REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XIV – Número 52 – Abril 2018

http://www.revistaunion.org

ÍNDICE

PROPUESTA PARA AULA

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Página 1

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM). Tiene ahora una periodicidad quadrimestral, de modo que se publican três números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database***, está incluida en el catálogo ***Latindex, CAPES*** y otros.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 02-09

EDITORIAL

Amigos y amigas y estimados colegas:

La educación matemática adquiere fuerza cuando sus investigadores cuentan con una producción de calidad, como es el caso de los artículos de esta revista. Llegamos al número 52 de la revista Unión. En los números publicados, hemos contactado con varios centros de investigación y hemos tratado temas de interés para la educación matemática en sus diferentes niveles. La calidad de los artículos ha sido mantenida por la rigurosa evaluación de los revisores. Es nuestra intención presentar a nuestros lectores, una producción que dignifique el área de la educación matemáticas iberoamericana. Y para eso, siempre contaremos con la colaboración de todos.

En este número en la sesión Firma Invitada aparece un artículo de los investigadores brasileños Eliane Matesco Cristovão y Dario Fiorentini. Cristovão es una profesora del Instituto de Matemáticas y Computación (IMC) de la Universidad Federal de Itajubá (Unifei) y doctora en Educación de la Universidad de Campinas (UNICAMP). Fiorentini es un reconocido investigador en el área de educación matemática brasileña, profesor e investigador en la Universidad de Campinas (UNICAMP).

En el artículo llamado "**Eixos para analisar a aprendizagem profissional docente em comunidades de professores**" los dos autores tratan, entre otros temas, el potencial analítico de los cuatro ejes de interpretación y análisis en una investigación doctoral, escrita a partir de la metodología de la investigación narrativa, que busca destacar y entender el aprendizaje de los profesores de matemáticas de un grupo de estudio formado como una comunidad fronteriza.

Este volumen lo componen 11 artículos, dos propuestas de aula, un artículo de la sección dedicada a historia social de la Educación Matemática en Iberoamérica, una reseña de un libro y la habitual sección de problemas.

"**Estrategias didácticas en libros de matemáticas españoles del siglo XIX: los tratados elementales de Juan Cortázar**", es el primer artículo, escrito por Mantero, Maz-Machado, Madrid y Jiménez-Fanjul. Los autores analizan las estrategias de enseñanza encontradas en los cuatro tratados fundamentales publicados por Juan Cortázar en el siglo XIX.

Poot, Arjona y Peraza presentan los resultados de un estudio para determinar los niveles de conocimiento y actitudes acerca de las estadísticas básicas de los docentes y futuros docentes de educación básica en el estado de Yucatán, México y analizan la posible relación entre estas variables. Este artículo se titula "**Conocimiento y actitudes acerca de la estadística, de los profesores de secundaria del estado de Yucatán**"

El artículo tercero de título "**Concepções e práticas de avaliação de professoras de um curso de Licenciatura em Matemática**" es de los autores Marcos Tonin y Cury. Este artículo presenta un análisis de los conceptos de evaluación, los aprendizajes de los profesores de una carrera en matemáticas de una institución de educación superior de Brasil, así como sus prácticas de evaluación.

Mosquera es el autor del artículo "**Estudio comparativo de textos escolares oficiales de Matemáticas de Ecuador y Venezuela: los sistemas de ecuaciones lineales"** en el que compara como presentan los libros de matemáticas oficiales de Ecuador y Venezuela los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (textos para estudiantes entre 13-14 años). Y a continuación puede encontrar el artículo de Méndez y, Pérez cuyo título es "**Determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica"**, que exponen un procedimiento didáctico para la determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones de elementos de conjuntos bases de estructuras geométricas, el cual se ejemplifica con las rectas del plano.

En el artículo "**Pra lá e pra cá, vou a qualquer lugar! O papel do corpo no contexto das tarefas para o desenvolvimento da percepção espacial na Educação Infantil**", Moreira, Tânia Gusmão y Font relatan un estudio cuyo propósito es analizar cómo el desarrollo de los conceptos de localización y orientación en el espacio al niño de educación infantil, y cómo este proceso se facilitó y se impulsa por tareas matemáticas que tiene el cuerpo y su movimiento como elementos centrales.

En "**Educação Matemática presente em currículos prescritos e indícios em currículos praticados, no Brasil e no Uruguai: percepções dos profissionais de Educação"**, Rosenbaum presenta un estudio comparativo sobre el proceso de desarrollo e implementación del currículo de matemáticas para el nivel equivalente a la educación básica en Brasil y Uruguay.

Con el título **“Los maestros y sus actitudes hacia las Matemáticas: un estudio sobre Educación Infantil y Primaria en España”**, Camino y Cézar presentan los primeros resultados de una investigación sobre las actitudes hacia las Matemáticas de maestros españoles de Educación Infantil y Primaria. La muestra se compone de 53 maestros.

Las contribuciones de un juego didáctico como organizador del aprendizaje significativo de la probabilidad para una clase de segundo año de secundaria, es el tema del artículo “**Ensino de Probabilidade: contribuições de um jogo didático”** de Ribeiro, Lucas, Damin y Assis dos Santos.

Alsina; Yeni y Inchaustegui escriben el artículo “**Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional: una experiencia sobre patrones con robots educativos programables”.** El objetivo de este artículo es presentar las primeras orientaciones didácticas para desarrollar el razonamiento algebraico en Educación Infantil a través del pensamiento computacional, usando la robótica como recurso.

Por último, aparece el artículo “**Análisis del conteo como contenido matemático en un episodio de dibujos animados para educación infantil”,** escrito por Beltrán-Pellicer, Arnal-Bailera, y Muñoz-Escolano y presenta un estudio, utilizando herramientas del enfoque ontosemiótico, para ilustrar un análisis de un episodio de una serie de dibujos animados infantiles (3-6 años) en torno al conteo.

Como propuesta de aula, Castillo Bracho y Prieto G. presentan **“El uso de comandos y guiones en la elaboración de simuladores con GeoGebra’.** Estos dos autores dicen que elaborar simuladores con GeoGebra es una actividad que consiste en construir dibujos dinámicos que representan las formas y movimientos de fenómenos reales.

Bernardis y Moriena traen también una propuesta para una clase “**Contextos dinámicos de lugares geométricos”**. Ellas sugieren un tratamiento de manera dinámica en diferentes contextos.

En la sesión de historia social, González escribe un artículo titulado “**Historia de la Educación Matemática en Latinoamérica: 10 claves para su comprensión”**, para comprender el proceso de evolución histórica de la Educación Matemática en América Latina hispana.

La reseña de un libro está dedicada a "**Matemáticas Electorales**" de los autores Verdejo y Villegas Escobar, para los que la estadística y la probabilidad muestran su valor para la ciudadanía.

En la sección de problemas en este número 52, "**¿Cómo crear problemas de matemáticas? Experiencias didácticas con profesores en formación"** es la propuesta por nuestro colaborador habitual, el profesor **Uldarico Malaspina Jurado** de la Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM.

En este número seguramente contiene algo para todos los gustos y proporciona reflexiones sobre educación matemática.

Agradecemos a los autores y revisores y invitamos a todos a una buena lectura.

EDITORAS

Celina Abar e Sonia Igliori

EDITORIAL

Estimados colegas e amigos*:*

A educação matemática ganha força quando os seus pesquisadores apresentam uma produção de qualidade, como é o caso dos artigos dessa revista. Chegamos ao número 52 da Revista UNION. Por seus números pudemos tomar contato com diversas direções de pesquisa e com vários temas de interesse do ensino de matemática em seus diferentes níveis. A qualidade dos artigos tem sido mantida pela avaliação rigorosa de nossos pareceristas. É nossa intenção apresentar, aos nossos leitores, uma produção que dignifique a área da educação matemática iberoamericana. E para isso precisamos sempre poder contar com a colaboração de todos.

Nesse número a sessão Firma Invitada é preenchida com um artigo dos pesquisadores brasileiros Eliane Matesco Cristovão e Dario Fiorentini. Cristovão é professora do Instituto de Matemática e Computação (IMC) da Universidade Federal de Itajubá (Unifei) e doutora em Educação pela UNICAMP. Fiorentini é um renomado pesquisador da área da educação matemática brasileira, professor e pesquisador da UNICAMP. No artigo denominado "**Eixos para analisar a aprendizagem profissional docente em comunidades de professores**" os dois autores discutem, entre outros temas o potencial analítico dos quatro eixos de interpretação e análise adotados em uma pesquisa de doutorado, desenvolvida a partir da metodologia da Pesquisa Narrativa, que buscou evidenciar e compreender a aprendizagem de professoras de matemática de um grupo de estudos constituído como uma comunidade fronteiriça.

No corpo do volume encontram-se 11 artigos, duas propostas de aula, um artigo de la sección dedicada a la História Social de la Educación Matemática en Iberoamérica, uma resenha de livro.e a sessão de Problemas.

"**Estrategias didácticas en libros de matemáticas españoles del siglo XIX: los tratados elementales de Juan Cortázar**", o primeiro artigo é de autoria de Mantero, Maz-Machado, Madrid y Jiménez-Fanjul. Nele os autores analisam as estratégias de ensino encontradas nos quatro tratados fundamentais do autor do século XIX, Juan Cortázar.

Poot, Arjona e Peraza apresentam os resultados de um estudo com objetivo de determinar os níveis de conhecimento e atitudes sobre estatísticas básicas de professores e futuros professores do ensino básico do estado de Yucatán, México e analisam possível relação entre essas variáveis. Esse artigo é intitulado:“**Conocimiento y actitudes acerca de la Estadística, de los profesores de secundaria del estado de Yucatán**”

O terceiro artigo de título “**Concepções e práticas de avaliação de professoras de um curso de Licenciatura em Matemática**” tem autoria de Marcos Tonin e Cury. Esse artigo apresenta uma análise de concepções de avaliação da aprendizagem dos professores de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição de Ensino Superior do Brasil, bem como de suas práticas avaliativas.

Mosquera é o autor do artigo “**Estudio Comparativo de Textos Escolares Oficiales de Matemáticas de Ecuador y Venezuela: los Sistemas de Ecuaciones Lineales”** no qual compara cómo presentan los libros de matemáticas oficiales de Ecuador y Venezuela los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (textos para estudiantes entre 13-14 años). E no que segue podem encontrar o artigo de Méndez e Pérez “**Determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica”** no qual expõem un procedimiento didáctico para la determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones de elementos de conjuntos bases de estructuras geométricas, el cual se ejemplifica con las rectas del plano.

No artigo “**Pra lá e pra cá, vou a qualquer lugar! O papel do corpo no contexto das tarefas para o desenvolvimento da percepção espacial na Educação Infantil**” Moreira, Tânia Gusmão e Font relatam um estudo cujo propósito foi analisar como ocorre o desenvolvimento de noções de localização e orientação no espaço pela criança da Educação Infantil e como esse processo pode ser favorecido e impulsionado por tarefas matemáticas que tenham o corpo e o seu movimento como elementos centrais.

Em “**Educação Matemática Presente em Currículos Prescritos e Indícios em Currículos praticados, no Brasil e no Uruguai: percepções dos profissionais de Educação”** Rosenbaum apresenta um estudo comparado sobre o processo de desenvolvimento e implementação do currículo de Matemática para o nível equivalente à Educação Básica no Brasil e no Uruguai.

Com o título **“Los maestros y sus actitudes hacia las Matemáticas: un estudio sobre Educación Infantil y Primaria en España”** Camino e Cézar presentan los primeros resultados de una investigación sobre las actitudes hacia las Matemáticas de maestros españoles de Educación Infantil y Primaria. La muestra se compone de 53 maestros.

Contribuições de um jogo didático como organizador prévio para a aprendizagem significativa de probabilidade, para uma turma do segundo ano do ensino médio é o tema do artigo "**Ensino de Probabilidade: contribuições de um jogo didático"** de Ribeiro, Lucas, Damin e Assis dos Santos

Alsina; Yeni e Inchaustegui escreveram o artigo "**Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional: una experiencia sobre patrones con robots educativos programables".** O objetivo deste artigo é apresentar as primeras orientaciones didácticas para desarrollar el razonamiento algebraico en Educación Infantil a través del pensamiento computacional, usando la robótica como recurso.

Por último, está o artigo "**Análisis del conteo como contenido matemático en un episodio de dibujos animados para educación infantil"** escrito por Beltrán-Pellicer, Arnal-Bailera, e Muñoz-Escolano. Este artigo apresenta um estudio, utilizando herramientas del Enfoque Ontosemiótico para ilustrar un análisis de un episodio de una serie de dibujos animados infantiles (3-6 años) en torno al conteo.

Como proposta de aula Castillo Bracho e Prieto G apresentam a temática: **"El uso de comandos y guiones en la elaboración de simuladores con GeoGebra'.** Esses dois autores dizem que elaborar simuladores con GeoGebra es una actividad que consiste en construir dibujos dinámicos que representan las formas y movimientos de fenómenos reales.

Bernardis e Moriena também trazem uma proposta de aula sobre "**Contextos dinámicos de lugares geométricos"**. Elas sugerem um tratamento de maneira dinâmica em diferentes contextos.

Na sessão de História González escreve um artigo intitulado "**Historia de la Educación Matemática en Latinoamérica: 10 Claves para su comprensión"** para comprender el proceso de evolución histórica de la Educación Matemática en América Latina hispana.

Pode-se ainda tomar conhecimento de um novo livro da área "**Matemáticas Electorales**" dos autores Verdejo e Villegas Escobar, para os quais la estadística y la probabilidad muestran su valor para la ciudadanía.

O problema do número 52 "**¿Cómo crear problemas de matemáticas? Experiencias didácticas con profesores en formación."** é proposto por nosso colaborador habitual, o professor **Uldarico Malaspina Jurado** da Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM.

Esse número certamente tem assunto para todos os gostos e possibilita reflexões sobre a educação matemática.

Nós agradecemos muito aos autores e aos revisores e convidamos a todos para uma boa leitura!

EDITORAS

Celina Abar e Sonia Igliori

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 11-33

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Eixos para analisar a aprendizagem profissional docente em comunidades de professores

Eliane Matesco Cristovão, Dario Fiorentini

Resumen	El propósito de este artículo es presentar y discutir el potencial analítico de los cuatro ejes de interpretación y análisis en una investigación doctoral, escrita a partir de la metodología de la Investigación Narrativa, que buscaba destacar y entender el aprendizaje de los profesores de matemáticas de un Grupo de estudio formado como una comunidad en la frontera. En este cultivo, el análisis de un relato que habla de episodios relacionados con la práctica de la revisión de secuencias de tareas para la enseñanza de las matemáticas y la búsqueda del movimiento causado por los cuatro ejes adoptados, resaltar su potencial para destacar el aprendizaje de los docentes. Estos ejes pueden ser útiles en el análisis de otras investigaciones sobre formación de profesores, especialmente en contextos de colaboración. **Palabras clave**: Comunidades fronterizas; Enseñanza aprendizaje; Formación de los docentes; Colaboración
Abstract	The purpose of this article is to present and discuss the analytical potential of the four axes of interpretation and analysis adopted in a doctoral research, written from the methodology of Narrative Research, which sought to highlight and understand the learning of math teachers of a study group formed as a borderland community. In this crop, the analysis of a narrative that discusses episodes related to the practice of reviewing task sequences for the teaching of mathematics and the search, from the movement caused by the four axes adopted, highlight your potential for highlight the learning of teachers. These axes may be useful in the analysis of other research on teacher training, especially in collaborative contexts. **Keywords**: Borderland communities; Teaching learning; Training of teachers; Collaboration.
Resumo	O objetivo deste artigo é apresentar e discutir o potencial analítico dos quatro eixos de interpretação e análise adotados em uma pesquisa de doutorado, escrita a partir da metodologia da Pesquisa Narrativa, que buscou evidenciar e compreender a aprendizagem de professoras de Matemática de um grupo de estudos constituído como uma comunidade fronteiriça. Neste recorte, apresenta-se a análise de uma narrativa que discute episódios relacionados à prática de revisar sequências de tarefas para o ensino de matemática e busca-se, a partir do movimento provocado pelos quatro eixos adotados, destacar o seu potencial para evidenciar a aprendizagem de professores. Estes eixos podem ser úteis na análise de outras pesquisas sobre formação de professores, especialmente em contextos colaborativos. **Palavras-chave:** Comunidades fronteiriças; Aprendizagem docente; Formação de professores; Colaboração.

1. Introdução

Este artigo apresenta um recorte da pesquisa de doutorado (Cristovão, 2015) da primeira autora, realizada sob orientação do segundo autor. Este estudo buscou identificar, descrever e compreender a aprendizagem de professoras[1] de Matemática que participaram de um grupo de estudos situado na fronteira entre a escola e a universidade, tendo sido norteada pela questão investigativa: *Que aprendizagem e aprendizados são evidenciados na análise de práticas de letramento docente de uma comunidade de professoras de Matemática?*

A formulação dessa questão investigativa, sobretudo a busca de respostas a ela, tiveram como orientação e referencial a teoria social da aprendizagem (Wenger, 1998) e os conceitos de aprendizagem situada (Lave, 2001) e de aprendizagem docente situada em uma comunidade fronteiriça (Fiorentini, 2013), além do conceito de prática de letramento (Street, 2014). Tendo em vista a natureza da pesquisa, a perspectiva metodológica adotada foi a da Pesquisa Narrativa (Clandinin e Connely, 2011), entendida como uma forma de dar sentido à experiência.

Para organizar e orientar melhor a busca de respostas a essa questão investigativa - isto é, encontrar e discutir as evidências de aprendizagem e de aprendizados docentes das professoras que participaram do grupo - foram construídos, como base nesse referencial, quatro eixos de análise: aprendizagem como participação; aprendizagem como fazer; aprendizagem como pertencimento e aprendizagem como transformação. O objetivo deste artigo, portanto, é apresentar e discutir, com maior detalhe e profundidade, esses quatro eixos de análise.

Neste texto, apresentamos primeiramente o contexto e o referencial metodológico da pesquisa e, em seguida, o referencial teórico relativo ao conceito de aprendizagem em uma comunidade profissional e o processo de construção dos quatro eixos de análise. Para ilustrar o uso destes eixos analíticos, trazemos o caso de uma das participantes do grupo, tendo como base sua experiência de participação, reificação e aprendizagem docente relativa à prática de revisar sequências de tarefas para o ensino de matemática na escola básica.

A motivação da escrita deste artigo está relacionada à nossa crença de que estes eixos podem ser úteis na análise de outras pesquisas sobre formação de professores, especialmente a continuada, em contextos colaborativos.

2. Contexto e o percurso metodológico da pesquisa

2.1 Contexto

[1] Os nomes das professoras, utilizados ao longo do artigo são reais, assim como na tese, e seu uso foi devidamente autorizado por elas.

A coleta de dados da pesquisa foi realizada no período de 2011 a 2013, junto a um grupo professoras de matemática que se reunia para ler, estudar, elaborar tarefas e escrever sobre suas práticas de sala de aula. No grupo, criado em 2005 pela primeira autora, esta pesquisadora e as professoras, juntas, buscavam refletir sobre a prática de forma sistemática e organizada, estabelecendo para isso um cronograma quinzenal de reuniões com duração de três horas.

Na formação continuada de professores, as ações são constituídas por práticas de letramento (Street, 2014), pois estamos, a todo tempo, lidando com textos e recursos relacionados ao contexto escolar. Assim, a principal prática de letramento do grupo consistia em analisar e discutir sequências de tarefas, elaboradas ou reelaboradas com a participação de todo o grupo para desenvolvimento posterior em sala de aula.

As discussões geradas durante o processo de análise dessas sequências e dos resultados obtidos em sala de aula possibilitava a escrita de narrativas de aulas. Eram programados estudos teóricos, de acordo com as demandas das professoras, entretanto, muitas vezes, mesmo sem planejar, o grupo discutia conceitos e questões didáticas não previstas para o encontro.

Diante disso, nos sentimos a vontade para caracterizar este grupo como uma comunidade fronteiriça, pois, conforme conceitua Fiorentini (2013, p. 5), “as comunidades fronteiriças se situam na fronteira entre a escola e a universidade e possuem, normalmente, mais liberdade de ação e de definição de uma agenda própria de trabalho e estudo, sem serem monitoradas institucionalmente pela escola ou pela universidade”. Por outro lado, “a fronteira é também um lugar de transgressão do instituído na escola e na universidade... Entretanto, o que se produz e aprende nessa comunidade tem forte impacto na vida pessoal e profissional de cada participante” (Fiorentini & Carvalho, 2015, p. 19).

Nestas comunidades fica explítica a fertilização de dois mundos: o da escola e o acadêmico, e que traz contribuições para ambos, portanto, faz todo sentido falarmos em aprendizagem situada (Lave, 2001) nesta comunidade fronteiriça. Para a autora, na aprendizagem situada, a aprendizagem é parte integrante da atividade na comunidade e do mundo vivido.

As discussões do grupo eram relacionadas a conteúdos matemáticos como: equações do 2º grau, retas paralelas cortadas por uma transversal, equação da circunferência, frações, entre outros, os quais se tornavam foco de estudo a partir do interesse em inovar ou das dificuldades trazidas pelas professoras integrantes.

Esse movimento exigia uma constante reestruturação do cronograma do grupo, mas esta flexibilidade era, talvez, o principal fator de permanência das professoras que, à época da pesquisa, eram sete.

A figura 1, a seguir, expressa o movimento das práticas e ações do grupo, explicitando de que forma cada prática de letramento leva o grupo a se envolver em outras ações e a desenvolver novas práticas, que se situam tanto no mundo da escola quanto no mundo da academia.

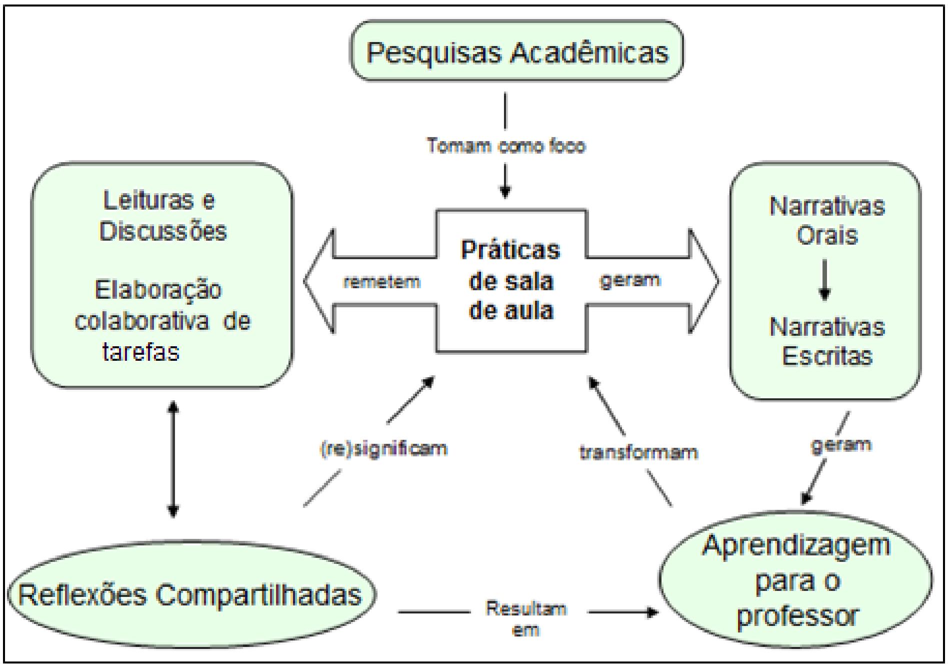


Figura 1 – Práticas do grupo

Fonte: Elaborado pela primeira autora e uma das professoras

2.2 A pesquisa narrativa como metodologia

Após anos de desenvolvimento destas práticas, foi se tornando latente a aprendizagem das professoras e da pesquisadora, que havia organizado o grupo em 2005 para realizar seu mestrado, mas percebeu que a vivência colaborativa perdurava, promovendo o desenvolvimento profissional de todas as integrantes. Assim, a aprendizagem e os aprendizados das professoras, nesse contexto, passaram a ser o objeto de estudo quando a primeira autora inicou seu doutorado, em 2011.

Metodologicamente, o estudo baseou-se nos pressupostos da pesquisa narrativa concebida e desenvolvida por Clandinin e Conelly (2011). Para estes autores

> Não existe uma única verdade ou uma versão correta dos fatos. Na pesquisa narrativa, nossos textos de campo são sempre interpretativos, sempre compostos por um indivíduo, e num determinado momento. Como pesquisadores narrativos, podemos, por exemplo, tirar uma fotografia de um determinado momento no tempo, mas essa fotografia é apenas um contar, um lance, uma imagem (Clandinin e Connelly, 2011, p. 124).

Como descrevem Clandinin e Connelly (2011), experiência é o que estudamos e a perspectiva narrativa é fundamental para narrá-la e compreendê-la com profundidade. Segundo estes mesmos autores, educadores estão interessados em vidas e vida é educação. Estamos interessados na aprendizagem e no ensino, e em compreender como esse processo ocorre.

Queremos saber como lidar com vidas, valores, atitudes e crenças diferentes, e na relação que se pode estabelecer com diferentes instituições e espaços de formação e, para isso, o caminho das pesquisas quantitativas ou da análise de objetos marginais, como avaliações externas utilizadas para testar os alunos e/ou bonificar professores, jamais será adequado. Podemos então nos perguntar:

> Como são construídas essas grandes histórias, esses tratados antropológicos? É nesse espaço que a compreensão da pesquisa narrativa é importante. Fotografias, prefácios e apêndices são "muito inadequados", e diz Geertz "marginalizam o que deveria ser central. O que é preciso, ou de qualquer forma pode servir, são as cenas, as historietas, as parábolas, os contos: mini-narrativas com o narrador presente nelas. (Clandinin e Connelly, 2011, p. 35)

Se quisermos entrar nas cenas, compreender as experiências, podemos optar pela "Pesquisa Narrativa", entendida como "uma forma de compreender a experiência" (Clandinin e Connelly, 2011), vivida em colaboração entre pesquisador e participantes ao longo de um tempo, em um lugar e em interação com todos os "eus" de cada pessoa. Na pesquisa em questão, a narrativa era também fenômeno a ser investigado, pois todo o corpus de análise era composto por narrativas orais ou escritas e relatos dos encontros, gravados e transcritos, ou recriados em memórias. Ao mesmo tempo, a narrativa se tornou método, pois é narrativamente que foram interpretados e analisados os aprendizados e o processo de aprendizagem relativos às experiências de vida que deram origem a essas narrativas, buscando conexões, relações, entre elas.

Clandinin e Connelly (2011) procuram explicar as origens de sua concepção de pesquisa narrativa trazendo para o texto os autores que os influenciaram. Baseados em Dewey, destacam o conceito de "continuidade" (noção de que a experiência se desenvolve a partir de outras experiências) e o conceito de "interação" (noção de que experiências levam a outras experiências). Inspirados em Bateson (1994, apud Clandinin e Connelly, 2011), congregam ainda a ideia de "transformação". Aprender é transformar-se. A "temporalidade" de Geertz (1995, apud Clandinin e Connelly, 2011) torna-se também importante, pois o que podemos ser capazes de dizer agora sobre uma pessoa ou uma escola ou outros é o sentido construído em termos de um contexto mais amplo e esse sentido muda com o passar do tempo. Para os autores, no pensamento narrativo, o "contexto" também é considerado (situação).

A partir dos conceitos que derivam da visão deweyana da experiência - "situação" (relacionado ao contexto ou lugar onde acontece a experiência), "continuidade" (tempo: *passado, presente e futuro*) e "interação" (pessoal e social), - Clandinin e Connelly (2011) definem o "espaço tridimensional da investigação narrativa" e as direções para as quais este arcabouço permite que suas investigações caminhem: "introspectivo", "extrospectivo", "retrospectivo", "prospectivo" e "situado em um lugar".

Essa tridimensionalidade perpassa toda a escrita do texto da tese e se faz presente também na análise apresentada neste artigo. Como afirmam as autoras, pesquisar sobre uma experiência é, ao mesmo tempo, experienciá-la nessas quatro direções: introspectivo, extrospectivo, retrospectivo, prospectivo, fazendo perguntas que apontem para cada um desses caminhos.

Para a tese, o corpus de análise foi constituído a partir de audiogravações dos encontros quinzenais realizados durante um recorte temporal de três anos da existência dessa comunidade que completou 10 anos em 2015, ano da defesa da tese. Estas gravações, as memórias escritas dos encontros, as narrativas e os materiais produzidos pelas professoras... foram utilizados para compor narrativas que permitiram fazer um zoom para as práticas docentes.

Ao fazer, inicialmente, uma análise flutuante dessas práticas, tendo como referência as componentes da teoria social da aprendizagem de Wenger (2013), foi possível evidenciar quatro tipos de aprendizagem, os quais, a seguir, foram tomados como eixos para (re)narrar analiticamente as narrativas das práticas das professoras, entrelaçando com as autobiografias profissionais (perfil) escritas por elas e com as respostas que deram a um questionário criado por meio da ferramenta GoogleDocs, o qual caracteriza-se como interativo e coletivo.

As análises narrativas que resultaram desse processo situam diferentes episódios num tempo e espaço, permitindo, de um lado, estabelecer relações entre eles, e de outro, descrever narrativamente o processo de aprendizagem docente. Para este artigo, trazemos apenas uma dessas narrativas. Entretanto, antes de apresentá-la, discorremos com mais profundidade sobre o conceito que assumimos de aprendizagem e o processo de construção dos eixos analíticos.

3. O conceito de aprendizagem e a construção dos eixos de análise

Assmann (1998), ao questionar o que é realmente aprender, afirma que a ideia de aprendizado como resultado de um bom ensino entrou em crise, pois “o avanço das biociências nos foi mostrando que vida é, essencialmente, aprender, e que isso se aplica aos mais diferentes níveis que se podem distinguir no fenômeno complexo da vida” (p. 35).

Para o autor, o aprender está relacionado com a essência do “estar vivo” e, nessa visão, o mental está totalmente incorporado com a ecologia cognitiva na qual estamos imersos. Assmann (1998) critica a ideia comumente defendida de que nossos sentidos são janelas pelas quais o conhecimento entra de fora para dentro.

Segundo Assmann, essa concepção nos coloca como reféns de dicotomias como o indivíduo e o meio; o receptor e o emissor, o aluno e o professor, tornando difícil aceitarmos que “a primeira consideração acerca do processo de aprendizagem sempre deveria ser a de que existe um sistema unificado organismo-e-entorno” (p. 37). Para isso, é preciso compreender nossos “sentidos como interlocutores do mundo [e que] o organismo vivo é, também e acima de tudo, um criador ativo enquanto co partícipe ativo do sistema conjunto organismo/entorno" (p. 37).

Lave e Wenger (2002) também criticam a concepção estritamente psicológica de aprendizagem, pois "a aprendizagem como internalização é concebida, muito comodamente, como um processo não problemático de absorver o dado, como uma questão de transmissão e assimilação" (p. 165). Segundo estes autores, nesta teoria o caráter social da aprendizagem consiste apenas numa pequena aura de socialidade que fornece insumos para o processo de internalização, sem levar em conta o lugar da aprendizagem no quadro do contexto da estrutura do mundo social. Wenger (2013) apresenta sua perspectiva de uma "teoria social da aprendizagem", que busca colocar a aprendizagem no contexto da nossa experiência vivida de participação no mundo, considerando que aprender faz parte da nossa natureza humana, tanto quanto comer ou dormir.

Embora na nomenclatura ocorra apenas uma simples troca de ordem (teoria da aprendizagem social → teoria social da aprendizagem), o arcabouço construído por Wenger muda completamente nosso modo de pensar a aprendizagem, que passa a ser entendida como um fenômeno fundamentalmente social, que reflete a nossa profunda natureza social como seres humanos capazes de saber. Essa mudança de perspectiva exige repensar como a aprendizagem ocorre e o que é necessário para promovê-la. Exige que procuremos entender e, consequentemente, promover a aprendizagem, mantendo um vínculo estreito com o seu contexto.

Para Lave (2001), o contexto pode ser considerado como as relações concretas historicamente constituídas entre situações e dentro delas. Lave (2001) aponta diferenças entre a aprendizagem do ponto de vista cognitivo e do ponto de vista da atividade situada, vivenciada em comunidades de prática. Segundo a autora, enquanto na teoria cognitiva se separa o mundo da mente que aprende, na teoria da atividade situada não há essa dicotomia. Assim, a aprendizagem é parte integral da atividade, do mundo vivido (pensamentos, sentimentos, valores, formas coletivas e histórico-culturais), como se pode perceber nestas quatro premissas referentes ao conhecimento e à aprendizagem na atividade:

> 1. O conhecimento sempre sofre construção e transformação em seu uso.
>
> 2. A aprendizagem é um aspecto integral da atividade no e com o mundo em todo momento. O fato de haver aprendizagem não é problemático.
>
> 3. O que se aprende sempre é complexamente problemático.
>
> 4. A aquisição de conhecimento não é uma simples questão de absorver conhecimento; ao contrário, coisas consideradas categorias naturais, como "corpos de conhecimento", "educandos" e "transmissão cultural" exigem reconceituação como produtos culturais e sociais (p. 238-239).

Completando o conceito de contexto, como fez McDermott (2001), resgatamos aqui a metáfora da corda, de Birdwhistell, para apresentar uma imagem esclarecedora deste conceito.

> Gosto de pensar nele como se fosse uma corda. As fibras que compõem a corda são descontínuas; quando a retorcemos juntas não fazemos com que sejam contínuas: fazemos com que a corda seja contínua [...] Não há fibras

> na corda, mas se a rompemos encontramos uma vez mais as fibras. Desta forma, apesar de parecer que cada uma das partículas a percorre integralmente, não é assim (Birdwhistell citado em MCDermott, 2001, p. 297).

Enfim, pensando na formação de professores, podemos entender o contexto como as condições e circunstâncias que perpassam e dão sentido à experiência de aprendizagem docente que acontece na comunidade. É o mundo socialmente constituído que se manifesta na aula que o professor preparou e trouxe para o grupo discutir; nos recursos que ele utilizou para preparar essa aula (se ele usa ou não tecnologias e por que; se ele utiliza uma abordagem inovadora ou prepara uma aula tradicional); nos significados que ele atribui aos aprendizados que poderão promover ali (se ele acredita que treinar é importante, que investigar é importante); diante das cobranças curriculares que ele sabe que enfrentará (se a sua escola impõe o uso de algum material ou permite que ele inove); da pressão das avaliações externas às quais seus alunos serão submetidos; de suas concepções de mundo, de ensino, de Matemática.

Os contextos: local e global, individual e coletivo, da escola e da universidade, são colocados constantemente em tensão na comunidade de aprendizagem e esta tensão é enfrentada para que o professor atribua sentido a sua prática e possa, de forma consciente, assumir as mudanças que acredita poder fazer.

No grupo, as professoras elaboravam tarefas e sequências de tarefas que levariam efetivamente para suas salas de aula, produziam narrativas escritas ou relatavam oralmente suas experiências de sala de aula, discutiam textos teóricos selecionados a partir de suas necessidades e decidiam compartilhar, ou não, as experiências que julgavam interessantes para outros professores, em eventos mais amplos.

Em todas estas ações, este mundo vivido está presente. Portanto, o processo de aprendizagem e os aprendizados que ocorrem são situados em um contexto complexo que é permeado por suas relações com a escola, enquanto instituição, com o governo, representado nos documentos oficiais e nas políticas implementadas, e com a academia, representada nos textos que estudamos e nos eventos dos quais participamos.

Assim, as experiências vividas na escola básica, com suas práticas e tensões, os estudos oriundos de outras esferas de formação das quais as professoras participam e as experiências acadêmicas que o grupo propicia (seja ao trazer uma sugestão de leitura científica, ao aproximar as professoras de eventos acadêmicos ou ao convidá-las a produzir narrativas de suas experiências) vão compondo um contexto complexo, como a corda de Birdwhistell. É nesse contexto complexo que buscamos evidenciar o processo de aprendizagem e os aprendizados das professoras.

Como afirma Fiorentini (2013), o respaldo e sustentação dessas práticas podem ser encontrados na “teoria social da aprendizagem” (Lave e Wenger, 1991; Wenger, 2001). Conforme esta teoria, “toda aprendizagem é situada em uma prática social que acontece mediante participação ativa em práticas de comunidades sociais e construção de identidades com essas comunidades” e esta aprendizagem é produzida e evidenciada através de "formas compartilhadas de fazer e entender dentro da comunidade, as quais resultam de dinâmicas de negociação, envolvendo 'participação' plena ou 'periférica legítima' e 'reificação' na (ou a partir da) comunidade" (Fiorentini, 2013, p. 157).

Lave e Wenger (1991) desenvolveram o conceito de "participação periférica legítima" para explicar o processo pelo qual os recém-chegados a uma comunidade tornam-se membros plenos da mesma. Segundo os autores, para um recém-chegado tornar-se um membro qualificado e conhecedor dessas práticas de uma comunidade, precisa se envolver em um movimento que vai da periferia a uma participação plena e efetiva nas práticas da comunidade.

Membros com participação plena ou periférica legítima reificam, ou seja, dão forma a sua experiência "pela produção de objetos que congelam essa experiência em 'coisificação'" (Wenger, 1998, p. 58). As reificações são essenciais e constitutivas da comunidade, pois "ao fazer isso, criamos pontos de foco em torno dos quais a negociação de significado se torna organizada [...] Qualquer comunidade de prática produz abstrações, ferramentas, símbolos, estórias, termos e conceitos que reificam algo daquela prática em uma forma congelada" (Wenger, 1998, pp. 58-59).

Para definir os eixos de análise foi preciso dialogar com autores que ajudassem a construir perspectivas analíticas. Wenger, Mockler e Cochran-Smith e Lytle nos deram esse suporte. O principal foco da teoria social da aprendizagem de Wenger (2013) está na aprendizagem como "participação social", entendida como "um processo mais abrangente de ser participante ativo das 'práticas' de comunidades sociais e construir 'identidades' em relação a essas comunidades" (p. 248). Para o autor, essa participação molda não apenas o que fazemos, mas também quem somos e como interpretamos o que fazemos.

Em sua teoria, Wenger (2013) aponta quatro componentes fundamentais para caracterizar essa participação social como um processo de aprender e conhecer.

> • **Significado:** um modo de falar sobre nossa capacidade (mutável) – individual e coletivamente – para experimentar nossa vida e mundo como significativos.
>
> • **Prática:** um modo de falar sobre os recursos, modelos e perspectivas sociais e históricos compartilhados, que possam sustentar o envolvimento mútuo na ação.
>
> • **Comunidade:** um modo de falar sobre as configurações sociais nas quais nossas atividades são definidas como algo que merece ser perseguido e nossa participação é reconhecida como competência.
>
> • **Identidade**: um modo de falar sobre como a aprendizagem muda [transforma] quem somos e cria histórias pessoais de formação no contexto de nossas comunidades. (p.248).

Estas componentes estão organizadas num esquema, como mostra a figura 2.

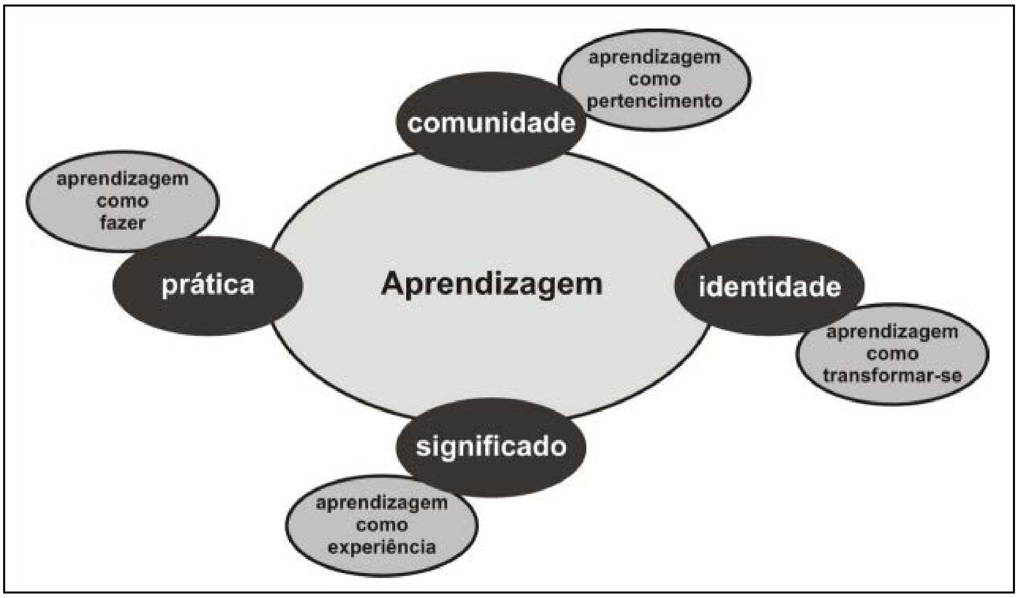


Figura 2 - Componentes de uma teoria social da aprendizagem.

Fonte: Wenger (2013, p. 249)

Por colocar a “participação” como principal foco de sua teoria, Wenger (2013) não a considera como uma componente da aprendizagem, mas como uma condicionante básica. O autor explica a necessidade do aprendiz se envolver em práticas significativas, ter acesso a recursos que promovam a sua participação, abrindo seus horizontes, para que possa se colocar em trajetórias de aprendizagem com as quais se identifique, e para que seja envolvido em ações, discussões e reflexões que façam a diferença para as comunidades que valoriza.

Apesar disso, na análise inicial dos dados, uma “aprendizagem como participação”, associada aos processos de construção e negociação de significados, desponta como um possível eixo de análise. Na comunidade investigada, as professoras buscam constantemente compartilhar suas necessidades, desejos e dificuldades de sala de aula, buscando negociar significados tanto para suas práticas quanto para os conceitos discutidos nos encontros da comunidade, assim, este se tornou um eixo viável e importante.

Da teoria de Wenger, destaco ainda o conceito de prática, associado a uma “aprendizagem como fazer” no esquema apresentado pelo autor. Esta aprendizagem é expressa nos textos de campo por meio do envolvimento das professoras com o fazer Matemática, seja na sua participação efetiva na elaboração e reelaboração das sequências que são objeto de estudos do grupo, seja em momentos em que o fazer de uma professora se tornava parâmetro para discutir o fazer de outra. Outro conceito importante é o de comunidade, associado a “aprendizagem como pertencimento”. Esta aprendizagem se manifesta, de um lado, na disposição em elaborar, em colaboração com o grupo, relatos de suas próprias práticas, demonstrando seu sentimento de pertença à comunidade, sua identificação com as práticas ali discutidas e, de outro, pelo reconhecimento e validação, por parte dos demais participantes, de sua peformance no grupo.

Wenger (2013) aponta ainda o conceito de "identidade" associado a uma aprendizagem relacionada à transformação. Este eixo parece mais complexo, e exige uma compreensão mais profunda, que leve em consideração não só o contexto da comunidade, que é já fronteiriça, mas também o contexto mais amplo, que envolve outras comunidades das quais o professor faz parte. Neste sentido, Mockler (2011), como pesquisadora da identidade profissional docente, nos ajuda a compreender como essa identidade é permeada também pelo contexto pessoal e político/social. A autora propõe que foquemos na identidade, compreendendo-a como ferramenta prática e política, ou seja, é por meio da identificação com uma comunidade que o professor poderá mudar práticas, mas isto implica mudar também sua relação com o meio social e político.

O esquema apresentado na figura 3, inspirado em Mockler (2011), permite compreender melhor este conceito de identidade como uma forma de "ser professor". Embora o foco principal desse estudo não seja a identidade numa perspectiva ampla, como a adotada pela autora, a sua relação com a aprendizagem pareceu interessante para compreendê-la. Esta relação, assim como as outras apontadas pela autora, é permeada pelo contexto pessoal e político/social.

Figura 3 - Dimensão identitária da aprendizagem de professores

Fonte: Construção feita a partir de adaptações de Mockler (2011, p.521)

Há nessa identidade uma forte componente pessoal, que é justamente o que faz com que as vivências profissionais e as influências sociais e políticas gerem, em cada indivíduo, diferentes atitudes.

Pessoas diferentes terão diferentes reações, mesmo que se identifiquem com a mesma comunidade. Na comunidade investigada, as professoras envolvem-se, mais ou menos, em diferentes atividades. Isso precisa ser compreendido para evitar que se interprete certas posturas como falta de identificação com a comunidade, especialmente se estas posturas forem diferentes daquelas que a pesquisadora, como professora, teria.

Cada professora transforma a sua prática conforme transforma sua própria identidade, de acordo com o seu tempo e as suas vivências, e estas transformações são expressas em seus relatos, orais ou escritos, e podem ser captadas também nas respostas ao questionário e nos perfis autobiográficos.

Resumindo, a partir dos estudos de Wenger e Mockler, e tendo em vista principalmente nosso objeto de estudo, foram definidos quatro eixos de análise da aprendizagem situada na comunidade fronteiriça investigada:

- ✓ **Aprendizagem como participação** – referente, principalmente, aos significados negociados e construídos oralmente no grupo a partir da prática compartilhada por cada professora. No grupo, as professoras aprendem a dizer, a significar, a se posicionar, o que podemos caracterizar como um letramento docente.
- ✓ **Aprendizagem como fazer** – retratada em suas produções, compartilhadas com o grupo ou com a comunidade mais ampla. O conceito de “reificação” (Wenger, 1998) permeia também os outros eixos, mas é o principal conceito para analisar esse tipo de aprendizagem.
- ✓ **Aprendizagem como pertencimento** – um “modo de ser” retratado em suas narrativas orais ou escritas/reescritas, nos perfis e no questionário, evidenciando sua identificação com as práticas da comunidade.
- ✓ **Aprendizagem como transformação** – evidenciada quando o professor fala das transformações de sua prática de sala de aula, a partir de uma identificação com a comunidade, mas sem perder contato com outras dimensões que o constituem. Está intimamente relacionada com transformações de identidade, pois quem transforma sua prática transforma a si mesmo.

Se retomarmos o esquema de Wenger, poderemos notar que o conceito de “aprendizagem como experiência”, associado ao significado, não foi considerado como eixo para analisar tanto o processo de aprendizagem como os aprendizados decorrentes. Esta não foi uma questão de optar por eixos mais adequados e descartar os menos adequados, mas de entendermos que a experiência é constitutiva de qualquer aprendizagem quando a assumimos no sentido Larrosiano[2].

Esses eixos de análise não foram tomados como unidades ou categorias isoladas de análise. Ao contrário, foram tomados como eixos transversais de interpretação e análise que perpassam as práticas da comunidade.

Essa opção metodológica permite a produção de uma análise narrativa orgânica da aprendizagem e de seus aprendizados, sem compartimentá-los ou separá-los em categorias estanques que geralmente impedem a visão do movimento e da inter-relação intrínseca e complexa que existe entre a prática, a aprendizagem, a identidade e o processo de constituição/transformação do professor.

Ao diferenciarem perspectivas de conhecimento “na”, “da” e “para” a prática, Cochran-Smith e Lytle (1999) nos ajudam a assumir e compreender outros significados, subjacentes aos diferentes aprendizados a serem analisados no grupo. Diferentes aprendizados estão associados a diferentes perspectivas de conhecimento, variando de acordo com a natureza das práticas de letramento que compõem o contexto em que o processo de aprendizagem se desenvolve. Assim, estas concepções também foram consideradas na análise, pois podem estar subjacentes em cada um dos eixos analíticos.

Para apresentar de forma resumida as ideias de Cochran-Smith e Lytle (1999), podemos dizer que na concepção de “conhecimento-para-a-prática” acredita-se que os conhecimentos essenciais são concebidos por pesquisadores da universidade e aplicados por professores. Na concepção de “conhecimento-na-prática” os conhecimentos mais essenciais no ensino são concebidos como conhecimento prático, produzido por professores competentes que sabem utilizar resultados de pesquisas e produzem ricas interações na sala de aula. Por sua vez, a concepção de “conhecimento-da-prática” presume que o conhecimento que os professores precisam para ensinar bem é gerado quando eles consideram suas próprias salas de aula para uma investigação intencional, ao mesmo tempo em que utilizam como material gerador de questionamentos e interpretações o conhecimento e a teoria produzidos por outros. Neste tipo de conhecimento, a “imagem central é a de professores, e outros colaboradores, trabalhando em conjunto para investigar suas próprias suposições, seu próprio ensino e desenvolvimento do currículo, e as políticas e práticas de suas escolas e comunidades” (Cochran-Smith e Lytle, 1999, p. 21).

Apresentamos, a seguir, um sumário das narrativas elaboradas e analisadas pelo estudo original (Cristovão, 2015), organizadas a partir da indicação das professoras sobre as atividades e momentos marcantes para cada uma no grupo. A organização desta lista não seguiu uma sequência cronológica. Optamos por organizar os *zoons* de acordo com as diferentes práticas de letramento ocorridas, ou

[2] Para Larrosa (2011), a experiencia é o que “nos passa”. O autor relaciona a formação, a aprendizagem e a experiência ao afirmar que “a experiência me forma e me transforma. [...] que o resultado da experiência seja a formação ou a transformação do sujeito da experiência”.

seja, de acordo com o tipo de atividade desenvolvida ou com o momento vivido pelo grupo.

- ✓ *Socialização de narrativas orais de aulas*
  - Primeiro zoom – Uma narrativa oral que provoca discussões sobre a postura investigativa.
- ✓ *Processos de revisão de sequências de tarefas*
  - Segundo zoom – Ressignificando conceitos e métodos – Narrativa dividida em três focos de análise, destacados ao longo de alguns encontros dedicados ao estudo e à reelaboração de uma sequência de tarefas que havia sido desenvolvida por mim, muito antes da existência do próprio grupo, para o estudo de equações do 2º grau. Os focos referem-se à (1) uma discussão sobre os conceitos de necessário e suficiente; (2) um momento relativo a esclarecimentos sobre conteúdos de ensino, cujos aprofundamentos não foram tão adequados; (3) outro momento relativo a esclarecimentos sobre conteúdo, que atendeu a uma professora em específico.
  - Terceiro zoom – Questionar abordagens ou concepções? – Narrativa que foca uma discussão sobre o significado do conceito de sequência didática[3] e chegamos a uma discussão sobre letramento, ocorrida num dos encontros dedicados à revisão da sequência sobre ensino de álgebra para o 7º ano, elaborada por Renata F.
  - **Quarto zoom** – Mais que revisar uma sequência, inspirar novos rumos – Narrativa que foca nos desdobramentos do processo de revisão da sequência sobre circunferências no GGb, elaborada por Suelen.
- ✓ *Participação em processos de escrita e reescrita de narrativas*
  - Quinto zoom – Práticas de letramento como experiências, na escola e no grupo – Narrativa que foca no processo de escrita de uma narrativa de Sandra, sobre o ensino de retas paralelas com uso de atividade prática e tecnologia, escrita por Sandra.

No próximo item apresentamos a análise de uma das narrativas, referente ao quarto zoom, buscando evidenciar o potencial dos quatros eixos descritos para captar indícios da aprendizagem docente.

4. Zoom para a prática: destacando os indícios de aprendizagem de Suelen a partir de sua experiência de particicipação no grupo

Logo que ingressou no grupo a professora Suelen havia criado uma sequência de tarefas que previam o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra. Quando apresentou sua sequência, em 2011, ela estava interessada em fazer o mestrado, mas não se sentia segura em relação à escolha da temática. O processo de revisão colaborativa de sua sequência a inspirou a investigar o processo formativo e reflexivo

---

[3] O termo sequência didática é utilizado no grupo sem estabelecer relação com os fundamentos da Engenharia Didática (a qual era desconhecida das professoras). Chamamos de sequência didática o conjunto de tarefas elaboradas para desenvolver, em sala de aula, atividades de um determinado tema, e cujo objetivo principal tem sido permitir ao professor a articulação entre diferentes perspectivas de um mesmo conteúdo e, também, articulação entre diferentes conteúdos que podem ser conectados, como por exemplo, álgebra e geometria.

das práticas com o uso de tecnologia em sala de aula, envolvendo todas as professoras com estas práticas durante a realização de seu mestrado, iniciado em 2013. Assim, torna-se importante trazer este contexto mais amplo, relacionando esta narrativa sobre a experiência vivida por Suelen e pelas professoras a partir da revisão da sequência com seus desdobramentos.

No final de 2011, Suelen, recém chegada ao grupo, nos apresentou uma sequência de tarefas que abordava elementos básicos da circunferência e posições relativas entre retas e circunferência, elaborada por ela e já desenvolvida com seus alunos da 8ª série (9º ano) utilizando o software GeoGebra. No primeiro contato com a sequência, as professoras perceberam que não havia orientações aos alunos, fazendo com que dependessem totalmente das orientações do professor, assim já solicitaram que Suelen reformulasse a sequência nesse sentido. Em 2012 o grupo retomou a análise da sequência dedicando cinco encontros para revisá-la totalmente. Esta experiência foi destacada pela professora Suelen como uma das mais formativas durante todo seu período de participação no grupo.

Após diversas oportunidades de verificar os resultados da sequência, tanto com alunos da graduação quanto com alunos da Educação Básica, ela aceitou o desafio de escrever uma narrativa sobre a sequência, cujo resumo apresentamos a seguir.

> UMA PROPOSTA PARA O ESTUDO DOS ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA COM O USO DO GEOGEBRA - Suelen Masson Zeraik. Resumo: As trocas de experiências entre professores formadores e professores da escola básica por meio de grupo colaborativo promovem a formação continuada e vivências valiosas, tal como, a construção de sequências didáticas com o uso de ferramentas tecnológicas. A utilização das TICs no ensino de Matemática está cada vez mais presente dentro da sala de aula. Atividades com esse tipo de metodologia possibilitam ao aluno desenvolver os conceitos matemáticos com mais significado e sentido. Esse relato é uma proposta de aula que aborda conceitos e propriedades sobre os elementos da circunferência como: Raio, Diâmetro, Corda, Retas relativas à circunferência, ângulos internos e externos e suas propriedades por meio do software GeoGebra. Divididos em dez quadros, os temas são abordados por meio de construções geométricas acompanhadas de orientações escritas que permitem ao aluno explorar a atividade de maneira dinâmica podendo, assim, agir de forma ativa na construção do próprio conhecimento. A evolução tecnológica nos permite ir além da mediação do conteúdo, nos auxilia na intervenção da construção do conhecimento possibilitando, também, refletir sobre a prática de ensino, analisando e participando do próprio ambiente explorado.

O grupo colaborou com a revisão dessa narrativa. Durante o IV Seminário de Histórias e Investigações Matemáticas realizado em julho de 2013, Suelen, ao trazer as contribuições de seus estudos do mestrado, apresentou uma nova narrativa, mais reflexiva, cujo resumo também está destacado, a seguir, na qual buscou retratar o processo de revisão da sequência e também o papel do grupo no processo de escrita da própria narrativa.

> (RE)ELABORANDO COLABORATIVAMENTE UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE SOBRE O ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA - Suelen Masson Zeraik – UFSCar. Resumo: Neste relato apresento o processo de reelaboração de uma proposta de aula junto ao grupo colaborativo de professores de Matemática. Na proposta são abordados conceitos e propriedades sobre os elementos da circunferência de um modo dinâmico por meio do software GeoGebra. Inicialmente o intuito de socializar a atividade no grupo foi de refletir sobre a própria prática de ensino, mas

> durante as trocas de experiências com os professores, percebemos a necessidade de mudanças em algumas partes da proposta para que adquirisse um caráter significativo na construção do conhecimento do aluno. Essa vivência promove a formação continuada e reflexões valiosas, tal como, a análise de sequências de atividades com o uso de ferramentas tecnológicas. Além de me trazer crescimento profissional, promoveu ali, relações de colaboração entre os pares envolvidos pois, em grupo de estudos, os docentes podem aprender uns com os outros. Nesse sentido, pude me debruçar na atividade junto ao grupo com um foco mais reflexivo e fazer algumas mudanças aperfeiçoando a atividade em busca do sucesso da aprendizagem significativa do aluno.

Muito mais confiante, Suelen ofereceu, no mesmo evento, uma oficina intitulada “Conhecendo os elementos da circunferência com o GeoGebra”, na qual compartilhou com outros professores a sua sequência[4]. A experiência, que se inicia com a elaboração solitária da sequência por Suelen, passa, depois, por fases, tais como a revisão da sequência pelo grupo e sua aplicação em vários espaços. A escrita e a revisão colaborativa de duas versões da narrativa podem ser interpretadas como práticas de letramento configuradas por diversos eventos que afetam a todas as professoras. Quando Suelen apresentou pela primeira vez a sequência ao grupo, as professoras e a primeira autora deste artigo tentaram discutir com ela o que seria uma abordagem investigativa.

O conceito de atividade investigativa, para Suelen, era uma mistura de pesquisa com ensino, assim, não carregava em sua essência a necessidade de propiciar ao aluno um ambiente exploratório-investigativo. Em sua concepção, uma sequência de tarefas exigia que o professor conduzisse todo o processo junto aos alunos. Esse modo de pensar a atividade investigativa fez com que, inicialmente, a sequência elaborada por Suelen, apesar de pautada no uso de um software dinâmico, seguisse os moldes de uma aula expositiva. A discussão gerada permitiu que Suelen diferenciasse o conceito de investigação do professor (sobre o aprendizado do aluno), do conceito de atividade ou tarefa investigativa para o aluno, na qual o aluno possa explorar – com autonomia e alguma orientação/mediação do professor - a tarefa ou situação problema e levantar questões, conjecturas ou hipóteses, testar suas conjecturas ou hipóteses, sem que o professor direcione ou conduza o processo a um único caminho.

As interferências do grupo que sucederam essa discussão inicial ajudaram Suelen a mudar a abordagem da sequência e ela reconhece esse processo em sua narrativa. Após contar um pouco sobre o histórico de sua formação e de sua participação no grupo, Suelen apresenta a sequência em sua versão inicial expondo suas problemáticas e a decepção com os resultados obtidos.

> A princípio eu acreditava que apenas clicando “em avançar” os alunos pudessem construir o seu próprio conhecimento. Mas essa primeira versão da sequência não alcançou a perspectiva “construcionista” […] que eu queria propor. A maneira como a sequência foi construída, com passos já prontos e com a falta de orientações escritas que ajudassem o aluno a explorar a dinâmica do software, mantinha-o sempre na dependência do professor,

[4] O arquivo encontra-se disponível em http://sumassonzeraik.blogspot.com.br/2013/02/circunferencia.html

> tornando a aula totalmente expositiva. No final da aplicação da atividade percebi que a única a explorar o software fui eu, os alunos ficaram somente observando e fazendo anotações em seus cadernos (Zeraik, 2013,p. 4).

