de se envolverem significativamente em atividades relativas à noção de justiça de um jogo probabilístico. Dessa maneira, os jogos apresentados às crianças, em conjunto com o auxílio do professor no desenvolvimento de algumas intuições secundárias relativas à equidade de um jogo desempenham um papel significativo.

O estudo de Hodnikýadež e Skrbec (2011), teve como objetivo estabelecer a idade em que os alunos são capazes de diferenciar entre eventos determinados, possíveis e impossíveis e também prever a probabilidade dos mesmos. Foi realizado um teste de conhecimento, composto por seis tarefas de Probabilidade, com alunos de 4-5 anos da pré-escola. Esse teste foi realizado de forma oral, visto que, os alunos não dominavam a linguagem e a escrita completamente. Os principais resultados desse estudo indicaram que mais da metade desses alunos foram capazes de atingir os dois objetivos. Além disso, verificaram que os alunos já traziam para a escola alguns conhecimentos prévios de Probabilidade adquiridos na vida cotidiana.

Refletindo sobre os tipos de intuição apresentadas por Fischbein (1975) e sobre os resultados obtidos nas pesquisas supracitadas, inferimos que é possível a abordagem de conceitos probabilísticos com crianças da educação Infantil, visto que, o fato delas trazerem para a escola conhecimentos adquiridos no seu cotidiano atrelado ao tipo de tarefa aplicada, bem como a condução do professor, torna possível estes alunos transitarem de intuições primárias para secundárias.

Contudo, segundo Cazorla; Gusmão; Kataoka (2011), um dos fatores que dificultam a inserção efetiva do ensino de Probabilidade na educação básica refere-se à falta de materiais didáticos validados e adequados à realidade das escolas. Nesse sentido, acreditamos ser necessária a elaboração de materiais que forneçam subsídios para os professores trabalharem esses conceitos. Além disso, de acordo com Kataoka et al (2007), para apresentar intuitivamente a noção de acaso e incerteza durante o processo de ensino e aprendizagem de conceitos probabilísticos, é recomendável que o professor trabalhe com atividades que promovam aos estudantes a realização de experimentos e a observação de eventos.

No que tange o conceito de chance, Watson (2006) orienta que é importante abordá-lo relacionando-o com a tomada de decisões em diferentes contextos, inclusive fora do âmbito escolar, além de pensar neste conceito associado a situações de justiça, de equidade. De fato, esta autora, apresenta, quais devem ser as ideias e os elementos estatísticos a serem abordados na escola para o entendimento do conceito de chance, que acreditamos que podem compor o que Verganud (2009) denomina de campo conceitual. Os cinco tópicos mais importantes para o entendimento deste conceito, pensando nas crianças da educação infantil, seriam: Linguagem, Contexto, Questionamentos, Parte-todo, Justiça/equidade.

Nessa perspectiva, o delineamento do presente estudo consistiu na aplicação, com crianças de 5 anos de idade, da Sequência de Ensino Passeios Aleatórios do Jefferson 3 Amigos (SE PAJ3), a qual explora situações que envolvem os conceitos chance com eventos equiprováveis e não equiprováveis e aborda os cinco tópicos do campo conceitual de chance, a saber: Linguagem, Contexto, Questionamentos, Parte-todo, Justiça/equidade. Essa SE é composta de cinco situações, agrupadas em três etapas. Ressaltamos que, como dito, neste artigo, focamos apenas na análise da primeira situação denominada “Situação da Ciranda”, fundamentados na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), que tem sido muito utilizada em pesquisas no campo da Educação Matemática.

2. Teoria dos Campos Conceituais

Compreender como o conhecimento matemático é desenvolvido por um sujeito aprendiz tem sido objetivo de muitas pesquisas. Dentre os estudiosos que mais influenciaram a Educação a respeito do desenvolvimento cognitivo está Gérard Vergnaud que, com base em alguns conceitos da teoria de Piaget e de Vygotsky, propôs a Teoria dos Campos Conceituais (TCC). A TCC é caracterizada como uma teoria cognitivista, que visa fornecer uma base consistente para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem desde competências simples até as mais complexas, principalmente no que tange as pesquisas em Matemática.

Além disso, essa teoria preconiza que a pedra angular do desenvolvimento cognitivo é o conceito, e Vergnaud (1996) ressalta que quando o interesse está no ensino e na aprendizagem o mesmo não pode ser reduzido a uma mera definição como frequentemente é feito em sala de aula. Nesse bojo, Vergnaud (2009) define o conceito (C) como um conjunto de três elementos distintos, tal que C = (S, I, R) e:

> S é conjunto de situações/tarefas que dão sentido ao conceito; I é conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações; R conjunto de representações linguísticas e simbólicas (algébrica, gráfica...) que permitem representar os conceitos e suas relações e, consequentemente, as situações e os esquemas que eles evocam (Vergnaud, 2009, p. 29).

Para Vergnaud (2009) um conceito não pode ser ensinado de maneira isolada, pois considera que sua apreensão se efetiva a partir da interação do estudante em diversas situações (S), denominada de classe de situações, e vale salientar que uma situação por mais simples que seja, envolve vários outros conceitos. Dessa maneira, não faz sentido se referir à formação de um conceito, mas sim, de um Campo Conceitual. Um Campo Conceitual significa:

> “um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição” (Vergnaud, 1983, p.127).

Por essa definição de Vergnaud, inferimos que no processo de aquisição ou apropriação de um campo conceitual é necessário um largo período, no qual ocorrem as filiações e rupturas que se referem, respectivamente, às continuidades e descontinuidades entre os conhecimentos.

De acordo com Vergnaud (2009) é a partir dos esquemas e da interação do sujeito com o mesmo, que o conceito, envolvido numa classe de situações, ganha sentido. Para esse autor “o esquema é uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dada” (Vergnaud 2009, p. 21). Ou seja, o esquema é a maneira pela qual o próprio sujeito organiza a resolução de uma dada situação.

Refletindo sobre a definição apresentada, percebemos que por meio da análise dos esquemas, o professor é capaz de compreender como os alunos atuam frente a uma classe de situações e como eles se apropriam de um determinado conceito. Desse modo, é importante que o professor tenha conhecimento dos tipos de esquemas que podem ser mobilizados pelos alunos, enunciados por Vergnaud (1986) e apresentados no Quadro 1.

Tipo de esquema	Característica/exemplo
Algoritmo	Regra eficiente ou um conjunto de regras eficientes para resolver certa classe de situações. Permite encontrar a solução de uma situação em um número finito de passos. A eficiência de um algoritmo pode ser provada por meio de conceitos e teoremas. Exemplo: Algoritmo da divisão, algoritmo da soma.
Perceptivo-gestuais	Essa categoria está relacionada a percepções e gestos durante a resolução da situação. Também podem envolver conceitos e teoremas matemáticos. Exemplos: Contar um conjunto de objetos, desenhar um gráfico ou um diagrama.
Esquemas verbais	Está relacionada com a comunicação linguística que podem ser observadas nos conteúdos dos diálogos/discursos estabelecidos na resolução das situações Exemplo: Fazer um discurso, falar em linguagem corrente cometendo alguns erros específicos.
Esquemas sociais	Está relacionada com as interações sociais. Exemplo: Gerenciar conflitos, persuadir o professor.

Quadro 1. Tipos de esquemas
Fonte: Adaptado de Vergnaud (1986)

Segundo Vergnaud (2009) os invariantes operatórios (I) dos esquemas podem ser denominados conceitos em ação e teoremas em ação e são componentes necessários destes esquemas. Salientamos que em alguns textos desse autor o teorema em ação e o conceito em ação são chamados de conhecimentos em ação e são concebidos como elementos cognitivos que permitam operacionalização sobre os objetos.

Em linhas gerais, entende-se por conceito em ação como "um conceito considerado pertinente na ação em situação" (Vergnaud, 2009, p. 23), ou seja, é uma categoria de pensamento considerada relevante no processo de resolução da situação a partir da qual o sujeito seleciona objetos, propriedades e relações que podem conduzi-lo ao sucesso na realização da situação. Já um teorema em ação é definido como "[...] uma proposição que pode ser verdadeira ou falsa" (Vergnaud, 1998, p. 168). São relações de pensamentos que o estudante mobiliza, por meio de propriedades, regras, fórmulas entre outras, durante a resolução de uma situação, mas nem sempre são verdadeiras.

Vale pontuar que os conceitos em ação e teoremas em ação não se tratam de conceitos e teoremas científicos, pois raramente o estudante consegue explicitá-los. Isso não exime a possibilidade destes conceitos em ação e teoremas em ação se tornem de fato conceitos e teoremas científicos, para isto, basta que estes invariantes operatórios, que na maioria das vezes se apresentam de maneira implícita, sejam representados de maneira explícita.

Os invariantes operatórios configuram uma classe de relações de pensamentos, enquanto as representações simbólicas (R) (linguagem natural, gráficos, diagramas, sentenças formais, entre outras) constituem a representação destes pensamentos.

Vergnaud (1982 p. 53) apresenta duas vantagens do uso das representações simbólicas: “1° ajudar os estudantes a resolver as situações-problema; 2° ajudar os estudantes a diferenciar várias estruturas e categorias de situações-problema”. Além disso, entendemos que as representações simbólicas auxiliam o estudante no processo de resolução de uma determinada classe de situações principalmente quando há um grande número de dados ou quando envolve numerosas etapas para atingir o objetivo.

Assim, a definição de conceito que apresentamos envolve uma terna de conjuntos os quais foram apresentados e discutidos até aqui, a saber: situações, invariantes operatórios e representações simbólicas. Segundo Vergnaud (1996) a apropriação do conceito depende da inter-relação desses elementos na ação do sujeito/estudante. Diante dessa intrínseca relação, vertemos o nosso olhar para os esquemas presentes na resolução das crianças, como dito, da primeira situação da SE PAJ3, para investigação do campo conceitual de chance.

3. Campo conceitual de chance

Pensando no trabalho de Probabilidade com crianças da educação infantil, refletimos que deveríamos focar apenas no conceito de chance, lembrando que Watson (2006) o define como sendo “[...] uma aproximação da probabilidade, para distinguir aspectos mais intuitivos e experimentais do estudo da probabilidade teórica baseada nos espaços amostrais”.

Segundo Moore (1997), para trabalhar questões importantes para o ensino de Estatística, o currículo escolar deve dar menos ênfase a probabilidade formal, logo o foco deve ser na abordagem do conceito de chance. Scheaffer, Watkins, Landwehr (1998) afirmam que deve haver uma mudança no foco do ensino deste conteúdo na escola, priorizando-se o estudo de eventos aleatórios, o entendimento da linguagem e o desenvolvimento de intuições probabilísticas adequadas.

De acordo com Watson (2006), para a maioria das pessoas a palavra probabilidade tem uma conotação matemática, e a palavra chance tem um significado muito mais próximo do cotidiano das mesmas. Sendo assim, ela afirma que intuições e crenças subjetivas devem ser os tópicos iniciais para se trabalhar o conceito de chance (que a autora chama de currículo de chance) e estas são usualmente expressas por meio da linguagem ao invés de números. Como consequência, ela recomenda a abordagem inicial do conceito de chance por meio de atividades descritivas, transitando posteriormente, para o uso de experimentos, e uma comparação dos resultados favoráveis com os resultados totais, estabelecendo assim um elo com a parte do currículo que trabalha com o conceito de parte-todo.

Watson (2006) orienta ainda que é importante abordar o conceito de chance relacionando com a tomada de decisões em diferentes contextos, inclusive fora do âmbito escolar; além de pensar neste conceito associado a situações de justiça e de equidade. De fato, esta autora, apresenta, na forma de um fluxograma (Figura 1), quais devem ser as ideias e os elementos estatísticos a serem abordados na escola para o entendimento do conceito de chance, discutindo ao longo do seu texto o elo entre chance e cada um dos tópicos.

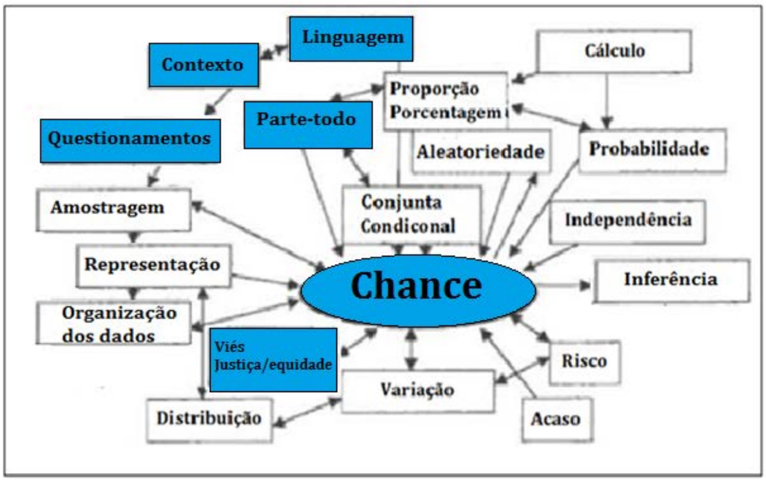


Figura 1. Fluxograma das ideias e elementos estatísticos relacionados ao entendimento de chance
Fonte: Watson (2006, p. 130)

Baseado nesse fluxograma, nos permitimos a duas reflexões. A primeira, que poderíamos considerar, com base na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), que estas ideias e elementos estatísticos elencados por Watson (2006), por serem importantes para o entendimento de chance, podem compor o que Verganud (2009) denomina de campo conceitual. A segunda reflexão, é que partindo da premissa de ser esta uma proposta para o campo conceitual de chance, verificamos que para a nossa pesquisa os cinco tópicos mais associados para o entendimento deste conceito, pensando nas crianças da educação infantil, seriam: Linguagem, Contexto, Questionamentos, Parte-todo, Justiça/equidade.

No que tange a linguagem, segundo Watson (2006), documentos curriculares sugerem um foco nos aspectos linguísticos do conceito de chance mesmo antes da atribuição de valores numéricos. A autora recomenda assim o uso de uma linguagem associada ao cotidiano com eventos de chance, como, por exemplo, “ter sorte”, “isso não é justo”, “isto pode acontecer”, “amanhã é provável chover”. Indica ainda a utilização dos vocabulários: ”certo”, “incerto”, “possível e impossível”, “mais provável”, “menos provável” e “igualmente provável”, para descrever os eventos relacionados com a experiência das crianças.

Quanto ao contexto, trabalhando com atividades envolvendo essas expressões, Watson (2006) considera que o professor pode utilizar situações familiares aos estudantes para que eles possam imaginar as chances dos eventos ocorrerem. Segundo ela, esta forma de abordagem é apropriada para um entendimento inicial do conceito de chance. Além disso, estas situações familiares podem fornecer elementos iniciais para fomentar a discussão e o debate sobre este conceito em sala de aula.

No que se refere ao elemento “questionamentos”, pensamos que atividades como esta, que propiciem o uso de respostas com uma linguagem de natureza mais qualitativa do que quantitativa para abordar o conceito de chance, podem propiciar debates que suscitem novos questionamentos e reflexões críticas por parte dos alunos. Sendo que, Watson (2006) apresenta ao longo do seu texto, diversos exemplos de atividades, em que os alunos precisam explicar suas respostas.

A autora comenta que entre as possibilidades de respostas dos alunos podem aparecer às noções de parte-todo, porque de fato as chances dos eventos envolvidos não são obtidas exatamente na forma de fração, mas sim por meio de comparações das possibilidades de ocorrência de dois eventos para assim tomar uma decisão.

Em relação à justiça/equidade, Watson (2006) comenta que para discutir este elemento do campo conceitual de chance, podem ser propostas atividades em sala de aula envolvendo o uso de jogos com geradores aleatórios:

> Uma atividade bastante utilizada em muitas salas de aula envolve em determinar se os jogos cujas regras são baseadas no uso de geradores aleatórios como dados, roletas ou moedas são justos. O justo neste contexto significa que cada jogador tem a mesma chance teórica de ganhar o jogo. O pressuposto em todas essas atividades é que o gerador aleatório em que as regras são definidas é justo. Perguntar aos alunos sobre as suas crenças sobre os mecanismos de geradores aleatórios, como dados, podem levar a algumas descobertas interessantes. (WATSON, 2006, p. 170).

Salientamos que esta recomendação de Watson (2006), foi utilizada na primeira situação da SE PAJ3 para discutir se a forma de escolha proposta para uma criança iniciar um jogo era justa ou não, como veremos na análise dos resultados.

4. Procedimentos metodológicos

Para atender o objetivo geral desse artigo que consiste em analisar os esquemas mobilizados por crianças da Educação Infantil de uma escola privada do sul da Bahia, na resolução de uma situação envolvendo o campo conceitual de chance, conduzimos o nosso estudo em uma abordagem qualitativa, de acordo com Bogdan e Biklen (1994).

Os sujeitos da pesquisa foram crianças da Educação Infantil, mais especificamente do 2º período, com idade de 5 anos, de uma escola privada da cidade de Itabuna-BA. A sala era composta por 19 crianças, sendo que apenas 14 estavam presentes no dia da aplicação. Elas foram organizadas em sete duplas a critério da professora regente. Salienta-se que até o momento da aplicação as crianças não tinham recebido instrução formal sobre Probabilidade.

Nas análises, usamos a notação Dx_y, com x representando a dupla (x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) e y representando a criança da dupla (y = 1 e 2). Por exemplo, nomeamos como $D1_1$ e $D1_2$, quando nos referimos às crianças 1 e 2, respectivamente, da Dupla 1.

Na realização da pesquisa usamos como instrumento de coleta a maquete tátil, proposta por Kataoka et al. (2013) e que é constituída por peças (tabuleiro, colmeias, porta copos, brinquedos, fichas de EVA e campainha) e pela Sequência de Ensino Os Passeios Aleatórios do Jefferson 3 amigos (SE PAJ3).

Inicialmente a Sequência de Ensino Passeios Aleatórios do Jefferson (SE PAJ), foi desenvolvida no âmbito do projeto de Kataoka et al. (2013) e cujos resultados tem mostrado potencialidades positivas para aprendizagem dos conceitos básicos de Probabilidade, a exemplo dos trabalhos de Guimarães (2015) com alunos do 4º ano do Ensino Fundamental, e de Silveira (2016) com uma aluna cega e outra vidente do 1º ano do Ensino Médio.

Com o intuito de desenvolver um estudo com crianças da Educação Infantil, com faixa etária de cinco anos de idade, ainda no projeto de Kataoka et al. (2013), as situações da SE PAJ passaram por modificações.

Diante do fato das crianças não dominarem a leitura e a escrita, as situações foram verbalizadas pela pesquisadora e foram adaptadas de modo a não exigir respostas escritas. Houve também uma redução da quantidade de situações, passando de treze para cinco e da quantidade de amigos que Jefferson visita. Explicando melhor a redução dos amigos, destacamos que, uma das situações desenvolve-se a partir da história de Jefferson que mora em um bairro, onde também vive seus cinco amigos, que ele costuma visitar cada um deles seguindo determinado critério, em que, a questão principal é determinar se todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados. Assim, a nossa aplicação buscou a diminuição da quantidade de cinco para três amigos para que fossem percebidas mais facilmente pelas crianças as chances de visitas de Jefferson a cada um de seus amigos, sendo que a sequência passou a ser denominada Sequência de Ensino Passeios Aleatórios do Jefferson 3 amigos (SE PAJ3).

Como dito, a sequência é composta de cinco situações, divididas em três etapas. A primeira etapa é constituída de duas situações, a primeira denominada *situação da ciranda* e a segunda, nomeada de *situação do reconhecimento do bairro*, que contemplam os elementos do campo conceitual de chance: linguagem, contexto, questionamentos, justiça/equidade, com o intuito de colaborar com as crianças na construção do conceito de chance com eventos equiprováveis (eventos com a mesma chance de ocorrência) e não equiprováveis.

Na segunda etapa são apresentadas duas situações, a terceira nomeada *situação da história* e a quarta denominada *situação dos caminhos possíveis*, sendo explorados os elementos do campo conceitual de chance: linguagem, contexto, questionamentos, justiça/equidade, parte-todo, com o intuito de auxiliar as crianças na construção do conceito de chance com eventos não equiprováveis. A terceira etapa constitui-se da quinta situação da SE PAJ3, denominada de *situação da experimentação aleatória*, sendo considerados os elementos do campo conceitual de chance: linguagem, contexto, questionamentos, justiça/equidade, parte-todo, com o intuito de auxiliar as crianças na construção do conceito de chance com eventos não equiprováveis.

De forma sucinta, evidenciamos que na primeira situação, utilizamos uma música de ciranda para determinar a ordem com que as duplas realizariam a brincadeira da segunda situação; buscando verificar se as crianças consideravam que essa forma de escolher a ordem de participação das duplas era um método justo (termo utilizado para indicar mesma chance). Em seguida, investigamos se as crianças conheciam alguma forma justa para fazer a referida ordenação, e apresentamos, por fim, o sorteio com papéis numerados para determinar essa ordem. Determinada a ordem para participação na brincadeira passamos para a segunda situação que teve como objetivo avaliar se as crianças achavam que a proposta de movimentação sobre o tabuleiro era justa. No que tange a terceira situação, apresentamos inicialmente para as crianças a seguinte história:

“OS PASSEIOS *ALEATÓRIOS* DE JEFFERSON 3 amigos”

O Jefferson e seus amigos moram no mesmo bairro. Os nomes dos amigos são: Duda, Babi, e Pelé. Cada amigo coleciona um tipo de objeto, sendo que Duda coleciona dado, Babi coleciona boneca e Pelé coleciona bola. Jefferson costumava visitar seus amigos nos mesmos dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: 2ª feira, Duda; 4ª feira, Babi; e 6ª feira, Pelé. Mas, para tornar mais emocionante os encontros, a turma combinou que a visita seria definida por sorteio, da seguinte forma: Jefferson deve tocar uma campainha; se sair o som “pim”, andará uma quadra para o Norte, se sair o som “pom”, uma quadra para o Leste. Cada jogada representa andar uma quadra. A distância da casa de Jefferson a casa de cada um dos amigos é sempre de duas quadras, assim ele deve tocar a campainha duas vezes para poder chegar à casa de um dos amigos e dar um presente para a sua coleção.

Em seguida entregamos as peças da maquete e questionamos se elas achavam, sem fazer o sorteio, que todos os amigos tinham a mesma chance de ser visitado por Jefferson e que explicassem suas respostas. Depois iniciamos a quarta situação, solicitando que eles determinassem todos os caminhos possíveis para Jefferson visitar cada um dos amigos e que respondessem novamente o questionamento feito na situação anterior, isto é, se após terem encontrado os caminhos eles achavam que os amigos tinham a mesma chance de visita. Na quinta situação foi realizada a experimentação aleatória com 29 repetições, sendo feito o seguinte questionamento: “Depois do sorteio vocês acham que todos os amigos têm a mesma chance de ser visitado por Jefferson? Por que vocês acham isso?”

Salientamos que ao iniciar cada situação, fazíamos uma exposição do contexto, em seguida apresentávamos alguns questionamentos às crianças, obtendo as respostas oralmente, e, por fim, estabelecíamos uma roda de conversa, buscando uma resposta coletiva, resultado justamente dessa reflexão conjunta. E assim as crianças tiveram oportunidade de explorar o campo conceitual de chance nas cinco situações, variando apenas o contexto apresentado.

Pontuamos, mais uma vez, que, nesse estudo, nos interessamos em analisar apenas a primeira situação (situação da ciranda). Além disso, destacamos que os responsáveis pelas crianças assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, nos possibilitando assim, apresentar nos resultados as fotos das atividades sem a necessidade de ocultar os rostos das mesmas.

5. Análise dos resultados

Como destacado na seção anterior, na primeira situação, chamada “situação da ciranda”, foram explorados os seguintes tópicos do campo conceitual de chance: Linguagem, Contexto, Questionamentos e Parte-todo.

Antes de desenvolvermos a situação, construímos, previamente no chão da sala de aula, um tabuleiro (3,6mx3,6m) de forma quadrada subdividido internamente em nove quadrados menores e com fita adesiva na cor amarela. Apresentamos e exploramos com as crianças esta peça da maquete, bem como a campainha, apesar das mesmas não serem utilizadas nessa primeira situação, visando familiarizá-las e inteirá-las sobre o contexto envolvido na brincadeira. Ou seja, tornando conhecido antecipadamente que o tabuleiro seria o local onde as crianças brincariam se movimentando sobre o mesmo, sendo que a campainha serviria para determinar se esse movimento seria para o norte ou para o leste.

Sendo assim, a pesquisadora estabeleceu um contato inicial com as crianças e, de forma descontraída, foi apresentando primeiro o tabuleiro contando com a participação delas. Salientamos que as crianças estavam sentadas no chão em frente a esta peça da maquete. Algumas delas externaram em voz alta suas contagens, conforme diálogo:

Pesquisadora: Vocês observaram o que nós fizemos no chão? Quantos quadrados têm nessa figura que desenhamos?

$D1_1$*: Um, dois, três, quatro, cinco, seis... nove!* (contando os quadrados e se destacando por sua voz soar mais estridente)

$D3_2$*e* $D5_1$*: Sete.*

Pesquisadora: Será que só temos aqui sete quadrados?

$D2_1$*: sete, oito, nove!* (Levantando do chão e terminando a contagem)

$D6_2$*: Tem nove!*

Pesquisadora: Nove?

$D1_1$*: Eu acertei. Falei nove!*

Pesquisadora: Muito bem, todos acertaram!

Podemos observar pelo diálogo que cinco crianças participaram ativamente, declarando verbalmente os seus totais, em seguida, a pesquisadora solicitou que justificassem suas respostas. Identificamos (recorrendo as vídeogravações) a presença de dois esquemas na fala das três crianças que disseram nove, a saber: perceptivo-gestuais e verbais. O primeiro na resposta de $D6_2$ que utilizou a multiplicação (3x3=9), e o segundo nas respostas de $D1_1$ e $D2_1$com a adição (1+1+1...=9), isto é, contando quadrado a quadrado. No primeiro esquema podemos pensar que o teorema em ação envolvido tenha sido que: num quadrado subdividido, a multiplicação dos quadradinhos da linha pelos quadrinhos da coluna, resulta na quantidade total, no nosso caso de quadras; os conceitos em ação mobilizados seriam: contagem, princípio multiplicativo, organização espacial. No segundo esquema, podemos conjecturar o seguinte teorema em ação: num quadrado subdividido, a soma de todos os quadradinhos, resulta na quantidade total; assim os conceitos em ação envolvidos em ação seriam: contagem, princípio aditivo, organização espacial.

Salientamos que, as outras crianças, apesar de não terem se expressado verbalmente, também estavam atentas, e todas se mostraram envolvidas nesta atividade de reconhecimento do tabuleiro, como podemos notar na Figura 2. Que podem revelar em alguma instância, como evidenciado por Aguiar e Pedrosa (2009), também um esquema perceptivo-gestual, por meio apenas da percepção visual.

Figura 2. Crianças fazendo o reconhecimento do tabuleiro
Fonte: Acervo da pesquisa.

Observamos ainda na imagem da Figura 2, que quatro das cinco crianças que se expressaram verbalmente, utilizaram também os gestos como representação simbólica, evidenciando assim que os esquemas perceptivo-gestuais dessas crianças envolveram a contagem das quadras do tabuleiro na linguagem natural e simultaneamente, apontando com os dedos.

Com o intuito de reforçar o reconhecimento dessa peça da maquete, a pesquisadora saltou de quadrado em quadrado fazendo a contagem juntamente com as crianças, conforme observamos na imagem da Figura 3.

Figura 3. Pesquisadora saltando e contando os quadrados do tabuleiro
Fonte: Acervo da pesquisa.

Concluímos que, ao final, todas as crianças estavam cientes que o quadrado maior, era subdividido em nove quadrados menores. Finalizando esse momento, a pesquisadora explicou que elas iriam brincar sobre o tabuleiro, porém, deveriam obedecer algumas regras, a saber: que só poderiam andar para o lado direito ou para frente, iniciando na primeira quadra, localizada no canto inferior direito. Para verificar se elas tinham noção de lado direito, a pesquisadora indagou-os sobre o que significava. Nesse momento ficou comprovado na fala de algumas crianças que elas tinham noções de lateralidade e organização e localização espaciais. Foi reforçado também que elas não poderiam voltar e nem sair antes da hora; que só poderiam andar para o lado direito, chamado de Leste e para frente, chamado de Norte.

Antes de iniciar a exploração da campainha, a pesquisadora solicitou que as crianças se organizassem em duplas. A professora regente foi formando as duplas, sendo que algumas crianças escolheram os seus parceiros por conta própria.

Com as duplas formadas, a pesquisadora apresentou a campainha às crianças e as instruiu dizendo que esta peça serviria para determinar se o movimento aconteceria para o norte ou para o leste, sendo que ao acionar um dos seus botões era emitido o som “pim” ou “pom”, conforme vemos na imagem da Figura 4.

Figura 4. Campainha sendo apresentada às crianças
Fonte: Acervo da pesquisa.

Estabeleceu, em seguida, a relação entre o som e o movimento, falando que toda vez que saísse o som "pim", a criança deveria caminhar, sobre o tabuleiro, na direção Norte e toda vez que saísse o som "pom", deveria caminhar para o Leste. Após essas explicações, cada criança tocou a campainha, com o intuito de que percebessem somente a diferença dos sons emitidos, ou seja, sem executar nenhuma movimentação sobre o tabuleiro.

A pesquisadora solicitou ainda que cada dupla decidisse quem se movimentaria no tabuleiro e quem tocaria a campainha e comentou que as ações se inverteriam numa outra rodada. Ressaltou que a brincadeira não teria ganhador, que todos ganhariam, pois o importante era entrar e sair do tabuleiro. Em seguida, apresentou a situação da ciranda dizendo:

> "Agora que vocês formaram as duplas e decidiram quem irá se movimentar no tabuleiro e quem irá tocar a campainha, podemos iniciar a brincadeira. Mas temos um desafio para resolver, precisamos escolher uma maneira de determinar a ordem que as duplas vão se movimentar no tabuleiro, ou seja, quem será a primeira dupla que vai começar a brincadeira, a segunda, a terceira e assim por diante. Eu tenho uma sugestão e vou mostrar para vocês".

Após essa fala, a pesquisadora solicitou que o representante de cada dupla que iria se movimentar no tabuleiro viesse ao centro e formasse um círculo. As sete crianças ficaram de mãos dadas e a pesquisadora ficou no centro do círculo. Nesse momento, a pesquisadora falou para as crianças:

*Pesquisadora: Nós temos que escolher qual será a primeira dupla, depois a segunda, depois a terceira, e assim por diante. Quem vai começar a brincar primeiro, segundo,... Então vamos fazer o seguinte, vocês acham bom escolher assim, olhe só: UNI DUNITÊ, SALAMÊMINGUÊ, UM SORVETE COLORÊ, O ESCOLHIDO FOI VOCÊ! (*apontando para cada criança conforme a Figura 5).

Figura 5. Escolha da criança por meio da situação da ciranda
Fonte: Acervo da pesquisa.

Pesquisadora: Vocês acham justo escolher a pessoa que vai começar brincando, desse jeito? Todos têm a mesma chance de ser escolhido?
D_{71}*: Sim!*
D_{41}*: Sim!*
D_{61}*: Não!*
Pesquisadora: Não? Por que assim não é bom?
D_{71}: *Eu gosto assim.*
D_{61}*: Por que ele vai conseguir toda hora* (apontando para o colega que foi sorteado).

No diálogo em destaque, enquanto D_{71}e D_{41} afirmaram que "sim", ou seja, que a forma proposta de escolha era justa, D_{61} respondeu que "não", pois o colega "consegue toda hora". Vertendo o nosso olhar para a fala desta última criança, percebemos a presença tanto de um esquema perceptivo-gestual, com a utilização da representação de gestos, apontando o colega que seria sempre escolhido, mas também de um esquema verbal. Nesse esquema verbal pode ter sido mobilizado o teorema em ação esperado para este momento da música de ciranda, qual seja: a existência de uma relação entre a quantidade de sílabas e a criança que será escolhida, tendo associado os seguintes conceitos em ação: contagem, relação unívoca, eventos não equiprováveis, experimentos determinísticos.

Percebendo que talvez, além de D_{71}e D_{41}, as outras quatro crianças não tivessem ainda chegado à mesma conclusão que D_{61}, a pesquisadora decidiu repetir o experimento. Logo, o intuito foi reforçar a resposta apresentada por D_{61}e incentivar a participação e compreensão das outras crianças. Desse modo, com elas, ainda organizadas em círculo, a pesquisadora questionou:

Pesquisadora: Será? Vamos ver de novo?(Executa novamente a música da ciranda).

Pesquisadora: De novo? Toda hora vai ser ele? (Ao constatar que a criança sorteada era a mesma)*.*

D_{61}*: Sim*

D_{51}*: É porque está começando do* D_{21}*. Se começar do* D_{21}*, vai ser ele* (apontando para a criança sorteada) *toda hora o escolhido.*

D_{21}*: E se começasse do* D_{31} *iria parar em mim.*

Observamos que a participação da pesquisadora em incentivar as crianças a externarem suas opiniões, foi fundamental para que D_{51} percebesse que se começasse por determinada criança, a ciranda iria sempre parar na mesma pessoa. Além disso, D_{21} foi capaz de determinar quem seria sorteado tomando como base o a posição da criança onde iniciou a ciranda. Revelando assim, tanto esquemas verbais como perceptivo-gestuais semelhantes aos utilizados anteriormente por D_{61}.

Salientamos que, semelhante ao que ocorreu na exploração do tabuleiro, as crianças que não se expressaram verbalmente, percebemos pelas videogravações que elas estavam atentas, acompanhado com olhar cada gesto dos colegas e do pesquisador. Inferimos, então, que todas as crianças perceberam que o método da ciranda não era uma forma de escolha justa.

Dando continuidade a aplicação, para verificar se as crianças seriam capazes de sugerir uma escolha justa, a pesquisadora fez o seguinte questionamento:

Pesquisadora: Alguém tem outra ideia qualquer?

D_{51}*:* (Canta uma música parecida com a música da ciranda)

Pesquisadora: Se fosse começar com essa música que você cantou, daria no mesmo. Alguém tem outra ideia?

D_{21}*: Eu tenho. O que levantar a mão primeiro, vai primeiro!*

Pesquisadora: Então vamos ver. Levanta a mão! (muitos deles levantaram a mão ao mesmo tempo)

Pesquisadora: Vixe! Todo mundo junto? Aí não dá certo.

D_{21}*: Vamos de novo!* (insistindo na mesma sugestão dada)

Pesquisadora: Tá bom. Vamos de novo (repetindo o mesmo processo anterior)

Pesquisadora: Não dá certo levantando a mão. Quem tem uma nova ideia?

D_{51}*: PAPAI NOEL MANDOU ESCOLHER VOCÊ!* (cantando novamente uma música de ciranda)

Pesquisadora: E será que dá certo? Será que não vai cair na mesma pessoa, como na música da ciranda?

D_{51}*: E se contasse até dez?*

Pesquisadora: Como assim? Começa por onde? E se cair na mesma pessoa?

D_{11}*: Não vai dar certo não.*

D_{21}*: Então, escolhe aquele que tiver mais comportado.*

Pesquisadora: Mas todos estão quietinhos. Nunca vi crianças tão educadas!

Verificamos no diálogo que, embora eles tivessem percebido que o método da ciranda não era justo, não foram capazes de sugerir uma maneira eficaz de escolha, e por vezes até recaíam sobre o mesmo método usado inicialmente pela pesquisadora. Essas respostas revelam então, esquemas verbais amparados nas vivencias diárias das crianças para iniciar um jogo. Nesse aspecto, referenciamos Vergnaud (1996), que afirma que quando um estudante se depara com uma situação em que ele não possui as habilidades necessárias para a resolução imediata, ele tende a utilizar os esquemas que já possuem, inclusive pode combiná-los e recombiná-los alcançando, assim, o sucesso ou o fracasso. Além de Fischbein (1975), quando pensamos que as respostas associadas as vivências das crianças, revelam mais uma crença pessoal, que este autor denomina de intuição primária, do que respostas fundamentadas em aspectos teóricos.

Prosseguindo com a nossa reflexão sobre esses esquemas, concordamos com Tatsis, Kafoussi, Skoumpourdi (2008) quando afirmam que o aparecimento de argumentos verbais revela a capacidade das crianças da educação infantil de se envolverem significativamente em atividades probabilísticas relativas à noção de justiça de um jogo. E que esse envolvimento permite que a criança, sugira e avalie métodos de realização de uma escolha justa, desencadeando uma série de questões críticas referente a esses métodos. Além disso, a participação ativa das crianças gera um ambiente propício para conhecermos o contexto ao qual elas se inserem, podendo ser um ponto de partida para discussão em sala de aula, como pontua Watson (2006).

Destacamos também que, Hodnikýadež e Škrbec (2011), identificaram em sua pesquisa que mesmo sem terem tido uma instrução formal sobre o conceito de chance na escola, algumas crianças solucionaram a situação intuitivamente, com base em suas experiências anteriores, principalmente em jogos com várias crianças.

Salientamos ainda que, resultados semelhantes ao nosso, foram encontrados por Guimarães (2015) em que, quando solicitados que apresentassem uma forma justa de escolha para iniciar um jogo, os estudantes sugeriram, por exemplo, par ou ímpar, jóquei pó, dois ou um, outras músicas de ciranda.

Dando prosseguimento às discussões, a pesquisadora demonstrou que nenhuma daquelas formas sugeridas, seria justa, pois não eram critérios em que todos teriam a mesma chance de serem escolhidos. Logo depois, propôs outra forma de escolha, colocando em um saco, sete papéis numerados. A pesquisadora solicitou aos participantes que retirassem do saco apenas um papel que indicaria a ordem de participação no jogo. Podemos observar um exemplo desse procedimento na imagem da Figura 6, em que a criança retira um papel do saco.

Figura 6. Sorteio para selecionar a ordem das duplas
Fonte: Acervo da pesquisa.

Vejamos o diálogo estabelecido nesse momento:

Pesquisadora: Olha o que eu vou fazer! Dentro deste saco tem papeizinhos com um número em cada um deles. Cada um de vocês irá pegar um papelzinho desses; o número obtido determinará a criança que participará da brincadeira, primeiro, segundo, terceiro e assim por diante. Isso é um sorteio! Vamos lá? Coloca a mão e pega apenas um papelzinho (Um de cada vez começa a retirar do saco um papelzinho)

D_{21}*: Eu sou o segundo!*

D_{51}*: E eu sou o quinto!*

Pesquisadora: Depois que todos já sabem sua numeração, vamos fazer a fila na ordem?

Todos: Vamos!

Com as crianças organizadas em fila, a pesquisadora fez o seguinte questionamento:

Pesquisadora: Vocês gostaram dessa nova forma de escolher?

Todos: Sim!

Pesquisadora: Por que vocês gostaram? Acharam justo assim?

D_{71}*: Por que todo mundo vai de cada vez.*

Diante das respostas apresentadas acima, não ficou evidente, para nós, a ideia que as crianças faziam do vocábulo justo, por exemplo, a justificativa usada por $D7_1$, que gostou dessa forma de escolher "porque todo mundo vai de cada vez", pareceu indicar um esquema verbal que seria justo pensando na possibilidade da participação de todos. Analisando esse esquema, identificamos a mobilização de um falso teorema em ação, a saber: que todos têm a mesma chance, porque todos vão brincar, sendo então esta uma forma justa, e sendo mobilizado o seguinte conceito em ação: crenças relacionadas com situações de brincadeira de suas vivências.