A narrativa vai desvelando todo o processo de revisão da sequência, os medos e as angústias de Suelen ao expor para as professoras do grupo a sua produção e, ao mesmo tempo, suas dúvidas. Em contrapartida, retrata tanto o acolhimento quanto a percepção que ela começa a ter do papel do grupo em sua formação e da mudança de concepção que aos poucos vai construindo. Suelen retrata a dinâmica de elaboração da versão final da sequência, valorizando essa vivência ao afirmar que "Percebi, ali, que um grupo colaborativo é marcado pela imprevisibilidade e de ações pontuais momentâneas. [...] nesse tipo de comunidade de estudos sempre há um objetivo comum que norteia o grupo, há também espaço para as experiências e angústias individuais (Zeraik, 2013, p. 4).

Suelen havia estudado, na teoria, o conceito de abordagem construcionista e de aula investigativa, mas não conseguia levá-los para a sua prática por meio da sequência que havia elaborado sozinha. No contexto colaborativo do grupo ela vai delineando a possibilidade de uma práxis que relaciona teoria e prática. Além disso, começa a conceber um projeto de pesquisa que iria promover, para todo o grupo, novas oportunidades de aprendizagem, agora envolvendo as tecnologias. Este "conhecimento-da-prática" (Cochran-Smith e Lytle, 1999), que toma como ponto de partida a prática mal sucedida de Suelen para, com a colaboração do grupo, reorganizá-la e ressignificá-la, inspira Suelen a pesquisar e a motiva a permanecer (participando e reificando) no grupo.

A versão inicial apresentada por Suelen foi desconstruída pelo grupo e esse momento não foi fácil para ela, mas foi altamente formativo. Renata, outra professora do grupo, explicita seu olhar sobre essa experiência, e valoriza a narrativa de Suelen sobre esse processo, qualificando-a como potencialmente formativa para o grupo.

Apenas para ilustrar esse processo, que não poderia ser expresso num artigo, apresento a seguir uma das tarefas propostas na versão inicial da sequência elaborada por Suelen e, logo em seguida, como ela ficou após as discussões no grupo e as reformulações feitas pela professora. Com a intenção de abordar os elementos: Diâmetro e Corda, Suelen apresentava uma circunferência com raio dado e estes elementos representandos de forma fixa. A partir dessa construção ela simplesmente apresentava conceitos prontos aos alunos. Esse formato colocava a professora, e não os alunos, no centro do processo educativo.

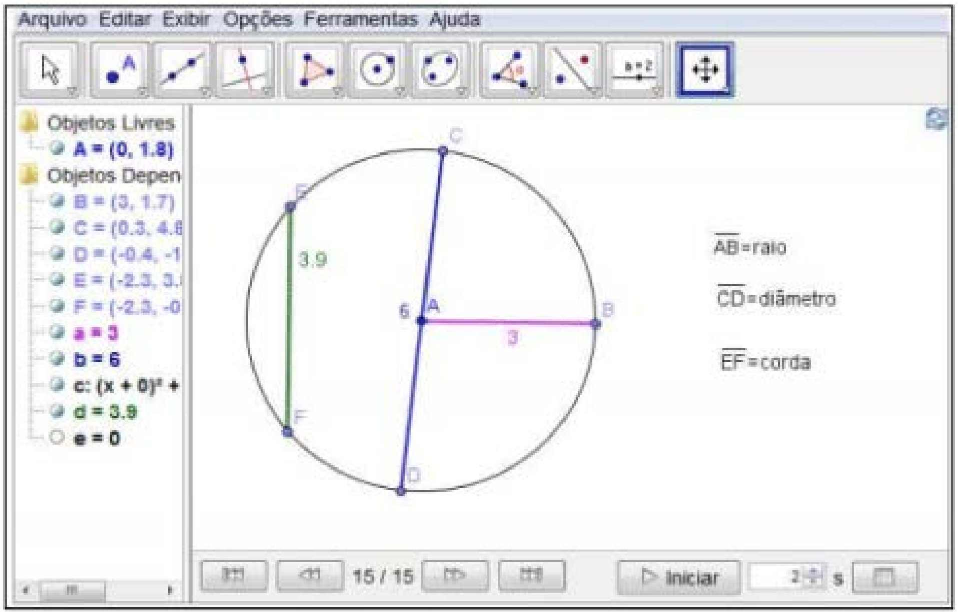


Figura 4 - Quadro que apresentava conceitos prontos de corda e diâmetro
Fonte: Tarefa elaborada pela professora

Após a vivência da atividade pelas professoras do grupo, muitas discussões e alterações propostas, a tarefa de explorar os conceitos passa a ser do próprio aluno. O primeiro quadro pede para que o aluno movimente o ponto B em relação ao ponto fixo A. Além de explorar a dinamicidade, esse movimento ajuda o alunos a perceberem que todos os pontos formados por B tem a mesma distância de A, ou seja, construir por conta própria o conceito de circunferência e de raio. O quadro dois aborda os elementos: Diâmetro e Corda de forma dinâmica, permitindo que o aluno explore as medidas possíveis de uma corda em uma circunferência de diâmetro cinco centímetros.

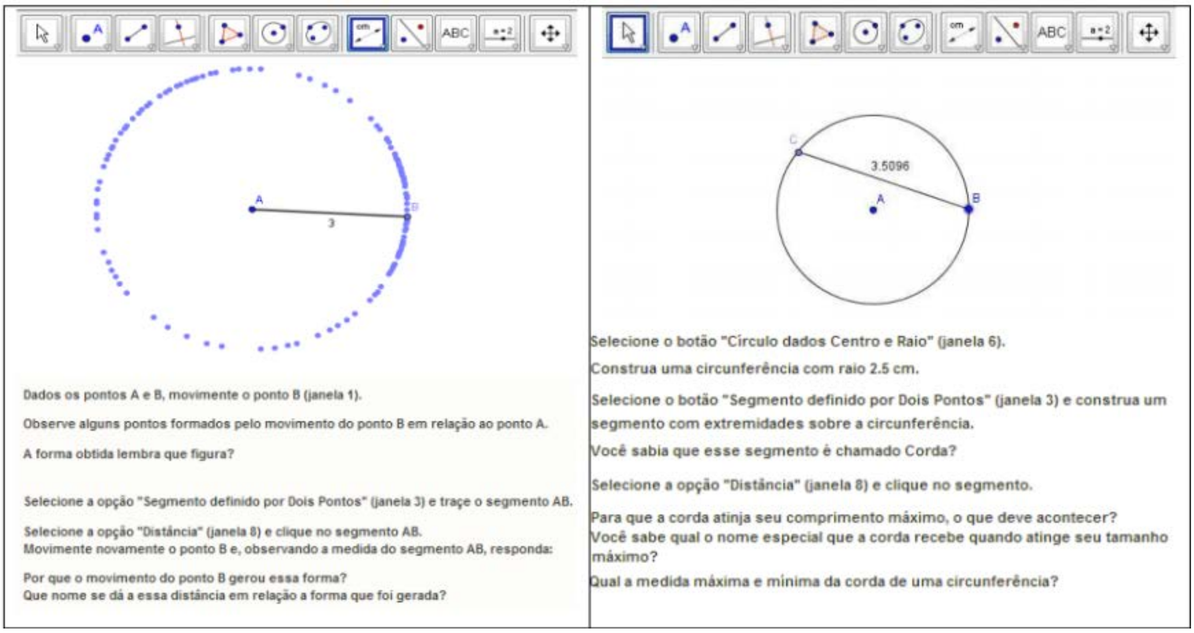


Figura 5 - Quadros atuais para explorar os conceitos de circunferência, raio, corda e diâmetro
Fonte: Tarefa elaborada pela professora

Transformar um material que foi elaborado com cuidado e já desenvolvido com seus próprios alunos, pode ser um processo doloroso para quem elaborou, mas faz parte do longo processo de transformar práticas. Apesar dos desesperos, Suelen soube extrair dessa experiência aprendizados profundos que a levaram a buscar reconhecimento para o seu desenvolvimento profissional. Isso se confirma quando ela afirma que "este grupo é mais que um encontro de professoras de Matemática, ele me faz querer mais na minha profissão, ele me apoia, me aponta, me direciona, me transforma em uma formadora" (Perfil - Suelen).

Em uma das respostas ao questionário de pesquisa aplicado pela primeira autora deste artigo, Renata defende a importância desse momento também para sua formação, assumindo que "ao precisar argumentar para a Suelen a diferença entre uma atividade e uma atividade investigativa, precisei formular e reformular o que eu mesma entendia por atividade investigativa, para ter argumentos era mais do que necessário ter a compreensão do termo" (Questionário - Renata).

No trecho a seguir, escrito conjuntamente por Suelen e Renata, ao responderem ao questionário, uma completando a ideia da outra, é possível perceber experientes e inexperientes aprendendo com a mesma prática.

> Ao vivenciar uma revisão de atividade em grupo percebemos o quanto somos inexperientes em algumas situações de aula. Em determinadas aulas achamos que o material que preparamos foi o suficiente, mas, ao nos depararmos com uma turma quieta, sem questionamentos, percebemos que algo estava errado.
>
> Quando discutimos uma sequência ou preparamos uma nova, temos a oportunidade de revisitarmos a nossa própria prática em sala de aula. Temos a oportunidade de começar um conteúdo por um outro caminho que se torne mais significativo para a construção do conhecimento do aluno. Pensar em atividades ou exercícios que possam complementar e dar significado à aprendizagem do aluno.
>
> A partir da oportunidade de poder nos avaliar coletivamente criamos coragem de expor nosso trabalho sem medo de receber críticas. E assim, poder trazer novos olhares para a própria sala de aula. (Questionário – Renata e Suelen, escrita conjunta pelo *Googledocs*)

Nesta narrativa estão presentes indícios de diferentes tipos de aprendizagem, que se misturam e se complementam. Ao apresentar ao grupo sua sequência, Suelen dá forma a sua experiência "pela produção de objetos que congelam essa experiência em 'coisificação'" (Wenger, 1998, p. 58). Esta reificação é essencial e constitutiva da comunidade, pois ela cria os "pontos de foco em torno dos quais a negociação de significado se torna organizada" (Wenger, 1998, pp. 58-59).

Reificando seu modo de pensar o ensino daquele conteúdo por meio da tecnologia, Suelen denota uma "aprendizagem como fazer", que é valorizada pelo grupo quando as professoras, apesar de desconstruírem a versão inicial apresentada por Suelen, afirmam que não dão conta de construir uma sequência como aquela no GeoGebra. Ao questionarem a abordagem dada às atividades e alertarem à Suelen sobre a necessidade de uma mudança de postura, elas apresentam indícios de uma "aprendizagem como pertencimento" à comunidade, pois não aceitam mais que uma sequência de tarefas reproduza o roteiro da aula tradicional. Ao refazer e reapresentar a sequência ao grupo, Suelen vai aprendendo "na prática", e ajusta ou aperfeiçoa, com a colaboração do grupo, a sua reificação.

Destaca-se, nesse processo, uma "aprendizagem como transformação" e, ao mesmo tempo, "como pertencimento", pois ela transforma seu modo de pensar a sequência de tarefas utilizando a tecnologia, buscando ao mesmo tempo adaptá-la à abordagem defendida pelo grupo. Ela procura aproximar sua prática da prática que essa comunidade acredita ser a mais adequada.

Suelen transforma a sua prática, percebendo como conduzir um processo mais voltado para a construção do conhecimento do aluno e, em seguida, com sua pesquisa de mestrado, transforma a identidade da comunidade e das professoras, que passam a incorporar as tecnologias em suas práticas.

Conclusões e considerações finais

Suelen, ao compartilhar com o grupo a sequência que elaborou para o ensino de matemática na escola, com tarefas que acreditava serem exploratórias e investigativas, mostrou-se aberta para receber da comunidade fronteiriça questionamentos e negociar sugestões de modificação das propostas. Esta postura como participante da comunidade, já representa um indício de "aprendizagem como participação", pois passa a participar não apenas perificamente (como ouvinte ou observadora das práticas do grupo), mas como produtora (reificadora) de tarefas para o ensino e aprendizagem de matemática, utilizando recursos tecnológicos (prática ainda pouco comum no grupo).

Ao compartilhar sua produção com o grupo, expõe seu modo de pensar e intepretar o que o grupo faz e pensa acerca do que seria uma tarefa ou atividade exploratória e investigativa em sala de aula. Ao ser interpelada e questionada pelas outras participantes sobre o seu sentido de tarefa investigativa, ressignifica seu sentido e passa, de um lado, a refazer as tarefas em uma perspectiva mais exploratória e aberta à investigação dos alunos, evidenciando, desse modo, uma "aprendizagem como fazer" e, de outro lado, a receber o reconhecimento das colegas de grupo por também preparar sequências com tarefas exploratório-investigavas envolvendo, porém, a utilização novas tecnologias, o que evidencia "aprendizagem como pertencimento". E é nesse processo que Suelen transforma sua prática como professora e como participante do grupo e contribui para que o próprio grupo também transforme sua prática incorporando as tecnologias no ensino da matemática, o que representa fortes indícios de uma "aprendizagem como transformação".

O movimento apresentado - da professora iniciante que apresenta uma sequência de tarefas inicialmente criticada pelas professoras, mas aceita críticas e faz mudanças radicais para pertencer e participar desta comunidade; que motivada por esta transformação se torna pesquisadora e, em seguida, propõe a inserção das tecnologias na prática destas professoras; que analisa os resultados dessa inserção e os efeitos da colaboração neste processo - compõe uma espiral de aprendizagem que o trabalho colaborativo permite construir em uma comunidade. Nessa espiral, a formação da professora iniciante e das professoras experientes se funde e cria um ambiente complexo, permeado por práticas de pesquisar e de ensinar, pleno de envolvimento e cumplicidade, colocando o mundo da escola e o da academia em diálogo.

Professores, em uma comunidade fronteiriça, vão ressignificando e percebendo outras relações entre suas práticas, outras possibilidades de educar, mas também vão se apropriando de conhecimentos que são de natureza mais acadêmica. Aprendem o que é aprender enquanto docente: sobre as práticas de ensinar e aprender e o que orienta/fundamenta/justifica essas práticas. Novos sentidos vão sendo adquiridos enquanto outros vão mudando. Não é mais aquele sentido da escola tradicional, nem um sentido acadêmico puro, mas de natureza fronteiriça e que é produzido e situado num contexto complexo e que resultada da interlocução entre os saberes da universidade e os saberes da escola.

Diante desses resultados, concluímos que os quatro eixos adotados constituíram-se numa ferramenta poderosa para identificar não propriamente as práticas realizadas, como se faz em muitos trabalhos de pesquisa sobre formação de professores em comunidades, mas como ocorre o processo de aprendizagem docente situada em um grupo fronteiriço, envolvendo práticas de letramento docente que transitam entre o mundo da escola e o da academia e como isso reverbera na transformação das práticas de ensinar e aprender na escola básica.

Bibliografia

Assmann, H. (1998). **Reencantar a educação**: Rumo à sociedade aprendente. Petrópolis: Vozes.

Clandinin, D. J., & Connelly, F. M. (2011). **Pesquisa narrativa: experiência e história em pesquisa qualitativa.** Tradução: Grupo de Pesquisa Narrativa e Educação de Professores ILEEI/UFU. Uberlândia: EDUFU.

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L. (1999). Relationships of Knowledge and Practice: teacher learning in communities. **Review of Research in Education***.* USA, 24, 249-305.

Cristovão, E. M. (2015) **Estudo da aprendizagem professional de uma comunidade de professoras de matemática em um contexto de práticas de letramento docente**. Tese (doutorado). Orientador Dario Fiorentini. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

Fiorentini, D. (2013). Learning and professional development of the mathematics teacher in research communities. **Sisyphus-Journal of Education**, *1*(3), 152-181.

Fiorentini, D., & Carvalho, D. L. (2015). O GdS como lócus de experiências de formação e de aprendizagem docente. In: D. Fiorentini, F. L. P. Fernandes & D. L.

Carvalho (Eds.), **Narrativas de práticas e de aprendizagem docente em matemática** (pp.15-37). São Carlos: Pedro & e João Editores.

Larrosa, J. (2011). Experiência e alteridade em educação. **Revista reflexão e ação**, 19(2), 04-27.

Lave, J. La práctica del aprendizaje (2001). In: S. Chaiklin & J. Lave, (Eds.), **Estudiar las practicas -** perspectivas sobre actividad y contexto. Tradução Ofélia Castillo (pp. 15-45). Buenos Aires: Amorrortu editores.

Lave, J., & Wenger, E. (2002). Prática, pessoa, mundo social. In: H. Daniels (Ed.), **Uma Introdução a Vygotsky (p**p. 165-173). São Paulo: Edições Loyola.

MCDermott, R. P. (2001). La adquisición de un niño por una discapacidad de aprendizaje. In: S. Chaiklin & J. Lave, (Eds.), **Estudiar las practicas -** perspectivas sobre actividad y contexto (pp. 15-45). Tradução Ofélia Castillo. Buenos Aires: Amorrortu editores.

Mockler, N. (2011). Beyond 'what works': understanding teacher identity as a practical and political tool. **Teachers and Teaching:** Theory and Practice, 17(5), 517-528.

Street, B. V. (2014). **Letramentos Sociais***:* Abordagens críticas do letramento no desenvolvimento, na etnografia e na educação. Tradução Marcos Bagno. São Paulo: Parábola Editorial.

Wenger, E. (1998). **Communities of practice:** learning, meaning and identity. Cambridge: Cambridge University Press.

Wenger, E. (2013). Uma teoria social da aprendizagem. In: K. Illeris (Ed.), **Teorias contemporâneas da aprendizagem** (pp. 246-257). Tradução de Ronaldo Cataldo Costa. Porto Alegre: Penso.

Zeraik, S. M. (2013). (Re)elaborando colaborativamente uma proposta de atividade sobre o estudo da circunferência. **Anais do IV Shiam.** Campinas: FE/Unicamp. Disponível em: https://sites.google.com/site/anaisdoivsnhiam/apresentacao

Autores:

Primer autor: Profa. Dra. Eliane Matesco Cristovão
Email: limatesco@unifei.edu.br
35 98403 3599

Professora do Instituto de Matemática e Computação (IMC) da Universidade Federal de Itajubá (Unifei). Doutora em Educação, subárea Ensino e Práticas Culturais (2015), Mestre em Educação Matemática (2007), Especialista em Ciência, Arte e Prática Pedagógica (1997) e licenciada em Matemática (1995), todos pela Unicamp.

Segundo autor: Prof. Dr. Dario Fiorentini
Email: dariof@unicamp.br
19 99243 1874

Graduado em Matemática pela Universidade de Passo Fundo (1977), mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (1980), doutor em Educação (Metodologia de Ensino) pela Unicamp (1994) e Estágios Posdoutorais de curta duração nas Universidades de Lisboa e de Sevilla. Atualmente é pesquisador PQ do CNPq (nível 1D) e professor da Unicamp.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 34-45

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Estrategias didácticas en libros de matemáticas españoles del siglo XIX: los tratados elementales de Juan Cortázar

Carmen León Mantero, Alexander Maz-Machado, María José Madrid, Noelia Jiménez-Fanjul

Fecha de recepción: 09/08/2016
Fecha de aceptación: 21/02/2018

Resumen	El siguiente trabajo analiza las estrategias didácticas halladas en los cuatro tratados elementales, *Tratado de Aritmética, Álgebra Elemental, Geometría Elemental* y *Trigonometría y Topografía*, del autor del siglo XIX, Juan Cortázar. Se encuentran en las obras numerosas estrategias destinadas a optimizar el aprendizaje de los alumnos y a servir de apoyo a los profesores que usaban sus libros de texto. Entre ellas destacan sugerencias, propuestas metodológicas, contenidos originales, aplicaciones teóricas y adaptadas a la realidad de la época, figuras y representaciones aclaratorias, así como el uso de materiales manipulativos. **Palabras clave**: Historia de la Educación Matemática, Juan Cortázar, siglo XIX, estrategias didácticas.
Abstract	The following study analyses the teaching strategies included in the four basic treatises: Treatise on Arithmetic, on Elementary Algebra, on Elementary Geometry and on Trigonometry and Topography, written by the nineteenth century author, Juan Cortázar. Through a didactic content analysis, there were found in the books several strategies to optimize the learning of the students and to provide support to teachers who used these treatises. Among these strategies, there are suggestions, methodological proposals, original contents, applications some of them purely theoretical and other adapted to the daily life of that century, figures and explanatory representations and the use of manipulative materials. **Keywords**: History of Mathematics Education, Juan Cortázar, nineteenth century, teaching strategies.
Resumo	O artigo a seguir analisa as estratégias de ensino encontrados nos quatro tratados fundamentais, *Tratado Aritmética (Tratado de Aritmética), Álgebra Elementar (Álgebra Elemental), Geometria Elementar (Geometría Elemental)* e *Trigonometria e Topografia*

(Trigonometría y Topografía), o autor do século XIX, Juan Cortázar. Estão em obras inúmeras estratégias para otimizar o aprendizado dos alunos e dar apoio aos professores usando seus livros . Estes incluem sugestões, propostas metodológicas , conteúdo original , teóricos e adaptados à realidade da época, figuras e aplicações representações explicativas eo uso de materiais manipuláveis.

Palavras-chave: História da Educação Matemática, Juan Cortazar, século XIX, estratégias de ensino.

1. Introducción

La evolución histórica de los conceptos matemáticos, su enseñanza y todos aquellos aspectos que permitan conocer la forma en la cual éstos adquirieron el significado que poseen actualmente, conforma el campo de estudio de la Historia de la Educación Matemática. Desde la invención de la imprenta en el siglo XV, el medio más usual de trasmisión de información a lo largo del tiempo ha sido el libro. Por otro lado, es innegable la relevancia del libro de texto en el terreno educativo. La investigación histórica centrada en libros de texto escolares nos proporciona información tanto de los conocimientos científicos como de los conocimientos didácticos utilizados en una época determinada (Maz-Machado y Rico, 2015).

A nivel internacional se han realizado diversos estudios centrados en el análisis de libros de texto, algunos investigan sobre conceptos: por ejemplo, los números negativos en manuales españoles de los siglos XVIII y XIX (Maz y Rico, 2007; 2009a), el análisis de manuales de matemáticas alemanes y franceses para determinar el tratamiento que se le daba a los números negativos en la primera mitad el siglo XIX Schubring (1988), o el concepto de limite funcional en libros de bachillerato y Curso de Orientación Universitaria entre 1940-1995 (Sierra, González y López, 1999). En ocasiones se analizan los libros de matemáticas en un país: por ejemplo, el análisis que realiza Beyer (2006) sobre las aritméticas utilizadas en Venezuela durante el siglo XIX, o el estudio de Frejd (2013) en el que se analizan y comparan libros antiguos de álgebra publicados en Suecia entre 1794 y 1836. Otra línea de investigación se orienta al estudio de un autor de libros de matemáticas a través del análisis de sus obras. Ejemplo de esto son los estudios sobre los matemáticos españoles José Mariano Vallejo (Maz-Machado y Rico, 2013) y Thomas Cerdá (Maz y Rico, 2009b) o el estudio sobre Lacroix y el cálculo (Caramalho, 2008). Finalmente cabe señalar los estudios históricos sobre tipos de problemas en libros de matemáticas (Gómez, Sanz y Huertas, 2016; Meavilla y Oller, 2015) o sobre aspectos didácticos o representaciones (Madrid, Maz-Machado y León-Mantero, 2015; Maz-Machado y Rico, 2015).

Schubring (1987) señaló algunos aspectos metodológicos para el análisis histórico de libros de texto focalizado tres dimensiones. Las dos primeras dimensiones consisten en analizar los cambios entre las distintas ediciones de un libro de texto tomando un manual elemental como punto de partida y estudiando después otro texto que se ocupe de un campo conceptualmente relacionado con el primero. Por último, en la tercera dimensión, se analizan los cambios dados en los libros de texto marcados por el contexto histórico en el que se desarrollan, como por ejemplo, la evolución de los materiales, debates didácticos, etc.

Son muchos los matemáticos españoles que se destacan como autores de libros de gran influencia educativa en la España del siglo XIX, entre ellos José Mariano Vallejo, Acisclo Fernández Vallín y Bustillo, Joaquín María Fernández y Cardin, Zoel García de Galdeano o Juan Cortázar entre otros (Rico y Maz, 2005). De ellos escogimos a Juan Cortázar (1809-1873), cuya relevancia se manifiesta entre otros aspectos porque fue uno de los dos primeros Catedráticos de matemáticas españoles de la Universidad Central de Madrid cuyos libros de texto tuvieron gran relevancia en la segunda mitad del siglo XIX y el primer cuarto del siglo XX (Vea, 1986). Éstos abarcan todas las ramas de las matemáticas y todas las etapas educativas, desde la educación primaria hasta la Universidad. Además, fueron reeditados en numerosas ocasiones y elegidos para formar parte del listado de libros de texto oficial para la enseñanza secundaria en el año 1846, muestra del notable éxito de su obra (Peset, Garma y Pérez-Garzón, 1978).

Cortázar estudió ingeniería en la Escuela Central de Artes y Manufacturas de París y, al volver a España, se licenció en Ciencias Físico-Matemáticas. Fue profesor de matemáticas desde que cumplió los 18 años, primero en la escuela en la que estudió Humanidades, después en secundaria en el Instituto de Noviciado de Madrid y, por último, en la Universidad Central en la asignatura Álgebra Superior y Geometría Analítica (León-Mantero y Maz-Machado, 2015). Por tanto, es posible considerarlo como un relevante e influyente autor que contribuyó tanto a la difusión de los conocimientos matemáticos como a la construcción de las matemáticas escolares de su época.

El interés didáctico que suscita este estudio se manifiesta en la importancia de conocer las estrategias didácticas que se planteaban en el pasado para la transmisión y enseñanza de los conocimientos matemáticos en los libros publicados por un autor de reconocido éxito en el panorama educativo español del siglo XIX. En la actualidad todos los implicados en el proceso de enseñanza de las matemáticas se preocupan por usar diversas estrategias docentes para beneficio de los alumnos. Conocer los recursos del pasado permite al profesor reconocer si los libros de texto actuales realmente innovan o simplemente reproducen las estrategias didácticas ya utilizadas en el pasado.

2. Objetivo

El presente estudio tiene por objetivo identificar y analizar las estrategias metodológicas o didácticas en los cuatro tratados elementales de Juan Cortázar (1809-1873).

3. Metodología

Esta investigación es descriptiva y cualitativa de carácter exploratorio.

De la abundante producción de Cortázar se seleccionaron los cuatro tratados elementales, por la amplitud y profundidad de los temas que presentan, por ser los que poseen un mayor número de ediciones y por ser los elegidos como libros de texto oficial en la enseñanza secundaria:

- *Tratado de Aritmética*, cuya primera edición es del año 1846 y constó de 45 ediciones. Se ha analizado la decimonovena edición, publicada en 1866 en Madrid por la Imprenta de D. Antonio Peñuelas.
- *Tratado de Álgebra Elemental*, cuya primera edición es del año 1848 y constó de 40 ediciones. Se ha analizado la decimoquinta edición publicada en 1865 en Madrid por la Imprenta de Antonio Peñuelas y Gabriel Pedraza.
- *Tratado de Geometría Elemental*, cuya primera edición es del año 1847 y constó de 37 ediciones. Se ha analizado la novena edición publicada en 1861 en Madrid por la Imprenta de D.F. Sánchez a cargo de D. Agustín Espinosa.
- *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y Topografía*, cuya primera edición es del año 1848 y constó de 24 ediciones. Se ha analizado la sexta edición publicada en 1859 en Madrid por la Imprenta de D.F. Sánchez a cargo de D. Agustín Espinosa.

Para su análisis seguimos el proceso llevado a cabo en otras investigaciones históricas sobre libros de texto de matemáticas siguiendo las recomendaciones de Maz (2009), para este tipo de estudios. Para ello recurrimos a la técnica del análisis de contenido. Se tomaron como unidades de análisis para cada libro:

- La introducción y el prólogo, en los que el autor señala a quienes estaban dirigidas y el propósito de las obras y la secuenciación y justificación de contenidos originales propuestos con respecto a obras contemporáneas.
- Las definiciones, los ejercicios, los ejemplos, los problemas y las actividades propuestas en cada obra. Así mismo, el propio planteamiento de cada obra.
- Las notas incluidas tras cada uno de los bloques de contenido, que incluyen sugerencias y propuestas metodológicas, así como materiales manipulativos recomendados, para que el alumno optimice su trabajo y alcance los conocimientos requeridos en el correspondiente nivel educativo.
- Los anexos, en los que se incluyen láminas con representaciones gráficas, que sirven de apoyo a las explicaciones y demostraciones de resultados y teoremas principales.

4. Resultados y discusión

Los matemáticos españoles de esta época conocían los hallazgos matemáticos alcanzados en la época, sin embargo, su dedicación se centró en la enseñanza, aplicación y difusión de éstos y no, en la creación de nuevos conocimientos. Gracias a sus estudios en Francia, Cortázar estaba en disposición de incorporar los conocimientos adquiridos sobre los nuevos métodos franceses a sus obras llenas de consideraciones y estrategias didácticas (León-Mantero y Maz-Machado, 2015).

Las obras fueron elegidas para que formaran parte del listado oficial de libros de texto en Universidades, Institutos y Escuelas Profesionales en 1848 (Gaceta de Madrid de 15 de septiembre de 1848). Por tanto, estaban dirigidas y servían de apoyo a los miembros de la comunidad académica en el desarrollo del curso escolar, tanto a profesores y alumnos de la enseñanza secundaria, universitaria y escuelas técnicas. Por otro lado, se trata, de obras versátiles que abrazan diferentes etapas educativas, gracias a que los párrafos o apartados que los profesores de filosofía o escuelas profesionales debían omitir en sus clases, venían señalados con un asterisco.

Además, se establecieron como obras de referencias entre los académicos de la época quienes hacían referencias a ella dentro de sus obras para indicar que podrían encontrar en ellas más información (Giol y Soldevilla y Goyanes y Soldevilla, 1864).

Su lenguaje es formal y metódico, estrictamente matemático, cuyo contenido se encuentra organizado en definiciones, resultados, proposiciones y teoremas con sus respectivas demostraciones, corolarios, notas, diferentes tipos de ejemplos, problemas variados con solución y, aunque escasos, ejercicios y problemas propuestos.

4.1. Tratado de Aritmética

Este tratado está dividido en dos partes: la primera se compone de cinco libros y está dedicada al cálculo de los números, en particular de los números naturales, enteros, quebrados, raíces cuadradas y cubicas y proporciones. La segunda parte se compone de dos libros que tratan de operaciones y problemas de aplicación de la aritmética, en la que encontramos ejercicios y problemas, tanto teóricos como de aplicación a la vida diaria, resueltos de manera detallada, en numerosas situaciones económicas y de medida. Además, se incluye una lámina al final de la obra, que sirve de apoyo a las explicaciones.

Al contrario que otros autores de la época, Cortázar recomienda a los lectores del tratado que representen las cantidades sobre las que giran los razonamientos, mediante signos, ya sean guarismos (cifras) o letras. De otro modo, “no se fijan las ideas, los razonamientos son vagos, y por lo mismo difíciles de ser comprendidos” (Cortázar, 1866, p. V). También opina que no es conveniente el uso de las letras en las primeras proposiciones y, éstas se pueden demostrar usando guarismos siempre que “los guarismos elegidos sean independientes de sus valores particulares” (Cortázar, 1866, p. V). Sin embargo, en las cantidades que entran en un teorema en el que “deben satisfacer á condiciones que no llenan números tomados á arbitrio” (Cortázar, 1866, p. VI), es conveniente el uso de letras.

La exposición del sistema métrico se realiza en pocas páginas, sin embargo Cortázar considera su planteamiento más completo que el de resto de autores:

> […] partiendo de las equivalencias dadas por la Comisión de pesa y medidas, hemos hallado científicamente las equivalencias aproximadas entre las

> medidas llamadas de Castilla y las métricas, y dado la regla para hallar equivalencias análogas entre las medidas de cualquier provincia y las métricas (Cortázar, 1866 p. IV).

Podemos encontrar a lo largo de toda la obra, estrategias que facilitan a los alumnos el estudio de la aritmética. Por ejemplo, a la hora de llevar a la práctica una multiplicación, propone “para mayor brevedad, tomar por multiplicador el factor que tiene menor número de cifras significativas: el producto será siempre el mismo, cualquiera que sea el factor que se tome por multiplicador” (Cortázar, 1866, p. 14).

4.2. Tratado de Álgebra Elemental

Sus seis libros están dedicados al cálculo algébrico, las ecuaciones de primer grado, los problemas determinados de primer grado, las potencias y raíces de las cantidades algébricas, las ecuaciones de segundo grado y los logaritmos y progresiones.

En general se utiliza metodología deductiva para demostrar resultados y teoremas, pero, en las ocasiones en las que lo considera necesario, enumera diferentes ejemplos y ejercicios, que recorren los posibles casos con los que el alumno puede llegar a encontrarse, para después deducir un resultado general.

Vea (1995) resalta capítulos de especial originalidad como la indeterminación cero entre cero, el tratamiento meticuloso de la radicación de monomios y polinomios, sobre todo en el caso de las raíces imaginarias o los conceptos de máximo y mínimo, así como el tratamiento dado a las progresiones y los logaritmos, que coincide con el que se le da en la actualidad y, es que Cortázar considera que los logaritmos deben ser incluidos dentro del álgebra y no dentro de la aritmética como lo hacen Bourdon o Fernández Vallín.

En el caso de la resolución de ecuaciones, una vez que se han planteado los métodos de resolución, se presentan diversos tipos de ejemplos particulares, mostrando después la resolución general de dichos problemas. Gracias a ello, recomienda a los lectores que intenten resolver los problemas por diferentes métodos usando una incógnita, usando dos o usando datos generales, en vez de particulares.

Cortázar establece a lo largo de toda la obra, algunas sugerencias para concienciar a los alumnos de los aspectos que poseen mayores dificultades. Por ejemplo, resalta la conveniencia de considerar la incógnita de una ecuación como representante tanto de un número positivo como de uno negativo, para así poder generalizar las soluciones de una ecuación en ambos sentidos. También, destaca la importancia de saber distinguir entre identidad y ecuación:

> NOTA. Obsérvese con cuidado, pues es de gran importancia, la diferencia que hay entre identidad y ecuación: la primera se verifica por cualesquiera valores de sus letras, mientras que la segunda solo se verifica por ciertos valores de la incógnita ó incógnitas que contenga (Cortázar, 1865, p. 4).

Igualmente, Cortázar conecta nuevos conocimientos con ideas previas o adquiridas para facilitar el proceso de aprendizaje:

> Ya hemos visto (Aritm. núm. 31) que para indicar el producto de varias cantidades literales, no hay mas que juntarlas sin interposición de ningun signo. […]
>
> Para indicar el producto de una cantidad literal por una numérica ó literal, se escribe el multiplicador, que en el Álgebra se llama coeficiente, y á continuación el multiplicando. (Cortázar, 1865, p. 3).

4.3. Tratado de Geometría Elemental

El *Tratado de Geometría Elemental* está dividido en capítulos, la mitad de ellos dedicados a geometría plana y los restantes a geometría del espacio. Como anexo, encontramos también un capítulo dedicado al estudio de las curvas elipse, parábola y hélice, que, aunque no está incluido en el programa del Gobierno español, Cortázar vio conveniente añadir por ser las curvas más usadas en la práctica después del círculo.

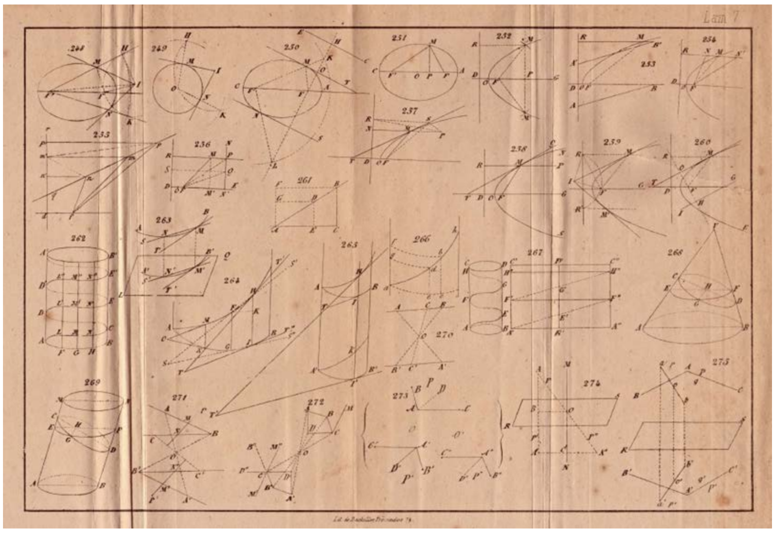


Figura 1. Lámina 7.
Fuente: Tratado de *Geometría Elemental* de Juan Cortázar (1861).

En la introducción del tratado, Cortázar destaca la utilidad de sus conceptos básicos y axiomas como herramientas para el posterior planteamiento de las bases de la geometría elemental. Se definen los conceptos de línea, punto, plano o los elementos y definición de circunferencia. Destaca, además, la tabla de la figura 2 donde presenta y organiza los dominios de las divisiones de estudio de la Geometría, es decir la plana y la del espacio.

DIVISION DE LA GEOMETRÍA.

GEOMETRÍA PLANA.	GEOMETRÍA DEL ESPACIO.
LIBRO I.	LIBRO I.
Linea recta y ángulos.	*Planos, ángulos diedros y ángulos poliedros.*
LIBRO II.	LIBRO II.
Poligonos.	*Poliedros.*
LIBRO III.	LIBRO III.
Circulo.	*Los tres cuerpos redondos.*
LIBRO IV.	LIBRO IV.
Poligonos semejantes.	*Poliedros semejantes.*
LIBRO V.	LIBRO V.
Areas de los poligonos y del circulo.	*Areas y volúmenes de los poliedros y cuerpos redondos.*

Figura 2. Tabla de la división de la Geometría.
Fuente: Tratado de *Geometría Elemental* de Juan Cortázar (1861).

La nota I, sobre la resolución de los problemas geométricos, que se incluye al finalizar el tratado, expone una clasificación de los diferentes tipos de problemas geométricos y diferentes estrategias de resolución, así como el método más adecuado a cada caso. Así,

- Para resolver los problemas gráficos y generales numéricos puede seguirse:
  - El método analítico, que "consiste en suponer que el problema está resuelto, haciendo un croquis de la construccion que se pide, y en llegar por medio de este croquis á la construccion desconocida" (Cortázar, 1861, p. 185).
  - El método sintético, que "consiste en ejecutar desde luego la construccion, y en demostrar despues que dicha construccion satisface el problema" (Cortázar, 1861, p. 185).
- Para resolver los problemas particulares numéricos, "se despeja la incógnita en la ecuacion del problema general en que está comprendido el problema particular, y en seguida se ejecutan las operaciones numéricas indicadas por el valor de la incógnita" (Cortázar, 1861, p. 186).

Cortázar apuesta por el uso de materiales manipulativos como la regla, escuadra y transportador para "trazar líneas rectas en el papel" (Cortázar, 1861, p. 36), para "tirar perpendiculares y paralelas en el papel" (Cortázar, 1861, p. 36) o "para construir en el papel un ángulo de un cierto número de grados" (Cortázar, 1861, p. 37). Esto unido a la incorporación, en la última parte del tratado, de láminas con figuras que representan las explicaciones y demostraciones de los teoremas, así como la resolución de los ejemplos y problemas resueltos, muestra el interés de Cortázar por el apoyo visual como estrategia didáctica en el estudio de la Geometría.

4.4. Tratado de Trigonometría y Topografía

Al igual que el *Tratado de Geometría Elemental*, el *Tratado de Trigonometría y Topografía* incluye láminas con representaciones al final de la obra. Sus capítulos están estructurados en los dedicados a la trigonometría rectilínea, los dedicados a la trigonometría esférica, los dedicados a la topografía y el resto de capítulos para complementos. El propio autor señala en una advertencia al inicio de la obra que el *Tratado de Trigonometría* podía omitirse si lo que se buscaba era un tratado de Agrimensura complementario al *Tratado de Geometría Elemental*.

Cortázar fue fiel defensor de la simplificación de las teorías y métodos de resolución siempre que en la teoría o en la práctica fuera raro tener necesidad de ellos, para así evitar a los alumnos la dificultad de retener teoremas o resultados superfluos y poder facilitar el estudio de la asignatura. Es el caso, por ejemplo del estudio de las secantes y cosecantes, que pueden reducirse al estudio del seno o el coseno.

Al igual que el resto de tratados, establece algunas estrategias que ayudan a los alumnos en aspectos que puedan ayudar a simplificar cálculos y razonamientos:

> NOTA. Obsérvese que el mayor valor absoluto del seno ó coseno es el radio, y el menor es cero; y que, dada una cantidad positiva menor que el radio, existe en el primer cuadrante un arco que tiene por seno á dicha cantidad, y otro que tiene por coseno á la misma: que el mayor valor absoluto de la tangente ó cotangente es ∞, y el menor es cero; y que, dada una cantidad positiva ó negativa cualquiera, existe en el primero ó segundo cuadrante un arco que tiene por tangente á dicha cantidad, y otro que tiene por cotangente á la misma (Cortázar, 1859, p. 9).

El uso de métodos de resolución que se apoyan en materiales manipulativos, es constante en la segunda parte del tratado que trata sobre Topografía. Se usan cadenillas, escuadra y cartabón, cuerdas, grafómetros, brújulas o planchetas como herramientas que ayudan a resolver un mismo problema de varias formas diferentes.

La Tabla 1 resume los aspectos didácticos presentados en los cuatro tratados previamente analizados.

	Incluye representaciones gráficas	**Incluye estrategias y sugerencias**	**Contenidos y secuenciación originales**	**Uso de materiales manipulativos**	**Incluye aplicaciones**
Aritmética	X	X	X		Matemáticas y de la vida cotidiana

Álgebra Elemental	X	X	X		Matemáticas y de la vida cotidiana
Geometría Elemental	X	X	X	X	Matemáticas
Trigonometría y Topografía	X	X	X	X	Matemáticas y de la vida cotidiana

Tabla 1. Indicadores de actividad didáctica en las obras de Juan Cortázar

5. Conclusiones

La intención didáctica de Cortázar se manifiesta en todas las obras, las cuales poseen a cada paso, numerosas notas del autor sobre diferentes propuestas y sugerencias que el alumno podía seguir para facilitar el estudio de la materia. Además, la adicción de láminas con las representaciones gráficas de los resultados de los teoremas o los problemas, constituyen un valor añadido a las explicaciones verbales ofrecidas por el autor. Entre las páginas de los *Tratados de Aritmética* y *Álgebra Elemental* se evidencian los esfuerzos del autor por trasladar a los alumnos de forma sencilla los contenidos de ambas materias.

Ya en el siglo XIX, Cortázar apostaba por el uso de materiales manipulativos, como la escuadra, el cartabón o el transportador de ángulos, que ayudaran al alumno a visualizar los resultados de los teoremas y demostraciones en el papel, favoreciendo que los procedimientos no se quedaran en el plano teórico. El *Tratado de Trigonometría y Topografía*, era de gran utilidad a los profesionales de la agrimensura ya que, mostraba la polivalencia de los numerosos materiales de medida, a través de los cuales pueden resolverse problemas usuales de su ámbito de trabajo.

De entre todas las obras analizadas, el *Tratado de Geometría Elemental* es, la obra más técnica; todas las aplicaciones incluidas son de tipo teórico y no se hace referencia a problemas asociados a la vida cotidiana. No obstante, por sus características, es el tratado que más se apoya en las representaciones gráficas a la hora de demostrar proposiciones y teoremas y de resolver problemas.

El interés didáctico que suscita este estudio se manifiesta en la importancia de conocer las estrategias didácticas que se planteaban en el pasado para la transmisión y enseñanza de los conocimientos matemáticos en los libros publicados por un autor de reconocido éxito en el panorama educativo español del siglo XIX. En la actualidad todos los implicados en el proceso de enseñanza de las matemáticas se preocupan por usar diversas estrategias docentes para beneficio de los alumnos. Conocer los recursos del pasado permite al profesor reconocer si los libros de texto actuales realmente innovan o simplemente reproducen las estrategias didácticas ya utilizadas en el pasado.

En resumen, este trabajo evidencia el interés de uno de los autores de mayor influencia en la formación de escolares del siglo XIX, por establecer estrategias didácticas a favor de una enseñanza de calidad, a través del uso de materiales manipulativos, aplicaciones prácticas a la vida cotidiana, sugerencias de resolución, el uso de representaciones y una secuenciación de los contenidos sencilla y clara, sin perder la formalidad del lenguaje matemático.

Bibliografía

Beyer, W. O. (2006). Algunos libros de Aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1912. *Revista de Pedagogía, XXVII*(78), 71-110.

Caramalho, J. (2008). *Lacroix and the calculus.* London: Springer Science & Business Media.

Cortázar, J. (1859). *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y Topografía*. Sexta edición. Madrid: Imprenta de D.F. Sánchez a cargo de D. Agustín Espinosa.

Cortázar, J. (1861). *Tratado de Geometría Elemental*. Novena edición. Madrid: Imprenta de D.F. Sánchez a cargo de D. Agustín Espinosa.

Cortázar, J. (1865). *Tratado de Álgebra Elemental*. Decimoquinta edición. Madrid: Imprenta de Antonio Peñuelas y Gabriel Pedraza.

Cortázar, J. (1866). *Tratado de Aritmética*. Decimonovena edición. Madrid: Imprenta de D. Antonio Peñuelas.

Freijd, P. (2013). Old algebra textbooks: a resource for modern teaching. *BSHM Bulletin,* 28, 25-36.

Giol y Soldevilla, I., y Goyanes y Soldevilla, J. (1864). *Tratado de topografía*. Madrid: M. Minuesa.

Gómez, B., Sanz, M. T. y Huerta, I. (2016). Problemas descriptivos de fracciones. *Bolema, 30*(55), 586-604.

León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2015). Juan Cortázar y sus aportaciones a la Educación Matemática española del siglo XIX. *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30*(1), 55-62.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A. y León-Mantero, C. (2015). Representations in the Sixteenth-Century arithmetics books. *Universal Journal of Education Research, 3*(6), 396-401.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En Gonzalez, M., González, M. y Murillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación matemática XIII* (pp. 5-20). Santander: SEIEM.

Maz, A. y Rico, L. (2007). Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX. *PNA, 1*(3), 113-123.

Maz, A. y Rico, L. (2009a). Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology 17*(1), 537-554.

Maz, A. y Rico, L. (2009b). Las Liciones de Thomas Cerda: doscientos cincuenta años (1758-2008). *Suma (60),* 35-41.

Maz-Machado, A., y Rico, L. (2013). El Tratado elemental de matemáticas de José Mariano Vallejo en el bicentenario de su publicación. *Suma(74)*, 55-63.

Maz-Machado, A., y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME, Revista latinoamericana de Investigación Educativa 18* (1), 49-76.

Meavilla, V. y Oller, A. (2015). Problemas de relojes. Ejemplos históricos y consideraciones. *Bolema, 29*(51), 110-112.

Peset, J. L., Garma, S., & Pérez-Garzón, J. S. (1978). *Ciencias y enseñanza en la revolución burguesa*. Madrid: Siglo veintiuno.

Rico, L., y Maz, A. (2005). Matemáticas, libros y matemáticos: un recorrido por su historia y su relación con las enseñanza en España. En *El libro español de Matemáticas* (pp. 11-35). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-19951. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 463-476.

Schubring, G, (1987). On the methodolgy of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook authors. *For the learning of mathematics, 7*(3), 41-51.

Schubring, G. (1988). Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation das les manuels allemands et français de mathématique entre 1795 et 1845. *Actes du premier colloque franco-allemand de didáctique des mathématiques et de l´informatique* (pp. 137-145). Editions La Pensée Sauvage.

Vea, F. (1986). *Las matemáticas en los planes de estudios de enseñanza secundaria en España en el siglo XIX*. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Vea, F. (1995). *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España (s. XIX)*. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Autores:

León-Mantero, Carmen María**: Doctora por la Universidad de Córdoba (UCO) en el programa de Ciencias Sociales y Jurídicas. Máster en Investigación en la Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias Matemáticas por la Universidad de Huelva (UHU). Profesora de Didáctica de la Matemática. Departamento de Matemáticas. Universidad de Córdoba (UCO), Córdoba, España. *E- mail:* cmleon@uco.es. Tfno.: 957212543**

Maz-Machado, Alexander: **Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Profesor de Didáctica de la Matemática. Departamento de Matemáticas. Universidad de Córdoba (UCO), Córdoba, España. *E- mail:* ma1mamaa@uco.es. Tfno.: 957212543**

Madrid, María José: **Doctora en Matemáticas por la Universidad de Salamanca (USAL). Profesora de Didáctica de la Matemática. Departamento de Matemáticas. Universidad de Córdoba (UCO), Córdoba, España. *E- mail:* mmadrid@uco.es. Tfno.: 957212543**

Jiménez-Fanjul, Noelia: **Doctora por la Universidad de Córdoba (UCO) en el programa de Ciencias Sociales y Jurídicas. Profesora de Didáctica de la Matemática. Departamento de Matemáticas. Universidad de Córdoba (UCO), Córdoba, España. *E- mail:* noelia.jimenez@uco.es. Tfno.: 957218942**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 46-72

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Conocimiento y actitudes acerca de la Estadística, de los profesores de secundaria del estado de Yucatán

Adriana Avilez Poot, María Ordaz Arjona, Luis Reyna Peraza

Fecha de recepción: 11/11/2016
Fecha de aceptación: 30/11/2017

Resumen	En el presente artículo se reportan los resultados de un estudio con metodología cualitativa y cuantitativa, cuyo objetivo fue determinar los niveles de conocimiento y las actitudes acerca de la estadística básica en profesores y futuros profesores de secundaria en el estado de Yucatán, México y analizar la posible relación entre dichas variables. Entre los elementos teóricos considerados se encuentran el concepto de actitud, el conocimiento estadístico, la alfabetización estadística y la Taxonomía de Marzano y Kendall. Los resultados obtenidos giran en torno a los niveles de conocimiento, las fortalezas de los profesores y a las áreas de oportunidad en la formación de profesores. **Palabras clave**: actitudes, alfabetización estadística, conocimiento estadístico y formación de profesores.
Abstract	In this article, the results of a study with qualitative and quantitative methodology are reported; The aim was to determine the levels of knowledge and attitudes about basic statistics in teachers and future high school teachers in the state of Yucatan, Mexico, and analyze the possible relationship between those variables. The theoretical elements include the concept of attitude, statistical knowledge, statistical literacy and Marzano and Kendall's Taxonomy. The results relate to knowledge levels, strengths of the teachers, and areas of opportunity in teacher training. **Keywords**: attitudes, statistical literacy, statistical knowledge and training of teachers.
Resumo	Este artigo apresenta os resultados de um estudo com metodologia qualitativa e quantitativa, cujo objetivo foi determinar os níveis de conhecimento e atitudes sobre estatísticas básicas sobre os professores e os professores do ensino secundário futuras no estado de Yucatán, México e analisar possível relação entre estas variáveis. Entre os elementos teóricos considerados são o conceito de atitude, conhecimento estatístico, a literacia estatística e Taxonomia Marzano e Kendall. Os resultados giram em torno de níveis de conhecimento, pontos fortes de professores e áreas de oportunidade na formação de professores. **Palavras-chave:** atitudes, literacia estatística, conhecimento estatístico e formação de professores.

1. Introducción

Desde tiempos antiguos, la estadística ha desempeñado un papel fundamental en el desarrollo histórico y cultural de todos los países por ser una herramienta multidisciplinar que provee de información útil para la toma de decisiones. Investigadores como Batanero (2001, 2002) y Estrada (2002) señalan que la educación estadística se ha visto abandonada, pese a que resulta fundamental inculcar en los ciudadanos una cultura estadística desde los niveles básicos, para que puedan desenvolverse en un entorno inmerso en información, siendo necesario en primer lugar que los profesores cuenten con una adecuada alfabetización estadística que posteriormente propiciarán en sus alumnos.

En los últimos años el trabajo en áreas como álgebra, aritmética y el análisis han aumentado generándose un olvido hacia la estadística, rezagándola cada vez más en orden de importancia por parte de los docentes, tal como señala Batanero (2001); en México esto se ve reflejado en el currículo de formación docente donde la estadística ocupa un curso o un semestre a lo más, lo cual genera una actitud de desinterés por parte de los futuros docentes. Al respecto, investigaciones como la de Estrada (2002) señalan que las actitudes guardan una relación con el conocimiento adquirido, es decir, se considera que éstas tienen una importante influencia sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como en el rendimiento académico inmediato.

Por lo anterior, consideramos importante llevar a cabo una investigación con los profesores en formación y profesores en ejercicio del nivel básico secundaria en el estado de Yucatán, México, con el propósito de determinar el nivel de conocimiento estadístico y las actitudes hacia la estadística, así como si existe alguna relación entre estos. En este artículo se reportan los resultados obtenidos en dicha investigación, que nos permitieron determinar áreas de oportunidad y de mejora en esta disciplina.

2. Problemática

Las investigaciones realizadas en los últimos años han sido centradas en el conocimiento estadístico del docente, como la de Sanoja y Ortiz (2013) en profesores de nivel básico primaria en Venezuela, reportando la necesidad de reforzar los conceptos básicos de estadística en los maestros; de la misma manera Pinto, Martín y Barrabí (2007) realizaron un estudio en México centrado en profesores de nivel superior obteniendo resultados similares. Asimismo, la educación estadística ha sido visualizada por muchos estudiantes como difícil de entender y muchos educadores se han sentido frustrados al enseñarla, tal como mencionan Ben-Zvi y Garfield (2004), asociándole sus mitos y prejuicios por ser una rama de las matemáticas.

Investigaciones recientes tienen como centro de interés las actitudes hacia la estadística: Blanco (2007) señala la poca investigación para la definición de los constructos y para el establecimiento de modelos explicativos de las relaciones de las actitudes con otras variables; Ferreyra (2007) en México y Rodríguez y Gutiérrez (2013) en España concluyen que se produjo un cambio significativo favorable en los estudiantes, acrecentando su actitud positiva hacia la estadística después de algún curso previo, ya sea introductorio o específico de algún tema.

Existen estudios sobre actitudes que se encargan esencialmente de encontrar la relación de éstas con el conocimiento estadístico, como el realizado por Estrada, Batanero y Fortuny (2002) en España, enfocado a profesores de nivel básico (primaria), estudio que consideramos como principal referencia, en el cual concluyen que sí existe una relación directa entre los conocimientos y actitudes de los profesores en formación.

En México esta rama de investigación (educación estadística) es un campo nuevo y en el estado de Yucatán aún más; coincidimos con Kravchenko (2013) que en México basta con que una persona haya tomado un curso de Matemáticas durante la carrera y tenga algún título de licenciatura o de educación superior para que se permita ejercer la labor de docente en el área de Matemáticas de cualquier nivel educativo. Aunado a lo anterior, las problemáticas existentes en los docentes de matemáticas del nivel básico (secundaria) son alarmantes. En agosto del 2014 en México diferentes medios de comunicación (CNN México, La Jornada, El Universal) reportaron que, tras aplicarse la primera evaluación del desempeño docente, el 61% de los profesores a nivel nacional fueron considerados no idóneos para ocupar un puesto en las diferentes escuelas y únicamente el 3% de los docentes obtuvieron el desempeño deseado. En Yucatán el 58.8% de profesores de nivel básico resultaron no idóneos.

Por otra parte, pese al reconocimiento de la importancia de la estadística y su utilidad, en las aulas aún no se refleja su enseñanza y aprendizaje con los alcances esperados; a pesar del desarrollo de nuevas propuestas de enseñanza, consideramos que es primordial la capacitación de los profesores de educación básica secundaria en ejercicio y en formación, ya que ellos se encargarán de llevar al aula el contenido a ser aprendido e infundirán en los estudiantes sus actitudes hacia la asignatura (de aceptación o rechazo); pero para una adecuada formación y capacitación, es aún más apremiante identificar su nivel de conocimiento y las áreas de oportunidad.

Con base en lo anterior, nos planteamos como objetivo de investigación determinar los niveles de conocimiento y las actitudes acerca de la estadística básica en profesores y futuros profesores de secundaria en el estado de Yucatán y analizar si existe alguna relación entre dichos conocimientos y las actitudes.

3. Fundamentos teóricos

A continuación, se exponen los elementos que dieron sustento teórico a la presente investigación, así como la postura que se tomó respecto de éstos. Estos elementos teóricos nos permitieron realizar los análisis de los resultados obtenidos.

3.1. Actitudes

De acuerdo con Estrada (2002), las actitudes son parte integrante de todas las asignaturas de aprendizaje y ocupan un lugar central en el acto educativo, guiando el proceso perceptivo y cognitivo que comporta el aprendizaje de cualquier contenido educativo. No hay una definición única del término actitud o algún marco teórico referencial para ello, para Festinger mencionado por Escalante, Repetto y Mattinelo (2011), las actitudes son un constructo psicológico que combina creencias y emociones, predisponiendo al individuo a responder de manera positiva o negativa ante estímulos externos.

En lo que respecta a las actitudes hacia las matemáticas, las investigaciones de Mcleod (1992, 1994, citado en Estrada et al. 2002) se han enfocado a reconocer la importancia de las actitudes en esta ciencia, distinguiendo entre emociones, actitudes y creencias. Para él, las emociones son respuestas inmediatas (positivas o negativas), producidas cuando se estudia matemáticas, mientras que las actitudes son respuestas relativamente más estables o sentimientos más intensos que se desarrollan por repetición de respuestas emocionales y se automatizan con el tiempo, de la misma manera él considera que las creencias son las ideas individuales mantenidas durante un largo tiempo que se tienen sobre la asignatura, sobre uno mismo como estudiante o sobre el contexto social en el que se realiza el aprendizaje.