Ainda refletindo sobre esse teorema em ação, mas também considerando que todas as crianças disseram "Sim", podemos supor que o importante para elas, naquele momento, era que a brincadeira tivesse início e que todos participassem independente da ordem estabelecida. Encontramos algum respaldo para essa nossa suposição, também observando o comportamento das crianças naquele momento: elas pulavam, emitiam gritinhos, demonstrando, por meio das expressões corporais e pré-verbais (os gritos), atenção e entusiasmo. Se assim pensarmos, podemos até considerar estas ações como sendo um esquema perceptivo-gestual na resolução desta situação, semelhante ao identificado por Aguiar e Pedrosa (2009).

No Quadro 2, apresentamos um resumo com os esquemas mobilizados pelas crianças na resolução da primeira situação no que tange a apropriação tanto da funcionalidade das peças da maquete tátil quanto do campo conceitual de chance. Elencamos também os invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) presentes nesses esquemas.

Tipo de apropriação	Esquema	Teorema em ação	Conceito em ação
Peças	Perceptivo-gestual e verbal. • Contar objetos	Num quadrado subdividido, a multiplicação dos quadradinhos da linha pelos quadradinhos da coluna, resulta na quantidade total.	Contagem, princípio multiplicativo, organização espacial.
Campo conceitual	Perceptivo-gestual e verbal. • Relacionar objetos	A existência de uma relação entre a quantidade de sílabas e a criança que será escolhida.	Contagem, relação unívoca, eventos não equiprováveis, experimentos determinísticos.
Campo conceitual	Esquema verbal • Avaliar a justiça de um evento	Falso teorema em ação: Todos têm a mesma chance, porque todos vão brincar.	Crenças relacionadas com situações de brincadeira e de suas vivências.

Quadro 2. Resumo dos tipos de apropriação, esquemas, teoremas e conceitos em ação
Fonte: Acervo da pesquisa.

Por fim, levando em consideração a idade e o contexto das crianças, acreditamos que nessa situação, foi possível abordar informalmente e de maneira contextualizada o campo conceitual de chance, estimulando às crianças ao uso de uma linguagem apropriada, ao raciocínio crítico, no ato de sugerir e avaliar formas de realizar uma escolha justa para iniciar a brincadeira no tabuleiro.

5. Considerações finais

Diante do exposto percebemos que as crianças, mesmo que intuitivamente, manifestaram esquemas verbais e perceptivo-gestuais dos quais revelaram conceitos em ação e teoremas em ação que indicam que elas compreenderam que a escolha pelo método da ciranda não constitui um método justo. Destacamos também os esquemas verbais utilizados pelas crianças no momento após o sorteio com os papéis numerados, em que as crianças demonstraram acreditar que a forma de sorteio era justa pensando na possibilidade da participação de todos, mobilizando assim um falso teorema em ação, a saber: que todos têm a mesma chance, porque todos vão brincar, sendo então esta uma forma justa, e sendo mobilizado o seguinte conceito em ação: crenças relacionadas com situações de brincadeira de suas vivências. Ainda nesse momento, identificamos também os esquemas perceptivo-gestuais, demonstrando, por meio das expressões corporais e pré-verbais (os gritos), atenção e entusiasmo para que a brincadeira tivesse logo início.

Por fim, consideramos que elencamos elementos que possam nos levar a supor que a SE PAJ3, mais especificamente a primeira situação analisada, apresenta potencialidades positivas para abordagem do conceito de chance com crianças da Educação Infantil com vistas a prepará-los para atuarem frente a demandas do cotidiano que envolve esse conceito. Almeja-se que o presente estudo possa colaborar com futuras pesquisas da área de Educação Matemática que abordem a mesma temática, fomentando assim as discussões sobre o ensino do conceito de chance para crianças da Educação Infantil.

Bibliografia

Aguiar, M., Pedrosa, M. (2009). Desenvolvimento do conceito de espaço em Crianças e a Educação Infantil*. Psicologia USP*, São Paulo, 20 (3), 389-415.

Bogdan, R.,Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: introdução à teoria e aos métodos* (3a ed.). Porto: Porto Editora.

Cazorla, I.,Gusmão, T., Kataoka, V. (2011). Validação de uma sequência didática de Probabilidade a partir da análise da prática de professores, sob a ótica do enfoque ontosseimótico. *Bolema*. *Boletim de Educação Matemática* (UNESP. Rio Claro. Impresso), 24, p. 537-560.

Dante, L. (2013). *Matemática: contexto e aplicações* (2a ed.) São Paulo: Ática. V. 2.

Guimarães, U. (2015) *Estudo das interações entre estudantes do 4º ano do ensino fundamental e noções de probabilidade mediada pela maquete tátil*. (Tese de Doutorado). Universidade Anhanguera de São Paulo, SP, Brasil.

Hodnikýadež, T., Škrbec. M. (2011). Probability of pre-schooland early school children. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 7(4), 263-279, 2011.

Kataoka, V., Rodrigues, A., Oliveira, M. (2007, julho). Utilização do conceito de probabilidade Geométrica com recurso didático no ensino de Estatística*. Anais: IX Encontro Nacional de Educação Matemática*, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Kataoka, V. et al. (2013). *Uso de uma maquete tátil na aprendizagem de probabilidade por alunos cegos e vidente.* Edital Universal 14/2013: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq**.**

Moore, D. (1997) New pedagogy and new content: The case of statistcs. *International Statistical Review*, 65, 123-165.

Scheaffer, R., Watkins, A., Landwehr, J. (1998). Whatevery high-school graduates hould know about statistics. In S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistcs: Learning, teaching and assement in grades K-12* (pp. 3-31). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Silveira, E. *A Gênese Instrumental na interação de alunas, cega e vidente, com uma maquete tátil no estudo de Probabilidade.*(2016).Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Bahia.

Tatsis, K., Kafoussi, S., Skoumpourdi, C. (2008). *Kindergarten children discussing the fairness of probabilistic games: The creation of a primary discursive community.* Early Chilhood Education Journal, 36, 221-226.

VERGNAUD, G. A. (1983) Multiplicative structures. IEm R. Lesh 8 M. Landau (Eds.). *Acquisitions of mathematics concepts and procedures.* New York: Academic Press, pp.127-174.

_______. (1982). A Classification of cognitive Task and Operations of Thought Involved. In. *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective.* New Jerssey: Lawrense Erlbaun, p. 39-59.

_______. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematcs education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), p. 167-181.

_______. (1996). A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. *Didáctica das matemáticas.* Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget. p, 155-191.

_______. (2009).O que aprender? In: Bittar, M & Muniz, A. C (Orgs). *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais* (1a ed). Curitiba: Editora CVR.

WATSON, J. (2006).*Statistical literacy at school: Growth and goals.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Autores:

Irlene Silva de Almeida: Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana, Especialização em Metodologia do Ensino da Matemática pela Faculdade Internacional de Curitiba - FACINTER (2010) Mestrado em Educação pela Universidade Estadual de Santa Cruz, Professora de Matemática do Estado da Bahia, Brasil. E-mail: irlenesa@gmail.com.

Verônica Yumi Kataoka: Graduada em Agronomia pela Universidade Estadual da Bahia, Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Ceará, Mestrado e Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária pela Universidade Federal de Lavras. Atualmente Professora Adjunta da Universidade Estadual de Santa Cruz. E-mail: vykataoka@uesc.br.

Aida Carvalho Vita: Graduada em Arquitetura pela Universidade Federal da Bahia, Licenciada em Matemática pela Faculdade de São Paulo, Mestrado em Educação pela Universidade Federal da Bahia e Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Atualmente Professora Adjunta da Universidade Estadual de Santa Cruz. E-mail: aidavita2009@gmail.com.

Eurivalda R. dos S. Santana: Graduada em Ciências Matemática pela Federação de Escolas Superiores de Ilhéus e Itabuna, Mestrado em Matemática pela Universidade Federal da Bahia, Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e Pós Doutorado em Didática da Matemática pela Universidade de Lisboa. Atualmente Professora Adjunta da Universidade Estadual de Santa Cruz. E-mail: eurivalda@hotmail.com.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 87-99

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Estudiantes de psicología trabajando con las medidas de posición central

Gustavo R. Cañadas de la Fuente, Elena Molina Portillo, José Miguel Contreras, Rocío Álvarez Arroyo

Fecha de recepción: 28/02/2018
Fecha de aceptación: 26/04/2018

Resumen	Las medidas de posición central son un instrumento necesario en el trabajo de los profesionales de psicología y, en general, de todo ciudadano. En este trabajo describimos un estudio sobre respuestas en dos Ítems sobre estos estadísticos en un conjunto de datos representados mediante un gráfico estadístico, en estudiantes de primer curso de psicología. Se comprueba si realizan adecuadamente la tarea y posteriormente presentamos los conflictos de las respuestas incorrectas. Además comparamos nuestros resultados con un estudio previo de Mayén (2009), del cual se han sacado los Ítems para poder comparar. **Palabras clave**: Enseñanza universitaria, medidas de posición central y conflictos semiótico
Abstract	The measures of central position are a necessary tool in the work of psychology professionals and, in general, of every citizen. In this paper we describe a study on two items answers on these statistics in a set of data represented by a statistical graph, in students of the first course of psychology. It is checked if they perform the task properly and then we present the conflicts of the incorrect answers. We also compared our results with a previous study by Mayén (2009), from which the items have been taken to compare. **Keywords**: University education, measures of central position and semiotic conflicts
Resumo	As medidas de posição central são uma ferramenta necessária no trabalho de profissionais de psicologia e, emgeral, de todos os cidadãos. Neste artigo, descrevemos um estudo sobre respostas em dois itens sobre estatísticas em um conjunto de dados representado por um gráfico estatístico, em alunos do primeiro curso de psicologia. É verificado se eles executam a tarefa corretamente e então apresentamos os conflitos das respostas incorretas. Comparamos também nossos resultados com um estudo anterior realizado por Mayén (2009), a partir do qual foram considerados os itens para comparar. **Palavras-chave:** Educação universitária, medidas de posição central e conflitos semióticos

1. Introducción

El desarrollo de la estadística ha influido en el avance de la ciencia y la sociedad, al proporcionar herramientas metodológicas, aplicable a todos los campos y áreas. Como consecuencia de esto, la enseñanza de la estadística se ha incorporado en todos los niveles educativos (por ejemplo, MEC, 2014). Además, se reconoce el valor del desarrollo del razonamiento estadístico en nuestra sociedad caracterizada por la disponibilidad de información presentada en multitud de ocasiones mediante estadística (Batanero, 2002).

Las medidas de posición central, en las que centramos nuestra investigación, son elementos básicos de la estadística que están presentes en nuestro día cotidiano, y en cualquier lugar donde se realice cualquier estadística. Se utilizan en gran medida, para representar conjuntos de datos estos estadísticos, la media está presente en temas de inferencia y la mediana como estadístico de orden utilizada con muestras pequeñas.

En este trabajo avanzamos en la investigación de dificultades que los alumnos Universitarios tienen con las medidas de posición central, comparando con los resultados obtenidos en otras investigaciones sobre dificultades de este mismo tema con estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (Cobo y Batanero, 2000; Cobo, 2001; Mayen, 2009).

Por tanto, el objetivo de esta investigación es evaluar la comprensión de las medidas de posición central (media, mediana y moda), a partir de un gráfico estadístico basándonos en dos Ítems desarrollados para este fin.

2. Marco Teórico y antecedentes

2.1. Marco Teórico

Un elemento fundamental en la construcción del conocimiento matemático son los conceptos y propiedades involucrados en la resolución de los problemas, uno de los ejes principales en la formación matemática. Conocimiento conceptual y procedimental son polos de un continuo, aunque el conocimiento conceptual es más flexible y generalizable, ya que no está ligado a un tipo específico de problema, sino que incluye la comprensión de los principios de un dominio dado y sus interrelaciones (Rittle-Johnson, Siegler y Alibali, 2001).

Sfard (1991) describe un concepto como una idea matemática en su forma “oficial”, es decir, un constructo teórico correspondiente al universo matemático formal. Además, indica que se pueden definir de forma estructural (por ejemplo, describiendo sus condiciones o propiedades) u operacional (mediante cálculos).

En este trabajo se utilizan nociones teóricas relacionadas con el Enfoque Ontosemiótico (EOS) desarrollado por Godino y su equipo de colaboradores (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Siguiendo a Font, Godino y D’Amore (2007), en nuestro trabajo asumimos que, en las prácticas matemáticas, se presentan múltiples funciones semióticas (bien de lectura o de representación), debido a la necesidad de usar y operar con objetos matemáticos, que son inmateriales. Los autores utilizan la idea de función semiótica, en el sentido de Eco (1977), quien las define como correspondencia entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido), establecida por un sujeto. Más concretamente, el trabajo se centra en las prácticas matemáticas involucradas en la realización de un problema donde intervienen estadísticos de medidas de posición central. Observamos que en esta tarea el estudiante debe realizar varias actividades de traducción, entre la gráfica en su conjunto o una parte del mismo y lo representado.

Nuestro supuesto es que estos estadísticos, pueden considerarse como un objeto semiótico complejo, viéndose influidos los resultados por la lectura de gráficos que han de realizarse en nuestro caso previamente (Bertin, 1967). Los gráficos, tanto en su conjunto como los elementos que lo componen están constituidos por conjuntos de signos que requieren una actividad semiótica por aquellos que los interpretan. La lectura del gráfico comienza con una identificación externa del tema al que se refiere, a través de la lectura del enunciado del problema. Finalmente se produce una percepción de la correspondencia entre las frecuencias de los diferentes valores de cada variable, para obtener conclusiones sobre su posible asociación y sus relaciones en la realidad representada.

Por otro lado, Font, Godino y D'Amore (2007) consideran una tipología de objetos matemáticos, como son expresiones verbales o simbólicas, propiedades, procedimientos, problemas, argumentos, conceptos. Estos intervienen en la resolución de problemas en matemáticas y cada una de los cuales puede jugar, el papel de antecedente o consecuente de una función semiótica. Cada uno de estos objetos, tanto en el enunciado de los problemas como en las soluciones de los estudiantes se expresa por escrito, lo que lleva a establecer una función semiótica, donde la correspondencia entre antecedente y consecuente suele estar presente.

Si las interpretaciones realizadas por los alumnos no son las esperadas por el profesor, se produce un *conflicto semiótico*. En nuestro marco teórico, esto es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, en este caso, profesor y alumno.

Nuestro trabajo se orienta al estudio de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes de psicología para trabajar con medidas de posición central e interpretación de gráficos estadísticos. En lo que sigue se describen las investigaciones previas, el método utilizado y se discuten los resultados obtenidos.

2.2. Investigaciones previas

A pesar de que la media es uno de los principales conceptos estadísticos, y base en la construcción de otros, como la media geométrica y la varianza, los estudiantes no muestran una buena comprensión de este concepto.

Por ejemplo, Pollatsek, Lima y Well (1981) encontraron que los estudiantes universitarios no identifican fácilmente las situaciones en las cuales se debe calcular una media ponderada, ni la calculan correctamente. Otras investigaciones indican que cuando los datos se agrupan en intervalos (como en nuestro caso), los estudiantes olvidan con frecuencia que cada uno de estos grupos debería ponderarse de modo distinto al calcular la media (Li y Shen, 1992; Carvalho, 2001).

Cai (1995) presenta que sólo algunos estudiantes de secundaria saben determinar un valor desconocido en un conjunto de datos para un valor medio dado. Gattuso y Mary (2002) sugieren que el contexto y forma de representación influyen en la dificultad de los problemas de promedio, por ejemplo, cuando se presentan los datos en forma de tabla ó de gráfico.

Otros errores de cálculo en media, mediana y moda, encontrados por Carvalho (2001) y Carvalho y César (2002) al analizar las respuestas de 182 alumnos de 13-14 años, son: (a) moda: tomar la mayor frecuencia absoluta, en lugar de tomar el valor de la variable que aparece con mayor frecuencia; (b) mediana: no ordenar los datos para calcular la mediana; confundir frecuencia con valor de la variable; confundir la moda y la mediana; tomar la mediana como el valor central de las frecuencias de la tabla; (c) media: confundir frecuencia con valor de la variable; no considerar la frecuencia absoluta de cada valor.

Por su parte, Garret y García Cruz (2005), obtiene las siguientes estrategias incorrectas en el cálculo de la media: confunde de nuevo frecuencia y valor de variable; determinando de forma errónea la suma total; redondeado del resultado encontrado; y elegir un dato cualquiera como media. Estos autores indican que es notorio el número de alumnos que dan un resultado sin mostrar las operaciones (46.8%).

Cobo (2003) describe diferentes algoritmos de cálculo para cada medida de posición central, incluyendo el cálculo con datos a partir de tablas como nosotros. Se muestra que el algoritmo de la media no se comprende correctamente, sólo el 20% aproximadamente de los alumnos fue capaz de invertir el algoritmo para resolver un problema. Cobo y Batanero (2004) dicen que los estudiantes deben aplicar multitud de ideas numéricas en la resolución de problemas de promedios, y que deben discriminar las propiedades que no se generalizan para la operación de promediar.

Del Puerto, Seminara y Minnaard (2007), identifican errores en estadística descriptiva, y para el caso de la media dicen que el 11% de los alumnos no pudo calcularla correctamente, y un 24% no contestó el problema. Solamente un 8% no cometió error en su caso. Al entrevistar a los estudiantes, estos admitieron que los datos negativos y el 0 dificultaron la comprensión del problema.

Mayén, Batanero y Díaz (2009) muestran en su estudio un análisis de un problema de comparación de datos ordinales, en un contexto familiar para el alumno. En su estudio, el análisis confirma la existencia de los siguientes conflictos semióticos en los alumnos: no reconocer la comparación de dos conjuntos de datos como un campo de problemas que se resuelve por las medidas de tendencia central; suponer definida la media en un conjunto de datos ordinales; no discriminar datos ordinales y numéricos; no usar las medidas de tendencia central en la comparación de dos conjuntos de datos; confundir las medidas de tendencia central con el valor de la variable; confundir la media con las frecuencias absolutas; confundir las frecuencias absolutas con los porcentajes; confundir el valor de la variable con la frecuencia; suponer definida la media en un conjunto de datos ordinales; confundir la variable ordinal con la variable medida en escala de razón o intervalo; y conflictos al aplicar un procedimiento, como calcular la media de las frecuencias.

Otras investigaciones de estos estadísticos se centran en niveles educativos inferiores, lo que muestra la importancia que se le da al tema en la educación desde muy temprana edad (Strauss y Bichler, 1988). Watson y Moritz (2000), analizan el significado intuitivo al concepto de promedio, concluyendo que para los niños es un valor en el centro de la distribución.

La lectura de gráficos estadísticos, como la que requiere nuestro problema, han sido investigados mostrando errores y dificultades en el proceso de lectura. Pereira, Mendoza y Mellor (1990) muestran que en el diagrama de barras, al modificar la organización de los datos los estudiantes pueden mostrar errores. Lee y Meletiou (2003) hablan de razonamientos erróneos al trabajar con histogramas. Diversos autores han definido niveles de lectura y comprensión de gráficos estadísticos, siendo la clasificación más conocida la de Curcio (1989), quien definió los siguientes:

- Leer entre los datos: consiste en la lectura literal del gráfico sin interpretar la información contenida en el mismo.
- Leer dentro de los datos: en este nivel se requiere una interpretación e integración de los datos.
- Leer más allá de los datos: realizar predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico.

Friel, Curcio y Bright (2001) amplían la clasificación anterior dando un nuevo nivel de lectura más alto llamado "*leer detrás de los datos*", el cual consiste en valorar críticamente el método de recogida de datos, su validez y fiabilidad, así como las posibilidades de extensión de las conclusiones.

Todas estas investigaciones mencionadas anteriormente, se han centrado en puntos aislados de las medidas de posición central, como por ejemplo el cálculo, aplicación de propiedades o la interpretación.

3. Método

3.1. Muestra

La muestra estuvo formada por 57 alumnos de primer año del Grado en Psicología de la Universidad de Granada, que cursaban una asignatura de Estadística, esta asignatura se enmarcaba dentro del área de Métodos de Investigación en las Ciencias del Comportamiento. Los datos se tomaron antes del estudio específico de las medidas de posición central, con el fin de detectar posibles estrategias y concepciones previas incorrectas, y poder tenerlas en cuenta en el diseño de la enseñanza formal del tema.

Los estudiantes no habían estudiado todavía el tema, por lo que los conocimientos que pueden utilizar son los adquiridos en Bachillerato o bien estrategias intuitivas. En nuestra muestra de 57 estudiantes, aparecen 17 hombres y 40 mujeres, es decir en la muestra el 29,8% estaba constituido por hombres y el 70,2% por mujeres.

También consideramos interesante observar otras variables como la especialidad de bachillerato de donde precedían los estudiantes, si el estudiante estaba realizando la asignatura por segundo año o la nota de acceso a la universidad con la que habían entrado en psicología.

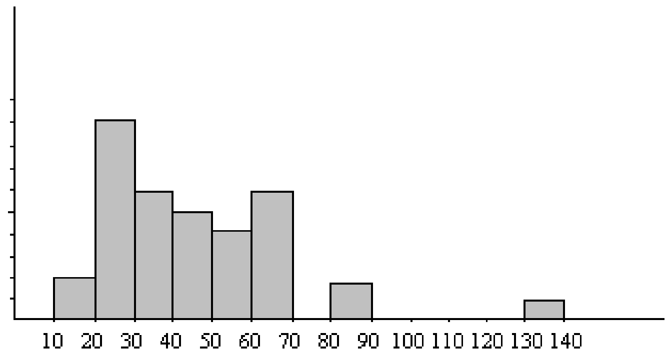
Los estudiantes entran en Psicología principalmente con notas bajas, ya que se ve la disminución de la frecuencia cuanto mayor es la nota de acceso; esto es debido a que no hay nota de corte. Estos estudiantes proceden principalmente del Bachillerato de Ciencias Sociales y algo menos del Bachillerato de Ciencias de la Salud, siendo casi nula la presencia de estudiantes procedentes del Bachillerato Tecnológico. Y finalmente, aproximadamente una sexta parte de los participantes son repetidores. En consecuencia, es de esperar que los conocimientos estadísticos no sean muy fuertes.

3.2. Problemas propuestos y método

Nos hemos interesado por la comprensión de los alumnos y alumnas sobre la comprensión y concepciones de las medidas de posición central, además de la influencia de la interpretación gráfica. Los siguientes Ítems tratan de evaluar estos dos puntos.

Ítem 1

Pedro piensa que, en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida.



Gasto semanal en comida de un grupo de estudiantes: media = 45.3 euros

Si____ No ____ ¿Por qué?

Figura 1. Ítem 1.

El Ítem 1, lo elaboró Cobo (2003), siendo una adaptación del utilizado por Garfield y Konold (1992), está adaptación implicó hacer que el problema se convirtiera en abierto que permite más libertad en las respuestas de los estudiantes. Los datos se presentan en el enunciado de forma gráfica (mediante un histograma de frecuencias), por lo que hay una parte de la tarea de lectura/interpretación de gráficos, y otra parte de la tarea implica las medidas de tendencia central.

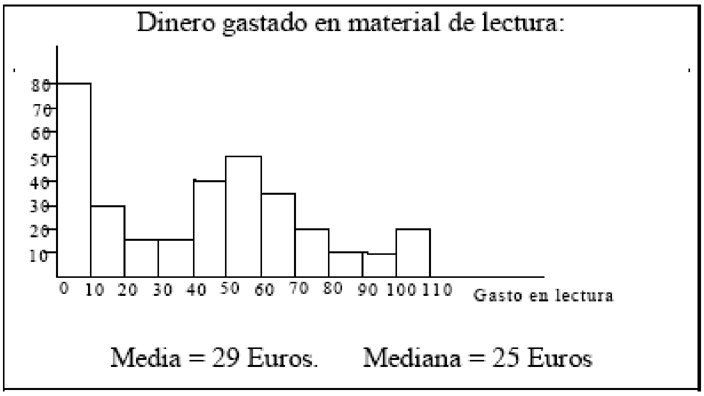
Una dificultad presente en el enunciado, es que el eje de ordenadas no tiene etiquetas, por lo que el alumno debe interpretar que cada marca como es un estudiante. Además, la pregunta presenta más dificultades, como son: la comparación de frecuencias en diferentes intervalos (Cobo y Batanero, 2000), ó determinación gráfica de la moda, tarea que supone un nivel de lectura “entre los datos” en la terminología de Curcio (1989).

En el enunciado del problema, aparece una afirmación incorrecta, ya que se confunden los conceptos de moda y mediana. Además, aparecen procedimientos de cálculo de los estadísticos de posición central a partir de un gráfico (o mediante datos agrupados), y como la distribución es asimétrica la mediana y la media no tienen que coincidir. La mediana es el valor que ocupa el lugar 17, ya que hay 35 sujetos, estando en el intervalo 40 y 50. Esto implica que la mediana está cercana al valor 47, pero no exactamente.

Muchos estudiantes, en este tipo de problemas, en vez de realizar algoritmos de cálculo para comprobar la mediana, tienden a argumentar la respuesta (Cobo, 2003; Mayén, 2009).

Ítem 2

Un grupo de estudiantes hizo este otro histograma del dinero gastado cada semana en material de lectura.



Francisco dijo que es difícil describir el dinero típico gastado en material de lectura en el gráfico anterior, porque la mayor parte de los estudiantes no gastaron nada o muy poco, y un segundo grupo gastó entre 50 y 60 euros cada semana. Él piensa que en este caso la media es un indicador pobre del promedio y elige usar la mediana en su lugar para representar el gasto semanal “promedio” en material de lectura. Si ____ No ____ ¿Por qué?

Figura 2. Ítem 2.

El Ítem 2, fue creado por Garfield y Konold (1992), contiene definiciones implícitas de la media, mediana y moda, y están presentes algunas propiedades como se tienen en consideración todos los valores de los datos para la media y la moda, pero que la mediana no se ve afectada por esto, que coinciden los tres estadísticos en caso de distribuciones simétricas, y que la media es menos resistente que la mediana y la moda.

El lenguaje utilizado es gráfico, verbal y numérico, dentro de lo que entendemos como lenguaje en nuestro marco teórico, es decir, uno de los elementos matemáticos primarios (Godino, Batanero y Font, 2007). Los alumnos deben comenzar interpretando un histograma para llegar a la conclusión en este de la frecuencia de valores en cada intervalo. El enunciado del Ítem es correcto, pues la moda proporciona el valor más frecuente y además se encuentra cercana a cero. Por otro lado, hay un segundo grupo en el enunciado que gasta entre 50 y 60 euros. Al ser la distribución muy asimétrica, la media es un mal representante, al igual que la moda, ya que hay dos grupos diferenciados de alta frecuencia. Por tanto, la mediana es la mejor opción para este ejemplo. Como procedimientos (otro elemento matemático primario en nuestro marco) incluye el cálculo de la media, mediana y moda a partir de un gráfico. Otras investigaciones afirman que la elección del estadístico es algo muy complicado para los estudiantes (Straus y Bichler, 1988; León y Zawojewski, 1991; Cobo, 2003)

4. Resultados

En el caso del Ítem 1, la afirmación del enunciado es incorrecta, ya que es la moda el estadístico que da el valor más frecuente; y se encuentra situada entre 20 y 30. Por otra parte, en el gráfico aparece calculada la media 45,3, pero como la distribución no es simétrica su valor pudiera no coincidir con el de la mediana. Los estudiantes deben calcular el total de la frecuencia (que en este caso es 35), por lo tanto, la mediana corresponde al valor de la posición 17, es decir se encuentra situada entre 40 y 50. Un valor aproximado de la mediana sería el punto central de este intervalo, es decir 45, se puede aceptar también que es aproximadamente 47, pero no exactamente igual.

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	35	61,4
Incorrecta	18	31,6
No contesta	4	7
Total	57	100

Tabla 1. Frecuencia y porcentaje de respuestas

Los alumnos de psicología muestran un alto porcentaje de casos que responden correctamente (ver Tabla 1), a pesar de considerarse este un tema sencillo para los alumnos, siguen estando presentes bastantes errores. Se observa que en el estudio de Mayén (2009), con este mismo Ítem para una muestra de estudiantes de secundaria y Bachillerato, consiguió un peor porcentaje de respuestas correctas (ver Tabla 2). A pesar de la poca presencia de alumnos procedentes de un bachillerato tecnológico en psicología hay mejores resultados, pero sigue existiendo aproximadamente un tercio de la muestra que cometen errores. Por otro lado, hay que considerar que los resultados de Mayén (2009) muestran un alto porcentaje de no respuesta, muy superior al nuestro.

En el caso del Ítem 2, también se pide interpretar un gráfico, pero a diferencia del caso anterior, en este caso los datos corresponden a una distribución bimodal, por lo que la mediana se presenta como mejor representante de los datos que la media. Además, se debe calcular la moda, ya que los valores de la media y mediana se incluyen calculados en el Ítem. Finalmente se debe argumentar la respuesta.

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	177	34,2
Incorrecta	226	43,6
No contesta	115	22,2
Total	518	100

Tabla 2. Frecuencia y porcentaje de respuestasen Mayén (2009), pp. 341

La presencia de dos poblaciones mezcladas, cada una de las cuales tiene su moda, no parece detectarse bien por los alumnos, quienes están acostumbrados a que la media y la mediana, cuando existen son únicas. Esto puede dificultar el asumir que la moda puede no ser única (Mayen, 2009). Las investigaciones sobre comprensión de la moda a partir de un gráfico son casi inexistentes, posiblemente debido a que se supone un concepto sencillo.

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	14	24,6
Incorrecta	41	71,9
No contesta	2	3,5
Total	57	100

Tabla 3. Frecuencia y porcentaje de respuestas

Los alumnos de psicología muestran un alto porcentaje de alumnos que no responden correctamente (ver Tabla 3), un cambio muy brusco en comparación con el Ítem anterior. Se observa que en el estudio de Mayén (2009), con este mismo Ítem para una muestra de estudiantes de secundaria y Bachillerato, consiguió un mejor porcentaje de respuestas correctas. Esto puede ser por la poca presencia de alumnos procedentes de un bachillerato tecnológico en psicología, o por un mejor conocimiento de los elementos matemáticos presentes en el Ítem 2 por parte de los alumnos de Mayén (2009).

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	190	36,36
Incorrecta	328	63,33
No contesta	0	0
Total	518	100

Tabla 4. Frecuencia y porcentaje de respuestas en Mayén (2009), pp. 212

Al analizar las respuestas de los alumnos de psicología de nuestra muestra, se han detectado el origen de algunos conflictos semióticos (en términos de nuestro marco teórico), entre los que destacan:

- Error al considerar la distribución como simétrica. Este conflicto no lo hemos observado en otras investigaciones. Este alumno presenta un buen manejo de propiedades de los gráficos estadísticos, intentando utilizar propiedades avanzadas de la distribución normal en nuestro caso, para ser más concretos en la que se dice que por ser totalmente simétrica los valores de la media, mediana y moda coinciden. Por otro lado, no se puede dar por correcto ya que las distribuciones que se muestran en nuestros ítems no son simétricas. Un ejemplo es: "*Porque al ser esta gráfica simétrica lo lógico es que media es mediana sea muy aproximada*", (A11);
- Error por no conocer el procedimiento de cálculo del estadístico de posición central. En Mayen (2009) aparecen situaciones similares, en las que los estudiantes aplican incorrectamente el procedimiento del cálculo de la mediana. En esta investigación, Mayen observa casos en los que para este cálculo no realizan la ordenación previa de los datos para obtener la mediana. En nuestra investigación un ejemplo donde no consiguen el valor de la mediana sería: "*No lo sé, no me sale la mediana*", (A19);
- Error por no comprobar la mediana del enunciado. Mayen (2009) en este ítem presenta como conflicto, que una pequeña parte de los estudiantes obtienen un valor aproximado de la mediana sin mostrar el algoritmo de cálculo ni dar argumentos. Un ejemplo de respuesta sería: "*Pedro → mediana 47; Verdadera media → 45´3*", (A29);
- Error de concepción de los estadísticos, ya que es la moda el estadístico que da el valor más frecuente. Este conflicto parte por una carencia de conocimiento de los conceptos de media, mediana y moda. Esto puede causar errores en la interpretación de cada uno de estos estadísticos. Mayen (2009) menciona que hay alumnos que utilizan la media, en lugar de la mediana en algunos de sus ítems;
- Error de interpretación gráfica, tomar los valores centrales del gráfico sin considerar como valores de tendencia central. Este error aparece en otras investigaciones, mostrando problemas en los procedimientos de cálculo de los estadísticos de posición central (Carvalho, 2001; Cobo, 2003, Mayen, 2009). Por otro lado, este conflicto puede tener su origen en las dificultadas en la lectura de gráficos estadísticos (Curcio, 1989). Un ejemplo nuestro de este tipo sería: "*La mediana se calcula con los valores centrales del gráfico. Suponiendo el eje de ordenadas aumenta de 5 en 5, la mediana debería ser 22´5*", (A13).

5. Conclusiones

Incluso en un resumen tan breve, es visible la gran complejidad de este objeto matemático, aparentemente simple y para el cuál se dispone de un tiempo muy limitado de enseñanza, tanto en Psicología como en otras titulaciones. En nuestros resultados se pueden observar porcentajes muy altos de respuestas incorrectas en un nivel educativo que el manejo de medidas de posición central, en muchas ocasiones, se considera sabido. Por otro lado, los conflictos semióticos detectados en los cuestionarios, muestran una gran variedad de las posibles situaciones que nos podemos encontrar en el aula, cada una de ellas que habría que tratar o manejar de forma particular para solventarla.

Las medidas de posición central requieren más atención, ya que han sido pocas investigaciones las realizadas en este tema para niveles universitarios, siendo la gran parte de estas para la formación en secundaria o bachillerato, donde la estudian en estos lugares por la necesidad que tienen de su uso. Todos estos indicadores apoyan el interés de enfocar una investigación específica sobre la didáctica de las medidas de posición central.

Reconocimientos: Trabajo realizado en el marco de los proyectos EDU2016-74848-P y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Bibliografía

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. Conferencia en las *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística.* Buenos Aires. Confederación Latino-americana de Sociedades de Estadística.

Bertin (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' understanding of the arithmetic average concept. En L. Meira (Ed.). *Proceeding of the 19th PME Conference* (v.3, pp. 144-151).Universidade Federal de Pernambuco, Recife,Brasil.

Carvalho, C. (2001). *Interaçao entre pares. Contributos para a promoçao do desenvolvimiento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade*. Tesis Doctoral. Universidad de Lisboa.

Carvalho, C. y César, M. (2002). Sharing ideas and statistics leaning: The role of peer interaction in school context. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics*, Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cobo, B. y Batanero, C. (2000). La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto sencillo?, *UNO*, (23), 85-96.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Razonamiento numérico en problemas de promedios, *SUMA*, (45), 79-86.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension.* Reston, VA: N.C.T.M.

Del Puerto, S. y Minnaard, C. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva, *Revista Iberoamericana de Educación*, (43), 3-25.

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.

Font, J. D., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *Forth e Learning of Mathematics*, *27* (2), 3-9.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education 32*(2), 124-158.

Garfield, J. B. y Konold, C. (1992). *Statistical reasoning assessment. Part 2: Statistics in context.* Minnesota, MN: National Science Foundation.

Garret, A. y García, J. A. (2005). Un cuestionario y estrategias sobre los promedios. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 7, 197-217.

Gattuso, L. y Mary, C. (2002). Development of the concept of weighted average among high-school children. En B., Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 22* (2 y 3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Lee, C. y Meletiou, M. (2003). Some difficulties of learning histograms in introductory statistics. *Joint Statistical Meetings-Section on Statistical Education.* Online*:* http://www.statlit.org/PDF/2003LeeASA.pdf.

Leon, M. R., y Zawokeswski, F. S. (1991). Use of the arithemetic mean: An investigation of four properties. Issues and preliminary results. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 302-306). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Li, D. Y. y Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics,* 14 (1), 2-8.

Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central por estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Mayén, S., Batanero, C. y Díaz, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana. *Statistics Education Research Journal, 8* (2), 74-93.

MEC (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.

Pollatsek, A., Lima, S. y Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 191-204.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346-362. On line: http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19 (1), 64-80.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning.* 2(1 y 2), 11-50.

Autores:

Gustavo R. Cañadas. Lic. en Estadísticas (Universidad de Granada), Máster en Metodología (UNED), Máster y Doctorado en Didáctica de la Matemática (Universidad de Granada). Actualmente profesor en la Universidad de Granada, en departamento de didáctica de la matemática. Ha publicado trabajos relacionados con la didáctica de la estadística.

Elena Molina Portillo. Lic. en Matemáticas, lic. en Estadísticas, Máster en Estadística Aplicada, Experta en Epidemiología e Investigación Clínica y Dra. en Matemáticas y Estadística por la Universidad de Granada. Es personal docente investigador en Didáctica de la Matemática, con más de 40 artículos y 120 congresos, algunos en educación estadística.

José M. Contreras García. Profesor contratado doctor de la Universidad de Granada. Lic. en Ciencias Matemáticas, lic. en CC. y TT. Estadísticas, DEA en Estadística e I.O., Máster en Didáctica de la Matemática, Máster en Estadística Aplicada, Dr. en Didáctica de la Matemática y Dr. en Matemáticas y Estadística. Publicaciones en didáctica de la probabilidad.

Rocío Álvarez Arroyo. Ing. Química, Máster en Investigación en Investigación y Avances en Microbiología, Doctora en Ingeniería Civil (Universidad de Granada), e Ing. Técnico Industrial (Universidad de Jaén). Actualmente profesora en el departamento de didáctica de la matemática. Ha publicado trabajos relacionados con la didáctica de la matemática.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 100-119

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Uma proposta de situação didática no contexto de investigação histórica das relações recorrentes bidimensionais para os números complexos de Fibonacci

Francisco Regis Vieira Alves, Rannyelly Rodrigues de Oliveira

Fecha de recepción: 24/02/2018
Fecha de aceptación: 18/05/2018

Resumo	Este trabalho apresenta uma proposta numa abordagem de investigação histórica, relativamente a um contexto de ensino superior, para professores em formação inicial. Ademais, aborda relações recorrentes bidimensionais definidas a partir dos valores da sequência de Fibonacci. Assim, com inspiração num artigo de Harman (1981), busca discutir propriedades matemáticas dos números G(n,m) em situações didáticas de investigação envolvendo aspectos epistemológicos e históricos de identidades desconsiderados por este autor. Ademais, algumas das relações e fórmulas abordadas podem ensejar futuras investigações derivadas da generalização do modelo de recorrência de Fibonacci. **Palavras-chave**: Situações didáticas, Investigação histórica, Relações recorrentes, Números complexos de Fibonacci.
Resumen	Este trabajo presenta una propuesta en un enfoque de investigación histórica, para un contexto de enseñanza superior, para profesores en formación inicial. Además, aborda relaciones recurrentes bidimensionales definidas a partir de los valores de la secuencia de Fibonacci. Así, con inspiración en un artículo de Harman (1981), busca discutir propiedades matemáticas de los números G(n,m) en situaciones didácticas de investigación envolviendo aspectos epistemológicos e históricos de identidades desconsideradas por este autor. Además, algunas de las relaciones y fórmulas abordadas pueden conducir a futuras investigaciones derivadas de la generalización del modelo de recurrencia de Fibonacci. **Palabras clave:** Situaciones didácticas, investigación histórica, relaciones recurrentes, números complejos de Fibonacci.
Abstract	This paper presents a proposal for a historical research approach to a context of higher education for teachers in initial formation. In addition, it addresses recurrent two-dimensional relationships defined from the values of the Fibonacci sequence. Thus, inspired by an article by Harman (1981), he seeks to discuss mathematical properties of numbers G(n,m) in didactic research situations involving epistemological and historical aspects of identities disregarded by this author. In addition, some of the

relations and formulas discussed may lead to future investigations derived from the generalization of the Fibonacci recurrence model.
Keywords: Didactic situations, historical research, recurrent relations, complex Fibonacci numbers.