En este estudio consideramos como actitud la forma como respondemos a los estímulos del exterior, expresándose siempre de manera positiva o negativa y se distingue de las emociones y creencias en que tienen una intensidad menor que éstas. Además, creemos que los pensamientos o creencias intensas pueden ser el origen de las actitudes y viceversa. Estructuramos las actitudes en los cuatro componentes definidos por Schau et al. (Citado en Estrada, Batanero y Fortuny, 2004):

- Componente afectivo: sentimientos positivos o negativos hacia el objeto actitudinal, en este caso es la estadística.
- Componente cognitivo: percepción de la propia capacidad sobre conocimientos y habilidades intelectuales en estadística.
- Componente de valor: utilidad, relevancia y valor percibido de la estadística en la vida personal y profesional.
- Componente de dificultad: actitudes sobre la dificultad percibida de la estadística como asignatura.

3.2. Conocimiento estadístico

Uno de los principales fines de la educación es inculcar una alfabetización estadística en los ciudadanos, entendiendo por esto la cultura que cualquier ciudadano debe poseer para poder comprender la información estadística que se presente a diario en su vida y que en muchos casos influye sobre ella (Batanero, 2002). Entre los objetivos que se pretenden alcanzar hoy en día con la estadística se enfatiza todo el proceso de *razonamiento estadístico* y el sentido de los datos, recomendándose un cambio en el enfoque: se trata de presentar el análisis exploratorio de datos, centrar la estadística sobre las aplicaciones y mostrar su utilidad a partir de áreas diversas (Batanero, Díaz, Contreras & Arteaga 2011); por ello realizamos un análisis del contenido estadístico establecido para la educación básica en México y en el nivel superior, considerando que el primero es el contenido que los profesores deben enseñar y el segundo es el contenido que aprenden para enseñar.

Cabe señalar que el primer análisis realizado corresponde al plan de estudios 2011, donde se observó que el contenido establecido está estructurado en cinco bloques los cuales contienen tres ejes temáticos (sentido numérico y pensamiento algebraico; forma, espacio y medida y manejo de la información); pese a que en todos los bloques se consideran contenidos de los tres ejes temáticos, no siempre se estudian temas de "análisis y representación de datos", es decir que el aprendizaje de este tema no es continuo, ya que se puede estudiar algún subtema en particular durante el primer año y darle un seguimiento en otro ciclo escolar.

En Yucatán existe una Escuela Normal Superior pública (ENSY), encargada de formar a los futuros profesores de matemáticas de nivel básico secundaria; nos enfocamos en esta institución debido a la homogeneidad existente en los planes de estudio nacionales en cuanto al contenido estudiado; en el análisis del plan de estudios se encontró con que solo cuentan con una asignatura destinada a la estadística, que se ubica en el VI semestre, denominada "Presentación y tratamiento de la información", cursada a la par con la asignatura de probabilidad denominada "La predicción y el azar", en la primera se abordan temas de estadística descriptiva y estadística inferencial, observándose un mayor enfoque en aprenderlos que en enseñarlos.

3.3. Taxonomía de Marzano

Hicimos uso de la taxonomía de Marzano y Kendall (2007) para diseñar el instrumento de conocimientos estadísticos, así como para determinar los requerimientos mínimos de conocimiento estadístico que deben tener los profesores e identificar áreas de oportunidad. Esta taxonomía consta de dos dimensiones siendo la primera los niveles de procesamiento y la segunda los dominios de conocimiento; se consideró únicamente la evaluación de dos de los niveles de procesamiento: los sistemas cognitivo e interno. El sistema interno mantiene una relación con las creencias y metas, siendo el que origina la motivación que lleva a una persona a realizar una tarea. Estos autores consideran que a mayor motivación es mayor la posibilidad del éxito. El sistema cognitivo es el responsable del proceso eficiente de la información que es esencial para completar las tareas propuestas, de tal manera que a su vez este sistema se subdivide en niveles:

- Nivel 1 (Conocimiento/ Recuerdo): recuerdo de la información exactamente como fue almacenada en la memoria permanente.
- Nivel 2 (Comprensión): identificar los detalles de la información que son importantes. Recordar y ubicar la información en la categoría apropiada.
- Nivel 3 (Análisis): utilizar lo que han aprendido para crear nuevos conocimientos y aplicarlo en situaciones nuevas.
- Nivel 4 (Utilización del conocimiento): aplicar el conocimiento en situaciones específicas.

4. Elementos metodológicos

El estudio realizado fue exploratorio de carácter descriptivo, utilizando una metodología mixta (cuantitativa y cualitativa). Se realizó un análisis para determinar las variables que a nuestro juicio tendrían mayor probabilidad de intervenir en el conocimiento o en las actitudes de los profesores hacia la estadística, así como indagar la relación entre actitudes y conocimientos.

La población de interés fueron los profesores en ejercicio del área de matemáticas de las escuelas secundarias públicas federales y generales en el estado de Yucatán y los profesores en formación de la misma área (estudiantes de último año de la ENSY con especialidad en matemáticas). Para estos últimos optamos por realizar un censo ya que son los únicos que hasta el momento han cursado estadística en su formación, siendo 36 estudiantes.

La población total de profesores en ejercicio es muy grande y está distribuida en un área extensa (estado de Yucatán, cuya superficie es de 39524 km^2) por lo que se decidió utilizar un muestreo por conglomerados con estratificación, considerando como estratos los 5 distritos federales en los que se encuentra dividido el estado de Yucatán y seleccionando de ellos escuelas representativas (conglomerados).

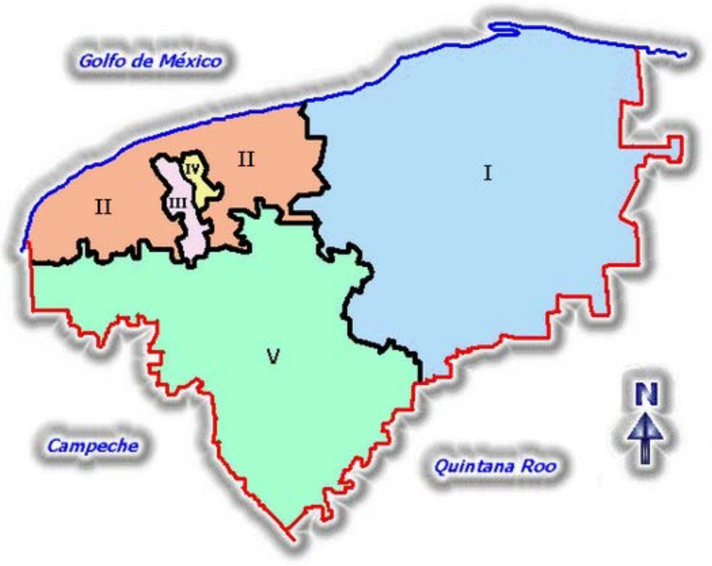


Figura 1. Distritos federales en el estado de Yucatán

Para determinar la muestra, se consideró el total de escuelas secundarias federales y generales que se encuentran dentro de cada distrito y se decidió seleccionar una muestra piloto del 10% en cada uno de éstos de manera aleatoria, considerando los distritos III y IV (Mérida) como uno solo; la selección del número de escuelas quedó de la siguiente manera:

Distrito	Número de escuelas	Elección para el muestreo
Distrito I	36	4
Distrito II	39	4
Distrito III y Distrito IV	45	5
Distrito V	34	4
Total	**154**	**17**

Tabla 1. Distribución del número de escuelas para el muestreo

El muestreo por conglomerados considera tomar a todos los profesores de matemáticas de cada escuela elegida y aplicarles el instrumento.

Se dividieron las variables en tres grupos denominados 1, 2, 3; éstos son, respectivamente: el que relaciona los dos tipos de profesor (en formación y en ejercicio), el que corresponde a profesores en ejercicio y el que corresponde únicamente a profesores en formación, con el fin de seleccionar múltiples variables asociadas al contexto de cada profesor así como variables comunes que pueden influir tanto en las actitudes que tengan hacia la estadística como en el conocimiento estadístico; aunque sabemos que no son las únicas variables posibles, se seleccionaron las de interés para este estudio con el fin de identificar cuáles de las variables seleccionadas son las que manifiestan alguna influencia significativa en la población objetivo.

En todos los análisis las variables respuesta fueron tres: total de conocimientos, total de actitudes y total de cada componente actitudinal; en total se consideraron 10 variables, aunque éstas no son las mismas que se utilizaron para el análisis final, ya que al obtener los resultados se identificaron correlaciones existentes en algunas de ellas, por lo que finalmente se redujeron a las 7 variables que se recogen en la Tabla 2.

Variable	Categoría	Grupo
Tipo de profesor	Profesor en formación Profesor en ejercicio	Grupo 1
Sexo	Femenino Masculino	Grupo 1
Edad	Variable cuantitativa	Grupo 1
Distrito	Distrito 1 Distrito 2 Distrito 3 y 4 Distrito 5	Grupo 2
Nivel de escolaridad	Licenciatura Maestría	Grupo 2
Tipo de bachillerato de procedencia	Propedéutico Bivalente	Grupo 3
Lugar de procedencia del bachillerato	Mérida Interior del estado	Grupo 3

Tabla 2. Variables consideradas en el análisis

En lo que respecta a los instrumentos se consideraron dos pruebas, una de actitudes y otra de conocimientos. Optamos por usar como instrumento de actitudes el elaborado por Ferreyra (2007), el cual es una adaptación mexicana del SATS (Survey of Attitudes Toward Statistics), por lo que cumple con todas las características de éste, además de que el lenguaje empleado es adecuado.

El instrumento cuenta con 20 ítems en escala de Likert con cinco elecciones de respuesta que van desde “totalmente en desacuerdo” hasta “totalmente de acuerdo”. Las variables son las presentadas en la Tabla 3.

El instrumento de conocimientos es un diseño propio en el cual se incluyeron tres reactivos de Estrada (2002) y uno de Medina (2013); los contenidos a evaluar fueron establecidos con base en un análisis de los currículos de la Secretaría de Educación Pública (SEP), la ENSY y en lo establecido como conocimientos básicos requeridos de carácter internacional (cultura estadística), asimismo se elaboró al menos un reactivo por cada nivel de la Taxonomía de Marzano, siendo los de nivel 4 los ya mencionados de Estrada y Medina, por lo que en total los ítems fueron 21. El número de ítems de acuerdo al contenido del currículo quedaron distribuidos de la siguiente manera: cuatro de recogida de datos, siete de organización de datos, cinco de representación de datos y cinco de interpretación de datos. Este instrumento fue validado por cinco expertos en el área y sus observaciones fueron incluidas en la versión final del mismo.

<table>
<tr><th>Indicador</th><th>Variable</th></tr>
<tr><td>Afectivo (1, 2, 8, 11, 14)</td><td rowspan="4">1) Gusto por la estadística.
2) Nivel de seguridad en problemas estadísticos
3) Entendimiento de fórmulas estadísticas.
4) Valor de la estadística
5) Nivel de complejidad de la materia.
6) Conocimientos acerca de estadística.
7) Utilidad en la vida profesional.
8) Nivel de frustración en exámenes de estadística.
9) Aplicación de pensamiento estadístico en la vida.
10) Uso de la estadística en la vida diaria.
11) Nivel de estrés en las clases.
12) Necesidad de disciplina.
13) Errores matemáticos.
14) Temor hacia la estadística.
15) Cantidad de cálculos matemáticos
16) Posibilidad de aprendizaje.
17) Nivel de tecnicidad.
18) Entendimiento de conceptos estadísticos.
19) Necesidad de cambiar pensamiento estadístico personal.
20) Entendimiento de ecuaciones estadísticas.</td></tr>
<tr><td>Cognitivo (3, 6, 13, 16, 18, 20)</td></tr>
<tr><td>Valor (4, 7, 9, 10)</td></tr>
<tr><td>Dificultad (5, 12, 15, 17, 19)</td></tr>
</table>

Tabla 3. Variables de actitudes hacia la estadística

A continuación, se presenta una muestra de tres ítems, uno por cada contenido y correspondientes a los niveles 1, 2 y 3. El instrumento completo se presenta en el Apéndice 1.

Ítem 2.1- Contenido: Organización de datos **Tema:** Tabla de datos ordenados

Nivel: 1 (Conocimiento/ recuerdo)

Una muestra de las compras realizadas por varios clientes de una tienda de abarrotes durante un día, dio por resultado la siguiente información:

Número de artículos comprados por cliente	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	6	10	13	10	8	0	2

de acuerdo con estos datos, responde:

- ¿Cuántos clientes conformaron la muestra?

a) 7
b) 14
c) 28

d) 49 (RESPUESTA CORRECTA)

El ítem evalúa si los profesores pueden obtener el total de una muestra dada una tabla de datos ordenados, es decir, únicamente deben saber que la suma de las frecuencias da como resultado el total de la muestra es por tanto que corresponde al nivel 1. Los distractores evalúan lo siguiente:

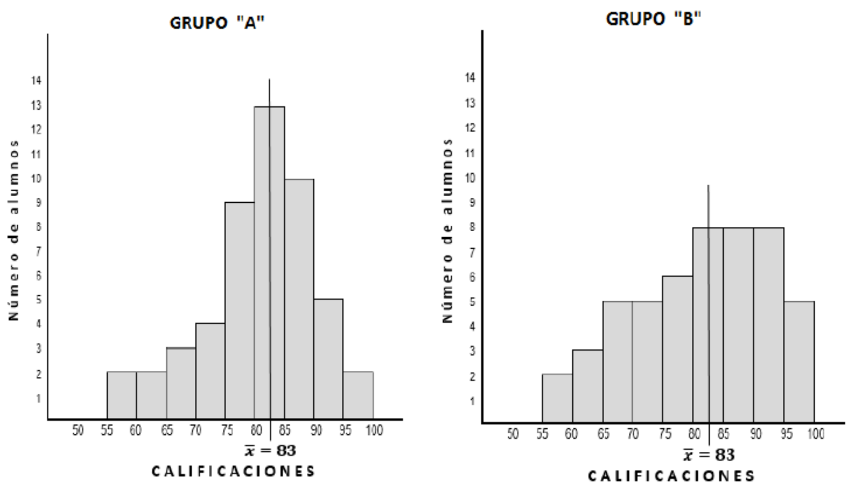
a) Confusión entre el mayor valor de la variable (número de artículos) con el total de la muestra.

b) Al igual que el distractor anterior, éste evalúa la confusión entre el mayor valor de la variable, aunque se le agrega la multiplicación por su frecuencia (número de clientes).

c) Confusión entre frecuencia y variable, ya que suman todos los valores de la variable en lugar de las frecuencias.

Ítem 8- Contenido: Representación de datos **Tema:** Dispersión en una gráfica. **Nivel**: 2 (Comprensión).

Los resultados en las calificaciones de Estadística en dos grupos A y B de una escuela se muestran en las siguientes gráficas, siendo la calificación mínima aprobatoria 60.



Se considera que un grupo con buen desempeño es aquel donde el mayor porcentaje de alumnos tiene altas calificaciones. De acuerdo con estas gráficas podemos decir:

a) El grupo A tiene mejor desempeño que el grupo B ya que tiene menos reprobados.
b) El grupo A tiene mejor desempeño que el grupo B ya que tiene menor dispersión en las calificaciones. (RESPUESTA CORRECTA)
c) El grupo B tiene mejor desempeño que el grupo A ya que tiene más uniformes las frecuencias de sus calificaciones.
d) El grupo B tiene mejor desempeño que el grupo A ya que más estudiantes obtuvieron calificaciones de 90 a 100 puntos.

El ítem evalúa si los profesores pueden identificar el papel de la dispersión en la comparación de dos gráficas al tomar una decisión. Los distractores evalúan lo siguiente:

a) No comprenden el papel de la dispersión de las gráficas en el contexto, ya que consideran otro argumento para tal afirmación, argumento no valido inclusive ya que ambos cuentan con el mismo número de alumnos reprobados.

c) Confusión en lo que implica que las frecuencias sean uniformes, ya esto no lo hace un mejor grupo si no que implica lo contrario.

d) Lectura parcial de gráficos, ya que en efecto el grupo B tiene una mayor cantidad de estudiantes con altas calificaciones, éste también tiene la misma cantidad con alumnos con menores calificaciones, lo que no ocurre en el grupo A.

Ítem 6.2- Contenido: Interpretación de datos **Tema:** Medidas de tendencia central **Nivel**: 3 (Análisis).

Quince personas evaluaron el desempeño de un profesor, siendo las calificaciones obtenidas:

1 1 1 8 8 8 8 9 9 9 10 10 10 10 10

algunas de las medidas obtenidas de estas calificaciones son: media=7.47; rango=9; mediana=9 y moda=10.

¿Qué medida de tendencia central sería la más representativa del desempeño del profesor?

a) media
b) mediana (RESPUESTA CORRECTA)
c) moda
d) rango

El ítem evalúa si los profesores pueden determinar la medida de tendencia central más representativa en algún contexto. Los distractores evalúan lo siguiente:

a) Considerar la media como más representativa sin considerar que existen valores extremos que influyen en la media de la calificación.

c) Considerar la moda como la mayor representativa sin considerar a todos los elementos que realizaron la evaluación (en particular los valores extremos).

d) Considerar incorrectamente el rango como medida de tendencia central.

En los análisis de los resultados para el enfoque cuantitativo se hizo uso de estadística descriptiva y estadística inferencial utilizando el paquete estadístico Statgraphics Centurion. Para todos los análisis se consideró un nivel de significancia del 10%.

Por otra parte, para el enfoque cualitativo, de acuerdo con la Taxonomía de Marzano y con base en los resultados obtenidos, las opiniones de los profesores y los objetivos definidos en el proyecto, se dio respuestas concretas en conjunto con las variables de interés.

5. Resultados

Para la recolección de la información efectuamos la aplicación en cada escuela seleccionada en la muestra, aplicando primero el instrumento de actitudes y posteriormente el de conocimientos a fin de que la experiencia previa a contestar el de conocimientos no influyera en los resultados de la prueba de actitudes.

Ambos instrumentos fueron validados utilizando el estadístico Alfa de Cronbach. En el instrumento de actitudes se encontró una adecuada fiabilidad resultando con un valor de 0.75, lo cual coincide con el resultado obtenido en Ferreyra (2007) donde se obtuvo el valor de 0.76 con la misma prueba, estos indicadores señalan una calidad técnica aceptable en el instrumento; por otra parte pese a que previamente el instrumento de conocimientos fue revisado y validado por cinco profesores investigadores en el área de estadística, la fiabilidad en el instrumento de conocimientos estadísticos resultó con un valor de 0.51 que indica un instrumento insuficiente en correlación de ítems; sin embargo debido a la cantidad de contenidos y que es difícil profundizar en cada uno con los ítems en el instrumento, consideramos que es un valor adecuado para lo que pretendíamos analizar (el conocimiento general de los profesores de secundaria).

Cabe mencionar que en el estudio de Estrada (2002) en donde también se aplicó un instrumento de conocimientos, el coeficiente Alfa de Cronbach coincide con el valor obtenido en este trabajo.

En total se aplicó la encuesta a 65 profesores en ejercicio y a 34 profesores en formación, quienes conformaron nuestra población del estudio.

5.1 Identificación de variables significativas

Para determinar si alguna de las variables independientes influye en las actitudes hacia la estadística o en el conocimiento adquirido en la población bajo estudio se efectuaron diversos análisis estadísticos de manera global, así como entre grupos de profesores (en ejercicio y en formación). Entre los resultados obtenidos destacan los siguientes:

En el análisis general se realizaron análisis de covarianza entre los componentes de actitudes-variables y calificaciones-variables considerando en ambos casos la edad como covariable. En el primero únicamente una variable resultó significativa, la cual fue tipo de profesor en el componente afectivo, en donde los profesores en ejercicio destacan con un mayor gusto por la estadística en comparación con los profesores en formación. De igual manera en el análisis de conocimientos los profesores en ejercicio presentaron una media mayor en comparación con los profesores en formación; cabe mencionar que la covariable edad resultó significativa.

A continuación, se presentan como ejemplo las Tablas 4 y 5 de estos análisis que resultaron significativos:

Fuente	Suma de Cuadrados	G.L.	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor p
COVARIABLES					
Edad	2.76	1	2.76	0.34	0.56

EFECTOS PRINCIPALES					
A:Tipo de profesor	27.92	1	27.92	3.42	0.07
B:Sexo	4.30	1	4.30	0.53	0.47
RESIDUOS	710.95	87	8.17		
TOTAL (CORREGIDO)	752.62	90			

Tabla 4. Análisis de covarianza general del componente afectivo

Fuente	Suma de Cuadrados	G.L	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor p
COVARIABLES					
Edad	43.05	1	43.05	5.90	0.02
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Sexo	9.95	1	9.95	1.36	0.25
B:Tipo de profesor	77.78	1	77.78	10.65	< 0.01
RESIDUOS	635.17	87	7.30		
TOTAL (CORREGIDO)	713.82	90			

Tabla 5. Análisis de covarianza general de conocimientos

Al realizar la comparación de las calificaciones medias de conocimientos, el resultado arrojó una diferencia de 2.93 unidades, siendo mayor en profesores en ejercicio, lo cual se interpreta que éstos tienen un mayor conocimiento que los profesores en formación.

De igual forma se realizaron los análisis de covarianza para profesores en formación y profesores en ejercicio, por separado, con variables aplicables sólo a cada grupo. A continuación, se dan los resultados de estos análisis y su interpretación en términos de los componentes sin incluir las tablas respectivas.

Para profesores en ejercicio, en relación con las actitudes las variables que resultaron significativas fueron dos en dos componentes: en el componente afectivo la variable distrito resultó significativa con un valor p de 0.04: los profesores que ejercen su profesión en el Distrito 3 (Mérida, capital del estado) tienen un mayor gusto hacia la estadística que los del Distrito 1 (la región más alejada de la capital); en el componente cognitivo la variable nivel de escolaridad fue quien resultó significativa con un valor p de 0.07: los profesores con estudios de maestría se perciben con una mayor capacidad de conocimientos y habilidades intelectuales en estadística en comparación con los profesores que solo cuentan con estudios de licenciatura. En el análisis de conocimiento la única variable que resultó significativa fue edad con un valor p de 0.04, en donde se obtuvo, con un análisis de regresión, que ésta influye negativamente en el conocimiento de los profesores esto es a mayor edad el conocimiento de los profesores disminuye; esto se hace evidente con edades superiores a los cincuenta años.

De igual manera en el análisis de los profesores en formación, en cuanto a las actitudes también resultaron significativas dos variables en dos componentes: en el componente dificultad la variable sexo resultó significativa con un valor p de 0.05, en donde las mujeres resultaron con mejor actitud, es decir que las mujeres perciben con menor dificultad la estadística que los hombres; por otra parte en el componente cognitivo la variable lugar de estudio del bachillerato resultó significativa con un valor p de 0.09: con mejor actitud quienes habían estudiado su preparatoria en la capital del estado es decir, se perciben con mayor capacidad de conocimientos y habilidades hacia la estadística en comparación con quienes estudiaron en provincia. En el análisis de conocimientos ninguna variable resultó significativa.

5.2 Relación entre conocimientos y actitudes

Con el propósito de determinar si las actitudes influyen en el conocimiento estadístico de los profesores se realizó primeramente un análisis global entre conocimientos y actitudes con toda la población de profesores en estudio, mediante una regresión lineal simple (ver Tabla 6), resultando que existe una relación significativa negativa (valor $p<0.05$) de las actitudes hacia el conocimiento, es decir que a mejor actitud el conocimiento disminuye. Este resultado contradice lo obtenido en las diversas investigaciones realizadas, por lo que se realizaron otros análisis para identificar las causas de esta relación.

Parámetro	Mínimos cuadrados estimados	Error estándar	Estadístico t	Valor p
Intercepto	16.92	1.81	9.33	< 0.01
Pendiente	-0.06	0.03	-2.29	0.02

Tabla 6. Estimadores de los parámetros del modelo de regresión lineal simple

Para determinar si el resultado anterior se presenta en ambos grupos de profesores, se realizó una comparación de rectas de regresión tomando como variable a comparar el tipo de profesor (en formación o en ejercicio); el resultado arrojó que únicamente se presenta esta relación significativa en tipo de profesor con un valor $p<0.10$, siendo los profesores en ejercicio los que marcan la diferencia corroborándose que la tendencia es negativa, como se puede apreciar en la Tabla 7 y en la Figura 2.

Parámetro	Estimado	Error Estándar	Estadístico t	Valor p
Constante	9.73	4.70	2.07	0.04
Actitudes hacia la estadística	0.03	0.06	0.49	0.62
Profesores en ejercicio	10.13	5.81	1.744	0.08
Actitudes hacia la estadística * profesores en ejercicio	-0.14	0.09	-1.68	0.10

Tabla 7. Modelo para comparación de líneas de regresión para la variable conocimientos

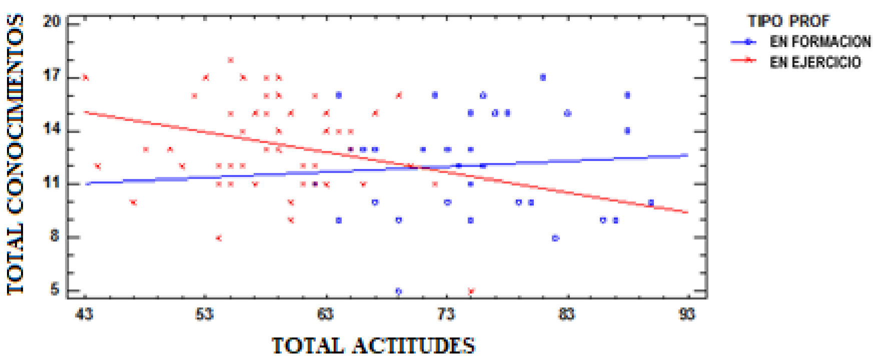


Figura 2. Comparación de líneas de regresión

Profundizamos en el análisis para verificar si realmente las actitudes son las que influyen en una disminución del conocimiento o existen otras variables que pudieran ser causantes de esta relación y no se hayan identificado en el análisis global. De esta manera se realizó una regresión múltiple en el grupo de profesores en ejercicio entre conocimiento y las variables edad, distrito, sexo y actitudes, ya que en el caso de profesores en formación no resultó significativo. Los resultados (ver Tabla 8) nos permitieron identificar que las actitudes no influyen significativamente en el conocimiento, sino es la variable edad la que influye significativamente y de manera negativa (con un valor p<0.05), es decir que a mayor edad el conocimiento disminuye. Con este análisis se corrobora que la edad influye negativamente en el conocimiento estadístico de los profesores, es decir, que a mayor edad la actitud hacia la estadística es mejor, pero el conocimiento disminuye.

Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico t	Valor p
Constante	21.94	3.60	6.10	< 0.01
Actitudes hacia la estadística (PE)	-0.08	0.06	-1.49	0.14
Edad	-0.08	0.04	-2.14	0.04
Sexo	0.34	0.73	0.46	0.65
Distrito	-0.19	0.31	-0.61	0.54

Tabla 8. Estimadores de los parámetros del modelo de regresión múltiple (profesores en ejercicio)

5.3 Análisis de niveles de conocimiento de acuerdo con la Taxonomía de Marzano

Para propósito de esta investigación consideramos que los profesores que poseen al menos un nivel 2 de la Taxonomía de Marzano cuentan con la capacidad requerida para impartir clases, de esta manera se realizó un análisis cualitativo-cuantitativo de cada ítem en los resultados de cada profesor, con el propósito de establecer el nivel alcanzado por cada uno de ellos y por contenido específico.

Este análisis consistió en revisar las respuestas de cada profesor para descartar la mayor cantidad de respuestas al azar, ya que por ejemplo hubo situaciones en las que los profesores contestaban ítems del nivel 4 pero no del nivel 1. A continuación se muestra un ejemplo del análisis realizado en los reactivos, de acuerdo con la taxonomía de Marzano:

Prof. en formación	Aciertos Nivel 1	Prop.	Aciertos Nivel 2	Prop.	Aciertos Nivel 3	Prop.	Aciertos Nivel 4	Prop.	Nivel general
1	5	1	4	0.8	4	0.67	4	0.8	4
2	5	1	4	0.8	4	0.67	3	0.6	4
3	5	1	4	0.8	3	0.50	4	0.8	3
4	5	1	4	0.8	3	0.50	4	0.8	3
5	5	1	4	0.8	3	0.50	1	0.2	2
6	5	1	3	0.6	4	0.67	3	0.6	4
7	5	1	3	0.6	4	0.67	3	0.6	4
8	5	1	3	0.6	3	0.50	3	0.6	3
9	4	0.8	4	0.8	4	0.67	4	0.8	4
10	4	0.8	4	0.8	3	0.50	2	0.4	2
11	4	0.8	4	0.8	2	0.33	2	0.4	2

12	4	0.8	4	0.8	1	0.17	4	0.8	2
13	4	0.8	3	0.6	3	0.50	5	1	3
14	4	0.8	3	0.6	3	0.50	2	0.4	2

Tabla 9. Determinación del nivel de conocimiento alcanzado por profesor

Al ser pocos reactivos de cada nivel, establecimos que los profesores poseen un determinado nivel de conocimiento estadístico si contestan correctamente al menos un 60% de los ítems correspondientes a él; se aclara que los niveles son progresivos, es decir que para tener un nivel 3 el profesor debe tener al menos el 60% de ítems correctos de los niveles 3, 2 y 1. Se agregó el nivel 0 que corresponde a los profesores que no alcanzan algún nivel establecido en la Taxonomía de Marzano, ya que no contestaron correctamente el 60% de los ítems del nivel 1, evidenciando un escaso conocimiento estadístico por lo que requieren capacitación estadística de inmediato.

Los resultados arrojaron que existe un 75% de profesores en ejercicio y un 65% de profesores en formación con conocimiento estadístico suficiente, sin embargo, un 25% de profesores en ejercicio y un 35% de profesores en formación requieren capacitación para alcanzar este nivel mínimo, tal como se aprecia en las Tablas 10 y 11, y en las Figuras 3 y 4.

Profesores en Ejercicio			
Nivel	**Total**	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
0	7	12.3%	
1	7	12.3%	**24.6%**
2	11	19.3%	
3	17	29.8%	
4	15	26.3%	**75.4%**
Total	**57**	**100%**	

Tabla 10. Niveles de conocimiento estadístico en profesores en ejercicio

Profesores en Formación			
Nivel	**Total**	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
0	6	17.6%	
1	6	17.6%	**35.3%**
2	10	29.4%	
3	6	17.6%	
4	6	17.6%	**64.7%**
Total	**34**	**100%**	

Tabla 11. Niveles de conocimiento estadístico en profesores en formación

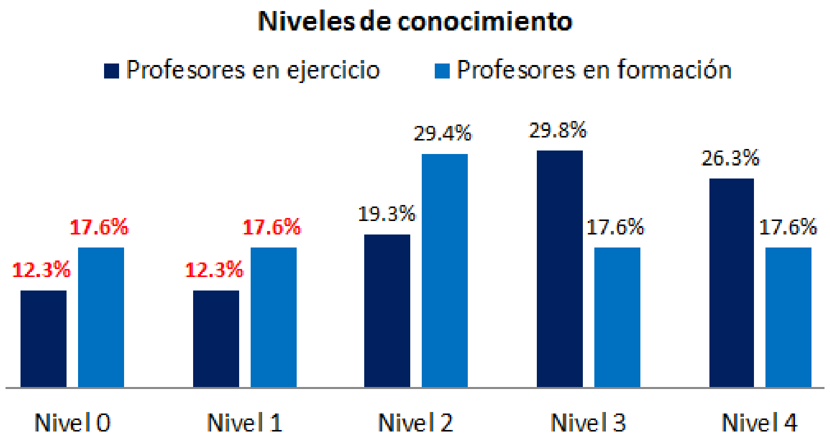


Figura 3. Gráfica comparativa de niveles de conocimiento

Se puede observar que el mayor porcentaje de los profesores en ejercicio se encuentran ubicados en el nivel 3 (análisis), mientras que en el caso de profesores en formación el mayor porcentaje se encuentra en el nivel 2 (comprensión).

Adicionalmente se realizó el análisis por contenido de manera global, resultando que los temas organización de datos agrupados e interpretación de datos es donde los profesores obtienen mejores resultados (92% y 90% respectivamente), sin embargo, hay un mayor porcentaje de profesores en niveles críticos en los temas representación de datos y organización de datos ordenados (58% y 48% respectivamente). Esto se aprecia en la siguiente gráfica:

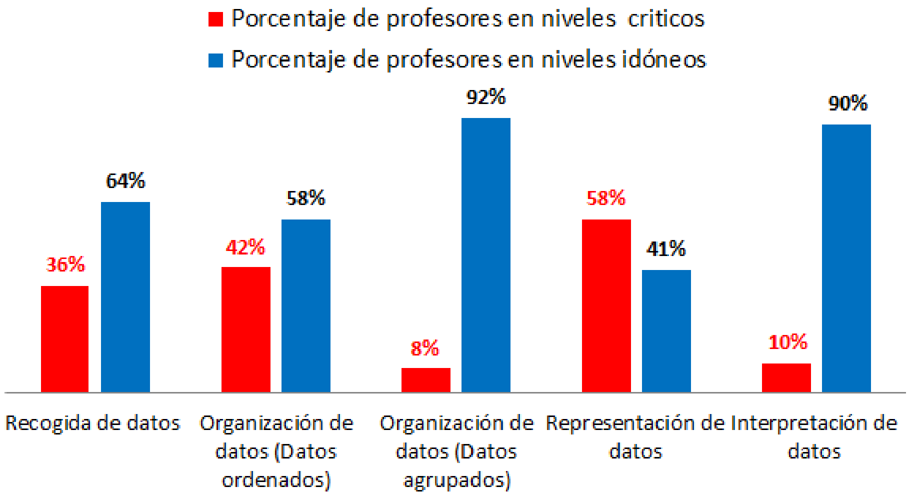


Figura 4. Gráfica comparativa por contenido estadístico

5.4 Opiniones generales de los profesores encuestados

Entre las opiniones vertidas por los profesores encuestados podemos destacar:

- Falta de actualización en el ámbito de estadística: en este aspecto las escuelas más lejanas de la capital manifestaron tener menor actualización en el ámbito de matemáticas siendo los temas más comunes álgebra y aritmética, omitiendo estadística.
- Prioridad de eventos académicos: al existir concursos u olimpiadas en las áreas de álgebra, geometría y aritmética estos son los temas donde se prioriza la enseñanza y por ende la capacitación docente.
- Extensión de contenido: se mencionó que los contenidos de matemáticas son en general extensos y los temas que ocupan el último lugar son los de estadística, por tal razón son a los que se les asigna la menor cantidad de tiempo en los cursos, inclusive en algunos casos no se logran cubrir los temas.
- Falta de materiales y recursos adecuados: se mencionó que no cuentan con materiales adecuados o recursos que permitan establecer relaciones de la estadística a la vida cotidiana, sobre todo en los municipios más alejados de la capital del estado.

- Falta de aplicaciones a la vida cotidiana: en general los profesores (en formación y en ejercicio) mencionaron que en su preparación solo se mostraron situaciones procedimentales, de tal manera que la interpretación de resultados era muy escasa o nula.

6. Conclusiones

A continuación, se presentan las conclusiones obtenidas en la presente investigación.

Se encontró que existe una diferencia significativa entre profesores en formación y profesores en ejercicio pudiendo deberse a la experiencia docente, así como también a una mayor preparación académica como lo muestra la variable nivel de escolaridad que resultó significativa al tener estudios de posgrado. Asimismo, se muestra que el nivel de conocimiento alcanzado por la mayoría de los profesores en formación es del nivel 2 (comprensión) mientras que los profesores en ejercicio es el nivel 3 (análisis).

De igual manera hay un alto porcentaje de profesores en ejercicio que alcanzaron un nivel 4 de aplicación (utilización del conocimiento) superando en casi un 10% a los profesores en formación, reafirmando que los profesores en ejercicio alcanzan una mayor capacidad para utilizar las herramientas estadísticas en la vida cotidiana a diferencia de los profesores en formación. Es importante mencionar que los profesores en formación manifestaron carencias en la enseñanza de las aplicaciones de la estadística en la vida cotidiana, comentando que su preparación en su mayoría se basa en ejercicios procedimentales.

Un aspecto que llamó la atención fue que en profesores con edades superiores a los cincuenta años se mostró una disminución en el conocimiento, lo cual puede ser consecuencia de que al estar esta asignatura (estadística) en último lugar de las prioridades en matemáticas, va ocasionando una falta de utilización que deriva en el olvido de los conceptos, aunado a ello las capacitaciones y actualizaciones se proporcionan más en otras áreas y no en estadística. Consideramos necesario profundizar los estudios en este aspecto, principalmente en profesores mayores de 50 años.

Se observó que el 75% de los profesores en ejercicio y el 65% de los profesores en formación alcanzaron niveles óptimos para el desempeño de las funciones docentes, sin embargo existe un 25% de profesores en ejercicio y un 35% de los profesores en formación que no alcanzan el nivel mínimo de conocimiento necesario para impartir las clases; consideramos que esta información es muy importante a considerar para tomar acciones de mejora que puedan disminuir estos porcentajes, como pudieran ser analizar lo que ocurre en la enseñanza a nivel de formación así como capacitación y actualización para profesores en ejercicio, principalmente de aquellos profesores que se encuentran lejos de la capital del estado.

Cabe mencionar que en los temas de organización de datos (datos agrupados) y en interpretación de datos es donde los profesores tienen mayores fortalezas, mientras que los temas con porcentajes críticos fueron representación de datos y organización de datos (datos ordenados) que son los aspectos curriculares con los que podría iniciarse una acción de mejora.

En cuanto a las actitudes, de manera general se obtuvo que los profesores en ejercicio tienen un mayor gusto por la estadística que los profesores en formación, destacándose de esta manera que la aplicación que un profesor en ejercicio puede realizar de la estadística mejora la visión de la estadística como asignatura. En cuanto a los profesores en ejercicio se mostró que los que laboran en Mérida tienen un mayor gusto hacia la estadística que los que están más alejados de ella; igualmente los profesores con estudios superiores denotaron un mayor gusto a la estadística en comparación con aquellos que solo tienen estudios de licenciatura, esto nos muestra que en la capital del estado y en sus cercanías hay una mayor atención hacia esta área, tanto en oportunidades de realizar estudios superiores como en capacitación y actualización, lo cual corrobora los comentarios vertidos por los profesores.

Por otra parte, en los profesores en formación se notó que las mujeres perciben con menor dificultad la estadística en relación con los hombres, lo cual es contrario a lo que generalmente ocurre en cuanto a su aprovechamiento en matemáticas, donde los varones muestran tener una mayor facilidad, tal como mencionan Barbero, Holgado, Vila & Chacón (2007).

De igual manera se obtuvo que los estudiantes que habían cursado la preparatoria en la capital del estado se perciben con mayor capacidad de conocimientos y habilidades hacia la estadística en comparación con los que estudiaron en el interior del Estado; esto muestra que existe una diferencia entre la enseñanza de la estadística en la capital y la del interior del Estado, lo cual pudiera ser considerada para establecer acciones de mejora hacia su enseñanza.

En cuanto a la posible relación entre conocimientos y actitudes se encontró que no existe una relación estadísticamente significativa entre las variables, si bien en un principio se notó una relación negativa entre actitud y conocimientos, en realidad se identificó que la relación era entre edad y conocimiento en profesores en ejercicio. Pese a lo anterior consideramos que una mejora en las actitudes influye positivamente en la apropiación del conocimiento.

Bibliografía

Barbero, M., Holgado, F., Vila, E. y Chacón, S. (2007). *Actitudes, hábitos de estudio y rendimiento en Matemáticas: diferencias por género.* Psicothema, Asturias, v.19, n.3, p. 413-21

Batanero, C. (2001). Situación actual y perspectivas futuras de la didáctica de la Estadística. En Batanero, Carmen. *Didáctica de la Estadística*. (pp. 3-7). Granada, España: Grupo de Investigación sobre Educación Estadística.

Batanero, C. (2002). *Los retos de la cultura estadística.* Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística, Buenos Aires. Conferencia inaugural. Buenos Aires, Argentina.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, M. y Arteaga, P. (2011). Enseñanza de la Estadística a través de proyectos. En Batanero, C. & Díaz, C. *Estadística con proyectos*. (pp. 9-14). Granada, España.: Departamento de didáctica de la Matemática.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning and Thinking: goals, definitions and challenges. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking,* pp. 3-15.

Blanco, A. (2007). *Una revisión crítica de la investigación sobre las actitudes de los estudiantes universitarios hacia la Estadística. Revista Complutense de Educación.* 19(2), 311-330.

CNN México (agosto 04, 2014). 60% de los aspirantes a maestro de educación básica es “no idóneo”. *CNN México.* Recuperado el (Enero 25, 2015) de: http://mexico.cnn.com/nacional/2014/08/04/60-de-los-aspirantes-a-maestro-de-educacion-basica-es-no-idoneo-sep

Escalante, E., Repetto, A. y Mattinello, G. (2011). Exploración y análisis de la actitud hacia la Estadística en alumnos de Psicología*. Revista Liberabit*., pp. 15-26, 18(1), *Recuperado marzo 30,2015 de:* www.scielo.org.pe/scielo.php?pid=S1729-48272012000100003&script=sci_arttext

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis doctoral no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. (2002). *Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. Enseñanza de las Ciencias*, 22 (2), 263-274.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. (2004). Componentes de las actitudes hacia la Estadística en profesores en formación. En V. Aymerich y S. Macario (Eds.), *Actas del XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática*, Universidad Jaime I de Castelló. 171-179.

Ferreyra, M (2007). *Implementación y evaluación de un modelo didáctico, basado en enfoques constructivistas, para la enseñanza de Estadística en el nivel superior.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Baja california. Baja California, México..

Gallardo, K. (2009). *La nueva taxonomía de Marzano y Kendall: Una alternativa para enriquecer el trabajo educativo desde su planeación.* Recuperado el 13 de abril del 2015, del sitio web del Centro Virtual de Aprendizaje del Tecnológico de Monterrey: http://www.cca.org.mx/profesores/congreso_recursos/descargas/kathy_marzano.pdf

Juárez, B. y Poy, L. (Agosto 04,2014). “No idóneos” para ocupar una plaza, 79 mil maestros: SEP. *La Jornada.* Recuperado el 25 de enero, de: http://www.jornada.unam.mx/2014/08/04/politica/017n1pol

Kravchenko, V. (marzo 23,2013). ¿Para qué estudiar matemáticas si sólo vas a enseñarlas? *Diario la Crónica de hoy.* Recuperado el 25 de enero, 2015 de: http://www.cronica.com.mx/notas/2013/739774.html

Martínez, N. (agosto 04,2014). INEE no ve fracaso por 61% de maestros reprobados*. El Universal, Nación.* Recuperado el 25 de enero, 2015 de: http://www.eluniversal.com.mx/nacion-mexico/2014/suficientes-para-plaza-maestros-que-aprobaron-examen-1027995.html

Medina, M. (2013). *Test para evaluar las habilidades de los estudiantes en la lectura, interpretación y razonamiento de representaciones gráficas de distribuciones.* Ciego de Ávila, Cuba: Departamento de Matemática. Universidad de Ciego de Ávila. Cuba.

Pinto, J., Martín, G. y Barrabí, B. (2007). Estudio de necesidades de formación de profesores que imparten estadística en carreras del área social. En Buendía G. y Montiel G. (Eds). *Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 451-463). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE).

Rodríguez, C. y Gutiérrez, J. (2013). Actitud hacia la estadística e influencia en la adquisición de competencias tecnológicas para el análisis de datos cuantitativos. *Revista de evaluación educativa, 2(1).* Recuperado el (Febrero 16, 2015) de http://revalue.mx/revista/index.php/revalue/issue/view/9

Sanoja, J. y Ortiz, J. (2013). Conocimiento de contenido estadístico de los maestros. En Contreras, J., Cañadas, G., Gea, M. y Arteaga, P. (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 157-164) Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Secretaría de Educación Pública (2012). *Sistema educativo de los Estados Unidos Mexicanos, Principales cifras, ciclo escolar 2011-2012.*: Dirección General de Planeación y Programación de la SEP.

Secretaría de Educación Pública (2015). *Programas de estudios.:* Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Programa para la transformación y el fortalecimiento académicos de las escuelas normales.* México: Escuela Normal.

Avilez Poot Adriana Jaqueline. Licenciada en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Yucatán. Ha impartido ponencias regionales y colaborado en proyectos de investigación en Mérida, México y, en Santa Fe, Argentina donde realizó una estancia académica; actualmente es profesora en la Escuela Normal de Educación Primaria Rodolfo Menéndez de la Peña. adri.avi29@gmail.com

Ordaz Arjona María Guadalupe. Maestra en Educación Matemática, Licenciada en Enseñanza de las Matemáticas. Actualmente Profesora de tiempo completo en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Ha sido ponente en eventos académicos especializados nacionales e internacionales, participado en proyectos de investigación y autora de artículos de investigación y colaborado con capítulos de libro. oarjona@correo.uady.mx

Reyna Peraza Luis Alberto. Ingeniero Civil y Especialista en Estadística egresado de la Universidad Autónoma de Yucatán. Ha impartido asignaturas en el área de Estadística a nivel licenciatura y posgrado; ha participado como ponente en eventos académicos, así como asesor en estadística en diferentes proyectos de investigación; es coautor del texto “Matemáticas 3, Trigonometría y Geometría Analítica básicas”. lreyna@correo.uady.mx

Apéndice 1.- Instrumento para la identificación de áreas de oportunidad en la enseñanza – aprendizaje de la estadística

Instrucciones: Encierra en un círculo la respuesta que consideres correcta

1.- En la escuela secundaria "Bonifacio Núñez" se cuenta con 600 estudiantes, 200 de primer grado, 200 de segundo grado y 200 de tercer grado. Se tiene interés en conocer el nivel de aprovechamiento que se tiene en la escuela, por lo que se decide realizar un censo para obtener el resultado. Esto significa:

a) Tomar 100 estudiantes de cada grado y determinar el nivel de aprovechamiento de la escuela
b) Tomar 300 estudiantes aleatoriamente y determinar el nivel de aprovechamiento de la escuela
c) Tomar todos los estudiantes que asistieron un día específico y determinar el nivel de aprovechamiento de la escuela
d) Tomar todos los estudiantes inscritos en la escuela y determinar el nivel de aprovechamiento de la escuela

2.- Una muestra de las compras realizadas por varios clientes de una tienda de abarrotes durante un día, dio por resultado la siguiente información:

Número de artículos comprados por cliente	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	6	10	13	10	8	0	2

de acuerdo con estos datos, responde:

2.1.- ¿Cuántos clientes conformaron la muestra?

a) 7
b) 14
c) 28
d) 49

2.2.- ¿Cuál fue el mayor número de artículos comprados por un cliente?

a) 2
b) 3
c) 7
d) 13

2.3.- ¿Cuántos artículos fueron comprados por los clientes de esta muestra?

a) 28
b) 49
c) 77
d) 159

2.4.- Si el dueño de la tienda obtuvo la muestra con los primeros clientes que llegaron a comprar ese día ¿consideras que la muestra fue bien seleccionada?

a) Sí, porque la muestra es aleatoria ya que no sabe quién llegará primero a comprar
b) Sí, porque la muestra es aleatoria al no existir un orden en la selección de los clientes.
c) No, porque la muestra no es aleatoria ya que tomó los datos en un orden específico, el de llegada.
d) No, porque la muestra no es aleatoria ya que debió tomar los datos de todos los clientes.

3.- En una escuela se tomó una muestra de 40 estudiantes y se midieron sus estaturas (en centímetros). Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente tabla de distribución de frecuencias:

Estaturas (centímetros)	Frecuencia Relativa (%)
136 – 140	10.0
141 – 145	22.5
146 – 150	25.0
151 – 155	22.5
156 – 160	7.5
161 – 165	7.5
166 – 170	5.0
Total	100.0

De acuerdo con la tabla anterior, responde lo siguiente:

3.1.- La amplitud de los intervalos de clase es:

a) 2
b) 4
c) 5
d) 7

3.2.- ¿En qué rango de estaturas se encuentra el mayor número de estudiantes?

a) 141 - 145
b) 146 - 150
c) 151 - 155
d) 141 - 155

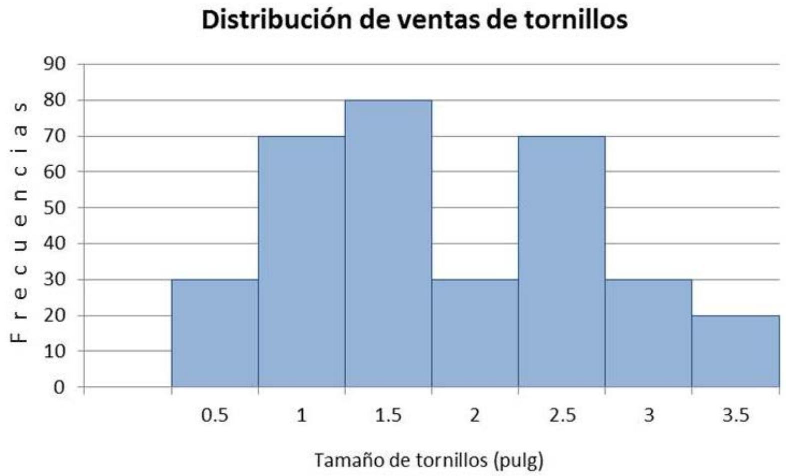
3.3.- ¿Cuántos estudiantes tienen estatura mayor a 155 cm?

a) 8
b) 9
c) 10
d) 17

3.4.- De los alumnos de la escuela se van a seleccionar seis para formar una escolta de bandera para la competencia infantil. El requisito es que los alumnos tengan estaturas superiores a 144 cm, pero no excedan los 162 cm para que puedan ser elegibles. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de intervalos consideras que garantizan el cumplimiento de las condiciones para realizar la selección?

a) 146-150, 151-155 y 156-160
b) 146-150, 151-155, 156-160 y 161-165.
c) 141-145, 146-150, 151-155 y 156-160
d) 141-145, 146-150, 151-155, 156-160 y 161-165.

4.- En una ferretería se vendieron 330 tornillos durante una semana de verano. La distribución de las ventas, de acuerdo con los tamaños de los tornillos (con base en su longitud en pulgadas) se muestra en la gráfica siguiente:



4.1.- La gráfica presentada se llama:

a) Gráfico de caja
b) Polígono de frecuencias
c) Histograma
d) Ojiva

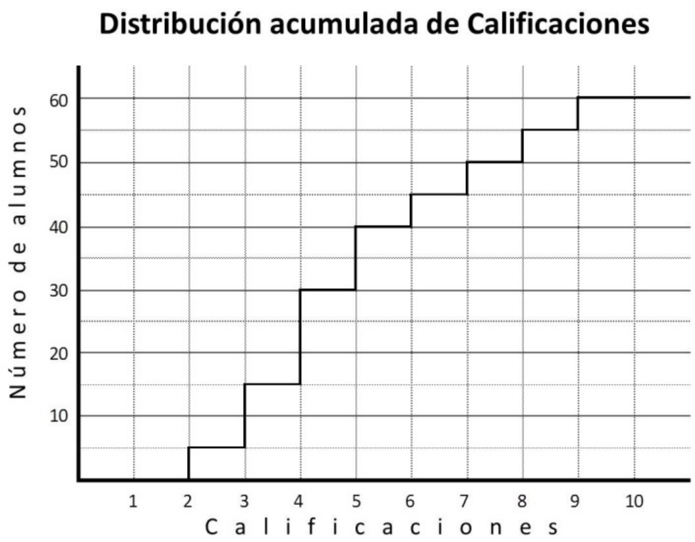
4.2.- Con base en la gráfica presentada, podemos decir que la moda del tamaño de los tornillos es:

a) 1 y 2.5
b) 1.5
c) 70
d) 80

4.3.- Si los datos son una muestra aleatoria de las ventas de tornillos en la ferretería, la población a que corresponde dicha muestra es:

a) Las ventas totales en la ferretería
b) Las ventas totales de tornillos en la ferretería
c) Las ventas totales en verano en la ferretería
d) Las ventas totales de tornillos en verano en la ferretería

5.- Un profesor obtuvo las calificaciones finales de sus alumnos (de 0 a 10) y elaboró una gráfica de frecuencias acumuladas, la cual se muestra a continuación:



Con base en ella podemos decir que, si la calificación mínima aprobatoria es de 6 entonces:

a) aprobaron 20 alumnos
b) aprobaron 30 alumnos
c) aprobaron 40 alumnos
d) aprobaron 45 alumnos

6.- Quince personas evaluaron el desempeño de un profesor, siendo las calificaciones obtenidas:

1 1 1 8 8 8 8 9 9 9 10 10 10 10 10

algunas de las medidas obtenidas de estas calificaciones son: media= 7.47; rango= 9; mediana= 9 y moda= 10.

6.1.- Las medidas de tendencia central son:

a) media, mediana y rango
b) media, moda y rango
c) media, mediana y moda
d) mediana, rango y moda

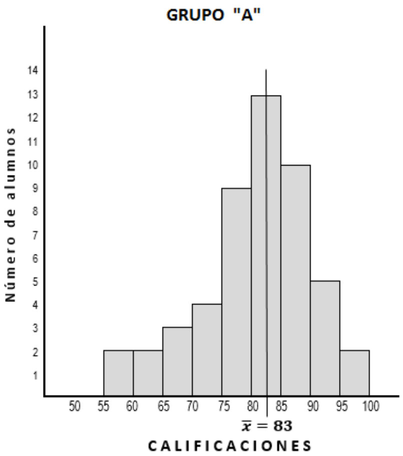
6.2.- ¿Qué medida de tendencia central sería la más representativa del desempeño del profesor?

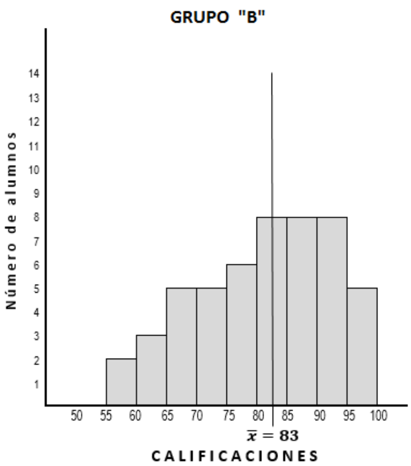
a) Media
b) Mediana
c) Moda
d) Rango

7.- Un estudiante tiene seis asignaturas en un semestre. El promedio de cinco de ellas fue de 78 puntos. ¿Cuánto debe ser la calificación de la sexta asignatura para que el promedio de las seis sea de 80 puntos?

a) 79
b) 82
c) 88
d) 90

8.- Los resultados en las calificaciones de Estadística en dos grupos A y B de una escuela se muestran en las siguientes gráficas, siendo la calificación mínima aprobatoria 60.





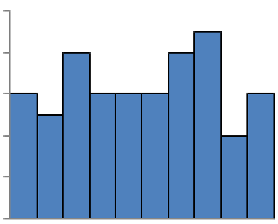
Se considera que un grupo con buen desempeño es aquel donde el mayor porcentaje de alumnos tiene altas calificaciones. De acuerdo con estas gráficas podemos decir:

a) El grupo A tiene mejor desempeño que el grupo B ya que tiene menos reprobados.
b) El grupo A tiene mejor desempeño que el grupo B ya que tiene menor dispersión en las calificaciones
c) El grupo B tiene mejor desempeño que el grupo A ya que tiene más uniformes las frecuencias de sus calificaciones
d) El grupo B tiene mejor desempeño que el grupo A ya que más estudiantes obtuvieron calificaciones de 90 a 100 puntos

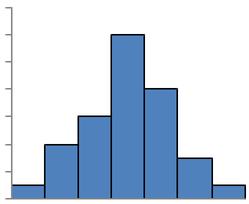
9.- De acuerdo a la situación presentada, selecciona la gráfica que consideres más acorde:

Distribución de los resultados de un examen de matemáticas que resultó muy fácil.

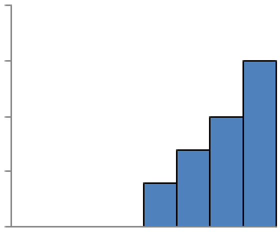
a)



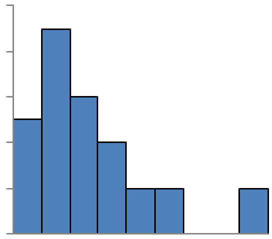
b)



c)



d)



10.- Nueve estudiantes pesaron un objeto pequeño con un mismo instrumento en una clase de ciencias. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

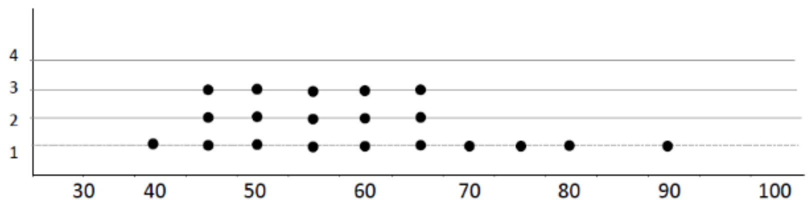
6.2 6.0 6.21 16.3 6.1 6.3 6.23 6.15 6.2

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Cuál de los siguientes métodos recomendarías?

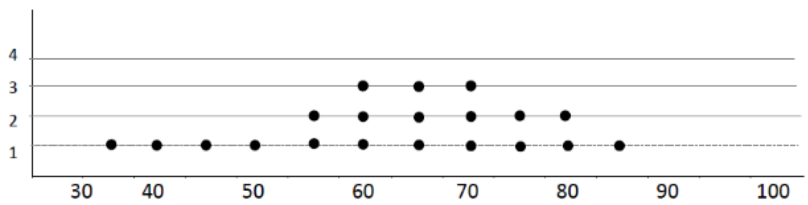
a) Usar el número más común que es 6.2
b) Usar 6.15, puesto que es el peso más preciso
c) Sumar los 9 números y dividir la suma por 9
d) Desechar el valor 16.3, sumar los otros 8 números y dividir por 8

11.- Cuarenta estudiantes universitarios participaron en un estudio del efecto del sueño sobre las puntuaciones en los exámenes. Veinte de los estudiantes estuvieron voluntariamente despiertos estudiando toda la noche anterior al examen (grupo que no durmió). Los otros veinte estudiantes (el grupo control) se acostaron a las 11 la noche anterior al examen. Las puntuaciones en el examen se muestran en los gráficos siguientes.

Cada punto representa la puntuación de un estudiante particular. Por ejemplo, los dos puntos encima del número 80 en el grupo control indican que dos estudiantes en el grupo control tuvieron una puntuación de 80 en el examen



PUNTUACIONES DEL EXAMEN DEL GRUPO QUE NO DURMIÓ



PUNTUACIONES DEL EXAMEN DEL GRUPO QUE DURMIÓ (GRUPO CONTROL)

Observa los gráficos con cuidado. Selecciona entre las opciones que se enlistan a continuación aquella con la que estés de acuerdo

a) El grupo control lo hizo mejor porque hubo en ese grupo más estudiantes que puntuaron 80 o por encima
b) El grupo control lo hizo mejor porque su promedio parece ser un poco mayor que el promedio del grupo que no durmió
c) El grupo que no durmió lo hizo mejor porque la máxima puntuación fue obtenida por un estudiante de ese grupo
d) El grupo que no durmió lo hizo mejor porque su promedio parece ser un poco más alto que el promedio del grupo control

12.- Una compañía de investigación de mercados fue contratada para determinar cuánto dinero gastan los adolescentes en música grabada. La compañía seleccionó aleatoriamente 80 comercios situados por todo el país. Un encuestador permaneció en un lugar central del comercio y pidió a los transeúntes que parecían tener la edad apropiada que completasen un cuestionario. Un total de 2050 cuestionarios fue completado por adolescentes. Sobre la base de esta encuesta, la compañía informó que el adolescente promedio de su país gastaba 2000 pesos cada año en música grabada.

A continuación, listamos varias frases referentes a esta encuesta. Señala la frase con la que estés de acuerdo.

a) Deberían haber hecho la encuesta en más de 80 comercios si querían un promedio basado en los adolescentes de todo el país.
b) La muestra de 2050 adolescentes es demasiado pequeña para permitir obtener conclusiones sobre el país entero.
c) El promedio podría ser una estimación pobre de lo que gastan los adolescentes, ya que los adolescentes no fueron escogidos aleatoriamente para responder el cuestionario.
d) El promedio podría ser una estimación pobre de lo que gastan los adolescentes, ya que sólo se entrevistó a los adolescentes que estaban en los comercios

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 73-90

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Concepções e práticas de avaliação de professoras de um curso de Licenciatura em Matemática

Ademilson Marcos Tonin, Helena Noronha Cury

Fecha de recepción: 26/12/2017
Fecha de aceptación: 16/02/2018

Resumen	Este artículo relata parte de una investigación cualitativa desarrollada con el objetivo general de analizar las concepciones de evaluación del aprendizaje de profesores de un curso de formación de profesores de matemáticas en el nivel de licenciatura, en una institución de educación superior en Brasil, así como sus prácticas de evaluación. Como herramientas de investigación se utilizaron cuestionarios y entrevistas. Llegamos a la conclusión de que los profesores de los cursos van desde puntos de vista tradicionales y críticos sobre la evaluación, emplean diversas herramientas para evaluar y tratam de trabajar con los errores cometidos por los estudiantes. **Palabras clave**: Evaluación; Concepciones de profesores; Curso de formación de profesores.
Abstract	This article reports part of a qualitative research developed with the general objective of analyzing the conceptions of evaluation of professors who teach in a mathematics teacher training course of a Higher Education Institution of Brazil, as well as their evaluative practices. As research instruments, questionnaires and interviews were used. It is concluded that the teachers of the course oscillate between traditional and critical conceptions about evaluation, employ several instruments to evaluate, and seek to work with the mistakes made by the students. **Keywords**: Evaluation; Professors´conceptions; Mathematics teachers training course.
Resumo	Este artigo relata parte de uma pesquisa de caráter qualitativo desenvolvida com o objetivo geral de analisar as concepções de avaliação da aprendizagem dos professores de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição de Ensino Superior do Brasil, bem como suas práticas avaliativas. Como instrumentos de pesquisa foram utilizados questionários e entrevistas. Conclui-se que as docentes do curso oscilam entre concepções tradicionais e críticas sobre avaliação, empregam vários instrumentos para avaliar e buscam trabalhar com os erros cometidos pelos alunos. **Palavras-chave:** Avaliação; Concepções de professores; Curso de formação de professores de Matemática.

1. Introdução

O tema "avaliação da aprendizagem" sempre gera polêmica nas instituições de ensino, seja por parte dos estudantes, dos pais, dos professores ou da própria gestão escolar. Acredita-se que, para mudar a maneira como a Matemática é ensinada nas escolas, os principais agentes dessa mudança são os professores. Essa transformação é um processo complexo e não ocorrerá em curto prazo, pois é necessário mudar uma concepção que se perpetua por séculos.

Com frequência, em encontros que tratam da formação continuada de professores e que possibilitam essa discussão, ouve-se o discurso ultrapassado de que "é difícil mudar, pois nossas aulas são reflexo de como nossos professores atuavam". Analisando essa afirmativa de forma positiva, acredita-se que a mudança começa exatamente neste ponto: a consciência de que se está reproduzindo a forma que tanto se critica.

Ao discutir a elaboração do projeto pedagógico de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição de Ensino Superior (IES) do Brasil, foram levantadas algumas questões que, posteriormente, desencadearam uma pesquisa de Mestrado em Ensino de Matemática: quais as concepções de avaliação que sustentam as práticas avaliativas dos professores que atuam no curso de Licenciatura em Matemática dessa Instituição? Quais os instrumentos de avaliação por eles utilizados? Qual a periodicidade com que os professores costumam avaliar a aprendizagem de seus estudantes? Como o professor dá o *feedback* e retoma aspectos em que os estudantes apresentaram dificuldade na avaliação? Há alinhamento entre a concepção de avaliação declarada pelo professor, o Projeto Pedagógico do Curso e o Plano de Ensino de cada professor?

Assim, a pesquisa foi desenvolvida com o objetivo geral de analisar as concepções de avaliação da aprendizagem dos professores desse curso de Licenciatura em Matemática, bem como suas práticas avaliativas.

Como objetivos específicos, pretendeu-se: estabelecer relação entre as concepções de avaliação assumidas pelos professores do curso de Licenciatura em Matemática e os documentos norteadores do processo avaliativo na IES em questão; prover subsídios teóricos e disponibilizar dados que possam contribuir para reflexões e aprofundamento do conhecimento acerca da avaliação da aprendizagem nessa IES; sugerir algumas propostas de pesquisa e de avaliação que levem em conta os resultados obtidos nesta investigação.

2. Pressupostos teóricos sobre avaliação

Em um texto clássico, Libâneo (1985) aponta, entre as tendências pedagógicas na prática escolar, a tradicional e a crítico-social; na tradicional, o professor prioriza os conteúdos acumulados pelas gerações e avalia a reprodução do que foi explanado por ele, em geral por meio de provas escritas. Por outro lado, em uma abordagem crítica, os conteúdos são indissociáveis da realidade social e a avaliação é formativa, levando em conta todo o processo de ensino ou aprendizagem.

Embora algumas concepções sobre ensino e aprendizagem tenham mudado, Basniak (2012) enfatiza que avaliação ainda se configura como o veredito final, estabelecido a partir de um momento no qual é formalizado o processo para se verificar somente o que o estudante sabe ou não sabe, como fim de um processo. Isso faz com que a avaliação se configure como o reflexo do que o estudante sabe naquele momento, desvinculando-a do processo de aprendizagem, que deve ocorrer continuamente.

Hoffmann (2005) salienta que apesar das tendências avaliativas contemporâneas, com características mais construtivistas, e das sérias críticas dirigidas às tendências conservadoras, percebe-se que ainda permanece forte a concepção da avaliação tradicional nas escolas e universidades. No caso de professores formados nas áreas das ciências exatas e da natureza (que é o caso de três das professoras que participaram desta investigação), tal enfoque pedagógico tem influenciado fortemente a formação desses docentes, mesmo estando em processo de transição.

Em teoria, a avaliação deveria servir como meio de verificar o que o estudante aprendeu, como desenvolveu seu raciocínio para resolver determinada questão, quais foram as dificuldades encontradas e, se o estudante errou, por que isso ocorreu. De posse desses dados importantes, cabe ao professor fazer uma análise minuciosa e imparcial, retomando os aspectos em que os discentes tiveram mais dificuldade. Especificamente em Matemática, a retomada de pontos ou conceitos em que os estudantes apresentaram dificuldade ou erraram, expressos por meio da avaliação, pode significar a construção de conceitos fundamentais que sirvam de base para a compreensão de conteúdos matemáticos no futuro. Isso exige escolha criteriosa dos instrumentos para avaliar a aprendizagem.

Trevisan e Mendes (2015) destacam que a escolha dos instrumentos avaliativos deve der feita durante o planejamento de ensino, buscando adequar as formas de avaliação aos conteúdos estabelecidos, aos objetivos traçados e às demais atividades propostas para a aprendizagem. Porém, demonstram-se preocupados com a maneira como o professor de Matemática, comumente, avalia a aprendizagem de seus estudantes. Para os pesquisadores,

> [...] apesar da variedade de meios para a avaliação escolar, a prova escrita tem sido utilizada como o principal, e, em muitos casos, o único instrumento nas aulas de Matemática. Por si só, ela não promove as respostas necessárias para gerir e compreender os processos de ensino e de aprendizagem, mas fornece a produção escrita de cada estudante, que auxilia o agir do professor e do estudante, em qualquer momento dos processos de ensino e de aprendizagem. (Trevisan & Mendes, 2015, p. 49).

O que se evidencia mais fortemente em nossas escolas, como instrumento de avaliação pelos professores de Matemática, é o teste tradicional, com questões fechadas e realizado com tempo limitado. Contudo, sendo esta a única forma de avaliar a aprendizagem escolar utilizada pelo professor, dificilmente permite a inclusão de questões suficientemente ricas e abertas; não facilita uma utilização produtiva do erro; não estimula o desenvolvimento de raciocínios, interpretações e a argumentação de situações mais complexas e reais, além de não ser um instrumento que forneça evidências suficientemente ricas sobre os aspectos relacionados com a compreensão dos conteúdos de Matemática, nem que favoreça o desenvolvimento de competências relacionadas a este componente curricular. Com essa característica,

> A avaliação se desvia de sua função diagnóstica e volta-se, quase que exclusivamente, para a função classificatória, que é incentivada no modo de vida de uma sociedade que valoriza a competição. Com isso, define, muitas vezes, a trajetória escolar do aluno, não só em termos da sua manutenção ou eliminação da escola, como também no tipo de profissão que terá no futuro. (Buriasco, 1999, p. 70).

Nesse sentido, ressalta-se a importância de que o professor diversifique os instrumentos avaliativos, com o objetivo de coletar mais informações que possam subsidiar as tomadas de decisões nos processos de ensino e aprendizagem em Matemática e, caso seja necessário, fazer alterações no seu planejamento inicial, com a finalidade de melhorar a aprendizagem dos estudantes. Além disso, a alternância de instrumentos de avaliação evita que o estudante, que sente mais dificuldade em uma ou outra forma de ser avaliado, seja penalizado. Praticada dessa forma, "[...] enfatizam-se os caminhos percorridos, reconhece-se e valoriza-se a diversidade deles na construção de soluções para as tarefas, abre-se espaço para as diferenças entre os estudantes e para as muitas interpretações de uma mesma situação." (Buriasco, Ferreira & Ciani, 2009, p.76).

As formas e instrumentos avaliativos da aprendizagem são diversos e divergem, essencialmente, pelo papel atribuído ao estudante e ao professor no ato da avaliação. (Perrenoud, 1999). Nesse sentido, Santos (2002) destaca que a avaliação formativa é de responsabilidade do professor; a coavaliação entre pares é de responsabilidade do estudante e seus colegas cooperantes; e a autoavaliação, de responsabilidade do próprio estudante.

Enquanto a avaliação *somativa* é praticamente desvinculada do processo de ensino e aprendizagem, pois se baseia nos produtos dos estudantes e está associada à prestação de contas, à certificação e à seleção, a avaliação *formativa***,** conforme Semana e Santos (2008), debruça-se sobre o processo e as atividades desenvolvidas pelos estudantes com o objetivo de aprimorar o ensino e a aprendizagem. As autoras elencam algumas das características da avaliação formativa, quais sejam: (a) possui um caráter sistemático e contínuo; (b) recorre a diversos instrumentos de recolha de informações, que dependem da natureza e dos contextos de aprendizagem; (c) fornece informações sobre o desenvolvimento das aprendizagens e competências construídas pelos estudantes, permitindo, dessa forma, aprimorar os processos de trabalho. Neste sentido, a avaliação está vinculada ao processo de ensino e aprendizagem, isto é, está no início, no meio e ao final do período letivo. Nesse contexto, as tarefas de avaliação propostas aos estudantes são, também, tarefas de aprendizagem e vice-versa.

A *autoavaliação***,** conforme Santos (2002), é um processo intrínseco ao próprio sujeito e apresenta-se, assim, como uma forma de regulação privilegiada que pode conduzir a melhorias significativas na aprendizagem dos estudantes. No processo de autoavaliação, o professor desempenha um papel de grande relevância, competindo-lhe implementar estratégias adequadas e condições favoráveis ao desenvolvimento da capacidade dos estudantes se autoavaliarem. Santos (2002) destaca a importância de uma abordagem do erro do estudante de forma positiva; o questionamento oral; o *feedback* escrito; a clareza e negociação dos critérios avaliativos; e o recurso de instrumentos alternativos de avaliação como sendo alguns exemplos de mecanismos que o professor pode implementar na prática de uma avaliação formativa, com potencialidades integradas ao nível de autoavaliação dos estudantes.

Nesse sentido, o erro, quando considerado como relevante ao processo de ensino e aprendizagem, apresenta-se como uma rica fonte de dados, cabendo ao professor analisar sua natureza, buscar a compreensão do raciocínio desenvolvido pelo estudante e orientá-lo adequadamente, para que este seja capaz de identificar onde errou e corrigir. Nesse processo, o professor deve atuar como mediador e orientador, isto é, o estudante precisa ser o ator principal na (re)construção de seu raciocínio de resolução da questão/problema matemático. A partir do momento em que o estudante consegue identificar onde e porque errou, será capaz de rever e compreender os conceitos matemáticos inerentes à questão em estudo.

Em consonância com uma avaliação formativa, o professor pode orientar (dar o *feedback*) oralmente ou pela escrita, apresentando comentários com algumas sugestões ou questões que provoquem a reflexão por parte dos estudantes. Porém, para que essas intervenções, instigadas pelo professor, contribuam para o desenvolvimento de autoavaliação dos estudantes, devem ocorrer continuamente, promovendo neles uma postura de reflexão, e não incluir qualquer forma de juízo de valor sobre o seu desempenho acadêmico.

Como o raciocínio matemático pode ser favoravelmente desenvolvido por questões de investigação e problemas matemáticos, um instrumento avaliativo que geralmente está associado a atividades dessa natureza, é o relatório escrito, pois:

> Ao fazer apelo à articulação de ideias, à explicação de procedimentos, à fundamentação e à análise crítica dos processos utilizados e dos processos obtidos, o relatório escrito privilegia aspectos relacionados, não só, com o conhecimento e compreensão de conceitos e processos, mas também com o desenvolvimento de capacidades como a comunicação e o raciocínio matemático, o espírito crítico e, ainda, o sentido de responsabilidade e perseverança. (Semana & Santos, 2008, p. 53).

Momentos como estes, que se utilizam da avaliação para desenvolver o raciocínio matemático dos estudantes, quando bem conduzidos, permitem ao professor acompanhar e compreender sua evolução, potencializando, assim, a aprendizagem e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

3. Metodologia da pesquisa

A pesquisa teve caráter qualitativo e foi desenvolvida com o auxílio de dois instrumentos de coleta de dados, um questionário e uma entrevista, além da análise dos documentos oficiais norteadores do processo de avaliação da aprendizagem no curso de Licenciatura em Matemática da IES em questão.

Esse curso de Licenciatura em Matemática foi implantado há apenas um ano e as participantes da pesquisa são quatro professoras do curso, responsáveis pelas disciplinas do primeiro semestre. Para preservar seu anonimato, as professoras são indicadas por A, B, C e D.

A professora A é licenciada em Matemática, tem especialização na área de Educação Matemática, mestrado em Ensino de Matemática e atualmente está cursando doutorado em Educação; atua há 11 anos no magistério, sendo cinco na IES em questão. A professora B é bacharel em Engenharia de Alimentos com mestrado em Ciência e Tecnologia de Alimentos e doutorado em Engenharia de Produção; tem sete anos de magistério e destes, cinco na IES. Por sua vez, a professora C é licenciada em Matemática, possui especialização em Educação Matemática, mestrado em Ensino de Matemática e doutorado em Informática na Educação; de um total de 25 anos de magistério, atua há seis na IES. A professora D é licenciada em Letras e possui mestrado e doutorado em Linguística Aplicada e, dos seus 16 anos de docência, seis são na IES em questão.

Foi aplicado às quatro docentes um questionário com perguntas mistas, sobre suas formações acadêmicas e, também, sobre suas concepções de avaliação da aprendizagem e sobre sua prática avaliativa. A primeira parte do questionário visou obter informações referentes à formação profissional e ao tempo de regência em sala de aula. Na segunda parte, composta por quatro questões, pretendeu-se obter dados sobre as concepções de avaliação e as práticas avaliativas defendidas por essas professoras. Após a leitura das respostas, considerou-se que havia alguns pontos não suficientemente explorados, relacionados às concepções sobre avaliação e aos documentos norteadores do processo de ensino, usados na IES em questão. Assim, planejamos um roteiro de entrevista, composto de cinco questões que foram propostas, individualmente, às professoras. Cada entrevista, gravada e transcrita, teve duração de trinta minutos a uma hora. Tanto para a aplicação do questionário como para a realização da entrevista, foi solicitado às participantes o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, bem como autorização da Instituição para realização da pesquisa.

As respostas ao questionário e as transcrições das entrevistas foram objeto de análise de conteúdo que, segundo Bardin (1979), comporta três etapas básicas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Na pré-análise, o material foi organizado, já com estabelecimento de códigos que possibilitaram, na segunda etapa, definir as unidades de análise e agrupá-las em categorias, estabelecidas *a priori*: concepções de avaliação, instrumentos de avaliação empregados e atitudes frente aos erros dos alunos. Na etapa de tratamento dos resultados, foram descritas as categorias, com exemplos retirados das transcrições dos dados.

3.1. Apresentação e análise dos dados

A primeira pergunta do questionário é: “Para você, o que significa avaliar a aprendizagem do estudante?”. Conforme a Professora A, *“avaliar a aprendizagem do aluno é identificar quais pontos do conteúdo foram assimilados por ele, e quais pontos do conteúdo ainda precisam ser revisados ou retomados”*[1]*.* Entende-se que essa professora está indicando algumas características de avaliação formativa, que

[1] As respostas das professoras foram transcritas da forma como foram expressas, sem cuidado com a correção gramatical, haja vista que a entrevista configurou-se como uma conversa informal.

conforme Semana e Santos (2008), possui um caráter sistemático e contínuo e, também, fornece informações sobre o desenvolvimento das aprendizagens e competências construídas pelos estudantes, permitindo, dessa forma, aprimorar os processos de trabalho.

A Professora B considera que avaliar *"significa verificar, através de diferentes instrumentos, se o aluno absorveu os conteúdos desenvolvidos em um determinado período de tempo".* Nesse sentido, apesar de fazer uso de vários instrumentos de coleta de informações, que segundo Semana e Santos (2008) é uma das características da avaliação formativa, parece prevalecer o entendimento de avaliação da concepção tradicional de ensino, pois enfatiza a preocupação em verificar se o estudante *absorveu* os conteúdos desenvolvidos em um determinado período de tempo.

"Um ato de replanejar". Essa é a definição utilizada pela Professora C ao expressar seu juízo sobre o significado de avaliação da aprendizagem. A docente destaca, também, que a construção do significado de avaliação se fez tanto pela concepção teórica quanto pela experiência profissional. Essa resposta parece estar de acordo com o que consta em seu Plano de Ensino, pois neste ressalta *"a importância da avaliação na perspectiva formativa e emancipadora, como meios de acompanhamento sistemático do ensino e da aprendizagem".*

A Professora D considera a prática avaliativa *"como um momento de reflexão acerca das habilidades desenvolvidas pelos alunos ao longo do processo de ensino-aprendizagem. [...] levando em conta não apenas o currículo e os objetivos traçados, mas a capacidade de cada aluno e seu grupo".* Percebe-se nessa resposta a tendência de compreender (em parte) a avaliação da aprendizagem analogamente ao que Hoffmann (2014, p. 35) define como uma das características da avaliação mediadora: "[...] sinônimo de desenvolvimento máximo possível de cada um dos alunos". Na mesma questão, a Professora D acrrescenta que *"avaliar significa refletir acerca de como o aluno se desenvolveu ao longo do período letivo"*. Essa afirmativa vai ao encontro do exposto em seu Plano de Ensino, quando diz que *"a avaliação é feita de forma contínua e constante".*

Na segunda pergunta, foram indagados os objetivos da avaliação, na opinião da respondente, o que também é uma forma de entender sua concepção de avaliação. Para a Professora A, um dos objetivos da avaliação é que ela possa identificar os pontos e dúvidas que necessitam ser retomados. Ainda nesse sentido, ela destaca que *"depois de uma avaliação é possível perceber quais os objetivos que não foram alcançados [...]. Dessa forma, é possível repensar o planejamento, a metodologia e a própria a avaliação. Às vezes é preciso dar um passo atrás e reiniciar o trabalho em sala de aula".* Para ela, há indissociabilidade entre planejamento, execução e avaliação, pois, se os objetivos traçados no planejamento não foram alcançados, é preciso repensar cuidadosamente o processo como um todo. Esse pensamento está de acordo com o entendimento de Luckesi (2006, p. 165) quando ressalta que "enquanto o planejamento traça previamente os caminhos, a avaliação subsidia os direcionamentos que venham a se fazer necessários no percurso da ação, [...] subsidiando sempre sua melhora".

A Professora B, por sua vez, respondeu que ao avaliar a aprendizagem dos estudantes, tem como objetivo *"verificar qual foi a compreensão dos mesmos acerca* *dos conteúdos abordados durante determinado período.* Essa resposta remete à da questão anterior, pois ela parece preocupar-se com a compreensão dos conteúdos, mas não elenca estratégias de retomada, quer seja do planejamento, da execução ou da própria avaliação, caso o estudante não "compreenda os conteúdos", dando indicativos de uma avaliação pontual, como fim de um processo.

Os objetivos da avaliação, conforme a Professora C, são seis: *"interpretar, identificar, aplicar, verificar, envolver-se, fazer/buscar, ou seja, ela é formativa".* Parece lembrar um conceito teórico de avaliação, provavelmente desenvolvido durante sua formação inicial ou continuada, e, além disso, julga que a avaliação deve ser pensada como meio de mobilizar o estudante e tornar a aprendizagem um processo contínuo. Ao finalizar sua resposta, a Professora C esclareceu que "*em algum momento precisa-se registrar em sistemas que exigem notas ou conceitos ou palavras qualitativas, mas o que vale é o estudante entender o que é esta codificação quantitativa usada pela sociedade".*

A Professora D responde: *"considero o processo mais importante que o resultado em si na avaliação*". Um segundo destaque na sua resposta é o trecho em que diz: "*Outro ponto crucial da avaliação é a observação do desenvolvimento demonstrado pelos alunos para o planejamento das próximas etapas de forma mais adequada com vistas a garantir melhores condições de aprendizado aos estudantes".* Ela ainda argumenta que o foco principal na avaliação é compreender "*de que maneira os alunos conseguiram avançar e desenvolver sua aprendizagem em minhas aulas de acordo com suas próprias necessidades e capacidades".*

Na terceira questão, eram solicitados os instrumentos utilizados na avaliação e a periodicidade com que faziam uso deles. As professoras apontaram vários tipos ou modalidades distintas de instrumentos para a avaliação da aprendizagem. A Professora A indicou os seguintes: - trabalho individual/coletivo, com periodicidade bimestral ou trimestral e com o objetivo de *"fazer uma pré-avaliação"*, no sentido do que Luckesi (2006) denomina de diagnóstico, para, a partir daí, analisar quais pontos precisam ser revisados ou retomados; - prova dissertativa/objetiva (questões mescladas), também com periodicidade bimestral ou trimestral, que permite, segundo ela, uma correção mais detalhada, *"podendo ser considerados resultados parciais no desenvolvimento das questões";* - participação em sala de aula; - atividades integradas com outras disciplinas, utilizada como fator de motivação.

A Professora B utiliza os seguintes instrumentos: - trabalho individual/coletivo, quinzenalmente; - prova dissertativa/ objetiva (questões mescladas), duas por semestre; - participação em sala de aula, semanalmente.

A Professora C faz uso de vários instrumentos de coleta de dados para a avaliação: - trabalho individual/coletivo, semanalmente; - prova dissertativa/ objetiva, duas por semestre; - seminário, dois por semestre; - participação em sala de aula, diariamente; - outros instrumentos, como portfólio, mapa conceitual, atividade de resolução de problemas e projetos de aprendizagem.

A Professora D cita: - trabalho individual/coletivo, uma vez no semestre; - prova dissertativa, mensalmente; - exposições orais e avaliações de compreensão auditiva, uma vez no semestre.

A última questão indagava sobre a atitude da docente frente aos erros cometidos pelos alunos nas avaliações. A Professora A diz que tenta *“corrigir todo o desenvolvimento”* e procura *“identificar onde houve o erro”.* Depois, a professora procura diferenciar se o erro ocorreu por *“falta de atenção”* ou se é *“um erro conceitual”*. Se for por falta de atenção, ela apenas indica na prova onde ocorreu o problema. Se o erro for classificado como conceitual, conforme suas palavras, *“eu escrevo a forma correta de resolver ao lado da resolução do aluno”.* E conclui dizendo que atribui alguma pontuação quando a resolução está parcialmente correta.

“As avaliações são todas discutidas em aula, geralmente na aula subsequente”. Assim a Professora B inicia sua resposta a esta questão. Dessa forma, há indícios de que nessa “discussão” ocorre o *feedback*, possibilitando ao estudante perceber onde e porque errou e, através do diálogo com a professora, encontrar meios de superar as dificuldades. Ainda nessa questão, a professora salienta: *“quando percebo que a maioria errou, eu anulo a questão redimensionando a nota da avaliação e procedo a mais exercícios referentes à questão”.*

A professora C salienta que *“o erro é o ponto alto do professor, porque é através dele que ocorre o replanejar”.* E complementa: *“se é uma atividade de sala de aula, ou semanal, eu já pergunto/questiono na hora para ver se o estudante mesmo percebe a confusão ou erro, se no papel eu geralmente marco o erro e escrevo alguma atividade semelhante feita em aula para o estudante refletir depois”*. Méndez (2001) afirma que a clareza e a qualidade da informação que é dada ao estudante sobre a correção da avaliação são de grande relevância, pois com elas o professor permite abrir um canal de diálogo sobre os erros apresentados e encontrar soluções a tempo, antes que a reprovação anunciada se concretize.

A Professora D destaca que a verificação que realiza *“depende do tipo de instrumento adotado”* e cita como exemplo as questões de avaliações dissertativas, em que tece *“questionamentos e perguntas que possam servir como ‘andaime’ para que o aluno construa os conhecimentos que ainda não conseguiu assimilar[...]. Também sempre realizo a revisão da correção de forma coletiva, com o grupo, para que a interação entre os alunos promova novas reflexões”.* A docente enfatiza que, ao revisar as questões da avaliação, instiga os estudantes para que argumentem suas respostas frente a todos os sujeitos da sala de aula.

A entrevista trouxe mais elementos para esclarecer as respostas. A primeira pergunta foi expressa por: *A Instituição estabelece na Organização Didática que o resultado das avaliações seja expresso em uma escala numérica (de 0 a 10). Com seu conhecimento em educação, você consegue pensar em outra maneira formal de expressar os resultados da aprendizagem que não através de nota ou conceito?*

Sob este aspecto, a Professora A ressalta que foi feita uma discussão entre os professores do Campus no sentido de utilizar a nota ou o conceito para expressar o resultado das avaliações e que para ela, *“mesmo que se utilize o conceito, há uma equivalência numérica implícita”*. Ainda, diz sentir-se incomodada por ter que atribuir uma nota ao estudante, pois *“tem a questão da subjetividade nas provas dissertativas”* que, segundo ela, não ocorre em avaliações objetivas; porém, estas nem sempre permitem ao professor *“perceber em que ponto o estudante apresentou mais dificuldade e como desenvolveu seu raciocínio*”.

A Professora A enfatiza ainda que o assunto deveria ser mais discutido e não propõe uma forma alternativa de expressar os resultados das avaliações da aprendizagem diferente do que a Instituição exige, mas salienta que busca, juntamente com outros professores, desenvolver a avaliação integrada entre disciplinas**.** Nesse sentido, conforme a professora, mesmo que haja exigência em se atribuir uma nota, outros aspectos qualitativos (que não unicamente os matemáticos) são observados e que isso *"permite compor melhor a avaliação do estudante como um todo".*

A professora B destaca que o parecer é um modelo interessante de avaliar a aprendizagem do estudante, porém demanda bastante tempo, pois é necessário ter um acompanhamento minucioso e constante do estudante para saber se ele está alcançando os objetivos traçados no planejamento da disciplina. Esclarece ainda que, no curso de Licenciatura em Matemática, não adota esse instrumento de avaliação. O que procura fazer é acompanhar de perto o estudante que apresenta mais dificuldade para saber o quanto ele evoluiu e o que ainda falta para alcançar os objetivos previamente traçados.

Quando perguntada sobre a possibilidade de que o parecer possa amenizar a questão da exigência da nota, a professora diz que esse instrumento avaliativo *"permite ler exatamente o que o aluno aprendeu, onde progrediu e o ponto em que ainda precisa melhorar. Por outro lado, a nota não diz onde está o problema".*

Para a Professora C, no curso de Licenciatura em Matemática poderia ser adotado o "apto" ou "não apto" como meio diferenciado de expressar o resultado das avaliações e, também, como expressão dos resultados da aprendizagem do estudante ao final do período letivo. Traz como exemplo as primeiras aulas que lecionou nesse curso, em que os estudantes ingressantes apresentaram muita disparidade com relação ao conteúdo abordado na disciplina e, por isso, não atribuiu notas às avaliações devido ao baixo rendimento apresentado, escrevendo apenas "*Bom, Muito bom e Ótimo"* e, conforme ela, *"destacando pontos que deveriam ser melhorados e os estudantes perguntaram por que não tinha nota nas provas, pois eles são acostumados com notas"*.

Para finalizar, a Professora C ressalta que a Instituição poderia permitir que algumas disciplinas pudessem adotar o "apto" ou "não apto", pois *"fica difícil de aplicar prova em uma disciplina como Didática Geral".* Luckesi critica esse modelo dicotômico de avaliação, pois, segundo ele:

> Os mais aptos, socialmente, permanecem na situação de mais aptos e os menos aptos, do mesmo ponto de vista, permanecem menos aptos. Ou seja, o ritual pedagógico não propicia nenhuma modificação na distribuição social das pessoas, e, assim sendo, não auxilia na transformação social. (Luckesi, 2006, p. 36).

Por sua vez, a Professora D salienta: *"a única opção que eu veria pra gente fugir desse enquadramento de notas ou conceito (porque acham que o conceito é uma avaliação qualitativa, mas na verdade o estudante fica enquadrado por números), é o parecer"*. Esta professora compartilha a ideia da Professora B, quando diz que, para o professor, dependendo do número de turmas e estudantes que tem, fica quase inviável avaliar somente por pareceres. Sob este aspecto, enfatiza ainda que *"procura realizar avaliação por meio de pareceres, principalmente* *nas disciplinas que exigem mais escrita e que busca dar o retorno ao estudante por meio de comentários escritos nas avaliações, mesmo que tenha que dar uma nota depois".* Quando perguntada se dialoga com os estudantes sobre os comentários que escreve em cada avaliação, diz que "*é difícil de atender cada estudante pontualmente e que só consegue fazer isso no último dia de aula do período letivo".*

Na segunda pergunta da entrevista, buscou-se saber, de cada professora, *a possível relação entre a maneira como era avaliada na sua formação inicial e a forma como avalia a aprendizagem de seus estudantes atualmente.*

Ao ser indagada sobre esse aspecto, a Professora A diz que essa forma pode ser comparada (em parte) àquela com que era avaliada na educação básica, pois durante a graduação, mesmo sendo um curso de formação de professores, praticamente não havia interdisciplinaridade. Ainda nesse sentido, esclarece que fez prova durante toda sua graduação e que a maioria das disciplinas *"eram voltadas para a resolução de cálculos, de conteúdo e aplicação de provas".* Seu discurso vai ao encontro das ideias de Perrenoud (1999), quando diz que, na maioria das instituições de ensino, o currículo formal dá mais ênfase aos conteúdos a ensinar, às noções a estudar e a trabalhar do que aos conhecimentos propriamente ditos. Além disso, conforme essa professora, as disciplinas que teoricamente pudessem exigir a leitura e escrita (Didática, Estrutura de Ensino...) eram menos valorizadas que as disciplinas específicas da Matemática e que *"o fato de fazer um curso de Matemática dava a sensação de que as disciplinas específicas eram mais importantes"*. A professora enfatiza que os próprios estudantes, muitas vezes, não demonstravam muito interesse nas disciplinas didáticas e que *"ao sair de um curso de Licenciatura em Matemática pensamos que sabemos muito de Matemática e ao se deparar com a sala de aula, as dificuldades sobressaem, pois os problemas são os mais variados".*

A Professora B afirma que a maneira como foi avaliada durante sua formação acadêmica e como avalia a aprendizagem de seus estudantes é bem diferente. Durante sua formação, sempre foi avaliada "*dentro de uma escala de zero a dez, mesmo que depois isso se decodificava para um conceito, e não havia flexibilidade por parte do professor"*. Segundo a entrevistada, *"ou atingia ou não atingia"* a nota mínima para aprovar. Hoje, conforme ela, "*a falta de base de conceitos matemáticos dos estudantes que ingressaram no curso de formação de professores acaba exigindo mais flexibilidade por parte dos professores nas avaliações"*. Nesse sentido, afirma que a maneira como avalia a aprendizagem dos estudantes é resultado de vários fatores, entre eles: a forma como era avaliada durante toda sua formação escolar, a observação do trabalho dos colegas e, também, por meio da análise do próprio trabalho, procurando melhorar o que não deu certo.

Para a Professora C, durante sua formação inicial *"prevalecia a avaliação quantitativa"* e, ao sair da faculdade, avaliava seus estudantes da mesma maneira como era avaliada na graduação. A professora diz que é importante o convívio e troca de ideias com colegas de trabalho, pois outros professores, por exemplo, *"davam meia questão certa, dependendo do desenvolvimento, coisa que eu não fazia".* Conforme a professora C, o desenvolvimento da prática avaliativa é bastante influenciado pelo local de trabalho, os colegas e a troca de experiências. Esse entendimento vai ao encontro das ideias de Fischer (2008, p.76), quando diz que "durante toda sua trajetória de vida, o professor vai desenvolvendo crenças e valores, muitos dos quais são fortalecidos em sua prática docente e reforçados, muitas vezes, por colegas, pela escola e pela universidade".

"Parcialmente" foi a resposta da Professora D à segunda pergunta. Conforme a entrevistada, sempre "*procura refletir como eram as avaliações quando era estudante, o que gostava, o que achava adequado e tenta adaptar para a realidade de sala de aula, evitando fazer o que não achava bom*". Ainda nesse sentido, a professora afirma que a avaliação nunca é ideal, mas procura se aproximar ao máximo da verificação da aprendizagem do estudante diante dos objetivos planejados, buscando realizar uma avaliação que seja coerente, pois para ela "*a avaliação não pode ser pensada somente na necessidade de apresentação de uma nota para a Instituição*". Embora essa seja uma exigência institucional, é criticada pela professora, ao afirmar que *"não gosta desse modelo".*

A terceira pergunta da entrevista teve a seguinte formulação: *Sua formação inicial e continuada lhe deu suporte (teórico e prático) para uma prática avaliativa diferenciada, entendendo-se como "diferenciada", uma prática avaliativa não meramente baseada na teoria tradicional de ensino?*

Para a professora A, a formação inicial contribuiu pouco nesse sentido. Já na especialização, que foi em Educação Matemática, a entrevistada salienta que teve contato (mas pouco aprofundado) com teorias referentes ao processo avaliativo; no mestrado, o tema foi mais discutido, pois tinha como foco o ensino de Matemática. Nesse sentido, havia várias discussões inerentes ao ensino, inclusive referente à avaliação da aprendizagem. No doutorado, mesmo sendo em educação, a professora relata que não teve nenhuma disciplina específica sobre avaliação. Quando indagada se segue alguma teoria de avaliação, diz que já leu um pouco sobre o assunto, mas que não segue um teórico específico, porém, sempre que a turma é iniciante, procura fazer uma avaliação no sentido de diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes para (re)planejar suas aulas.

Sobre essa pergunta, a Professora B exclamou: "*não, é intuitiva",* pois o que evidenciou durante sua formação inicial e continuada foi *"certo ou errado",* não havendo outra possibilidade. Nesse sentido, vai ao encontro da observação de Buriasco (2004), quando ressalta que o trabalho em sala de aula parte do princípio de que o aluno erra ou acerta, sabe ou não sabe, não havendo outra opção.

Em parte, a Professora C já havia respondido a essa questão na pergunta anterior, quando fala que, em sua graduação, os aspectos puramente matemáticos prevaleciam sobre as disciplinas didáticas e da importância, segundo ela, de buscar cursos de aperfeiçoamento e capacitação, pois "*a formação continuada traz benefícios para o processo educativo, porque permite, em muitos casos, mudar alguns vícios da graduação e os vícios dos teus professores da graduação, porque a gente reproduz esses vícios".*

Conforme a Professora D, ela não foi preparada, durante sua formação inicial, para a prática avaliativa. Tópicos relativos ao tema eram discutidos dentro de disciplinas mais amplas, como por exemplo, Metodologia de Ensino e Prática de Ensino, mas não havia um tópico específico sobre avaliação. A professora afirma que a maneira como avalia a aprendizagem de seus estudantes foi construída da seguinte forma: primeiramente, não repetir o que considerava negativo quando era avaliada como estudante. A partir disso, a professora diz que sabia o que não deveria fazer com seus estudantes ao elaborar e aplicar a avaliação e que construiu, de fato, a forma como avalia o conhecimento dos estudantes por meio de discussões oriundas da formação continuada, inclusive uma delas feita em outro país, por meio de intercâmbio, e específica sobre avaliação da aprendizagem.

O enunciado da quarta pergunta da entrevista foi o seguinte: *Analisando o projeto político pedagógico do curso de formação de professores em que atua, percebe-se que, mesmo não havendo uma disciplina obrigatória específica para trabalhar o tema "avaliação da aprendizagem", o termo é citado várias vezes nos objetivos e nas ementas das disciplinas. Nesse sentido, mesmo que não esteja especificado o tempo em que este assunto seja trabalho em cada disciplina, acredita ser suficiente para que o estudante tenha uma formação adequada relativa ao tema?*

A Professora A diz que não sabe quanto tempo será destinado ao estudo do tema "avaliação" em cada disciplina do currículo, visto que este apenas se inicia; fica difícil saber se a formação relativa ao tema será suficiente, mas acredita que, como o grupo de professores do curso é relativamente jovem, sem alguns vícios mais conservadores, existe a possibilidade de se repensar algumas questões inerentes ao ensino.

"*O tema deveria ser mais discutido e focado, inclusive em reuniões periódicas*": assim a Professora B começa sua resposta. Complementa dizendo acreditar que os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, que "*serão os avaliadores de amanhã, deveriam ter muito mais contato com o tema".* A professora destaca que é importante abordar outras formas de avaliar, como por exemplo, o parecer, pois os egressos do curso poderão acabar exercendo sua profissão em alguma instituição de ensino que exige o uso desse instrumento avaliativo. Ainda nesse sentido, para a entrevistada, "*o estudante deve ter formação específica sobre o tema e não seguir somente o que a orientação didática exige".*

Para a professora C, *"discutir avaliação não é uma coisa que interessa para a pessoa que está chegando na profissão, ela não vai pensar nisso, ela está preocupada se vai saber dar aula, se vai saber explicar"*. Então, conforme ela, esse futuro professor só vai pensar no tema quando tiver que encerrar o período letivo. E conclui dizendo que o estudante do curso só se dará conta da importância da avaliação quando for realizar o primeiro estágio. Salienta que a teoria referente à avaliação será trabalhada nas disciplinas, mas a prática só ocorre mesmo no estágio.

A professora D destaca que, durante sua graduação, sentiu falta de se trabalhar a avaliação da aprendizagem mais pontualmente, mas considera que uma disciplina específica sobre avaliação possa não ser interessante, pois, conforme ela, a avaliação deve estar ligada com a prática; porém nas disciplinas que tratam da prática de ensino, deveriam constar tópicos especiais de como avaliar a aprendizagem do estudante e que provocassem as seguintes reflexões: "*que tipo de avaliação eu posso utilizar; quais os objetivos com a avaliação (que hoje, na maioria das escolas, o objetivo ainda é o de encaixar o aluno numa escala)".*

A quinta pergunta da entrevista foi expressa por: *Para você, qual o nível de complexidade do ato avaliativo?* Em resposta, a Professora A diz que o ato de avaliar é uma tarefa *“difícil e complexa”,* pois precisa expressar os resultados, que inclusive têm como consequência a aprovação ou reprovação do estudante, por meio de uma nota. Acrescenta que se sente angustiada por ter que, de certa forma, tomar essa decisão. Como exemplo, cita a questão de um estudante que fica com média final 6,8, sendo que precisa de 7 para aprovar, e lança o seguinte questionamento: “*será que a subjetividade na correção não permitiria que ele ficasse com 7*?”.

Dificuldade semelhante sente a professora B. Para ela, o ato de avaliar a aprendizagem *“é uma tarefa bastante complexa”,* pois mesmo que se tenha suporte teórico para tal, “*sempre há estudantes que ficam nervosos durante a avaliação”* e nem sempre conseguem expressar o que realmente aprenderam. Ainda sobre o tema, a entrevistada enfatiza que a avaliação é um assunto bastante importante e acredita que deveria ser mais discutida dentro da própria instituição.

“Eu acredito que tu avalia o teu próprio trabalho”. Esse é o entendimento da Professora C, que acrescenta: *“a gente sabe o que fala, mas não sabe o que eles ouvem; eu tenho certeza que explico, mas o que eu explico eles aprendem? Eu não sei!”* e complementa: *“eu entendo que avaliar é fazer um planejamento teu, permanentemente”*, com o objetivo de que os estudantes aprendam.

A professora D considera a prática avaliativa uma tarefa complexa, “*pois avaliar o que um estudante aprendeu ou não, está na dimensão psicológica e é difícil acessar esse ponto”.* Nesse sentido, a entrevistada complementa dizendo que “*a melhor alternativa é planejar uma avaliação pensando no que se quer saber sobre o estudante naquele momento”*, o que se quer verificar e, dependendo do resultado da avaliação, “*o professor consegue inferir e não afirmar que o estudante aprendeu ou não*, *por isso é uma tarefa complexa, exatamente por não ter cem por cento de certeza”.*

Considerações sobre as categorias de análise

As respostas das professoras participantes permitem tecer considerações sobre cada categoria de análise, a saber: concepções de avaliação, instrumentos de avaliação empregados e atitudes frente aos erros dos estudantes.

Concepções de avaliação: pelas afirmativas das docentes, tanto no questionário como na entrevista, sobre a avaliação e seus objetivos, percebe-se que oscilam entre diferentes concepções de ensino. Partem da concepção tradicional, como parece ser o caso da Professora B; oscilam entre um ensino tradicional e uma visão mais ampla de avaliação, como pode ser percebido no caso das professoras A e C, e a Professora D possui objetivos bem delineados e com características de avaliação na concepção crítica. Certas expressões, tais como “absorver” ou “assimilar” conteúdos, desvelam ainda resquícios de uma concepção tradicional, alicerçada na avaliação somativa.

Há discordâncias entre suas concepções e seu entendimento da importância que possui a prática avaliativa no processo de ensino e aprendizagem. Por exemplo, a Professora C, em uma pergunta, respondeu que a avaliação significa um ato de replanejar, mas em outra, ressalta que poderia ser adotado o *“apto”* ou *“não* *apto"* como forma de expressar os resultados da aprendizagem por meio da avaliação dos estudantes do curso. Contradição semelhante ocorre quando a Professora D declara que considera, dentro de uma concepção crítica de educação, *"o processo mais importante que o resultado em si na avaliação".* Porém, quando perguntada se dialoga com os estudantes sobre os comentários que escreve em cada avaliação, diz que "*é difícil de atender cada estudante pontualmente e que só consegue fazer isso no último dia de aula do período letivo".* Entende-se que há uma contradição acentuada nesse aspecto, pois há diferença entre avaliação no sentido processual e *feedback* dado ao estudante somente ao final do período letivo.

Quando perguntadas sobre a complexidade da tarefa de avaliar, as professoras foram enfáticas ao dizer que a prática avaliativa é um trabalho bastante difícil e complexo, pois envolve várias variáveis. Afirmaram também, que em suas formações iniciais o tema praticamente não foi abordado e ao iniciarem suas atividades docentes, algumas afirmam que repetiam a forma de avaliar de seus "melhores professores". No entanto, quando indagadas sobre a importância de incluir uma disciplina obrigatória e específica sobre avaliação da aprendizagem na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática, as professoras dizem não achar interessante, apesar de defenderem a importância de debates sobre o tema; a Professora C, por exemplo, diz que *"discutir avaliação não é uma coisa que interessa para a pessoa que está chegando na profissão, ela não vai pensar nisso, ela está preocupada se vai saber dar aula, se vai saber explicar"*.

Pode-se perceber que praticamente todas as docentes foram avaliadas, durante sua formação inicial, dentro de um modelo tradicional de ensino, em que prevalecia a questão quantitativa como expressão dos resultados das avaliações. Além disso, outro ponto que merece destaque se refere à rigidez com que o processo de ensino e aprendizagem era conduzido. Isso fica evidente na fala da Professora B, sobre a nota mínima para aprovação: "*ou atingia ou não atingia".* Nesse sentido, Fischer (2008) corrobora ao esclarecer que:

> Em se tratando do curso de matemática, já há, no senso comum, uma crença de que ao professor é permitido ser "rigoroso" na avaliação. As reprovações não são, em geral, questionadas; parece que os alunos já esperam, com alguma naturalidade, um certo número de reprovações nas disciplinas de conteúdo especificamente matemático. (p. 77).

Diante do exposto pelas professoras, considera-se que todas têm consciência de que a maneira como eram avaliadas durante sua formação inicial nem sempre favorecia a aprendizagem. E hoje, como avaliadoras, usam essa "experiência" da graduação com o intuito de melhorar suas práticas avaliativas.

Em muitos momentos percebe-se o esforço das professoras em buscar alternativas inovadoras de práticas avaliativas, como é o caso das professoras B e D, quando citam a importância em se utilizar o parecer para avaliar a aprendizagem dos estudantes do curso de formação de professores. Além disso, seguir uma teoria avaliativa e adaptá-la à realidade local, inclusive por meio da troca de experiências com outros colegas de profissão, pode resultar em vários benefícios para aprendizagem dos estudantes, pois conforme Darsie (1998), uma atividade avaliativa não possui significado em si mesmo. Cada professor, ao avaliar a aprendizagem dos estudantes, busca caminhos próprios que o levem a encontrar os critérios avaliativos que convirjam para suas concepções e ações sobre o objeto de avaliação, e que constituam os objetivos planejados.

Instrumentos de avaliação empregados: percebe-se que as professoras conhecem vários instrumentos de avaliação e os utilizam com frequência durante o semestre. Ao analisar a coerência entre as respostas apresentadas pelas professoras e os instrumentos de coleta de dados para as avaliações constantes em seus Planos de Ensino, percebe-se que, nestes, tanto os instrumentos quanto a composição da nota final estão de acordo com a Organização Didática da IES. Apenas a Professora A não cita, em seu Plano de Ensino a participação em sala de aula e a avaliação integrada com outras disciplinas com parte de sua prática avaliativa.

Atitudes frente aos erros: ainda que todas as respondentes afirmem trabalhar com os erros dos alunos, nem sempre fica claro se os erros são aproveitados como “trampolins para a aprendizagem” (Borasi, 1996) ou se apenas são apontadas as ocorrências, para alertar os alunos. Na resposta da professora A, por exemplo, em que diz “*identificar onde houve o erro*”, não há referência a alguma ação efetiva de *feedback,* pois, como afirmam Semana e Santos (2008), para que o *feedback* se configure com funções autoavaliativas, deve atender (entre outras), as seguintes características: (a) ser claro, para que o estudante possa compreender autonomamente; (b) apontar pistas de futuras ações, que permitam ao estudante prosseguir; (c) incentivar o estudante a reavaliar sua resposta; (d) não incluir a correção do erro, mas permitir que o estudante identifique e corrija para que a aprendizagem seja mais duradoura.

Gitirana (2003) comenta que é preciso que o professor reflita sobre o que a resposta escrita do estudante, numa avaliação, pode lhe dizer sobre suas estratégias, seu desenvolvimento, suas concepções e quais os rumos que deve tomar em sua prática pedagógica; isto é, o erro deve servir de via de mão dupla, tanto para avaliar e retomar aspectos em que os estudantes apresentaram dificuldade, quanto para o professor refletir sobre seu próprio trabalho. Anular a questão e somente aplicar mais exercícios referentes àquele ponto específico do conteúdo de pouco ajuda se não houver reflexão sobre o erro e busca de novas estratégias didáticas por parte do professor.

Conclusões

As conclusões desta pesquisa não são definitivas, pois todo processo de ensino, aprendizagem ou avaliação está em constante mudança. O curso de Licenciatura em Matemática cujas professoras foram participantes desta investigação ainda está em seu começo e cabe, então, tecer algumas considerações sobre o que pode ser discutido, no curso e na Instituição, sobre procedimentos avaliativos.

É importante ressaltar que, mesmo não tendo certeza de quanto tempo será destinado ao estudo da avaliação da aprendizagem nas disciplinas desse curso, compreende-se que o fato de a avaliação ter sido citada em vários momentos, seja nas ementas ou nos objetivos, representa um avanço quando se compara às Licenciaturas em Matemática de outras IES.

Acredita-se que uma mudança no processo avaliativo, com o intuito de superar resquícios de uma concepção tradicional, deve começar por um aprofundamento teórico referente à avaliação, no próprio curso. Por isso, entende-se que uma disciplina específica sobre avaliação, como está no projeto político pedagógico, mas atualmente como optativa, poderia fornecer suporte teórico para que o futuro professor de Matemática consiga, aos poucos, adaptando e aliando a teoria à prática que melhor se encaixe na realidade da comunidade escolar em que atua ou vai atuar, superar essa barreira de angustias, traumas e medos que ainda são causados por uma avaliação com forte aporte somativo e, consequentemente, excludente.

Entende-se ser relevante que as professoras e, também, os novos professores do curso de Licenciatura em Matemática, como participantes da construção do conhecimento dos e com os estudantes, busquem continuamente se apropriar de uma literatura que tenha ênfase na avaliação da aprendizagem e que venha auxiliá-los a enfocar a avaliação dentro de uma perspectiva formativa e diagnóstica. Ainda neste contexto, ressalta-se a importância de que a avaliação seja pensada e praticada como um processo contínuo, permitindo, assim, que o professor possa aperfeiçoar cada vez mais a sua prática pedagógica.

Bibliografía

Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Basniak, M. I. (2012). Avaliação em matemática: algumas reflexões a partir de estudo realizado no curso de licenciatura em matemática. *Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 3 (2), 1-16. Recuperado em 25 ago. 2015 de http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/73.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction*: a focus on errors. Norwood, NJ: Ablex.

Buriasco, R. L. C. de. (1999). *Avaliação em Matemática*: *um estudo das respostas de alunos e professores***.** Tese de Doutorado em Educação não publicada, Universidade Estadual Paulista, Marília, Brasil.

Buriasco, R. L. C. de. (2004). Do rendimento para a aprendizagem: uma perspectiva para a avaliação. *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática*, 8., 2004, Recife*.*

Buriasco, R. L. C., Ferreira, P. E. A. & Ciani, A. B. (2009). Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos). *Bolema*, (33), 69-96. Recuperado em 28 ago. 2015 de http://www2.rc.unesp.br/bolema/?q=node/227

Darsie, M. M. P. (1998). *A reflexão distanciada na construção dos conhecimentos profissionais do professor em curso de formação inicial*. Tese de Doutorado em Educação não publicada, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Fischer, M. T. C. (2008). Os formadores de professores de Matemática e suas práticas avaliativas. In: M. T. C. Soares et al. (Orgs.), *Avaliação em Matemática: história e perspectivas atuais (pp. 75-100).* Campinas: Papirus.

Gitirana, V. (2003). Planejamento e avaliação em Matemática. In: J. F. Silva, J. Hoffmann & M. T. Estebán (Orgs.). *Práticas avaliativas e aprendizagens* *significativas*: em diferentes áreas do currículo. 2. ed. (pp. 59-68). Porto Alegre: Mediação.

Hoffmann, J. (2005). *Avaliação: mito & desafio*: uma perspectiva construtivista. 35. ed. Porto Alegre: Mediação.

Hoffmann, J. (2014). *Avaliação Mediadora***:** *uma prática em construção da pré-escola à universidade*. 33. ed. Porto Alegre: Mediação.

Libâneo, J. C. (1985). *Democratização da escola pública: a pedagogia crítico-social dos conteúdos.* 2. ed. São Paulo: Loyola.

Luckesi, C. C. (2006). *Avaliação da Aprendizagem Escolar.* 18. ed. São Paulo: Cortez.

Méndez, J. M. A. (2001). *Avaliar para conhecer, examinar para excluir*. Porto Alegre: Artmed.

Perrenoud, P. (1999). *Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens* – entre duas lógicas. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In: P. Abrantes & F. Araújo (Coord.). *Avaliação das aprendizagens: das concepções às práticas.* (pp. 75-84). Lisboa: Ministério da Educação.

Semana, S & Santos, L. (2008). A Avaliação e o Raciocínio Matemático. *Educação e Matemática***,** (100), 51-60.

Trevisan, A. L. & Mendes, M. T. (2015). Avaliação da Aprendizagem Matemática. *Educação Matemática em Revista,* (45), 48-55. Recuperado em 25 ago. 2015 de http://www.sbembrasil.org.br/revista/index.php/emr/issue/view/56/s howToc

Autores:

Ademilson Marcos Tonin – Licenciado em Matemática pelo Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, Brasil, Especialista em Metodologia do Ensino de Matemática e Física pelo Centro Universitário Internacional (UNINTER) e Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Centro Universitário Franciscano. É Técnico em Assuntos Educacionais no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Veranópolis. Seus interesses de pesquisa centram-se em formação de professores e avaliação da aprendizagem. E-mail: ade.tonin@hotmail.com

Helena Noronha Cury - Licenciada e Bacharel em Matemática, Mestre e Doutora em Educação, pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. É professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, Brasil. Seus interesses de pesquisa centram-se na formação de professores e na análise de erros. E-mail: curyhn@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 91-117

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Estudio Comparativo de Textos Escolares Oficiales de Matemáticas de Ecuador y Venezuela: los Sistemas de Ecuaciones Lineales

Julio Mosquera

Fecha de recepción: 23/03/2017
Fecha de aceptación: 07/03/2018

Resumen	En este estudio se compara cómo presentan los libros de matemáticas oficiales de Ecuador y Venezuela los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (textos para estudiantes entre 13-14 años). No hemos hallado estudios que incluyan solo países iberoamericanos. Los libros estudiados difieren en el punto de partida para la enseñanza, el número de tareas propuestas y los contextos de las tareas. Se asemejan, entre otros aspectos, en el énfasis en lo operacional, y en omisiones, como la falta de definiciones de conjunto solución y de sistemas homogéneos. Tampoco consideran resultados de la investigación sobre la enseñanza de los sistemas de ecuaciones. **Palabras clave**: Sistemas de ecuaciones lineales, álgebra lineal, textos escolares de matemáticas
Abstract	The objective of this study is to compare how the systems of linear equations in two unknowns are presented in official mathematics textbooks, for 13-14th years old students, from Ecuador and Venezuela. We have not found studies where only textbooks from Iberoamerican countries are compared. The textbooks compared in this study are different regarding the starting point for teaching systems of linear equations, the number of posed tasks and the diversity of task contexts. They are similar on several accounts, like emphasis on operational tasks, and in omissions, like the lack of definitions of solution set and homogeneous systems. They do not take into account results from the research on the teaching of systems of linear equations. **Keywords**: Systems of linear equations, linear algebra, mathematics textbooks
Resumo	Este estudo compara a forma como os livros didáticos oficiais de Equador e Venezuela na área da matemática apresentam o sistemas de equações lineares com duas incógnitas (textos para estudantes entre 13-14 anos). Não há estudos que comparem só textos de países ibero-americanos. Os livros comparados diferem quanto ao ponto de partida para o ensino, o número de tarefas e a diversidade de contextos destas tarefas. Eles são semelhantes, entre outros pontos, na ênfase no operacional e em omissões, tais como a falta de definições e conjunto de soluções de sistemas homogéneos. Também não consideram os resultados de pesquisas sobre o ensino de sistemas de equações. **Palavras-chave**: sistemas de equações lineares, álgebra linear, livros didáticos de matemática.

1. Introducción

El estudio reportado en este artículo forma parte de una investigación más amplia sobre la enseñanza de temas de álgebra lineal en la Educación Media en Venezuela. Desde la reforma de la *matemática moderna* estos temas han ocupado un lugar importante en el currículo de matemática, el enfoque algebraico ha predominado en este país a diferencia de otros países latinoamericanos donde ha predominado el enfoque del cálculo. Resulta interesante comparar las formas de enseñar las matemáticas en estos países dadas esta diferencia de enfoques. En este estudio nos enfocamos en un tema central del álgebra lineal: los sistemas de ecuaciones lineales. Estos sistemas son introducidos por primera vez en el Tercer Año de la Educación Media General en Venezuela y en el Décimo Año de la Educación General Básica en Ecuador. Los sistemas lineales constituyen un contenido importante del currículo y son quizás una de las herramientas matemáticas más útiles en las ciencias, la ingeniería y las ciencias sociales (Gilbert y Nicholson, 2004) y están en el corazón del álgebra lineal (Kolman y Hill, 2008).