1. Introdução

A proposição de atividades de investigação histórica, no âmbito da formação inicial de professores de Matemática, pode proporcionar e estimular uma percepção e o entendimento acerca do processo evolutivo em Matemática que, em certos casos, pode ser observado por intermédio das etapas progressivas e gradativas sofridas por um conceito científico ou um objeto teórico conceitual ao decorrer dos séculos e, em alguns casos, ao longo de algumas décadas (Alves, 2016a; 2016b; 2016c; 2017).

Por outro lado, quando se atém ao percurso evolutivo de um objeto, modelo matemático ou noção particular, de modo geral, não se aprecia/ encontra em fontes históricas, livros de História da Matemática - HM (Estrada, 2000; Eves, 1969; Herz, 1998) que relatem tanto os elementos primordiais que concorreram para o estadio de seu nascedouro, bem como, o estágio evolutivo hodierno e o interesse atual concernentemente ao “estado de arte” do mesmo.

De modo particular, neste trabalho, será discutido um modelo matemático cujo estágio original se tornou conhecido pelo nome de Sequência de Fibonacci e que, por intermédio de uma intenção “pedagógica” de Leonardo Pisano, costumeiramente é lembrado pelo problema do nascimento, *ad infinitum*, de pares de coelhos imortais mas, que, do ponto de vista do modelo numérico e suas propriedades práticas e utilitárias, já era conhecido e empregado no comércio pelos indianos alguns séculos antes.

Numa abordagem histórica, destaca-se que a quarta cruzada pregada pelo papa Inocêncio III, ocorreu em 1204 e tinha como objetivo organizar um ataque contra os mulçumanos no Egito e, em seguida, reconquistar a costa da Palestina. Todavia, a Igreja e as nações ocidentais cristãs não tinham recursos financeiros para custear esse plano. Desse modo, recorreram à República de Veneza com o propósito de conseguir um meio que levasse os cruzados até o Oriente. Os cruzados, como não tinham com que pagar a conta, “foram obrigados a aceitar que Veneza decidisse o roteiro das conquistas. A proposta da República era quitar a dívida com a tomada de Zara, um porto cristão, mas rival dos venezianos no comércio do mar Adriático” (Doré, 2000).

Assim, vale comentar que Leonardo nasceu por volta de 1175 no centro comercial de Pisa, na Idade Média que abrange um cenário marcado pela influência das cruzadas à sociedade europeia e pelo contato com o Oriente. Além do mais, nesse contexto, surgem as Universidades de Pádua, Nápoles, Paris, Oxford e Cambridge. Leonardo era um matemático atuante na atividade comercial, pelas quais visitou o Egito, a Síria, a Grécia, a Sicília, o sul da França e a Constantinopla. Contudo, nessas viagens, ele conheceu métodos algébricos árabes e os números indo-arábicos, logo, foi instigado a estudar aritmética. Em 1200, Pisano retorna à Itália e, em 1202, ele escreve a obra *Liber Abbaci*, na qual aborda questões relacionadas à Álgebra e Aritmética, dentre essas, ele propõe uma solução para o seguinte problema: dado um par de coelhos, determine "quantos serão produzidos por este par em um ano, se cada par de coelhos dar à luz a um novo par de coelhos a cada mês, começando com o segundo mês de sua vida. É assegurado que as mortes não ocorrem" (King, 1963).

Esse problema deu origem ao modelo de Fibonacci que é discutido nos livros de História da Matemática de forma pouco pormenorizada, na maioria das vezes, apresentando apenas a sua recursividade unidimensional. *A priori*, as definições e relações oriundas desse modelo, também são exploradas nas pesquisas em Matemática Pura (Alves, 2016a; 2016b; 2016c). Isso oportuniza a percepção e a compreensão de um processo evolutivo desse modelo, posibilitando a sua investigação no âmbito da Didática da Matemática.

De modo particular, podem ser listados os seguintes conjuntos numéricos: $\{1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,\ldots,f_n,\ldots\}$, $\{\ldots,f_{-n},\ldots,-34,21,-13,8,-5,3,-2,1,-1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots,f_n,\ldots\}$, $\{\ldots,f_{-(n+1)}+f_{-n}i,\ldots,-8+5i,5-3i,-3+2i,2-i,-i,0,1,1+i,2+i,3+2i,5+3i,8+5i,13+8i,\ldots,f_n+f_{n-1}i,\ldots\}$ e $\{\ldots,f_{-n}f_{-(m+1)}+f_{-(n+1)}f_{-m}i,\ldots,,0,1+i,2+i,1+2i,3+4i,5+6i,4+3i,10+9i,\ldots,f_nf_{m+1}+f_{n+1}f_mi,\ldots\}$.

Preliminarmente, com origem num olhar atencioso dos quatro conjuntos acima, uma preocupação matemática elementar consistiria na determinação da forma geral dos seus elementos. Assim, tendo em vista a emblemática relação de recorrência unidimensional $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n, n\geq 0$, de segunda ordem, cujo interesse de discussão no meio científico foi devido ao matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891), pode-se instigar o interesse pela forma de determinação do termo geral, correspondentemente, a cada conjunto há pouco indicado.

O fato é que, de modo simplista, a determinação dos elementos dos quatro conjuntos acima são condicionados por uma regra ou definição formal. Por outro lado, desde que se propugna o papel imprescindível do estabelecimento de definições matemáticas formais para que se possa vislumbrar o processo evolutivo em Matemática, assinala-se que o processo de extensão e descrição dos números de Fibonacci, para índices inteiros, pode ser registrado, pela primeira vez na literatura científica, por exemplo, no trabalho de Brother (1965). Brother (1965, p. 2) comenta a processo evolutivo da sequência numérica para valores (índices) à esquerda de zero (figura 1).

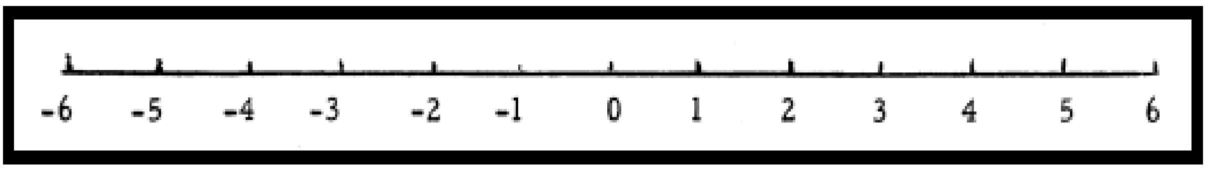


Figura 1. Extensão dos números de Fibonacci para índices inteiros.
Fonte: Brother (1965, p. 2).

Mas, antes de se deflagrar a seção subsequente, quando se atém aos elementos do tipo $13+8i$, de imediato, pode-se apropriar de uma notação geral da forma $f_n + f_{n-1}i$, para $n \in IN$. O elemento que, eventualmente, chama atenção nesse caso, corresponde à presença da unidade imaginária $i^2 = -1$ e, assim, intuitivamente, passa a exergá-la como um número complexo (de Fibonacci). Posto isso, doravante, serão abordadas ideias relativas a situações didáticas, tendo em vista que se pretende explorar a complexificação do modelo de Fibonacci no contexto da Didática da Matemática numa perspectiva de investigação histórica.

2. Situações didáticas

A Didática da Matemática (DM) teve seu marco inicial na França em 1970 e ganhou destaque durante a reforma da Matemática Moderna através da criação dos IREMs (Instituto de Pesquisa sobre Ensino da Matemática) e da aceitação das teorias piagetianas relacionadas ao desenvolvimento intelectual com ênfase no aprendizado de conceitos. Desse modo, segundo Pommer (2008), o Instituto oportunizava uma formação complementar para professores que possibilitava a concepção de recursos para serem usados em situações de ensino. Dessa forma:

> A didática da Matemática é uma das tendências da grande área da educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da pratica pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (Pais, 2002, p. 11).

Assim, a DM tem em seu escopo, investigar possíveis percursos metodológicos que proporcionem a transposição didática de conceitos matemáticos. Isso exige que se compreenda como as concepções novas são organizadas no cognitivo do aluno. Segundo Artigue (2009, p.4), a aprendizagem efetiva-se durante um processo de adaptação do estudante ao *milieu*. Almouloud (2007, p. 35) explica que o *milieu* é um grupo de situações adidáticas compostas por conhecimentos externos ao sujeito.

Brousseau (1976, p. 108) descreve, numa perspectiva da epistemologia genética, que os estágios de acomodação e assimilação do conhecimento, “se assemelham às etapas de desenvolvimento dos conceitos pela lei de regulação que os fazem aparecer, e que diferem da natureza exata das limitações que determinam essa regulação”. Desse modo, o paradigma cognitivo piagetiano instigou a concepção de teorias de ensino numa vertente da DM e que buscam identificar as fases de compreensão da construção de conceitos matemáticos. Dentre essas teorias, vale destacar a Teoria das Situações Didáticas (TSD) desenvolvida por Brousseau (1976).

A TSD abrange, em seus estudos, o aluno, saber e *milieu* e como estes três fatores estão associados diante de uma situação didática. Brousseau (2008, p. 53) esclarece que uma “interação torna-se didática se, e somente se, um dos sujeitos demonstra interação de modificar o sistema de conhecimentos do outro (os meios de decisão, o vocabulário, as formas de argumentação, as referências culturais)”.

Uma maneira de simular as situações didáticas é a aplicação de situações-problema elaboradas com enfoque na TSD. Conforme Almouloud (2007, p. 36), a TSD é sistematizada em quatro fases consecutivas: ação, formulação, validação e institucionalização. Vale salientar que as três fases iniciais são realizadas, principalmente, pelos estudantes com a participação mínima do docente. Por outro lado, a institucionalização é feita pelo professor a fim de avaliar o desempenho dos alunos nas etapas anteriores.

Alves (2016c, p. 62) explica que na fase de ação, os alunos decidem resolver a questão proposta, para isso, o estudante mobiliza, de imediato, um pensamento intuitivo e operacional. Enquanto na formulação, esse pensamento passa por um processo de transição a fim de se estabelecer um raciocínio inferencial fundamentado num modelo teórico. Nesse sentido, o estudante chega à fase de validação com argumentos mais elaborados recorrendo a uma linguagem matemática mais apropriada e a métodos de demonstração matemática com a finalidade de validar ou refutar as conjecturas elaboradas. Assim:

> Um problema de validação é mais um problema de comparação, de avaliação e de rejeição de evidências e da investigação da demonstração. [...] Para uma abordagem de validação, o pensamento deve basear-se em formulações anteriores. A linguagem desenvolvida, na dialética da formulação, é menos específica do que a da validação. A comunicação desempenha um papel importante em parte independente das questões de validade. (Brousseau, 1976, p. 110).

Além do mais, a TSD integra elementos de ordem epistemológica, cognitiva e social inerentes à Didática da Matemática, possibilitando o entendimento das “interações sociais que ocorrem na sala de aula entre alunos e professores e das condições e da forma com que o conhecimento matemático pode ser apropriado e aprendido” (Teixeira e Passos, 2013, p. 157). Ademais, quando se compreende a epistemologia como uma “teoria do conhecimento” (Abbagnano, 1998, p.338), é relevante aceitar a concepção de Almouloud (2007, p. 149), que retrata a epistemologia como uma investigação na estrutura do conhecimento científico que considera sua gênese histórica assim como sua (re) construção na estrutura cognitiva dos aprendizes. Nesse contexto:

> [...] vale a advertência do caráter epistemológico que reside em imprimir ao raciocínio do estudante, o caráter monossêmico e inferencial, característico das teorias formais. [...] Assim como os teoremas e as teorias fundantes, que conferem seu caráter de certeza, se mostram entrelaçadas com uma “teia epistêmica” de concepções e saberes que não são negligenciados pela Didática da Matemática. (Alves, 2016d, p. 140-141).

À vista disso, a TSD oportuniza a compreensão de teoremas e propriedades matemáticos através de suas etapas de formulação e avaliação de conjecturas. Isso pode ser evidenciado na fase de institucionalização da TSD, em que o docente retoma a situação didática e verifica as produções dos alunos no sentido de generalizar os conceitos matemáticos explorados em sala de aula e, consequentemente, ampliar o repertório cultural de “saberes matemáticos” (Alves, 2016c, p. 62).

Por fim, um conjunto de situações-problema com enfoque na TSD possibilita a realização de situações didáticas numa abordagem de investigação histórico-evolutiva de relações matemáticas. Assim, a seguir será apresentado o modelo de Fibonacci e sua representação histórico-evolutiva no que diz respeito ao processo de complexificação.

3. Os números complexos de Fibonacci no contexto de investigação histórica

Na seção atual, serão apresentados e demarcados os elementos necessários e envolvidos numa proposta de situação didática no contexto de investigação histórica. Pretende-se com essa proposta, realizar situações de ensino, no âmbito de formação inicial de professores de Matemática, que oportunizem uma abordagem epistemológica das definições e relações recursivas oriundas da complexificação do Modelo de Fibonacci nas aulas de História da Matemática.

King (1963, p.16) explica que a gênese do modelo de Fibonacci é contextualizada pela situação-problema, "*Rabbit Problem",* proposta por Leonardo Pisano em 1202 na obra *Liber Abbaci* sobre a reprodução de pares de coelhos imortais. Essa problematização deu origem à sequência de Fibonacci {1, 2, 3, 5, 8, ...}. Conforme, Alves e Catarino (2016), essa sequência é representada pelo modelo recursivo unidimensional $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ para $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$.

No contexto histórico-evolutivo do MF, pode-se verificar um processo de generalização da SF sendo publicizado, inicialmente, na literatura de Brother (1965) com a extensão da sequência para o conjunto dos números inteiros. Além do mais, o modelo unidimensional foi discutido por Koshy (2001), que investigou algumas identidades unidimensionais, elaboradas por François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891), inerentes ao MF.

À vista disso, este artigo, tem como campo epistêmico, o processo de complexificação do MF através da inserção da unidade imaginária "i" e sua correspondente representação algébrica bidimensional. Destarte, têm-se representações complexas para os números de Fibonacci como, por exemplo, os "números de Fibonacci Gaussiano" e suas relações recorrentes apresentados por Pethe e Horadam (1986) e os "inteiros gaussianos" que é uma descrição feita por Berzsenyi (1977).

Desse modo, preliminarmente, pode-se vislumbrar a representação geométrica da disposição dos inteiros Gaussianos. Conway & Smith (2003, p. 15) acentuam que "Gauss definiu a noção de números complexos de modo análogo, em integralidade, com os números reais". E, de modo particular, um número complexo $(x+iy)$ é considerado como um inteiro gaussiano se, justamente, suas partes real e imaginária são números inteiros. Assim, como foi mencionado nos parágrafos anteriores, o modelo dos números inteiros Gaussianos permitiu o surgimento de definições matemáticas derivadas da SF original. Com efeito, o conjunto de três definições, a seguir, confirma um processo evolutivo, matemático e epistemológico ao decurso de algumas décadas.

Definição 1: Chamaremos de números Gaussianos de Fibonacci, os elementos descritos pela seguinte relação de recorrência $Gf_n = Gf_{n-1} + Gf_{n-2}$, onde $Gf_0 = i, Gf_1 = 1$ (Jordan, 1965).

Definição 2: Para ‘n’ e ‘m’ inteiros positivos, definiremos os números gaussianos de Fibonacci por $f_{n+mi} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot i^k \cdot f_{n-k}$ (Berzsenyi, 1977).

Definição 3: Os números da forma $G(n,m)$, devem satisfazer às seguintes condições bidimensionais de recorrência: $G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m)$; $G(n,m+2)$ $= G(n,m+1) + G(n,m)$, com as condições: $G(0,0) = 0$, $G(1,0) = 1$, $G(0,1) = i$, $G(1,1) = 1 + i$ (Harman, 1981).

Na figura 2, observa-se a representação dos inteiros gaussianos e, a partir da definição 2, pode-se compreender que os números gaussianos de Fibonacci constituem um subconjunto dos inteiros gaussianos. Além disso, na definição 2, consta uma relação que amplia o conjunto de índices da sequência dos números Gaussianos. A definição 2 apesar de não se mostrar com evidência o caráter de recursividade unidimensional, pode-se observar que: $f_{(n-1)+mi} + f_{(n-2)+mi} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot i^k \cdot f_{n-1-k} +$ $+ \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot i^k \cdot f_{n-2-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot i^k \cdot (f_{n-1-k} + f_{n-2-k}) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot i^k \cdot f_{n-k} = f_{n+mi} \therefore f_{n+mi} = f_{(n-1)+mi} + f_{(n-2)+mi}$. Por outro lado, na definição 3, o MF é apresentado com duas variáveis m e n.

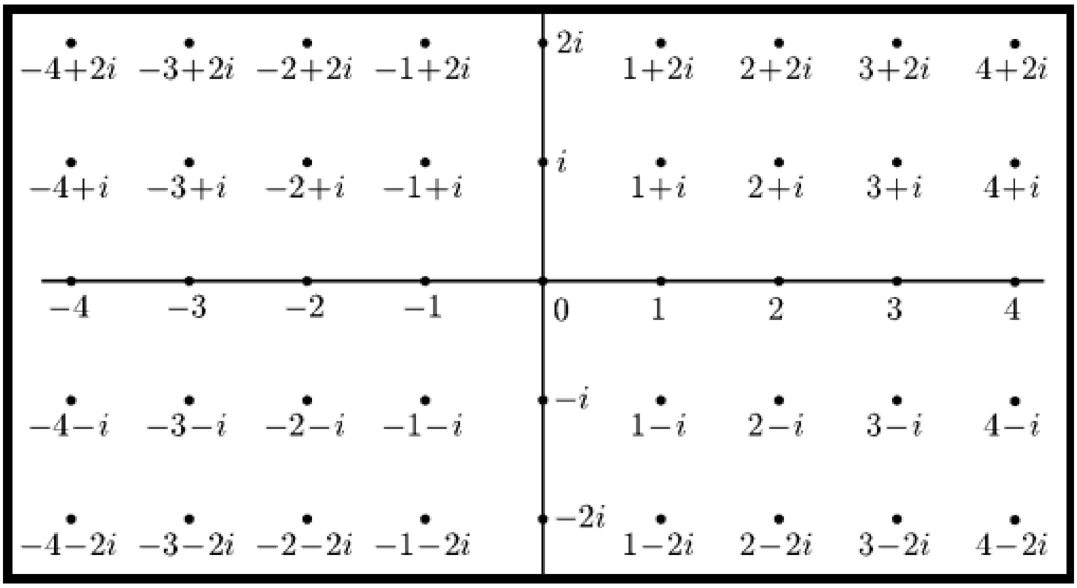


Figura 2. Descrição geométrica de um conjunto que impulsionou o interesse pelas representações dos números de Fibonacci no plano.
Fonte: Conway & Smith (2003, p. 15).

Doravante, a partir da definição 3, serão discutidas, de modo pormenorizado, determinadas propriedades costumeiramente não explicitadas em artigos científicos em Matemática Pura. Nesse caso, as relações de recorrência são ditas bidimensionais (Harman, 1981) e possibilitam a determinação de certas identidades com uma interpretaçao geométrica discutida por este autor, pela primeira vez na década de 90, do século XX.

Logo em seguida, serão enunciados e demonstrados alguns resultados primordiais para a discussão e concepção da situação diática, no contexto de investigação histórica, envolvendo os números da forma $G(n,m)$, com n,m inteiros quaisquer condicionados pelas relações recorrentes.

4. Relações recorrentes bidimensionais e propriedades

Nesta seção, *a priori*, serão deduzidos um conjunto de propriedades (lema 1), que designa o teorema 1, oriundo de uma relação recorrente bidimensional investigada por Harman (1981), Oliveira, Alves e Paiva (2017). Desse modo, a partir da definição 3, pode-se verificar o lema e o teorema a seguir.

Lema 1: para os números de Fibonacci da forma G(n, m), valem as seguintes propriedades: $G(n,0)=f_n$, $G(0,m)=f_m i$, $G(n,1)=f_n+f_{n+1}i$ e $G(1,m)=f_{m+1}+f_m i$ (Oliveira, Alves e Paiva, 2017).

Demonstração: para $G(n,0)=f_n$, com origem na relação $G(n+2,m)=G(n+1,m)+$ $+G(n,m)$ e considerando o caso particular $m=0 \therefore G(n+2,0)=G(n+1,0)+G(n,0)$, pelo princípio de indução sobre n, decorre o seguinte comportamento inicial: para $n=0 \therefore G(2,0)=G(1,0)+G(0,0)=1=f_2$. Para outro valor, tem-se que: $n=1 \therefore G(3,0)=G(2,0)$ $+G(1,0)=1+1=2=f_3$. Pelo método de indução matemática, assume-se que $G(n,0)=f_n$ e $G(n+1,0)=f_{n+1}$. Por fim, tendo em vista a relação $G(n+2,0)=G(n+1,0)+G(n,0)=$ $=f_{n+1}+f_n=f_{n+2}$, obtém-se o resultado desejado.

Analogamente, para $G(0,m)=f_m i$, será empregado $n=0$, assim $G(0,m+2)=G(0,m+1)+G(0,m)$ e, para os valores particulares de $m=0$, pode-se ver $G(0,2)=G(0,1)+G(0,0)=1\cdot i=f_2 i$. Pode-se, no seguinte caso, observar que $m=1 \therefore G(0,3)=G(0,2)+G(0,1)=1\cdot i+1\cdot i=2i=f_3 i$. De novo, pelo processo indutivo, são considerados os passos iniciais indutivos, envolvendo a seguinte propriedade $G(0,m)=f_m i$ e $G(0,m+1)=f_{m+1}i$. Por fim, pode-se escrever a seguinte expressão $G(0,m+2)=G(0,m+1)+G(0,m)=f_{m+1}i+f_m i=(f_{m+1}+f_m)i=f_{m+2}i$. Ou seja, vale que $G(0,m+2)=f_{m+2}i$. Assim, segue o resultado desejado por indução matemática.

De modo análogo, pode-se verificar a propriedade $G(n,1)=f_n+f_{n+1}i$, avaliando $G(n+2,m)=G(n+1,m)+G(n,m)$ para m=1: $G(n+2,1)=G(n+1,1)+G(n,1)$, assim, com $n=0 \therefore G(2,1)=G(1,1)+G(0,1)=1+2i=1i+1(1+i)=f_1.G(0,1)+f_2.G(1,1)$ e $n=1 \therefore G(3,1)=$ $G(2,1)+G(1,1)=2+3i=1i+2(1+i)=f_2.G(0,1)+f_3.G(1,1)$, assumindo pelo passo indutivo

$G(n,1) = G(n-1,1) + G(n-2,1) = f_n + f_{n+1}i$ e $G(n+1,1) = G(n,1) + G(n-1,1) = f_{n+1} + f_{n+2}i$, obtém-se: $G(n+2,1) = G(n+1,1) + G(n,1) = f_{n+1}.G(0,1) + f_{n+2}.G(1,1) = f_{n+2} + f_{n+3}i$.

Semelhantemente, para $G(1,m) = f_{m+1} + f_m i$, considera-se $G(n,m+2) = G(n,m+1) + {}$ ${}+G(n,m)$ para n=1: $G(1,m+2) = G(1,m+1) + G(1,m)$, desse modo, pode-se escrever $m = 0 \therefore G(1,2) = G(1,1) + G(1,0) = 2 + i = f_3 + f_2 i$ e $m = 1 \therefore G(1,3) = G(1,2) + G(1,1) = 3 + 2i = f_4 + f_3 i$. Assumindo, por indução matemática $G(1,m) = G(1,m-1) + G(1,m-2) = f_{m+1} + f_m i$ e $G(1,m+1) = G(1,m) + G(1,m-1) = f_{m+2} + f_{m+1}i$, logo, determina-se $G(1,m+2) = G(1,m+1) + {}$ ${}+G(1,m) = f_{m+3}i + f_{m+2}i$.

Teorema 1: Os números $G(n,m)$ são descritos por $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m \cdot i$, para dois inteiros n,m (Oliveira, Alves e Paiva, 2017).

Demonstração: Considerando o lema 1 e a relação recorrente $G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m)$, será avaliado $m = 0 \therefore G(n,2) = G(n,1) + G(n,0) =$ $= f_n + f_{n+1}i + f_n = 2 \cdot f_n + 1 \cdot f_{n+1}i = f_n \cdot f_3 + f_{n+1} \cdot f_2 i$. E, de modo similar, pode-se ver também $m = 1 \therefore G(n,3) = G(n,2) + G(n,1) = 2f_n + f_{n+1}i + f_n + f_{n+1}i = 3f_n + 2f_{n+1}i = f_n \cdot f_4 + f_{n+1} \cdot f_3 i$. E, por indução sobre 'm', tem-se $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m \cdot i$ e $G(n,m+1) = f_n f_{m+2} + f_{n+1} f_{m+1} \cdot i$. Finalmente, determina-se $G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m) = f_n f_{m+2} + f_{n+1} f_{m+1} \cdot i + f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m \cdot i =$ $= f_n(f_{m+2} + f_{m+1}) + f_{n+1}(f_{m+1} + f_m) \cdot i = f_n f_{m+3} + f_{n+1} f_{m+2} \cdot i$, isto é, $G(n,m+2) = f_n f_{m+3} + f_{n+1} f_{m+2} \cdot i$.

O corolário seguinte permite uma descrição de recorrência bidimensional para os números $G(n,m)$ em função da fórmula de Binnet, costumeiramente, indicada por $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ (para 'n' natural), descoberta pelo matemático francês, em 1843, Jacques-Phillipe Marie Binnet (1786 – 1856). Entretanto, Koshy (2007, p. 136) observa que, já em 1718, era empregada pelo matemático francês Abraham De Moivre (1667–1754) (Tattersall, 2005, p. 30). Todavia, por intermédio de métodos inovadores, que envolviam o uso de funções geradoras, Koshy (2007, p. 137) acentua ainda o trabalho independente do matemático e engenheiro francês Gabriel Lamé (1795 – 1870), no ano de 1844, tendo em vista a obtenção da mesma fórmula.

Corolário 1: Os números $G(n,m)$ são descritos, em função da fórmula de Binnet, por: $G(n,m) = \dfrac{(\alpha^{n+m+1} + \beta^{n+m+1})(1+i) - \alpha^n \beta^m (\beta + \alpha i) - \alpha^m \beta^n (\alpha + \beta i)}{(\alpha - \beta)^2}$, para $n,m \in IN$.

Demonstração: Considerando o teorema 1 e a fórmula de Binnet, conhecida por $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, tem-se $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m \cdot i = \left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) \cdot \left(\dfrac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta}\right) + \left(\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right) \cdot \left(\dfrac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right) .i$. E, fazendo as contas, determina-se a seguinte fórmula explícita para os termos:

$$G(n,m) = \frac{(\alpha^{n+m+1} + \beta^{n+m+1})(1+i) - \alpha^n \beta^m (\beta + \alpha i) - \alpha^m \beta^n (\alpha + \beta i)}{(\alpha - \beta)^2}, \text{ para } n,m \in IN.$$

Assim, o resultado anterior resulta de uma derivação da fórmula de Binnet, para o caso bidimensional. Para concluir, é relevante recordar que na presente secção, foram apresentadas, pormenorizadamente, propriedades relacionadas com os números definidos a partir da relação bidimensional. Assim, podem-se verificar intrínsecas propriedades inerentes aos números presentes na SF. Na próxima seção, serão abordadas algumas situações-problema propostas a fim de se realizar situações didáticas numa perspectiva de investigação historica, capazes de permitir e estimular um entendimento do estudante relativo ao processo de evolução e generalização do modelo de Fibonacci.

5. Situações-problema numa proposta de investigação histórica

Brousseau (2008, p. 55) descreve as situações como recursos que oportunizam uma comunicação didática. Desse modo, Pommer (2013, p. 22) sugere que as situações didáticas sejam propostas através de situações-problema, de maneira que conduzam o desenvolvimento inferencial do estudante durante a elaboração, partindo de seus conhecimentos prévios, de estratégias de soluções. Assim, neste tópico, será apresentado um conjunto de situações-problema juntamente com uma predição dos possíveis argumentos que os estudantes possam expresar durante a resolução.

Com origem nas propriedades discutidas anteriormente, foram formuladas algumas situações que devem suscitar uma ação investigativa por parte dos alunos (professores em formação inicial), fruto da interação do trinômio professor – estudantes – conhecimento matemático. Todavia, vale recordar algumas identidades (tabela 1) comentadas por Koshy (2001) e que foram descobertas pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891).

Descrição	**Identidades unidimensionais de Fibonacci**
Soma dos ‘n’ números de Fibonacci de índice par (E. Lucas, 1876).	$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$, para $n \in IN$.
Soma dos ‘n’ números de índice ímpar (E. Lucas, 1876).	$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$, para $n \in IN$.
Soma dos ‘n’ primeiros termos da sequência de Fibonacci (E. Lucas, 1876).	$\sum_{i=1}^{n} f_{i} = f_{n+2} - 1$, para $n \in IN$.
Soma dos ‘n’ primeiros quadrados dos termos da sequência de Fibonacci (E. Lucas, 1876).	$\sum_{i=1}^{n} f_{i}^{2} = f_{n} \cdot f_{n+1}$, para $n \in IN$.

Tabela 1. Identidades elementares envolvendo os números de Fibonacci.
Fonte: Koshy (2001).

À vista disso, segue a seguinte situação-problema I: decidir se o conjunto numérico indicado por $G(n,m)$ possui propriedades semelhantes, quando comparado com o seguinte conjunto numérico $\{\ldots, f_{-n}, \ldots, -34, 21, -13, 8, -5, 3, -2, 1, -1,$

$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots,f_n,\ldots\}$. Além disso, pode-se considerar o conjunto $\{\ldots,1+i,2+i,1+2i,3+4i,5+6i,4+3i,10+9i,24+25i,\ldots\}$. Semelhantemente, ao caso da fórmula de Binnet, pode-se determinar uma fórmula explícita para os termos acima, sabendo que são obtidos por intermédio da relação bidimensional descrita por $\begin{cases} G(n+2,m)=G(n+1,m)+G(n,m) \\ G(n,m+2)=G(n,m+1)+G(n,m) \end{cases}$, com $n,m \in IN$?

Na fase de ação, os alunos devem ser estimulados a determinar/definir os valores iniciais dos elementos $G(n,m)$ a fim de descrever de modo explícito um elemento qualquer da sequência. Os valores iniciais sugeridos para este caso são dados por $G(0,0)=0, G(1,0)=1, G(0,1)=i, G(1,1)=1+i$. Os argumentos do teorema 1 podem ser aplicados. Na fase de formulação, vale assinalar que a fórmula $G(n,m)=f_nf_{m+1}+f_{n+1}f_m \cdot i$ possibilita uma descrição mnemónica combinatória, posto que, tomando como referência a ordem das variáveis (n,m), na posição da primeira variável 'n', o primeiro termo correspondente f_nf_{m+1} possui uma unidade inferior ao índice do termo correspondente a variável 'm'. De modo semelhante, na posição da segunda variável 'm', quando se atém ao termo $f_{n+1}f_m \cdot i$, na variável correspondente, detecta-se uma unidade inferior. Na validação, os alunos podem descrever os números $G(n,m)$, ou seja o teorema 1, em função da fórmula de Binnet $f_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$.

Na situação subsequente, será explorado um raciocínio discutido pela primeira vez por Brousseau (1963), distinguido pela identidade $f_{-n}=(-1)^{n+1}f_n=(-1)^{n-1}f_n$ que permite a extensão ao conjunto dos inteiros, relativamente ao conjunto de índices. Nesse contexto, tem-se a situação-problema II: considerando essa identidade e o seguinte conjunto $\{-1-i,-6-6i,-2-2i,-5-5i,-i,-1+0i,\ldots\}$, de modo semelhante à situação anterior, decida se é possível determinar uma fórmula explícita para os termos $G(-n,-m)$.

Com origem na situação anterior e, por intermédio da equivalência $f_{-n}=(-1)^{n+1}f_n=(-1)^{n-1}f_n$, na ação, os estudantes devem ser instigados a determinar os termos do tipo $G(-n,-m)=(-1)^{n+m+1}f_nf_{m-1}+f_{n-1}f_m \cdot i$ que possibilita avaliar os números para quaisquer inteiros. De fato, durante a fase de formulação, com origem no teorema 1, os alunos devem verificar $G(-n,-m)=f_{-n}f_{-m+1}+f_{-n+1}f_{-m}\cdot i=(-1)^{n+1}f_nf_{-(m-1)}+f_{-(n-1)}(-1)^{m+1}f_m\cdot i=(-1)^{n+1}f_n(-1)^mf_{(m-1)}+(-1)^nf_{(n-1)}(-1)^{m+1}f_m\cdot i=$ $=(-1)^{n+m+1}\left(f_nf_{m-1}+f_{n-1}f_m\cdot i\right)=(-1)^{n+m+1}G(m-1,n-1)$. Na validação, vale observar que os números $G(-n,-m)$ podem ser determinados, também, pela seguinte fórmula $G(-n,-m)=\frac{(\alpha^{-n-m+1}+\beta^{-n-m+1})(1+i)-\alpha^{-n}\beta^{-m}(\beta+\alpha i)-\alpha^{-m}\beta^{-n}(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta)^2}$, fazendo a substituição na fórmula de Binnet (corolário 1). Contudo, os alunos devem ser estimulados a investigar e compreender que a identidade $G(-n,-m)=(-1)^{n+m+1}G(n,m)$ não pode ser verificada.

Na situação-problema III, tem-se o seguinte enunciado: sejam as identidades unidimensionais de Fibonacci: $f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n=f_{n+2}-1$, $f_2+f_4+f_6+\cdots+f_{2n}=f_{2n+1}-1$, $f_1+f_3+f_5+\cdots+f_{2n-1}=f_{2n}$ e $f_1^2+f_2^2+f_3^2+\cdots+f^2{}_n=f_n\cdot f_{n+1}$ (tabela 1), verifique se identidades semelhantes podem ser inferidas dos números da forma $G(n,m)$, levando em consideração as relações recorrentes bidimensionais. Durante a resolução, de modo semelhante ao caso das demonstrações das identidades indicadas, os estudantes devem verificar propriedades semelhantes para os números $G(n,m)$ recorrendo às relações bidimensionais (definição 3). Dessa forma, na etapa de ação e formulação, considerando a relação $G(n+2,m)=G(n+1,m)+G(n,m)$ e fazendo $G(2,m)=G(1,m)+G(0,m)$, segue que:

$$\begin{cases} G(1,m)=G(2,m)-G(0,m) \\ G(3,m)=G(4,m)-G(2,m) \\ G(5,m)=G(6,m)-G(4,m) \\ G(7,m)=G(8,m)-G(6,m) \\ \vdots \\ G(2n+1,m)=G(2n+2,m)-G(2n,m) \end{cases}$$

Após o cancelamento de alguns termos, os alunos devem encontrar $G(1,m)+G(3,m)+G(5,m)+\cdots+G(2n+1,m)=G(2n+2,m)-G(0,m)$ ou $\sum_{i=0}^{n}G(2i+1,m)=G(2n+2,m)-G(0,m)=$ $=f_{2n+2}f_{m+1}+f_{2n+3}f_m\cdot i-f_m\cdot i=f_{2n+2}f_{m+1}+(f_{2n+3}-1)f_m\cdot i$. Ou seja, $\sum_{i=0}^{n}G(2i+1,m)=f_{2n+2}f_{m+1}+(f_{2n+3}-1)f_m\cdot i$. E, de modo análogo, pode-se verificar para a soma dos termos de índice par não nulo o seguinte:

$$\begin{cases} G(2,m)=G(3,m)-G(1,m) \\ G(4,m)=G(5,m)-G(3,m) \\ G(6,m)=G(7,m)-G(5,m) \\ G(8,m)=G(9,m)-G(7,m) \\ \vdots \\ G(2n,m)=G(2n+1,m)-G(2n-1,m) \end{cases}.$$

Assim, após o cancelamento, tem-se que $\sum_{i=1}^{n}G(2i,m)=G(2n+1,m)-G(1,m)=f_{2n+1}f_{m+1}+f_{2n+2}f_m\cdot i$ $-f_{m+1}-f_m i=f_{2n+1}f_{m+1}-f_{m+1}+(f_{2n+2}f_m-f_m)i$, isto é, $\sum_{i=1}^{n}G(2i,m)=(f_{2n+1}-1)f_{m+1}+(f_{2n+2}-1)f_m i$ que estabelece semelhança com a identidade $f_2+f_4+f_6+\cdots+f_{2n}=f_{2n+1}-1$. Enquanto que $\sum_{i=0}^{n}G(2i+1,m)=f_{2n+2}f_{m+1}+(f_{2n+3}-1)f_m\cdot i$ preserva semelhanças em sua dedução com a identidade $f_1+f_3+f_5+\cdots+f_{2n-1}=f_{2n}$. Por outro lado, sabe-se que $G(3,m)=G(2,m)+G(1,m)\therefore$ $G(2,m)=G(3,m)-G(1,m)$ e $G(2,m)\cdot G(2,m)=(G(3,m)-G(1,m))G(2,m)=G(2,m)G(3,m)-G(2,m)G(1,m)$. Assim, tem-se que:

$$\begin{cases} G(1,m)^2=G(1,m)G(2,m)-G(1,m)G(0,m)\\ G(2,m)^2=G(2,m)G(3,m)-G(2,m)G(1,m)\\ G(3,m)^2=G(3,m)G(4,m)-G(3,m)G(2,m)\\ G(4,m)^2=G(4,m)G(5,m)-G(4,m)G(3,m)\\ G(5,m)^2=G(5,m)G(6,m)-G(5,m)G(4,m)\\ \vdots\\ G(n,m)^2=G(n,m)G(n+1,m)-G(n,m)G(n-1,m)\end{cases}$$

Mais uma vez, efetuando o cancelamento dos termos adequados, deve seguir que $G(1,m)^2+G(2,m)^2+G(3,m)^2+G(4,m)^2+\cdots+G(n,m)^2=G(n,m)G(n+1,m)-G(1,m)G(0,m)$. De modo simplificado, escreve-se a identidade $\sum_{i=1}^{n}G(i,m)^2=G(n,m)G(n+1,m)-$ $G(1,m)G(0,m)=[(1-f_{n+1}.f_{n+2})f_m^2+f_n.f_{n+1}.f_{m+1}^2]+(-f_m.f_{m+1}+f_m.f_{m+1}.f_{n+1}^2+f_n.f_{n+2}.f_m.f_{m+1})i$. Por fim, analogamente, os alunos podem determinar que $\sum_{i=1}^{n}G(i,m)=G(n+1,m)+G(n,m)-G(0,m)-G(1,m)$, ou ainda, a seguinte identidade $\sum_{i=1}^{n}G(i,m)=(f_{n+2}-1)f_{m+1}+(f_{n+3}-2)f_m i$.