Los textos escolares son los materiales curriculares más accesibles al profesor y a los estudiantes y muchas veces el único con que cuenta éste para planificar su práctica pedagógica (Ramírez, 2007, Parcerisa, 1996) y como guía para el aprendizaje de los estudiantes (López y otros, 2015; Martínez Bonafé, 2008; González y Sierra, 2004). Algunos autores llegan a señalar que su influencia es tal que la enseñanza en la escuela sería prácticamente impensable sin ellos (Ramirez, 2007), y son considerados como un medio crucial para la enseñanza (Pehkonen, 2004). Aún en países donde los profesores cuentan con un currículo oficial, los libros de texto podrían llegar a determinar el currículo más que los propios programas oficiales (Monterrubio y Ortega, 2012). Tal sería su influencia que son señalados como responsables de la reproducción de ciertos errores y la formación deficiente de conceptos (Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992). Y como señala Chávez (2006), si bien la adopción de un determinado texto escolar por sí misma no necesariamente conduce a un cambio en las prácticas pedagógicas, en la medida en que afecta la elección de los contenidos, su orden y profundidad, si tiene un impacto relevante en las oportunidades de aprendizaje ofrecidas a los estudiantes. Tal influencia hace de los textos escolares un importante objeto de estudio (Ramírez, 2002). En Venezuela han predominado, según Ramírez (2007), los estudios del tipo de evaluación didáctica, donde por ejemplo se considera la adecuación del texto a los programas oficiales y se han centrado en textos de humanidades o sociales (Ramírez, 2003). Recientemente, con la aparición de los textos escolares oficiales de la Colección Bicentenario, se ha puesto atención en otros aspectos, por ejemplo Certad (2013) examinó textos de ciencias naturales desde la perspectiva de la interdisciplinariedad y Salcedo (2012, 2015) realizó un análisis de las actividades propuestas en los textos de matemáticas.

Heynemann, Farrell y Sepulveda-Stuardo (1978) concluyen, de un estudio realizado en doce países, que la disponibilidad de libros en la escuela parece ser el factor escolar más consistente en la predicción de los logros académicos. La UNESCO (2016) reconoce que los manuales son particularmente relevantes para mejorar los resultados del aprendizaje en los países pobres. Agrega que junto a un profesorado comprometido y bien formado, textos escolares bien diseñados y distribuidos en cantidades suficientes serían la manera más efectiva de mejorar la enseñanza y el aprendizaje. Sin embargo, esto no es suficiente. Como señala Oates (2010), se requiere mejorar la *coherencia curricular* para incidir positivamente en la calidad de la educación. Un sistema es considerado *coherente* cuando el currículo nacional, los textos escolares, el contenido de la enseñanza, la pedagogía y la evaluación están alineados y se apoyan entre si (Oates, 2010). Además de la disponibilidad de los textos consideramos que, como resaltan Yang y Ling (2015), los métodos de representación en matemáticas, los tipos de problemas, y el orden y la profundidad de los contenidos presentados en los textos influyen sobre el aprendizaje (Haggarty y Pepin, 2002, Sood y Jitendra, 2007, Zhu y Fang, 2006). Por último, “el libro ofrece “una versión” del objeto a través de las actividades que presenta y el discurso que despliega” (Sessa y Cambriglia, 2007, p. 22), y esa “versión” influiría en la manera como el profesor organiza la enseñanza.

En el *Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias* (TIMSS, por sus siglas en inglés), uno de los estudios comparados más antiguos, se concluye que hay una correlación positiva entre el currículo y el desempeño de los estudiantes (Schmidt y otros, 2001). El *Tercer Estudio Internacional de la Calidad de la Educación* (TERCE), realizado por el Laboratorio Latinoamericano por la Calidad de la Educación (LLECE) y en el que participaron 15 países latinoamericanos, reporta resultados que muestran una relación positiva entre el acceso a libros en el aula y el logro alcanzado por los estudiantes. Además, resultados del *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos* (PISA, por sus siglas en inglés) de 2012, en el que participaron siete países latinoamericanos y un estado de México, muestran un efecto positivo de los textos escolares sobre el aprendizaje.

Según Jaquet (1999), desde la perspectiva francesa de la didáctica de las matemáticas, el contenido de los textos escolares constituye el *saber escolar*. Este saber resulta de la transposición didáctica en la que se transpone el *saber a enseñar*, y es realizado por los autores de los textos escolares. Este saber es asumido como el contenido que los profesores de matemáticas transforman en *saber enseñado* en el aula. Por tratarse de una transposición del *saber a enseñar*, la organización del contenido en el texto escolar no necesariamente coincide con su organización en el currículo oficial. Los autores seleccionan y agrupan el contenido prescrito en los programas de estudio oficiales, seleccionan una secuencia y un enfoque de presentación, crean ejemplos, acompañan el contenido con ilustraciones, y proponen problemas para ser usados por los profesores y resueltos por los estudiantes. Para Delaney y otros (2007), desde la perspectiva anglosajona del currículo, el análisis de los textos escolares nos ofrece una visión del *currículo oficial* y no del *currículo implementado*; mientras que Schmidt y otros (1977), desde la misma perspectiva, los caracterizan como parte del *currículo potencialmente implementado*. El contenido de los textos se ubicaría entonces entre el *currículo pretendido* y el *currículo implementado.* Desde cualquiera de estas apreciaciones tenemos que el texto escolar es una representación del currículo (Johansson, 2003), un mediador entre el currículo oficial y la práctica pedagógica en el aula (Villella y Contreras, 2005). Por último, consideramos la visión del currículo del Centro para el Estudio del Currículo de Matemáticas (CSMC, por sus sigla en inglés). El CSMC deferencia cinco tipos de currículo, entre ellos el *Currículo de los Textos Escolares*, esto es los materiales curriculares que son proveídos a profesores y estudiantes en la institución educativa, y la manera de presentación de los contenidos.

Tomando en cuenta todo lo antes expuesto, nos propusimos realizar un estudio comparativo de los textos escolares oficiales de matemáticas de Ecuador y Venezuela. En particular, centramos la atención en las maneras en que el tema de los sistemas de ecuaciones lineales es tratado en esos libros. Escogimos estos dos países porque ambos comparten una larga historia y han participado, desde hace muchos años, en la creación y consolidación de mecanismos de integración latinoamericana y caribeña. Por ejemplo, en el ámbito educativo, Ecuador y Venezuela son signatarios del Convenio Andrés Bello. En cuanto a políticas públicas en educación, en ambos países se ha adoptado la política de distribución gratuita de textos escolares para todas las materias de todos los años de la educación gratuita y obligatoria en las escuelas y liceos públicos, manteniendo la libertad de selección de textos escolares en las escuelas y liceos de gestión privada. Por otro lado, estos dos países presentan características culturales que los diferencian. Tenemos así elementos comunes y diferenciadores entre ambos países que hacen interesante comparar sus maneras de enseñar matemáticas a partir de la forma en que organizan el contenido en sus textos escolares.

Las preguntas de investigación planteadas en este estudio son:

¿Cuáles son las principales diferencias y semejanzas en el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales entre los textos escolares oficiales de matemática de Ecuador y de Venezuela?

¿Cuáles son las oportunidades de aprendizaje ofrecidas a los estudiantes ecuatorianos y venezolanos sobre los sistemas de ecuaciones lineales por medio de las tareas propuestas en los textos escolares oficiales?

2. Los sistemas educativos de Ecuador y Venezuela

El sistema nacional de educación de Ecuador, según lo establecido en la *Ley Orgánica de Educación Intercultural,* vigente desde 2011, está organizado en tipos, niveles y modalidades educativas. En este sistema educativo se ofrecen dos tipos de educación: escolarizada y no escolarizada. La educación escolarizada está estructurada en tres niveles: inicial, básico y bachillerato. La Educación General Básica (EGB) comprende diez años de escolaridad, la edad de ingreso es de cinco años. El Bachillerato General Unificado (BGU) comprende tres años de educación obligatoria inmediatamente después del nivel básico. En el BGU los estudiantes cursan asignaturas de un tronco común y pueden elegir entre dos opciones: ciencias y técnico. Además, se ofrecen dos bachilleratos complementarios: bachillerato técnico productivo y bachillerato artístico. El bachillerato técnico productivo es optativo y tiene una duración de un año adicional al BGU. Mientras que el bachillerato artístico se rige por normas especiales y tiene dos especialidades: música y danza. Los programas de estudio para la educación general básica están en vigencia desde 2012.

La organización actual del sistema educativo venezolano fue establecida en la *Ley Orgánica de Educación* aprobada en 2009. Este sistema está estructurado en subsistemas, niveles, opciones y modalidades. Los subsistemas son dos: educación básica y educación universitaria. La educación básica está integrada por los niveles de educación inicial, educación primaria y educación media. La educación gratuita y obligatoria comprende todos los años de la educación básica. La educación media comprende dos opciones: educación media general y la educación media técnica. Ambas opciones conducen al título de bachiller. En 2017 fueron aprobados el plan y los programas de estudio para todas las áreas de formación de la Educación Media General, los cuales entraron en vigencia para el año escolar 2017-2018.

En el Cuadro 1 se muestra la organización de cada sistema educativo por subsistemas, niveles y grados o años.

Cuadro 1: Sistemas educativos de Venezuela y Ecuador

Venezuela			
1	Educación Básica (6/16 años)	Educación Primaria (6/12 años)	1^{er} Grado
2			2^{o} Grado
3			3^{er} Grado
4			4^{o} Grado
5			5^{o} Grado
6			6^{o} Grado
7		Educación Media (12/16 años)	1^{er} Año
8			2^{o} Año
9			3^{er} Año
10			4^{o} Año
11			5^{o} Año

Ecuador		
1	Educación General Básica (5/14 años)	1^{er} Año
2		2^{o} Año
3		3^{er} Año
4		4^{o} Año
5		5^{o} Año
6		6^{o} Año
7		7^{o} Año
8		8^{o} Año
9		9^{o} Año
10		10^{o} Año
11	Bachillerato General Unificado (14/17 años)	Primer Curso
12		Segundo Curso
13		Tercer Curso

3. Estudios comparativos de textos escolares

Comparar textos escolares de dos o más países para identificar diferencias y semejanzas entre ellos puede proveernos de información valiosa para mejorar el diseño de nuevos libros. Törnoss (2005, citado en Yang y Ling, 2015) sostiene que “aún un análisis sencillo de los textos escolares puede producir información valiosa al buscar explicaciones del rendimiento de los estudiantes en matemáticas” [Mi Traducción] (p. 1265). Aunque la comunidad de educadores matemáticos reconoce la importancia de los estudios comparativos de textos escolares estos estudios no son muy comunes en nuestros países.

No encontramos ninguna investigación publicada donde se comparen solo libros de matemáticas de países latinoamericanos. Los pocos estudios comparativos de los que tenemos referencia toman en consideración uno o varios libros de algún país iberoamericano con otros de algún país de Europa o de Estados Unidos, por ejemplo: Ponte y Marques (2007) compararon textos escolares de Brasil, España, Estados Unidos y Portugal; Pino y Blanco (2008) estudiaron libros de España y Chile; Castañeda, Rosas y Molina (2010) compararon textos de España, Francia, Inglaterra y México; Picado y Rico (2011) compararon textos de Cuba, Filipina y Puerto Rico; Marmolejo (2014) comparó textos de Colombia y España; y Derouet y otros (2015) compararon libros de texto de Chile, Francia e Italia. Cada uno de estos estudios se centró en algún tema de matemáticas o algún aspecto de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria.

En los estudios comparativos antes mencionados, los temas matemáticos tratados fueron: la proporcionalidad, las funciones, el sistema métrico decimal y el área de una superficie. En ninguno de estos estudios fue considerado el tema de las ecuaciones ni los sistemas de ecuaciones. El único estudio comparativo de textos escolares sobre los sistemas de ecuaciones lineales que localizamos fue el de Yang y Lin (2015), quienes estudiaron las diferencias en el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales entre libros de Taiwan y de Finlandia, para los grados 7 a 9. Utilizaron el método de análisis de contenido para examinar los aspectos siguientes en cada uno de esos textos: 1) la secuencia de la enseñanza, 2) los tipos de aplicaciones, 3) las formas de representación, 4) los tipos de respuestas y 5) el nivel de demanda cognoscitiva. Yang y Lin reportan que hay dos enfoques diferentes para introducir los sistemas de ecuaciones, los libros de Taiwan inician el tema con una situación problema y ponen énfasis en la solución algebraica, y los finlandeses lo inician mediante ecuaciones y gráficas y se centran en la conexión entre ellas, y que ambos grupos de textos escolares tienen méritos que podrían conducir a las y los estudiantes a una mejor comprensión estos sistemas. El estudio reportado en este artículo se inspira en gran medida en la investigación de Yang y Lin.

3.1. La investigación sobre textos escolares en Ecuador y Venezuela

Presentar una revisión exhaustiva de la investigación sobre textos escolares en Ecuador y Venezuela escapa del objetivo de este trabajo. En esta sección solo bosquejamos a grandes rasgos la investigación hecha en ambos países. Una búsqueda de trabajos de investigación sobre textos escolares en Ecuador arrojó resultados muy exiguos. Los pocos estudios localizados tratan temas de historia, en especial el conflicto limítrofe entre Perú y Ecuador, y la representación de los indígenas en los textos escolares. Este resultado nos lleva a concluir que la investigación ecuatoriana en este campo es poco prolífica y reciente. Realizamos búsquedas en varias bases de datos académicas y no localizamos ni un trabajo de investigación, publicado en revistas académicas, sobre textos escolares de matemáticas para la educación secundaria realizado en el Ecuador.

En Venezuela, por el contrario, encontramos estudios sobre los textos escolares desde finales de la década de los años sesenta del siglo pasado. La primera investigación sobre materiales curriculares impresos realizada en este país fue realizada por Nuñes en 1964 (Centro de Capacitación Docente El Mácaro, 1985). Este mismo centro publicó en 1985 el primer estudio venezolano sobre textos escolares de matemáticas para primaria. Contamos con investigaciones recientes dedicadas al estudio de los textos escolares de matemáticas, entre las cuales se destacan los trabajos de Beyer (2011, 2014), Pinto y González (2013) y Serrano (2009). La publicación de la Colección Bicentenario reactivó el interés general por los textos escolares en el país. Varios trabajos de investigación sobre estos libros, en especial sobre los textos de matemáticas, se han realizado desde entonces (por ejemplo: Salcedo, 2012, 2015). Aunque encontramos en Venezuela un mayor interés por el estudio de los textos escolares, consideramos que esta investigación es aún insuficiente. Dado que no tenemos conocimiento de trabajos de investigación sobre textos escolares de matemáticas para la educación secundaria realizados en Ecuador, no es posible establecer comparaciones con las investigaciones realizadas en Venezuela. Por otro lado, tenemos que no se han realizado estudios comparativos de textos escolares de matemáticas de Ecuador y Venezuela.

4. Metodología

En este estudio comparativo asumimos el marco de dos estratos para el análisis de textos escolares propuesto por Delaney y otros (2007) y la categorización de las tareas de Stein y Smith (1998) y Stein y otros (2000). Utilizamos el término *tareas* para referirnos a los ejercicios, problemas y actividades resueltas o propuestas a los estudiantes en los textos escolares. El primer estrato está compuesto de dos partes: 1) la información de soporte y 2) la estructura global. En esta primera parte se recogen datos sobre: el título, el número de libros, número de páginas, perfil de los autores y de asesores, editorial y año de publicación, y materiales suplementarios (tales como: guías para el profesor, materiales manipulables, etc.). En la segunda parte, la estructura global, se recopila información sobre: el número de unidades y el promedio de páginas por unidad, la estructura de las unidades, y los temas cubiertos y su secuencia.

En el segundo estrato se da respuesta a dos preguntas básicas: 1) ¿Qué contenido es presentado? y 2) ¿Cuáles son las expectativas? Para responder a la primera pregunta se toman en cuenta dos elementos: 1) el contenido matemático y 2) la manera en que está organizado. En cuanto al contenido matemático tenemos que en este trabajo nos centramos en los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en las maneras cómo este contenido y las tareas, propuestas y resueltas, son presentadas.

En relación con la segunda pregunta son considerados los aspectos siguientes de las tareas propuestas: la exigencia cognoscitiva y las expectativas de desempeño. La exigencia cognoscitiva se clasifica en cuatro niveles: 1) memorización, 2) procedimientos sin conexión, 3) procedimientos con conexión y 4) hacer matemáticas. Y las expectativas de desempeño son clasificadas en las categorías: 1) solo la respuesta, 2) explicación, 3) justificación y 4) evaluación.

Además de estas categorías fueron tomados en consideración otros aspectos identificados como relevantes en la investigación en didáctica de las matemáticas sobre textos escolares, estos son: los contextos de las tareas de aplicación, tipos de respuestas, el uso de la historia de las matemáticas, la incorporación de tecnologías, el uso de materiales concretos o manipulables, el uso de ilustraciones, gráfico y fotografías, el papel de diversas formas de representación y la traducción entre ellas y, por último, la incorporación de resultados de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales. Para el primero de estos aspectos, identificamos a partir del análisis de los textos un conjunto de contextos para clasificar las tareas, algunos de estos son: situación comercial, y problemas de edades. En cuanto a los tipos de respuestas incorporamos un elemento adicional, consideramos si en la tarea se le propone al estudiante tomar una decisión, por ejemplo, si en la tarea se le da al estudiante la opción de escoger el método de resolución a utilizar. En cuanto al uso de la historia fue tomado en cuenta si la historia de las matemáticas es introducida solo como motivación, como parte del desarrollo de la exposición del contenido o a manera de información con o sin relación directa con el contenido. En lo que respecta al uso de tecnologías examinamos si se sugiere al estudiante el uso de alguna aplicación o calculadora para resolver tareas. Sobre los materiales concretos indagamos si son incorporados como parte de la tarea o de su resolución. En cuanto a las ilustraciones, gráficos y fotografías revisamos su cantidad y si estaban relacionadas con el contenido matemático. También identificamos los tipos de representación usados en ambos textos y si promueven la traducción entre ellos. Por último, buscamos evidencias que nos indiquen si en la elaboración de estos se incorporaron o no elementos de la investigación en didáctica sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

4.1. Selección de los textos escolares

En Venezuela el tema de los sistemas de ecuaciones aparece por primera vez en el currículo de matemática para el tercer año de la educación media general y en Ecuador en el décimo año de la educación general básica, estos dos años son equivalentes según el Convenio Andrés Bello. Por tanto, escogimos los libros *Matemática Tercer Año* y *Matemática 10* correspondientes a estos años escolares, libros publicados por los respectivos ministerios de educación.

El libro *Matemática Tercer Año*, publicado por el Ministerio del Poder Popular para la Educación de Venezuela, fue elaborado por un grupo de profesores contratados especialmente para esta tarea. Dicho libro forma parte de una serie de cinco libros, la Colección Bicentenario, para la educación media. El libro *Matemática 10*, publicado por el Ministerio de Educación de Ecuador, es una versión de un texto escolar de la Editorial Salesiana. Esa versión fue preparada por personal de la misma editorial conjuntamente con personal del ministerio. Este libro forma parte de una serie de tres libros de octavo al décimo grado de la educación general básica.

4.2. Codificación y análisis

Tal como señalamos en la sección anterior, este estudio se realizó en dos estratos. En el primer estrato se realizó una revisión del contenido de los textos para identificar características relevantes, como por ejemplo: el uso de la historia. Para el segundo estrato del estudio seleccionamos todas las tareas propuestas en los textos escolares *Matemática 10* y *Matemática Tercer Año* respectivamente. Cada tarea fue codificada según los cuatro tipos de tareas identificadas en Stein y Smith (1998) y Stein y otros (2000), a cada tarea le fueron asignados cuatro códigos. En el Cuadro 2 se muestran dos ejemplos de tareas con sus respectivas codificaciones. Adicionalmente estas tareas fueron analizadas para determinar si se plantea la toma de decisiones sobre el método de resolución a utilizar, si se promueve el uso de tecnologías y de material concreto.

<table>
<tr><th>Ejemplos/Problemas</th><th>Codificación</th></tr>
<tr><td>La suma de dos números es igual a 5. Además, al restar 4 al doble del primer número, obtenemos el segundo.

(ME, 2010, p.)</td><td>Aplicación situación numérica

Forma verbal

Procedimiento sin conexión

Cerrado</td></tr>
<tr><td>Las bombonas de gas vienen en presentaciones de 10 kg, 18 kg y 43 kg. Su precio está regulado, a través de la Gaceta Oficial tal como se muestra:

<table><tr><th>Presentación (kg)</th><th>Costo (Bs)</th></tr><tr><td>10</td><td>3,70</td></tr><tr><td>18</td><td>6,70</td></tr><tr><td>43</td><td>16</td></tr></table>
Disponiendo de esa información, necesitamos apoyar al Consejo Comunal de la población de Moruy, en el Municipio Falcón del Estado Falcón, a resolver la siguiente situación: Se conoce que en la venta de bombonas del último mes se han recaudado $Bs.$ 125,50 y que se han vendido un total de 25 bombonas en presentaciones de 10 kg y 18 kg. Sin embargo, no se llevó el registro de cuántas bombonas de cada presentación se habían vendido. Ellas y ellos necesitan tener ese registro para tramitar, ante la oficina de PDVSA Gas Comunal, el siguiente pedido. ¿Cómo podremos ayudarles a obtener dicha información?

(MPPE, 2011, p. 81)</td><td>Aplicación situación comercial

Forma combinada

Procedimiento sin conexión

Cerrado</td></tr>
</table>

Cuadro 2. Ejemplos de la aplicación de los criterios de codificación

5. Resultados

Los contenidos del libro *Matemática 10* están organizados en seis módulos, en los que se integran cinco bloques de contenido. Los bloques de contenido llevan por títulos respectivamente: numérico, geométrico, medida, relaciones y funciones, y estadística y probabilidad. Todos los módulos están estructurados de la misma manera en las partes siguientes: páginas iniciales, desarrollo y páginas finales. Cada una de estas partes a su vez está estructurada en secciones. La página inicial de cada módulo tiene dos secciones, las cuales son: Buen Vivir y una actividad inicial, acompañada de una imagen; y la página siguiente está organizada en las secciones siguientes: destrezas con criterios de desempeño, prerrequisitos y un artículo de la Constitución relacionado con el Buen Vivir. El contenido de la parte de desarrollo está estructurado en apartados y sub-apartados. Cada apartado está dividido en: actividades, explicaciones complementarias en los márgenes, contraejemplos (en el margen) y ejemplos. Las páginas finales están estructuradas en las siguientes secciones: cómo resolver problemas, en resumen y ejercicios y problemas; esta última sección incluye un apartado denominado: Más a fondo. El Módulo 1, *Números reales. Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas*, está integrado por ocho apartados. El apartado siete está dedicado íntegramente a los sistemas de ecuaciones lineales. este apartado está integrado por tres sub-apartados, los cuales son: Resolución gráfica, Métodos algebraicos y Tipos de sistemas. Esta estructura es explicada detalladamente en el libro del estudiante. En total el libro tiene 207 páginas, de las cuales 42 las ocupa el Módulo 1. El apartado dedicado a los sistemas de ecuaciones lineales tiene 13 páginas.

Los contenidos del libro *La Belleza de la Matemática-Matemática Tercer Año* están distribuidos en trece lecciones; además, se incluyen en secciones separadas biografías de tres educadores venezolanos. Las y los autores del libro no presentan de manera explícita su estructura. De una revisión de los textos podemos determinar que las lecciones tienen una estructura básica común: primera página y desarrollo. Todas las primeras páginas tienen la misma organización: una imagen y una breve introducción. Esta última a veces es una actividad, como en la lección 1, y otras se refieren a información general, como en la lección 3. La parte de desarrollo no tiene la misma estructura en todas las lecciones. Cada lección tiene una organización particular. Por ejemplo, en la lección 2 aparecen intercaladas tres breves biografías de matemáticos, y en la lección 10 aparece un breve biografía de Euclides, lo cual no se hace en ninguna otra lección. Una de esas lecciones está dedicada a los sistemas de ecuaciones lineales en dos incógnitas. En total el libro tiene 239 páginas, de las cuales 16 son dedicadas exclusivamente a los sistemas de ecuaciones lineales.

5.1. Orientaciones y fundamentos

El texto *Matemática 10* está acompañado de una *Guía para Docentes* (Ministerio de Educación, 2014). En esta guía se declara que se asume el enfoque del aprendizaje significativo. En la presentación de esta guía se afirma que:

> La estructura metodológica se fundamenta en el aprendizaje significativo, siempre dentro de un enfoque globalizador e interdisciplinar, que permita a los y las estudiantes adoptar progresivamente métodos y estrategias matemáticos, a la par de valores como la equidad etaria, la democracia y el respeto a la naturaleza, al ser humano, a la sociedad y a las culturas. Los textos buscan potenciar actitudes y hábitos de trabajo. (...) valorar la importancia de las herramientas tecnológicas y de la ciencia en la vida cotidiana y fomentar un espíritu crítico y reflexivo. (p. 3).
>
> Se agrega que estos libros persiguen un triple objetivo:
>
> **Formativo**. Contribuir al desarrollo de las capacidades cognitivas abstractas y formales de razonamiento, deducción y análisis que permiten construir una visión alternativa de la realidad, a través del desarrollo de modelos matemáticos. (...).

> **Funcional**. Desarrollar un conjunto de procedimientos, estrategias de resolución de problemas y técnicas de cálculo que permiten solucionar problemas de la vida cotidiana y sistematizar procesos de producción (...)
>
> **Instrumental**. Por una parte, interpretar hechos de la vida cotidiana y, por otra, expresar y comunicar los conocimientos matemáticos en otros ámbitos del aprendizaje (...). (p. 3).
>
> Y, en cuanto a la orientación que se le da al aprendizaje, se establece que:
>
> - El proceso de aprendizaje recurre inicialmente a métodos inductivos que parten siempre del entorno conocido por los estudiantes.
> - La manipulación y la experimentación son instrumentos básicos para el conocimiento y dominio de conceptos y técnicas de trabajo necesarios en matemáticas.
> - Los métodos deductivos y el uso de lenguajes abstractos se convierten en un punto de llegada y en la culminación del aprendizaje. (Ministerio de Educación, 2014, p. 3)

Por último, tenemos que en relación con la formación en valores se enfatiza el Buen Vivir, para lo cual:

> (...) se articulan los principios fundamentales del Buen Vivir con aspectos de la realidad de nuestro país. Busca motivar la reflexión, la toma de decisiones y posterior ejecución de acciones positivas a favor del ambiente, de la sociedad y de las relaciones democráticas y para la paz.
>
> Al inicio de cada módulo se muestra un artículo de la Constitución de la República del Ecuador relacionado con el eje elegido y al finalizar el módulo se desarrolla el tema con profundidad. (Ministerio de Educación, 2014, p. 4)

En el material curricular complementario se señalan los fundamentos en que se sustenta el libro ecuatoriano y se revela su alineación con las principales políticas públicas.

El texto *Matemática Tercer Año* no está acompañado de ningún material curricular complementario para profesores ni para estudiantes. Tampoco se explica en el libro del estudiante la estructura organizativa del texto. Solo contienen dos prólogos, una dirigido a los profesores y otro a los estudiantes, donde se bosquejan algunas de las características del libro. En el prólogo dirigido a los estudiantes se hacen afirmaciones tales como:

> La Matemática está presente en nuestro contexto y en el mundo. Además de la belleza, muchos otros temas y situaciones pueden estudiarse y comprenderse desde esta disciplina, permitiendo los cambios y

> transformaciones necesarias en nuestra forma de pensar y actuar sobre los problemas que afectan a la comunidad o a la sociedad en general.
>
> Cada lección de este libro se corresponde con ese vínculo natural que hay entre la Matemática, su enseñanza y el contexto. (Ministerio del Poder Popular para la Educación, MPPE, 2011, p. 3)

Y en el prólogo dirigido a los docentes, madres, padres y representantes se hacen afirmaciones tales como:

> La profesora y el profesor de matemática son en esencia investigadores junto a sus estudiantes, el espacio del aula y su contexto se convierten en el escenario de indagaciones, conversaciones, deliberación, inferencias, deducciones, análisis, contrastación de ideas, métodos y resultados.
>
> Este enfoque de la educación matemática implica que la actividad de las estudiantes y los estudiantes se caracterice por la investigación individual y colectiva, que involucren desde ella y con ella a otros miembros de la comunidad institucional y local, que comprometa a sus familiares en esta excelsa tarea. Es una investigación que trasciende lo disciplinar, es decir, la Matemática escolar, y se relaciona estrechamente con otras disciplinas, con el contexto socio-histórico y con sus problemas, y en especial con la ética.
>
> (...) desde cada una de las lecciones que abarca el libro de Matemática se busca romper con ciertas tradiciones que han signado parte de la educación matemática no sólo en nuestro país sino también en el ámbito internacional, como por ejemplo el énfasis en los algoritmos como el único contenido matemático a estudiar o la desvinculación de las ideas matemáticas con el contexto y con la realidad (...) el maravilloso mundo de la *educación matemática* en contexto, pensada para la formación de la ciudadanía y el estudio a profundidad de las ideas matemáticas” (MPPE, 2011, p. 4).

En estos dos prólogos, se presentan de manera bastante resumida los fundamentos en que se sustentan los libros de la Colección Bicentenario. Allí podemos encontrar referencias a la vinculación de la matemática con la realidad cotidiana, su relevancia para la resolución de problemas en contextos familiares de los estudiantes y a la necesidad de ir más allá de lo disciplinar.

Podemos afirmar que ambos textos escolares comparten algunos de sus fundamentos. Algunos de los supuestos que comparten son la importancia de la relación de la enseñanza de las matemáticas con la realidad, el valor de interdisciplinariedad en el aprendizaje de las matemáticas, el papel del estudiante como investigador y la contribución de la educación en matemática para la formación ciudadana.

5.2. Uso de la historia de las matemáticas

En el texto venezolano se incluyen tres biografías de docentes venezolanos, una al comienzo del libro, otra por la mitad y una última al final del libro. En otras partes del libro aparecen dentro de algunas lecciones unas breves biografías de matemáticos antiguos. En ninguno de los dos libros se hace uso de la historia de las matemáticas en el tratamiento de los contenidos. En particular, en la sección dedicada a los sistemas de ecuaciones lineales, tenemos que en ninguno de los dos textos se hace referencia alguna a la historia de ese importante tema matemático.

5.3. Uso de tecnologías y material manipulable

Encontramos en esta materia una leve diferencia entre ambos textos escolares. En el texto escolar ecuatoriano se hace un uso muy limitado de tecnologías y de materiales concretos. Por ejemplo, hay un solo problema propuesto en que se hace uso de material manipulable. Al final de la sección dedicada a los sistemas de ecuaciones se le sugiere al estudiante el uso de la calculadora “Wiris”, disponible vía internet, para la resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones lineales. Mientras que en el texto escolar venezolano no se hace uso de ninguna tecnología ni de material manipulable. Esta situación es particularmente relevante porque la distribución de computadoras portátiles gratuitas, llamadas Canaimitas, en todos los años de la educación obligatoria acompaña la política de distribución gratuita de textos escolares. Estaríamos así ante un caso de muy baja coherencia curricular, donde no se apoyan mutuamente los textos y las computadoras. Y, por último, tenemos que en ninguno de los dos textos se integra el uso de tecnología ni de material concreto al desarrollo del tema de los sistemas de ecuaciones lineales.

5.4. Los temas y su secuencia

Tanto en Ecuador como en Venezuela la enseñanza de la Matemática en la educación básica se rige por un currículo nacional. El currículo ecuatoriano actual para la Educación General Básica está vigente desde 2010 y el venezolano para la Educación Media General entró en vigencia a finales de 2017. Para el año 2011, cuando fue publicado el libro de Matemática de la Colección Bicentenario para el Tercer Año, el programa oficial para ese año era el correspondiente al Noveno Grado de la Educación Básica vigente desde 1988. Por tanto, tomamos como base de comparación los programas de estudio oficiales de matemática correspondientes a los currículos vigentes en cada uno de estos países para el momento en que fueron elaborados los respectivos textos escolares analizados en este trabajo. El tema de los sistemas de ecuaciones es introducido en Ecuador en el Año 10 de la EBG y en Venezuela en el Tercer Año de la Educación Media, los estudiantes en esos años están en el mismo rango de edades (ver Cuadro 1).

Nos interesa ahora entrar en detalles relacionados con los contenidos particulares del tema sistema de ecuaciones lineales y la manera en que son presentados en dichos textos. En la Figura 1 se muestran estos contenidos y su secuencia, los contenidos comunes están en un recuadro con el fondo blanco.

Tenemos que estos dos libros tienen muchos contenidos en común relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales en dos incógnitas. Y se diferencian muy poco en cuanto a la secuencia en que son presentados la mayoría de esos contenidos.

1. *En el texto Matemática 10* se sigue la secuencia clásica, según la categorización de Coulange (2001), donde se toma como acción de partida a una ecuación lineal con dos incógnitas. Mientras que en el texto *Matemática Tercer Año* la acción de partida es una situación problemática referida a un contexto cotidiano, significativo para las y los estudiantes, presentada como un ejemplo resuelto. Este esquema de presentación encaja dentro del enfoque ideológico utilitario. Ambos textos, una vez

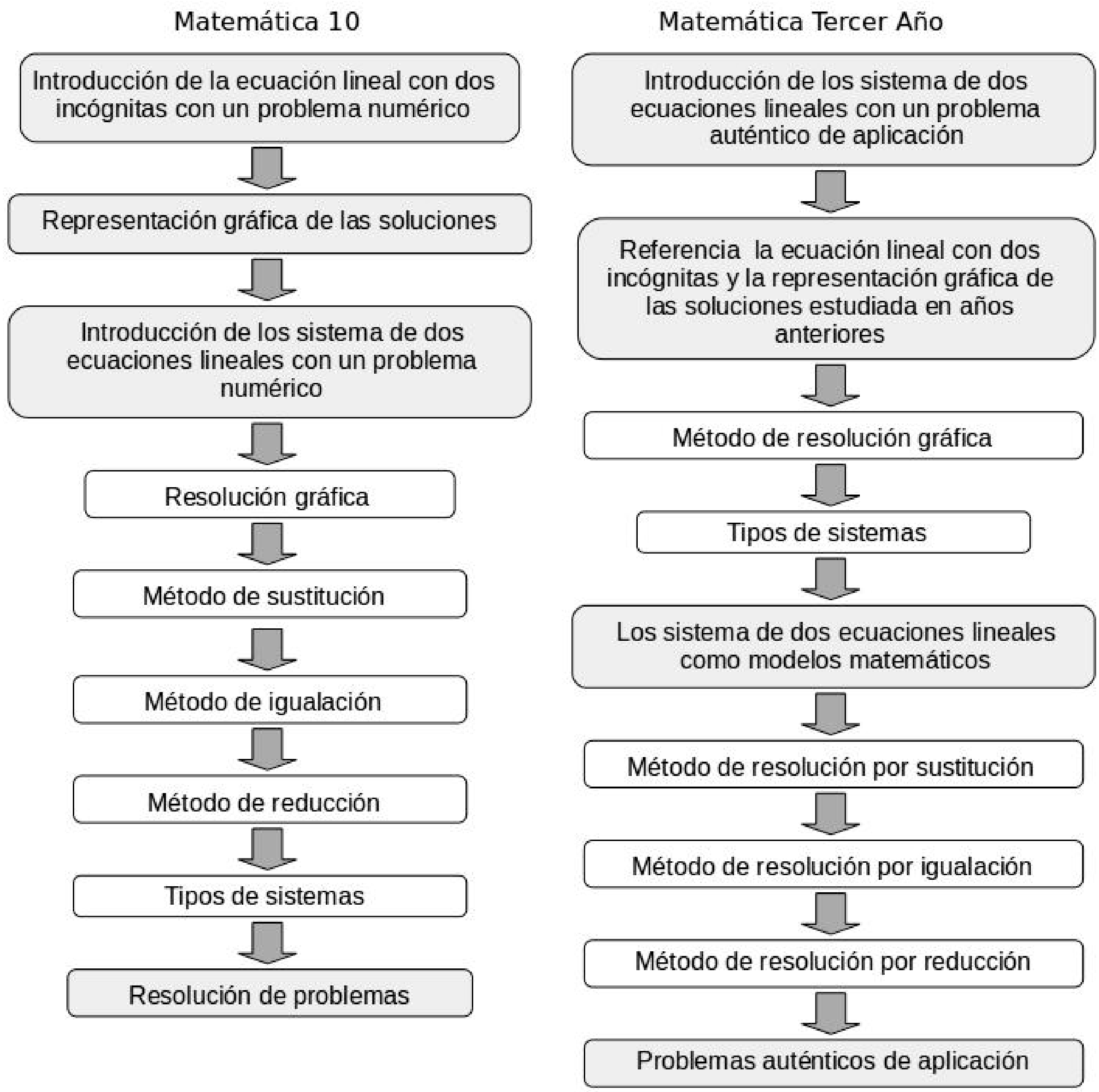


Figura 1. Temas y su secuencia (contenidos similares están en blanco)

presentada la acción inicial, continúan el desarrollo del curso con el método de resolución gráfica. En esta parte de la presentación se insiste en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales como el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones conforman el sistema dado. Ninguno de los dos libros introduce el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. La referencia a los sistemas equivalentes se hace en el texto venezolano en medio de desarrollo de dos ejemplos y en el ecuatoriano se introduce en forma de definición inmediatamente después de la definición de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. En ninguno de los dos casos se hacen mayores consideraciones sobre este importante concepto.

Son varias las omisiones en cuanto a contenidos comunes en ambos textos escolares oficiales. En estos textos no se introducen los conceptos de conjunto solución, sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y combinación lineal. Tampoco son tratados los sistemas de ecuaciones lineales compatibles indeterminados, los cuales surgen con frecuencia en diversas aplicaciones. Estas omisiones son significativas si tomamos en consideración resultados de investigaciones sobre este tema. En particular, no introducir los sistemas lineales homogéneos lleva a una presentación incompleta de los tipos de sistemas de ecuaciones lineales.

En ambos textos se pone demasiado énfasis en lo instrumental, en la realización de operaciones, y se presta muy poca atención a los aspectos conceptúales. Tal es el caso del tema de los sistemas de ecuaciones equivalentes, el cual se trata con muy poco rigor, de manera más bien informal. No toman en consideración la deducción ni la demostración, fundamentales en el razonamiento matemático.

En el Cuadro 3 se presentan las definiciones de sistemas de ecuaciones lineales y su notación tal como aparecen en cada uno de los textos escolares examinados. En el libro *Matemática 10*, la definición se presenta dentro de un recuadro y en el libro *Matemática Tercer Añ*o no se distingue de ninguna manera en particular. Por un lado, tenemos que la definición propuesta en el texto ecuatoriano no es del todo correcta. Porque existen sistemas de ecuaciones lineales que son indeterminados, es decir que su conjunto solución es vacío. Por el otro lado, la descripción de la notación en el texto venezolano es incorrecta, un sistema de ecuaciones lineales no se representa “mediante una llave”, sería más adecuado afirmar que se usa una llave para agrupar las ecuaciones, tal como se señala en el texto ecuatoriano.

Cuadro 3. Definiciones y notación de los sistemas de ecuaciones lineales

Matemática 10	Matemática Tercer Año
Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que deben verificarse simultáneamente. Un sistema de ecuaciones se escribe agrupando las ecuaciones que lo forman con una llave. $\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ 2x-4=y \end{array}\right\}$ (ME, 2010, p. 33)	Efectivamente, las dos ecuaciones lineales, o ecuaciones de primer grado, con dos incógnitas consideradas conjuntamente forman un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y suelen representarse mediante una llave. $\begin{cases} 3,70\cdot x+6,70\cdot y=125,50 \\ x+y=25 \end{cases}$ (MPPE, 2011, p. 82)

En el Cuadro 4 aparecen las referencias que se hacen en el texto ecuatoriano y en el texto venezolano tanto a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales como a su solución.

El tratamiento del concepto de solución es deficiente en ambos textos. Tal como dijimos más arriba, en ninguno de los dos libros se introduce el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Se hace mayor énfasis en la resolución de sistemas de ecuaciones, aspecto procedimental, y muy poco énfasis en la concepto de conjunto solución, aspecto conceptual.

En particular encontramos problemático el tratamiento de las soluciones cuando se usa el método gráfico. En ninguno de los dos textos se menciona que mediante este método se obtienen soluciones aproximadas. En el ecuatoriano se escogen convenientemente un par de ecuaciones con soluciones enteras de fácil localización en un papel cuadriculado y se evita la discusión. En los dos ejemplos resueltos en el texto venezolano por el método gráfico la localización de las soluciones no es tan evidente, en uno de los casos son valores relativamente grandes. A pesar de esta dificultad no se discute el carácter aproximado de las soluciones y en ninguno de los dos ejemplos se comprueban las soluciones mediante la sustitución en las ecuaciones que forman cada sistema dado.

Matemática 10	Matemática Tercer Año
Cada par de valores x e y que verifica simultáneamente todas las ecuaciones de un sistema es una **solución** del sistema. (énfasis en el original) (ME, 2010, p. 33) Resolver un sistema de ecuaciones consiste en encontrar los valores de las incógnitas que verifiquen a la vez todas las ecuaciones. La resolución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas consiste en representar las rectas correspondientes a las soluciones de cada una de las ecuaciones del sistema. Los **puntos comunes** a ambas rectas nos proporcionarían las **soluciones** del sistema. (énfasis en el original) (ME, 2010, p. 34)	Resolver un sistema de ecuaciones es determinar lo valores de las incógnitas x e y que satisfacen, simultáneamente, a cada ecuación del sistema. (MPPE, 2011, p. 82) (...), ese es un punto que pertenece a cada una de las rectas que son representaciones gráficas de dichas ecuaciones. Representen cada una de las ecuaciones lineales que estamos utilizando encuentren el punto de intersección de ambas rectas. (MPPE, 2011, p. 83)

Cuadro 4. Referencias a la resolución y a la solución de sistemas de ecuaciones

En el Cuadro 5 se muestran las definiciones y referencias a los sistemas de ecuaciones lineales equivalentes tal como aparecen en ambos textos escolares. En el texto ecuatoriano la definición de sistemas equivalentes no aparece resaltada o enmarcada con un recuadro como otras definiciones, y es presentada inmediatamente después de la definición de un sistema de ecuaciones lineales. En el texto venezolano no es presentada una definición como tal de sistemas equivalentes, más bien se hace una referencia a estos en el contexto de la resolución del segundo ejemplo resuelto donde se muestra la aplicación a una situación auténtica.

En ambos casos se hace referencia a la equivalencia de ecuaciones como punto de partida para introducir la idea de sistemas de ecuaciones lineales equivalentes. En el texto ecuatoriano se presenta un ejemplo inmediatamente después de la definición, en ese ejemplo ninguna de las dos ecuaciones de uno de los sistemas se puede obtener transformando alguna de las dos ecuaciones en el otro sistema. Pero, no indican en el texto que cada una de las ecuaciones del segundo sistema se puede escribir como combinación lineal de las ecuaciones en el primer sistema. En el texto venezolano la equivalencia de dos sistemas de ecuaciones está siempre referida a dos sistemas cuyas ecuaciones en uno de ellos se obtuvieron mediante transformaciones de las ecuaciones del otro sistema. Se refuerza esta idea aún más planteando la siguiente pregunta después del ejemplo presentado: “¿Por cuál número hemos multiplicado, en cada ecuación, para obtener el sistema equivalente?” (MPPE, 2011, p. 86). Este tratamiento, en el caso de los dos libros, es insuficiente y podría conducir a concepciones erróneas sobre la equivalencia de sistemas de ecuaciones lineales.

Matemática 10	Matemática Tercer Año
Del mismo modo que dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones, dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen las **mismas soluciones**. (énfasis en el original) (ME, 2010, p. 33)	(...), una ecuación lineal se puede multiplicar o dividir por un mismo número sin que sus soluciones se alteren. Con este procedimiento, obtenemos ecuaciones que son equivalentes. Aplicando este conocimiento, podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones lineales que es equivalente al anterior: (...) (MPPE, 2011, p. 86) (...) El símbolo ~ significa que ambos sistemas son **equivalentes**, es decir, tienen las mismas soluciones. (énfasis en el original) (MPPE, 2011, p. 91)

Cuadro 5. Definiciones y referencias a los sistemas de ecuaciones equivalentes

5.4. Uso de ilustraciones y gráficos

En ambos textos escolares, como en muchos otros textos actuales, se hace un uso prolífico de las ilustraciones y las fotografías. La mayor parte del área de la página inicial de ambas unidades de contenidos es ocupada por una fotografía alegórica a algún aspecto de sus respectivos contenidos. Encontramos que en el texto venezolano se hace un uso más frecuente tanto en cantidad como en tamaño de ilustraciones y fotografías que en el texto ecuatoriano.

5.5. Sobre el uso de diferentes registros

En ambos textos, como señalamos anteriormente, se inicia la presentación de los métodos de resolución por el método gráfico. En el ecuatoriano se resuelve un primer ejemplo donde se usan los registros algebraico, numérico y gráfico. En este ejemplo se realizan transformaciones en el registro algebraico y pasajes del registro algebraico al numérico y del numérico al gráfico, y se comprueba el resultado en las ecuaciones que forman el sistema. En el texto venezolano se presenta un ejemplo resuelto donde se realiza un pasaje del registro verbal al algebraico, y luego se representa el sistema gráficamente. Aunque no se explica cómo pasar del registro algebraico al gráfico. No se comprueba el resultado obtenido por el método gráfico sustituyendo en las ecuaciones, no se produce el pasaje al registro algebraico.

En lo que sigue del desarrollo de la exposición del tema, en ambos textos predomina el registro algebraico. Recurren al registro gráfico en ambos libros solo cuando se introduce el método de resolución gráfica y cuando se presentan distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales según la existencia y el número de sus soluciones. En el texto venezolano se presentan casos de cada tipo de sistema de ecuaciones solo gráficamente, y en el ecuatoriano se presentan los ejemplos de cada tipo de sistemas en el registro algebraico y gráfico.

5.6. Contextos de las tareas

En cuanto a la cantidad de tareas propuestas tenemos que el número total de estas en el texto venezolano es mucho menor que en el texto ecuatoriano. En ambos textos escolares el mayor número de tareas se clasifican en el grupo de no-aplicación, en proporciones casi iguales (ver Tabla 1). Ninguno de los dos textos analizados incluye tareas del tipo de aplicación ficticia, es decir, cuyos contextos son inventados o tomados de cuentos o historias.

	Ecuador (n=62)	**Venezuela (n=23)**
	n (%)	**n (%)**
No-aplicación	37 (59,7%)	14 (60,9%)
Aplicación	25 (40,3%)	9 (39,1%)

Tabla 1. Frecuencia de tipos de tareas según el contexto

El texto ecuatoriano incluye una mayor variedad de contextos en las tareas de aplicación que el texto venezolano (ver Tabla 2), siete situaciones diferentes en el ecuatoriano y cuatro situaciones diferentes en el venezolano. En este último texto predominan las tareas de contexto comercial, mientras que en el texto ecuatoriano la mayoría de las tareas son de contextos numéricos. Además, el número total de tareas de aplicación es mucho mayor en el texto ecuatoriano que en el venezolano.

Contextos	**Ecuador (n=25)**	**Venezuela (n=9)**
Comercial	2	6
Económico	1	1

Contextos	Ecuador (n=25)	Venezuela (n=9)
Agrupamiento	4	1
Edades	5	1
Geométrico	5	0
Móviles	2	0
Numérico	6	0

Tabla 2. Distribución de las tareas de aplicación según el contexto

Tenemos entonces que el texto ecuatoriano muestra una mayor variedad de contextos y una menor concentración en un tipo determinado de contexto. Entre las situaciones que predominan en este texto se encuentran las situaciones numéricas, tal como en los textos clásicos, seguidas de las situaciones de edades y geométricas. Mientras que en el texto venezolano predominan las tareas sobre situaciones comerciales, de compra-venta de productos. En la gráfica que se muestra en la Figura 2 puede apreciarse de mejor manera la diferencia entre ambos textos en cuanto a la diversidad de contextos en las tareas.

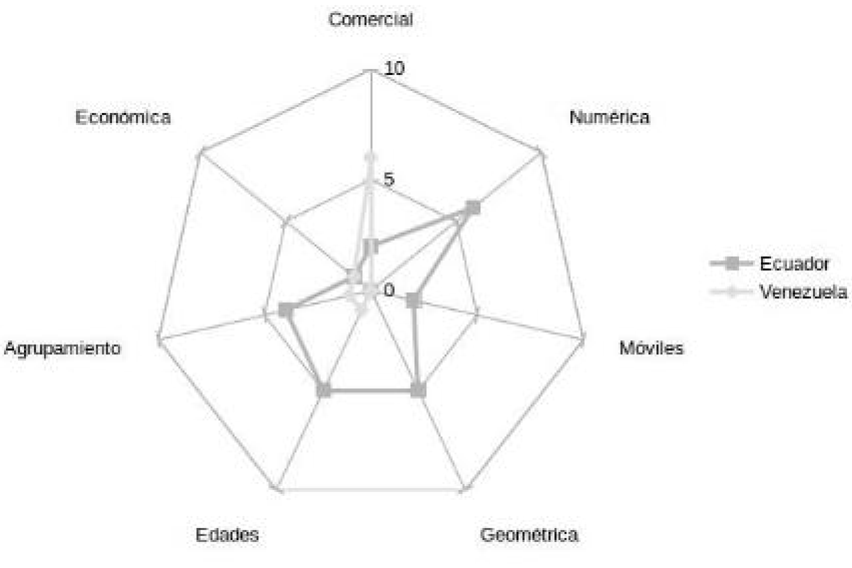


Figura 2. Gráfico de distribución de tareas de aplicación según su contexto

5.7. Formas de representación de los problemas

La forma de representación de las tareas predominante en ambos textos escolares es la forma verbal (ver Tabla 3). La forma puramente matemática es la segunda más frecuente en ambos textos, pero mucho mayor en el texto ecuatoriano que en el venezolano. En tercer lugar se encuentra la forma combinada en ambos textos. Por último, ninguna tarea es presentada en la forma visual en el texto ecuatoriano mientras que solo una aparece de esta forma en el texto venezolano.

	Ecuador (n=62)	Venezuela (n=23)
	n (%)	n (%)
Forma verbal	28 (45,2%)	13 (56,5%)
Forma puramente matemática	26 (41,9%)	5 (21,8%)
Forma visual	0 (0,0%)	1 (4,3%)
Forma combinada	8 (12,9%)	4 (17,4%)

Tabla 3. Formas de presentación de las tareas y su frecuencia

Incluimos en nuestro análisis de las tareas a los materiales manipulables como forma de presentación. En el texto ecuatoriano es propuesta una tarea que requiere la representación mediante monedas de una situación que se resuelve mediante un sistema de ecuaciones lineales. En el texto venezolano no es considerada en ninguna tarea, propuesta o resuelta, el uso de material manipulable como forma de representación de los sistemas de ecuaciones lineales.

A pesar de la recomendación, basada en resultados de la investigación sobre la formación de conceptos matemáticos, de presentar los conceptos y los procedimientos en diversas formas de representación y la traducción entre ellas, en los dos textos estudiados predominan las tareas presentadas en una única forma de representación, principalmente la verbal, y prácticamente solo se promueve la traducción de la forma verbal a la forma algebraica.

5.8. Demanda cognoscitiva de las tareas

Las tareas presentadas en las secciones de ambos textos escolares dedicadas a los sistemas de ecuaciones lineales fueron codificadas también según el nivel de exigencia cognoscitiva de acuerdo con la categorización de Stein y Smith (1998) y Stein y otros (2000), tal como se muestra en al Tabla 4.

	Ecuador (n=62)	Venezuela (n=23)
	n (%)	n (%)
Memorización	2 (3,2%)	5 (21,7%)
Procedimiento sin conexión	51 (82,3%)	17 (74,0%)
Procedimiento con conexión	9 (14,5%)	1 (4,3%)
Hacer matemáticas	0 (0%)	0 (0%)

Tabla 4. Las tareas según el nivel de exigencia congnoscitiva

Tenemos que en ambos textos predominan las tareas de bajo nivel de demanda cognoscitiva. El texto escolar ecuatoriano se ubica en la tendencia de la mayoría de los textos escolares de matemática estadounidenses y europeos, que se caracterizan por incluir un gran número de tareas de bajo nivel de exigencia cognoscitiva. Mientras que el texto escolar venezolano se encuentra en una categoría difícil de ubicar, respecto a textos escolares de otros países, porque se caracteriza por tener pocas tareas de bajo nivel de exigencia cognoscitiva.

5.9. Tipos de respuestas de las tareas

También clasificamos las tareas propuestas en los textos oficiales de Ecuador y Venezuela según el tipo de respuestas en abiertas y cerradas (ver Tabla 5). En ambos textos predominan las tareas de respuesta cerrada.

	Ecuador (n=62)	Venezuela (n=23)
	n (%)	**n (%)**
Respuesta abierta	2 (3,2%)	1 (4,3%)
Respuesta cerrada	60 (96,8%)	22 (95,7%)

Tabla 5. Frecuencia de los tipos de respuestas de las tareas

Tenemos que el tipo de tareas de respuesta abierta aparece en una frecuencia sumamente baja. Combinando este resultado con el relacionado con el nivel de exigencia cognoscitiva (ver Tabla 4), podemos concluir que la mayoría de las tareas son de tipo de respuesta cerrada y de bajo nivel de exigencia cognoscitiva. Resultado que contradice las recomendaciones recientes que sugieren una mayor inclusión de tareas retadoras y de respuesta abierta.

López y otros (2015) y Guerrero, Carrillo y Contreras (2014) incluyen en sus estudios de las tareas en los textos escolares la categoría *toma de decisión*. Esta se refiere a tareas que requieren del estudiante tomar decisiones. En los textos estudiados todas las tareas propuestas se resuelven mediante el planteamiento de un sistema de ecuaciones. Por tanto, los estudiantes no tienen que tomar ninguna decisión sobre la herramienta matemática a utilizar. Los estudiantes solo tienen que tomar decisiones en cuanto al método de resolución de estos sistemas. En el texto ecuatoriano, de 50 tareas analizadas, en 31 el estudiante debe elegir el método a usar. Mientras que en el texto venezolano, de 11 tareas propuestas, en 7 el estudiante debe decidir cuál método utilizar. Tenemos que ambos textos se asemejan en cuanto al porcentaje de problemas en que se requiere al estudiante tomar decisiones. En ninguno de estos libros se discuten las ventajas y desventajas de los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, pareciera que da lo mismo usar uno u otro método.

5.10. Consideración de la investigación sobre sistemas de ecuaciones

Contamos con algunos estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales en la educación media en países iberoamericanos, por ejemplo: Sessa y Cambriglia (2007) y Bruno y Rivas (2014), incluso sobre la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones en un texto escolar (Guerrero y otros, 2014). En estas investigaciones se reportan resultados relevantes para la enseñanza de este importante tema, y en particular para el diseño de textos escolares. Seesa y Cambriglia señalan la importancia de la articulación entre diferentes registros de representación, más allá de la mera traducción de un registro a otro, lo cual permitiría explicar a partir de la resolución en un registro dado los distintos pasos seguidos en otro registro. Bruno y Rivas reportan que en los textos se le da mucha relevancia a los métodos de resolución y se le presta poca atención al significado del conjunto solución. Y Guerrero y otros hallaron que en el texto estudiado no se promueve realmente la resolución de problemas, dado que la mayoría de las tareas propuestas son del tipo ejercicios, aunque este es señalado como uno de los temas centrales del currículo. De la revisión del contenido de sistemas de ecuaciones en los textos escolares de Venezuela y Ecuador, así como del material curricular complementario en el caso ecuatoriano, podemos concluir que en ninguno de estos textos se incorporan resultados de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, podemos afirmar que en el diseño del texto ecuatoriano si se incorporan algunos dispositivos didácticos generales, tales como el uso de mapas conceptuales como organizador de los contenidos.

6. Conclusiones

Los textos analizados fueron seleccionados y diseñados siguiendo diferentes políticas. El libro ecuatoriano es una versión de un libro de una editorial privada, mientras que el venezolano fue elaborado completamente por el Ministerio del Poder Popular para la Educación. Este último texto no cuenta con material curricular complementario, mientras que el texto ecuatoriano está acompañado de un manual para el docente.

En ambos libros se hace un uso prolífico de las ilustraciones, hay más ilustraciones en el texto venezolano pero muchas de ellas no están relacionadas con el contenido matemático. También se recurre en ambos textos a notas históricas como motivación, aunque por lo general las notas históricas no están relacionadas con el contenido tratado en la sección donde aparecen. En cuanto al uso de tecnologías, en el libro ecuatoriano se hace alguna mención a estas mientras que en el libro venezolano no son tomadas en cuenta. Este resultado revela una falta de coherencia curricular entre los textos escolares y las tabletas distribuidas gratuitamente a estudiantes de la educación media en Venezuela.

No encontramos evidencias de que las y los autores de estos textos tomaran en consideración resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales ni de otros temas de álgebra. Aunque en el caso de Ecuador, se recurre a ciertos dispositivos didácticos generales como los mapas conceptuales.

En cuanto a las tareas propuestas en los textos analizados, en ambos predominan las tareas de respuesta cerrada y de bajo nivel de exigencia cognitiva. En el texto venezolano se incluye un número muy reducido de tareas, el cual es mucho menor que en el libro ecuatoriano. En éste las tareas aparecen propuestas intercaladas en la presentación del tema y en una sesión al final, mientras que en el venezolano aparecen solo al final. En este último texto algunas preguntas son intercaladas, pero en su mayoría son de comprobación y memorización.

De los resultados de esta investigación se pueden derivar las siguientes recomendaciones para mejora el texto venezolano *Matemática Tercer Año.* Evitar el uso exagerado de ilustraciones no relacionadas con el contenido e incluir gráficos, ilustraciones, etc. que apoyen la comprensión de los conceptos y procedimientos. Incorporar notas históricas para la motivación que estén relacionadas con el tema tratado y recurrir a la historia de los sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos de resolución para mejorar la exposición. Tomar en consideración los resultados de la investigación sobre este tema, por cierto muchas de estas investigaciones se han realizado en países iberoamericanos. Aumentar el número de tareas propuestas y elevar el nivel de exigencia cognitiva. En particular, se sugiere incluir tareas que promuevan el razonamiento matemático, por ejemplo: la elaboración de conjeturas y la demostración, así como el uso de tecnologías. Disminuir el énfasis en tareas de contexto comercial y aumentar el número de tareas más realistas y relacionadas con temas de ciencias y tecnologías. Conectar los sistemas de ecuaciones lineales con otros temas de matemáticas. Enfatizar la formación de conceptos y disminuir el énfasis en la enseñanza de procedimiento de resolución de ecuaciones. Incluir conceptos fundamentales como el de conjunto solución, sistemas equivalentes, combinación lineal y otros.

Bibliografía

Beyer, W. (2011). Constantes y variables en textos de matemática: un enfoque histórico. *Paradigma, 32*(2), 69-84.

Beyer, W. (2014). Los textos escolares y el error en matemáticas. *Revista de Matemática de la Universidad del Atlántico, 1*(1), 1-25.

Bruno, D. y Rivas, F. (2014). Sistemas de ecuaciones: tratamiento de la solución en libros de texto de la escuela secundaria. En D. Veiga (ed.) *Acta de la X Conferencia Argentina de Educación Matemática* (pp. 195-202). Buenos Aires: Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Centro de Capacitación Docente El Mácaro (1985). Investigaciones sobre libros de texto de Matemática y Ciencia para la Escuela Primaria realizada por al Ministerio de Educación de Venezuela y la OEA. En S. Qüenza (comp.) *La evaluación de los materiales educativos impresos* (pp. 243-261). Turmero, estado Aragua, Venezuela: Ediciones El Mácaro.

Certad Villarroel, P. A. (2013). Análisis del texto escolar de ciencias naturales desde la transdisciplinariedad. *Revista de Comunicación de la SEECI, 17*(31(), 52-69.

Chávez, O. (2006). From the textbook to the enacted curriculum [Del texto escolar al currículum ejecutado]. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Médez (edits)

Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathemtaics Educaction, Vol. 2 (pp. 565-566). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Coulange, L. (2001). Enseigner les systèmes d'équations en troisiéme: une étude économique et écologique [Enseñar los sistemas de ecuaciones lineales en secundaria: un estudio económico y ecológico]. *Recherches en Didactiques des Mathétiques, 21*(3), 305-354.

Derouet, C., Henríquez, C., Menares, R. y Panero, M. (2015). *Estudio comparativo sobre la enseñanza de las funciones: Análisis de tareas en libros de texto de Chile, Francia e Italia*. Trabajo presentado en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

Gilbert, W. J. y Nicholson, W. K. (2004). *Modern algebra with applications, Second Edition* [Álgebra moderna con aplicaciones, Segunda edición]. Nueva York: John Wiley.

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos de la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408.

Guerrero, A. C., Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2014). Problemas de sistemas de ecuaciones lineales en libros de texto de 3o ESO. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática XVIII*, (pp. 395-404). Salamanca: SEIEM.

Haggarty, L. y Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what? [Una investigación de los textos escolares de matemáticas y su uso en aulas inglesa, francesa y alemana]. *British Educational Research Journal, 28*(4), 567-590.

Heynemann, S. P., Farrell, J. P. y Sepulveda-Stuardo, M. A. (1978). *Textbooks and achievement: What we know* [Textos escolares y rendimiento: qué sabemos]. *World Bank Staff Working Paper*, No. 298.

Jaime, A., Chapa, F. y Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon, 23*, 49-62.

Jaquet, F. (1999). Le rapport de l'éléve au savoir, selon la recherche en didactique des mathematiques [La relación del estudiante con el saber, según la investigación en didáctica de las matemáticas]. *L'Educazione Matematica, 1*(3), 167-177.

Johansson, M. (2003). Textbooks in mathematics education: a study of textbooks as the potentially implemented curriculum [Textos escolares en la educación matemática: un estudio de los textos escolares como el currículo potencialmente implementado]. Tesis doctoral no publicada: Luleå Department of Mathematics, Luleå University

Ley Orgánica de Educación Intercultural (2011). República de Ecuador.

Ley Orgánica de Educación (2009). República Bolivariana de Venezuela.

López, E. M., Guerrero, A. C., Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 73 – 94.

Marmolejo, G.A. (2014). *Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Salamanca. Salamanca, España.

Martínez Bonafé, J. (2008). Los libros de texto como práctica discursiva. Revista de la *Asociación de Sociología de la Educación, 1*(1), 62-73.

Ministerio de Educación (2010). *Área de Matemática. Actualización y fortalecimiento curricular de la educación general básica 2010*. Quito: El Autor.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos de Educación Secundaria. *Revista de Educación, 358*, 471-496.

Oates, (2010). *Could do better: Using international comparisons to refine the National Curriuclum in England*. University of Cambridge. Documento en lìnea. Disponible en: http://www.cambridgeassessment.org.uk/Images/112281-could-do-better-using-international-comparisons-to-refine-the-national-curriculum-in-england.pdf

Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, secuenciarlos y usarlos. Barcelona*, España: Graó.

Pehkonen, L. (2004). The magic circle of the textbook–an option or an obstacle for teacher change [El círculo mágico del texto escolar—una opción o un obstáculo para el cambio del profesor]. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 513-520). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Picado Alfaro, M. y Rico Romero, L. (2011). *El sistema métrico decimal en textos de matemáticas en Cuba, Puerto Rico y Filipinas en la segunda mitad del siglo XIX*. Trabajo presentado en la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

Pino, J. y Blanco, L. J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad en España y Chile, en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones, 38*, 63-88.

Pinto, E. y González, F. (2013). Historia social de la educación matemática en Iberoamérica: Las ecuaciones lineales en los libros de texto de matemáticas para Educación Básica en Venezuela. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 35, 177-201.

Ponte, J. P. y Marques, S. (2007). *Proportion in school mathematics textbooks: A comparative study* [La proporción en los textos escolares de matemáticas: un estudio comparativo]. Documento en línea. Disponible en: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.532.415&rep=rep1&type=pdf

Ramírez, T. (2002). Una aproximación al estudio del nacionalismo en los textos escolares venezolanos. *Revista de Pedagogía, 23*(66), 4171.

Ramírez, T. (2003). El texto escolar: una línea de investigación en educación. *Revista de Pedagogía, 24*(70), 273-292.

Ramírez, T. (2007). *Del control estatal al libre mercado. Políticas públicas y textos escolares en Venezuela (1958-2005)*. Caracas: Ediciones de la Biblioteca-Universidad Central de Venezuela.

Salcedo, A. (2012). Análisis de las actividades para el estudiante en los libros de matemáticas. *Investigación y Postgrado, 27*(1), 83-109.

Salcedo, A. (2015). Análisis de las actividades de estadística propuestas en textos escolares de primaria. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 43, 70-87.

Serrano Gómez, W. (2009). *Las actividades matemáticas, el saber y los libros de texto: necesidad de una visión socio-cultural y crítica*. Caracas: Fondo Editorial IPASME.

Sessa, C. y Cambriglia, V. (2007). La validación de procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones. *Yupana*, N° 4, 11-24.

Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice [Tareas matemáticas como un marco para la reflexión: de la investigación a la práctica]. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268–75.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. y Silver, E. A. (2000). I*mplementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development* [Implementación de una instrucción matemática basada en los estándares: un libro de casos para el desarrollo profesional]. New York: Teachers College Press.

UNESCO (2016). *Global Education Monitoring Report 2016: Every child must have a textbook* [Reporte de Seguimiento Global de la Educación 2016: Cada niño debe tener un texto escolar]. París: El Autor.

Villella, J. A. y Contreras, L. C. (2005). La selección y uso de libros de texto: un desafío para el profesional de la enseñanza de la matemática. *La gaceta de la RSME, 8(*2), 419-433.

Yang, D. C. y Ling, Y. C. (2015). Examinig the differences of linear systems between Finnish and Taiwanese textbooks [Examinar las diferencias en los sistemas lineales entre textos escolares finlandeses y taiwaneses]. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1265-1281.

Anexo: Textos escolares utilizados en el análisis

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2011). *Matemática. Tercer Año.* Caracas: El autor.

Ministerio de Educación (2010). *Matemática 10*. Quito: El autor.

Autor: Julio Mosquera. Profesor Agregado de la Universidad Nacional Abierta, Venezuela. Miembro de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT).

Dirección electrónica: jmosque@una.edu.ve

Dirección postal: Universidad Nacional Abierta. Av, Los Calvani No. 18. San Bernardino. Caracas 1010. Venezuela

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 118-143

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica

Ortelio Nilo Quero Méndez, Aldo Medardo Ruiz Pérez

Fecha de recepción: 26/03/2017
Fecha de aceptación: 26/01/2018

Resumen	En el presente artículo se expone un procedimiento didáctico para la determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones de elementos de conjuntos bases de estructuras geométricas, el cual se ejemplifica con las rectas del plano. Este procedimiento es una componente del análisis didáctico del contenido en la planificación del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica para la carrera de Licenciatura en Educación, especialidad Matemática y Física de Cuba. En el artículo se expone, además, una síntesis de los fundamentos teóricos del procedimiento didáctico que constituye una sistematización novedosa de los conceptos de representación, sistema de representación y transferencia entre representaciones en el contexto de la Geometría Analítica. **Palabras clave**: transferencia entre representaciones, sistema de representación, geometría analítica y procedimiento didáctico.
Abstract	This article presents a didactic procedure for the determination of procedures for transfer between representations of elements of sets-base on geometric structures. This procedure is a component of the didactic analysis of the content in the planning of the teaching-learning process of Analytical Geometry for degree in education, specialty math and physics of Cuba. Article presents, in addition, a synthesis of the theoretical foundations of teaching procedure which constitutes a new systematization of the concepts of representation, representation and transfer system between representations in the context of analytic geometry. **Keywords**: transfer between representations, system of representation, analytic geometry and didactic procedure.
Resumo	Este artigo apresenta um procedimento didático para a determinação dos processos de transferência entre representações de elementos de conjuntos-bases de estruturas geométricas, que é exemplificado com as linhas retas do plano. Este procedimento é um componente da análise do conteúdo do treinamento no planejamento do processo ensino-aprendizagem de Geometria Analítica para licenciatura em educação, especialidade matemática e física de Cuba. Artigo apresenta, além disso, uma síntese dos fundamentos teóricos de procedimento didático que constitui uma nova sistematização dos conceitos de representação,

sistema de representação e transferência entre representações no contexto da geometria analítica.
Palavras-chave: transferência entre representações, sistema de representação, geometria analítica e procedimento de ensino.

1. Introducción

En Cuba, se ha modificado el sistema de líneas directrices para la enseñanza de la Matemática en la Educación General (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014), incluyéndose procesos que no se habían tenido en cuenta explícitamente en etapas anteriores, como es el caso de la inserción del trabajo con representaciones en la directriz “adiestramiento lógico-lingüístico”.

Según esta directriz los estudiantes de la Enseñanza Media Básica (12-14 años) y de la Enseñanza Media Superior (14-18 años) deben ser capaces de: identificar las distintas formas de representar los objetos y las situaciones matemáticas y establecer relaciones entre ellas, seleccionar y aplicar la forma más conveniente de representación de acuerdo con la situación planteada y transferir de una representación a otra.

Estas transformaciones deben conducir a modificaciones en la formación de profesores de Matemática para lograr que los graduados puedan dirigir el proceso de enseñanza y aprendizaje (PEA) de esta disciplina según las exigencias establecidas en el sistema de líneas directrices para la enseñanza de la Matemática.

Tales modificaciones en la formación de profesores han de implementarse tanto en la disciplina Didáctica de la Matemática como en el resto de las disciplinas y especialmente en aquellas cuyo contenido tiene relación directa con los contenidos escolares como es el caso de la Geometría Analítica que se estudia en el tercer año de la carrera Matemática y Física.

Actualmente el trabajo con representaciones en el PEA de la Geometría Analítica para la formación de profesores de Matemática y Física transcurre espontáneamente, según la lógica de la exposición del contenido matemático tal cual aparece en los libros, sin prestar mucha atención al papel de la asignatura en la formación didáctica de los estudiantes.

Respecto a la transferencia entre representaciones de la recta en el plano se presta poca atención al tratamiento de todos los casos que se pueden presentar, quedando varios de ellos sin incluir en el contenido de la asignatura: no se analizan en clase, no se proponen tareas que los incluyan y no se orienta su estudio.

La causa fundamental de esta situación problemática tiene sus orígenes en la planificación de la enseñanza, entendida como “la determinación y elaboración de los programas de influencias sobre los alumnos por parte del docente para que se produzca el aprendizaje” (Ruiz, 2007, p.37).

Los métodos y procedimientos para la planificación de la enseñanza de la Matemática han sido muy tratados por autores de obras sobre metodología de la enseñanza de la matemática que se utilizan en Cuba (Jungk, 1978; Ballester y otros, 2000), pero estos autores no tratan explícitamente la planificación del trabajo con representaciones.

En el extranjero es muy interesante el procedimiento, para la planificación a corto plazo, desarrollado por Gómez y Rico (2002) con el nombre de análisis didáctico que incluye el análisis del contenido abarcando varios elementos no considerados explícitamente por Jungk,1978; Ballester y otros, 2000, entre ellos, el análisis de las representaciones.

Aunque en el procedimiento propuesto por Gómez y Rico (2002) se presta atención al examen de las representaciones, en lo que se refiere a las operaciones y las relaciones entre representaciones, en el análisis del contenido concebido por estos autores no es objeto de atención la transferencia entre representaciones en lo que respecta a la determinación de cuántos y cuáles son los casos posibles y qué procedimiento de transferencia utilizar en cada caso.

En el presente artículo se expone un procedimiento didáctico para resolver esta situación problemática del análisis del contenido y se ejemplifica con la transferencia entre representaciones de la recta en el plano en el contexto del PEA de la Geometría Analítica en la carrera de Licenciatura en Educación, especialidad Matemática y Física de las universidades cubanas.

El desarrollo de este artículo está dividido en dos partes. En la primera se exponen fundamentos teóricos de la teoría de las representaciones contextualizadas en la geometría analítica en torno a los conceptos de representación, sistema de representación y transferencia entre representaciones. En la segunda parte se presenta un procedimiento didáctico para la determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones de elementos de conjuntos bases de una estructura geométrica y se ejemplifica en el caso de la recta en el plano.

2. Fundamentos teóricos de la determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones

Los tres conceptos centrales de la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos son los conceptos de **representación, sistema de representación** y **transferencia entre representaciones,** los cuales están muy relacionados entre sí y con el concepto de estructura.

El contenido de esta sección se ha organizado según la siguiente idea de Kaput:

> Cualquier especificación particular de la noción de representación debiera describir, al menos, cinco entidades: los objetos representados, los objetos representantes, qué aspectos del mundo representado se representan, qué aspectos del mundo representante realizan la representación y la correspondencia entre ambos mundos o conjuntos (Kaput, 1987, p. 23).

2.1. Los objetos representados. Su relación con el concepto de estructura

Considerando la idea de Kaput es necesario partir del concepto de estructura, para precisar los objetos representados:

> Una estructura es un n-uplo ordenado $(C_1, C_2, \dots C_m, R_1, R_2, \dots R_{n-m})$ cuyos primeros m elementos (m<n), son conjuntos no vacíos, llamados conjuntos bases de la estructura y los restantes n-m elementos son relaciones o conjuntos de relaciones entre los conjuntos bases de la estructura (Castro, Díaz, Martínez, López, Bermúdez y González, 1992, p.3).

De esta definición se infiere que cada conjunto base interviene en por lo menos una de las relaciones de la estructura. También se aprecia que la esencia de una estructura es la existencia de, al menos, una relación entre sus conjuntos bases: si no hay relación, no existe estructura.

Cuando en una estructura los conjuntos bases están formados por objetos de la geometría, decimos que la estructura es geométrica.

La pregunta referida a ¿qué objetos de una estructura se representan en el PEA de la Geometría?, tiene varias posibles respuestas en dependencia del nivel educativo en el cual se produce este proceso. En general se representan: los conjuntos bases de la estructura y sus elementos, las relaciones de la estructura y sus elementos y la propia estructura.

2.2. Los objetos representantes, sus tipos y formas

Por **representación** de un objeto geométrico (objeto representado) se entiende el objeto material o mental (objeto representante) que lo sustituye y lo determina unívocamente en el pensamiento, el lenguaje y la comunicación.

En este contexto la palabra **representar** designa el proceso dirigido a obtener una representación de un objeto, ya sea, la primera de sus representaciones o una representación a partir de otra existente.

En las representaciones de los objetos matemáticos se suelen utilizar nombres comunes para estos que no los determinan unívocamente y que a diferencia del lenguaje común pueden ser letras o signos especiales. El uso de estos nombres está sujeto a reglas. Por ejemplo, en general para los puntos se utilizan letras latinas mayúsculas; para las rectas, letras latinas minúsculas y para los planos letras griegas minúsculas. Como estas letras por sí solas no tienen significado matemático, deben escribirse antecedidas de palabras al estilo de: "el punto P", "la recta a" o "el plano β", a menos que en el contexto esté entendido su referente.

Frases tales como: "la recta a" no determina unívocamente ninguna recta y por tanto no es una representación de una recta, pero si se escribe: "la recta a que pasa por los puntos A(2,3) y B(5,6)", esta frase sí determina de forma única una recta para un sistema de coordenadas, es decir, es su representación. De igual manera la frase: "el punto B", no es una representación de ningún punto porque no lo determina unívocamente, en cambio la frase: "el punto B(5,6)", representa el punto B porque lo determina unívocamente en un sistema de coordenadas. En estos ejemplos se observa como los nombres comunes de los objetos matemáticos están presentes en representaciones de estos objetos.

Para agrupar las representaciones de los objetos de la geometría analítica en tipos[1], se utiliza como criterio "la naturaleza de las componentes predominantes en el objeto representante". Es así, por ejemplo, que si en el objeto representante predominan las palabras, las representaciones que tienen esta característica se agrupan en el tipo verbal y cada una de ellas pertenece a este tipo.

El concepto de tipo de representación permite concretar las exigencias de Kaput referidas a qué aspectos del mundo representado se representan, qué aspectos del mundo representante realizan la representación y la correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.

Los autores de este artículo consideran que los **tipos** fundamentales de representaciones de los objetos de la geometría analítica son: verbal, gráfico y analítico. Las representaciones tabulares en la mayoría de los casos no se utilizan como un fin, sino como auxiliares en el proceso de transferencia.

Representación verbal de un objeto de la geometría analítica: es una representación del objeto mediante una frase o proposición que lo determina unívocamente y que está compuesta por palabras del lenguaje común, palabras de la terminología matemática y eventualmente por signos matemáticos. Las representaciones verbales de los elementos de los conjuntos bases de una estructura geométrica son frases y las de los elementos de las relaciones son proposiciones verdaderas. Por ejemplo:

La frase "La recta que pasa por los puntos A(2,3) y B(5,6)" es una representación verbal de una recta, es decir, de un elemento de un conjunto base, y la proposición "La recta que pasa por los puntos $A(2,3)$ y $B(5,6)$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(4,6)$ y $D(10,12)$" es una representación verbal del paralelismo de dos rectas, es decir, de un elemento de una relación.

Representación gráfica de un objeto de la geometría analítica: es una representación en la cual predomina una figura geométrica, es decir, es una representación que siempre contiene una figura geométrica y eventualmente frases, proposiciones o signos matemáticos.

Representación analítica de un objeto de la geometría analítica: es una representación en la que predomina una ecuación, inecuación, sistema de ecuaciones o sistema de inecuaciones, es decir, es una representación que siempre contiene uno o varios de estos objetos y eventualmente frases, proposiciones o signos matemáticos.

---

[1] Los tipos se diferencian de las clases en que estos pueden no agotar toda la extensión del concepto a partir del cual se generan y las clases sí. Ambos tienen en común: 1) son conjuntos que se generan a partir de la extensión de un concepto según un criterio, 2) cada tipo o clase generado por un criterio a partir de un concepto es un subconjunto propio de la extensión de ese concepto, 3) los tipos y las clases son no vacíos y 4) la intersección de dos tipos generados por el mismo criterio o de dos clases generadas por el mismo criterio, es vacía.

Además del concepto de tipo de representación, en este trabajo se utiliza como herramienta teórica el concepto de **forma de representación**[2], entendida como la configuración general del objeto representante, de modo que dos representaciones de diferentes tipos tienen distintas formas, mientras que dos representaciones del mismo tipo pueden tener la misma forma o formas distintas. Por ejemplo, en las siguientes representaciones de tres rectas, los objetos representantes son frases. Las dos primeras se diferencian esencialmente de la tercera en que en estas se utilizan dos puntos por donde pasa la recta representada y en la tercera, se emplea un punto por donde pasa la recta representada y dos puntos por donde pasa una recta paralela a ésta.

1) Recta que pasa por los puntos $A(1,4)$ y $B(5,8)$.

2) Recta que pasa por los puntos $C(4,1)$ y $D(8,6)$.

3) Recta que pasa por el punto $P(5,9)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $Q(6,9)$ y $R(3,1)$.

En las tres representaciones predominan las palabras y no los signos matemáticos que sirven de complemento. Es por eso que se trata de representaciones verbales, aunque contienen signos matemáticos. Estas representaciones tienen como característica esencial común el predominio de palabras y las dos primeras se diferencian de la tercera en la forma. Es decir, las tres son representaciones del tipo verbal y las dos primeras tienen igual forma, que se diferencia de la forma de la tercera.

El conocimiento matemático tiene un carácter institucional porque se construye en el marco de una comunidad científica y como cualquier otro conocimiento es un producto histórico-cultural. Una de las implicaciones de este carácter institucional en la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos es que los elementos de los conjuntos bases de las estructuras tienen formas de representación establecidas por la institución matemática, a las cuales llamamos **formas de representación reconocidas**.

2.3. Sistemas de representación y transferencia entre representaciones

En este trabajo el concepto de sistema de representación que se asume se restringe a objetos de estructuras geométricas y es el resultado de un análisis conceptual realizado por los autores a partir del estudio de publicaciones sobre el tema y de la generalización de los sistemas singulares de representación de objetos de estructuras geométricas.

---

[2] En la bibliografía que trata la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos se suelen utilizar indistintamente los conceptos de forma de representación y tipo de representación y en algunas fuentes se utilizan indistintamente los conceptos de forma de representación y sistema de representación. En este trabajo se asume que estos tres conceptos no son idénticos y cada uno tiene una función diferente en la teoría de las representaciones.

Un ***sistema de representación*** de elementos de un conjunto base C de una estructura geométrica E, es un subsistema del sistema de conocimientos relativos a E (conceptos, proposiciones, razonamientos, reglas y procedimientos) con las características siguientes: 1) establece y fundamenta la existencia y eventualmente la unicidad de una forma de representación para cada uno de los elementos de C o de una parte de C, 2) contiene los procedimientos o reglas para representar los elementos de C en la forma establecida, 3) Incluye definiciones, proposiciones o reglas que caracterizan las relaciones de E en las que los elementos de C intervienen representados en la forma establecida.

Si, por ejemplo, denotamos por P y R, respectivamente, el conjunto de los puntos y de las rectas del plano y por I la relación de incidencia entre puntos y rectas, se tiene la estructura (P,R,I). El sistema de representación de las rectas del plano de esta estructura en la forma general es el subsistema de conocimientos relativos a la estructura (P,R,I) que tiene las características siguientes:

1) Establece y fundamenta que toda recta del plano se puede representar en la forma $Ax+By+C=0$, donde A, B y C son números reales tales que $|A|+|B|\neq 0$ y las variables x y y representan, respectivamente, la abscisa y ordenada de un punto cualquiera.

2) Incluye los procedimientos para representar toda recta del plano en la forma $Ax+By+C=0$.

3) Incluye la definición siguiente que caracteriza la relación de incidencia entre puntos representados por pares ordenados $(x;y)$ de números reales y rectas representadas por una ecuación de la forma $Ax+By+C=0$:

Decimos que un punto $P(x_1;\ y_1)$ pertenece a una recta r representada por la ecuación $Ax+By+C=0$, si y sólo si, las coordenadas de P satisfacen esta ecuación, es decir, si se cumple $Ax_1+By_1+C=0$ En este caso se escribe $P\in r$ y se dice que P pasa por r o que P incide con r.

Como se aprecia en la definición de sistema de representación, en este concepto juega un papel central la forma de los objetos representantes, de manera que cada forma determina un sistema de representación. Las formas de representación reconocidas por la comunidad matemática, determinan sistemas de representación reconocidos por esta comunidad.

Hay que diferenciar el primer sistema de representación que se construye para los elementos de un conjunto base de una estructura del resto de los sistemas de representación.

Cuando una estructura geométrica contiene varios conjuntos bases, las representaciones de los elementos de estos conjuntos deben estar coordinadas. Por ejemplo, si en la estructura (P,R,I) las rectas se representan por una ecuación, los puntos deben representarse mediante pares ordenados de números reales.

Para definir adecuadamente la transferencia entre representaciones se debe partir de un conjunto base de una estructura E para cuyos elementos se conocen por lo menos dos sistemas de representación S_1 y S_2, lo cual significa que existen al menos dos formas de representación de estos objetos.

Si O es un elemento de un conjunto base de una estructura de la geometría analítica, determinado por su representación R_1 en la forma F_1 del tipo T_1 correspondiente al sistema de coordenadas C_1 y se desconoce su representación R_2 en la forma F_2 del tipo T_2 correspondiente al sistema de coordenadas C_2, el proceso mediante el cual se obtiene R_2 a partir de R_1 se llama transferencia de R_1 a R_2. Si inversamente se conociera R_2 y desconociera R_1, el proceso que permite obtener R_1 a partir de R_2 se llama transferencia de R_2 a R_1.

Cuando $C_1 = C_2$ la transferencia se llama transferencia intrasistema, si en cambio $C_1 \neq C_2$, ésta se denomina transferencia intersistemas.

Cuando $T_1 = T_2$ la transferencia se llama transferencia intratipo, si en cambio $T_1 \neq T_2$, ésta recibe el nombre de transferencia intertipos.

Si quien realiza la transferencia de R_1 a R_2 o de R_2 a R_1 no utiliza una tercera representación reconocida del objeto O como representación intermedia, la transferencia se llama directa. En otro caso la transferencia se llama compuesta.

Los conceptos de transferencia directa y de transferencia compuesta son relativos al procedimiento utilizado. Existen casos en que a partir de una representación dada se puede obtener la buscada por transferencia directa o transferencia compuesta. En otros casos sólo es posible obtener la representación buscada mediante transferencia compuesta.

Una transferencia entre representaciones de un objeto O será directa o compuesta en dependencia del desarrollo del sistema de representación y de la estrategia utilizada por el sujeto que la realiza. Por ejemplo, si se da la representación verbal de una recta determinada por dos puntos y se pide su ecuación general, la transferencia debe ser compuesta porque el sistema de representación relativo a la ecuación general no contiene ningún procedimiento para realizar esta transferencia de forma directa.

La transferencia entre dos representaciones de un objeto geométrico es un proceso que requiere de la aplicación de un procedimiento que garantice el tránsito por cada uno de sus estados. En lo adelante a la representación conocida se le llamará **representación dada** y a la desconocida, **representación buscada**.

Según la definición del concepto de transferencia entre representaciones, este proceso solo tiene sentido para aquellos objetos que tienen al menos dos sistemas de representación, es decir, objetos para los cuales existen dos formas distintas de representarlos. También la definición establece que dos formas de representación determinan dos transferencias diferentes en que una es la inversa de la otra.

De acuerdo con la definición de transferencia entre representaciones la palabra "representar", en el contexto de la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos se utiliza con dos acepciones. La primera se refiere a la creación de una representación, es decir, al establecimiento por primera vez de la forma del objeto representante para un objeto representado, lo cual se realiza en la propia conformación del sistema de representación. La segunda acepción se refiere a la transferencia entre representaciones.

Al confrontar las definiciones de sistema de representación y transferencia entre representaciones con el significado contextual de la palabra "representar", se observa que según la segunda característica de los sistemas de representación, estos incluyen los procedimientos de transferencia entre representaciones de los elementos de los conjuntos bases de las estructuras geométricas.

La definición de transferencia entre representaciones se refiere a representaciones de los elementos de un conjunto base de una estructura (objetos geométricos), pero no incluye la transferencia entre relaciones donde estos elementos intervienen.

3. Determinación de procedimientos de transferencia

La determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones de un elemento de un conjunto base de una estructura geométrica en el PEA no puede ser espontánea porque se corre el riesgo de no considerar algunos casos de transferencia. Para lograrlo se debe seguir el procedimiento didáctico siguiente:

1) Determinar los tipos de representación del objeto.

2) Determinar las formas de representación de cada tipo.

3) Determinar los casos de las transferencias intratipo e intertipos.

4) Identificar cuáles procedimientos se exponen en la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura.

5) Elaborar procedimientos de las transferencias para las cuales en la bibliografía no se expone ningún procedimiento y analizar la existencia de procedimientos alternativos de los expuestos en la bibliografía.

6) Ordenar las transferencias para su uso en el PEA.

A continuación se explican cada una de las fases del procedimiento utilizando como objeto la recta en el plano.

1) Determinar los tipos de representación del objeto:

En el estudio analítico de las rectas en el plano que se realiza en la formación de profesores de Matemática y Física en Cuba, se identifican como tipos fundamentales de representación el verbal, el gráfico y el analítico.

2) Determinar las formas de representación de cada tipo:

Existen diferentes formas[3] de representación analítica y de representación verbal para cada sistema de coordenadas; el tipo gráfico tiene una única forma para cada sistema de coordenadas (Tabla 1).

Tabla 1: tipos y formas de representación de la recta en el plano en la Geometría Analítica	
Tipo de representación	Forma de representación
Representación verbal	1) Frase con dos puntos de la recta, 2) frase con un punto de la recta y un vector de dirección, 3) frase con un punto de la recta y un vector normal y 4) frase con un punto de la recta y su pendiente.
Representación analítica	1) Representación paramétrica, 2) ecuación general y 3) ecuación con un punto y la pendiente.
Representación gráfica	Es única para cada sistema de coordenadas.

3) Determinar los casos de las transferencias intratipo e intertipos:

Para determinar los casos de las transferencias intratipo e intertipos se determinará primero su número y después cuáles son. Para ello se utiliza la regla del producto de la combinatoria teniendo en cuenta sólo la representación dada y la buscada.

3.1) **Casos de transferencias entre representaciones verbales de una recta en el plano**.

Para la representación de la recta en el plano se han considerado cuatro formas. Cada transferencia entre representaciones con alguna de estas formas se puede modelar con el concepto de par ordenado sin componentes repetidas. Para la representación dada (RD) son posibles cuatro opciones, después de elegida cada una de estas opciones, para la representación buscada (RB) son posibles tres opciones. Al multiplicar cuatro por tres se obtienen 12 casos posibles.

Si etiquetamos las formas de representación con siglas y utilizamos una flecha como símbolo de la transferencia, se pueden determinar los 12 casos de transferencias entre representaciones verbales (Tabla 2).

Tabla 2: casos posibles de transferencia entre representaciones verbales			
Rep. dada: DP	Rep. dada: PVD	Rep. dada: PVN	Rep. dada: PP

[3] Se hace referencia solo a las formas de representación analítica estudiadas en el curso y a las más conocidas de las representaciones verbales.

1) DP→PVD 2) DP→PVN 3) DP→PP	4) PVD→DP 5) PVD→PVN 6) PVD→PP	7) PVN→DP 8) PVN→PVD 9) PVN→PP	10) PP→DP 11) PP→PVD 12) PP→PVN
Etiquetas: DP: recta representada verbalmente utilizando dos puntos. PVD: recta representada verbalmente por un punto y un vector de dirección. PVN: recta representada verbalmente por un punto y un vector perpendicular. PP: recta representada verbalmente por un punto y su pendiente.			

3.2) **Casos de transferencias entre representaciones analíticas de una recta en el plano.**

Con razonamientos análogos a los realizados para el caso de representaciones verbales, resulta que existen seis casos de transferencias entre representaciones analíticas (Tabla 3).

Tabla 3: casos posibles de transferencia entre representaciones analíticas		
Rep. dada: EP	Rep. dada: EG	Rep. dada: EPP
13) RP→EG 14) RP→EPP	15) EG→RP 16) EG→EPP	17) EPP→RP 18) EPP→EG
Etiquetas: RP: representación paramétrica de la recta. EG: recta representada por una ecuación general. EPP: recta representada por una ecuación con un punto y pendiente dada.		

Ahora se determinan los casos posibles para transferencias intertipos.

3.3) **Casos de transferencias intertipos a partir de una representación verbal de una recta en el plano.**

Si se aplica el mismo razonamiento a las transferencias en que la representación dada es verbal y la buscada es analítica, resultan 12 casos posibles (Tabla 4).

Tabla 4: casos posibles de transferencia de una representación verbal a una analítica			
Rep. dada: DP	Rep. dada: PVD	Rep. dada: PVN	Rep. dada: PP
19) DP→RP 20) DP→EG 21) DP→EPP	22) PVD→ RP 23) PVD→EG 24) PVD→EPP	25) PVN→RP 26) PVN→EG 27) PVN→EPP	28) PP→RP 29) PP→EG 30) PP→EPP
Etiquetas: Se utilizan las etiquetas de las tablas 2 y 3.			

Como existe una única representación gráfica de una recta para cada sistema de coordenadas, existen cuatro casos posibles de transferencias de una representación verbal a una gráfica. Si denotamos la representación gráfica por G, estos son los casos: 31) DP→G, 32) PVD→G, 33) PVN→G y 34) PP→G.

3.4) **Casos de transferencias intertipos a partir de una representación analítica de una recta en el plano.**

Existen 12 casos posibles de transferencias en que la representación dada es analítica y la buscada es verbal (Tabla 5).

Tabla 5: casos posibles de transferencia de una representación analítica a una verbal

Rep. dada: EP	Rep. dada: EG	Rep. dada: EPP
35) RP→DP	39) EG→ DP	43) EPP→DP
36) RP→PVD	40) EG→PVD	44) EPP→PVD
37) RP→PVN	41) EG→PVN	45) EPP→PVN
38) RP→PP	42) EG→PP	46) EPP→PP

Etiquetas:
Se utilizan las etiquetas de las tablas 2 y 3.

Existen tres casos posibles de transferencias de una representación analítica a una gráfica. Estos son: 47) RP→G, 48) EG→G y 49) EPP→G.

3.5) **Casos de transferencias a partir de una representación gráfica de una recta en el plano.**

Existen cuatro casos posibles de transferencias en que la representación dada es gráfica y la buscada es verbal. Estos son: 50) G→DP, 51) G→PVD, 52) G→PVN y 53) G→PP.

Existen tres casos posibles de transferencias en que la representación dada es gráfica y la buscada es analítica. Estos son: 54) G→RP, 55) G→EG y 56) G→EPP.

4) Identificar cuáles procedimientos se exponen en la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura.

En la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura se exponen procedimientos para las 24 transferencias identificadas con los números: del 13 al 32, 34, 47, 48 y 49. Los autores elaboraron procedimientos alternativos para las transferencias marcadas con los números 14,18, 20, 23, 24 y 29.

Para las transferencias 4, 7 y 10 no existen procedimientos de transferencia directa en los sistemas de representación que se utilizan en el PEA de la Geometría Analítica. Estas requieren de una representación intermedia de un tipo diferente al tipo de la representación dada. Para las transferencias de la 47 a la 56 la existencia de los procedimientos depende de la información que se pueda obtener del gráfico.

En las que se ha identificado algún procedimiento se observan las limitaciones siguientes: en todos los casos los medios utilizados son lápiz y papel y en la mayoría de ellos no se describe el procedimiento, sino que se presenta en el proceso de resolución de una tarea de aprendizaje.

5) Elaborar procedimientos de las transferencias para las cuales en la bibliografía no se expone ningún procedimiento y analizar la existencia de procedimientos alternativos de los expuestos en la bibliografía.

Los autores de este artículo elaboraron 32 procedimientos de transferencia (con lápiz y papel) que corresponden a las identificadas con las etiquetas: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11,12, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 50, 51, 52, 53, 54, 55 y 56.

En el PEA de la Geometría Analítica los estudiantes, bajo la dirección del profesor, pueden elaborar otros procedimientos alternativos a los que en este artículo se proponen, incluidos aquellos donde es posible utilizar un software.

6) Ordenar las de transferencia para su uso en el PEA.

Las transferencias se han agrupado en tres clases, según el tipo de la representación dada. En cada clase se ha establecido un orden considerando la forma de la representación buscada y la complejidad de los procedimientos de transferencia (Tabla 6).

Tabla 6: ordenamiento de los casos posibles de transferencia según el tipo de la representación dada y la complejidad de los procedimientos

Tipo de rep. dada: verbal		Tipo de rep. dada: analítica		Tipo de rep. dada: gráfica
22) PVD→RP 19) DP→RP 25) PVN→RP 28) PP→RP 23) PVD→EG 20) DP→EG 26) PVN→EG 29) PP→EG 30) PP→EPP 21) DP→EPP 24) PVD→EPP 27) PVN→EPP 31) DP→G 32) PVD→G 33) PVN→G 34) PP→G	1) DP→PVD 2) DP→PVN 3) DP→PP 4) PVD→DP 5) PVD→PVN 6) PVD→PP 7) PVN→DP 8) PVN→PVD 9) PVN→PP 10) PP→DP 11) PP→PVD 12) PP→PVN	13) RP→EG 14) RP→EPP 15) EG→RP 16) EG→EPP 17) EPP→RP 18) EPP→EG 35) RP→DP 36) RP→PVD 37) RP→PVN 38) RP→PP	39) EG→ DP 40) EG→PVD 41) EG→PVN 42) EG→PP 43) EPP→DP 44) EPP→PVD 45) EPP→PVN 46) EPP→PP 47) EP→G 48) EG→G 49) EPP→G	50) G→DP 51) G→PVD 52) G→PVN 53) G→PP 54) G→RP 55) G→EG 56) G→EPP
Se utilizan las etiquetas de las tablas 2 y 3 y la G para la representación gráfica.				

6.1) **Procedimientos de transferencias a partir de una representación verbal**.

Para transferir de una representación verbal a otra representación del mismo tipo o de un tipo diferente es necesario considerar las distintas formas posibles de representación verbal expuestas en la Tabla 1, pues el procedimiento a aplicar depende de la forma.

6.1.1) **Procedimientos de transferencias de una representación verbal a la ecuación paramétrica**.

Estos procedimientos corresponden a las transferencias etiquetadas con los números 22, 19, 25 y 28. En la bibliografía recomendada para la asignatura se exponen procedimientos para estas transferencias.

6.1.2) **Procedimientos de transferencias de una representación verbal a la ecuación general**.

Los procedimientos corresponden a las transferencias etiquetadas con los números 23, 20, 29 y 26. Para todas se han identificado procedimientos en la bibliografía.

6.1.3) **Procedimientos de transferencias de una representación verbal a la ecuación con punto y pendiente**.

Los procedimientos corresponden a las transferencias etiquetadas con los números 30, 21, 24 y 27 para las que se identificaron procedimientos en la bibliografía recomendada para la asignatura, el correspondiente a la transferencia 24 fue elaborado por los autores y se expone a continuación.

24) PVD→EPP

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector no nulo $a = (a_x;\ a_y)$[4].

RB: recta representada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Procedimiento:

1) Reconocer que $m = \frac{a_y}{a_x}$ y 2) sustituir x_0, y_0, y m en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

6.1.4) **Procedimientos de transferencias de una representación verbal al gráfico**

Estos procedimientos corresponden a los etiquetados con los números 31, 32, 33 y 34; para las dos primeras existen procedimientos en la bibliografía de la asignatura. Los dos casos restantes se exponen a continuación:

[4] En este artículo se considera siempre que el vector $a = (a_x;\ a_y)$ no es nulo.

33) PVN→G

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular al vector no nulo $n = (n_x;\ n_y)$[5].

RB: gráfico de la recta.

Procedimiento:

1) Trazar un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en el plano; 2) representar el punto P_0 y el vector n y 3) trazar por P_0 la perpendicular al vector n .

Esta transferencia es directa e intertipo.

34) PP→G

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$con pendiente m.

RB: gráfico de la recta que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y pendiente m .

Procedimiento:

1) Reconocer que $m = \frac{a_y}{a_x}$ y $a = (a_x;\ a_y)$ es un vector de dirección de la recta, 2) trazar un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, 3) representar el punto P_0 y el vector **a** y 4) trazar por el punto P_0 la recta paralela al vector ***a.***

Esta transferencia es directa e intertipo con una única representación intermedia del mismo tipo que la representación dada.

6.1.5) **Procedimientos de transferencias de una representación verbal a otra verbal**.

Estos procedimientos no se exponen en la bibliografía, fueron elaborados por los autores. Para transferir de una representación **verbal** de la recta en el plano a otra representación **verbal,** se pueden seguir los procedimientos siguientes:

1) DP→PVD

RD: recta que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1)\ y\ P_2(x_2; y_2)$

RB: recta que pasa por el punto $P_1(x_1; y_1)$ y es paralela al vector $a = (a_x;\ a_y)$

Procedimiento:

---

[5] En este artículo se asume siempre que en la representaciones dadas o buscada, el vector $n = (n_x;\ n_y)$ no es el nulo y que su primera coordenada es n_x y la segunda n_y.

1) Determinar las coordenadas del vector[6] $a = P_1P_2$ y 2) obtener la representación verbal de la recta en la forma "recta r que pasa por[7] P_1 y es paralela al vector a".

2) DP→PVN

RD: recta que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$.

RB: recta que pasa por el punto $P_1(x_1; y_1)$ y es perpendicular al vector n .

Procedimiento:

1) Determinar las coordenadas del vector $a = P_1P_2$, con $a = (a_x;\ a_y)$, 2) reconocer que $n = (-a_y\ ;\ a_x)$ y 3) obtener la representación verbal de la recta r en la forma "recta que; pasa por P_1 y es perpendicular a n ".

3) DP→PP

RD: recta que pasa por los puntos $P_0(x_0; y_0)$ y $P_1(x_1; y_1)$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y con pendiente m

Procedimiento:

1) Calcular la pendiente según la fórmula $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ y 2) obtener la representación verbal de la recta: "recta que pasa por[8] P_0 con pendiente m ".

4) PVD→DP

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = \left(a_x;\ a_y\right)$.

RB: recta que pasa por los puntos P_0 y P_1.

Procedimiento:

1) Obtener una representación paramétrica de la recta (según la transferencia 22), 2) sustituir a ***t*** por un número real diferente de cero y calcular para obtener los valores de x_1 y y_1 que son las coordenadas del punto P_1 y 3) obtener la representación verbal de r en la forma "recta que pasa por los puntos P_0 y P_1".

---

[6] Puede utilizarse también a=P_2P_1 o cualquier múltiplo no nulo de ***a***.
[7] Puede ser también P_2.
[8] Puede ser también P_1.

5) PVD→PVN

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x;\ a_y)$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$y es perpendicular al vector n .

Procedimiento:

1) Reconocer que $n = (-a_y\ ;\ a_x)$ y 2) obtener la representación verbal de la recta r en la forma “recta que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular a n ”.

6) PVD→PP

RD: recta que pasa por $P_0(x_0; y_0)$y es paralela al vector $a = (a_x;\ a_y)$ (a_x≠0).

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y con pendiente m .

Procedimiento:

1) Reconocer que $m = \frac{a_y}{a_x}$ y 2) obtener la representación verbal de la recta r en la forma “recta que pasa por P_0 con pendiente m”.

7) PVN→DP

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular al vector n .

RB: recta que pasa por los puntos P_0 y P_1.

Procedimiento:1) Reconocer que $A = n_x$ y $B = n_y$, 2) sustituir x por x_0 y y por y_0 para obtener una ecuación con la incógnita C , 3) resolver la ecuación obtenida, 4) sustituir el valor de C en la ecuación $Ax + By + C = 0$, 5) determinar las coordenadas de un punto P_1 que pertenezca a la recta y 6) obtener la representación verbal de r en la forma “recta que pasa por los puntos P_0 y P_1”.

8) PVN→PVD

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$y es perpendicular al vector n .

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$y es paralela al vector $a = \left(a_x;\ a_y\right)$.

Procedimiento:

1) Reconocer que $a = (n_y;\ -n_x)$ y 2) obtener la representación verbal de r en la forma “recta que pasa por el punto P_0 y es paralela al vector a”.

9) PVN→PP

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$y es perpendicular al vector $n = (n_x;\ n_y)$, (n_y≠0).

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y con pendiente m.

Procedimiento:

1) Reconocer que $m = \frac{-n_x}{n_y}$ y 2) obtener la representación verbal de r en la forma “recta que pasa por el punto P_0 y tiene pendiente m”.

10) PP→DP

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$y tiene pendiente m

RB: recta que pasa por los puntos P_0 y P_1.

Procedimiento:

1) Sustituir $x_0,$ y_0 y m en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ para obtener la ecuación de la recta con punto y pendiente dados, 2) obtener las coordenadas de otro punto P_1 de la recta y 3) obtener la representación verbal de r en la forma “recta que pasa por los puntos P_0 y P_1”.

Esta transferencia es compuesta con una única representación intermedia de un tipo diferente al de las representaciones dada y buscada.

11) PP→PVD

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$y tiene pendiente m.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$y es paralela al vector $a = (a_x;\ a_y)$.

Procedimiento:

1) Determinar a_x y a_y utilizando la relación $m = \frac{a_y}{a_x}$ y 2) escribir la representación verbal de la recta en la forma “recta que pasa por P_0 y es paralela al vector a ”.

12) PP→PVN

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$con pendiente m.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$y es perpendicular al vector n.

Procedimiento:

1) Determinar n_x y n_y según la relación $m = \frac{-n_x}{n_y}$ y 2) escribir la representación verbal de la recta: “recta que pasa por el punto P_0 y es perpendicular a n”.

6.2) **Procedimientos de transferencias a partir de una representación analítica.**

Aquí se exponen los procedimientos de transferencia en que la representación dada es analítica y la buscada es de cualquiera de los tipos de la Tabla 1.

6.2.1) **Procedimientos de transferencias de una representación analítica a otra analítica.**

Los procedimientos corresponden a las transferencias etiquetadas con los números 13, 14, 15, 16, 17 y 18. Todos aparecen en la bibliografía.

6.2.2) **Procedimientos de transferencias de una representación analítica a una verbal**

Estos procedimientos, fueron elaborados por los autores de este artículo y corresponden a transferencias intertipos:

35) **EP→DP**

RD: recta representada por el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x = x_0 + ta_x \\ y = y_0 + ta_y \end{cases}$ (*)

RB: recta que pasa por los puntos $P_0(x_0; y_0)$y $P_1(x_1; y_1)$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de $P_0(x_0; y_0)$en el sistema de ecuaciones, 2) sustituir a t por un número real diferente de cero y efectuar las operaciones indicadas para obtener las coordenadas de un punto P_1 y 3) obtener la representación verbal de la recta: “recta que pasa por los puntos P_0 y P_1”.

36) EP→PVD

RD: recta representada por el sistema de ecuaciones (*).

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$y es paralela al vector $a = (a_x;\ a_y)$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas del punto P_0 y del vector $a = (a_x;\ a_y)$ en el sistema de ecuaciones (*) y 2) escribir la representación verbal en la forma “recta que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x;\ a_y)$”.

37) EP→PVN

RD: recta representada por el sistema de ecuaciones (*)

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$y es perpendicular al vector n.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas del punto $P_0(x_0; y_0)$en el sistema de ecuaciones (*), 2) reconocer que $n = (-a_y\ ;\ a_x)$ y 3) escribir la representación verbal de la recta en la forma “recta r que pasa por P_0 y es perpendicular al vector n”.

38) EP→PP

RD: recta representada por el sistema de ecuaciones (*), con $a_x \neq 0$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y con pendiente m.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas del punto $P_0(x_0; y_0)$ en el sistema de ecuaciones (*), 2) reconocer que $m = \frac{a_y}{a_x}$y 3) escribir la representación verbal de la recta en la forma “recta r que pasa por P_0 y tiene pendiente m”.

39) EG→ DP

RD: recta representada por la ecuación $Ax + By + C = 0$.

RB: recta que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1)$. y $P_2(x_2; y_2)$.

Procedimiento:

1) Determinar las coordenadas de dos puntos $P_1(x_1; y_1)$. y $P_2(x_2; y_2)$.que pertenezcan a la recta (sus coordenadas deben satisfacer la ecuación) y 2) obtener la representación verbal de la recta en la forma “recta r que pasa por P_1 y P_2”.

40) EG→PVD

RD: recta representada por la ecuación $Ax + By + C = 0$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x;\ a_y)$.

Procedimiento:

1) Determinar las coordenadas de un punto $P_0(x_0; y_0)$que pertenezca a la recta, 2) reconocer que $a = (B; -A)$ y 3) obtener la representación verbal de la recta en la forma "recta r que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x;\ a_y)$".

41) EG→PVN

RD: recta representada por la ecuación $Ax + By + C = 0$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$y es perpendicular al vector n

Procedimiento:

1) Determinar las coordenadas de un punto $P_0(x_0; y_0)$que pertenezca a la recta, 2) reconocer que $n = (A; B)$ y 3) obtener la representación verbal de la recta en la forma "recta r que pasa por $P_0(x_0; y_0)$y es perpendicular al vector n".

42) EG→PP

RD: recta representada por la ecuación $Ax + By + C = 0$ $(B \neq 0)$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$con pendiente m.

Procedimiento:

1) Determinar las coordenadas de un punto $P_0(x_0; y_0)$que pertenezca a la recta, 2) reconocer que $m = \frac{-A}{B}$ y 3) obtener la representación verbal de la recta en la forma "recta r que pasa por $P_0(x_0; y_0)$y tiene pendiente m".

43) EPP→DP

RD: recta representada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

RB: recta que pasa por los puntos $P_0(x_0; y_0)$y $P_1(x_1; y_1)$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas del punto $P_0(x_0; y_0)$ en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$, 2) determinar las coordenadas de un punto $P_1(x_1; y_1)$ que pertenezca a la recta (sus coordenadas deben satisfacer la ecuación) y 3) obtener la representación verbal de la recta en la forma "recta r que pasa por los $P_0(x_0; y_0)$ y $P_1(x_1; y_1)$".

44) EPP→PVD

RD: recta representada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$y es paralela al vector $a = (a_x;\ a_y)$.

Procedimiento:

1) Determinar a_x y a_y según la relación $m = \frac{a_y}{a_x}$, 2) identificar las coordenadas de $P_0(x_0; y_0)$en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ y 3) escribir la representación verbal de la recta: "recta r que pasa por $P_0(x_0; y_0)$y es paralela al vector $a = (a_x;\ a_y)$".

45) EPP→PVN

RD: recta representada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular a la vector n

Procedimiento:

1) Determinar n_x y n_y utilizando la relación $m = \frac{-n_x}{n_y}$, 2) identificar las coordenadas de $P_0(x_0; y_0)$en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ y 3) escribir la representación verbal de la recta en la forma "recta r que pasa por $P_0(x_0; y_0)$y es perpendicular a n".

46) EPP→PP

RD: recta representada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$y con pendiente m.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de $P_0(x_0; y_0)$ en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$, 2) identificar la pendiente de la recta en $y - y_0 = m(x - x_0)$ y 3) escribir la representación verbal de la recta en la forma "recta r que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y tiene pendiente m".

6.2.3) **Procedimientos de transferencias de una representación analítica a la gráfica.**

Los procedimientos corresponden a las transferencias etiquetadas con los números 47, 48 y 49 y todos aparecen en la bibliografía.

6.3.) **Procedimientos de transferencias a partir de la representación gráfica.**

Para transferir de la representación **gráfica** de la recta en el plano a otro tipo de representación, el gráfico debe ofrecer la información necesaria. Consideremos que en el gráfico se pueden identificar las coordenadas de, al menos, dos puntos P_1 y P_2 de la recta, aunque se pueden presentar otros casos. Todas las transferencias son intertipos.

6.3.1) **Procedimientos de transferencias de la representación gráfica a una verbal**

Los procedimientos fueron elaborados por los autores:

50) G→DP

RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2.

RB: recta que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r y 2) representar verbalmente la recta en la forma “recta que pasa por los puntos P_1 y P_2”.

51) G→PVD

RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2.

RB: recta que pasa por el punto $P_1(x_1; y_1)$ y es paralela al vector $a = (a_x;\ a_y)$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r; 2) calcular las coordenadas del vector de dirección $a = P_1P_2$ y 3) representar verbalmente la recta en la forma “recta que pasa por P_1 y es paralela al vector a”.

52) G→PVN

RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1y P_2

RB: recta que pasa por el punto $P_1(x_1; y_1)$y es perpendicular al vector n.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r, 2) calcular las coordenadas del vector de dirección $a = P_1P_2 = (a_x\,; a_y)$, 3) reconocer que $n = \left(-a_y\ ;\ a_x\right)$ y 4) escribir la representación verbal de la recta en la forma “recta que pasa por P_1 y es perpendicular al vector n”.

53) G→PP

RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2.

RB: recta que pasa por el punto $P_1(x_1; y_1)$ y con pendiente m.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r, 2) calcular m según la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y 3) escribir la representación verbal de la recta en la forma "recta que pasa por P_1 y tiene pendiente m".

6.3.2) **Procedimientos de transferencias de la representación gráfica a una analítica**

En la bibliografía no se exponen los procedimientos, los autores los elaboraron:

54) G→RP

RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2.

RB: recta representada por el sistema de ecuaciones (*).

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r, 2) calcular las coordenadas del vector de dirección $a = P_1P_2 = (a_x\,; a_y)$ y 3) sustituir los valores de x_1, y_1, a_x y a_y en el sistema de ecuaciones (*).

55) G→EG

RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2.

RB: recta representada por la ecuación $Ax + By + C = 0$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r, 2) calcular las coordenadas del vector de dirección $a = P_1P_2 = (a_x\,; a_y)$, 3) reconocer que $n = (-a_y\,;\, a_x)$ y 4) sustituir x por x_1 y y por y_1 en la ecuación $Ax + By + C = 0$ para obtener una ecuación con la incógnita C, 5) resolver la ecuación obtenida y 6) sustituir el valor de C en la ecuación $Ax + By + C = 0$ para obtener la representación buscada.

56) G→EPP

RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2.

RB: recta representada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r; 2) calcular m según la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y 3) sustituir x_1, y_1 y m en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

El gráfico puede ofrecer datos que permitan identificar: las coordenadas de un punto y de un vector de dirección de la recta; las coordenadas de un punto y de un vector normal; las coordenadas de un punto y la pendiente. En estos casos se puede realizar la transferencia de forma análoga a la explicada.

4. Conclusiones

La determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones de elementos de conjuntos bases de estructuras geométricas es una componente de la planificación del PEA de la Geometría Analítica. Su realización se puede ejecutar siguiendo el procedimiento didáctico expuesto en este trabajo y requiere de una base teórica que involucra los conceptos de estructura matemática, representación, sistema de representación y transferencia entre representaciones.

Con la aplicación del procedimiento didáctico expuesto ha sido posible determinar y ordenar los procedimientos para realizar todas las transferencias intratipo e intertipos entre representaciones verbales, analíticas y gráfica de una recta en el plano con lápiz y papel. Según el nivel de desarrollo de los sistemas de representación de la Geometría Analítica, en 19 de los 56 casos posibles los procedimientos presentados corresponden a transferencias compuestas, lo cual indica que en el PEA de esta asignatura existen potencialidades para el desarrollo de los sistemas de representación en la dirección de la creación de procedimientos de transferencia directa.

Los resultados obtenidos en la determinación de los procedimientos de transferencia entre representaciones de la recta en el plano demuestran la utilidad práctica de los conceptos de tipo y forma de representación desarrollados por los autores. Estos conceptos no suelen diferenciarse entre sí en la bibliografía sobre la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos.

Bibliografía

Álvarez, M., Almeida, B. y Villegas, E. (2014). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática*. La Habana: Pueblo y Educación.

Ballester, S. y otros (2000). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*, *tomo II*. La Habana: Pueblo y Educación.

Castro, S., Díaz, M., Martínez, P., López, F., Bermúdez, I. y González, J. (1992). *Geometría*. La Habana: Pueblo y Educación.

Gómez, P. y Rico, L. (2002). *Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/376/ el 31 de agosto de 2015.

Jungk, W. (1978). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 1*. La Habana: Pueblo y Educación.

Kaput, J. (1987). Representation and mathematics. In C. Janvier (ed.), Problems of representation in mathematics learning and problem solving (pp. 19-26). Hillsdale, N. J. Lawrence Erlbaum Associates.

Ruiz, A. (2007). *Modelo didáctico de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas en la Educación Preuniversitaria*. Tesis presentada en opción al grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Sancti Spíritus. Cuba.

Autores:

Quero Méndez, Ortelio Nilo: Máster en didáctica de la Matemática, Licenciado en Educación Especialidad Matemática. 35 años de experiencia en la formación de profesores de Matemática. Investigador en didáctica de la Matemática. oquero@uniss.edu.cu

Ruiz Pérez, Aldo Medardo: Doctor en Ciencias Pedagógicas, Máster en didáctica de la Matemática, Licenciado en Educación Especialidad Matemática. 35 años de experiencia en la formación de profesores de Matemática. Investigador en didáctica de la Matemática.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 144-166

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Pra lá e pra cá, vou a qualquer lugar! O papel do corpo e do seu movimento no contexto das tarefas para o desenvolvimento da percepção espacial na Educação Infantil

Celma Bento Moreira, Tânia Cristina R. S. Gusmão, Vicenç Font

Fecha de recepción: 20/04/2017
Fecha de aceptación: 15/12/2017

Resumen

En este informe de un estudio cuyo objetivo fue analizar cómo es el desarrollo de nociones ubicación y orientación en el espacio por el niño de la Educación Infantil y cómo este proceso puede ser facilitado e impulsado por las tareas matemáticas que tengan el cuerpo y su movimiento como elementos centrales. El estudio fue un enfoque cualitativo, una investigación de la intervención con los niños de la guardería UFBA, cuyos datos fueron generados a través de la ejecución de secuencias de tareas en base a criterios de idoneidad didácticos. Los resultados revelaron que, a través de la experiencia del cuerpo y la exploración del espacio alrededor de su propio cuerpo y de los objetos, los niños se acercaron a las nociones relativas a la ubicación y la orientación (dirección y dirección) enriqueciendo y ampliando su percepción del espacio.