Na fase de validação da situação-problema III, espera-se que os alunos compreendam que existe uma representação bidimensional correspondente às identidades unidimensionais de Fibonacci (tabela 1). Além do mais, eles devem ser estimulados na confrontação dos argumentos utilizados no caso unidimensional, empregado por E. Lucas, com o caso bidimensional. Na última situação, propõe-se a abordagem de algumas propriedades elementares envolvendo o caráter de divisibilidade do somatório dos números Fibonaccianos com os números Gaussianos de Fibonacci.

Nesse sentido, segue a situação-problema IV: afirme ou infirme as seguintes sentenças: (a) a soma dos seis números consecutivos dos numeros complexos de Fibonacci é divisível por 4 e (b) a soma dos dez números consecutivos dos números complexos de Fibonacci é divisível por 11. Durante a resolução desse problema, na etapa de ação, deve-se considerar $\sum_{i=0}^{5}f_{n+i}=4\cdot f_{n+4}$. De fato, pode-se ver que

$\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = (f_n + f_{n+1}) + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + (f_{n+5}) = (f_n + f_{n+1}) + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + (f_{n+3} + f_{n+4}) = f_{n+2} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + (f_{n+3} + f_{n+4}) =$
$= 2(f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4}) = 2f_{n+4} + 2f_{n+4} = 4 \cdot f_{n+4}$. Assim, no caso particular, constata-se a validade para a sequência original.

Destarte, considerando a soma $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 \cdot f_{n+6}$, de modo similar, segue a seguinte a soma $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5}) + f_{n+6} + f_{n+7} + f_{n+8} + f_{n+9} = 4f_{n+4} + f_{n+6} + f_{n+7} + f_{n+8} + f_{n+9} =$
$= 4f_{n+4} + f_{n+6} + f_{n+7} + f_{n+8} + (f_{n+7} + f_{n+8}) = 4f_{n+4} + f_{n+6} + 2f_{n+7} + 2f_{n+8} = 4f_{n+4} + f_{n+6} + 2 \cdot (f_{n+5} + f_{n+6}) + 2 \cdot (f_{n+6} + f_{n+7}) =$
$= 4f_{n+4} + f_{n+6} + 2 \cdot (f_{n+5} + f_{n+6}) + 2 \cdot (f_{n+6} + f_{n+5} + f_{n+6}) = 4f_{n+4} + 4f_{n+5} + 7f_{n+6}$. E, assim, encontra-se $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 4f_{n+6} + 7f_{n+6} = 11 \cdot f_{n+6}$. Doravante, no momento de formulação, espera-se que os estudantes verifiquem essas identidades unidimensionais para os números $G(n,m)$. Isto é, no caso de $\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = G(n,m) + G(n+1,m) + G(n+2,m) + G(n+3,m) + G(n+4,m) +$ $+G(n+5,m)$, pode-se ver:

$$\begin{cases} G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m \cdot i \\ G(n+1,m) = f_{n+1} f_{m+1} + f_{n+2} f_m \cdot i \\ G(n+2,m) = f_{n+2} f_{m+1} + f_{n+3} f_m \cdot i \\ G(n+3,m) = f_{n+3} f_{m+1} + f_{n+4} f_m \cdot i \\ G(n+4,m) = f_{n+4} f_{m+1} + f_{n+5} f_m \cdot i \\ G(n+5,m) = f_{n+5} f_{m+1} + f_{n+6} f_m \cdot i \end{cases}$$

Assim, pode-se ter $\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = \left(\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} \right) \cdot f_{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{6} f_{n+i} \right) \cdot f_m \cdot i = (4 \cdot f_{n+4}) \cdot f_{m+1} + (4 \cdot f_{n+5}) \cdot f_m \cdot i =$
$= 4 \cdot (f_{n+4} \cdot f_{m+1} + f_{n+5} \cdot f_m \cdot i) = 4 \cdot G(n+4,m)$. Além disso, pode-se repetir o argumento anterior, a fim de determinar que:

$$\begin{cases} G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m \cdot i \\ G(n+1,m) = f_{n+1} f_{m+1} + f_{n+2} f_m \cdot i \\ G(n+2,m) = f_{n+2} f_{m+1} + f_{n+3} f_m \cdot i \\ G(n+3,m) = f_{n+3} f_{m+1} + f_{n+4} f_m \cdot i \\ G(n+4,m) = f_{n+4} f_{m+1} + f_{n+5} f_m \cdot i \\ G(n+5,m) = f_{n+5} f_{m+1} + f_{n+6} f_m \cdot i \\ G(n+6,m) = f_{n+6} f_{m+1} + f_{n+7} f_m \cdot i \\ G(n+7,m) = f_{n+7} f_{m+1} + f_{n+8} f_m \cdot i \\ G(n+8,m) = f_{n+8} f_{m+1} + f_{n+9} f_m \cdot i \\ G(n+9,m) = f_{n+9} f_{m+1} + f_{n+10} f_m \cdot i \end{cases}$$

Colocando em evidência os termos do tipo f_{m+1} e $f_m \cdot i$ e usando a identidade anterior, pode-se deduzir que $\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m) = 11 \cdot G(n+6,m)$, $\forall\ m \in IN$. Assim, na fase de validação, é possível compreender veracidade da extensão da identidades unidimensionais relativas à divisibilidade dos somatórios $\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4 \cdot f_{n+4}$ e $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 \cdot f_{n+6}$ para os números da forma $G(n,m)$.

Descrição	Identidades unidimensionais	Identidades bidimensionais
Soma dos números de índice par	$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$	$\sum_{i=1}^{n} G(2i,m) = (f_{2n+1} - 1)f_{m+1} + (f_{2n+2} - 1)f_m i$
Soma dos números de índice ímpar	$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$	$\sum_{i=0}^{n} G(2i+1,m) = f_{2n+2}.f_{m+1} + (f_{2n+3} - 1)f_m i$
Soma dos 'n' primeiros números complexos de Fibonacci	$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$	$\sum_{i=1}^{n} G(i,m) = (f_{n+2} - 1)f_{m+1} + (f_{n+3} - 2)f_m i$
Soma dos 'n' primeiros quadrados dos números complexos de Fibonacci	$\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 = f_n f_{n+1}$	$\sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2 = [(1 - f_{n+1} \cdot f_{n+2}) f_m^2 + f_n.f_{n+1}.f_{m+1}^2] + (f_{n+1}^2 + f_n.f_{n+2} - 1) f_m.f_{m+1} i$
Soma dos 6 termos consecutivos é divisível por 4.	$\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4.f_{n+4}$	$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = 4.G(n+4,m).$
Soma dos 10 primeiros termos consecutivos é divisível por 11.	$\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 f_{n+6}$	$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m) = 11.G(n+6,m).$

Tabela 2. Identidades uni e bidimensionais oriundas do modelo de Fibonacci.
Fonte: elaboração dos autores.

Finalmente, numa abordagem da institucionalização da TSD, na tabela 2, apresenta-se uma síntese comparativa de alguns dados discutidos a partir das situações-problema propostas aos estudantes. Desse modo, os elementos comparativos e o raciocínio por analogia oportuniza instigar o raciocínio inferencial atinente a um modelo de recorrência tridimensional para os números complexos de Fibonacci, isto é, os números da forma $G(n,m,p)$. À vista disso, numa perspectiva epistemológica, pode-se compreender que o modelo de Fibonacci passa por um processo de generalização que, no contexto dessas situações didáticas, é estudado através das relações recorrentes bidimensionais a partir da sequência original Fibonacciana com a finalidade de explorar o aumento dimensional do Modelo de Fibonacci e, com isso, caracterizando uma evolução na sua estrutura matemática reconhecida no contexto de investigação histórica.

Considerações finais

Neste trabalho, foi apresentada uma proposta didática de investigação histórica concernentemente a um conceito que, de modo geral, não se mostra discutido pelos autores de livros de História da Matemática. Assim, com arrimo de algumas propriedades e consequências do teorema 1, que proporciona uma fórmula explicita para os números da forma $G(n,m)$, foi derivado sua definição para índices inteiros quaisquer e, a partir de um raciocínio análogo, empregado na determinação de identidades clássicas (tabela 2) oriundas da sequência de Fibonacci.

Ademais, na forma complexa de Fibonacci, os números da forma $f_n + f_{n+1}i$ admitem propriedades que podem ser comparadas/confrontadas com os elementos indicados no teorema 1, que são designadas por $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m \cdot i$ e $G(-n,-m) = (-1)^{n+m+1} G(m-1,n-1)$. E, nesse caso, a fórmula variante de Binnet, possibilita as descrições generalizadas: $G(n,m) = \dfrac{(\alpha^{n+m+1} + \beta^{n+m+1})(1+i) - \alpha^n \beta^m (\beta + \alpha i) - \alpha^m \beta^n (\alpha + \beta i)}{(\alpha - \beta)^2}$ e

$$G(-n,-m) = \frac{(\alpha^{-n-m+1} + \beta^{-n-m+1})(1+i) - \alpha^{-n}\beta^{-m}(\beta + \alpha i) - \alpha^{-m}\beta^{-n}(\alpha + \beta i)}{(\alpha - \beta)^2}, n,m < 0 .$$

A prática profissional quanto a pesquisas na Didática da Matemática, que poderá ser perseguida em futuras investigações, possibilita o estudo de relações generalizadas de recorrência tridimensional, $G(n,m,p) = f_n f_{m+1} f_{p+1} + f_{n+1} f_m f_{p+1} i + f_{n+1} f_{m+1} f_p j$ (Oliveira, Alves e Paiva, 2017), visando uma representação n-dimensional para os números de Fibonacci (Horadam & Phete, 1986; Horadam, 1999). Por exemplo, os números da forma $G(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}, m_n)$, com relações de recorrência semelhantes ao caso de Fibonacci e valores iniciais convenientemente escolhidos, devem gozar da seguinte propriedade generalizada $\sum_{i=1}^{n} G(i, m_2, m_3, \ldots, m_n) = G(m_1 + 2, m_2, m_3, \ldots, m_n) - G(0, m_2, m_3, \ldots, m_n) - G(1, m_2, m_3, \ldots, m_n)$ e, semelhantemente ao teorema 1, a forma generalizada (n-dimensional) será descrita como $G(m_1,m_2,m_3,\dots,m_n)=(f_{m_1}f_{m_2+1}\cdots f_{m_{n-1}+1}f_{m_n+1})$ $+(f_{m_1+1}f_{m_2}\cdots f_{m_{n-1}+1}f_{m_n+1})e_1+\cdots+(f_{m_1+1}f_{m_2+1}\cdots f_{m_{n-1}+1}f_{m_n})e_t$ considerando as seguintes unidades imaginárias $(e_1=i, e_2=j, e_3=k,\dots,e_t)$.

Por fim, ao longo do trabalho, buscou-se propor elementos capazes de suscitar nos estudantes (futuros professores), uma percepção não estática (descrição de um conjunto de três definições formais) do modelo de Fibonacci que preserva, séculos e séculos de sua proposição em forma de problema, o interesse de especialista no âmbito da pesquisa em Matemática Pura (Catarino & Vasco, 2013; Catarino, 2014; 2016). E, através de uma transposição didática, no contexto da Didática da Matemática, oportunizar a formação de uma concepção epistemológica sobre a História da Matemática.

Por fim, a perspectiva da investigação histórica apresentada neste trabalho, envolveu um estudo de um artigo científico (Harman, 1981), em Matemática Pura que, de modo padrão, apresenta e discute dados parciais e com poucos pormenores, característicos de um estilo científico e que comunica informações para um determinado grupo de especialistas que possuíam o interesse na referida temática, nos anos 70 e 80, do século XX. Dessa forma, pode-se proporcionar aos estudantes (professores em formação) um entendimento sobre o processo evolutivo atual da pesquisa em torno do modelo de Fibonacci, na medida em que se busca propor atividades de investigação que desenvolvem um trato pormenorizado de alguns argumentos e algumas demonstrações.

Bibliografía

Abbagnano, N. (1998). *Dicionário de filosofia.* 2. ed. São Paulo: Martins Fontes.

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática.* Curitiba: UFPR.

Alves, F. R. V. (2017). Fórmula de de moivre, ou de binet ou de lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de fibonacci – SGF. *Revista Brasileira de Historia da Matemática*. v. 17, nº 33, 1 – 16. Acesso em 12 de agosto de 2017 em http://www.rbhm.org.br/vo17-no33.html

Alves, F. R. V. (2016a). Sequência Generalizada de Pell: aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. *Revista THEMA*, 13(2), 1 – 22. *[*en línea]. Acesso em 12 de agosto de 2016 em http://revistathema.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/324

Alves, F. R. V. (2016b). Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da sequência generalizada de Fibonacci. *Boletim GEPEM*, 68(1), 1 – 5. *[*en línea], 29. Acesso em 12 de agosto de 2016 em http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=issue&op=view&path[]=198

Alves, F.R.V. (2016c). Teoria das Situações Didáticas (TSD): sobre o ensino de pontos extremantes de funções com arrimo da tecnologia. *Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco*, v. 5, n. 2, p. 59-68.

Alves, F. R. V. (2016d). Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Interfaces da Educ.,* Paranaíba, v.7, n. 21, p.131-150.

Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C. (2016). A classe dos polinômios bivariados de Fibonacci (PBF): elementos recentes sobre a evolução de um modelo. *Revista Thema,* v. 14, n. 2, p. 112-136.

Artigue, M. (2009). Didactical Design In Mathematics Education. to appear in C. Winsløw (ed.) *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings of NORMA08.* Sense Publ.

Berzsenyi, G. (1977). Gaussian Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly,* 15. p. 233–236.

Brother, U. A. (1965). *Introduction fo Fibonacci Discovery*. California: Santa Clara University.

Brousseau, A. B. (1963). Exploring Fibonacci Numbers*. The Fibonacci Quarterly,* v. 1, n. 1, p. 57 – 64.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes em mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), La problématique et l'enseignement de la mathématiques. *Comptes rendus de la XXVIIIe reencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.* Louvain-la-Neuve, p. 101-117.

Brousseau, G. (2008). *Conteúdos e Métodos de Ensino.* In: SILVA, Benedito Antônio da. *Introdução ao Estudo das Situações Didáticas*. Tradução de: Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 128 p.

Catarino, P. M. C. (2014). On some identities for k-Fibonacci Sequence. *International Journal Contemporary Mathematical Science*. 9(1), 37 – 42.

Catarino, P. M. C. (2016). The h(x)-Fibonacci Quaternion Polynomials: Some combinatorial properties. *Advanced Applied Clifford Algebra, 26*(1), 71–79.

Catarino, P. M. C, Vasco, P. (2013). Some basic properties and a two-by-two matrix involving the k-Pell numbers. *International Journal of Mathematical Analysis*. 7(45), 2209 – 2215.

Conway, John. H. & Smith, Derek. A. (2003). *On quaternions and Octonions: their geometry, arithmetic and symmetry*. London: A. K. Peters.

Doré, Andréa. (2000). Diplomacia e relações comerciais entre o Oriente e o Ocidente: duas experiências do século XIII. *Tempo.* Rio de Janeiro, n. 10, p. 137-158.

Estrada, et al. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Eves, Howard. (1969). *An introduction to the History of Mathematics*. Third edition. New York: Holt, Hinehart and Winston.

Harman, C. J. (1981). Complex Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, v. 19, n. 1, p. 82 – 87.

Herz, F. R. (1998). *A mathematical history of Golden Number*. New York: Dover Publications Inc.

Horadam, A. F; Phete, S. (1986). Euclidean coordinates as generalized Fibonacci products. *The Fibonacci Quarterly*, 24(4), 366 – 371.

Horadam, A. F. (1999). Quaternion Recurrence relations. *Ulam Quarterly*, 2(2), 21 – 33.

Jordan, J. H. (1965). Gaussian Fibonacci and Lucas Numbers. *The Fibonacci Quarterly,* v. 3, n. 4, p. 315–318.

King, C. (1963). Leonardo Fibonacci. *The Fibonacci Quarterly,* v. 1, n. 4, p. 15–19.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Appllications*. New York: Wiley and Sons publications.

Koshy. T. (2007). *Elementary Number Theory and Applications.* second edition, Boston: Elselvier.

Oliveira, R. R.; Alves, F. R. V.; Paiva, R. E. B. (2017). Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa. *REVISTA ELETRÔNICA PAULISTA DE MATEMÁTICA,* v. 11ic, p. 91-106.

Pais, L. C. (2002). *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Pommer, W. M. (2008). Brousseau e a idéia de Situação Didática. *SEMA – Seminários de Ensino de Matemática / FEUSP – 2º Semestre.* Coordenação: Prof. Dr. Nilson José Machado. Acesso em 02 de outubro de 2017 em: http://www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf

Pommer, W. M. (2013). *A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares.* São Paulo, 2013. Acesso em 03 de março de 2017 em: http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+2013.pdf

Tattersall, J. J. (2005). *Elementary Number Theory in Nine chapters*. Cambridge: Cambridge University Press.

Teixeira, P. J. M.; Passos, C. C. M. (2013). Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. *Zetetiké,* FE/Unicamp, v. 21, n. 39, p. 155-168.

Autores:

Francisco Regis Vieira Alves. Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE). Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM – IFCE). Fortaleza/Brasil. fregis@gmx.fr

Rannyelly Rodrigues de Oliveira. Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE). Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM – IFCE). Fortaleza/Brasil. nanny-rockstar@hotmail.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 120-138

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Desarrollo histórico e implicancias en el aprendizaje del infinito: estudiar la evolución de su tratamiento para desarrollar estrategias que favorezcan su comprensión

Mario Garelik, Fabiana Montenegro

Fecha de recepción: 19/05/2018
Fecha de aceptación: 29/07/2018

Resumen	La convivencia del infinito como *adjetivo o proceso* y como *sustantivo* ha sido tan relevante como problemático a lo largo de la historia de la humanidad. Este artículo inicia con una reseña de las dos acepciones de la noción de infinito: el *potencial* y el *actual*. Posteriormente se presenta un breve desarrollo del devenir histórico alrededor de dicho concepto y finalmente se analiza cómo se reproducen hoy en nuestras aulas las antiguas discusiones en torno a su conceptualización, teniendo en cuenta las dificultades recogidas de producciones escritas con grupos de alumnos que inician su formación en el cálculo en carreras de ingeniería en la universidad. **Palabras clave**: Infinito potencial, actual, aprendizaje.
Abstract	The coexistence of the infinite as an adjective or process and as a noun has been as relevant as problematic throughout the history of humanity. This article begins with a review of the two meanings of the notion of infinity: *potential* and *actual*. Subsequently, a brief development of historical evolution is presented around this concept and finally, how the old discussions about its conceptualization are reproduced in our classrooms, taking into account the difficulties collected from written productions with groups of students who begin their training in *Calculus* in engineering careers at the university **Keywords**: Potential infinity, actual, learning.
Resumo	O convívio do infinito como adjetivo ou processo e como substantivo tem sido relevante como problemático ao longo da história da humanidade. Este artigo se inicia com uma resenha das duas acepções da noção de infinito: o potencial e o atual. Posteriormente, apresenta-se um breve desenvolvimento do devir histórico a respeito do dito conceito para finalmente analisar de que forma se reproduzem atualmente nas nossas aulas as antigas discussões a respeito da sua conceitualização, levando em conta as dificuldades coletadas de produções escritas com turmas de alunos que começam a sua formação em cálculo em cursos de engenharia na universidade. **Palavras-chave:** Infinito potencial, atual, aprendizagem.

1. Introducción

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación CAI+D (Curso de Acción para la Investigación y Desarrollo) de la Universidad Nacional del Litoral, relacionado con la comunicación del conocimiento científico en los primeros años de ingeniería y el trazado de estrategias para favorecer la comprensión.

El paso del infinito visto como adjetivo o como proceso, que simplemente significa ilimitado, sin fin, de recursividad permanente, al sustantivo, considerado como unidad acabada o el todo, ha sido un proceso más que interesante que ha atravesado a la historia de la humanidad.

El presente artículo tiene por objeto explorar en la génesis de este concepto y si la complejidad de su significado y de su historia se reflejan en dificultades para el aprendizaje en los alumnos de primer año, en su mayoría de entre 18 y 20 años, de las carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral de la ciudad de Santa Fe, Argentina.

Desde la antigüedad, tanto en teología, filosofía, como en matemática los hombres no han cesado de hablar sobre el infinito. Desde Santo Tomás de Aquino, que en su Summa Theologiae demostraba que aunque Dios era ilimitado, no podía crear cosas absolutamente ilimitadas, pasando por las paradojas de Zenón, el surgimiento de los números irracionales, la teoría conjuntista de Cantor, la reformulación sobre bases rigurosas del nuevo análisis, emprendida en el siglo XIX por Cauchy, Weierstrass, Dedekind, etc. hasta nuestros días, se hace necesario experimentar nuevos modos y procesos de tratamiento del infinito para poder dar cuenta de los conflictos que el controvertido concepto genera para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El presente trabajo inicia, en el apartado dos, con una reseña de las acepciones de la noción de infinito sobre las que se enfoca la investigación: potencial y actual. Luego, se realiza un breve desarrollo del devenir histórico de ambas, así como un detalle de las controversias y dificultades que, a lo largo de la historia, se sucedieron en torno al concepto.

Posteriormente, y ya desde la perspectiva de la didáctica, se describe la dificultad que conlleva el tema al presentarse como, en términos de algunos autores, contraintuitivo y se resalta la importancia de la mirada a la historia como un aporte para mejorar la comprensión del concepto.

2. Las dos acepciones del concepto de infinito.

Para comprender las dificultades que conlleva el concepto de infinito para su conceptualización, es necesario considerar el carácter de obstáculo que presenta la noción en su acepción actual, en particular, desde el punto de vista histórico-epistemológico.

La matemática persiguió, desde siempre, la dificultosa tarea de enfrentar esta noción tan paradójica como de dificultoso acceso para el intelecto del hombre. En ese sentido, “Casi podríamos decir que la matemática es el lenguaje que pretende hablar del infinito, o la ciencia que pretende medir el infinito.” (Ortiz, 1994, p. 60).

En pos de dar cuenta del rico y complejo concepto de infinito, se hace menester recurrir a su evolución histórica.

Ya desde la cultura griega la matemática concebía de manera crítica el infinito, dado que se lo intentaba pensar desde la intuición que, a su vez, en la mayoría de los casos, se apoyaba en concepciones que tenían al ámbito finito como campo de validez. Esta situación derivó en profusas contradicciones y paradojas, entre las cuales, la de Zenón de Elea es la más conocida, y de la cual más adelante se brinda un breve detalle.

Para Platón y Pitágoras, el infinito carecía de medida y estaba asociado al caos. Anaximandro de Mileto, filósofo y geógrafo de la Antigua Grecia y discípulo de Tales, empleaba el infinito en términos de lo sin fin, lo indefinido, lo que no tiene límites. Tal punto de vista, de lo que siempre se puede continuar, da origen a lo que se conoce como *infinito potencial*.

Esta versión del concepto ligada a la idea de recursividad permanente, de lo que siempre se puede continuar, y de aparición muy temprana tanto en el desarrollo de las ideas como en el intelecto, fue la única reconocida por la concepción aristotélica, que remite el infinito a lo que no se deja de recorrer y carece de límite, por lo que no puede ser determinado y, por ende, no existe en sí mismo. Como visión siempre asociada al conteo y de la cual la expresión y así sucesivamente, resulta un claro reflejo, reinó con exclusividad en la ciencia hasta fines del siglo XIX.

Otra acepción de infinito es la que se asocia con la idea de totalidad completa, de unidad, de un proceso ya finalizado. Esta nueva visión dio origen al infinito actual, y cobró relevancia desde fines del siglo XIX, desempeñando un rol fundamental en la matemática moderna a partir de la teoría de conjuntos de Cantor. A diferencia del potencial, el infinito actual resulta de dificultosa comprensión, ya que no se caracteriza por apoyarse en la intuición; de hecho, no es a través del sentido común que una operación con infinitas etapas pueda verse como un proceso finalizado.

Por ello, la comunidad científica estuvo, por largos períodos de tiempo, sumida en discusiones y enfrentamientos como consecuencia de las especulaciones en torno a uno y otro infinito. Se desarrolla a continuación una cronología de esta situación dividiendo el desarrollo histórico según las distintas edades de la humanidad. En virtud del tema eje del presente artículo, sólo se expondrán los principales referentes de cada etapa histórica y sólo en relación a su concepción del infinito.

3. Breve síntesis sobre las dificultades históricas en la concepción del infinito.

3.1. La Edad Antigua.

En la antigüedad, los orígenes del infinito remitían a cuestiones de índole teológica, mitológica y metafísica, ya que el infinito pertenecía al reino de Dios. En tal sentido, "…San Agustín creía que sólo Dios y sus pensamientos eran infinitos y Santo Tomás de Aquino, por su parte, demostraba en el Summa Theologiae que, aunque Dios era ilimitado, él no podía crear cosas absolutamente ilimitadas". (Ortiz, 1994, p. 62).

En la búsqueda del origen de todas las cosas, del inicio del todo, Tales de Mileto impone el concepto de Árché, que empleaba para aseverar que el principio de todo en la naturaleza era el agua.

Anaximandro (610 a. C. – 547 a. C) utiliza, como evolución del Árché, al concepto de Ápeiron, inmortal e indestructible, inengendrado e imperecedero, del cual se derivan todas las cosas. Todo sale y todo vuelve al Ápeiron según un ciclo necesario. El infinito es el todo y absolutamente nada hay fuera de él. Tenía también connotaciones en el campo de la religión y la ética: abarcaba lo divino y lo incorruptible.

Otros filósofos de la época conjeturaban, en cambio, que el elemento básico del universo debía ser el aire o el fuego y los pitagóricos se inclinaron por una visión, si se quiere más abstracta, que sostenía que era el número el punto de partida que se ocultaba detrás de todo fenómeno. Para la escuela de Pitágoras (569 a.C. – 475 a. C.) los números naturales eran elementos constituyentes de la realidad, la esencia de todo. Como sostiene Ruiz, para ellos "...los números eran los átomos del mundo" (Ruiz, 2003, p. 38).

Sin embargo, un escollo perturbador aparecía en el tranquilo mundo de los números: la existencia de cantidades que eran inconmensurables entre sí, esto es, cuya razón no podía ser expresada por un número entero o fraccionario, los irracionales.

En íntima relación con el teorema de Pitágoras aplicado a un triángulo isósceles, una breve demostración de Aristóteles da cuenta que la hipotenusa no puede ser múltiplo de un cateto, pero tampoco una fracción de él y, de este modo, no es un número en el sentido pitagórico que sólo daba cabida a los actuales racionales positivos.

El caos que esta revelación significaba para la escuela de Pitágoras hizo que se la ocultara, priorizando el secreto por sobre el hallazgo. Así, el mundo discreto apoyado en las ideas pitagóricas del número como origen del todo, comienza a ver amenazado su imperio por el surgimiento de los inconmensurables o irracionales: cantidades no expresables como una razón entre dos números enteros. Otro de los problemas de este tipo con los que se toparon fue el cálculo de la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.

Ante la necesidad de un tratamiento alternativo por parte de los matemáticos de la época al encontrarse con este escollo, "…el gran mérito de los pitagóricos fue (…) transformar su teoría de proporciones en una de transformación de áreas, evitando por poco el desastre." (Díaz García y Vilela García, 2005, p. 8)

La postura pitagórica fue también refutada por los seguidores de Parménides de Elea (nacido entre el 530 y 515 a.C.), del cual Zenón de Elea (490 a.C. - 430 a.C.) fue el más conocido discípulo y quien propuso argumentaciones para demostrar que los conceptos de multiplicidad y divisibilidad eran inconsistentes.

Zenón utilizó de manera frecuente en sus críticas, y como eje de esquema de pensamiento, la técnica de reducción al absurdo, proceso dicotómico consistente en partir de premisas opuestas a las que se defiende. La habilidad en el manejo de estos modos de argumentar, le valió que Aristóteles lo considerara el inventor de la dialéctica. Y es en esta forma de razonamiento en la que dirigió sus paradojas, que tantas controversias causaron en las concepciones de la época y de las cuales, la del veloz Aquiles que no puede dar alcance a la lenta tortuga es, quizás, la más conocida:

Aquiles persigue a la tortuga a través de la parte de la recta numérica correspondiente a los reales positivos. Aquiles comienza en una posición digamos 0, y la tortuga a una unidad de distancia, es decir, en "1". Como Aquiles es el doble de rápido que la tortuga, espera atraparla en la posición "2". Pero la esperanza de Aquiles parece quedar tan sólo en eso según el razonamiento de Zenón en el cual, cuando Aquiles esté en la posición "1", la tortuga estará en la posición $1+\frac{1}{2}$*. Cuando Aquiles llegue a la posición* $1+\frac{1}{2}$*, la tortuga estará en la posición* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}$*; y así sucesivamente.*

Finalmente, cuando Aquiles alcance la posición antigua de la tortuga $2-\frac{1}{2^n}$*, ella llegará a la posición* $2-\frac{1}{2^{n+1}}$*, siempre un pequeño paso delante de Aquiles, y de esta manera aunque se acerquen mucho, los ligeros pies de aquél nunca darán alcance a la tortuga.*

En esta paradoja, Aquiles no podría alcanzar la tortuga dado que es imposible realizar una infinidad de actos. Es decir, la suma de un número infinito de intervalos de tiempo positivos no puede ser finita.

Sus otras tres paradojas son conocidas como: la flecha, la dicotomía y el estadio.

Situaciones contradictorias de este tipo parecían probar, entonces, que el tiempo y la distancia no podían ser continuos (si el espacio lo fuera, Aquiles no podría nunca dar alcance a la tortuga) ni discontinuos (si el espacio lo fuera, la flecha, de otra de sus paradojas, jamás se podría mover, ya que tendría que estar en un punto o en el siguiente, sin que haya nada entre ambos puntos). En efecto, se arribaba a esta dificultad por pensar que la distancia que separaba a Aquiles y la tortuga estaba dividida en infinitas partes: si bien es cierto que es divisible tantas veces como se desee, no está, en realidad, infinitamente dividida, por lo que Aquiles no tiene que acercarse al animal por medio de una cantidad ilimitada de pasos infinitamente pequeños, sino a zancadas más veloces y amplias que las del reptil. Ni siquiera el tiempo en que se produce la carrera está dividido en infinitos instantes.

Las ideas de Zenón resultaron un primer indicio para la consideración matemática del infinito actual y cobraron relevancia desde dos puntos de vista: por un lado, marcaban el fin de la matemática estructurada de la Antigua Grecia y, por otro, daban origen, 2000 años más tarde, a la teoría de sucesiones y series convergentes. Además, tuvieron implicancias fundamentales en el desarrollo de la matemática, lo que le valió al mismo Zenón ser considerado uno de los precursores del cálculo.

De este modo, el problema que el infinito originaba con sus planteos de situaciones aparentemente contradictorias "...caracterizaron al mundo griego en lo que se denominó horror al infinito" (López, 2014, p. 280).

Las paradojas de Zenón explicitaron los peligros de trabajar con el infinito, situación que no intimidó a la comunidad científica de entonces para ponerse manos a la obra con tan compleja empresa. Como sostienen Díaz García y Vilela García, "La cuestión era difícil de resolver, y la primera solución parcial vino de la mano de Aristóteles" (Díaz García y Vilela García, 2005, p. 11).

3.1.1. La Academia de Platón y el Liceo de Aristóteles.

Desde la antigüedad se posicionaban en el centro de la escena las ideas de Platón (427 a.C. - 347 a.C.) y Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.) referidas al vínculo entre punto y recta, paradojas, discusiones sobre la potencialidad y la cabida o no de la actualidad del infinito.

En el siglo IV a.C. sus dos escuelas fundadas en Atenas tuvieron una marcada incidencia en el desarrollo de la matemática en Grecia: *la Academia* de Platón y *el Liceo* de Aristóteles, fundadas en el 387 y 335 a.C. respectivamente.

En Teeteto, uno de los cuatro Diálogos de la obra platónica, se aborda el estudio de ciertas cantidades inconmensurables que habían problematizado a los pitagóricos.

A Eudoxo de Cnido (390 a.C. - 337 a.C.), quizás el primer investigador y matemático puro, inicialmente pitagórico y luego compañero de los discípulos de Platón en la Academia, se debe el rigor lógico en las demostraciones, la noción de *tan pequeño como se quiera*, y *el método de exhaución* (utilizado en la visualización del círculo como límite de polígonos regulares cuya cantidad de lados aumenta infinitamente), siendo estas nociones claves en el concepto de infinito potencial.

Íntimamente relacionados con el infinito y la relación entre lo discreto y lo continuo, los irracionales provocaron, al igual que las paradojas de Zenón, tensión el mundo de las matemáticas.

Por su parte, Aristóteles rechazaba la idea del infinito, dado las contradicciones que el concepto planteaba, tales como *la aniquilación de los números*. Sostenía, además, que no se podía arribar a lo continuo partiendo de lo discreto sin caer en contradicción con los métodos algebraicos y geométricos de los antiguos griegos.

En su visión aristotélica el infinito no es otra cosa que una cantidad que puede hacerse más grande o más pequeña sin que dicho proceso se transforme en algo concreto alguna vez. Aunque consideraba los dos tipos de infinito: el potencial, concebido dependiente del tiempo, y el actual, independiente de él, marcó su clara inclinación por el primero de ellos.

En su postura,

> ... el problema del infinito, ante todo, era un problema del físico que se enfrentaba a la naturaleza. La discusión ontológica del infinito no concernía al matemático, pues era claro que en las matemáticas se trabajaba con magnitudes arbitrariamente grandes y pequeñas, pero para el estudioso de la naturaleza, que trabajaba con el movimiento y el tiempo, esto no estaba tan claramente establecido. (Recalde y Beltrán, 2017, p. 224).

En este sentido, en su Libro III de Física afirma:

> Mi argumento no les arrebata nada a los matemáticos, aunque deniega la existencia del infinito en el sentido de algo tan grande que no se puede ir más allá. Porque en realidad, ellos no necesitan utilizar el infinito, sino sólo que una recta finita sea tan larga como quieran... así que no habrá diferencia para

> ellos en lo que respecta a las demostraciones. (Díaz García y Vilela García, 2005, p. 12).

En la concepción de Aristóteles existían magnitudes que podían, o bien dividirse indefinidamente (como el tiempo o el espacio), o bien aumentar también indefinidamente, (como los números naturales), pero rechazaba la existencia de conjuntos infinitos como un todo.

Las consecuencias que traía esta negación aristotélica del infinito eran graves: el tiempo tendría principio y finalizaría en algún momento y el movimiento no sería eterno, siendo esto último uno de los conceptos claves en su física.

Tanto Arquímedes como Euclides (325 a. C – 265 a. C.) tuvieron una marcada influencia *finitista*[1] o bien *infinitista potencial*[2] devenida de la concepción aristotélica.

El primero de ellos, hacia el siglo II a. C., en el conocido *Axioma de Arquímedes:* "Dados dos números positivos a y b, existen números naturales n y m tales que na>b y mb>a …" (Torres Hernández, 2002, p. 42), deja en claro que las expresiones *infinitamente pequeño* e *infinitamente grande* carecen de sentido, en virtud de que, por ejemplo: si la cantidad ***a*** fuese infinitamente pequeña, por más que la sumemos consigo misma muchas veces no superaría a *b.* Sólo en una de sus obras se menciona el término *infinito*, lo cual revela cómo las normas académicas de la época imponían evitar el conflicto con la tradicional postura finitista de Aristóteles.

También Euclides estuvo fuertemente influenciado por esta visión. En sus *Elementos* sentenciaba que *El todo es mayor que las partes*, lo que significaba una manera explícita de negar el infinito actual.

3.2. La Edad Media.

Durante la Edad Media, si bien no se evidenciaron avances importantes relacionados con el infinito matemático, el concepto entró de lleno y se estableció en los razonamientos matemáticos, siempre impregnado de la concepción aristotélica. Las discusiones sobre la naturaleza del infinito en la Edad Media tuvieron un carácter esencialmente filosófico.

Cabe mencionarse una aproximación no formal al método de inducción matemática para la generación de coeficientes binomiales, debida al matemático árabe Al-Karaji (953 - 1029). Realizó la prueba para el caso n=1 y, con la misma, demostró el caso n=2, y así hasta n=5, para luego afirmar que este proceso se podía continuar de manera indefinida. Este hecho no hace más que confirmar, una vez más, la *visión potencial* del infinito en la época, siempre exhibido como un *proceso* sin final.

En el siglo XIII Ricardo de Middleton esgrimió el primer argumento de que el universo puede expandirse sin límite sin que esto implique la existencia del infinito actual.

---

[1] *Finitismo:* negación de toda posibilidad de continuar una operación indefinidamente o sólo aceptar consideraciones sobre conjuntos finitos.

[2] *Infinitismo potencial*: argumentación siempre bajo la idea de un proceso que se puede repetir o continuar indefinidamente, pero no reconociendo la idea de completez o unidad de tales procesos.

Más tarde, promediando el siglo XIII y durante el siglo XIV las controversias en torno a ambas conceptualizaciones continuaron. El interés de los filósofos de la época se centró más en el contexto de las magnitudes que en el de las colecciones y la cardinalidad.

Como ya se mencionó, el *infinito actual*, interpretado como *unidad acabada,* cobró relevancia recién a fines del siglo XIX, desempeñando un rol fundamental en la matemática moderna a partir de la teoría cantoriana de conjuntos. A diferencia del potencial, el infinito actual resulta de dificultosa comprensión, ya que no se caracteriza por apoyarse en la intuición; de hecho, no es a través del sentido común que una operación con infinitas etapas pueda verse como un proceso finalizado.

Por ello, la comunidad científica estuvo, por más de 20 siglos, sumida en discusiones y enfrentamientos como consecuencia de las especulaciones en torno a uno y otro infinito.

3.3. La Edad Moderna.

La revolución científica del siglo XVII supuso el cambio del concepto de *ciencia cualitativa*, basada en la lógica silogística, por la *ciencia cuantitativa* basada en la lógica experimental. Esta renovación del método científico a cargo de personajes como Descartes, Kepler, Bacon y Galileo Galilei, entre otros, implicó un cambio paradigmático radical para la ciencia.

En la transición de la matemática del Renacimiento al mundo moderno se encuentra un considerable número de figuras, muchas de ellas provenientes de la Europa occidental, que participaron de los progresos a futuro.

En lo que concierne al origen del Cálculo, podemos citar el desarrollo de técnicas infinitesimales para calcular áreas y volúmenes basados en los trabajos de los matemáticos griegos. Surgieron así los indivisibles, la semilla de los infinitesimales, de Galileo Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630) y Bonaventura F. Cavalieri (1598-1647).