Palabras clave: Matemáticas en la guardería; el cuerpo y su movimiento; percepción espacial; diseño de las tareas; Criterios de idoneidad didáctica.

Abstract

In this article we report a study whose purpose was to analyze how the development of notions of location and orientation in space by children of Early Childhood Education and how this process can be favored and driven by mathematical tasks that have the body and its movement as central elements. The study was a qualitative approach, an intervention research with children from a UFBA (Bahia Federal University) day care center, whose data were generated through implementation of tasks sequences based on didactic suitability criteria.The results revealed that through the body experience and the exploration of space around their own body and objects, the children approached notions of location and orientation (meaning and direction) enriching and expanding their perception of space.

Keywords: Mathematics in Childhood Education; Body and its movement; Spatial perception; Task design; Didactic Suitability Criteria.

Resumo

Neste artigo relatamos um estudo cujo propósito foi analisar como ocorre o desenvolvimento de noções de localização e orientação no espaço pela criança da Educação Infantil e como esse processo pode ser favorecido e impulsionado por tarefas matemáticas que tenham o corpo e o seu movimento como elementos centrais. O estudo realizado foi de abordagem qualitativa, uma pesquisa de intervenção com crianças da Creche UFBA, cujos dados foram gerados por meio da implementação de sequências de tarefas baseadas em critérios de idoneidade didática. Os resultados revelaram que, por meio da vivência corporal e da exploração do espaço em torno de seu próprio corpo e dos objetos, as crianças se aproximaram de noções relativas à localização e orientação (sentido e direção) enriquecendo e ampliando a sua percepção de espaço.

Palavras-chave: Matemática na Educação Infantil; Corpo e seu movimento; Percepção espacial; Desenho de tarefas; Critérios de Idoneidade Didática.

1. Introdução

Na Educação Infantil o(a) professor(a) precisa dar conta de uma multiplicidade de conhecimentos específicos que vão permear o desenvolvimento integral da criança pequena. Ao considerar que dentre esses conhecimentos estão os matemáticos, o(a) professor(a) precisa responder também ao desafio de educar matematicamente as crianças, e, para isso, precisa perceber e explorar a Matemática nos vários tipos de atividades que a criança realiza, e inserir, de modo intencional e planejado, situações que abordem noções e conceitos importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático.

A exploração Matemática na Educação Infantil deve permear os campos espacial, numérico e das medidas, como sugere a tendência internacional (LORENZATO, 2006) e as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Infantil, que preconizam que as práticas pedagógicas para a matemática na Educação Infantil devem "garantir experiências que recriem, em contextos significativos para as crianças, relações quantitativas, medidas, formas e orientações espaço temporais" (MEC/SEB, 2010, p. 25).

Porém, algumas pesquisas (SOUZA, 2007; MURAKAMI, 2009; MUNIZ, 2010) têm desvelado que os(as) professores(as) apresentam dificuldades em selecionar conteúdos e planejar atividades no campo da Geometria (espaço e forma) para crianças da Educação Infantil, reflexo da formação deficitária dos(as) professores(as) sobre essa temática; que o campo da geometria é deixado de fora das suas atividades por conta de uma preocupação exacerbada com aprendizagem do campo numérico, e que, quando o campo geométrico é trabalhado, é voltado, quase que exclusivamente, para a nomeação e o reconhecimento das figuras geométricas planas. Notamos, desse modo, uma desvalorização do campo da Geometria, tendendo para um minimalismo do currículo da Educação Infantil, no que concerne à matemática.

Entendemos que o trabalho com o campo geométrico precisa ter espaço na Educação Infantil, pois consideramos, em consonância com Lorenzato (2006), que as primeiras experiências da criança com o mundo são de ordem espacial, e esse processo é iniciado utilizando-se o próprio corpo e o seu movimento. Desde o seu nascimento, a criança permanece em contato constante com conceitos espaciais basilares, tanto no seu entorno social quanto no ambiente institucional da escola e, desse modo, a gênese das representações espaciais será uma consequência imediata da sua relação com o ambiente circundante (VECINO, 2005).

Nesse contexto, a exploração do campo espacial mostra-se imprescindível, cabendo à escola o papel de ampliar, organizar e sistematizar os conhecimentos que a criança constrói na interação com o meio, com os outros (seus pares e adultos) e com os objetos. Esta exploração pode ser feita por meio do desenho de tarefas com intenção educativa, que propicie a aproximação das crianças a noções e conceitos matemáticos e cumpram com outros aspectos didáticos e pedagógicos.

Assim, este estudo busca contribuir com um suporte teórico-metodológico que possa ser utilizado por profissionais da Educação Infantil, de modo a aproximar as crianças de importantes conceitos matemáticos no campo geométrico. Para isso, traz como problemática central investigar o desenvolvimento da percepção de espaço na Educação Infantil, por meio da metodologia do desenho de tarefas, levando-se em conta critérios de dimensão cognitiva e outras importantes dimensões, como a emocional e a interacional, que compõem os critérios de idoneidade didática, em conformidade com Godino et al., 2006.

Para este artigo, trazemos os resultados de duas Sequências de tarefas desenvolvidas: "*Aqui ou lá, em todo lugar!*" e "*Pra lá e pra cá, vou a qualquer lugar*!", onde buscamos analisar como ocorre o desenvolvimento de noções de localização e orientação no espaço pela criança da Educação Infantil e como esse processo pode ser favorecido e impulsionado por tarefas matemáticas que tenha o corpo e o seu movimento como elementos centrais.

2. O corpo e o seu movimento no desenvolvimento da percepção espacial

A percepção espacial é entendida por nós como "a tomada de consciência da situação de seu próprio corpo em um meio ambiente, isto é, do lugar e da orientação que pode ter em relação às pessoas e coisas" (MEUR; STAES, 1991, p.13). A criança começa a construir o senso espacial a partir do momento em que consegue exercer algum domínio das relações dinâmicas que se estabelecem entre as partes do seu próprio corpo e/ou entre seu corpo e os demais, ao nível do pensamento consciente. Nesse momento, torna-se possível a aprendizagem de noções espaciais posicionais, como as de direção, sentido, atrás, perto, em cima de etc. (LORENZATO, 1995). Assim, a criança se aproxima dessas noções quando aprende a desviar de obstáculos, abaixa-se quando é necessário passar por baixo de alguma coisa, descobre caminhos diferentes para chegar ao mesmo lugar e, finalmente, começa a compreender os trajetos que cada um percorre diariamente.

A criança, desse modo, faz a "análise do espaço primeiro com o seu corpo, antes de fazê-la com os olhos, para acabar por fazê-la com a mente" (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO 2003, pp. 26) e conhece o espaço, sobretudo, pelo movimento, de acordo com as explorações corporais que ela faz.

Canals (2009), Berdoneau e Cerquetti-Aberkane (1997), além de destacarem a importância do movimento e do corpo no desenvolvimento da percepção de espaço, ressaltam a inadequação do uso de algumas atividades para a Educação Infantil, que se pautam unicamente na planificação: "o papel e lápis nunca devem ser o ponto de partida, nem o primeiro passo" (CANALS, 2009, p.37); "raramente uma atividade sobre o suporte papel é pertinente antes do período final de um aprendizado" (BERDONEAU; CERQUETTI-ABERKANE, 1997, p.25), logo, a geometria estática não é a mais indicada para a Educação Infantil. O movimento corporal e a organização do espaço são vistos como elementos imprescindíveis à formulação da competência espacial da criança, e, por meio deles, ela vai construindo seu próprio esquema mental, que é a porta aberta para um futuro conhecimento propriamente geométrico, conceitual e abstrato (CANALS, 2009).

Alguns autores (CHAMORRO, 2005; GONZÁLEZ & WEINSTEIN, 2008; BAIRRAL, 2012) chamam a atenção para a exploração dos diferentes espaços geométricos ao se trabalhar com a matemática desde a Educação Infantil, que não deve se resumir ou priorizar apenas um espaço, como vem ocorrendo, com a preponderância da representação no micro espaço, utilizando-se, geralmente, de atividades planificadas, que não fazem muito sentido para as crianças.

González e Weinstein (2008) destacam que os seres humanos se deslocam constantemente em espaços de diferentes dimensões, na sua casa, no seu bairro ou no país, dos quais derivam diferentes tipos de problemas e para os quais necessitam de uma variedade de estratégias de solução.

Para a definição dos diferentes tamanhos do espaço geométrico, utilizaremos nesse estudo Chamorro (2005) e González e Weinstein (2008), como descrito a seguir.

Espaços geométricos	Características
Microespacio (pequeno)	Espaço das interações ligadas a manipulação de objetos pequenos, próximo ao sujeito, que contém objetos acessíveis a visão e a manipulação nos quais o sujeito controla plenamente suas relações espaciais com os objetos.
Mesoespacio (médio)	Espaço de deslocamento dos sujeitos, acessível a uma visão global, que pode ser percorrido por um sujeito, tanto dentro como fora (como o prédio da escola), demandam orientação relativas a um sistema de referenciais fixos.
Macroespacio (grande)	Espaço no qual não pode o sujeito com os meios normais obter uma visão global simultânea, inacessível a uma percepção direta. É o espaço cuja dimensão é tal que só pode ser coberta por uma sucessão de visões locais. Constituem três categorias: urbano, rural e marítimo.

Quadro 1. Caracterização dos diferentes espaços geométricos
Fonte: Organização nossa com base em Chamorro (2005); González e Weinstein (2008)

Consideramos que o desenvolvimento da educação espacial da criança, entendida como aquela que parte da percepção que vai adquirindo do espaço a sua volta, do espaço de seus próprios movimentos ou movimentos alheios para assegurar-lhes posteriormente uma transição até uma geometria elementar (VECINO, 2005), terá suas possibilidades ampliadas quando proporcionadas à criança, de forma intencional e planejada, situações que considerem o corpo e o seu movimento como ponto de partida, permitam-lhe desenvolver a capacidade de movimentar o próprio corpo de forma integrada, dentro de um ambiente desafiador, vivenciando e experimentando diferentes espaços, micro, meso e macro, por meio de atividades que valorizem o seu fazer principal, o brincar.

3. As tarefas matemáticas e os Critérios de Idoneidade Didática

As tarefas matemáticas, apesar de fazerem parte do cotidiano das salas de aula, no âmbito das pesquisas internacionais, têm tido o seu termo recuperado e ressignificado, atribuindo-lhes grande importância para a construção do conhecimento (GUSMÃO, 2014), ou seja, as tarefas que ultrapassem a perspectiva da lista de exercícios de treino e revisão, assumindo uma concepção mais ampla, como recursos metodológicos que objetivam a melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática (GUSMÃO, 2014). Desse modo, nosso estudo apoia-se na concepção de tarefas como contextos e situações diversificadas de sequências pensadas e planejadas pelo professor, com o intuito de colaborar para uma adequada aprendizagem dos estudantes (POCHULU et al., 2013).

Nesse contexto, optamos por trabalhar com sequências de tarefas, utilizando como base os Critérios de Idoneidade Didática[1], quais sejam: o epistêmico, o cognitivo, o mediacional, o emocional, o interacional e o ecológico. Esses critérios se propõem a fornecer ferramentas que contribuam com a análise e valoração dos processos de ensino, com vistas a identificar os possíveis entraves, e, desse modo, fornecer subsídios para a promoção dos ajustes e orientar melhorias dos processos de ensino e aprendizagem da matemática (FONT; PLANAS; GODINO, 2010).

A idoneidade didática de um processo de ensino e aprendizagem é avaliada a partir da articulação coerente e sistémica desses seis critérios (GODINO; BATANERO; FONT, 2008), ou seja, um processo de estudo é considerado adequado/idôneo quando apresenta um alto grau em cada critério de modo global. Porém, a sua avaliação é complexa, visto que envolve diversas dimensões, muitas vezes não observáveis diretamente, necessitando de indicadores empíricos para que sirvam como diretrizes em cada uma delas (GODINO, 2013). Nesse sentido, Godino et al. (2006) e Pochulu, Font, Rodríguez (2016) apresentam indicadores para cada idoneidade conforme descrevemos brevemente:

CRITÉRIO DE IDONEIDADE	INDICADORES
Epistêmica - grau de representatividade dos significados institucionais implementados ou pretendidos, com relação ao significado de referência.	Apresentando uma mostra representativa variada e articulada de situações-problema (contextualizados, com diferentes níveis de dificuldade etc.); procurando explorar o uso dos modos de expressão verbal, gráfica, simbólica, etc., adequando a linguagem matemática e a claridade e correção de definições e procedimentos conforme o nível educativo em que se está trabalhando etc.
Cognitiva - grau em que as aprendizagens pretendidas/implementadas estão na zona de desenvolvimento potencial dos alunos, assim como a proximidade das aprendizagens adquiridas com as que foram pretendidas ou implementadas.	Assegurando que os alunos apresentam os conhecimentos prévios necessários para o estudo do tema e que os conteúdos que se pretende ensinar são alcançáveis, ou seja, apresentam um grau de dificuldade manejável; procurando incluir atividades de ampliação e reforço; realizando uma avaliação formativa durante o processo de estudo etc. indicando se realizam a apropriação dos conhecimentos, compreensões e competências pretendidas etc.
Emocional - grau de implicação (interesse, motivação, atitudes, afetos) do alunado no processo de estudo	Selecionando tarefas de interesse para os alunos; promovendo a avaliação da utilidade da Matemática na vida cotidiana e profissional; promovendo a participação nas atividades, a perseverança, responsabilidade etc.; favorecendo a argumentação, de modo que se avalie o argumento e não quem o disse, promovendo a autoestima, evitando o desgosto ou o medo de Matemática etc.
Mediacional - grau de disponibilidade e adequação dos	Fazendo uso de materiais manipulativos e tecnologia que permitam introduzir boas situações, linguagens,

[1] A noção de idoneidade didática e as suas dimensões têm sido introduzidas pelo modelo teórico do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática que objetiva articular e integrar diferentes perspectivas e noções teóricas utilizadas na Educação Matemática, a partir de pressupostos antropológicos e semióticos para o estudo dos processos de ensino e aprendizagem matemáticos (FONT; PLANAS; GODINO, 2010). Esse constructo teórico foi iniciado pelo grupo de pesquisa Teoria da Educação Matemática da Universidade de Granada no início da década de 90, tendo como criador e principal investigador o Professor Juan Godino, com a participação de diversos colaboradores.

recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem	procedimentos e argumentações que se adaptem ao conteúdo pretendido; procurando que as definições e propriedades sejam contextualizadas e motivadas com o uso de modelos e visualizações; buscando investir o tempo nos conteúdos mais importantes e nos que geram mais dificuldades; distribuição e organização dos alunos e da aula de modo que se adequem ao processo de ensino pretendido etc.
Interacional - grau em que os modos de interação entre professor e alunos, aluno e aluno permitem identificar e resolver conflitos de significado e favorecer a autonomia da aprendizagem	Realizando uma apresentação adequada do tema, utilizando uma linguagem clara, enfatizando os conceitos-chave; procurando reconhecer e resolver os conflitos de significado dos alunos (interpretando corretamente seus silêncios, expressões faciais, perguntas etc.); buscando consenso com base no melhor argumento; procurando facilitar sua inclusão na dinâmica da aula; favorecendo a comunicação entre os estudantes; contemplando momentos nos quais os estudantes se responsabilizam pelo estudo (exploração, formulação, validação e comunicação) etc.
Ecológica - grau em que o processo de estudo se ajusta ao projeto educativo da instituição, às diretrizes curriculares, às condições do entorno social.	Assegurando que os conteúdos que estão sendo ensinados apresentam correspondência com as diretrizes curriculares; afiançando que tais conteúdos contribuem para a formação social e profissional dos estudantes; buscando relacionar os conteúdos ensinados com outros intra e interdisciplinar; considerar as fontes de diversidades dos alunos etc.

Quadro 2. Descrição dos Critérios de Idoneidade Didática e de Indicadores empíricos
Fonte: Organização nossa com base em Godino et al (2006); Pochulu; Font; Rodríguez (2016).

Esses critérios e seus indicadores, juntos, permitem contribuir com o planejamento, a implementação e uma posterior valoração dos processos de ensino e de aprendizagem (GODINO et al. 2006).

4. Percurso metodológico

Essa é uma pesquisa de intervenção, de natureza qualitativa, que teve como cenário de investigação a Unidade de Educação Infantil da Universidade Federal da Bahia (Creche/UFBA) e como participantes as 12 crianças, com idade entre 3 anos e 3 anos e 11 meses, que compunham o Grupo 3 e a professora deste grupo. Para as intervenções foram propostas sequências de tarefas desenhadas pela pesquisadora, com base nos critérios de idoneidade didática, e implementadas pela professora da turma, em parceria com a pesquisadora. Os dados foram coletados no 1° semestre de 2016, por meio da observação participante, de modo que a pesquisadora se integrou ao desenvolvimento da pesquisa, não ficando separada da situação que observava. O material empírico coletado está constituído de diário de campo, gravações, em áudio e vídeo e materiais produzidos para e pelas crianças.

O processo para a coleta e análise dos dados se estruturou em diferentes etapas, que, apesar de distintas se entrecruzaram, quais sejam: encontros entre a pesquisadora e a professora – para a apresentação e discussão da proposta da pesquisa e obtenção de algumas informações preliminares a respeito das crianças; encontros entre a pesquisadora e as crianças – para familiarização e a observação mais apurada das mesmas; desenho e (re)desenho (pela pesquisadora) das sequências de tarefas; estudo das tarefas com a professora da turma, dos conceitos envolvidos, dos objetivos pretendidos e orientação sobre as possibilidades de exploração com as crianças; desdobramento das intervenções com as crianças pela professora em parceira com a pesquisadora; e, por fim, a análise dos dados utilizando como base os critérios de idoneidade didática.

Na descrição e análise dos dados, para a representação dos participantes adultos, utilizaremos as expressões “Professora” e “Lobo”, e para as crianças os apelidos pelos quais elas são conhecidas e carinhosamente tratadas na Creche e por suas famílias: Adana, Paulinho, Tariq, Juju, Cacau, Nando e Sophia.

5. Apresentação e discussão dos resultados

A seguir descrevemos os aspectos dos CID que foram contemplados dentro das tarefas e, posteriormente, a análise da implementação das mesmas. Esses aspectos referem-se ao processo de estudo pretendido, ou seja, que foram utilizados no desenho das tarefas, supondo-se um alto grau de idoneidade didática. Apenas após a implementação, com as crianças, foi possível observar e avaliar o grau de idoneidade alcançado em cada dimensão e nas tarefas, de modo integrado.

IDONEIDADE	ASPECTOS CONTEMPLADOS/INDICADORES EMPÍRICOS
Epistêmica	As marcações de localização - dentro/fora, interior/exterior/limite, em cima/embaixo - assim como as orientações de direção e de sentido - para cima/para baixo, para frente/para trás - utilizadas nas tarefas buscam introduzir a linguagem matemática verbal de forma clara e compassada, contribuindo para aproximação das crianças com as noções pretendidas, utilizando a exploração no pequeno e no médio espaço. As tarefas foram pensadas para promover situações em que as crianças tenham que construir hipóteses de forma espontânea.
Emocional	O modo como as noções são exploradas dentro das tarefas por meio de histórias e músicas infantis, contadas e cantadas de forma lúdica; com a utilização de brincadeiras, que demandam movimento e vivência corporal das noções, contextualizadas com objetos e brinquedos que possuem relação direta com as crianças, tendem a despertar o seu interesse, motivando-as a participar ativamente, contribuindo com um aprendizado autônomo.
Cognitiva	As tarefas apresentam alguns desafios que partem de conhecimentos que as crianças já possuem, proporcionando a ampliação, organização e sistematização de novos conhecimentos de forma gradual, respeitando a sua capacidade de resposta.
Mediacional	Os elementos lúdicos como os cenários das histórias, os fantoches, além do modo como as histórias são narradas, mostram-se atrativos e consonante com os objetivos pretendidos nas tarefas; Os materiais utilizados (máscaras, gizão de cera, bambolês, casinha e carrinhos em miniatura, circuito de corrida em emborrachado, motoca e pista de corrida, elementos que compõe as trilhas como o túnel, as barreiras em 3D) são adequados para o nível cognitivo e etário das crianças e permitem uma boa introdução das noções que se pretende trabalhar; estão em quantidade suficiente para o uso individual e coletivo e são de fácil manipulação; a organização das crianças em um único grupo, na maioria das tarefas, assim como a organização individual em momentos específicos, bem como os espaços escolhidos são adequados para a realização das tarefas; as tarefas permitem a participação individual e coletiva das crianças, respeitando o ritmo de cada uma, além disso foram planejadas para a aplicação em um período médio de 25 minutos, tempo suficiente para que todas as crianças possam participar com concentração e interesse.

Interacional	As tarefas que envolvem brincadeira, brinquedos, música e narração de histórias favorecem a imaginação e comunicação entre as crianças, facilitam a inclusão e o envolvimento delas na dinâmica da atividade; a organização coletiva das crianças na atividade possibilita o aprendizado coletivo e colaborativo; a linguagem utilizada é clara, compassada e condizente com o nível de desenvolvimento das crianças; os diálogos que se repetem dentro das tarefas entre a professora e as crianças e entre as crianças favorecem a identificação de conflitos cognitivos e a resolução deles.
Ecológica	As tarefas contemplam a cultura da infância, valorizando e ampliando as experiências vivenciadas nas brincadeiras e nas interações decorrentes destas, promovem conhecimentos matemáticos, além dos conhecimentos relativos ao mundo físico, social, cultural e natural, bem como propicia a imersão das crianças nas diferentes linguagens e formas de expressão: gestual, verbal, musical etc., e, desse modo, respeitam e contemplam os eixos norteadores das práticas Educativas propostos pelos documentos oficiais nacionais e o da Instituição onde foi realizada a pesquisa.

Quadro 3. Aspectos dos CID contemplados no desenho das tarefas das sequências "*Aqui ou lá, em todo lugar!*" e "*Pra lá e pra cá, vou a qualquer lugar!*"

Fonte: Acervo Pessoal/Organização nossa com base na orientação de Godino et al. (2006)

5.1. Descrição e análise das intervenções da Sequência "*Aqui ou lá, em todo lugar!*"

A Sequência de tarefas "*Aqui ou lá, em todo lugar!*" foi distribuída em sete intervenções, sendo que destas apenas três foram analisadas nesse estudo: "*Corre, pintinho, entra no ninho!"; "Fora seu Lobo" e "Trilha de obstáculos".*

5.1.1 Intervenção "*Corre, pintinho, entra no ninho!*"

A implementação da intervenção "*Corre, pintinho, entra no ninho!*" se deu com a participação de sete crianças que estavam presentes na turma e teve início na videoteca, com as crianças assistindo a um vídeo clipe da canção "Pintinho amarelinho" (domínio público). As crianças cantaram e dançaram imitando as expressões corporais e movimentos do pintinho. Logo após, já na sala de aula, a professora iniciou um diálogo com questões relativas ao que foi narrado na letra da música, conversou sobre o modo de vida e alimentação do pintinho e do gavião, da diferença de tamanho entre eles, dos medos que o pintinho sentia e dos perigos que ele corria na presença do gavião, seu predador natural, levando as crianças a perceberem os motivos de o pintinho ter tanto medo do gavião.

Corroborando com Gusmão (2014), o modo como uma tarefa é introduzida é muito importante para o engajamento das crianças e precisa trazer elementos que agucem o interesse delas. A presença dos aspectos lúdicos envolvendo música, dança e expressão corporal, da exploração de conhecimentos relacionados à natureza e à biodiversidade e dos elementos relacionados a conceitos, quando comparou o tamanho relativo das aves por meio das noções de maior e menor, demonstrou nesse episódio um alto grau de idoneidade cognitiva, mas também das idoneidades interacional, mediacional, emocional e ecológica (GODINO et al., 2006).

Vejamos agora as tarefas que compuseram esta intervenção.

Tarefa 1- As crianças foram convidadas pela professora a participar da brincadeira "*Corre, pintinho, entra no ninho!*", a professora mostrou máscaras de pintinhos, galinha e gavião para que elas escolhessem e pintassem. Depois que todas estavam com suas máscaras, ela explicou como seria a brincadeira. Mostrou um bambolê e disse que ele seria o ninho e que cada pintinho teria um. Colocou o bambolê no chão da sala e, mostrando a região interior (fig. 1) formada pelo bambolê, explicou que aquele espaço era onde ficariam protegidos do gavião, e, mostrando a região externa ao bambolê (fig. 2), informou que aquela área era de domínio do gavião.

A brincadeira começou com cada pintinho dentro do seu ninho (fig. 3) e, logo depois, a mamãe galinha chamou-os para passear. Os pintinhos passearam pela região de domínio do gavião e no meio do passeio a galinha gritou: – Lá vem o gavião. Corre, pintinho, entra no ninho! Os pintinhos, muito alvoraçados, correram e entraram nos seus ninhos.

Figura 1. Região interior
Fonte: Acervo

Figura 2. Região exterior
Fonte: Acervo Pessoal

Figura 3. Dentro do ninho
Fonte: Acervo Pessoal

A brincadeira continuou por algum tempo, com o revezamento de algumas crianças no papel de gavião, galinha e pintinhos, e terminou quando já não havia mais interesses das crianças (expressão da idoneidade emocional). A professora então manteve um diálogo com as crianças sobre a brincadeira, buscando explorar os processos de evocação e verbalização a respeito do que foi vivenciado (expressão da idoneidade epistêmica), como descrito no episódio a seguir:

Professora: *Vocês gostaram da brincadeira?*
Adana: *Gostei!* (As demais crianças balançam a cabeça positivamente)
Professora: *Quando o pintinho estava no ninho, o gavião pegava o pintinho?*
Crianças: *Não!*
Professora*: Então para o gavião não pegar o pintinho, ele tinha que ficar onde?*
Paulinho: *No ninho.*
Professora: *Dentro do ninho! E se o pintinho ficasse fora do ninho o que acontecia?*
Paulinho: *Pegava*
Professora: *Quem pegava?*
Juju, Paulinho e Nando: *O gavião!*
Professora: *Ah! Então pra ficar protegido do gavião o pintinho tinha que ficar onde mesmo?*
Juju e Sophia: *No ninho.*
Professora: *Dentro do ninho, não é? No interior, se o pintinho ficasse no exterior, do lado de fora do ninho, o gavião pegava ele.*

Durante a brincadeira as crianças perceberam e compreenderam a distinção entre as regiões interior e exterior, tendo o contorno do bambolê como limite entre essas duas regiões. Isso pôde ser notado em todo o desenrolar da brincadeira, precisamente quando as crianças (pintinhos) buscaram proteção no interior do ninho, distinguindo bem as regiões em que podiam ou não ficar mostrando-se muito atentas para não deixar que nenhuma parte do corpo ultrapassasse o limite das regiões, e também quando a criança (gavião) fazia seu voo rasante apenas na região de seu domínio, respeitando o espaço dos pintinhos.

Constatamos, assim, que a tarefa, ao proporcionar a exploração e a vivência corporal das noções de dentro e fora de uma região, de forma lúdica (idoneidade mediacional e emocional), utilizando vocabulário adequado, promovendo e explorando os processos de evocação e verbalização (idoneidade epistêmica), possibilitou às crianças a identificação da posição do próprio corpo em relação a um referencial fixo, o ninho, ampliando as suas experiências e conhecimentos, confirmando, desse modo, uma alta idoneidade cognitiva.

Tarefa 2- A realização desta tarefa se deu com uma criança por vez. A professora mostrou à criança a figura de um pintinho recortado e uma folha de papel com uma circunferência desenhada (representando o ninho).

Professora: *Esse desenho representa a brincadeira que a gente participou agora. Aqui é o chão da sala* (passando a mão sobre a superfície do papel) *E aqui é o que?* (Passando a mão sobre o ninho)
Juju: *Aquiiii!* (Passando o dedo indicador por toda a extensão da circunferência), *é o ninho do pintinho.*
Professora: *E onde é que o pintinho tem que ficar para o gavião não pegar ele?*
(Juju aponta a região interna do ninho)
Professora: *Onde é?*
Juju: *Dentro do ninho!* (Passando novamente o dedo indicador por toda a extensão da circunferência)
Professora: *Isso! Então cola ele aí para o gavião não pegar.*
(Juju cola o pintinho dentro do ninho)
Professora: *E o gavião ficou onde?*
Juju: *Fora!* (batendo a mão sobre a região externa ao ninho)
Professora: *Mas eu não tenho um gavião, você quer desenhar?*
(Juju balança a cabeça positivamente e desenha o gavião no exterior do ninho)

Assim, como no episódio relatado, a tarefa foi desenvolvida com todas as crianças, porém algumas delas, quando indagadas pela professora quanto ao lugar onde o pintinho ou gavião deveria ficar, não utilizaram os termos “dentro” e “fora” ou “interior” e “exterior”, como ocorreu com Juju, mas todas apontaram com os dedos as posições corretamente, colando o pintinho no interior e desenhando o gavião no exterior do ninho. Evidenciamos, desse modo, que a tarefa proporcionou um alto grau de idoneidade mediacional tanto nos recursos, quanto no tempo disponibilizado, o que, por sua vez, promoveu um aumento da idoneidade epistêmica e cognitiva.

Situações de exploração corporal, seguidas de evocação e verbalização, que estimulem pensar com e sobre o que ocorreu (idoneidade epistêmica) a ação desenvolvida durante a manipulação de um objeto ou ocorridas dentro de uma brincadeira que incentive a criança a falar sobre o que está ocorrendo ou sobre o que já ocorreu, como as relatadas no episódio acima, são muito ricas e de grande importância para auxiliar a criança no desenvolvimento do pensamento matemático (idoneidade cognitiva e ecológica).

Em consonância com Lorenzato (2006) e Smole (1996), outro aspecto importante que precisa ser estimulado, além da verbalização, são os registros escritos, que podem ser feitos por meio do desenho, especialmente no caso das crianças que ainda não utilizam o código convencional da escrita. Os registros (fig. 6, 7 e 8) produzidos pelas crianças, nessa tarefa demonstraram que elas conseguiram representar graficamente, por meio de colagem e desenho, situações de estar no interior ou no exterior de uma região, ao utilizar um referencial fixo, no caso o ninho, apresentando alto grau na idoneidade mediacional, no que se refere aos materiais que auxiliaram em uma boa sistematização das noções e que contribuiu com o aumento da idoneidade cognitiva.

Pôde-se identificar, ainda, durante a tarefa (fig. 7 e 8) que vários contornos foram desenhados em volta do ninho e quando perguntado às crianças o que eram aquelas linhas, disseram: é o gavião voando! Indicando, desse modo, que o voo do gavião ficava restrito apenas à sua região de domínio, exterior ao ninho, e, portanto, um modo de se observar a dimensão cognitiva e epistêmica.


Figura 6. Registro de Cacau
Fonte: Acervo Pessoal


Figura 7. Registro de Tariq
Fonte: Acervo Pessoal


Figura 8. Registro de Adanna
Fonte: Acervo Pessoal

Observamos, assim, que o desenvolvimento dessa tarefa foi enriquecido a partir da exploração do espaço, por meio da vivência corporal, realizada anteriormente. As crianças evocaram a situação vivida corporalmente na brincadeira, ao buscarem representar graficamente as posições relativas do pintinho e do gavião na tarefa planificada, revelando certa compreensão das noções em contextos diferentes. O desenho se revelou como “uma forma de comunicação, como uma parte importante da percepção espacial, como uma possibilidade de a criança iniciar a construção de uma significação para as diferentes representações” (SMOLE, 1996, p.87), tendo, portanto, um alto grau de idoneidade mediacional.

Durante toda a implementação, foi identificado nessa tarefa alto grau de idoneidade em todos os critérios, caracterizando, desse modo, uma tarefa com alto grau de idoneidade didática (GODINO et al., 2006).

5.1.2 Intervenção “*Fora Seu Lobo!*”

A intervenção *Fora Seu Lobo!* também se deu com a participação de sete crianças e teve início na rodinha de diálogos, com a professora perguntando quem se lembrava da música e da brincadeira que tinha sido feita no dia anterior. As crianças participaram ativamente do diálogo (idoneidade interacional e emocional), relembrando e relatando aspectos importantes vivenciados na brincadeira do pintinho e do gavião, salientando que o pintinho tinha que ficar dentro do ninho, e o gavião só podia ficar fora do ninho. A professora, então, falou que na história que iria contar tinham três bichinhos, e, para ficar protegidos tinham que entrar em uma casinha. Apresentou às crianças os bonecos dos três porquinhos, personagens da história.

Nessa fase, destinada à introdução da tarefa, por meio do jogo de perguntas e respostas, a professora provocou a evocação e verbalização das crianças em relação às noções trabalhadas na intervenção anterior, o que serviu de base para a ampliação das experiências nas tarefas que viriam, revelando, desse modo, um alto grau de idoneidade nos critérios cognitivo e interacional (GODINO et al., 2006).

Tarefa 1- Teve início com a contação da história dos três porquinhos (fig. 9), utilizando cenário com casinhas, que tinham portas e janelas que abriam e fechavam, permitindo que os bonecos (porquinhos) pudessem entrar e sair. Durante toda a narrativa, utilizou marcações de posição dos porquinhos e do lobo, em relação a referenciais fixos, as casinhas, a exemplo: O porquinho está protegido dentro da sua casa de madeira, o lobo não pode pegá-lo, pois está do lado de fora. Terminada a história as crianças puderam brincar (fig. 10) com o cenário e as personagens, manipulando-os livremente enquanto a professora as indagava quanto à posição (idoneidade epistêmica) em que os porquinhos se encontravam.

Figura 9. Contando história
Fonte: Acervo Pessoal

Figura 10. Brincadeira com personagens
Fonte: Acervo Pessoal

Nessa tarefa, os objetos escolhidos (idoneidade mediacional) para a contextualização das noções trabalhadas e o modo lúdico como foi conduzida a história despertaram o interesse das crianças (idoneidade emocional), motivando-as a uma participação ativa (idoneidade interacional), contribuindo, desse modo, com o processo de aprendizado (idoneidade cognitiva). O jogo de perguntas e respostas, proposto pela professora, permitiu às crianças momentos para pensarem com e sobre as ações que estavam praticando e comunicarem sobre elas (idoneidade interacional e cognitiva). O modo como cada um dos critérios se apresentou, com elevado grau de idoneidade, nos permite inferir que houve um alto grau de idoneidade didática nessa etapa da tarefa, conforme Godino et al. (2006).

Tarefa 2- A tarefa teve início na rodinha, com a professora dialogando com as crianças. Logo depois iniciou a brincadeira *Fora, Seu Lobo!*

Professora: *Vai chegar um lobo aqui e para nos protegermos, temos que ficar dentro daquela casa ali, tá vendo aquela casa ali?* (Apontando para uma casinha de parque que fora colocada na sala). *Se a gente ficar do lado de fora...*
Sophia: *O lobo pega!*
Professora*: O lobo pega! Vamos brincar assim? Quem quer entrar logo na casinha? (*Todos as crianças se direcionam para a casinha e entram)
Professora: *Tem que ficar aí dentro, se ficar do lado de fora o lobo pega. Espera aí que eu vou ver com o Seu Lobo se ele está pronto. Tá pronto Seu Lobo?*
Lobo (estagiário de Pedagogia)*: Tô me recuperando. Ai que fome que eu estou.*
Professora: *Gente, vamos agora cantar a música, vamos dar as mãos aqui fora.* (Todas as crianças saem da casinha e começam a passear pela sala junto com a professora e a auxiliar de classe cantando)

Todos: *Vamos passear na floresta enquanto Seu Lobo não vem. Tá pronto Seu Lobo?*
Lobo: *Não! Eu ainda estou tomando meu banho[...]*
Todos: *Vamos passear na floresta enquanto Seu Lobo não vem. Tá pronto Seu Lobo?*
Lobo: *Sim! Já estou saindo, eu vou pegar.* (O lobo aparece e corre atrás das crianças que entram na casinha). *Mas vocês aí dentro eu não consigo pegar. Oh! Eu vou embora viu!?*
Crianças: *Tchau Seu lobo!*
Lobo: *Mas eu volto, viu?*
Professora: *Porque esse lobo não pegou a gente*? (Dirigindo-se para as crianças)
Sophia: *A minha casinha!*
Paulinho: *Tá dentro da casinha.*
Lobo: *Mas é só vocês ficarem do lado de fora que eu pego.*

A brincadeira continuou com várias sucessões de passeios pela floresta e corridas até a casinha, com alternância de crianças no papel do lobo e dos porquinhos. Segundo Smole (1996), ao brincar, a criança se depara com desafios e problemas, para os quais deve buscar soluções constantemente. O ato de brincar, nesse sentido, é também uma forma de resolver problemas, no qual o corpo é o principal instrumento. Durante a brincadeira, as crianças constantemente buscaram caminhos diferentes para desviar do lobo, se posicionaram de forma estratégica, nem muito perto, nem muito longe da casa, de modo que permitisse experimentar a emoção de serem perseguidas, mas que, ao mesmo tempo, possibilitasse chegar ao abrigo antes que o lobo pudesse pegá-las, ou, até mesmo, se posicionarem dentro do local onde, pelas regras do jogo, o lobo não poderia pegá-las. Entendemos, em consonância com Smole (1996), que as estratégias que foram desenvolvidas por meio da brincadeira estimularam, além da percepção espacial, o desenvolvimento de relações temporais e a avaliação de distâncias, proporcionando a aproximação das crianças com importantes conceitos físico-matemáticos e, portanto, revelando uma alta idoneidade cognitiva e epistêmica.

A tarefa, desse modo, ao mobilizar diferentes estratégias para a resolução de um mesmo problema, ao proporcionar aproximação de diferentes noções e conceitos (idoneidade epistêmica e cognitiva), por meio da vivência lúdica dentro de uma brincadeira (idoneidade emocional, mediacional, interacional e ecológica), apresentou um alto grau de idoneidade didática (GODINO et al., 2006).

5.1.3 Intervenção "*Trilha com obstáculo!*"

A intervenção foi realizada com a participação de cinco crianças e teve início na sala com a professora apresentando a elas os objetos com os quais deveriam montar uma trilha com obstáculos.

Tarefa 1- A professora dispôs algumas cadeiras e bambolês no centro da sala, e começou a perguntar como as crianças gostariam que ela colocasse os bambolês e as cadeiras. Como não houve respostas, ela se dirigiu às crianças e entregou um bambolê a uma delas e pediu que se levantasse e fosse ajudá-la − nesse momento todos quiseram ajudar e juntos começaram a construção da trilha (fig. 11).

Após muitas mudanças, a forma da trilha foi definida, e as crianças tiveram que decidir como deveriam vencer os obstáculos ao percorrê-la. Logo depois, iniciaram o percurso respeitando o acordado, agachados no chão, passando por dentro dos bambolês (fig. 12). Num certo momento, Tariq mudou o modo de passar pela trilha, continuou passando por dentro do bambolê, porém não mais pelo chão, e sim por cima da cadeira. A professora mostrou às outras crianças, que começaram a fazer do mesmo modo (fig. 13), a professora salientou que Tariq estava passando por cima da cadeira. As crianças continuaram o percurso e a professora, em alguns momentos, perguntou por onde eles estavam passando e em outros momentos sistematizou descrevendo como as crianças estavam passando pela trilha (idoneidade interacional e emocional).

Figura 11. Montando a trilha
Fonte: Acervo Pessoal

Figura 12. Modo acordado
Fonte: Acervo Pessoal

Figura 13. Imitando Tariq
Fonte: Acervo Pessoal

Durante a tarefa a trilha sofreu várias alterações na sua forma e no modo que as crianças deveriam passar pelos obstáculos, algumas vezes sugeridas pela professora, outras escolhidas por cada criança livremente (idoneidade cognitiva). Nessa tarefa as crianças ajudaram a modificar os objetos, tomaram decisões, expuseram suas ideias (idoneidade cognitiva), escutaram as dos outros (idoneidade interacional), definindo as orientações por cima, por baixo, por dentro, em pé, agachado etc. (idoneidade epistêmica, ecológica e cognitiva).

Tarefa 2- A tarefa teve início em um espaço fora da sala, no qual, previamente, tinha sido montada uma trilha com obstáculos. Ao chegarem ao local, a professora mostrou a trilha e como eles deveriam percorrê-la, apresentou o sentido e os modos como eles passariam por cada obstáculo. Decidiram quem seria o primeiro e cada criança, individualmente, fez o percurso (fig. 14), sob a observação das demais. Na segunda etapa, as crianças puderam atravessar a trilha do modo que quisessem (fig. 15) (idoneidade emocional), mas tinham que comunicar à turma (idoneidade interacional) como fariam (idoneidade cognitiva).

Sophia quis fazer o percurso no sentido inverso, começando pelo fim da trilha (idoneidade cognitiva e emocional). Cacau resolveu que passaria por cima da trave, último obstáculo, que era alta e que no primeiro momento tinha sido atravessada por baixo, mas logo percebeu que as pernas não alcançavam, então a professora perguntou se ele ia passar por cima ou por baixo, ele indicou e falou que ia passar por cima, a professora então ofereceu ajuda e ele venceu o obstáculo (fig. 16) (idoneidade cognitiva, emocional e interacional).

Figura 14. Percurso individual
Fonte: Acervo Pessoal

Figura 15. Sentido inverso
Fonte: Acervo Pessoal

Figura 16. Por cima da trave
Fonte: Acervo Pessoal

As atividades de trilha ajudam a desenvolver e/ou aprimorar habilidades relacionadas com o deslocamento e o equilíbrio durante a repetição de um trajeto previamente determinado (idoneidade mediacional e cognitiva). As crianças perceberam o seu corpo e o movimento com precisão, e os mobilizou de múltiplas formas no espaço. Também se viram diante de desafios e obstáculos nos quais se aproximaram de noções e termos empregados em situações diferentes, ao passarem por cima, por baixo, por dentro (idoneidade cognitiva).

Le Boulch (1987) salienta que assim como para a percepção do corpo é importante enriquecer o vocabulário da criança quando de suas experiências motoras ou gráficas, também a compreensão de conceitos, como perto/longe, dentro/fora, em cima/embaixo, dentre outros, será facilitada se eles estiverem associados a uma série de ações no espaço.

As duas tarefas permitiram que as crianças agissem, em alguns momentos, como protagonistas, escolhendo e definindo os modos de participar, fazendo uso de criatividade e certa autonomia (idoneidade cognitiva, emocional e ecológica), e, em outros, seguindo orientações definidas previamente ou imitando a professora e os colegas (idoneidade interacional). Situações como as propiciadas contribuem para a aprendizagem das crianças. As duas tarefas mostraram um alto grau de idoneidade didática, conforme Godino et al., 2006.

5.2. Descrição e análise das intervenções da Sequência “*Pra lá e pra cá, vou a qualquer lugar!”*

A Sequência de tarefas “*Pra lá e pra cá, vou a qualquer lugar!”* foi distribuída em três intervenções, ambas analisadas nesse estudo: *“Caminho orientado”; “Corrida de motoca” e “Circuito de corrida de carrinhos”.*

5.2.1. Intervenção “*Caminho orientado”*

Esta intervenção contou com a participação de sete crianças e começou com a professora informando que tinha uma surpresa para elas em outra sala.

Tarefa 1- Ao chegar na sala, as crianças encontraram uma pequena trilha feita com barreiras em 3D. Então, a professora informou que eles deveriam andar pela trilha entre uma barreira e a outra, sem tocar nem bater nenhuma parte do corpo nas barras e em seguida mostrou por onde eles começariam. As crianças fizeram o percurso individualmente e utilizaram estratégias diferentes para não tocar nas barreiras como dobrar e/ou levantar os braços ou juntá-los estirados próximo ao corpo (idoneidade mediacional e cognitiva).

Logo após a professora convidou as crianças para fazerem o mesmo percurso, só que todos ao mesmo tempo, segurando os ombros um do outro, formando um trenzinho, e avisou que também não podiam tocar nas laterais. As crianças fizeram todo o percurso mais devagar, pois dependiam do outro para não esbarrar. A professora depois avisou que iam repetir o percurso, agora mudando o sentido.

A tarefa continuou com as crianças fazendo a trilha com os olhos fechados, sem ver nada. Nessa tarefa a professora não dá nenhuma informação quanto a poder ou não tocar nas barreiras laterais. Cada criança, uma por vez, fez o percurso, a maioria delas utilizou como estratégia passos mais curtos e mais lentos. Uma das crianças utilizou uma estratégia diferente: começou o percurso com os braços abertos, próximo às barreiras, porém sem tocá-las (fig. 17). Na primeira mudança de direção da trilha ela esbarrou em uma das laterais, e, nesse momento, retirou a venda dos olhos. A professora então avisou que não podia tirar a venda, ela recolocou a venda e, dessa vez, como as demais crianças, colocou as mãos tocando de leve nas barreiras laterais para se orientar quanto à direção correta a seguir (fig. 18).

Figura 17. Sem usar as mãos
Fonte: Acervo Pessoal

Figura 18. Usando as mãos
Fonte: Acervo Pessoal

Tarefa 2- A tarefa teve início com a professora desenhando uma trilha no chão da sala, com a utilização de fita crepe, no mesmo formato da trilha em 3D, retirou as barreiras e convidou as crianças a caminharem pela nova trilha, orientando-se pela referência bidimensional, pelo desenho no chão. A professora então disse que elas não poderiam pisar nas linhas, teriam que fazer o percurso seguindo a direção, porém ficando entre as linhas.

As crianças exploraram um pouco a trilha, algumas ficaram atentas e andaram devagar para não pisar nas linhas, outras fizeram o percurso mais livremente, correram seguindo a direção, tentando ficar dentro da trilha, mas sem se preocupar em estar exatamente entre as linhas. Nessa tarefa as crianças se envolveram bem menos (idoneidade mediacional e emocional) e logo pediram para colocar a trilha em 3D novamente, o que foi atendido pela professora, continuando a brincadeira livremente. Ao serem atendidas, a idoneidade emocional e mediacional passou de média para alta.

Na primeira etapa da tarefa 1 a visualização das barras serviu de guia para seguir na direção correta, na segunda etapa, com os olhos vendados, as crianças perceberam as mudanças de direção pelo impedimento da barreia concreta sentida pelas mãos. Na tarefa 2, com a retirada das barreiras, as crianças precisaram se orientar pela referência bidimensional, pelo desenho no chão.

As duas tarefas favoreceram a coordenação dos movimentos e o deslocamento orientado, propiciando mudanças de direção e sentido dentro de um mesmo trajeto, promovendo vivências de situações para favorecer a idoneidade cognitiva, em que as crianças tiveram que se deslocar percebendo e respeitando limites, e, desta forma, puderem experimentar “estar entre” barreiras e contornos.

A estruturação de noções espaciais, como as que foram trabalhadas nessas tarefas, inicialmente, envolveu a exploração sensorial dos objetos (idoneidade emocional e mediacional) e, principalmente, as estratégias e ações que as crianças realizaram ao deslocar-se no ambiente. Esses deslocamentos, segundo Duhalde e Cuberes (1998), facilitam a aquisição de noções como: distância, direção, sentido e outras (idoneidade cognitiva). Na tarefa 2, as crianças precisaram ainda utilizar a coordenação viso-motora – capacidade de coordenar a visão com o movimento do corpo –, que, segundo Smole; Diniz; Cândido (2003), é uma habilidade importante para, mais adiante, apoiar o domínio da escrita.

As crianças vivenciaram modos diferentes de seguir um mesmo caminho, com problemas diferentes a resolver em cada um deles, levando-as a buscarem estratégias distintas em cada situação. Podemos considerar, desse modo, que a tarefa 1 apresentou alto grau de idoneidade didática e a tarefa 2 apresentou também um alto grau de idoneidade, exceto nos critérios mediacional e emocional que apresentaram um grau médio (GODINO et al., 2006).

5.2.2. Intervenção "*Corrida de motoca*"

Esta intervenção teve a participação de dez crianças e foi desenvolvida no salão por ser uma área grande, na qual foi montada uma pista para a corrida de motoca. A pista tinha as demarcações com a delimitação do espaço por onde cada dupla de criança teria que percorrer.

A professora explicou às crianças como seria a corrida, mostrando todo o percurso que elas deveriam fazer, por onde começariam, as direções que seguiriam, acompanhando as marcações no chão, passando por dentro do túnel até chegar ao final da pista. Salientou que elas não poderiam sair da sua pista e invadir a pista do colega, não poderiam passar por cima das linhas que demarcavam a pista, ou seja, teriam que ficar sempre entre as linhas desenhadas no chão (idoneidade epistêmica, ecológica e mediacional). Depois a turma foi distribuída em dois grupos, cada grupo ficou sentado em cadeiras que estavam enfileiradas em posição estratégica para que todas as crianças pudessem assistir à corrida e torcer pelo seu colega enquanto aguardava a sua vez de participar.

A professora posicionou uma criança de cada grupo por vez, no início da pista (fig. 19) e todas participaram ativamente dessa tarefa, com entusiasmo e torcida para a sua equipe (idoneidade emocional e interacional). Em sua maioria, respeitaram os limites que sinalizavam as pistas, viraram as esquinas, fazendo giro de meia volta, permanecendo na sua faixa, mudando a direção sempre que o trajeto indicava e passando por dentro do túnel (idoneidade cognitiva), (fig. 20).

Figura 19. Início da corrida de motoca
Fonte: Acervo Pessoal

Figura 20. Dentro do túnel
Fonte: Acervo Pessoal

Na segunda etapa da tarefa a professora propôs que as crianças explorassem livremente o percurso, depois foi introduzindo alguns comandos como: andar para frente; agachado imitando um gatinho; andar para trás (de ré); passar por dentro do túnel, entre outros (idoneidade ecológica e epistêmica).

Nas duas etapas dessa tarefa as crianças puderam se deslocar em um trajeto pré-determinado, estabelecendo relações de posição (estar entre e dentro) e de orientação (direção e sentido no eixo horizontal − para frente, para trás e para os lados), nos quais precisaram dar giros de meia volta, mudando a direção, e giros de volta inteira, mudando de sentido, quando foram solicitadas a retornar (idoneidade cognitiva).

Duhalde e Cuberes (1998) destacam que as noções de direção e sentido no eixo horizontal (frente/atrás e direita/esquerda) são mais complexas, pois, ao rotacionar o corpo o que está à frente passa a estar atrás e o que está em um lado passa a estar do outro, diferentemente do eixo vertical (acima e abaixo), no qual é possível distinguir e diferenciar mais facilmente o que está no teto e o que está no chão.

Entendemos, desse modo, que noções, como as trabalhadas nas duas etapas da intervenção "*Corrida de motoca*", não possuem uma apropriação fácil e rápida pela criança, no entanto, mesmo não se apropriando dessas noções em si, podemos inferir que essa tarefa, ao envolver as crianças em ações nas quais movimentos orientados foram solicitados, dentro de brincadeiras nas quais elas se envolveram plenamente, com atenção e entusiasmo (idoneidade emocional), contribuíram para uma aproximação delas com noções importantes para o desenvolvimento da sua competência espacial, o que revela uma adequação média alta, no critério cognitivo, e alta, nos critérios epistêmico, mediacional, interacional, emocional e ecológico (GODINO et al., 2006).

5.2.3. Intervenção "*Circuito de corrida de carrinhos*"

Esta intervenção teve apenas uma tarefa, contou com a participação de seis crianças e teve início no salão, com a professora relembrando com as crianças a corrida de motoca que elas tinham participado na semana anterior. Elas mostraram como fizeram o percurso e a professora foi lembrando com as crianças e fazendo junto com elas, *vocês pilotaram a motoca, na pista, entre as linhas, andaram para frente, viraram para o lado, passaram por dentro do túnel e continuaram andando para frente até chegar ao final da pista* (idoneidade epistêmica). Logo depois, fez uma rodinha com as crianças e informou que dentro da sala tinha uma pista de corrida, mas que não era para motoca, era um circuito de corrida de carrinhos. Ao entrar na sala a professora apresentou o circuito com o seguinte diálogo:

Professora: *Eu vou explicar como vai ser a brincadeira. Aqui o carro está onde?* (Apontando para o estacionamento)
Paulinho: *Dentro!*
Professora: *Dentro de onde?*
Sophia e Juju: *Pista*
Professora: *Aqui é a pista?* (Apontando a pista) *Ou aqui é a pista?* (Apontando o estacionamento).
Juju: *Aqui é a pista* (Apontando a pista)
Professora: *E aqui é o que?* (Apontando o estacionamento).
Cacau: *A garagem!*
Professora: *A garagem, isso mesmo. É o estacionamento dos carros, eles estão dentro do estacionamento.* (As crianças querem pegar os carrinhos) *Cada um vai ter que esperar a sua vez.* (Com um carrinho a professora começa a demonstrar o trajeto do circuito)
Professora: Esse carrinho vai para frente, vira para o lado e chegando aqui dá pra ir aqui? (Aproximando o carrinho da parede da garagem)
Juju e Paulinho: Não! (Balançando a cabeça negativamente)

Profesora: *Bate, não é? Então tenho que fazer o que?* (Juju e Cacau mostram com a mão a direção que o carrinho tem que seguir).
Profesora: *Tem que virar para o lado, não é? Olha a setinha mostrando. Chegou na pista, vou virar de novo, virei. Agora o carrinho vai aqui na pista e agora?* (Chegando na parte da pista onde inicia o elevado) *O que o carrinho vai ter que fazer?*
Juju: *Subir!* (Levantando a mão com o dedo espichado apontando para o alto)
Professora: *Subir. E aqui, vai andar em cima. E agora?*
Sophia e Juju: *Descer! Agora vou ter que virar a curva, estão vendo? Gente e aqui?* (Parando em frente ao viaduto) *Eu vou passar como?*
Cacau: O túnel.
Professora: *É um túnel? O carrinho tem que passar como?*
Juju: *Assim!* (Abaixando o corpo e movimentando-se agachada)
Professora: *Por onde? Passando por baixo, por baixo do viaduto. E agora, vou ter que dar a volta, virar para o lado, virar, virar. E aqui gente?*
Juju, Sophia e Paulinho: *Subir!*
Professora: *Subir! Agora ou andar aqui em cima e depois vou?*
Sophia e Juju: *Descer?*
Professora: *E agora dá para ir para cá?*
Juju: *Dá uma curva[...]*
Professora: *E agora dá para passar por cima? (Parando o carrinho em frente ao túnel)*
Paulinho e Cacau: *Por baixo*
Professora: *Ele vai passar por baixo e andar por dentro do túnel oh! Vai carrinho, vai carrinho andando até sair do túnel. Agora ele vai continuar andando aqui, vai fazer a curva de novo, para frente, para frente e entrar no estacionamento, estão vendo*? (Parando o carro em frente à entrada do estacionamento)
Professora: *Aqui tem uma setinha, tá? Eu vou virar o carrinho aqui e vou seguir a setinha. E agora onde é o lugar dele quem lembra?* (As crianças apontam a vaga do carrinho) *Aqui, não é? Virou aqui e entrou na vaga.*

A professora, ao terminar a demonstração de como seria o percurso definiu, junto com as crianças, quem seria a primeira a começar e lembrou que eles deviam escolher o carrinho, tirá-lo do estacionamento e fazer o percurso do circuito, passando por cima do elevado, por baixo do viaduto, depois por cima do viaduto, por dentro do túnel, até chegar novamente à garagem onde eles estacionariam o carro entre as marcações feitas no chão (idoneidade epistêmica).

As crianças individualmente escolheram o carrinho e começaram a fazer o percurso enquanto as outras observavam aguardando a sua vez (fig. 21). Durante o percurso de cada criança (fig. 22) a professora em alguns momentos perguntava por onde o carrinho estava passando, subindo ou descendo, passando por baixo, por cima ou por dentro etc., salientando quando virava fazendo as curvas. Em outros momentos sistematizava dizendo: *o carrinho está passando por baixo do viaduto, está entrando no túnel, etc.* (idoneidade interacional). Após todas as crianças terem feito o percurso individualmente elas puderam brincar livremente e ao mesmo tempo (fig. 23) (idoneidade emocional).

Figura 21. Iniciando o circuito
Fonte: Acervo Pessoal

Figura 22. Por baixo do viaduto
Fonte: Acervo Pessoal

Figura 23. Exploração coletiva
Fonte: Acervo Pessoal

Durante a tarefa as crianças puderam se aproximar de noções importantes relativas à localização e orientação espacial, durante todo o percurso do circuito, tanto no momento da demonstração feito pela professora, como descrito no diálogo (idoneidade interacional e cognitiva) como nos momentos em que fizeram o percurso individualmente, ambos intercalados com o jogo de perguntas e respostas promovido pela professora. Nessa tarefa, o corpo deixou de ser a principal referência, o que proporcionou às crianças a oportunidade de estabelecer relações entre os objetos, nesse caso o carrinho e a pista com seus elementos (curvas, elevados, viadutos, túnel e estacionamento), extrapolando, desse modo, a vivência corporal e a exploração do espaço micro e meso em torno de seu próprio corpo, proporcionada pelas tarefas anteriores, para uma exploração ampliada entre objetos.

Podemos destacar ainda que a qualidade visual dos materiais disponibilizados (idoneidade mediacional) e o potencial lúdico (idoneidade emocional) proporcionado pela brincadeira com carrinhos encantaram e estimularam as crianças, propiciando um grande envolvimento (idoneidade interacional). Além disso, permitiu explorar, de forma eficiente e diversificada, algumas noções (idoneidade cognitiva) que já vinham sendo trabalhadas durante as sequências anteriores, contribuindo com a ampliação de aprendizagens das crianças (idoneidade epistêmica, cognitiva e ecológica).

Assim, ao trabalhar as noções em contextos e espaços diversificados, envolvendo a ação direta do corpo e do movimento, e deste com os objetos, além da representação gráfica, mediada por processos comunicativos, as tarefas favoreceram a compreensão das noções trabalhadas, promovendo avanços no aprendizado das crianças, o que permitiu evidenciar um alto grau de idoneidade didática (GODINO et al. 2006).

5. Considerações finais

Neste estudo, buscamos analisar como ocorre o desenvolvimento de noções de localização e orientação no espaço pela criança da Educação Infantil e como esse processo poderia ser favorecido e impulsionado por tarefas matemáticas que tivessem o corpo e o seu movimento como elementos centrais. Para tanto, foi implementado sequências de tarefas, desenhadas com base nos critérios de idoneidade didática, com o intuito de aproximar as crianças de importantes conceitos matemáticos no campo geométrico.