Díaz García y Vilela García exponen una paradoja vinculada con el infinito descubierta en la Edad Media:

> Sean dos círculos, uno de ellos con el doble de radio que el otro. La circunferencia del círculo mayor será entonces el doble que la del círculo menor. Ambas circunferencias tienen un número infinito de puntos, pero la mayor debería tener un número mayor de puntos que la menor. Sin embargo, dibujando un radio observamos que para cualesquiera puntos P, Q de la circunferencia menor se corresponden exactamente un punto P’ y un punto Q’ de la circunferencia exterior. Así tenemos dos magnitudes infinitas que son, al mismo tempo, iguales y distintas. Díaz García y Vilela García (2005, p. 16)

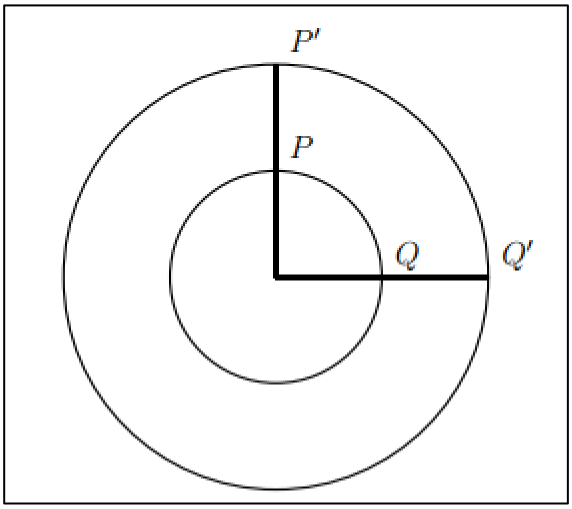


Figura 1. Dos conjuntos infinitos.
Fuente: Díaz García y Vilela García (2005).

A principios del siglo XVII, Galileo Galilei, matemático, físico, astrónomo y filósofo italiano, brindó una solución a este problema proponiendo convertir el círculo pequeño en el grande agregándole una cantidad infinita de agujeros infinitamente pequeños, *los indivisibles*. Como se menciona en Sellés García (2018), el mismo Galileo sostiene, basado en la idea aristotélica de una indivisibilidad indefinida, que una división que se pueda proseguir indefinidamente supone que las partes son infinitas, pues de otro modo la subdivisión finalizaría. Y si son infinitas son inextensas, porque, de otro modo formarían una extensión infinita. Y, si son inextensas, son indivisibles.

Galileo introdujo con estas ideas un infinito actual, a diferencia de Aristóteles, para quien el infinito carecía de límites ya que un proceso de división del continuo que, por su propia naturaleza, nunca termina, no tiene final. La postura galileana resultó un tanto ambivalente: por una parte negaba al infinito actual por "vacío o por ser producto de la Inquisición", pero, por otra, le daba cabida cuando consideraba que un segmento de recta se constituía por una cantidad infinita de puntos y que el continuo de la recta era el actual.

Hacia 1638, en su obra póstuma *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nova scienze* estableció la naturaleza paradójica de los conjuntos infinitos actuales y su imposibilidad de un tratamiento matemático. Sostenía que se puede establecer una correspondencia biunívoca ya que, por ejemplo, cada número natural queda asociado a uno y sólo un cuadrado perfecto y viceversa.

Galileo encontró aquí la propiedad fundamental de los conjuntos infinitos: el principio *el todo es mayor que la parte* no vale para conjuntos infinitos. Sin embargo, no llegó a esta conclusión pero sí a que no cabe establecer una aritmética de infinitos ni de indivisibles y que los mismos son incomparables. De modo que las relaciones de igualdad y desigualdad entre conjuntos son sólo válidas en el campo finito.

Galileo no percibió este posible germen para la posterior teoría de conjuntos desarrollada por Cantor: "Galileo, igual que Moisés, llegó a vislumbrar la tierra prometida, pero no pudo entrar a ella" (Boyer, 2007, p 416).

Como se menciona en Bombal, la conclusión que obtuvo Galileo sobre estos hechos fue:

> Esta es una de las dificultades que surgen cuando intentamos, con nuestra mente finita, discutir el infinito, asignándole las mismas propiedades que damos a lo finito y limitado. Creo que ésto es un error, pues no se puede decir de [dos] cantidades infinitas que una sea mayor, menor o igual que otra. (Bombal, 2010, p. 14)

Posteriormente Kepler y Cavalieri continuaron trabajando con la teoría de los indivisibles hasta que en 1649 el Colegio Romano rechazó los indivisibles y prohibió su enseñanza en los Colegios Jesuitas. Aunque la Iglesia buscó silenciar a Galileo confinándolo a arresto domiciliario, no pudo detener el progreso del cálculo infinitesimal. Al contrario, impulsó un mayor esfuerzo de la comunidad matemática por obtener rigurosidad y así enfrentar las críticas de la época.

A mediados del siglo XVII John Wallis (1616-1703) estableció el símbolo que utilizamos actualmente para el infinito (∞), llamado lemniscata, para representar el hecho de que se puede recorrer dicha curva una y otra vez, infinitamente. También consideró el recíproco $\frac{1}{\infty}$, que utiliza para *la nada*.

Durante el siglo XVIII, el desarrollo del cálculo infinitesimal provocó un importante avance en relación al infinito matemático. Si bien las técnicas de cálculo que se iban desarrollando eran más exactas, esto no impidió que continuaran las contradicciones en las fundamentaciones. A modo de ejemplo, Newton y Leibniz usaron cantidades infinitamente pequeñas involucrando al infinito actual pero intentando hacerlas compatibles con las prácticas del infinito potencial aristotélico.

Según Rey Pastor y Babini (1985, p. 82) el método de Newton referido a las fluxiones, cálculo de derivadas, con su esencia y notación propias, resultó ser su contribución más original. Newton presentó su obra en tres escritos: en 1669, 1671 y 1676. Pretendió evitar los problemas matemáticos del continuo e infinitesimales, y llevarlos al mundo físico considerando cantidades variables que van fluyendo con el tiempo (fluentes), y razones de cambio instantáneas de las fluentes (las fluxiones, hoy derivadas de las fuentes con respecto del tiempo).

Tal como sucede en la naturaleza, para Newton las magnitudes se generaban por el movimiento continuo, no eran un agregado de cantidades infinitesimales. En la última de sus obras expresó la intención de abandonar el uso de cantidades infinitesimales y enunció su teoría de las *razones primera y última de cantidades evanescentes* anticipándose al concepto matemático de límite.

Mientras el enfoque de Newton fue físico, el de Leibniz fue esencialmente geométrico, incluso algebraico o lógico. Lo novedoso del cálculo infinitesimal de Leibniz, se encuentra en la exploración de lo infinito a partir de las diferencias de diversos órdenes de infinitos y en considerar lo infinitamente pequeño como variación.

Los estudiosos de la época poco comprendían la nueva noción de Leibniz acerca de lo infinitamente pequeño. Leibniz elaboró reglas de igualdad y desigualdad para el infinito, así como también una operatoria básica para cantidades infinitamente grandes o pequeñas respecto de otras. Los números infinitos debían rechazarse pues el concepto de número surge cuando se aplica el concepto de cantidad y la misma se caracteriza como un entero que posee unidades.

Ante el interrogante sobre la comprensión de los números infinitos, sostuvo que las respuestas eran lógicamente absurdas porque violaban el principio de que el entero es mayor que cualquiera de sus partes. De este modo, si no había números infinitamente grandes tampoco debían considerarse números infinitamente pequeños: los infinitesimales del cálculo.

Newton y Leibniz no resolvieron los problemas lógicos en los fundamentos de sus métodos en el cálculo diferencial e integral. Para ambos lo decisivo era la coherencia de sus resultados y la fecundidad de los nuevos procedimientos, suficientes para generar el progreso de una nueva disciplina matemática.

Fue Berkeley (1605-1753), obispo de Irlanda, quien evidenció esa falta de rigurosidad mostrando inconsistencias con los infinitesimales al no cumplir el principio de Arquímedes. Como señala López (2014) el obispo hacía notar que los matemáticos no eran coherentes al trabajar con los infinitesimales debido a que al inicio los usaban en los denominadores por ser diferentes de cero, pero luego sí aparecían como sumandos eran despreciados.

Durante los primeros años del 1700 se sucedieron discusiones y debates en la *Académie des Sciences* de París sobre la validez de los procesos del nuevo cálculo. Y aunque el Marqués de L'Hôpital intentó formalizar el concepto intuitivo y la operatoria de los infinitesimales, también recibió las críticas de Berkeley.

3.4. La Edad Contemporánea.

Hasta la primera mitad del siglo XIX, la comunidad científica en general y los matemáticos en particular, sólo reconocían el infinito potencial. Esto no resulta sorprendente si se tiene en cuenta que los dos siglos anteriores estuvieron signados "…por la búsqueda de algoritmos de procesos potencialmente infinitos en contextos geométricos y dinámicos; dichos algoritmos surgen como una extrapolación del álgebra de los procesos finitos." (Waldegg, 1996, p.109).

Se enumeran a continuación algunas de las manifestaciones más notables de la preeminencia del infinito potencial durante los siglos XVIII y XIX:

Kant (1724-1804), en coincidencia con Aristóteles, señalaba como insostenible alcanzar, en lo sensorial y lo empírico, un límite absoluto, y con él, el infinito actual.

Gauss (1777-1855) negaba que una cantidad infinita pudiera verse como un ente acabado, ya que, en matemática, el infinito era una *mera forma de hablar*, y su significado, "*un límite al que ciertas razones se aproximan indefinidamente, mientras otras aumentan sin restricción*".

Cauchy (1729-1857), por su parte, rechazaba el infinito actual al sostener que, de aceptar la biyección entre el todo y una parte, se contradecía el axioma euclídeo que sostenía que *el todo es siempre mayor que una de sus partes*.

Es recién a mediados del siglo XIX, más precisamente en 1851, cuando el matemático checo Bolzano (1781-1848), en su obra póstuma *Paradojas del infinito*, da los primeros pasos hacia la introducción en matemática del infinito actual como objeto de estudio bien definido. Hasta ese momento se empleaba la noción de equivalencia para comparar la magnitud de dos conjuntos finitos: si los elementos de dos conjuntos finitos A y B podían ponerse de a pares de tal modo que a cada elemento de A le corresponda uno y sólo un elemento de B, se decía que la correspondencia es *biunívoca* y que A y B son *equivalentes*.

La concepción de Bolzano modifica el estado de situación reinante hasta ese momento afirmando que el concepto de equivalencia entre dos conjuntos es aplicable tanto a conjuntos finitos como infinitos y acepta que los conjuntos infinitos pueden ser equivalentes, incluso, a una parte de ellos mismos, reconociendo que es posible establecer una biyección entre ellos y una de sus partes que permita establecer la *igualdad* entre ambos, en clara contradicción con el axioma euclídeo.

En 1872, Dedekind fue el primero en vislumbrar en las paradojas de Bolzano, una propiedad de los conjuntos infinitos, que estableció como definición: *Un sistema S se llama infinito cuando es semejante a una parte propia de sí mismo, en caso contrario, se dice que S es un sistema finito.*

El ejemplo del uso de la biyección de Bolzano entre los números naturales y los números cuadrados perfectos le sirvió para establecer la distinción entre *estar contenido* y *tener menor tamaño*: el conjunto de los números cuadrados está contenido en el conjunto de los números enteros, pero unos y otros tienen igual tamaño. Postuló entonces que a los conjuntos infinitos se les podría atribuir *números transfinitos*, incorporó la idea de potencia de un conjunto, dando así lugar al concepto de *número cardinal*. Esta teoría de números transfinitos se convertiría en la base para la introducción de operaciones relacionadas con el infinito.

Es en esta instancia donde nace el mayor obstáculo epistemológico en el devenir de su obra que motivó que su propósito de aritmetizar el infinito quedase inconcluso.

> Bolzano no deja de insistir en la relación paradójica entre dos conjuntos infinitos: a partir de la existencia de una biyección, el hecho de concluir la igualdad de dos conjuntos infinitos, desde el punto de vista de su multiplicidad (o, como decimos desde Cantor, su equipotencia o equivalencia) es extender de manera ilegítima una propiedad de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos. (Waldegg, 1996, p. 111)

Estas contradicciones entre lo intuitivo del axioma euclídeo mencionado y lo empírico del establecimiento de la biyección como método de comparación entre conjuntos infinitos, hacen imposible la creación y el desarrollo de una teoría consistente, por lo que su obra quedó inconclusa.

A fines del siglo XIX apoyándose en los trabajos de Bolzano, el matemático ruso-alemán Georg Cantor (1845-1918), trabajando en problemas de series trigonométricas, llega a una clasificación de conjuntos excepcionales e intuye que la riqueza de éstos será generadora de novedosos desarrollos matemáticos.

Demuestra que existen diversos grados de infinitos, alejándose así de la creencia que establecía la existencia de un sólo infinito inalcanzable y no real. Coincidiendo con Galileo, señaló como un obstáculo epistemológico que hasta ese momento se haya pretendido extrapolar cuestiones matemáticas del mundo finito a los números infinitos.

Cantor asegura que no debe distinguirse entre infinito potencial y actual, ya que el mismo potencial supone la existencia de este último.

Uno de sus primeros descubrimientos fue que el conjunto de los números racionales puede ponerse en correspondencia biunívoca con los naturales y, por lo tanto, es numerable.

Intuitivamente parece extraño que los elementos del conjunto denso de los racionales pueda *acomodarse uno a uno* con los elementos del conjunto discreto de los enteros positivos que, además, es un subconjunto del primero. Un esquema visual que representa el planteo de Cantor, consistente en asignar un número natural a cada fracción es el que se muestra la figura siguiente

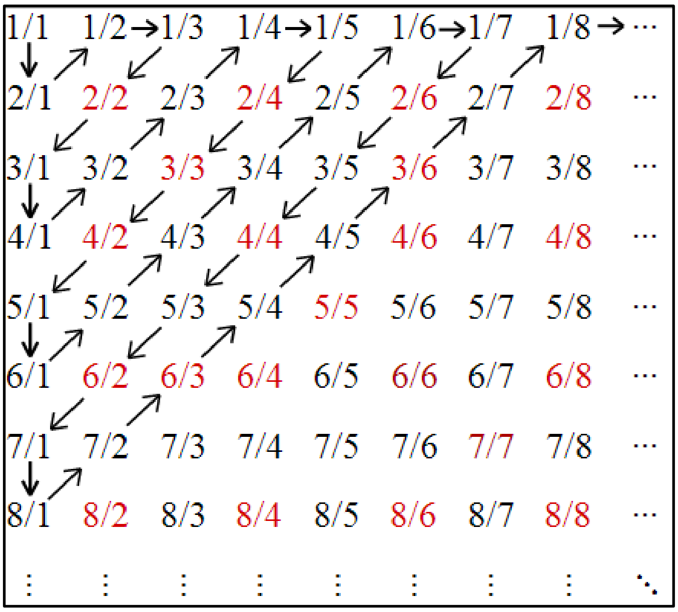


Figura 3. La biyección entre naturales y racionales.
Fuente: scirescience.wordpress.com (2014)

Esta correspondencia biunívoca hacía sospechar que cualquier conjunto infinito es numerable "pero el resultado de Cantor refuta esto: hay un conjunto, el continuo de números reales, que no es equivalente a ningún conjunto numerable" (Courant y Robbins, 2014, p. 111).

Este hecho produjo vacilaciones en Cantor: en 1873 le escribe una carta a Dedekind planteándole la posibilidad de que el conjunto de los números reales sea numerable, pero en 1874 presenta dos demostraciones que no lo es. Intentó probar que R^n, con $n \in N, n > 1,$ no es equivalente a R pero en 1887 demuestra que sí lo es.

En 1874 Cantor demostró la numerabilidad de los racionales, la no numerabilidad de los reales y la numerabilidad del conjunto de los números algebraicos, esto es de los números reales que son soluciones de ecuaciones de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdot + a_1 x + a_0 = 0$ con $a_i \in Z$ para i = 0,…, n. Y con estos tres resultados de numerabilidad puso en consideración la presencia del infinito actual o real, noción que era rechazada desde Aristóteles en beneficio del infinito potencial.

Retomando la idea de Bolzano de establecer una biyección como principio básico de comparación de dos conjuntos infinitos, sostiene que si es posible establecer una biyección entre dos conjuntos, los mismos tienen igual potencia.

En 1878 caracterizó un conjunto finito como aquél cuya potencia es un entero positivo y que todo subconjunto propio de un conjunto finito tiene una potencia menor que éste, mientras que un conjunto infinito tiene la misma potencia que algún subconjunto propio. La equipotencia entre naturales y racionales echaba por tierra el hasta entonces incuestionable postulado de que el todo siempre es mayor que la parte.

Al demostrar Cantor que existe un conjunto, el continuo de números reales, que no es equivalente a ningún conjunto numerable, establece que hay dos tipos diferentes de *infinito*: el infinito numerable (de los enteros, por ejemplo) y el infinito no numerable, del continuo. Se trataba entonces de establecer una jerarquización de números transfinitos y una aritmética para ellos.

Según Fava y Zo (1996) este descubrimiento representa uno de los momentos cruciales en la historia de las Matemáticas como cuando los griegos descubrieron que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con el lado del mismo.

Sus descubrimientos prosiguieron. Así, en 1877 demostró que los puntos de la recta real y los ´puntos del espacio n-dimensional R^n (con n>1) son equipolentes y en 1882 incorporó los números infinitos o números transfinitos en su obra *Fundamentos de una teoría general de conjuntos*.

Número transfinito es el término original que acuñó Cantor para referirse a los cardinales transfinitos. Para conjuntos finitos el número cardinal es el número usual de objetos del conjunto. Para conjuntos infinitos se introducen nuevos números cardinales. El número cardinal del conjunto de números enteros lo anota como $\aleph_0$, puesto que los números reales no pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los enteros, el conjunto de los números reales debe tener otro número cardinal que nota por *c*.

Acerca de la importancia del trabajo de Cantor:

> Su éxito fue negar la afirmación obvia de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes. Así es que hay tantos números naturales como números pares, tantos números fraccionarios como números naturales, siendo este número el número cardinal Alef cero. Además evidenció la existencia de un número cardinal más elevado, el número de puntos de una recta, igual al número de puntos de un cuadrado, de un cubo o del espacio entero. (López, 2014, p 293).

Cantor fue uno de los matemáticos más revolucionarios de su época pues contradecía las concepciones intuitivas que durante más de dos mil años se consideraron como principios básicos de la filosofía. Sus concepciones del infinito significaron un desafío para la época y sus ideas un atentado a la intuición de sus contemporáneos. Tuvo grandes adeptos como Hadamard (1865 – 1963) y Hilbert (1862 – 1943), quienes aplicaron la teoría de conjuntos de Cantor al análisis.

Al igual que Bolzano, enfrentó severas críticas por parte de reconocidos matemáticos de su época, como Weyl (1885 – 1955), quien consideró que la infinidad de infinitos de Cantor eran *niebla en la niebla*, Poincaré (1854 – 1912) catalogó a sus ideas como una enfermedad de la que algún día llegarían las Matemáticas a curarse y Kronecker (1823 – 1891) lo atacó personalmente calificándolo de charlatán, renegado y corruptor de la juventud. Sin embargo, más tarde, recibió el reconocimiento de Hilbert, quien afirmó: *Nadie nos arrojará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.*

La teoría moderna de conjuntos creada por Cantor y sus seguidores, si bien se inició en un proceso controversial, permitió definir con precisión al infinito y se constituyó como referente en el estudio de los fundamentos lógicos y filosóficos de la matemática.

4. Repercusiones en el aprendizaje.

Los históricos problemas epistemológicos, debates y controversias que presentó el concepto de infinito parecen reproducirse a escala en el proceso de aprendizaje.

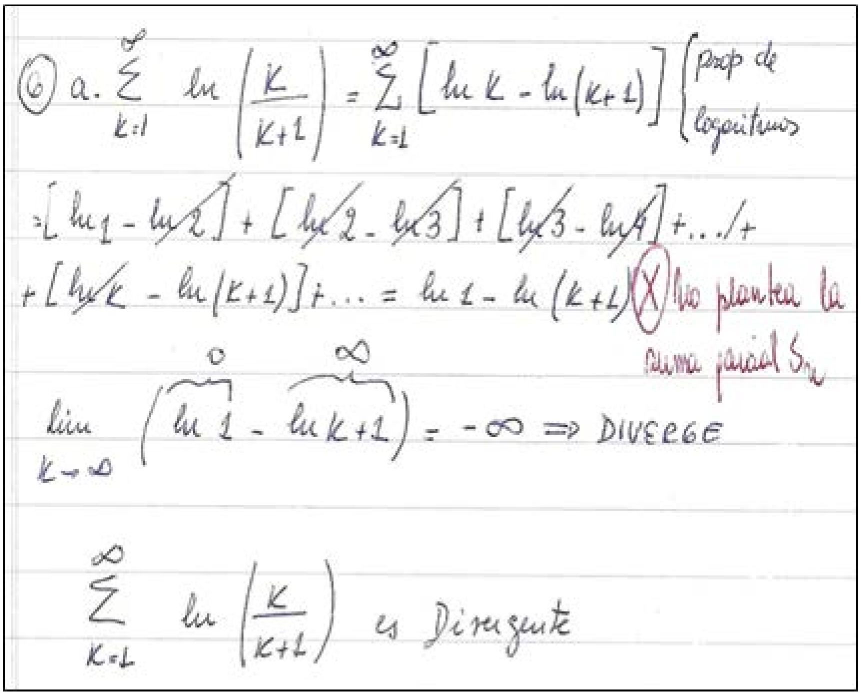
Diversas y numerosas son las investigaciones que se proponen dar cuenta de los inconvenientes que la polémica noción acarrea en los procesos de enseñanza y de aprendizaje: Waldegg, G. (1996), Penalva, M. C. (1996), Garbin, S. y Azcárate, C. (2002), Sacristán Rock, A. (2003), etc.

En la práctica áulica cotidiana pueden confirmarse los inconvenientes que genera en los alumnos comprender el significado del concepto de infinito, en especial del *actual*, más todavía si se tiene en cuenta que dicha noción interviene en varios temas del currículo de la asignatura Cálculo I (con los tradicionales tres ejes temáticos: cálculo diferencial, cálculo integral, sucesiones y series numéricas y de potencias), en la que los autores de la presente investigación desarrollan sus actividades de docencia universitaria.

Los problemas se evidencian tanto en cada pregunta informal que sobre un tema que involucre el infinito se les efectúa a los alumnos como en las producciones escritas de los mismos en las instancias de evaluación. Cabe aclarar que las dificultades que se generan en el aprendizaje como consecuencia de la conflictividad que conlleva el concepto de infinito son numerosas y de la más variada naturaleza, sin embargo, en este artículo sólo se presentan situaciones que reflejan los antiguos debates antes mencionados en torno a su significación.

Se brindan a continuación algunas imágenes que ilustran la problemática para comprender significativamente el concepto objeto de este trabajo.

Por ejemplo ante la consigna ¿Es convergente la serie $\sum_1^\infty ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$?, fue común encontrarse con respuestas del tipo:



(6) a. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln k - \ln(k+1)\right]$ {prop de logaritmos

$= [\ln 1 - \cancel{\ln 2}] + [\cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 3}] + [\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 4}] + \ldots +$

$+ [\cancel{\ln k} - \ln(k+1)] + \ldots = \ln 1 - \ln(k+1)$ X No plantea la suma parcial S_n

$\lim_{k\to\infty}\left(\overbrace{\ln 1}^{0} - \overbrace{\ln k+1}^{\infty}\right) = -\infty \Rightarrow$ DIVERGE

$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ es Divergente

Figura 4.
Fuente: Examen final Cálculo 1. Facultad de Ing. y Cs. Hídricas (U.N.L.) (2017)

Puede observarse cómo las propiedades de asociación y cancelación de los términos, válidas en el campo finito, se extienden erróneamente como legítimas para un número infinito de sumandos. La transferencia de nociones válidas en el campo finito al infinito es una de las falencias más comúnmente observadas y actuaría como una réplica de lo que el mismo Cantor aseguraba acerca de los motivos por los cuales el infinito actual era de difícil aceptación.

Otro caso lo ilustra la siguiente consigna:

Luego de hacer los cálculos correspondientes, indique con cuál(es) de las siguientes alternativas se corresponde la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n}$:

a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \ldots$ b) 1 c) ambas

La mayor parte de los alumnos optó por la opción (a) lo que podría ser un indicador de cómo la potencialidad es *lo típico* en la visualización del estudiante, por sobre la *actualidad* que hubiera implicado la elección (b).

En otras evaluaciones, en las que el objetivo de la consigna se centraba en percibir de qué manera los alumnos aprendían el concepto de convergencia secuencial, fue común encontrarse con expresiones del tipo como la que ilustra la siguiente imagen:

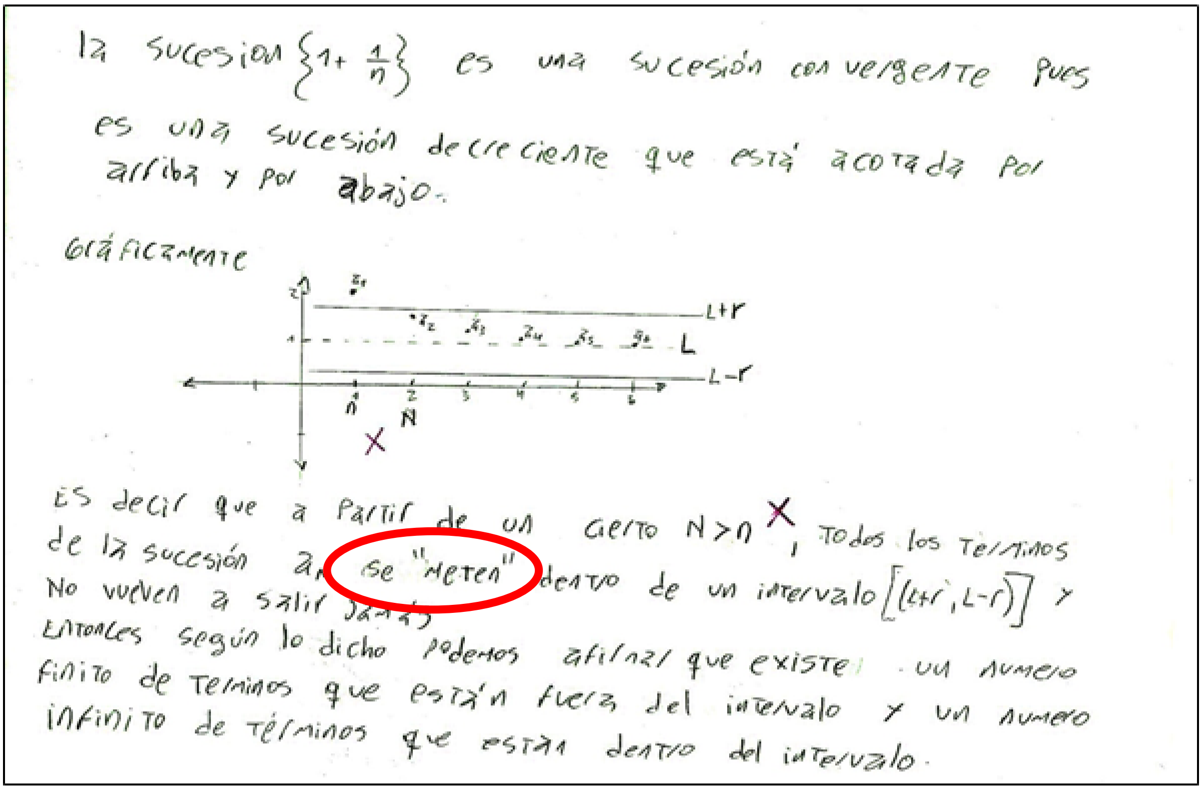


Figura 5.

Fuente: Examen final Cálculo 1. Facultad de Ing. y Cs. Hídricas (U.N.L.) (2017)

Se observa cómo, aún sin expresar aproximación al límite L, utilizan, en referencia al entorno de L, términos tales como *caen, se meten, entran*, en una clara postura *potencialista*.

5. A modo de conclusión.

El concepto de infinito satura a todas las matemáticas, dado que los objetos matemáticos generalmente se estudian no como individuos sino como miembros de clases o agregados que contienen infinidad de objetos del mismo tipo [...]. Por esta razón es necesario analizar al infinito matemático de un modo preciso (Courant y Robbins, 2014, p. 104)

González Urbaneja (2004), apoyado en textos de ilustres matemáticos, pedagogos, historiadores y profesores, resalta las múltiples razones que fundamentan la vinculación permanente de la historia con la Didáctica de la Matemática.

Consideramos que, como educadores, conocer las intuiciones e ideas que dieron lugar a conceptos, propiedades y demostraciones; los lenguajes y notaciones en que se expresaban; las dificultades que involucraban; los problemas cotidianos y fenómenos físicos o sociales que ayudaban a resolver; el marco histórico en que aparecían, etc. contribuye en distintos aspectos al desarrollo de nuestra profesión.

Por un lado, facilita poner de manifiesto a los alumnos el proceso dinámico de la actividad científica: zigzagueante, nunca acabado, crítico. Por otro, ayuda a replantear el posicionamiento epistemológico con el que se estudia esta ciencia y evitar planificar su enseñanza como un producto dogmático, inmutable, cerrado y acabado.

Finalmente, y como sostienen Azcárate Giménez y Deulofeu Piquet (1996), resulta conveniente contar con más herramientas a la hora de concebir una primera idea de los obstáculos que se especula encontrarán nuestros alumnos en la adquisición de un concepto, considerando las dificultades intelectuales que ha supuesto su adquisición a lo largo de su desarrollo epistemológico. Esto, a su vez, permitirá, desde la enseñanza, el trazado de estrategias didáctico - pedagógicas que resulten un posible aporte para la adquisición de aprendizajes satisfactorios en términos de significación.

6. Bibliografía.

Azcárate Giménez, C. y Deulofeu Piquet J., (1996). *Funciones y Gráficas*. Madrid, España: Síntesis.

Bombal, F. (2010). Un paseo por el infinito. *Revista Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. *104*(2), 427-444. Recuperado de www.rac.es/ficheros/doc/00984.pdf

Boyer, C. B. (2007). *Historia de la Matemática*. Madrid. España: Alianza.

Courant, R. y Robbins, H. (2014). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. México: Fondo de Cultura Económica.

Díaz García, L. y Vilela García, M. A. (2005). El infinito matemático. Recuperado de www.miguev.net/blog/wp-content/uploads/2005/01/El_Infinito_Matematico.pdf

Fava, N. y Zó, F. (1996). *Medida e Integral de Lebesgue*. Buenos Aires, Argentina: Red Olímpica.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las ciencias*, *20*(1), 87-113.

González Urbaneja, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista Suma*. (45), 17-28.

López, C. (2014). El infinito en la historia de la matemática. *Revista Ciencia y Tecnología*. (14), 277-298.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana*. *Boletín 1*(2), 59-81.

Penalva, M. C. (1996). *Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, España.

Recalde, L. y Beltrán, A. (2017). Algunas disquisiciones filosóficas en torno al problema de la existencia del infinito en matemáticas. *Praxis Filosófica Nueva Serie*. (45), 219 - 241.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1985). *Historia de la matemática*. *Del Renacimiento a la actualidad*. Barcelona. España: Gedisa.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*. San José, Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.

Sacristán Rock, A. (2003). Dificultades y paradojas del infinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa:*

Aspectos de la investigación actual. (pp. 262-279). México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados y Fondo de Cultura Económica.

Sellés García, M. (2018). La teoría de indivisibles de Galilelo Galilei y su geometrización del movimiento. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/267805070_la_teoria_de_indivisibles_de_galileo_y_su_geometrizacion_del_movimiento

Torres Hernández, R. (2002). Eudoxo, Arquímedes y el límite de una sucesión. *Revista Miscelánea Matemática*. (35), 41-48.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. *1*(1), 107-122.

Mario Garelik es Licenciado en Matemática Aplicada y Magister en Didácticas Específicas y se dedica a la investigación en Matemática Educativa, ocupándose en especial de las dificultades de enseñanza y aprendizaje de los principios del cálculo. Profesor titular en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas - Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe - Santa Fe – Argentina.
mgarelik@gmail.com Tel. Móvil: 54-9-342-4399197

Fabiana Montenegro es Profesora de Matemática, Licenciada en Matemática Aplicada, Magister en Matemática. Doctoranda en Educación. Profesora adjunta en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral. Profesora titular en el Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de la Escuela Normal Superior N 32. Santa Fe - Santa Fe – Argentina.
montenegrofg@gmail.com Tel. Móvil: 54-9-342-5337389

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 138-158

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

El papel de las imágenes en el proyecto "¡A contar!" para el aprendizaje de matemáticas importantes en la educación infantil

Carlos de Castro Hernández, Mónica Ramírez García

Fecha de recepción: 03/05/2017
Fecha de aceptación: 25/03/2018

Resumen	El proyecto "¡A contar! Matemáticas para Pensar" es una propuesta de enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas en la educación infantil (de 3 a 6 años). Está centrado en ideas matemáticas importantes y toda la actividad matemática aparece organizada a través de la literatura infantil. Los cuentos que estructuran el proyecto han sido ilustrados para potenciar al máximo la actividad matemática infantil. En este artículo explicamos la relación que se establece entre las imágenes de los cuentos, sus características matemáticas, las tareas que proponemos a los niños de 3 años y la actividad matemática que desarrollan los niños en este contexto. **Palabras clave**: Educación infantil, imágenes, literatura, matemáticas
Abstract	The project "Let's count! Mathematics for thinking" is a teaching proposal for the learning of mathematics in the early years (from 3 to 6 years). It is centered on important mathematical ideas and all the mathematical activity is organized through children's literature. The children's books that structure the project have been illustrated to maximize children's mathematical activity. In this article, we explain the relationship between the images in children's books, their mathematical characteristics, the tasks that we propose to three years old children and the mathematical activity that children develop in this context. **Keywords**: Early childhood Education, images, literature, mathematics
Resumo	O projeto "Vamos contar! Matemática para pensar" é uma proposta para o ensino e aprendizagem da matemática na educação infantil (3 a 6 anos). Concentra-se nas ideias matemáticas importantes e toda a atividade matemática é organizada através de literatura infantil. As histórias que estruturam o projeto foram ilustradas para maximizar a atividade matemática das crianças. Este artigo explica a relação estabelecida entre as imagens dos contos, as suas características matemáticas, os problemas que propomos a crianças de 3 anos e a atividade matemática que as crianças desenvolvem neste contexto. **Palavras-chave:** educação infantil, imagens, literatura infantil, matemática

1. Introducción

Distintos documentos curriculares ponen de manifiesto la necesidad de proporcionar contextos cercanos a los alumnos para que estos puedan dotar de sentido a sus aprendizajes matemáticos. La literatura infantil cumple con esta función a la perfección (NCTM, 2003, p. 122). Desde la *Educación Matemática Realista*, el uso de contextos realistas implica la presentación de situaciones que los niños puedan imaginar, por lo que los cuentos se proponen como ejemplo paradigmático de contexto realista para el aprendizaje matemático, por los estímulos que proporcionan a la imaginación infantil (Van den Heuvel-Panhuizen, 2008).

La imaginación, idea clave para articular matemáticas y literatura infantil, puede definirse como la habilidad de crear imágenes mentales (Alsina, 2007). La visualización de figuras, gráficos, a través del uso de dibujos o materiales manipulativos ayuda a desarrollar la capacidad de imaginación, que favorece el razonamiento y resolución de problemas, procesos clave de la competencia matemática. La profesora Margarita Marín, experta española en matemáticas y literatura infantil, indica que los niños muestran el uso del razonamiento cuando hacen preguntas mientras se leen cuentos en el aula. Además, explicar el significado de las ilustraciones y el análisis de sus detalles pueden ser un primer paso para posteriores análisis de representaciones matemáticas (Marín, 2007a).

La elección de cuentos ilustrados para trabajar el desarrollo del pensamiento matemático no implica que los cuentos hayan sido elaborados con este fin. La clave está en la lectura matemática que se haga del mismo (Marín, 2007b). El contenido matemático no debe dirigir la historia que se cuenta. Algunos cuentos resultan forzados con el fin de servir a un propósito matemático, perdiendo el hilo de la historia (McGrath, 2014). Hay cuentos, como "Ser quinto" (Jandl y Junge, 2005), que no han sido creados para desarrollar ningún contenido matemáticos y, sin embargo, según Marín (2007b) ensalza el valor de sus ilustraciones en las que se pueden ver representadas el orden descendente, las nociones topológicas de dentro/fuera y el concepto de sustracción. Así, Van den Heuvel-Panhuizen y Van den Boogaard (2008) encontraron que más del 50% de los comentarios que realizaron un grupo de niños de 5 años sobre la lectura de este cuento, estaban provistas de contenido matemático. Sin embargo, Elia, Van den Heuvel-Panhuizen y Georgiou (2010) analizaron los comentarios de niños de 4 años sobre la lectura de un cuento preparado para desarrollar contenidos matemáticos y solo el 27% de éstos mostraron alguna referencia matemática.

La clave para el aprendizaje de las matemáticas a través de las ilustraciones de un cuento está en la lectura de un maestro con la formación adecuada, que sepa verlo con "ojos matemáticos" y, a través de cuestiones planteadas a los niños, promover su pensamiento matemático. Los cuentos proporcionan situaciones para trabajar las secuencias temporales, las relaciones de orden, la correspondencia uno a uno, la enumeración y otros contenidos matemáticos dependiendo de las necesidades y oportunidades que surjan en el aula, aunque no en todos ellos se pueden trabajar todos los contenidos citados (Aguilar, Ciudad,Láinez y Tobaruela, 2010). Con los siguientes apartados intentamos contribuir a la formación de los maestros en su adquisición de la "mirada matemática" para utilizar los cuentos como recurso didáctico para promover la actividad matemática.

2. El proyecto "A contar"

El proyecto "¡A contar! Matemáticas para pensar" (De Castro y Hernández, 2015; De Castro y Ramírez, 2016) está diseñado para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en educación infantil, para edades comprendidas entre los 3 y los 6 años. No persigue abordar de forma exhaustiva todos los contenidos y procesos matemáticos que pueden desarrollarse en los primeros años, sino que se centra en matemáticas importantes. Entendemos por matemáticas importantes los contenidos -conceptos, destrezas- y procesos que tienen una aplicación directa a la vida cotidiana, permiten mejor la articulación entre ideas de distintos cursos y son generativas de futuros aprendizajes, pero a su vez respetan en desarrollo infantil (Clements y Sarama, 2009; NCTM, 2003). El paradigma de contenido matemático importante en la educación infantil es el conteo. Se aplica a resolver cualquier situación de cuantificación (para saber cuántos hay), es fundamental en la transición a primaria para aprender las operaciones aritméticas y en la resolución de problemas, y es algo que los niños disfrutan haciendo en estas edades. Por otra parte, centrarse en los contenidos matemáticos importantes forma parte de la estrategia del proyecto "¡A contar!". Nuestra propuesta está pensada para articularse con las demás áreas del currículo de educación infantil; especialmente, con la literatura, que sirve de eje vertebrador del proyecto.

En este artículo, describimos las características de las ilustraciones de los álbumes que forman parte del proyecto "¡A contar!" que son resultado de la aplicación de criterios didáctico-matemáticos. En el próximo apartado, presentamos estas características agrupadas por contenidos matemáticos. Después, el cuarto apartado dará paso a la propuesta de actividades para niñas y niños de 5 años, organizadas en torno al álbum ilustrado de Garbancito, tratando de explicar las relaciones que se establecen entre las ilustraciones, las actividades y la actividad matemática infantil desarrollada por los pequeños.

3. La integración de aspectos matemáticos en las ilustraciones de los álbumes

En los siguientes apartados ofrecemos ejemplos de ilustraciones en las que se han incluido características con la pretensión de potenciar la actividad matemática de niñas y niños de último curso de educación infantil (5 y 6 años). Las imágenes están tomadas de la adaptación del cuento "Garbancito", ilustrado por Anuska Allepuz.

3.1. La relación parte-todo

La relación parte-todo tiene un papel importante en áreas de las matemáticas como la aritmética o la geometría. Alrededor de los 4 años, los pequeños aprenden que un total se compone de partes más pequeñas, aunque en un principio no puedan cuantificar estas cantidades con exactitud. Los alumnos pueden desarrollar el conocimiento intuitivo de la propiedad conmutativa al combinar las partes en órdenes distintos (Clements y Sarama, 2009). La comprensión de la composición aditiva requiere la capacidad de razonar sobre la relación parte-todo. Este contenido matemático es básico para la resolución de problemas de estructura aditiva de combinación y para el aprendizaje de la suma y la resta (Castro-Rodríguez, Castro, 2013). Los niños resuelven problemas aritméticos verbales representando las cantidades con objetos, estableciendo relaciones y realizando acciones sobre ellos.

En la Figura 1, a la izquierda, podemos considerar el total de las uvas que Garbancito lleva en la cesta, una parte (el racimo de uvas verdes) o la otra parte (el racimo de uvas moradas). A la derecha, el total de frascos de colonia puede separarse en los vacíos (una parte) y los llenos (la otra parte). Alternativamente, unos son de color rosa y otros azules. La presencia de conjuntos de objetos divididos en subconjuntos proporciona un contexto para problemas de estructura aditiva combinación con el total desconocido (o con una parte desconocida), que también es válido para problemas de descomposición aditiva (o incluso de estructura multiplicativa, de división). Todos estos problemas se basan en la relación parte-todo. Ejemplos de enunciados son los siguientes:

- Garbancito lleva a su padre un racimo de uvas verdes y otro de uvas moradas. Si en total hay 14 uvas y 9 son moradas, ¿cuántas uvas verdes lleva? (Problema de combinación con incógnita en una parte).
- La madre de Garbancito preparó una sopa con 5 puerros y 5 zanahorias. ¿Cuántas verduras utilizó? (Problema de combinación, con el total desconocido)
- Garbancito compró 10 botones. Algunos rojos y otros azules. ¿Cuántos crees que compró rojos? ¿Cuántos azules? (Problema de descomposición).

Figura 1. La relación parte-todo.
Fuente: De Castro y Hernández (2015).

Los alumnos pueden imaginarse la situación descrita en el enunciado del problema gracias a la ilustración. Además, pueden comprender las relaciones que se establecen entre las cantidades y construir una representación con materiales manipulativos que servirá de soporte para el proceso de resolución del problema.

3.2. Las acciones con objetos en el *mundo encarnado*: añadir y quitar para contextualizar las operaciones aritméticas

Antes del aprendizaje de las operaciones aritméticas en la escuela, los niños resuelven problemas ayudándose de acciones físicas realizadas con colecciones de objetos. Estas acciones (añadir, quitar, separar, juntar, repartir o agrupar) tienen un estrecho vínculo con las operaciones aritméticas efectuadas con números. Esta relación entre los objetos y los números ha sido explicada por Tall (2013) en su descripción del desarrollo del pensamiento matemático en su teoría de los tres mundos matemáticos (Figura 2). El primer mundo está basado en la percepción y en la acción, evoluciona a un segundo mundo caracterizado por el uso del lenguaje simbólico, y concluye en el mundo del lenguaje matemático formal y el razonamiento matemático deductivo. Este autor llama a esta primera etapa intuitiva "*mundo encarnado*", en que el conocimiento emana de la interacción con los objetos del mundo real y la reflexión sobre la percepción y la acción en el entorno que nos rodea. Así, el aprendizaje de la aritmética emerge metafóricamente de las acciones realizadas sobre los objetos, como la agrupación, la partición o el conteo. Aparte de los objetos en el contexto, destaca la presencia de los materiales manipulativos como las regletas de colores o los bloques de base diez para representar los números y las operaciones. Gracias a la interacción con el entorno circundante, el conocimiento matemático evoluciona a un nivel superior de abstracción a través de la reflexión sobre imágenes mentales surgidas de las acciones realizadas con las cantidades concretas, que van convirtiéndose en parte de la imaginación humana. Así ocurre con el desarrollo de la aritmética. Los procedimientos con conceptos y símbolos matemáticos pueden interpretarse como operaciones a realizar con colecciones de objetos y, a su vez, pueden manipularse mentalmente como conceptos numéricos ya emancipados de la realidad física de las colecciones de objetos. En el mundo simbólico, a partir de las acciones incorporadas tales como añadir, agrupar y compartir, el niño construye formas simbólicas para el número, la suma, el producto, la división y así sucesivamente, hasta completar la estructura conceptual mental del número y la aritmética (mundo simbólico encarnado).

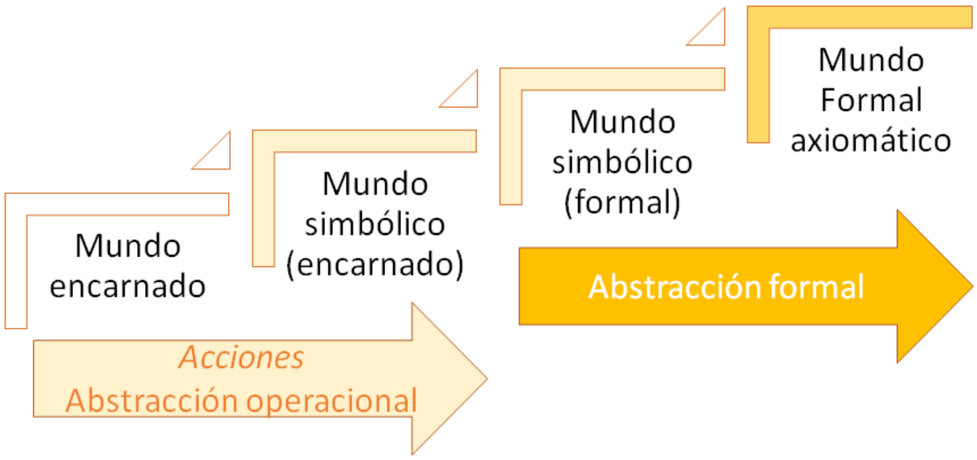


Figura 2. Desarrollo de los mundos sobre número, aritmética y álgebra.
Fuente: Ramírez (2015).

A medida que el niño crece, estos dos mundos (encarnado y simbólico) están disponibles. Las propiedades y relaciones observadas en los objetos del mundo encarnado y los conceptos del mundo simbólico, forman la base para los axiomas, definiciones, teoremas y demostraciones que van tomando cada vez un protagonismo mayor en los mundos formal y axiomático formal, ya muy alejados de las primeras etapas educativas.

En la *Educación Matemática Realista,* la aritmética comienza con situaciones realistas y la estrategia básica es el conteo de objetos. Más tarde, los materiales manipulativos como el *rekenrek* van dejando paso a representaciones gráficas como la recta numérica para realizar las operaciones. Finalmente, en el cálculo formal, los alumnos recuperan hechos numéricos básicos y los integran con estrategias de cálculo mental y con los algoritmos (Van den Heuvel-Panhuizen, 2008). Así, antes del cálculo que denominan "formal", el aprendizaje se asemeja al descrito en el *mundo encarnado* de Tall (2013). En estos marcos teóricos, el proceso de matematización conduce a una matemática formal a través de la manipulación simbólica.

Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999) describen la evolución del pensamiento numérico infantil en los primeros años como una evolución desde las estrategias de modelización directa a las de conteo y uso de hechos numéricos. Las primeras se aplican con el apoyo en representaciones con objetos, marcas o materiales manipulativos, mientras que las de conteo implican un grado de elaboración mayor de la secuencia de las palabras número. Tanto las estrategias de modelización directa como las de conteo son estrategias informales características de los primeros años que fundamentan los conocimientos aritméticos formales que niñas y niños adquirirán en la educación primaria, como los algoritmos.

Figura 3. Acción de dar con posibles significados de añadir o quitar.
Fuente: Santillana (2015).

Las historias narradas en los cuentos proporcionan las intuiciones iniciales necesarias para la construcción de la aritmética en el mundo encarnado de Tall (2013). Las operaciones aritméticas emergen metafóricamente de acciones y relaciones que observamos en la vida cotidiana y después se van convirtiendo en modelos para organizar estos fenómenos. En la Figura 3, la madre de Garbancito le da algunas monedas que este guarda en su mochila. A la derecha, los padres de Garbancito suministran al buey varias coles que este va comiendo. Estas acciones con objetos pueden interpretarse como una acción de quitar, si describimos la situación desde la cantidad de origen, de la que apartamos una parte para darla, o una situación de añadir, si atendemos a cómo aumenta la cantidad del que recibe. Con ayuda de las ilustraciones, los pequeños pueden imaginarse las acciones que deben hacer sobre las representaciones de las cantidades presentes en los enunciados de los problemas y buscar el resultado. Así, partiendo de la Figura 3, se pueden plantear problemas como los siguientes:

- La madre de Garbancito tenía 10 monedas y dio 6 a Garbancito para ir a la tienda. ¿Cuánto dinero tiene ahora la madre? (Problema de cambio decreciente con incógnita en la cantidad final).
- La madre de Garbancito le dio 10 monedas para comprar una bolsita de sal y él volvió a casa con 5. ¿Cuánto costó la bolsita? (Problema de cambio decreciente, con cantidad de cambio desconocida).
- Los padres de Garbancito dieron de comer al buey 3 coles y luego otras 6. ¿Cuántas coles comió el buey en total? (Problema de combinación, con el total desconocido).

3.3. La representación de cantidades indefinidas

Un aspecto a considerar sobre la representación de las cantidades en las ilustraciones es si permiten una cuantificación exacta (hay exactamente un número determinado de objetos) o una cuantificación indefinida (hay varios, pero no puedo decir cuántos con exactitud). En la Figura 4, a la izquierda, observamos que Garbancito tiene jerséis y camisas en el armario. En realidad, no puede saberse el número de exacto de ninguna de las dos cantidades por tener el armario una puerta cerrada. En la imagen de la derecha, el buey está comiendo coles de un huerto en el que se ve una cantidad de coles, pero no se puede concretar la cantidad exacta de coles. La ilustración de la izquierda permite a los niños imaginarse la situación y comprender la relación parte-todo (el total de camisas dividido en los que están en el armario y fuera). Se pueden plantear problemas como: "Si Garbancito tiene 6 camisas, y se está probando una, ¿cuántas camisas quedan en el armario?".

Figura 4. Representación de una cantidad indefinida (jerséis, camisas, coles).
Fuente: Santillana (2015).

Hemos comprobado en experiencias anteriores en educación infantil (De Castro, Pastor, Pina, Rojas y Escorial, 2009), que si decimos en un problema que en el armario hay 6 camisas y se ve claramente que hay 4, muchos pequeños de 4 o 5 años protestan airadamente. Su percepción de la ilustración se centra en un aspecto (el número exacto de objetos que ven) que les dificulta imaginar la situación descrita en el enunciado, porque entra en conflicto con ella. Si las representaciones de cantidades en las ilustraciones son indefinidas, los niños no presentarán ninguna objeción a las cantidades citadas en los enunciados. Esto permite a maestras y maestros cambiar los datos de los enunciados, ajustándolos a las capacidades de conteo de sus alumnos, y a su vez facilita a los pequeños imaginarse la situación del enunciado, elaborar una representación y resolver el problema.

3.4. La relación de uno-a-muchos

La relación uno-a-muchos establece una correspondencia entre una colección de objetos y una colección de grupos de objetos con el mismo cardinal. Por ejemplo, a cada flor le corresponden 13 pétalos (Figura 5), o a cada tomatera le corresponden 5 tomates (Figura 4). Así, en 2 flores tendremos 26 pétalos; en 3 tomateras, 15 tomates. Esta relación hace posible imaginar tres tipos de problemas diferentes de estructura multiplicativa, que los niños resuelven desde la Educación Infantil (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, y Empson, 1999):

- Si hay 6 flores, y cada una tiene 13 pétalos, ¿cuántos pétalos hay? (Problema de multiplicación)
- Si hay 15 tomates y en cada tomatera hay 5 tomates, ¿cuántas tomateras hay? (División agrupamiento)
- Si hay 14 uvas en 2 racimos, con el mismo número de uvas en cada uno, ¿cuántas uvas hay en cada racimo? (División reparto)

Figura 5. La relación uno-a-muchos.
Fuente: Santillana (2015).

Estos problemas de "grupos iguales" están en la base del conocimiento de la estructura multiplicativa y del principio de agrupamiento de los sistemas de numeración. En concreto, cuando los grupos son de 10 elementos, permiten representar una colección de objetos agrupados de 10 en 10 (en decenas) según el sistema de numeración decimal (Carpenter y otros, 1999; Ramírez, 2015).

3.5. Representaciones con forma de matriz

Las ilustraciones pueden mostrar cantidades discretas con forma de matriz, donde los objetos están dispuestos en filas y columnas. Esta situación permite plantear problemas aritméticos verbales de estructura multiplicativa de matrices (Carpenter y otros, 1999) que pueden ser de multiplicación, si la cantidad a averiguar es el total de elementos; de división agrupamiento, si la incógnita es el número de filas o de columnas; o división reparto, si lo desconocido es el número de objetos en cada fila o columna:

- En el huerto hay 3 filas de coles. Si en cada fila hay 6 coles, ¿cuántas coles hay en el huerto? (Multiplicación).
- En el huerto hay 12 coles distribuidas en filas, con de 4 coles en cada una. ¿Cuántas filas de coles hay? (División agrupamiento).
- En el huerto hay 12 cebollas plantadas en 3 filas, con el mismo número de cebollas en cada fila. ¿Cuántas cebollas hay en cada fila? (División reparto).

En la Figura 6, la ilustración ha sido intencionalmente realizada para servir de apoyo visual en el planteamiento de los problemas anteriores. La situación descrita en los enunciados se refuerza con la imagen de la matriz del huerto de las coles y facilita que los niños imaginen la configuración formada por las coles, la representen y encuentren la solución. Los problemas de matrices tienen una gran importancia desde la educación infantil, pues facilitan una aproximación informal al aprendizaje de la multiplicación, a través de la relación uno a muchos entre las filas y los elementos de cada fila, y además proporcionan un tipo de representación de una gran riqueza matemática. Incluir este tipo de problemas hace que el futuro aprendizaje de la multiplicación pueda conectarse con situaciones complementarias a la de suma reiterada, que faciliten el paso del pensamiento aditivo al multiplicativo, que se produce en la educación primaria (Castro y Castro-Rodríguez, 2010).

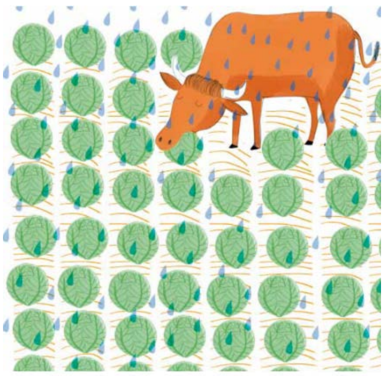


Figura 6. Representaciones con forma de matriz en las ilustraciones del cuento de Garbancito.
Fuente: Santillana (2015).

3.6. Las tiendas como contexto matemático y el dinero como medida

Dickson, Brown y Gibson (1991) explican que el sistema monetario tiene aspectos en común con otros sistemas de medida, ya que proporciona una unidad de medida (las monedas) para expresar el precio de las cosas. Los niños deben ser capaces de utilizar el dinero en situaciones cotidianas, decidiendo qué comprar, si tienen dinero suficiente, qué monedas necesitan y qué cambio deben esperar. Esto requiere manipulaciones con las monedas y billetes del sistema monetario y operaciones aritméticas con cantidades expresadas con estas unidades.

En la escuela es habitual recrear una tienda, ya sea como proyecto o en el rincón de juego simbólico. Se puede construir un mercado medieval o una panadería (De Castro, González y Escorial, 2009; Edo y Masoliver, 2008). Desde el punto de vista de la educación matemática, una tienda en clase proporciona diversas oportunidades para lograr aprendizajes matemáticos significativos, basados en la experiencia infantil de ir a la compra con sus padres. Por ejemplo, se afronta el uso del dinero en un contexto cotidiano, la organización de los productos en la tienda y de las monedas en la caja (clasificación), la elaboración de una lista de la compra, la aparición de los numerales en contextos de medida de masa (balanza), incluso con fracciones (1/4 de kilo) y en los precios (con decimales), el uso de instrumentos de medida (balanza) y de cálculo (calculadoras y cajas registradoras), operaciones aritméticas como la suma o la multiplicación al pagar varios productos (tengan estos el mismo o diferentes precios), o la resta, al devolver el cambio, etc. La Figura 7 (izquierda) muestra el precio de los productos en la tienda. A la derecha, la imagen ayuda a comprender a los pequeños la acción de pagar, en el intercambio por monedas de la bobina que el vendedor entrega a Garbancito.

Figura 7. Garbancito en la tienda en una situación de compraventa.
Fuente: Santillana (2015).

3.7. Las formas geométricas en el entorno

Conocer las formas geométricas básicas es uno de los objetivos de educación infantil. Este aprendizaje se puede describir también a través de los tres mundos de Tall (2013). En el mundo encarnado, basado en el desarrollo del pensamiento a través de la percepción física y la acción, la geometría comienza con el juego de los niños con los objetos, reconociendo sus propiedades con los sentidos y describiéndolos, poco a poco con el lenguaje. Las descripciones se van volviendo más precisas, haciendo referencia al marco formal de la geometría euclídea ("mundo formal encarnado"). Más tarde, la geometría se especializa en campos diferentes como la geometría euclídea, diferencial o topológica (mundo axiomático).

El conocimiento de las formas tridimensionales puede adquirirse a través del juego de construcción, en que las formas complejas se elaboran por composición de otras más simples (De Castro, 2015). En la geometría plana destacan, dentro de las propuestas manipulativas, los puzles. Uno de ellos, el tangram es un recurso didáctico que permite la composición y descomposición de formas geométricas. Por ejemplo, la Figura 8 presenta la relación entre la composición hecha con las 7 formas geométricas del tangram y el contorno de Garbancito. Las piezas del tangram permiten a los pequeños establecer múltiples relaciones de comparación directa de longitudes, superficies, amplitudes angulares. También cobra importancia la relación parte todo en el ámbito de la geometría. Un problema detectado en experiencias previas de geometría en el aula de infantil, es que la relación entre la figura compuesta por las siete figuras del tangram no evoca directamente para los alumnos de 4 y 5 años una figura del entorno. La ilustración de Garbancito con el tangram superpuesto (Figura 8, imagen de la izquierda) trata de ayudar a los niños a descifrar las figuras esquematizadas realizadas compuestas con las formas del tangram.

Figura 8. Figura para tangram y Garbancito oculto en la primera col de la fila.
Fuente: Santillana (2015).

3.8. El número natural en su aspecto ordinal

El número natural y los numerales abarcan una gran variedad de usos y significados, como el cardinal de una colección discreta, el orden de un elemento dentro de una fila o la expresión de una medida, indicando el número de veces que una unidad se puede reiterar en una cantidad de magnitud (Castro y Molina, 2011). Las situaciones de aprendizaje del número en su aspecto ordinal suelen reducirse en educación infantil al vocabulario de los numerales ordinales (Hernández, 2013). Más allá de las palabras "primero", "segundo", etc., para lograr un verdadero aprendizaje del significado ordinal, pueden plantearse situaciones en las que este conocimiento sea necesario para resolver un problema. Por ejemplo, si se esconde una gominola en uno de los vagones idénticos de un tren, el alumno que observa dónde se guarda la gominola debe comunicar por escrito a otro compañero en qué vagón se encuentra esta. El compañero que recibe el mensaje escrito debe descifrarlo y localizar la gominola. En esta situación, los numerales se utilizan con un sentido ordinal en dos vertientes: notificar la posición de un objeto en una fila (en este caso, de vagones) y localizarlo a partir del numeral escrito (Hernández, 2013).

La Figura 8, derecha, muestra una fila de coles con escondido en una de ellas. El problema de localizar a Garbancito en la fila de coles implica (como en el caso descrito de la gominola en el tren) utilizar el número natural en su sentido ordinal.

3.9. Patrones de repetición unidimensionales y bidimensionales

La competencia matemática supone la capacidad de identificar situaciones de la vida cotidiana en las que se pueden utilizar las matemáticas. Después, puede darse estructura matemática a dicha situación. Un tipo de actividad ejemplar de esta competencia es el descubrimiento de regularidades, relaciones y patrones (OCDE, 2013, p. 13). Clements y Sarama (2009) indican que crear patrones y buscar regularidades, además de ser un contenido, se puede considerar un proceso de matematización, de predecir lo que va a ocurrir y explicar una situación.

En el aula de educación infantil se realizan a menudo tareas en las que se forman series con un patrón o unidad que se repite; por ejemplo, con la construcción de collares o cenefas, del tipo: "bola roja, bola azul" o "manzana, pera, uva, manzana, pera, uva". Flecha (2013) indica que la sucesión de rutinas (acogida, corro/asamblea, almuerzo, taller, jardín, etc.) es otro ejemplo de la repetición diaria de acontecimientos que permite a los niños descubrir el patrón que siguen sus tareas diarias y anticipar lo que va a ocurrir a continuación.

Figura 9. Patrones en las ilustraciones.
Fuente: Santillana (2015).

En la Figura 9, podemos descubrir patrones en muchos elementos. A la izquierda, el pantalón de Garbancito sigue una secuencia binaria: "raya azul, raya amarilla", los botones alternan la forma y el color, e incluso el papel de pared muestra un patrón bidimensional, con un diseño que, al repetirse, cubre el plano. El descubrimiento de patrones en estas series es importante en el desarrollo del razonamiento inductivo. Por esta razón, más allá de las actividades puntuales que podamos plantear en el aula, las ilustraciones de este cuento constituyen una continua invitación a la búsqueda de regularidades y patrones.

4. La propuesta de actividades matemáticas en interacción con el álbum ilustrado

En la Tabla 1 aparece la programación básica con las actividades planteadas en torno al cuento de Garbancito. Todas las semanas hay resolución de problemas de composición y descomposición con el tangram, mientras que las demás tareas van alternándose durante las cuatro semanas en las que trabajamos con este cuento. En este apartado, vamos a poner ejemplos de la actividad matemática infantil que desarrollan niñas y niños con el estímulo de los álbumes ilustrados del proyecto.

	Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4
Actividades	1. Tienda 2. Número natural como ordinal 3. Tangram	4. Taller de problemas 5. Patrones 6. Tangram	7. Tienda 8. Número natural como ordinal 9. Tangram	10. Taller de problemas 11. Patrones 12. Tangram

Tabla 1. Organización cronológica de las actividades sobre el cuento de Garbancito.

4.1. Actividades de compraventa en el mercado

En la Figura 10 observamos tres listas de precios, que corresponden a tres comercios que visita Garbancito: mercería, supermercado y papelería. Los precios aparecen organizados en tablas, con el tipo de objeto a la izquierda y su precio a la derecha. Los nombres de los productos van acompañados por un dibujo (pues los pequeños están aprendiendo a leer) y el precio tiene también una representación icónica, mediante una serie de monedas dibujadas. A la derecha, los precios también se comunican a través de una representación simbólica, con el numeral escrito en cifras. La actividad que propone el método "¡A contar!" consiste en la elaboración de una lista de 3 productos, la selección de las monedas necesarias para pagar, el pegado de las pegatinas correspondientes al número de monedas (estas se pegan en el cuaderno del alumno, Figura 10, derecha, y Figura 11), y la anotación del precio con cifras en la casilla inferior. Los precios de los productos se han elegido teniendo en cuenta que el número de monedas de tres productos cualesquiera no exceda las capacidades de conteo de objetos infantiles en estas edades (5 y 6 años).

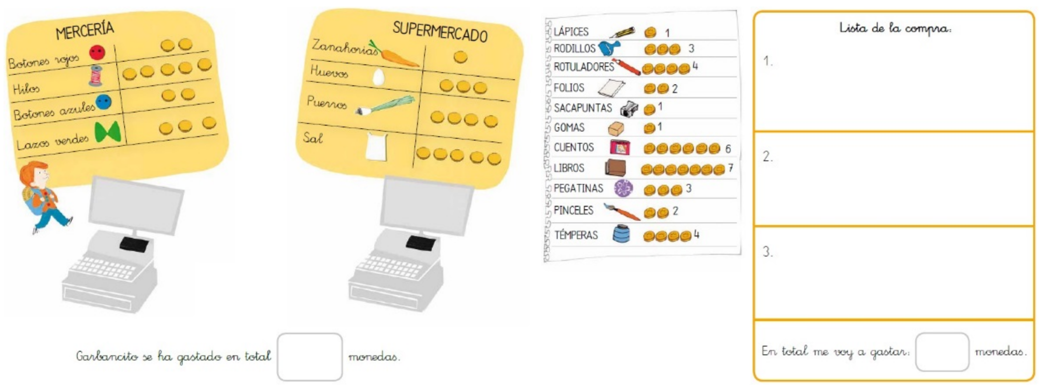


Figura 10. Hoja del cuaderno del alumno para actividad de la tienda.
Fuente: Santillana (2015).

Las actividades de "¡A contar!" están diseñadas para permitir un rango amplio de estrategias, desde las más rudimentarias a las más avanzadas. En esta actividad, los alumnos eligen los productos que desean y los representan en su cuaderno. Pueden hacerlo por escrito, con dibujos, o con ambas formas de representación (Figura 11). También deben pegar los gomets-moneda que necesitan para el pago, pudiendo decidir cuántos gomets ponen por correspondencia uno a uno, por subitización o por conteo, empleando la lista de precios. Finalmente, deben anotar en la casilla la cifra que representa la cantidad de monedas que deben pagar. Se trata de un tipo de tarea rica en representaciones de cantidades, que permite articular representaciones icónicas y simbólicas, tanto del tipo de objeto como del número.

Para escribir el precio con cifras, niñas y niños pueden copiar el numeral de una banda numérica, si así lo requieren. Esto puede hacerse contando las monedas y contando después las casillas de la banda numérica hasta llegar al numeral que hay que escribir, o poniendo una moneda sobre cada casilla de la banda numérica y anotando la cifra de la última casilla ocupada.

El uso de los numerales para indicar el precio total a pagar por una compra presenta una situación de la vida cotidiana que da sentido a los números (Figura 11). Poseer sentido numérico implica un conjunto de capacidades para usar los números de forma desenvuelta (Castro y Segovia, 2015). Supone identificar cantidades en situaciones cotidianas, usar métodos cuantitativos para comunicar informaciones, establecer comparaciones, realizar estrategias diferentes para resolver situaciones aritméticas, y conocer distintas formas de representar los números. Todas estas capacidades están presentes en el contexto de tienda o mercado.

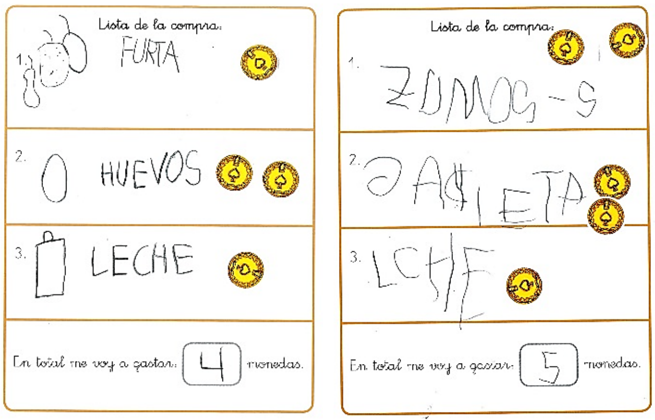


Figura 11. Hoja del cuaderno del alumno para actividad de mercado.
Fuente: Santillana (2015).

4.2. El uso del número natural en sentido ordinal

El uso de un numeral para indicar la posición que ocupa un elemento en una fila también es una capacidad incluida en el sentido numérico. Aguilar y otros (2010) proponen una situación basada en la *Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau*, colocando en una cuerda "cajitas en hilera". Un alumno esconde una bolita de plastilina en una de las cajitas y debe elaborar un mensaje en papel para que otros niños lo descifren y puedan localizar la bolita en la hilera. La estrategia óptima de resolución consiste en utilizar el conteo para averiguar la palabra número correspondiente a la posición de la cajita que contiene la bola y escribirla. Esta actividad tiene el objetivo de aprender a usar el número con un sentido ordinal. En la Figura 12 observamos una colección de cajitas dispuestas en fila y ordenadas, con el buey marcando el primer elemento (por donde comienza a comer), que representan las coles del huerto donde se queda dormido Garbancito. Esta situación del cuento, reforzada por la ilustración del cuento (Figura 8), facilita la comprensión de la tarea.

Figura 12. Planteamiento de la actividad con números naturales ordinales.
Fuente: Santillana (2015).

La actividad tiene dos partes: primero debe determinarse la posición de la fila de cajitas-coles en la que se ha quedado dormido Garbancito y escribir un mensaje para indicar "dónde está Garbancito". En esta ocasión, el maestro elige la caja en la que oculta la tarjeta con el dibujo del personaje delante del alumno. La segunda parte consiste en que un compañero descifre el mensaje (un "4" en la Figura 12) y localice a Garbancito. En la Figura 13, a la izquierda, una niña va contando las "coles" para escribir su mensaje. A la derecha, vemos el mensaje en el cuaderno de actividades "Adondesda 3", que podríamos traducir como "¿Dónde está? En la cajita número 3". Las estrategias que emplean los niños van desde el dibujo de la fila de coles con una flecha indicando la col que oculta a Garbancito, hasta la escritura del numeral con sentido ordinal, incluyendo otras estrategias menos eficientes como dibujar una flecha en el papel y poner el papel de modo que la flecha señale a la caja. Cuando el papel se retira, la flecha pierde su referencia (la caja) y no proporciona ninguna información al receptor del mensaje (ver Hernández, 2013).

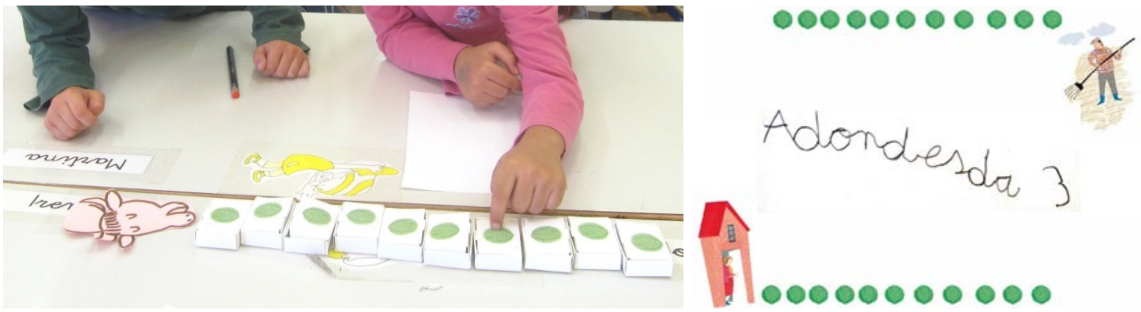


Figura 13. Conteo y mensaje en el cuaderno para la actividad de "ordinales".
Fuente: Elisa Hernández y Santillana (2015).

4.3. Otras actividades de la propuesta: resolución de problemas, patrones y tangram

Los álbumes ilustrados brindan un contexto que estimula la imaginación de niñas y niños. A través de los cuentos, se fomenta la comprensión de los enunciados de problemas aritméticos, pero también el razonamiento y la resolución con materiales manipulativos. En nuestro equipo de trabajo, realizamos talleres de resolución de problemas verbales, tanto de estructura aditiva como multiplicativa, en edades en las que los niños no se han adentrado aun en el mundo formal de las operaciones aritméticas. Los relatos y sus ilustraciones contextualizan los enunciados, facilitando a los alumnos el desarrollo de sus capacidades matemáticas y la resolución de los problemas (De Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez, Escorial, 2012; De Castro y Hernández, 2014; De Castro, Pastor, Pina, Rojas y Escorial, 2009; Ramírez, 2015).

En el proyecto "¡A contar!", el planteamiento de problemas verbales tiene lugar en dos momentos diferentes: en la asamblea y en formato taller. En la asamblea, se plantean problemas sencillos con números menores de diez, sin materiales didácticos de apoyo, para provocar que los pequeños empleen espontáneamente estrategias de modelización y conteo con ayuda de los dedos. En esta situación, valoramos aspectos del conteo como el grado de adquisición y elaboración de la secuencia de las palabras número, la correspondencia uno a uno o la idea de cardinalidad. También evaluamos si niñas y niños aplican el conteo para resolver problemas cotidianos. Los problemas enunciados son sencillos, por ejemplo:

- Los padres de Garbancito dieron de comer al buey 3 coles y luego otras 6. ¿Cuántas coles comió el buey en total? (Combinación con total desconocido).
- En casa de Garbancito tenían 9 frascos de colonia y han gastado 3. ¿Cuántos les quedan llenos? (Cambio decreciente con cantidad final desconocida).

En el taller de problemas, la dificultad de los problemas es más alta, como los ejemplos que hemos incluido en los problemas de relación parte-todo de descomposición aditiva y problemas de matrices. Se lee varias veces el cuento antes del taller para que los niños tengan claro el contexto en el que se van a basar los problemas. En este caso se les proporcionan materiales como cubos encajables, ábacos, Tabla 100 o regletas, para que los niños representen las cantidades y las relaciones y acciones que ocurren con ellas en el enunciado del problema. Los niños deben explicar a sus compañeros la estrategia que han utilizado articulando las ideas y escuchando y reflexionando sobre las ideas de los demás.

El trabajo con patrones, dentro del proyecto "¡A contar!", está dirigido al desarrollo del razonamiento inductivo, partiendo de casos particulares para realizar un proceso de generalización (De Castro y Hernández, 2015). Para ello, presentamos series con un patrón o unidad que se repite, en las cuales debemos percibir una regularidad, identificar el patrón y completar la serie. En la Figura 14, tomada del cuaderno del alumno, los triángulos van alternándose en orientación. Los pequeños deben identificar el patrón, verbalizarlo y reproducirlo con pegatinas en su cuaderno. También pueden completar su hoja de trabajo con patrones de elaboración libre.

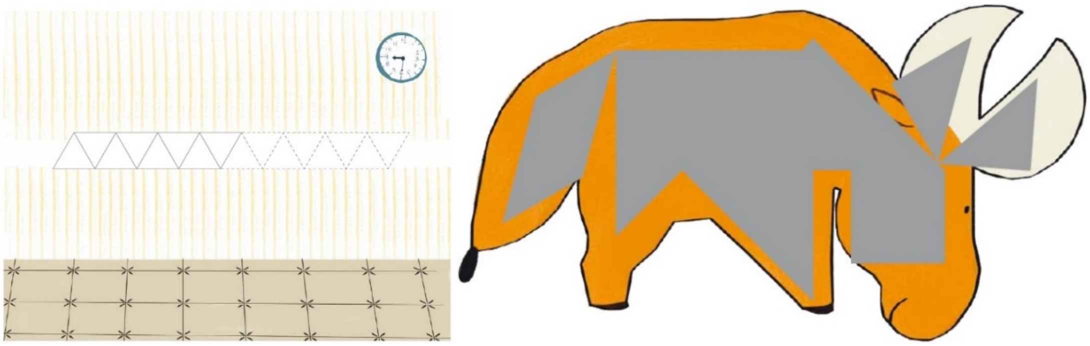


Figura 14. Patrones para completar con pegatinas y actividad de tangram.
Fuente: De Castro y Hernández (2015).

El tangram es un puzle tradicional chino utilizado como material didáctico en geometría. La actividad habitual es componer figuras utilizando las piezas del tangram, lo que obliga al jugador a comparar directamente, mediante superposición o tallado, longitudes, ángulos y superficies. Esto implica la resolución de problemas de composición y descomposición de figuras. En esta actividad, a los niños se les proporciona la figura de algún elemento o personaje del cuento para construirlo con las piezas del tangram. Cuando lo hayan resuelto, cada uno pegará en su cuaderno las pegatinas correspondientes correctamente ubicadas dentro de la silueta. En la Figura 14, a la derecha, vemos un ejemplo de actividad. Los niños comienzan actuando por ensayo y error, eligiendo figuras, superponiéndolas con el modelo, rotándolas, etc. Poco a poco, van seleccionando las piezas del tangram de forma más planificada, comenzando por identificar formas que se encuentran aisladas en la composición, como los cuernos o la cola (Figura 14, derecha).

5. Conclusiones

La mayor aportación de nuestro trabajo no es el uso de la literatura infantil en el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades, sino el uso sistematizado, como eje vertebrador de la actividad matemática. No menos importante es que las ilustraciones de los álbumes hayan sido diseñadas incluyendo características para potenciar la actividad matemática, que pueden pasar desapercibidas al observador no especializado. Esto hace que los cuentos sean ideales, por su temática e ilustraciones, para aprender matemáticas, pero no parezcan diseñados con este fin. A partir de este diseño, hemos mostrado que las características de las ilustraciones, y la historia que se cuenta, sirven como punto de partida para nuestra propuesta de actividad matemática que, a través de la evocación del cuento, se consigue que imágenes y textos den sentido y faciliten la comprensión de conceptos matemáticos.

La resolución de problemas aritméticos verbales, las actividades basadas en situaciones fundamentales para el aprendizaje del número en su aspecto ordinal, la composición y descomposición de figuras con el tangram, el juego de la tienda, no son actividades nuevas en el panorama didáctico. Nuestra propuesta añade una componente que facilita la comprensión y dota de sentido a los contenidos matemáticos. Las imágenes refuerzan el proceso de imaginar el contexto, facilitando la resolución de problemas y el razonamiento sobre ideas matemáticas importantes.

Pensamos que esta línea de trabajo puede ser muy fértil en el futuro. Que aspectos matemáticos de las ilustraciones no resulten evidentes, como que haya un pato en cada caseta, pero permanezcan semiocultos, hace necesario formar a maestras y maestros, para que saquen el máximo provecho a estos recursos. Este trabajo es una contribución en esa dirección. Esperamos seguir colaborando con maestras y maestros en el esfuerzo compartido para transformar, potenciándola, la actividad matemática infantil que niñas y niños desarrollan en las aulas.

Bibliografía

Aguilar, B., Ciudad, A., Láinez, M.C. y Tobaruela, A. (2010). *Construir, jugar y compartir: Un enfoque constructivista de las matemáticas en Educación Infantil*. Jaén: Enfoques Educativos.

Alsina, C. (2007). Educación matemática e imaginación. *Unión: Revista iberoamericana de educación matemática, 11*, 9-17. Recuperado el 2/05/2017 de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2007/11/Union_011_006.pdf

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L., y Empson, S.B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

Castro, E., y Castro-Rodríguez, E. (2010). El desarrollo del pensamiento multiplicativo. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 54*, 31-40.

Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2013). La relación parte-todo. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 85-92). Granada, España: Editorial Comares.

Castro, E. y Molina, M. (2011). Números naturales y sistemas de numeración. En I. Segovia y L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 99-121). Madrid: Pirámide.

Castro, E. y Segovia I. (2015). Sentido numérico. En P. Flores, y L. Rico, (coords.), *Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid, Pirámide.

Clements, D.H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Nueva York: Routledge.

De Castro, C. y Hernández, E. (2015). *¡A contar! Matemáticas para pensar*. Madrid: Santillana.

De Castro, C., González, A., y Escorial, B. (2009). El aprendizaje de las matemáticas a los tres años: Narración reflexiva sobre la construcción de un mercado medieval. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 70*, 53-65. Recuperado el 2/05/2017 de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/70/Articulos_02.pdf

De Castro, C. (2015). Romper para conocer: Procesos de composición y descomposición en la geometría infantil. *Aula de Infantil, 79*, 18-21.

De Castro, C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA, 8*(3), 99-114. Recuperado el 2/05/2017 de: http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Castro2014PNA8(3)Problemas.pdf

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M.L., Martínez, S., Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 53-70. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/80/Monografico_03.pdf el 2/05/2017.

De Castro, C., Pastor, C., Pina, L. C., Rojas, M. I., y Escorial, B. (2009). Iniciación al estudio de las matemáticas de las cantidades en la Educación Infantil. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18*, 105-128. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2009/18/Union_018_013.pdf el 2/05/2017

De Castro, C. y Ramírez, M. (2016). El uso de álbumes ilustrados para potenciar el aprendizaje matemático en las primeras edades. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 33*(3), 61-80.

Devlin, K. (2003). *Mathematics: The science of patterns*. New York: Owl Books.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona, Labor & MEC.

Edo, M., y Masoliver, C. (2008). Una tienda en clase. Creación y análisis de un contexto para aprendizajes matemáticos. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 47*, 20-36.

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Georgiou, A. (2010). The role of pictures in picture books on children's cognitive engagement with mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal, 18*(3), 125-147. https://doi.org/10.1080/1350293X.2010.500054

Flecha, G. (2013). Literatura y matemáticas de 0 a 3: La mariquita gruñona. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 119-126.

Hernández, E. (2013). El aprendizaje del número natural en un contexto ordinal en la Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 41-56.

Jandl, E. y Junge, N. (2005). *Ser quinto*. Salamanca: Lóguez Ediciones.

Marín, M. (2007a). Contar las matemáticas para enseñar mejor. *Matematicalia: Revista digital de divulgación matemática, 3*(2). Recuperado el 2/05/2017 de: http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=433&Itemid=257

Marín, M. (2007b). El valor matemático de un cuento. *Sigma: Revista de matemáticas, 31*, 11-26. Recuperado el 2/05/2017 de: http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_31/3_val_matematico.pdf

McGrath, C. (2014). *Teaching mathematics through story: A creative approach for the early years*. New York: Routledge.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

OCDE (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: MEC-INEE. Recuperado el 2/05/2017 de: http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d

Ramírez, M. (2015). *Desarrollo de conocimientos matemáticos informales a través de la resolución de problemas aritméticos verbales en primer curso de educación primaria*. Tesis doctoral. Madrid: UCM. Recuperada el 3-10-2016 de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=47140

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. New York: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Educación matemática en los Países Bajos: Un recorrido guiado. *Correo del maestro, 149*, 23-54. Recuperado el 2/05/2017 de: http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2008/octubre/incert149%20.htm

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Van den Boogaard, S. (2008). Picture books as an impetus for kindergartners' mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 341-373. https://doi.org/10.1080/10986060802425539

Autores:

de Castro Hernández, Carlos: Licenciado en Matemáticas (Universidad Complutense de Madrid) y Doctor en Didáctica de la Matemática (Universidad de Granada). Profesor de Didáctica de la Matemática en la Universidad Autónoma de Madrid. Coautor, con Elisa Hernández, en el Proyecto "¡A contar! Matemáticas para Pensar". http://www.santillana.es/es/w/profesores/proyectos-educativos/educacion-infantil/a-contar/; http://orcid.org/0000-0002-2246-5402 https://www.researchgate.net/profile/Carlos_De_Castro_Hernandez
Email: carlos.decastro@uam.es

Ramírez García, Mónica: Licenciada en Matemáticas (Universidad Autónoma de Madrid) y Doctora en Educación (Universidad Complutense de Madrid, UCM). Profesora de Didáctica de la Matemática en la UCM. http://orcid.org/0000-0002-1198-2017; https://www.researchgate.net/profile/Monica_Ramirez_Garcia
Email: monica.ramirez@edu.ucm.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 159-180

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Análisis de los Trabajos de Grado de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Carabobo: 2005-2014

Vanesa Pacheco Moros, Oswaldo Jesús Martínez Padrón
Fredy Enrique González

Resumen	El propósito de esta indagación fue realizar un análisis bibliométrico de los Trabajos de Grado de la Maestría en Educación Matemática (TgMEM) aprobados en la Universidad de Carabobo, durante el período 2005-2014. Se enmarcó en un diseño de tipo documental bibliográfico, y el corpus estuvo conformado por los resúmenes y referencias de 133 TgMEM en los cuales se determinó la productividad en el tiempo y por género, así como otros indicadores metodológicos, conceptuales y de citación, analizados de manera diacrónica. Entre las conclusiones destaca lo útil que resulta realizar estudios sobre la producción científica de determinadas instancias a fin de dar cuenta del aporte que han hecho sus investigadores, destacando que en este período predominó la producción del género femenino, la modalidad proyecto factible y el uso del paradigma positivista. El nivel más estudiado fue el de Educación Media (General) y la temática más investigada fue la Geometría. Ausubel es el teórico más usado seguido de Piaget, Vigosky, Bruner y Gagné, destacando además, que Piaget es el autor de libros más citado **Palabras clave**: Bibliometría, Investigación Documental, Maestría en Educación Matemática, Producción Científica
Abstract	The purpose of this investigation was to perform a bibliometric analysis of the Master's Degree in Mathematics Education (TgMEM) approved at the University of Carabobo, during the period 2005-2014. It was framed in a bibliographic documentary type design, and the corpus was made up of the summaries and references of 133 TgMEM in which the productivity was determined in time and by gender, as well as other methodological, conceptual and citation indicators, analyzed from diachronic way. Among the conclusions highlights the usefulness of conducting studies on the scientific production of certain instances in order to account for the contribution made by their researchers, noting that in this period the production of the female gender, the feasible project modality and the use of the positivist paradigm. The most studied level was that of Media Education (General) and the most researched topic was Geometry. Ausubel is the most used theorist followed by Piaget, Vigosky, Bruner and Gagné, also stressing that Piaget is the most quoted author of books ***Keywords:*** Bibliometrics, Documentary Research, Master in Mathematics Education, Scientific Production
Resumo	O objetivo desta investigação foi realizar uma análise bibliométrica do Mestrado em Educação Matemática (TgMEM) aprovado na Universidade de Carabobo, no período de 2005-2014. Era parte de um

documentário bibliográfica e o corpus consistiu em resumos e referências de 133 TgMEM em que a produtividade foi determinada no tempo e de gênero, bem como outros indicadores conceituais e metodológicos de citação analisados maneira diacrônica. Entre as conclusões destacamos estudos como úteis na produção científica de certos casos, a fim de ter em conta a contribuição que deram seus pesquisadores, observando que nesse período foi dominado a produção do sexo feminino, a modalidade projeto viável e utilização paradigma positivista. O nível mais estudado foi o de Educação para a Mídia (General) e o tópico mais pesquisado foi Geometria. Ausubel é o teórico mais utilizado, seguido por Piaget, Vigosky, Bruner e Gagné, ressaltando também que Piaget é o autor de livros mais citado.
Palavras-chave: Bibliometria, Pesquisa Documental, Mestrado em Educação Matemática, Produção Científica

1. Introducción

Los estudios de Postgrado de Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo (UC, Valencia, Venezuela) fueron iniciados en el año 1974, con la figura de cursos acreditables para un Doctorado; pero, fue en 1975 cuando se formalizaron los estudios de Maestría, confiriendo el grado de Máster en Ciencias, Mención Educación (Páez, 2001), A consecuencia de diferentes evaluaciones, dicha Maestría sufrió varias transformaciones, ocurriendo una en el año 1981 de donde se derivó el Programa de Maestría en Educación con las menciones Planificación Curricular e Investigación Educativa.

En 1990 la mencionada Maestría fue reformada nuevamente, incorporando en su oferta las menciones: Orientación; Administración y Supervisión de la Educación; Enseñanza de las Ciencias Sociales; y Enseñanza de la Matemática, ésta se inició en 1991 y se reformuló en 1993. En 2001, surge un nuevo cambio y el Programa de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la UC pasó a ser denominado Maestría en Educación Matemática (MEM).

De acuerdo con Páez (2001), el propósito general de la MEM es la formación de profesionales capaces de identificar problemas educacionales e implementar, en su propio lugar de trabajo, las estrategias que influirán en modificaciones de prácticas educativas acordes con las necesidades de su área de influencia y teniendo en cuenta tendencias actuales en la EM. En cuanto a los objetivos específicos fueron asumidos los siguientes: la formación de profesionales que investiguen con sentido crítico y objetivo, de forma reflexiva y sistemática; el diseño de propuestas didácticas innovadoras, creativas y eficaces; la atención de los paradigmas existentes y emergentes; y la utilización de las TIC´s.

Las Líneas de Investigación (LI) que dan sustento a esta MEM son las siguientes: Enseñanza, Aprendizaje y Evaluación de la Educación Matemática; Formación del Docente en Educación Matemática; Historia y Epistemología en Educación Matemática; Tecnología de Información y Comunicación (TIC´s) en la Educación Matemática; Estructura Curricular en Educación Matemática; y Educación en Matemática, Sociedad y Cultura.

La pretensión del estudio que aquí se reporta es revisar y analizar la producción científica de a MEM en función de los TgMEM en ella aprobados.

2. Interrogantes y Objetivo

Las interrogantes relativas a los TgMEM orientadoras del estudio fueron: ¿Cuáles fueron las temáticas de estudio abordadas? ¿A cuáles contextos de estudio se refieren las investigaciones? ¿Cuáles son los referentes teóricos que predominan? ¿Cuál es la metódica más utilizada para guiar su producción: paradigma de investigación, modalidad, técnicas e instrumentos de recolección de datos?, ¿Cuáles son los autores de libros más citados? ¿Quiénes son los educadores matemáticos que han orientado esos TgMEM? ¿Cuáles fuentes utilizan estos investigadores en sus producciones?

A partir de estas interrogantes se formuló el siguiente

Objetivo General

Analizar algunos indicadores de los TgMEM aprobados en la Universidad de Carabobo, durante el período 2005-2014, a partir de un estudio bibliométrico que toma como referencia la productividad en el tiempo y por género, así como otros aspectos metodológicos, conceptuales y de citación.

3. Fundamentos Teóricos y Conceptuales del Estudio

Dado el carácter bibliométrico atribuido al estudio, resulta conveniente examinar cuestiones relacionadas con las denominadas Métricas de la Información (Lascurain, 2006).

3.1 Sobre la Bibliometría, la Cienciometría y otras métricas de la Información.

A nivel nacional e internacional existe un gran número de productos científicos que año tras año se va ampliando y para dar cuenta de su alcance, impacto, utilidad y pertinencia es necesario evaluarlos de muchas maneras. Por este motivo ha emergido una variedad de métodos aplicables para el estudio de esa literatura científica, tal es el caso de aquellos que permiten analizar, evaluar y proyectar la producción científica de determinadas instancias, unidades, instituciones, regiones o países, y así determinar patrones e indicadores, los cuales pueden obtenerse con apoyo de la Informetría (los sistemas y servicios de información), la Bibliometría (la organización y servicios bibliográficos), la Cienciometría (la organización de la ciencia), la Librometría (la organización de la biblioteca y sus servicios), la Webometría y otros estudios métricos de la información (Spinak, 1996).

Según Araújo y Arencibia (2002), las tres primeras disciplinas son consideradas como básicas en las ciencias de la información y funcionan como campos de investigación emergentes.

La Bibliometría estudia “los aspectos cuantitativos de la producción, diseminación y uso de la información registrada, a cuyo efecto desarrolla modelos y medidas matemáticas” (Araújo y Arencibia, 2002) y “la organización de los sectores científicos y tecnológicos a partir de las fuentes bibliográficas y patentes para identificar a los actores, a sus relaciones y tendencias" (Spinak,1996, p. 49)

La Bibliometría ha sido dividida en dos grandes áreas: (a) Descriptiva: "trata de aspectos puramente cuantitativos, como distribución geográfica, documental y temática" (Liniers, citado por Alfaro, 2014, p. 19); y (b) Evaluativa: "mide la actividad científica a través de indicadores bibliométricos producto del análisis estadístico de los datos cuantitativos para examinar la literatura científica en cuanto a tamaño" (Alfaro, 2014, p. 19).

Según las fuentes de sus datos, la Bibliometría se puede dividir en tres grandes categorías (Spinak, 1996, p. 34-35):

1. Bibliografías, servicios de indización y resúmenes, pudiendo incluir indicadores tales como autores, lugares de publicación, títulos y editoriales.
2. Citaciones, utilizando las referencias bibliográficas que se incluyen en los artículos o libros analizados (análisis de citaciones).
3. Directorios o catálogos colectivos de títulos de revistas.

En el presente estudio se hace hincapié en las dos primeras áreas que son valoradas desde el punto de vista estadístico que, a grandes rasgos, abarca la medición de la frecuencia del uso de términos o frases que están incluidas en los materiales impresos o digitalizados, la relación investigador/productividad, universidad/país/producción, las características de los referentes bibliográficos, autores citados, países e instituciones más productivas, grado de obsolescencia de un producto científico y el crecimiento o decrecimiento de la literatura científica (Jiménez, 2004).

3.2 Algunas investigaciones previas relacionadas

A continuación, se hace una breve revisión de algunos estudios previos que resultan relevantes para esta investigación. En primer lugar, serán considerados los realizados en el ámbito internacional.

3.2.1 Estudios Internacionales

Fiorentini (1993) analizó 12 Tesis Doctorales, 190 Trabajos de Maestría y 2 Trabajos de Docencia libre realizados en Brasil durante el lapso 1970-1990, encontrando que es poco frecuente que los investigadores en Educación Matemática en Brasil consulten a sus pares brasileros acerca de su tema o problema de investigación, algunos se justifican mencionando que esos trabajos no poseen el mismo marco teórico y que no se insertan en la misma línea de investigación.

Torralbo, Fernández-Cano, Rico, Maz y Gutiérrez (2003) examinaron la producción de Tesis Doctorales en Educación Matemática concluidas en universidades españolas desde 1976 hasta 1998. Revisaron 135 tesis donde se generó una visión general y sistemática de cómo se ha venido abordando la investigación de la Educación Matemática en España, tomando en cuenta aspectos conceptuales y cienciométricos.

3.2.1 Estudios Nacionales

Serres (2004), mediante una investigación no experimental histórica, con metodología documental, describió y analizó la producción de EM en Venezuela, durante el periodo 1961-2001. Las unidades de análisis que utilizó fueron los programas de posgrado en Educación Matemática, las publicaciones especializadas y los eventos donde se discutió este tipo de tema. Entre los resultados destaca que: (a) de los Trabajos Especiales de Grado (TEG) obtuvo, aproximadamente, el 80% de los resúmenes con relación al número de egresados; (b) sobre los eventos, identificó cuándo y dónde se llevaron a cabo la mayoría y describió el programa académico de los más importantes; (c) Los resúmenes de los TEG tienen condiciones similares en su forma y algunos elementos que los componen son modalidad de investigación (documental, investigación de campo, propuesta didáctica); y diseño (cuasi experimental, experimental, descriptivo, interpretativo, evaluativo, expost-facto, estudio de casos, etnográfico, investigación-acción, método clínico, proyecto factible); (d) Los Programas de Postgrado en Educación Matemática (PPEM) necesitan una profunda evaluación y reestructuración; (e) Las publicaciones, periódicas y no periódicas, representan una necesidad para esta comunidad científica, siendo escasas las dedicadas a EM; y (f) Los eventos sobre EM han contribuido poco a la consolidación del área, ya que son de carácter divulgativo y no suelen ser usados como espacios de discusión.

Pérez Justo y Martínez Padrón (2015) analizaron la producción científica en EM de la Revista Paradigma de la UPEL–Maracay. Encontraron que de los 69 artículos publicados durante el lapso 2011-2014, 19 cubrieron temas de EM, los cuales fueron analizados a partir de sus respectivos resúmenes, tomando en cuenta las siguientes categorías: “líneas de investigación, áreas temáticas, niveles educativos, modalidades, autores, referencias, productividad, género, procedencia de la autoría, tipo de autoría, fuentes consultadas, frecuencia de publicación, referencias según su idioma, productividad por países y tiempo de espera para publicar” (p. 421), destacando, entre sus resultados, que el área temática más estudiada fue la formación docente, el nivel educativo más abordado fue la Educación Universitaria y de las 508 referencias registradas, 78,15% (397) son de procedencia extranjera.

4. Método

Este estudio tuvo *carácter bibliométrico* ya que fueron aplicadas “estadísticas descriptivas, análisis multidimensional y representaciones gráficas [que] permite[n] medir el desarrollo de la ciencia” (Jiménez, 2004, p.2). Se enmarcó en un *diseño* de tipo documental bibliográfico. *Documental* porque se corresponde con “el estudio de problemas con el propósito de ampliar y profundizar el conocimiento de su naturaleza, con apoyo principalmente, en trabajos previos, información y datos divulgados por medios impresos, audiovisuales o electrónicos" (Pérez, 2006. p. 20) y *Bibliográfico* porque consistió en el análisis de material elaborado por otros autores de manera sistemática” (Ob. Cit. p. 26).

La principal *fuente de información* fueron los TgMEM aprobados en el periodo 2005-2014, el cual fue considerado como adecuado porque, de acuerdo con Bracho López (2010), un período de 10 años resulta adecuado para obtener resultados consistentes mientras que uno inferior a 3 años, por ejemplo, puede generar apreciaciones muy coyunturales.

Para localizar los TgMEM se realizó un arqueo bibliográfico en el Repositorio de la UC; en línea fueron localizados sólo 56. Por ello se efectuó un contraste con el listado de dicho Repositorio, verificándose que en total eran 135 casos; de éstos se pudo acceder a 133 (25 trabajos impresos y 108 en versión digitalizada; tanto la versión digital como la versión impresa de los otros dos no fue posible localizarla), de los cuales se extrajeron los correspondientes resúmenes y listados de referencias bibliográficas, con los que se constituyó el *Corpus de la investigación*.

La información sobre la identificación de cada uno de los 133 TgMEM localizados se consignó en Matrices de Registro de Datos considerando: año de la publicación, género del autor y nombre del tutor.

Además de cada TgMEM se registro información relativa a sus características: *Metodológicas:* (a) Línea de investigación; (b) Descriptores; (c) Paradigma utilizado y modalidad, y (d) Técnicas e instrumentos de recolección de datos; *Conceptuales*: (a) Procesos inherentes a la actividad Matemática; (b) Contexto investigado; (c) Temática abordada; y (d) Referentes teóricos de la investigación; y *De citación*: (a) Autores de libros citados; (b) Tipos de Referencias citadas: libros, artículos de revistas, tesis, trabajos de grado, trabajos de ascenso, actas/memorias, documentos en línea; (c) Revistas consultadas; (d) Instituciones consultadas; y (e) Referencias por país de procedencia.

Se establecieron cuatro (4) *Unidades de Análisis*, en la primera se muestra la productividad de los TgMEM, en la segunda se determinan varios indicadores relacionados con la metodología, en la tercera se informa sobre indicadores conceptuales y en la cuarta se presentan los indicadores que tienen que ver con la citación.

5. Resultados

5.1 Unidad de Análisis 1: Productividad

5.1.1 La Producción Investigativa de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Carabobo

Unidad de Análisis 1
Productividad

Cantidad de TgMEM por año

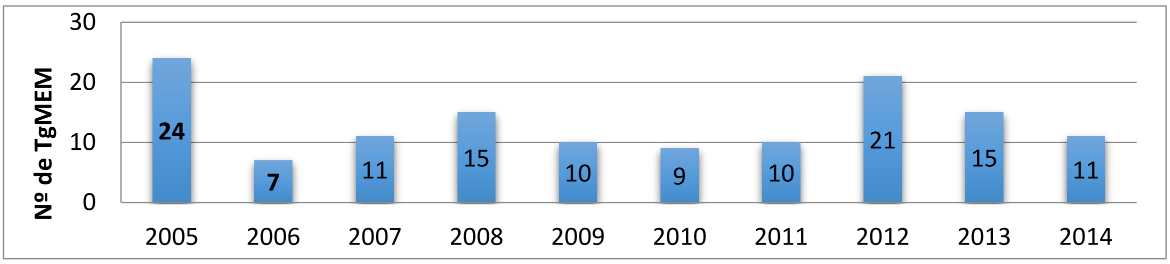
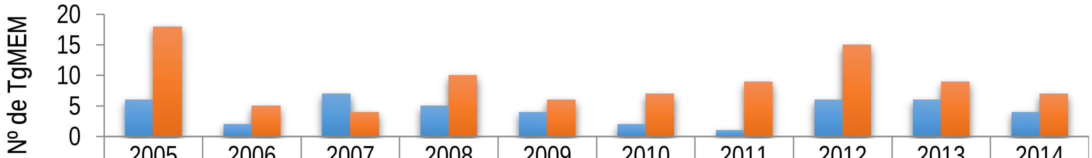


Tabla 1 Productividad diacrónica de los TgMEM

En la Tabla 1 se aprecia que en la MEM de la UC, la media anual fue de 13 TgMEM por año. Durante el período 2005-2014 la mayor producción se concentró en el año 2005, con 24 de los 133 aprobados, lo cual equivale a un 18,05% del corpus analizado. Le sigue, en ese orden, la producción del año 2012, con el 15,79% de los casos, superando en cada uno de esos dos años la media de la producción y haciendo un total del 33,84% de los casos, lo cual representa la tercera parte de la producción aprobada en esa década. El año con menos producción es 2006con apenas 7 casos (5,26%). Llama la atención que la producción del año 2005 al 2006 disminuye casi en un 71%, no teniéndose información para conocer las razones académicas o administrativas de esta drástica disminución.

5.1.2 Productividad por género de los investigadores



	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Masculino	6	2	7	5	4	2	1	6	6	4
Femenino	18	5	4	10	6	7	9	15	9	7

Tabla 2. Productividad por Género de los investigadores

En la Tabla 2 se puede apreciar que el género femenino predomina en 9 de los 10 años considerados, destacándose que el 67,66% de los autores son mujeres prácticamente duplicando a los hombres (32,34%).

5.1.3 Productividad por tutores

Tutor	Frecuencia	%		Tutor	Frecuencia	%
Próspero González	8	6,01		Omaira Naveda	4	3,00
Cirilo Orozco	8	6,01		Rosa Talavera	4	3,00
José López	6	4,51		Miguel Castillo	3	2,25
Aleida Montañéz	6	4,51		Néstor Martínez	3	2,25
José Tesorero	5	3,75		Oscar Pacheco	3	2,25
Zoraida Villegas	5	3,75		Félix Santamaría	3	2,25
Rafael Ascanio	4	3,00		Antonino Viviano	3	2,25
Samir El Hamra	4	3,00		Otros	1-2	45,21
Jesús Morales	4	3,00				

Tabla 3. Productividad por Tutor

Los tutores más productivos son aquellos que tienen 3 o más tutorías declaradas. Destacan los nombres de Próspero González y Cirilo Orozco Moret, con 8 TgMEM cada uno. El resto de los tutores, aunque tienen una trayectoria importante en lo que respecta a sus aportes académicos (autores de libros, ponentes, articulistas en EM), tienen 6 o menos tutorías.

5.2 Unidad de Análisis 2: Indicadores Metodológicos

5.2.1 Líneas de Investigación

Unidad de Análisis 2	**Líneas de investigación (LI)**
Indicadores Metodológicos	

PDEM	EPEM	EAEEM	TICEM	EMSC	ECEM	NE
• Pedagogía y Didáctica en la EM	• Epistemología e Historia de la EM.	• Enseñanza, Aprendizaje y Evaluación en EM.	• Tecnología de información y comunicación en EM	• Educación en Matemática, Sociedad y Cultura	• Estructura Curricular en EM	• No especificó

Tabla 4. Líneas de Investigación

Para identificar la Líneas de Investigación desarrolladas, se revisó el resumen de cada TgMEM aprobado. En la Tabla 4 aparecen identificadas dichas líneas con sus correspondientes siglas asignadas. Se declara que cuando esta información no fue escrita de manera explícita en el resumen, se asignó la categoría “No Especificó” (NE).

Año	Línea de Investigación						
	PDEM	EPEM	EAEEM	TICEM	EMSC	ECEM	NE
2005							24
2006							7
2007	1						10
2008							15
2009	2						8
2010	3						6
2011	2		2				6
2012	6	3	3	1			8
2013	4		6	2		1	2

2014		2	4	2	1		2
Total	18	5	15	5	1	1	88

Tabla 5. Líneas de investigación utilizadas por los investigadores para la producción de los TgMEM

En la Tabla 5 muestra la cantidad de TgMEM desarrollados en cada LI. En el período de interés se puede observar que hubo 88 TgMEM que no especificaron la LI seguida, lo cual representa un 66,16% de los casos. Aunque este es un requerimiento que debe aparecer explícito en cada trabajo desarrollado, no se tienen detalles de la razón por la cual no aparece explícita esta información en cada resumen presentado. En cuanto a la productividad, se tiene las LI declaradas que tuvieron más aceptación fueron las siguientes: PDEM que sustentó la actuación de 18 investigadores (13,53%) mientras 15 de los casos (11,28%) declaró haber trabajado con EAEEM.

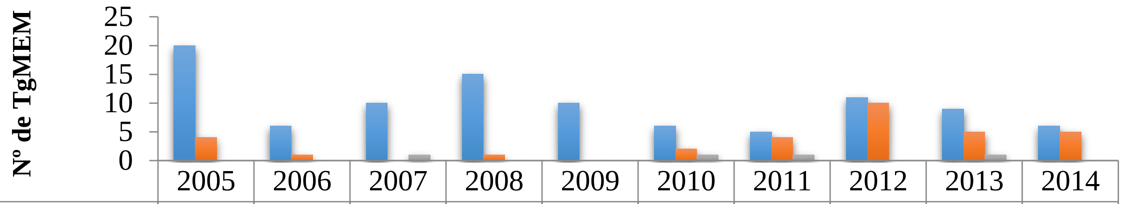
Descriptores	Frecuencia	%		Descriptores	Frecuencia	%
Aprendizaje	27	16,36		Estrategia	23	13,93
Aprendizaje significativo	5	3,03		Etnomatemática	4	2,42
Constructivismo	4	2,42		Evaluación	5	3,03
Competencia	5	3,03		Geometría	6	3,63
Creatividad	4	2,42		Obstáculos	4	2,42
Desempeño docente	5	3,03		Razonamiento	6	3,63
Didáctica	4	2,42		Resolución de problemas	14	8,48
Diseño instruccional	7	4,24		Semiótica	3	1,81
Educación Matemática	15	9,09		Software	4	2,42
Enseñanza	10	6,06		TIC	5	3,03
Error	5	3,03		Total	165	100

Tabla 6. Descriptores reportados por los investigadores

Los descriptores fueron tomados de cada resumen y, por lo general, su cantidad osciló entre 3 y 5 palabras. En la tabla 6 se incluyeron los que tienen frecuencia mayor que 3. Como 5 casos no especificaron sus descriptores, eç análisis se hizo en función de los 128 TgMEM restantes. El descriptor de mayor ocurrencia es Aprendizaje con 27 casos, lo cual equivale al 16,36% del total de descriptores. Le sigue, en orden descendente, Estrategia con 23 ocurrencias, lo cual equivale al 13,93% de los casos reportados. Le sigue Educación Matemática, aunque no tiene sentido considerar este descriptor porque todos los trabajos tienen que estar enmarcados en la EM.

Llama la atención que descriptores como constructivismo y las TIC estén entre los menos frecuentes, a sabiendas de la relevancia que tenían en ese momento histórico: el primero por sustentar, explícitamente, casi todas las propuestas curriculares de avanzada y el segundo por el impacto que ha causado en la educación en los últimos veinte años. Igual suerte tuvo la Etnomatemática, cuyas investigaciones son escasas en este contexto y en otros contextos educativos venezolanos, a pesar de ser pensada como una buena perspectiva sociocultural para abordar la EM

5.2.2 Paradigmas de Investigación



	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Positivista	20	6	10	15	10	6	5	11	9	6
Interpretativo	4	1	0	1	0	2	4	10	5	5
Socio Crítico	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0

Tabla 7. Paradigmas de la investigación (TgMEM período 2005-2014)

En la Tabla 7 se puede notar que el paradigma positivista fue el más seguido (73,68%). El socio crítico fue el menos asumido (3%). Ha de destacarse que sólo en los años 2011, 2012 y 2014, el paradigma positivista (cuantitativo) y el interpretativo (cualitativo) presentan cierta uniformidad en cuanto al número de usuarios que lo adoptaron. Una situación análoga ocurre en el año 2014 cuando el 55% de los TG aprobados fueron abordados desde el paradigma positivista y el 45% restante lo hizo desde el interpretativo. Tales valores hacen inferir que comienza a germinar una tendencia a desarrollar investigaciones desde lo interpretativo y que el uso del paradigma positivista está reduciéndose en los últimos años.

5.2.3 Modalidad de Investigación

	Modalidad						
	Investigación De Campo				Investigación Documental	Proyecto Factible	Otras
	Tipo						
Año	**Cuasi experimental**	**Descriptivo**	**Etnografía/ Fenomenológico**	**Subtotal**			
2005	6	1	2	9	2	13	
2006		1		1	1	5	
2007	2	1		3		7	1
2008	4	4		8		6	1
2009	4			4		6	
2010	1	2	1	4		3	2

2011	1	2	2	5	1	1	3
2012	1	5	6	12	3	6	
2013	4	4	5	13		1	1
2014	3	1	4	8		2	1
Subtotal	26	21	20	67	7	50	9

Tabla 8. Modalidad seguida por los investigadores

Para este análisis se tuvieron en cuenta las categorías planteadas en el Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales (UPEL, 2016), de acuerdo con las cuales las modalidades para la realización de Trabajos de Grado de maestría son las siguientes: (a) Investigación de Campo; (b) Investigación Documental; (c) Proyectos Factibles; y (d) Proyectos Especiales.

En la Tabla 8 se observa que la modalidad más usada es la Investigación de Campo (67 casos), luego está Proyectos Factibles (50 casos). En relación con las Investigaciones de Campo prevalecen, en orden descendente, la cuasi experimental (26 casos) incluyendo aquí los de nivel correlacional y transeccional, el descriptivo (21 casos) y estudios que agrupan los de carácter etnográfico o los fenomenológicos (20 casos). En el renglón otros, están incluidos trabajos enmarcados en la investigación acción participativa, mixto y ex post facto. Se observa que si a la modalidad Proyecto Factible (37,59%), se adiciona la modalidad Cuasi Experimental y Descriptivo, se obtiene un total de 72,91% de preferencia por estas modalidades; estos datos corroboran lo explicado en el gráfico 6 donde la mayor incidencia la tiene el paradigma positivista.

5.2.4 Instrumentos y técnicas de recolección utilizados en el desarrollo de los TgMEM

	Instrumentos				Técnicas de recolección				
Año	POSS	ETL	POD	PE	ESE	EP	RB	OP	NC
2005	4	8	2	5	2		1	1	
2006	1	4	1				1	1	
2007	4	5	4	1	1			1	1
2008	4	8	3	5					
2009	4	5	1	4					
2010	2	4		2	1			2	1
2011		5		2	1	3		4	2
2012	3	4	2	3		5	3	5	4
2013	4	3	1	3	3	1		3	1

2014	4	3		2	2	2		4	1
Total	30	49	14	27	10	11	4	21	10

POSS: Prueba objetiva selección simple	**PE**: Prueba de ensayo	**RB**: Revisión bibliográfica
ETL: Encuesta tipo Likert	**ESE**: Entrevista semi estructurada	**OP**: Observación Participante
POD: Prueba objetiva dicotómica	**EP**: Entrevista en profundidad	**NC**: Notas de campo

Tabla 9. Instrumentos y técnicas de recolección utilizados en el desarrollo de los TgMEM

En la Tabla 9 se aprecia que el instrumento reportado con mayor uso fue la Encuesta tipo Likert con un 40,83% de los casos.

5.3 Unidad de Análisis 3: Indicadores Conceptuales

5.3.1 Procesos inherentes a la actividad matemática

Unidad de Análisis 3 ***Indicadores Conceptuales***	**Procesos inherentes a la actividad matemática**

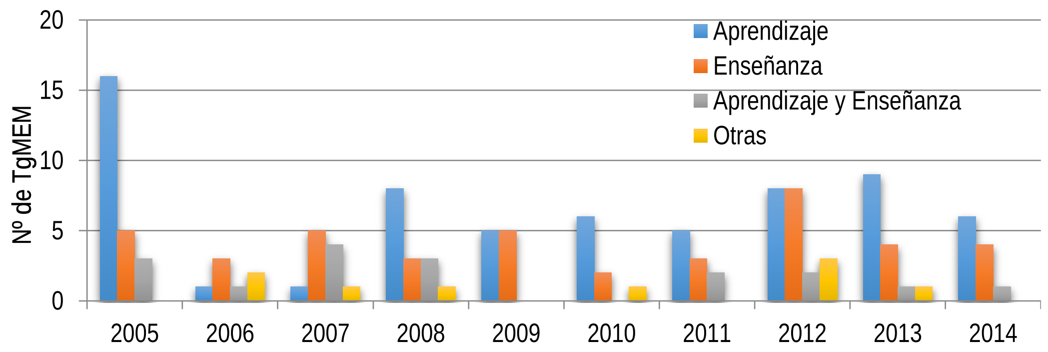


Tabla 10. Procesos inherentes a la actividad matemática

En la Tabla 10 se muestra la cantidad de casos que se corresponden con los diferentes procesos asociados con la actividad matemática reportada en el desarrollo de cada TgMEM. Como puede observarse, los procesos más recurrentes fueron en este orden: aprendizaje, enseñanza, y aprendizaje-enseñanza de la Matemática aunque, por su esencia, el último proceso contiene a los dos primeros y todos estos casos tienen que ver, como ha de esperarse, con Didáctica de la Matemática. Como el aprendizaje de la Matemática fue el proceso más investigado, eso puede indicar que los investigadores lo perciben como el más frágil de toda actividad matemática. Se declara que dentro del renglón otras se tienen el estudio de la evaluación de docentes, análisis de currículo y estudio de competencias.

5.3.2 Contextos Investigados

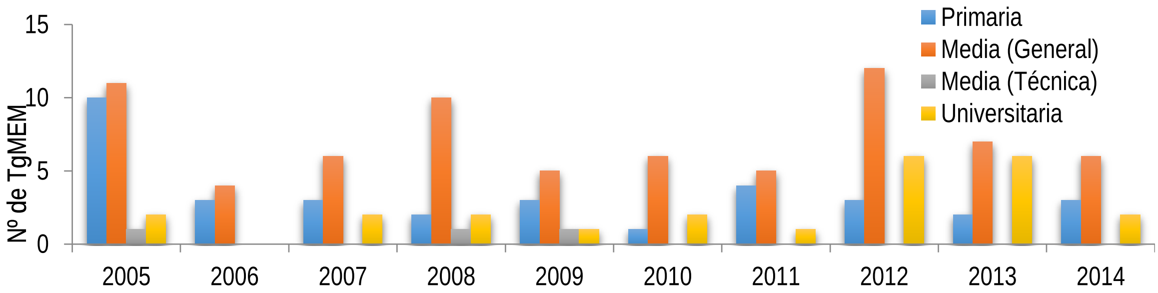


Tabla 11. Contexto estudiado por los investigadores

Como puede observarse en la Tabla 11, el nivel más estudiado fue el de Educación Media (General) que durante el lapso estudiado comprende desde 1º año hasta 5º año de bachillerato (5 años de estudio) y abarca el 54,13% de los casos. Por otro lado, apenas en los años 2012 y 2013 fue cuando los trabajos realizados en el contexto universitario obtuvieron un ligero repunte que luego volvió a decaer al año siguiente. Aunque casi la cuarta parte de las investigaciones se hicieron en Educación Primaria (6 años de estudio), llama la atención que las mismas no hayan sido realizadas en un mayor porcentaje de casos debido a que existe una grave problemática de aprendizaje matemático, sobre todo porque es el nivel donde los maestros que enseñan contenidos matemáticos casi nunca son docentes de Matemática sino Maestros Generalista (Docentes Integradores) que aunque tienen formación universitaria atienden no sólo esta área del saber sino todas las otras áreas de formación en cualquiera de los grados que conforman la Educación Primaria.

5.3.3 Temática abordada en las investigaciones

Año	Temática					
	Álgebra	**Aritmética**	**Geometría**	**Cálculo**	**Estadística/ Probabilidad**	**Otros**
2005	3	1	7	6	1	6
2006	1	3	3			
2007	3	3	3	1	1	
2008	3	2	1	1		8
2009		5	3		1	1
2010	2	2	4	1		
2011	3	2	4			1
2012	6	6	3	2	2	2
2013	5		3		1	6
2014	1		5	1		4
Total	27	24	36	12	6	28

Tabla 12. Temática abordada en las investigaciones

En la Tabla 12 se aprecia que la Geometría es la temática más investigada, cubriendo el 27,06% de los casos. Excluyendo el caso Otros, le sigue el Álgebra, la Aritmética, el Cálculo y la Estadística y la Probabilidad, como áreas investigadas en EM. Vale destacar que en el renglón Otros, aparecen temáticas como las siguientes: desarrollo de las habilidades del pensamiento, lógica matemática, electricidad y magnetismo, actitud del docente, formación matemática, currículo, competencias matemáticas, Etnomatemática, lúdica como estrategia, metacognición, creencias del docente, historia de la matemática y cinemática, acumulando este rubro un porcentaje inferior al correspondiente a las investigaciones relacionadas con la Geometría, pero superior a todos los demás.

5.3.4 Teóricos declarados por los investigadores

Autor	Frecuencia	%		Autor	Frecuencia	%
Ausubel, David	49	15,50		Polya, George	5	1,58
Piaget, Jean	38	12,02		Gardner, Howard	5	1,58
Vygotsky, Lev	33	10,44		Tobón, Sergio	4	1,26
Bruner, Jerome	14	4,43		Popper, Karl	3	0,94
Gagné, Robert	12	3,79		Papert, Seymour	3	0,94
Brousseau, Guy	10	3,16		Novak, Joseph	3	0,94
Godino y Batanero	9	2,84		Morín, Edgar	3	0,94
Skinner, Burrhus	8	2,53		Radazt, Hendrik	3	0,94
Van Hiele, Pierre	8	2,53		Otros	1-2	31,32
Chevallard, Yves	7	2,21				

Tabla 13. Teóricos declarados por los investigadores

En relación con los teóricos declarados por los investigadores como sustento de su TgMEM, la Tabla 13 muestra que Ausubel fue el más utilizado (15,50%), seguido de Piaget con un 12,02%. Los cuatro siguientes, en orden descendente, son: Vigosky (10,44%), Bruner (4,43%), Gagné (3,79%) y Brousseau (3,16%) Esta información dice mucho de la utilidad de estos autores para el grupo de egresados de la MEM de UC, en el lapso referenciado.

Cabe destacar que tanto Ausubel como Piaget, Vigosky, Bruner y Gagné han sido y siguen siendo preponderantes como teóricos para la comunidad científica por el hecho de haber puesto en escena importantes y robustos referentes que tienen que ver con las teorías cognitivas que son propias de la educación y han sido muy útiles para los educadores matemáticos. Si se agrega a Skinner, este sexteto conforma el 52,50% de los más utilizados. Sin embargo, llama la atención que existen teorías propias de la EM que son poco adoptadas, entre otras las de Brousseau, Godino y

Batanero, Van Hiele, Chevallard y Polya que apenas alcanzan un 12,32% de los casos.

5.4 Unidad de Análisis 4: Indicadores de Citación

5.4.1 Autores de libros más citados

Para cerrar este proceso de análisis, se sigue lo que corresponde a los indicadores de citación, lo cual cubre los aspectos arriba señalados, incluyendo entre los tipos de referencia lo que tiene que ver con libros, artículos de revistas, tesis, trabajos de grado de maestría, trabajos de ascenso; revistas consultadas, instituciones y países consultados.

Autor(es)	f		Autor(es)	f
Piaget, Jean	97		Morín, Edgar	15
Hernández, Roberto; Fernández, Carlos y Baptista, Pilar	85		Goetz, Judith y Le Compte, Margaret	15
Ausubel, David	54		Duval, Raymond	14
González, Fredy	53		Hurtado, Iván y Toro, Josefina	14
Vygotsky, Lev	44		Godino, Juan	13
Martínez, Miguel	41		D'Amore, Bruno	12
Ruiz Bolívar, Carlos	36		Cabero, Julio	12
Arias, Fidias	35		Tobón, Sergio	11
Orozco, Cirilo; Labrador, María y Palencia, Aleida	35		Resnik, Lauren	11
Balestrini, Miriam	33		Muñoz, Carlos	11
Bisquerra, Rafael	27		Boyer, Carl	10
Brousseau, Guy	27		Gagné, Robert	10
Bruner, Jerome	26		Gardner, Howard	10
Tamayo y Tamayo, Mario	26		Polya, George	9
Coll, César	25		Delval, Juan	8
Mora, David	23		Schoenfeld, Alan	8
Ary, Donald; Jacobs, Lucy y Razavieh, Asghar	22		Kilpatrick, Jeremy	8
De Guzmán, Miguel	21		Ferrero, Luis	7
Díaz, Frida y Hernández, Gerardo	21		Novak, Joseph	7
Hurtado D' Barrera, Jackeline	20		Morles, Víctor	7
Rico, Luis	19		Woolfolk, Anita	6

Chevallard, Yves	16		Bedoya, José	6
Palella, Santa y Martin,s Feliberto	16			

Tabla 14. Autores de libros más citados

Para hacer referencia a los autores de los libros más citados por los investigadores para la construcción de su TgMEM, se juntaron todas las referencias reportadas por todos los casos y se construyó la Tabla 14 donde sólo se mencionan aquellos que aparecen 6 o más veces, bien porque sirvieron de sustento para hacer alguna cita textual o para hacer algún parafraseo. Se puede observar que el autor de libros más citado fue Piaget que apareció 97 veces en las referencias. Le sigue el trío formado por Hernández, Fernández y Baptista con 85 apariciones y luego está Ausubel con 54 apariciones. Al primero y al último de los mencionados, junto con Vygotsky que aparece en quinto lugar, con 44 casos, se les reconoce como pioneros en el trabajo con elementos psicológicos y cognitivos del área educativa. Pero antes, en el puesto 4, aparece Fredy González docente de la UPEL quien es autor de varios libros en EM, lo cual genera satisfacción a la comunidad científica venezolana. El sexto lugar está ocupado por Miguel Martínez Miguelez, experto en investigación y docente de otra prestigiosa Universidad venezolana. Otros venezolanos aparecen en los lugares siguientes: Ruiz Bolívar y Arias, también expertos en el área de investigación. Posteriormente están Orozco, Labrador y Palencia, todos venezolanos y escritores de un Manual Teórico Práctico de Metodología para Tesistas, Asesores, Tutores y Jurados de Trabajos de Investigación y Ascenso. Por supuesto que hay otro grupo de investigadores nacionales e internacionales que aparecen citados varias veces, entre ellos destaca el venezolano David Mora, quien también ha contribuido de manera importante a la EM en Venezuela y otros países latinoamericanos.

5.4.2 Tipo de referencias consultadas

Año	Referentes						
	Libros	Artículos de revistas	Tesis	Trabajos de grado	Trabajos de ascenso	Actas/ Memorias	Documentos en línea
2005	573	66		91		35	54
2006	196	19	5	19	1	10	48
2007	260	38	1	35		3	16
2008	359	41	4	76	1	6	87
2009	222	14		29	2	2	75
2010	79	10	6	48	1	10	63
2011	240	19		31			101
2012	532	44	12	90	1	10	220

2013	267	34	3	52	5	7	200
2014	348	16	9	42	5	3	178
f	3076	301	40	513	16	86	1042
%	60,62	5,9	0,78	10,11	0,31	1,69	20,53

Tabla 15. Tipo de Referencias Consultadas

Se juntaron las referencias de todos los casos y con esos datos se construyó la Tabla 15. Se observa que la cantidad de referencias tomadas de libros fue de un 60,62%, le siguen los documentos en línea, que tienen una frecuencia de 1042 que equivale a un 20,53%, distribuidos de la siguiente manera (347 libros, 193 artículos, 13 diccionarios, 20 Tesis doctorales, 117 Trabajos de grado, 2 Trabajos de ascenso, 20 Actas/memorias, 295 Documentos oficiales y 25 periódicos) todos los anteriores son referentes consultados en línea, se puede observar que los libros siguen teniendo una ocurrencia importante. Además se aprecia la consulta de Documentos oficiales que por lo general se encuentran en las páginas Web de cada institución consultada, como por ejemplo: UNESCO, ONU, OEI, PISA entre otros. Requiere especial atención la poca consulta que le dieron al resto de las opciones, sobre todo a los trabajos de investigación que en EM fueron escritos a través de Tesis, Trabajos de Grado, de Ascenso o artículos, sobre todo porque se supone que esta opción representa el quehacer investigativo de sus pares inmediatos. Si se toma en cuenta el porcentaje de citación, apenas el 0,78% de las consultas fueron realizadas en Tesis Doctorales, mientras que el 0,31% en Trabajos de Ascenso, teniendo mejor suerte los Trabajos de Grado en un 10,11%.

5.4.3 Revistas consultadas

Revista	f		Revista	f
Candidus (Venezuela)	32		Iberoamericana de Educación	6
Paradigma (UPEL- Venezuela)	25		Suma (España)	6
Educación Matemática (México)	23		RELIME (México)	4
Educere (ULA- Venezuela)	19		Acta Latinoamericana de matemática educativa (México)	4
Recherches en Didactique des Mathématiques (Francia)	16		Revista de Pedagogía (UCV- Venezuela)	4
Enseñanza de las Ciencias (España)	11		Revista de Educación (Venezuela)	4
Ciencias de la Educación (UC Venezuela)	9		Iberoamericana de Educación	6

Tabla 16. Revistas Consultadas

De acuerdo con lo que se muestra en la Tabla 16, la revista más consultada por los investigadores egresados de MEM de la UC fue Candidus, revista producida por el Centro de Recursos de Información Educativa, del estado Carabobo, Venezuela, la cual fue reportada en 32 oportunidades, a pesar de que su uso se limitó al sub-período 2005-2009. Le siguen, en ese orden descendente, la revista venezolana Paradigma (de la UPEL) y la revista mexicana Educación Matemática, siendo reportadas, respectivamente, 25 veces y 23 veces. A continuación, la revista venezolana: Educere (de la ULA) con 19 apariciones.

5.4.4 Instituciones consultadas por los investigadores

Institución	f		Institución	f
UC	296		SINEA	32
UPEL	218		PISA	28
Ministerio de Educación	104		OEI	21
CENAMEC	68		LUZ	20
UCV	64		ASOVEMAT	13
UNESCO	50		UNA	12
ULA	48		TIMMS	11
Ministerio de Educación Cultura y Deportes	32			

Tabla 17. Instituciones consultadas por los investigadores

En la Tabla 17 se aprecia que la institución más consultada, en el lapso 2005-2014, fue la propia Universidad de Carabobo, lo que quizás se deba al hecho de que el Programa de Postgrado analizado se desarrolla en esta Universidad. En segundo lugar, está la UPEL, institución encargada de la formación de pedagogos en distintas aéreas del conocimiento y en todo el territorio nacional, teniendo estudios de pregrado y postgrado (Maestría y Doctorado) en Educación Matemática. El Ministerio de Educación, en sus distintas instancias, ocupó el tercer lugar entre las instituciones más referenciadas por estos investigadores, seguida por el Centro Nacional para el Mejoramiento y Enseñanza de las Ciencias (CENAMEC) que ocupó el quinto lugar. En lo que respecta a las instituciones extranjeras, la mayor ocurrencia fue ocupada por la UNESCO y el *Programme for International Student Assessment* (PISA) con 28 referencias. Resulta notorio que la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT) aparezca poco referenciada y eso quizás se deba a que dicha instancia ha descuidado sus publicaciones, teniendo vigente sólo la publicación de la Memoria del Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM), que actualmente se publica cada 3 años.

5.4.5 Referencias discriminadas por países consultados

País	f	%	- -	País	f	Porcentaje
Venezuela	1925	37,93	- -	Francia	50	0,98
España	1143	22,52	- -	Cuba	31	0,61

México	672	13,24	- -	Brasil	30	0,59
Argentina	195	3,84	- -	Costa Rica	12	0,23
Colombia	175	3,44	- -	No especificó	541	10,66
USA	165	3,25	- -	Otros	76	1,49
Chile	59	1,16	- -			

Tabla 18. Referencias discriminadas por países consultados

En la Tabla 18 se distribuyen por países las 5074 referencias que formaron parte de las fuentes consultadas por este grupo de investigadores. El país de donde proviene la mayoría de las fuentes consultadas es Venezuela, teniendo el 37,93% de preferencia. Le siguen España (22,52%) y México (13,24%). Llama la atención la existencia de un 10,66% de las referencias que no especifican su origen, es decir, no se informan sobre el país donde se produjeron estas fuentes.

6. Conclusiones

El Programa de Postgrado de MEM de la UC produjo, en el período 2005-2014, 135 TgMEM, con una media de 13 por año, en gran parte producidos por sexo femenino (67,66%).

Las temáticas más abordadas por los investigadores fueron, en este orden: Aprendizaje, Estrategia y Educación Matemática, mientras que entre las modalidades con mayor ocurrencia destacan los proyectos factibles, la cuasi experimental y la descriptiva, representando en conjunto el 72,91% de los casos, en correspondencia con el paradigma positivista que tuvo un 73,68% de aceptación en casi todos los años, aunque entre los años 2012-2014 disminuyó su tendencia y se observó cierto equilibrio entre éste y el interpretativo, en cuanto al número de usuarios que lo siguieron.

Por otro lado, el estudio revela que el proceso más investigado es el aprendizaje de la Matemática, con un 48,87% de ocurrencia, lo cual es un indicio para decir que los investigadores en EM se preocupan por solucionar este tipo de problemas. También se evidenció que las producciones registradas en los TgMEM muestran una tendencia marcada en investigar sobre la Geometría, seguido de Álgebra y Aritmética como entidades matemáticas. Aunque la Geometría es la temática más investigada, llama la atención que cuando se revisan los referentes teóricos, la mayoría usa teorías cognitivistas, constructivistas y conductistas propias de la psicología educativa (52,50% de los casos), en vez de, por ejemplo, usar la teoría de Van Hiele que es un teórico propio de la Geometría: apenas alcanza un 2,53% como referente teórico.

La lista de autores de libros más citados está encabezada por Piaget con 97 citas. En vista de que Piaget fue el autor más citado por este grupo de investigadores, así como uno de los teóricos más referenciados, puede decirse, entonces, que representó un buen referente para esta comunidad. A nivel nacional, el autor más citado en Educación Matemática fue el venezolano Dr. Fredy González, con una ocurrencia de 53 casos. Aunque por la naturaleza de la Maestría, se supone que los libros más citados deberían ser sobre EM, esto no ocurre así ya que esa condición la tienen los libros de metodología de la investigación, seguidos de libros sobre psicología educativa. Una de las razones de no usar textos escritos sobre EM podría deberse a su escasez a nivel nacional, realidad que arropa a las instituciones universitarias del país.

Respecto a los referentes bibliográficos, los libros constituyen el 60,62% de esos referentes, lo cual es un indicador positivo que revela que los investigadores tienden a utilizar fuentes primarias para la elaboración de sus TgMEM. En un porcentaje menor, los documentos en línea están jugando un papel vital, sobre todo entre los años 2012-2014, observándose que esto ocurre cuando utilizan referentes de EM escritos por autores tales como Godino, Batanero, Brousseau, Kilpatrick y Chevallard, además, de documentos oficiales de instituciones como: UNESCO, ONU, PISA, TIMMS. En lo que respecta a las Tesis y Trabajos de Grado, se observa que esta conjunción de referencias casi duplica la consulta de los artículos publicados en revistas.

Finalmente, destaca que entre las revistas más consultadas por los investigadores egresados de la MEM aparecen dos venezolanas: Candidus y Paradigma. Le siguen la revista mexicana Educación Matemática y la venezolana llamada Educere. Llama la atención que todas esas revistas venezolanas son multidisciplinaria y regularmente incluyen trabajos relativos a la EM.

7. Referencias

Alfaro, E. (2014). *El trimestre económico: desde una perspectiva bibliométrica.* Trabajo grado para obtener el título de Licenciado en Biblioteconomía. México, D.F.

Allais, M. (1997). La formación científica (Documento en línea). *Criterio Digital*, Número: 2205. Disponible: http://www.revistacriterio.com.ar/bloginst_new/1997/10/24/la-forma cion-cientifica/.

Araújo Ruiz, J y Arencibia Jorge, R, (2002). Informetría, bibliometría y cienciometría: aspectos teórico-prácticos*. Revista ACIMED, Revista Cubana de los Profesionales de la Información y la Comunicación en Salud*, 10(4), Disponible http://www.bvs.sld.cu/revistas/aci/vol10_4_02/aci040402.htm.

Bracho López, R. (2010). *Visibilidad de la investigación en Educación Matemática en España. Análisis cienciométrico, conceptual y metodológico de la producción de artículos científicos (1999-2008).* Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba, Disponible en: http://www.tesisenred.net/handle/10803/14959.

Fiorentini, D (1993). Memoria e analize da pesquisa académica em educaçao matemática no Brasil: banco de de teses do CEMPEM/FE-UNICAMP. *Revista Zatetiké*, 1(1), pp, 55-76.

González, F. (1995). La investigación en Educación Matemática: una revisión interesada. En F. E. González. *La investigación en Educación Matemática*. Maracay: Ediciones COPIHER, Cap. 14, (pp. 1-42).

Jiménez, E (2004). Análisis Bibliométrico de tesis de pregrado de estudiantes venezolanos en el área educación: 1990-1999. *Revista Iberoamericana de Educación*,

Lascurain, María Luisa. (2006). Modelo teórico para el estudio métrico de la información documental. *Investigación bibliotecológica, 20*(40), 205-208. Recuperado en 15 de abril de 2018, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0187-358X2006000100010&lng=es&tlng=es.

Ley Orgánica de Educación (2009). En Gaceta oficial Nº 5.929 de la República Bolivariana de Venezuela. Caracas.

Martínez Padrón, O. (2016). Aspectos retrospectivos e introspectivos de una experiencia de capacitación en Etnomatemática. *Journal of Mathematics and Culture*, 10(3), pp. 83-100..

Páez, H (2001). Los programas de postgrado de la Facultad de Ciencias de la Educación; presencia y proyección UCISTA ante la comunidad profesional venezolana. *Revista Ciencias de la Educación, 1*(18), pp. 111-128.

Pérez, A. (2006). *Guía Metodológica para Anteproyectos de Investigación.* Caracas, Venezuela: FEDUPEL.

Pérez Justo, Y. y Martínez Padrón, O. (2015). Producción científica en Educación Matemática en la Revista Paradigma. Período: 2011-2014. *Memorias de VIII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VII Jornada de Investigación en Educación Matemática*, UPEL Maracay.

Reglamento de los Estudios de Postgrado de la Universidad de Carabobo, Universidad de Carabobo, Consejo Universitario (2006, septiembre 25). Número Extraordinario/Tercer Trimestre 2006/CU Ordinario 18-08-2006/ Gaceta Extraordinaria 25-09-2006.

Serres, Y. (2004). Una visión de la comunidad venezolana de Educación Matemática, Revista *Relime* 7(1), pp. 79-108.

Spinak, E. (1996). *Diccionario Enciclopédico de Bibliometría, Cienciometría e Informetría*. UNESCO CII/II.

Torralbo, M; Fernández-Cano, A; Rico, L; Maz, A y Gutiérrez, M Del Pilar (2003). Tesis doctorales españolas en Educación Matemática. Revista *Enseñanza de las Ciencias*, 21(2), pp. 295-305.

Ugas, G. (2007). *Epistemología de la Educación y la Pedagogía*. Ediciones del Taller Permanente de Estudios Epistemológicos en Ciencias Sociales. Táchira, Venezuela.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Vicerrectorado de Investigación y Postgrado (2016). *Manual de trabajos de grado de especialización y maestría y tesis doctorales*. Caracas: FEDEUPEL.

Primer autor: Pacheco Moros Vanesa. Licenciada en Educación Matemática, Magíster en Educación Matemática, Doctoranda en Educación Matemática. Jefa de la Cátedra de Ciencias exactas, adscrita al Departamento de Ciencias Pedagógicas de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo. Ponente/Participante en eventos regionales, nacionales e internacionales. vanepache74@gmail.com

Segundo autor: Oswaldo Jesús Martínez-Padrón. https://orcid.org/0000-0002-4142-8092. Profesor de Matemática con Maestría en Educación Superior: Mención Matemática. Doctor en Educación con Estudios Postdoctorales en Investigación Educativa. Miembro del Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM) y del Centro de Investigación para la Participación Crítica (CIPaC). Coordinador de la Red Latinoamericana de Etnomatemática, Capítulo Venezuela. ommadail@gmail.com; ommadail1@gmail.com

Tercer Autor: González, Fredy Enrique. Profesor Visitante de la Universidad Federal de Rio Grande do Norte: Doctor en Educación, con énfasis en Matemática Educativa (Universidad de Carabobo, Venezuela, 1997); Master en Matemática, Mención Docencia (Universidad de Carabobo, Venezuela, 1994); y Profesor de Matemática y Contabilidad (Instituto Pedagógico de Caracas, 1974); se desempeñó como formador de profesores de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL, Núcleo Maracay, Estado Aragua, Venezuela). Coordinador Fundador del Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM); además coordina el Proyecto de Reconstrucción Histórica de la Educación Matemática en Venezuela; fredygonzalezdem@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

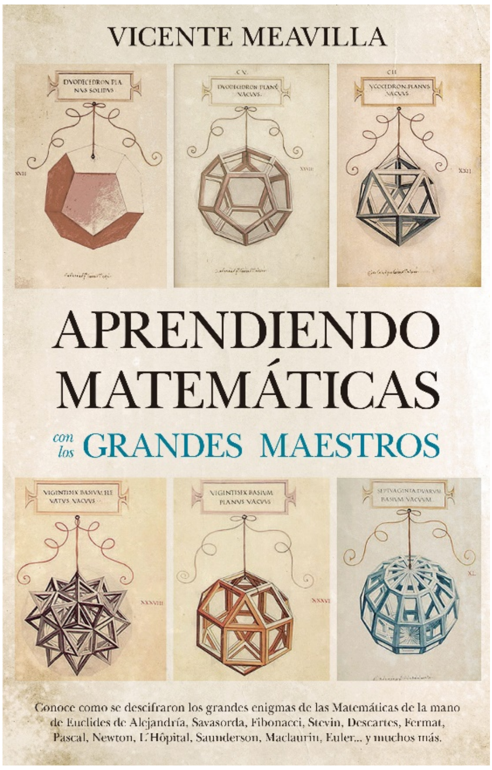
ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 181-182

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

RESEÑA: Aprendiendo Matemáticas con los Grandes Maestros

Israel García Alonso

Los Grandes Maestros siempre permanecen vivos



Todos los profesores de Matemáticas recordamos a ese Gran Maestro que, en nuestra escolarización, sus enseñanzas nos hicieron viajar a un mundo del que no hemos querido salir: el mundo de la matemática. Vicente Meavilla nos acerca a esos Grandes Maestros de la Matemática. Son diferentes autores que con su pensamiento dieron un impulso decisivo en el pensamiento matemático.

Esta obra tiene dos elementos a destacar para que sea recomendable. Por un lado, cuenta con imágenes e ideas manuscritas, que nos presenta demostraciones y resultados que siguen el razonamiento existente en la época. A través de estos documentos podemos estudiar, no sólo el resultado matemático, sino las dificultades y limitaciones que el conocimiento matemático poseía en cada momento. Y, por otro lado, ofrece ideas para desarrollar en el aula. Estas ideas ofrecen la posibilidad de acercarnos a la historia de las matemáticas de mano de estos Grandes Maestros.

El viaje se inicia con Euclides, en el año 300 a. C. y, al menos esta edición, finaliza con Rouché a principios del siglo XX. A lo largo de una veintena de lecciones hace un recorrido por la historia de la matemática y del pensamiento de estos matemáticos.

Entre los matemáticos del libro cabe nombrar una Gran Maestra: Dª María Gaetana Agnesi, italiana del siglo XVIII, que a lo largo de su vida escribió una recopilación matemática para su enseñanza formada por dos tomos. Esta recopilación trataba sobre álgebra, geometría analítica, trigonometría, cálculo y ecuaciones diferenciales. Se detendrá en la curva denominada *la Versiera* que ya había estudiado previamente Fermat en 1666.

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 181-182

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Es, por tanto, un libro con el que redescubrir, de la mano de Grandes Maestros de la Matemática, el triángulo de Pascal, las primeras y últimas razones de Newton, la regla de “Cramer”, progresiones aritméticas de mano de Euler, las rectas en el plano de José Mariano Vallejo, … y otros Grandes Maestros.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 183-189

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Situaciones, problemas y "problemas inversos"

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Jessica tiene dos láminas rectangulares de cartulina, cuyas dimensiones son 80 cm por 60 cm y 60 cm por 40 cm. Ella ha creado un problema construyendo figuras planas (no necesariamente convexas) uniendo ambas láminas. Daniel ha visto que Jessica ha obtenido la función f dada por $f(x) = 480 - 2x$. ¿Qué puede expresar esta función en la figura que construyó Jessica? ¿Cuál podría ser el problema?

Este problema surgió en un taller con profesores de matemática en ejercicio, sobre creación de problemas por *elaboración*; es decir, a partir de situaciones reales o configuradas. La elaboración del problema era completamente libre, sin pensar aún en qué grado se podría usar. Una de las situaciones fue:

> "Se dispone de dos láminas rectangulares de cartulina, cuyas dimensiones, en centímetros, son 80 por 60 y 60 por 40."

Es muy importante que los profesores e investigadores identifiquemos situaciones reales, o las configuremos adecuadamente, para que sean puntos de partida para la identificación, creación y resolución de problemas de matemáticas. Una vez creado un problema, en una clase-taller o en una investigación, el profesor o investigador tiene algunas tareas importantes: comprender la idea fundamental pretendida en el problema, examinar su consistencia matemática, resolverlo, examinar su potencial didáctico-matemático, afinar la redacción, y crear nuevos problemas a partir de él.

En la creación de nuevos problemas, juega papel importante la idea de crear "*problemas inversos*", que básicamente son los que se formulan, *grosso modo,* intercambiando el requerimiento y la información del problema inicial. Ciertamente, debe tenerse en cuenta la estructura del problema inicialmente creado, y las soluciones de este. Por ejemplo, si en un problema el requerimiento es encontrar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas, teniendo como información las ecuaciones de las rectas, entonces un problema inverso puede ser que, teniendo como información las coordenadas de un punto del plano, el requerimiento sea encontrar ecuaciones de dos rectas cuya intersección es ese punto. Así, se usa el requerimiento obtenido del problema inicial como base para obtener información para el nuevo problema, parecida a la del problema inicial; y se usa la información del problema inicial para construir el requerimiento del nuevo problema. Eventualmente, pueden hacerse modificaciones al contexto y ampliaciones al entorno matemático.

Ante la situación dada, y trabajando en grupos formados por parejas de participantes, surgieron problemas como los siguientes:

Problema 1.

> *Se dispone de dos láminas rectangulares de cartulina, cuyas dimensiones, en centímetros, son 80 por 60 y 60 por 40.*
> *¿Cuál es el menor número de cortes que es necesario hacer para obtener tres láminas rectangulares que tengan la misma área?*

Problema 2.

> *Usando dos láminas rectangulares, una de 80 cm por 60 cm y otra de 60 cm por 40 cm, se debe construir tarjetas cuadradas del mismo tamaño y que tengan la mayor área posible, sin desperdiciar material. ¿Cuántas de tales tarjetas se pueden construir?*

Problema 3.

> *Calcular el volumen del cilindro circular recto que se puede construir usando dos láminas rectangulares, una de 80 cm por 60 cm y otra de 60 cm por 40 cm*

Problema 4.

> *Se dispone de dos láminas rectangulares de cartulina, cuyas dimensiones, en centímetros, son 80 por 60 y 60 por 40.*
> *Calcular los perímetros de las figuras planas que se pueden construir pegando un lado completo de una de las láminas a un lado de la otra lámina.*

Al socializar el Problema 1, creado por una pareja, otras parejas lo encontraron muy "sencillo". Como la lámina de 80cm por 60cm es el doble de la lámina pequeña, basta hacer un corte en la lámina grande, paralelo al lado más pequeño y a 40 cm de este. Así se obtienen tres láminas rectangulares de 60 cm por 40 cm. Entonces sugerí que pensaran en modificar el problema, tratando de construir un "problema inverso". La idea global en el Problema 1 es tener dos rectángulos (esta es la información) y obtener mediante el menor número de trazos lineales, tres rectángulos de la misma área (este es el requerimiento). La solución es hacer un solo trazo lineal (un corte a la lámina más grande). Entonces, para construir "problemas inversos" de este Problema 1, podría tomarse como información que ya se obtuvo, mediante un corte, las tres láminas rectangulares de la misma área (un caso particular puede ser láminas rectangulares del mismo tamaño) y como requerimiento, determinar las dimensiones de las láminas que se cortaron.

Así, el primer "problema inverso" que surgió fue:

> *Tengo dos láminas rectangulares y al hacer un corte a una de ellas obtengo tres láminas rectangulares del mismo tamaño. ¿Cuáles son las dimensiones de las láminas?*

Ante este "problema inverso" del Problema 1, el comentario fue que es muy sencillo y que lo nuevo es que tiene muchas respuestas correctas, pues basta dar las dimensiones de un rectángulo cualquiera y el otro resulta duplicando una de estas dimensiones.

Luego de intercambiar ideas y de hacer algunas propuestas de otros problemas, llegamos al siguiente problema:

Problema 1-inverso

Se tienen dos láminas rectangulares de diferentes dimensiones y una de ellas tiene 50 cm de largo. Al hacer un corte en una de ellas, se obtiene tres láminas rectangulares del mismo tamaño.

i) *Dar tres ejemplos de las dimensiones de tales láminas.*
ii) *¿Es verdad que las láminas rectangulares iniciales tienen que ser figuras semejantes entre sí? ¿Por qué?*

La parte (i) de este problema también tiene infinitas soluciones, con la restricción de estar ya dada una de las dimensiones. Resultan interesantes soluciones considerando que el largo de 50 cm puede ser de la lámina grande o de la lámina pequeña. La parte (ii) lleva a examinar la semejanza entre rectángulos y a mostrar casos en los que las láminas rectangulares iniciales no son semejantes entre sí, como contraejemplos a la consideración de una respuesta afirmativa a la pregunta. Por otra parte, es posible, matemáticamente, que las láminas iniciales sean rectángulos semejantes. La alusión a "matemáticamente", es porque una de las dimensiones resultaría un número irracional. Así, las láminas podrían ser de dimensiones a y b una de ellas y de dimensiones b y $a/2$ la otra, como mostramos en la Figura 1.

Figura 1

Para que se cumpla la semejanza entre los rectángulos, debe ocurrir que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2}$$

Así, $\frac{a^2}{2} = b^2$ y considerando el carácter positivo de estas variables, tenemos

$$a = b\sqrt{2}.$$

Con esta expresión, podemos dar infinitos ejemplos de dimensiones de rectángulos semejantes, tales que al "cortar" el más grande por la mitad, se obtienen tres rectángulos del mismo tamaño. En la Figura 2, ilustramos uno de tales casos:

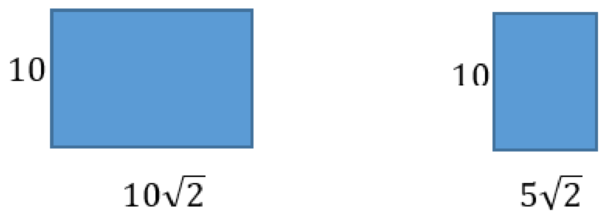


Figura 2

Podemos percibir la riqueza didáctico-matemática de este problema.

Un problema inverso para el Problema 2 puede ser:

Problema 2-inverso.

> *Las dimensiones, en metros, de dos patios rectangulares de un colegio, son a por b y c por d. Se sabe que ambos patios han sido cubiertos totalmente con baldosas de 40 cm por 40 cm, sin necesidad de partir baldosa alguna.*
>
> *i) Escribe posibles dimensiones de los patios.*
>
> *ii) ¿Es posible que las dimensiones de los patios sean tales que los rectángulos correspondientes sean semejantes entre sí? ¿Por qué?*

La parte (i) parece más sencilla que el Problema 2, pero su novedad está en el uso de variables y el tener que asignarle valores verosímiles, en el contexto del problema. Así, si bien es posible que un rectángulo sea, por ejemplo, de 1,20 m de ancho y 1,60 m de largo, esto no correspondería a un patio de un centro educativo.

La parte (ii) requiere una mayor demanda cognitiva, pues aun usando el ensayo y error, se debe tener claridad sobre lo que significa que dos rectángulos sean semejantes y su relación con las propiedades de las proporciones y las fracciones. Todo esto, sin descuidar lo anotado al referirnos a (i), respecto a la verosimilitud de las dimensiones.

Dejamos como entretenimiento para el lector elaborar "problemas inversos" para el Problema 3.

En cuanto al Problema 4, en la Figura 3 representamos las láminas. Es importante advertir que solo se puede pegar completamente el lado que mide 40 cm o el lado que mide 60 cm. En cualquiera de los casos, las partes que se pegan no intervienen como sumandos para obtener el perímetro.

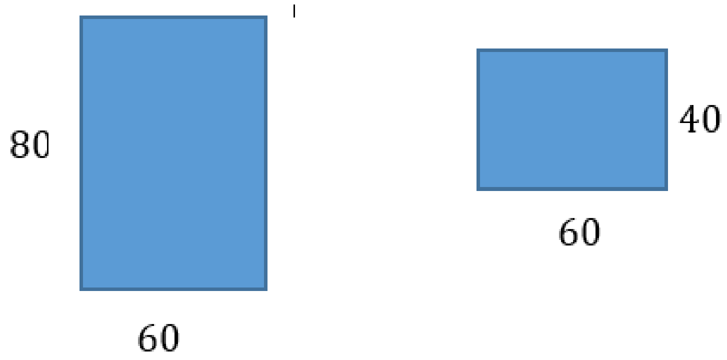


Figura 3

Por ejemplo, si se pega completamente el lado de 40 cm (Figura 4), sin importar en qué parte de un lado de la lámina rectangular grande, el perímetro del polígono no convexo que se forme será la suma de los perímetros de ambas láminas (480 cm), menos dos veces 40 cm (la parte pegada); es decir, 480 cm – 2x40 cm.

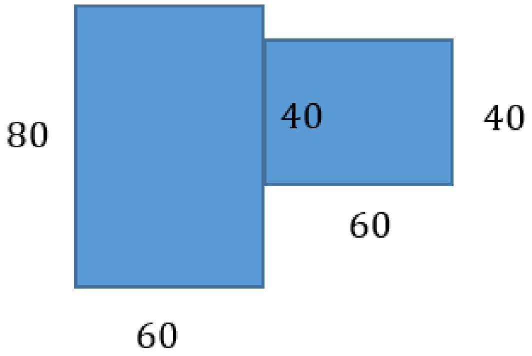


Figura 4

Así, el perímetro del polígono no convexo que se muestra, es 400 cm.

Similarmente, si se pega completamente el lado de 60 cm, sin importar en qué parte de un lado de la lámina rectangular grande, el perímetro del polígono – convexo o no convexo – que se forme, será la suma de los perímetros de ambas láminas (480 cm), menos dos veces 60 cm (la parte pegada); es decir,

480 cm – 2x60 cm = 360 cm.

Entonces, los dos únicos perímetros posibles son 400 cm y 360 cm.

Pensando en un problema inverso del Problema 4.

Al resolver el Problema 4, vemos que los perímetros se obtienen restando al perímetro total (480), en un caso dos veces 40, y en el otro dos veces 60. Así, podemos decir que los perímetros se obtienen asignando los valores 40 y 60, respectivamente, a la variable x en la función $\boldsymbol{f}$ dada por

$$\boldsymbol{f(x) = 480 - 2x}.$$

Teniendo esta expresión funcional del perímetro del polígono resultante al pegar las láminas, cabe preguntarse por la interpretación geométrica (figural) cuando a x se le da otros valores. Ciertamente, en el contexto estricto del problema, solo puede tomar los valores 40 y 60; pero en una perspectiva más amplia, sin restringirse a que las láminas se peguen solamente uniendo totalmente uno de los lados de uno de los rectángulos, x podría tomar valores en el intervalo [0; 60], pues x = 0 correspondería a un polígono no convexo formado por los dos rectángulos teniendo en común un vértice de uno de ellos (se muestra un caso en la Fig. 5); y x = 60 correspondería al polígono formado por los dos rectángulos, teniendo en común un lado de longitud 60 (mostramos un caso en la Fig. 6).

Los valores intermedios entre 0 y 60 corresponderían a los diversos polígonos no convexos formados por los dos rectángulos, teniendo en común un segmento de longitud x (mostramos un caso en la Fig.7).

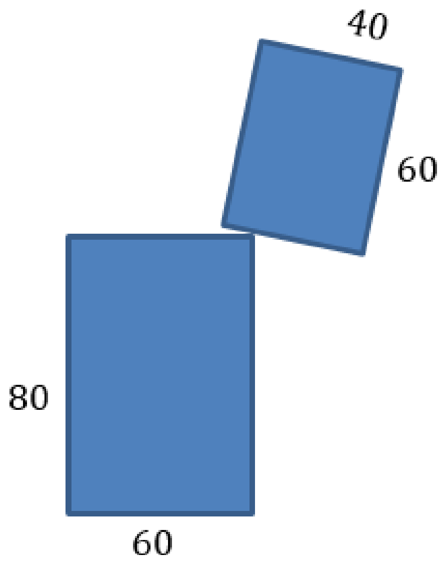


Figura 5. Cuando $x = 0$

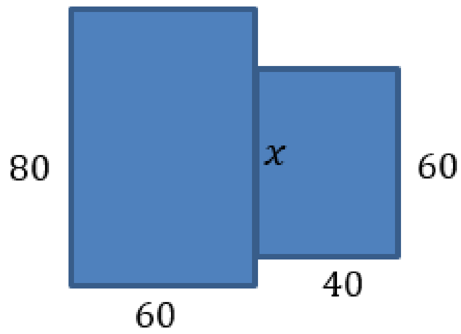


Figura 6. Cuando $x = 60$

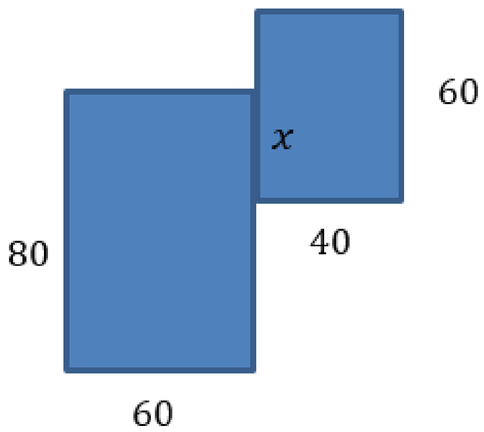


Figura 7. Cuando $x \in]0; 60[$

Luego de este análisis, hecho a partir de la estructura del Problema 4 y de las ideas fundamentales en su solución, resulta natural plantearse, como un problema inverso al Problema 4, el que se presenta al inicio de este artículo. Tal problema tiene, además de la interpretación de la función f, el requerimiento de imaginar un problema usando tal función, entonces, puede considerarse las restricciones de esta función a dominios discretos, los gráficos correspondientes, la consideración de valores óptimos, etc.

Comentarios

1. La creación de problemas inversos es también una forma de crear problemas por *variación*; es decir, a partir de problemas dados; pero las experiencias desarrolladas nos muestran que hay una mayor motivación cuando esos problemas son ya el resultado de la *elaboración*, a partir de una situación dada.
2. Crear problemas siempre es un reto a la creatividad, pero cuantos mayores sean los conocimientos y las competencias didáctico-matemáticas de los profesores, habrá mayores posibilidades de crear problemas que tengan más riqueza matemática y didáctica.
3. La creación de problemas inversos va más allá de la creación de problemas mediante modificaciones cuantitativas de la información o del requerimiento de un problema dado. Las experiencias tenidas en clases y en talleres, con matemática básica y con matemática avanzada, nos muestran la riqueza matemática y didáctica que se presenta en las reflexiones que suscitan el proceso de creación de problemas inversos; más aún, cuando el problema inicial proviene ya de la creación de un problema, a partir de una situación dada.
4. En los cuatro problemas mostrados, creados a partir de la situación dada; y en los problemas inversos creados a partir de ellos, se han hecho intervenir conceptos como perímetros y áreas de polígonos, semejanza de figuras planas, proporcionalidad, números irracionales, máximo común divisor, volumen de figuras tridimensionales, funciones, funciones afines, etc. El lector puede encontrar nuevos problemas y problemas inversos, interrelacionando de manera diferente estos conceptos o haciendo intervenir otros, ya sea libremente o con objetivos específicos para su uso en el estímulo del pensamiento matemático en clases, en evaluaciones, o en investigaciones.