A partir das nossas análises pudemos constatar que as tarefas implementadas nas Sequências "*Aqui ou lá, em todo lugar!*" e *"Pra lá ou pra cá, vou a qualquer lugar!"* propiciaram às crianças situações nas quais, ao ouvir histórias, ao desenhar, ao brincar, utilizando deslocamento do próprio corpo e de objetos etc., vivenciaram diversas experiências em contextos e espaços diferentes, nas quais puderam estabelecer uma relação com o espaço, tanto corporalmente quanto simbólica e graficamente. As tarefas, desse modo, desempenharam uma inter-relação coerente dentro da sequência, contribuindo com um percurso favorável ao desenvolvimento de algumas aprendizagens, apresentando um alto grau de idoneidade didática.

Os resultados revelaram, ainda, que o corpo e o seu movimento desempenharam o papel de propulsores nos processos de aproximação das crianças com algumas noções espaciais, pois, por meio da vivência corporal e da exploração do espaço em torno de seu próprio corpo e dos objetos, realizados durante as brincadeiras e da problematização, dos processos comunicativos e dos registros decorrentes, fomentados pela interação com seus pares e com os adultos, as crianças puderam identificar diferentes posições em relação a um referencial fixo e se aproximar de noções relativas à localização e orientação (sentido e direção), enriquecendo e ampliando a sua percepção de espaço.

Desse modo, pensar o corpo e o seu movimento, articulado às tarefas que compõem ou poderiam compor a rotina das crianças da Educação Infantil, além de valorizar seus anseios e necessidades, respeitar suas especificidades enquanto ser que é extremamente corpóreo, possibilita ainda o desenvolvimento e apropriação de noções matemáticas, dentre elas as espaciais. Portanto, o trabalho com o corpo e o seu movimento como base para o desenvolvimento dessas noções, se faz relevante e necessário, e, por isso, é natural que assuma um caráter tão fundamental na Educação Infantil.

Assim, entendemos que o(a) professor(a), ao planejar os diferentes momentos dentro da rotina na Educação Infantil, que tenham intencionalidade matemática, precisa voltar sua atenção para o desenho e/ou (re)desenho de tarefas diversificadas e interessantes, que se ajustem às necessidades e aos anseios das crianças, que considerem o movimento e a liberdade de expressão corporal, que valorize as suas potencialidades e respeite os seus limites, mas que, ao mesmo tempo, se ajustem às outras demandas de conhecimentos e experiências necessárias ao desenvolvimento integral da criança.

6. Bibliografia

Bairral, M. A. (2012). O desenvolvimento do pensamento geométrico na Educação Infantil: algumas perspectivas conceituais e curriculares. In: Carvalho, M.; Bairral, M. A. (Org.). *Matemática e Educação Infantil*: investigações e possibilidades de práticas pedagógicas. Petrópolis: Vozes.

Berdoneau, C.; Cerquetti-Aberkane, F. (1997). *O Ensino da Matemática na Educação Infantil.* Porto Alegre: Artmed.

Canals, M. A. (2009). *Vivir las matemáticas*. 3. ed. - Barcelona: Octaedro.

Chamorro, M. del C**.** (2005). Aprendizaje y Matemáticas. La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil**.** In: Chamorro, M. del C**.** (Org.). *Didáctica de las Matemáticas na Educacion Infantil*. Madrid: Pearson Educación.

Duhalde, M. E.; Cuberes, M. T. G. (1998). *Encontros iniciais com a Matemática:* contribuições à educação infantil*.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Font, V., Planas, N. E Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia e aprendizaje*. v. 33. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V.; Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* n. 11.111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10(2), 7-37.

González, A., Weinstein, E. (2008). *La enseñanza de la Matemática en el Jardín de Infantes.* Rosario: Homo Sapiens Ediciones.

Gusmão, T. C. R. S. (2014). Desenho de tarefas para o desenvolvimento da cognição e metacognição matemática. In: *I Colóquio Internacional Sobre Ensino e Didática das Ciências.* p.175-180. Feira de Santana.

Le Boulch, J. (1987) *Rumo a uma ciência do desenvolvimento humano*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria. *A Educação Matemática em Revista*: Geometria. *SBEM*, Blumenau: SC, FURB, ano III, n.4, p. 3-13.

Lorenzato, S. (2006) *Educação Infantil e Percepção Matemática*. Campinas: Autores Associados.

MEC/SEB (2010). Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil. – Brasília: Ministério da Educação Sec. de Educação Básica.

Meur, A. De; Staes, L. (1991). *Psicomotricidade educação e reeducação*: níveis maternal e infantil. São Paulo, SP: Manole.

Muniz, A. S. R. (2010). *A geometria na Educação Infantil:* concepções e práticas de professores. 189f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Presidente Prudente/SP.

Murakami, C. (2009). *Conhecimentos geométricos na Educação Infantil*: o que conhece o professor? 102f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática) - Universidade Estadual do Maringá, Maringá/PR.

Smole, K. C. S. (1996). *A Matemática na Educação Infantil*: a Teoria das Inteligências Múltiplas na prática escolar. Porto Alegre: Artmed.

Smole, K. C. S.; Diniz, M. I. S. V.; Candido, P. (2003). *Figuras e formas*. Coleção Matemática de 0 a 6. v. 03. 1a. ed. Porto Alegre: Artmed.

Souza, S. (2007). *Geometria na Educação Infantil:* da manipulação empirista ao concreto piagetiano. 145f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática) – Universidade Estadual do Maringá, Maringá/PR.

Pochulu, M. Font, V. Rodriguez, M. (2013). Criterios de diseño de tareas para favorecer el análisis didáctico en la formación de profesores. In: *Actas del VII CIBEM*. Montevideo: Uruguai.

Pochulu, M.; Font, V.; Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(1), 71-98

Vecino. F. R. (2005). Representación del espcaio en el niño. El espacio como modelo de desarrollo de las distintas geometrías. In: C. Chamorro (Org.). *Didáctica de las Matemáticas na Educación Infantil.* Madrid: Pearson Educación.

Celma Bento Moreira: Possui mestrado em Educação Científica e Formação de Professores, com ênfase no ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB/Jequié (2015-2017). Atualmente é Professora da Universidade Federal da Bahia (UFBA) com atuação na Educação Infantil. celmabm@gmail.com

Tânia Cristina Rocha S. Gusmão: Possui Doutorado em Didática da Matemática pela Universidade de Santiago de Compostela (USC); Atualmente é Professora na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino (UESB). professorataniagusmao@gmail.com

Vicenç Font Moll: Doctor en Filosofía i ciencias de la educación pela Universitat de Barcelona (UB). Profesor en Departament de Didáctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica Universitat de Barcelona (UB). vfont@ub.edu

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 167-185

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Educação Matemática Presente em Currículos Prescritos e Indícios em Currículos praticados, no Brasil e no Uruguai: percepções dos profissionais de Educação

Luciane Santos Rosenbaum

Fecha de recepción: 18/06/2017
Fecha de aceptación: 25/11/2017

Resumen

Este artículo presenta un recorte de la tesis de doctorado que se trata de un estudio comparado sobre el proceso de desarrollo e implementación del currículo de Matemáticas para el nivel equivalente a la Educación Básica en Brasil y en Uruguay. Se presentan resultados obtenidos en entrevistas con los profesionales dos países acerca de indicios de la implementación curricular y del uso en el aula y, posibles incorporaciones de las investigaciones del área de Educación Matemática por los profesionales investigados, como también levantar rasgos de la relación entre los diferentes actores del currículo Y los currículos prescritos.

Palabras clave: Educación Comparada. Currículos de Matemáticas. Implementación Curricular.

Abstract

This article presents a review of the doctoral thesis that is a comparative study about the process of development and implementation of the Mathematics curriculum for the level equivalent to Basic Education in Brazil and Uruguay. We present results collected in interviews with professionals from two countries about indications of curriculum implementation and classroom use and possible incorporations of Mathematics Education research by the professionals researched, as well as to draw traces of the relationship between the different actors in the curriculum and the prescribed curricula.

Keywords: Comparative Education. Mathematics Curricula. Curricular Implementation.

Resumo

Este artigo apresenta um recorte da tese de doutoramento que trata de um estudo comparado sobre o processo de desenvolvimento e implementação do currículo de Matemática para o nível equivalente à Educação Básica no Brasil e no Uruguai. Apresentamos resultados coletados em entrevistas com os profissionais dos dois países acerca de indícios da implementação curricular e do uso em sala de aula e, possíveis incorporações das pesquisas da área de Educação Matemática pelos profissionais pesquisados, como também levantamento de traços da relação entre os diferentes atores do currículo e os currículos prescritos.

Palavras-chave: Educação Comparada. Currículos de Matemática. Implementação Curricular.

1. Introdução

Os estudos comparados são um campo científico que sofreu severas críticas quanto aos métodos utilizados durante as décadas de 80 e 90. Os novos estudos de Educação Comparada contribuíram com a criação de novas categorias de análise dos sistemas educativos e da importância da Educação Comparada na solução dos problemas atuais (CARVALHO, 2009; SOUZA; MARTÍNEZ, 2009).

O ato de comparar faz parte do comportamento humano. Os fins iniciais da Educação Comparada continuam os mesmos até o presente: compreender a dinâmica dos sistemas educacionais e fornecer subsídios à tomada de decisões dos políticos e decisores em geral. Assim, ao olharmos o outro, preparamo-nos melhor para estudar e compreender a nós mesmos (FERREIRA, 2008).

Utilizamos em nossa investigação o procedimento proposto por Ferrer (2002) como uma metodologia para os estudos comparados a partir de outros métodos comparativos utilizados em outros âmbitos de comparação.

Nossa investigação consistiu em duas partes: na primeira buscamos por informações que nos aproximassem dos contextos social, econômico e educativo do Brasil e do Uruguai; nesta parte fizemos buscas em portais dos governos dos respectivos países e de organismos internacionais e, em especial, fizemos também a análise dos documentos curriculares das duas nações. Na segunda parte, confrontamos os dados obtidos na primeira parte com depoimentos de vinte diferentes atores a partir dos resultados coletados nas entrevistas realizadas com os profissionais de Educação dos dois países. Portanto, parte da nossa pesquisa constitui-se como uma análise documental dos documentos oficiais dos dois países pesquisados sob a perspectiva do aporte teórico de que faremos uso. Neste artigo apresentaremos apenas a segunda parte de nossa investigação.

As entrevistas com profissionais brasileiros e uruguaios foram realizadas presencialmente e também por videoconferência, via *Skype.* Visitamos Montevidéu em setembro de 2012, ocasião em que participamos do 4º *Congreso Uruguayo de Educación Matemática* (CUREM) e estabelecemos diversos contatos com pesquisadores e professores daquele país, realizando nossas primeiras entrevistas.

As entrevistas seguiram um roteiro com questões sobre: o desenvolvimento do currículo de Matemática, as recomendações metodológicas apontadas nos documentos oficiais, o processo de implementação do currículo e os possíveis resultados alcançados após o currículo implementado.

A figura 1 apresenta um resumo da configuração educacional dos países pesquisados, com as idades correspondentes em cada etapa de escolaridade. Os países contêm em seus documentos a educação pré-escolar e ambos têm o mesmo período de ensino obrigatório: dos quatro aos dezessete anos.

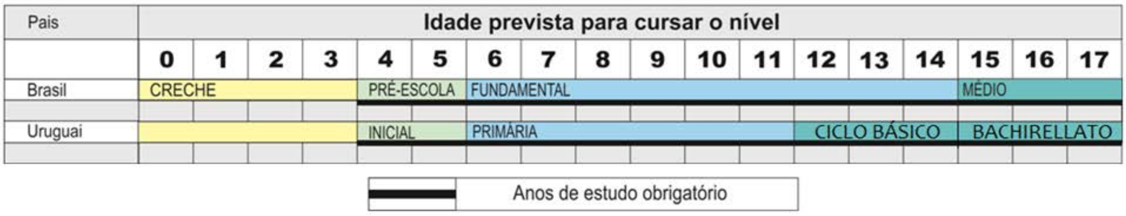


Figura 1: Sistemas educacionais do Brasil e Uruguai (ROSENBAUM, 2014, p. 121)

2. Desenvolvimento Curricular e sua importância nos sistemas de ensino

A busca por uma definição de currículo não é uma tarefa fácil. Segundo Sacristán (2000), esse é um conceito relativamente recente e a teorização sobre o currículo ainda não está adequadamente sistematizada. A busca por definir o que é currículo corresponde a descrever as funções da própria escola.

Para Sacristán (2000), o currículo é uma práxis, e não um objeto estático. Representa a função socializadora e cultural de determinada instituição em que a prática pedagógica é uma das práticas relacionadas com o currículo. Portanto, a análise curricular deve compreender o processo que se inicia com um plano construído e ordenado de princípios que se pretende alcançar e se estende até em como estes são concretizados no âmbito prático.

No final dos anos 90, Doll Jr. preconizava mudanças que afetariam a educação e o currículo, tal qual influenciaram diversas áreas do saber:

> [...] acredito que vai surgir um novo senso de ordem educacional, assim como novas relações entre professores e alunos, culminando em um novo conceito de currículo. O sistema de ordenamento linear, sequencial, facilmente quantificável que domina a Educação atualmente – que se centra em inícios claros e fins definidos – pode dar lugar a um sistema ou rede mais complexo, pluralista e impredizível. Tal rede complexa, como a própria vida, estará sempre em transição, em processo (DOLL JR., 1997, p. 19).

A organização curricular defendida por Doll Jr. (1997) propõe uma matriz curricular sem início e sem fim, com uma conexão de focos que criam uma rede de significados em contraposição aos currículos ordenados linearmente. Sob essa perspectiva, o autor concebe o currículo a partir da forma infinitiva, currere, que compreende a experiência vivenciada pelo aprendiz ao transformar e ser transformado. Assim, o currículo envolve tanto o conteúdo como o processo.

Sacristán (2000) propõe um modelo para decifrar o processo de concretização curricular composto de seis momentos, níveis ou fases. Segundo o autor, é essencial compreender como cada momento influencia (com maior ou menor intensidade) o desenvolvimento do currículo para poder detectar os pontos críticos que necessitam de melhor acompanhamento e as conexões entre os níveis. O reconhecimento dos níveis também é necessário para que cada nível seja averiguado com o uso de metodologia de pesquisa adequada.

Os seis níveis propostos por Sacristán (2000) são: currículo prescrito (documentos), currículo apresentado aos professores (orientações e livros didáticos), currículo modelado pelos professores (aula planejada), currículo em ação (aula efetivamente empregada aos alunos), currículo realizado (reflexão da aula) e currículo avaliado (verificação se os objetivos esperados foram alcançados).

3. A percepção dos profissionais de educação

Neste artigo, apenas apresentaremos uma síntese de alguns resultados no âmbito da percepção dos profissionais de educação em relação ao desenvolvimento curricular. Usamos roteiros semiestruturados e buscamos contemplar: o desenvolvimento do currículo de Matemática, as recomendações metodológicas apontadas nos documentos oficiais, o processo de implementação do currículo e possíveis resultados alcançados após o currículo implementado.

3.1. O currículo na ótica dos profissionais de educação

Solicitamos aos entrevistados que fizessem uma reflexão sobre qual sua concepção sobre currículo e quais as características que um currículo deveria possuir.

O currículo de Matemática para Mora, elaboradora do Uruguai, deve produzir crianças que saibam ler, escrever, explicar e avaliar a Matemática:

> Pensando nas crianças, para a primária, o currículo de Matemática deve ter os conteúdos básicos de aritmética, geometria, além de começar com distintas formas de pensamento: geográfico, espacial e, sobretudo, saberem o que podemos chamar o que é Matemática.

A diretora de escola uruguaia, Ailin, defende que um bom currículo de Matemática deve atrair na forma como é apresentado e propiciar que as crianças consigam entender os conteúdos aplicados à realidade: "Apresentar linguagens e distintas metodologias. As crianças necessitam trabalhar estruturas, entender que as coisas estejam relacionadas e aplicadas com a realidade para que tenham sentido."

Ao definir o que é um bom currículo, Lucia, uma professora uruguaia, faz menção que o currículo deve atender às necessidades da sociedade:

> Primeiro, na sua elaboração tem que haver uma participação intensa. Que atenda às necessidades sociais, que siga uma orientação de políticas educativas, que seja flexível, aberto, que dê possibilidades ao docente de adaptar os conteúdos aos contextos socioculturais e econômicos.

A professora polivalente brasileira, Isabela, é uma das únicas representantes brasileiras que destacou a necessidade de o currículo estar relacionado com a sociedade:

> Corpo de instrumentos que você terá para desenvolver um bom trabalho dentro da sua sala de aula, muitas vezes não adianta estar desenvolvendo um trabalho se ele não estiver conectado com o mundo exterior, aquilo que fica só na sala de aulas, ele terá que saber usar aquilo em sua vida social.

Felipe, outro professor que atua na Educação Superior brasileira, define currículo como um conjunto de caminhos:

> Currículo é um conjunto de caminhos, pelos quais o aluno deve percorrer para desenvolver competências básicas em matemática. Um currículo que desse conta das demandas do dia a dia em que a gente precisa usar matemática. Estou falando daquela Matemática que é comum a todo mundo, ao dia a dia comum, a Matemática financeira, a Matemática combinatória, um pouco de geometria plana, uma parte básica da aritmética, uma parte mais básica ainda da parte algébrica.

O professor Juan que atua na Educação Superior uruguaia define um bom currículo de Matemática como uma descrição do que se espera que o aluno aprenda em Matemática: Currículo é o mínimo que o aluno tem que saber e, nesse saber, há muitos gostos. Posso dizer que há uma tábua de conteúdos, mas só com o nome dos conteúdos não é um bom plano, tenho que conhecer as fases que o aluno chegará a conhecer.

A análise das entrevistas nos permite inferir que houve uma superação da concepção teórico-tradicional de currículo de apresentar um rol de conteúdos, com objetivos anteriormente definidos, para garantir o controle do processo educativo, e conduzir os alunos a caminhos preestabelecidos.

3.2. Impressões dos entrevistados acerca da obrigatoriedade do currículo prescrito e da autonomia na realização do currículo

No Brasil, a não obrigatoriedade provoca uma relação com o cumprimento do currículo prescrito diferente para cada ator do processo educativo. Já no Uruguai a obrigatoriedade existe e não há espaço para discussão se deve ou não ser seguido, mas de níveis de aprofundamento dos conteúdos ali organizados.

Ao tecer comentários acerca da obrigatoriedade de um currículo único, Carlos elaborador do Brasil explicita que a função dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) deveria ser de apresentar linhas gerais:

> Eles (os PCN) são princípios gerais, a ideia era essa, mas fomos à outra direção, no início era também uma carta de princípios, mas foram esticando e aí começaram a surgir dez volumes e não sei mais o que. Começam a surgir os estaduais imensos, com um monte de regras com dificuldades na implementação, e de ver qual é o raio de ação e implementação. Não deveria haver briga entre o currículo de um Estado com outro; mas, na verdade, eles deveriam estar sendo conduzidos a partir dos PCN. Respeitando as diversidades de cada Estado. Os PCN deveriam ser um regulador, mas chegaram a um nível de pormenor tão grande que não conseguiram regular.

Temas que dominaram o debate entre os elaboradores se configuravam em dois aspectos para Laura: propor referenciais comuns que considerem as diferenças e desigualdades históricas do Brasil e apresentar meios de promover o acesso ao conhecimento aos professores, desenvolvedores do currículo na sala de aula:

> O que significa indicar pontos comuns do processo educativo em todas as regiões, mas, ao mesmo tempo, respeitar as diversidades regionais, culturais e políticas existentes – no quadro de desigualdades da realidade brasileira? Como equacionar

> problemas referentes à possibilidade de acesso aos centros de produção de conhecimento, tanto das áreas curriculares quanto da área pedagógica, e que se refletem na formação dos professores que desenvolvem o currículo em prática?

Na fala de Laura percebemos que ela não faz uso da expressão currículos mínimos, mas expõe que a equipe defendia a definição de um núcleo de conteúdos obrigatórios para garantir igualdade de acesso ao conhecimento:

> É claro que para a equipe de elaboração era muito clara a pertinência da reflexão sobre a dificuldade de pensar em um núcleo de conteúdos curriculares obrigatórios para todos, e que pudesse oferecer aos estudantes iguais oportunidades de aprendizagem escolar. Também se considerava que, diante de qualquer proposta, seriam diferentes as probabilidades, dos alunos de meios sociais e culturais diversos, aprender o que fosse proposto, se não houvesse o necessário ajuste local, especialmente em termos das metodologias e abordagens feitas pelos seus professores.

A discussão acerca do currículo obrigatório é tema de reflexão de Angelina, a elaboradora uruguaia argumenta que a definição de um currículo único tem a intenção de garantir democraticamente o direito a todos pelo conhecimento:

> No nosso país, por exemplo, o que favorece que tenhamos um currículo único é que historicamente sempre tivemos uma forte ideia de igualdade, democracia, acesso para todos. Está na nossa cultura, que todos tenham direito a entrar na universidade e que todos sejam iguais quando sentados no banco da escola. É mais positivo ter objetivos, conteúdos comuns, mas escrevê-los de forma ampla para que possa adaptá-los aos alunos, aos seus interesses, necessidades, dificuldades, ao contexto em que se desenvolvem e respeitar a liberdade de cátedra do professor.

Ao comentar sobre a obrigatoriedade, Zulema, outra professora de Matemática uruguaia, defende a igualdade de acesso aos conteúdos:

> Creio que deva haver conteúdos mínimos para assegurar que todos os alunos tenham o mesmo sucesso. Igualmente, os conteúdos não são o mais importante, se não os processos que permitem realizar aos alunos. Os demais conteúdos deverão ser flexíveis e propostos de acordo com o contexto. Os docentes devem criar currículo.

A professora de Matemática Magdalena brasileira defende que o currículo deve ser obrigatório, mas não menciona os PCN, e sim o currículo de São Paulo: "Acredito que o currículo deva ser obrigatório dentro do nosso território estadual. Tenho o tema que tem que ser trabalhado, mas a maneira como vou trabalhar depende de mim, se vou trabalhar a apostila..."

Mário, outro professor de Matemática que atua na escola pública paulista, comenta que tem autonomia para desenvolver o currículo em sala de aula. No entanto, ao contrário dos outros entrevistados que atuam em escolas públicas paulistas, não faz referência ao currículo estadual, mas aos livros didáticos:

> Eu tenho autonomia. Eu gosto de fazer isso, o que norteou meu trabalho em sala foi o livro didático, eu comecei a dar aulas no primeiro ano da faculdade, então eu fui seguindo, nunca questionei muito, então o livro didático, como Gelson Iezzi, ou do Xavier. Eu vou "na onda" do livro e os autores são obrigados a seguir a legislação.

Alessandro, que atua na Educação Superior brasileira, reconhece que os PCN são obrigatórios, mas não são cumpridos nas escolas brasileiras. O próprio entrevistado revela uma posição contraditória ao declarar que oficialmente não há currículos obrigatórios:

> Os PCN são obrigatórios, é uma obrigatoriedade flexível, um referencial comum, mas que se perdeu na produção das escolas. Cada escola faz algo diferente, embora aja um corpo comum, coisas básicas de Matemática, tem escola que não chega nem a dar. Por exemplo, os professores dizem que só dão equação, outra que deixou de dar matriz.

Na visão do professor uruguaio Juan, que atua na formação de professores, os docentes uruguaios seguem o currículo obrigatório nacional:

> No equivalente ao Ensino Fundamental, há 20 anos ninguém ensinava geometria. Agora sim, porque colocamos geometria no início do programa. Agora estão trabalhando mais com geometria e estatística em todos os anos.

3.3. O processo de elaboração do currículo e influências de pesquisas nos currículos prescritos segundo os atores envolvidos no processo educativo

Os documentos do Brasil e Uruguai apresentam comentários acerca da participação de vários segmentos do processo educativo na elaboração curricular. No Brasil e no Uruguai, no momento da elaboração dos currículos foram organizadas comissões temporárias e consultas com diversos profissionais da Educação.

Laura, elaboradora brasileira, destaca que o Ministério de Educação inicialmente compôs uma equipe para a elaboração do currículo para o primeiro ciclo do Ensino Fundamental. Os participantes se dividiam entre professores com experiência neste nível, docentes de formação inicial de professores polivalentes e pesquisadores dos anos iniciais. Na segunda fase de elaboração, Laura comenta que pareceristas de universidades e secretarias da educação enviaram suas críticas e sugestões à versão preliminar.

A equipe que participou do processo de elaboração do currículo uruguaio para o equivalente ao segundo ciclo do Ensino Fundamental brasileiro é tema do comentário de Angelina, elaboradora uruguaia:

> Esses programas foram elaborados com a participação dos inspetores de Matemática, que são professores que supervisionam os docentes de Matemática. Também houve representantes do Instituto de Professores, como docentes de didática, dois do coletivo de professores do país que analisam o desempenho no Ensino Médio e um Doutor em Matemática Pura.

Os elaboradores do currículo entrevistados nos dois países teceram críticas à falta de continuidade e articulação entre as equipes elaboradoras dos currículos nos diferentes níveis de ensino, o que provocou uma falta de continuidade e consonância das concepções que nortearam a equipe do segmento subsequente:

> Por exemplo, nos PCN, a equipe que trabalhou no Ensino Fundamental I não era a mesma equipe do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio. Nunca houve uma reunião, eram equipes separadas e tudo. Foram montadas as equipes, cada uma com seus prazos curtos, e correndo atrás do prejuízo e as equipes já com tarefas delimitadas a serem feitas. Porque depois você fica com uma documentação, por um lado redundante, e algumas vezes conflitante... (CARLOS, elaborador brasileiro).

> Não tem uma ideia clara que atravesse todo o currículo desde a pré-escola ao Ensino Médio, não tem continuidade, nem um enfoque, além do mais fizeram o programa da escola primária em separado ao da secundária, tampouco uma articulação. Os professores se reuniram para fazer o currículo do primeiro ano, quando iam fazer o do segundo vinham as mudanças de plano ano a ano e não lhe permite ter uma visão de conjunto, uma visão de trajeto, de perfil, de ingresso que é o que queremos (ANGELINA, elaboradora uruguaia).

As duas elaboradoras uruguaias comentam que o prazo curto destinado à elaboração do currículo prejudicou a elaboração do currículo:

> Nunca se teve tempo para trabalhar com isso, porque aqui te convocam e disse em uma semana o programa deve estar pronto e para pensar um projeto matemático, necessita tempo, até mesmo para internalizar na sua mente! Não lembro exatamente os prazos, mas foi supercurto sim, 2 ou 3 semanas (ANGELINA)

> Quando nos convidaram a participar, já haviam passado quase 7 meses, por exemplo, a comissão se formou em outubro, setembro e nós fomos convidados a participar em abril do ano seguinte. Uma participação em 5 ou 6 encontros para orientar, organizar ou sugerir alguma ação. Permanente sempre foram os maestros (professores de primária), os inspetores e da mesma maneira participaram membros da universidade (MORA).

A elaboradora uruguaia Mora relata como os inspetores de Matemática não respeitaram as orientações elaboradas pela equipe:

> As maiores dificuldades foram pela eleição de alguns conteúdos para não intervir em certo desenvolvimento da Matemática, não foi pelo grupo de professores, e sim pelo grupo de inspetores que tinham uma visão geral e nem sempre participavam das discussões.

Para a elaboradora uruguaia Mora, os professores tiveram uma participação restrita nas mudanças curriculares:

> Existe uma porcentagem onde tecnicamente os docentes são escutados, não necessariamente atendem a todas as propostas, o governo toma em conta um pedido dos docentes para as mudanças, mas o que quer o governo faz.

Nos trechos a seguir, temos opiniões contrárias de professores brasileiros sobre a participação dos professores na elaboração do currículo paulista:

> Foi uma resposta para o que queríamos, desde o ano passado a nossa preocupação era com a Matemática, porque na nossa escola quase todos já são alfabetizados, então, com a língua portuguesa é um problema menor. Parece que "lá em cima" eles ouviram nossas preces. (ROSANA).

> A visão que se tem de Matemática é muito negativa. Agora que estão começando a aprofundar mais estudo, acredito que tenham tido a noção de que o professor está em dificuldades. Tem professor que é muito resistente, então na própria escola que estou, tem professor que não aceita o EMAI, então foi algo de cima para baixo e tem que trabalhar, conhecer o material, discutindo. (ISABELA).

Na visão do elaborador Carlos, houve participação docente no processo de elaboração e implementação do currículo na rede estadual paulista:

> A proposta foi feita muito rapidamente, 2007, em questão de meses, muito rápida, e em 2008 saiu uma primeira versão como proposta e em 2009 saiu como currículo. Entre a proposta que foi pra rede, houve discussões em todas as diretorias. Houve bastante participação dos professores, o trabalho de implementação da equipe foi muito intenso, muitas reuniões porque os professores coordenadores foram ouvidos , e entre o início da proposta e o final houve muita incorporação de sugestões.

Para a elaboradora Laura os professores conhecem pouco as discussões curriculares. Nesse sentido, Laura comenta que a publicação dos “Parâmetros em Ação” teve a intenção de aproximar os professores dessa temática:

> Em 1999 começou a ser desenvolvido o Projeto “Parâmetros em Ação”. Uma ação da SEF/MEC que oferecia às secretarias de educação e escolas interessadas em implementar os documentos curriculares a realização, em parceria, para em um contexto de formação de profissionais de educação, buscando estabelecer vínculos com as práticas locais e apresentando alternativas de estudo e discussão dos documentos curriculares por grupos formados por professores e a especialistas em educação. Os materiais de formação desse projeto foram elaborados por integrantes da equipe dos PCN.

Podemos observar na fala da professora brasileira Isabela, que os professores não se sentiram representados na elaboração do currículo:

> Essa nova proposta, se os professores tivessem sido convidados para elaborar ou um curso de formação, talvez, não haveria tanta resistência. Você até opina, mas tudo via papel, então a coordenadora leva, mas com suas palavras.

A fala de Laura evidencia a intenção do MEC (Ministério de Educação e Cultura) em propor um currículo de Matemática com a intenção de melhorar o ensino e a aprendizagem de Matemática. A entrevistada brasileira lembra que foram utilizados resultados de pesquisa para a elaboração dos documentos:

> Na elaboração dos PCN de Matemática do Ensino Fundamental, houve uma preocupação em trazer contribuições de pesquisas na área de Educação Matemática, algumas mais gerais como o recurso à resolução de problemas, às tecnologias, à História da Matemática, a recursos didáticos, como também aquelas com focos mais específicos, relativos ao tratamento didático de conteúdos como os números, as operações, a geometria, as grandezas e medidas, à estatística, à combinatória e à probabilidade.

Não encontramos consenso entre as opiniões das elaboradoras uruguaias sobre a influência de pesquisas no currículo uruguaio:

> Isso não se pode nem se quer chamar de marco teórico! É muito curto, isso não é um marco teórico! Tem erros na redação. Eu chamaria de recomendações da inspeção ao professorado, nenhum programa tem marco teórico ou objetivo claros, são todas recomendações e receitas dos inspetores de turno. (ANGELINA)

> Bom, o currículo conta com uma parte de fundamentação, antes dos conteúdos programáticos, tem a fundamentação de cada área e a de Matemática aparece algumas linhas para se trabalhar o ensino de Matemática. Esse programa exigiu mais leituras, tomou sobretudo a Didática fundamental francesa, a parte cognitiva, a parte da didática fundamental e alguns recortes de antropologia, essas partes foram as que se tornaram fundamentais para o currículo. (MORA).

Segundo Alessandro, houve influência dos resultados de pesquisa na elaboração dos currículos brasileiros. Para o professor, algumas não estão explícitas, mas são identificadas:

> A questão das competências e habilidades, com o pessoal da França. É uma das vertentes que se baseou, mas é uma visão reconstrutora desses referenciais, não há intenção em explicitar referências como em outros documentos oficiais. Pode ver uma gama do currículo de Matemática como linguagem, teoria das competências, epistemológica dos conteúdos, história da Matemática, algo mais conceitual, ideia de rede e esses referenciais.

3.4. As recomendações metodológicas apresentadas nos currículos prescritos a partir da impressão dos entrevistados

É por intermédio da fala da elaboradora brasileira Laura, que constatamos a preocupação dos elaboradores dos PCN em apresentar referenciais que auxiliassem o professor na prática educativa: "*Havia também uma preocupação de construir um referencial para orientar a prática escolar, procurando formas de garantir, a toda criança brasileira, o acesso a um conhecimento básico das diferentes áreas.*"

Podemos observar que o currículo uruguaio apresenta poucas recomendações metodológicas ao professor, no entanto esta era uma preocupação dos profissionais responsáveis pela elaboração do currículo:

> Se elaborou uma bibliografia para o docente, inclusive com links da internet que pareciam ser úteis para apoiar ao professor e o inspetor. Um inspetor resolveu apagar, a bibliografia tinha que ser retirada toda do programa, pois poderia "confundir os professores" (ANGELINA, elaboradora).

A ausência de recomendações metodológicas e didáticas mais amplas no currículo do Uruguai prejudicou a incorporação de tais instrumentos na prática docente, segundo opinião da elaboradora Angelina:

> Os alunos têm o computador, mas muitos professores dizem que não o levam para a aula porque distraem, é dizer, se recomendo ao professor que use todas essas ferramentas, não é de verdade uma recomendação metodológica, e sim de que eu tenho que ter uma visão de conjunto sobre o currículo, a abordagem metodológica.

A pesquisa mostra indícios de incorporação de aspectos metodológicos de resolução de problemas pelos docentes das nações pesquisadas, porém podemos observar que muitos professores têm uma visão equivocada da metodologia e julgam fazer uso quando apresentam problemas apenas no final da sequência de ensino como "aplicação" de um conceito:

> Mas há de se distinguir, em primeiro lugar, o problema de exercício, no exercício você vai praticar algumas coisas que você já sabe. O problema é quando você se lança em busca do que você não sabe. No nível do discurso talvez, mas nas ações práticas, a mistura permanece, tá cheio de provas até hoje do tipo: arme e efetue. Isso é terrível (CARLOS, elaborador brasileiro).
>
> Poucos usam o problema como estratégia metodológica. Estão afins com as teorias de situações de Brousseau. A grande maioria usa problemas para construir alguns conteúdos, mas não para outros dizendo que alguns conteúdos não se podem problematizar e em realidade misturam metodologias novas com outras tradicionais. (ZULEMA, professora uruguaia).

A reforma curricular ocorrida em 1999 foi o marco que introduziu a metodologia de resolução de problemas no Uruguai, porém ainda há resistência ao uso pelos professores, segundo a professora Zulema:

> O currículo de Matemática não mudou, foi introdução do trabalho com resolução de problemas, problemas, problemas. Em 2000 o governo deu cursos de aperfeiçoamento e formação docente. Estudei Brousseau e toda a didática francesa: Vergnaud, Chevallard e Douady. Em 2000 a mudança na área de Matemática foi com os problemas de Polya. A metodologia francesa começou em 2003, 2004 para os demais professores tiveram acesso à metodologia francesa.
>
> Justamente porque ficou com a ideia de trabalhar problema por problema, o professor sentia que não ensinava nada. Melhoras com a resolução de problemas? Sim, claro, sempre com alguma, não somente problemas, tem que haver um equilíbrio com o que não é entendido.

As duas professoras de Matemática do Uruguai comentam que fazem uso de questionamentos, técnicas de interrogativas que se assemelham à metodologia de resolução de problemas para ensinar: "*Eu trato de melhorar sempre, mas basicamente utilizo a interrogação didática (tudo com base em perguntas), trabalho com grupos" (ALICIA).*

As professoras brasileiras que atuam no primeiro ciclo do Ensino Fundamental, comentam o uso da metodologia de resolução de problemas:

> Antes a gente dava um monte de contas sempre problemas, divisão, passo a passo. Os PCN serviram para a gente se preocupar mais com situação-problema. Já entendi que o problema para o aluno que não é dar resposta, é fazer o aluno pensar. Não uso lista, propomos no máximo, 2, 3 problemas por dia. (ROSANA).
>
> O importante é apresentar a situação-problema, ajuda o aluno a pensar, ouve o que cada um quer dizer sobre aquela situação, muitas crianças têm dificuldade. A gente vai fazendo parte a parte o problema, não se trabalha mais a adição pura, primeiro se trabalha o pensar sobre o desenvolvimento da situação para que ele entenda a função da adição, para chegar à conta, ao final. (ISABELA).

A diferença entre problema e exercício também é tema do comentário de Felipe que atua em cursos de formação inicial e continuada de professores. Segundo o entrevistado, os docentes não compreendiam como identificar um problema:

> A gente discutia rapidamente a diferença de problema para exercício e recomendava ler o currículo e tentava fazer alguma discussão. A ideia de problema faz com que o aluno reflita, registre os dados que o problema traz, leia e releia o enunciado algumas vezes. Tente executar alguma modelagem, tente escrever matematicamente o que ele está lendo, tente verificar se o problema que ele está identificando como problema é de fato um problema e aí resolva e valide a questão vendo se o resultado for um valor numérico, se satisfaz o problema ou não.

As professoras brasileiras tecem comentários de como utilizam a História da Matemática, o uso de jogos e a calculadora em sala de aula:

> Quando uso de um jogo digo o que vamos usar, que tem a questão de estratégia e raciocínio. Explico o que vamos fazer, qual o objetivo, ele tem que saber que aquele jogo é atividade, tem um porquê. Que não é só brincadeira (ISABELA).

> Falei dos egípcios, tem uma parte da atividade que eles tinham que saber como era, até para saberem o sistema de numeração. Antes eu não gostava de jogos, não. Fazia barulho, depois do "ler e escrever" tem jogos e você faz tudo em grupo. Eu procurava fazer menos... Mas com as THA (trajetórias hipotéticas de aprendizagem) do EMAI não! Eu relutei bastante... (ROSANA).

> Usar em sala de aula, mas usando a capacidade do aluno de pensar com autonomia, que ele saiba que a calculadora é um recurso. As possibilidades que você pode utilizar a calculadora, pois também tem resistência em relação a ela, você não vai usar em todas as aulas, mas explicar seus momentos, não é a substituição do pensar, mas sim de adequação. (ISABELA).

> Eles gostam, dei uma avaliação e deixei usar a calculadora. Eles veem a calculadora como algo de outro mundo, mas a dificuldade foi a mesma. Usei para PA (progressão aritmética) e PG (progressão geométrica). Eu queria saber se eles tinham organização, facilitou só nos resultados. (MAGDALENA).

Os dois professores de Matemática brasileiros criticam a falta de estrutura apresentadas nas escolas dificulta o uso de recursos:

> Na escola pública é uma demonstração mais minha, levo meu computador, meu projetor e ensino por isso. Bem limitado, quase ninguém pode comprar calculadora científica. Usei na pública então o Graphmatica, o Cabri Geometre que o governo comprou e enviou. A escola tem um laboratório, mas o uso dele na minha escola não está organizado, tem um laboratório, mas não funciona (MARIO).

> Eu sou leiga nessa parte, e o Estado não oferece ferramentas. São poucos computadores, tínhamos a sala de informática, mas tinha que dividir as turmas, deixar alguns na sala e levar outros não dava certo, por ser um professor. Outros recursos de multimídia como o datashow portátil, não uso por que tenho medo de chegar na hora e causar tumulto nos alunos (MAGDALENA).

A professora de Matemática Alicia comenta que no Uruguai os alunos recebem laptops:

> Trato de usar computador, pois cada aluno tem seu próprio laptop. Uso o Mathgraph que serve para ver funções, para geometria uso o Geogebra. Isso basicamente, não é nada tão criativo, faço apenas com que as coisas fiquem claras. Se um grupo permite fazer algo diferente, eu faço tentativas, trato de ir provando. Tenho tentado muitas coisas, algumas têm funcionado.

3.5. Como ocorreu o processo de implementação curricular e a relação dos professores com os currículos prescritos

A elaboradora Laura resume em poucas palavras uma característica que provoca problemas na implementação e acompanhamento do desenvolvimento do currículo no Brasil: a ausência de políticas públicas permanentes:

> Mas, como é infelizmente comum a prática de descontinuidade das políticas públicas em função da mudança de governos tanto em nível nacional como regionais e também a falta de acompanhamento e de avaliação de ações como essa, não houve nem discussão sobre resultados, nem sobre ajustes nas propostas. Passados alguns anos e comparando com propostas de outros países, considero que o documento brasileiro trouxe sua contribuição para disseminar o debate de ideias no âmbito no currículo. Mas faltou acompanhamento aos professores e avaliação de sua implementação.

Uma elaboradora do currículo uruguaio traz uma reflexão acerca do processo de implementação curricular. Para Mora, os interesses políticos em implementar, com urgência, o novo currículo provocaram uma reação negativa nos docentes.

> Isso foi um sério problema na implementação, foi muito rápido se houvesse planificado tudo num tempo suficiente e com especificações e abaixado a ansiedade dos professores, tal como a distância deles com o currículo, seria melhor. Houve uma decisão política que deveria de estar tudo pronto para 2008. Não deu tempo de ver como se ia apresentar o novo currículo, implementar, o que se referia, imagina que se implementou simultaneamente desde o ano inicial até o ultimo ano da escola.

Houve uma preocupação dos inspetores uruguaios em oferecer cursos presenciais ou à distância aos professores polivalentes:

> A Primária foi um caos, porque os novos programas falavam muito de conteúdos matemáticos, o anterior era superficial. Os professores olhavam o novo plano e não sabiam o que era, avaliavam como algo geral, não sabiam o que tinha que ensinar. No primeiro ano os maestros preocupados com a implementação do programa e fizeram muitas oficinas impulsionados pelos inspetores. (JUAN, professor do Ensino Superior)

> Só cursos virtuais em 2010, antes em 2009, já tinha a plataforma do MEC. Desde 2010, creio se instrumenta o departamento de formação e serviço, especificamente todos têm que fazer curso on-line ou presencial em todo o país. (LUCIA, professora polivalente).

As professoras de Matemática do Uruguai comentam que a implementação dos currículos da escola secundária e *Bachillerato* foi diferente:

> Para cada localidade o inspetor se reúne com os professores de Matemática, claro e apresenta o programa, dá sugestões. Temos uma página e podemos descarregar o programa. É responsabilidade do professor, mas não te dão nada, você busca por sua própria conta! (ALICIA, elaboradora).

> Conheci a mudança curricular checando, mexendo no programa e com os companheiros de trabalho. Não houve formação de professores em 2004 e 2006 não, houve antes, em 1999 e 2000. Em 1999 foi por cursos, com duração de um mês, todos os dias, de 31 de janeiro a 7 de março. Em 1999 o curso foi obrigatório para a reformulação. Os cursos que aparecem ficam a cargo dos docentes. Só houve reformulação do básico (ZULEMA, professora).

Podemos observar uma crítica comum dos profissionais dos dois países quanto à troca imediata do currículo novo pelo antigo. No entanto, não é possível implementar o que alguns entrevistados consideram ideal: a mudança gradativa do currículo antigo para o novo. Os custos para acompanhar a transição dos currículos, antigo e novo, seriam extremos não apenas em termos financeiros, mas os custos operacionais.

Outra singularidade observada é como se dá o controle da implementação do currículo. A verificação de como o currículo está se desenvolvendo em sala de aula cabe aos inspetores no Uruguai:

> Quando faz a visita, ele vai à sala de aula, verifica os registros, as avaliações, tudo com base nisso e faz um informe. Depois de avaliado, o inspetor te faz uma devolutiva. Ele tem um guia de todas as coisas que devem ser avaliadas e em certo ponto te vai dizendo qual sua avaliação. Ele atribui valores e faz comentários do que deve ser melhorado. Se o professor não segue as orientações, da próxima vez que te inspecionar, baixa sua pontuação. Se não seguir as indicações te vão rebaixar. Podem fazer sumária (demissão), vão investigar, revisar a documentação (ALICIA).

Isabela, professora polivalente paulista, comenta que a implementação do currículo novo ocorreu durante o semestre:

> Fomos informados no ano passado em reunião que haveria a mudança. Recebemos o material no segundo semestre, mas era material referente ao primeiro e que estavam preparando um novo material para ser desenvolvido em Matemática, não deu para praticá-lo no 1.º e no 2º bimestre, porque recebemos bem no finalzinho de 2.º bimestre.

A proposta de implementação do projeto para os professores polivalentes que atuam na rede estadual paulista não consistiu em um curso sistematizado, mas em formações a serem realizadas em cada unidade escolar, sob a coordenação dos professores coordenadores da escola:

> Tivemos orientação da coordenadora da escola. Começamos a estudar a apostila do Projeto Educação Matemática. Estudamos no grupo o que seria, depois alguns assuntos específicos e vimos as modificações, as propostas que colocaram, todos ficaram sem saber ao certo como seguir, pois, fazíamos o planejamento no início do ano e usávamos o livro didático, então naquele momento deveríamos deixar o livro e dar conta do projeto. (ISABELA).

O professor universitário brasileiro acompanhou o processo de implementação do currículo na rede estadual do Rio de Janeiro:

> Estou falando do Rio, que conheço muito bem. Há um currículo mínimo, há uma portaria que obriga a implementação do currículo e os professores têm que lançar isso de uma maneira autêntica no bimestre, mostrar quais as probabilidades de que foram

> trabalhadas a partir do currículo. Existem as avaliações em larga escala bimestrais que vão verificar se esse currículo foi realmente implementado e têm fiscais que vão às escolas verificar isso rondando os alunos (FELIPE).

Os profissionais brasileiros comentaram que têm a percepção de que o Professor Coordenador do Núcleo Pedagógico (PCNP) controlam a implementação do currículo em sala de aula:

> O que sentimos é que eram as salas que já sabíamos que tinham professores com mais dificuldades, como professores novos, sem tanto conhecimento do material, essas salas foram observadas pelo professor coordenador e os PCNP com mais rigor. Eles olharam alguns cadernos, conversaram com alunos e depois a coordenadora conversou com esses professores. Mas tem professor que diz que não quer nem saber, que não vai mudar: – Se tiver lei eu mudo! (ISABELA, professora).

A relação dos professores com a mudança no currículo uruguaio provoca reações diversas. Para dois entrevistados uruguaios:

> Acredito que estão divididos: há professores que não se importam com o programa novo, porque continuam com o antigo e tampouco consultam o programa novo e outros que estão interessados em trabalhar com o programa novo, mas tem problemas de como focar bem os temas, sentem falta de informação. (ANGELINA, elaboradora).

> Foi um método que durou pouco, eles tinham preocupação no primeiro ano depois voltavam a fazer o que faziam antes e agora não há problema, mas acho que não estão fazendo coisas diferentes, tampouco preocupados (JUAN, professor de Ensino Superior).

Para Clarita, docente que atua na formação de professores uruguaios, os professores do Ciclo básico não foram muito resistentes em relação às mudanças curriculares, o mesmo não pode dizer da secundária:

> O professorado de Matemática foi resistente à mudança. Principalmente nas mudanças do Bachillerato. No ciclo básico não houve muita resistência, mesmo porque acredito que não houve muita mudança.

Segundo a diretora de uma escola uruguaia pesquisada a resistência dos professores se deve, também, à forma como o currículo foi implementado e por insegurança da equipe docente em desenvolver conteúdos novos. Ailin relata que com o passar dos anos a ansiedade inicial foi substituída por uma calma e preocupação em atingir os resultados:

> Encontro muitos professores com capacitação insuficiente e não têm compreensão para ensinar coisas externas. No início ficaram assustados, preocupados em cumprir. Com o passar dos anos trocaram a mentalidade, estão um pouco mais calmos. Alguns se queixam outros não. (AILIN).

A insegurança também é apontada pela coordenadora de escola brasileira quanto à resistência dos professores:

> Eu não sei se na verdade, por eles estarem passando por esse processo de transição, a insegurança grita mais. É comum que fiquem desestabilizados, ficam confusos,

> porque estava dando certo e o que vai mudar. O fato de saber o porquê traz ansiedade. (CRISTINA).

Entrevistados dos dois países justificam a resistência dos professores como consequência das más condições de trabalho:

> O currículo foi implementado sem mexer nas condições de trabalho. Mesmo que o material fosse excelente ainda teríamos problemas por conta das condições de trabalho e não houve qualquer mudança nas condições de trabalho até hoje (CARLOS, elaborador brasileiro).

> Em geral, há interesse de se trabalhar. Outro problema é se sobrecarregar no trabalho, nós docentes trabalhamos mais de 50 horas por semana e isso faz com que a maioria não queira fazer mais nada! (CLARITA, professora Ensino Superior uruguaia).

A professora de Matemática brasileira Magdalena comenta a resistência dos professores ao material didático produzido entregue aos alunos com o currículo novo:

> Os professores têm resistência ao uso dos caderninhos. Eles deixam a desejar, a maioria dos conteúdos os alunos têm que ter conhecimento prévio e, quando se faz levantamento, eles não se lembram... Eu uso o caderninho, só que trabalho a apostila e livro didático o tempo todo. O livro para introduzir o conteúdo da apostila.

3.6. Como os profissionais da educação veem a influência das avaliações externas na elaboração dos currículos prescritos

No caso do Brasil, a imensa gama de avaliações externas feitas em curtos intervalos de tempo provoca opiniões como a do entrevistado Carlos, que questiona a falta de uso dos resultados coletados nas inúmeras avaliações:

> A avaliação é meio, não é fim, quer dizer, hoje é muito frequente que o governo faça uma avaliação, pode ser do Saresp, de São Paulo, Saeb, ou Prova Brasil. Depois que se publica o resultado, você fica rezando para, na próxima avaliação, o resultado ser melhor... Mas entre uma avaliação e outra avaliação, se continua a fazer as coisas do mesmo jeito.

Na opinião dos professores brasileiros, há influência das avaliações oficiais no desenvolvimento do currículo:

> Essas avaliações vêm trazendo o que temos que trabalhar com alunos. Não podemos fugir disso porque é uma cobrança superior, elas influenciam nos currículos. A gente faz levantamento do Saresp e daí tiramos as competências e habilidades a trabalhar com os alunos. (MAGDALENA).

> A avaliação tá determinando, cuidando do currículo, não deveria ser assim, mas sendo não é ruim, porque infelizmente a gente tem que passar por avaliações e provas. Se uma escola nortear o currículo em função de avaliação, não é ruim. (MARIO).

No caso do Uruguai, a única referência que fazem é ao PISA (*Programme for International Student Assessment*). Os docentes relataram que há uma prova realizada *on-line* para os alunos da escola primária e, por ter participação voluntária, muitos professores não inscrevem seus alunos.

3.7. Como é a influência dos currículos prescritos nos livros didáticos segundo os profissionais de ensino

Um dos níveis de desenvolvimento curricular proposto por Sacristán (2000) se refere a como os professores recebem as recomendações curriculares: especialmente pelos livros didáticos e por outros materiais produzidos para os docentes.

Segundo os elaboradores brasileiros, as mudanças curriculares tinham a intenção de provocar mudanças nos livros didáticos:

> Além disso, pretendia-se que as orientações pudessem nortear a formação inicial e continuada de professores e também orientar a produção de livros e de outros materiais didáticos. O propósito enfim era configurar uma política pública, voltada à melhoria do Ensino Fundamental (LAURA).

A elaboradora do programa uruguaio para o ensino secundário, também autora de livros didáticos, faz o seguinte comentário acerca de possíveis influências das mudanças curriculares nos livros didáticos publicados:

> As editoras pedem que o livro se adapte ao programa vigente. O livro tem que ser recomendado pela inspeção de Matemática para poder incorporá-lo como um livro recomendado ou avaliado pelo Conselho de Educação Secundária. Por um lado, nós sempre aderimos ao programa enquanto aos conteúdos e recomendações, mas sempre colocamos nosso enfoque e ponto de vista. (ANGELINA).

Juan, professor de cursos de formação de docentes uruguaios, comenta que as mudanças nos livros didáticos uruguaios se ateve à organização dos conteúdos:

> Mudaram essencialmente na organização dos conteúdos para parecer, ser similares ao programa. A forma de trabalho, o enfoque já era mais ou menos igual aos livros anteriores. Nos bons livros tinham muitas soluções de problemas, reflexões para esses conteúdos seguiam os programas, falavam de metodologia, já tinham uma metodologia só para resolução de problema.

A mudança nos livros didáticos após a implementação dos PCN é reconhecida pelos professores brasileiros. Os entrevistados destacam o uso da metodologia de resolução de situações-problema nos últimos livros publicados:

> O que lembro, dos livros antes, vinha a técnica operatória e depois situação-problema, tinha adição e os problemas eram todos de adição, não havia mistura e o aluno já sabia o que era de mais e de menos. (ISABELA).

Considerações finais

Como observamos, os entrevistados uruguaios deram maior ênfase ao papel do currículo como uma forma de preparar os alunos para viver em sociedade e atender às necessidades que surgirem. Os entrevistados brasileiros se preocuparam em definir currículo como caminhos a serem percorridos.

Podemos perceber que os professores brasileiros que atuam na Educação Básica não fazem referência aos documentos oficiais nacionais. Apenas se questionados declaram que já leram, mas que não seguem. Os professores uruguaios usam argumentos mais consistentes para comentar o tema obrigatoriedade, principalmente a democratização do acesso ao conhecimento.

Uma singularidade que percebemos na implementação do currículo do Uruguai em comparação ao Brasil é o acompanhamento do que está sendo desenvolvido em sala de aula por parte dos inspetores e dos diretores uruguaios acerca do que está sendo desenvolvido pelo professor.

Para os profissionais os dois países, o tempo destinado à elaboração foi insuficiente para uma discussão curricular mais consistente. A falta de articulação entre as equipes responsáveis por cada etapa do currículo também foi apontada nos dois países. No entanto, a participação dos professores é uma singularidade a ser destacada. No caso do Uruguai, havia representantes dos professores na equipe que elaborou os currículos.

Outra singularidade é a intervenção do governo no currículo. Enquanto no Brasil nenhum dos elaboradores citou controle do governo ou redução da autonomia da equipe responsável pela elaboração dos currículos, no Uruguai a intromissão dos inspetores foi arbitrária e provocou o declínio da participação de membros nas equipes dos diferentes níveis do currículo. No entanto docentes dos dois países declaram que não se sentiram representados na elaboração das mudanças curriculares.

Outro tema analisado são as influências das avaliações externas nos currículos. Percebemos uma singularidade marcante entre as duas nações. É possível inferir que a influência das avaliações ocorre de maneira acentuada nas escolas brasileiras. No caso do Uruguai, como não há um sistema de avaliação obrigatório de abrangência nacional para todos os níveis, o assunto não tem muita repercussão.

A influência do currículo na mudança nos livros didáticos é outra diferença detectada. Para os entrevistados, os livros do Brasil sofreram uma mudança influenciada pela publicação dos PCN. No caso do Uruguai, os entrevistados mencionaram que perceberam uma mudança nos livros, mas não deram a mesma ênfase às mudanças, como boa parte dos entrevistados do Brasil.

A influência dos resultados de pesquisa na elaboração dos currículos é reconhecida pelos profissionais elaboradores dos dois países pesquisados. Observamos indícios de que os professores dos dois países citam diversos recursos metodológicos como: resolução de problemas, história da Matemática, uso da calculadora e softwares, entre outros. Mais uma vez percebemos que o discurso está aquém da prática, pois nos depoimentos percebemos que os usos são restritos, o que revela a compreensão limitada de tal recurso como precursor de aprendizagens.

No Brasil, as entrevistas indicam um uso menor de computadores como consequência da falta de equipamentos nas escolas. Não podemos inferir se este é o único motivo da resistência ao uso, ou por insegurança dos professores com este tipo de recurso.

Referências

Carvalho, E. J. G. *Estudos comparados: repensando sua relevância para a educação*. Tercer Congreso Nacional, Segundo Encuentro Internacional de Estudios Comparados en Educación, Buenos Aires. 2009.

Doll Jr., W. E. *Currículo: uma perspectiva pós-moderna*. Tradução de Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

Ferreira, A. G. *O sentido da educação comparada: uma compreensão sobre a construção de uma identidade*. Educação, Porto Alegre, v. 31, n. 2, p. 124-138, maio-ago. 2008.

Ferrer, F. J. *La educación comparada actual*. Barcelona: Ariel, 2002.

Rico Romero, L. R. *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Sintesis, 1997.

Rosenbaum, L. S. *Estudo comparativo sobre a Educação Matemática presente em currículos: Brasil e Uruguai*. Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014. 403 p.

Sacristán, J. G. *O currículo: uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: ArtMed, 2000.

Souza, D. B.; Martínez, S. *A. Educação comparada: rotas de além-mar* . 2009. São Paulo: Xamã, 2009.

Autor: Luciane Santos Rosenbaum - Doutora em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - e-mail: lusrosenbaum@terra.com.br

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 186-200

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Los maestros y sus actitudes hacia las Matemáticas: un estudio sobre Educación Infantil y Primaria en España
Teachers and attitudes towards mathematics: a study in Preschool and Elementary Education in Spain

Ariadna Gómezescobar Camino, Raquel Fernández Cézar

Fecha de recepción: 03/07/2017
Fecha de aceptación: 14/11/2017

Resumen	Se presentan los primeros resultados de una investigación sobre las actitudes hacia las Matemáticas de maestros españoles de Educación Infantil y Primaria. La muestra se compone de 53 maestros. Se emplea un cuestionario, y se analiza la posible influencia de las variables sexo (s), etapa educativa (ee), pertenencia a una comunidad matemática en red (pcr), años de ejercicio de la profesión (ae) y categoría profesional (cp). Se encuentra una actitud positiva en la actitud total y en los distintos factores. Se aprecia que no existe relación con s, o ee, pero sí con los ae, la cp, la pcr. Se pretende continuar el estudio ampliando la muestra y comparando con los estudiantes de las facultades de educación. **Palabras clave**: actitudes, Matemáticas, maestros, Educación Infantil, Educación Primaria.
Abstract	This report shows the first stage results of an investigation about attitudes towards mathematics of Preschool and Elementary Education Spanish teachers. The sample consists of 53 teachers. A questionnaire is used and the possible influence of the variables sex (s), educational stage (ee), belonging to a mathematical network community (pcr), years of experience in the profession (ae) and professional category (cp) is analyzed. It is found a positive attitude for the total one, and for the different factors. There is not relationship with s or ee, but there is with ae, cp and prc. It is planned to continue the study by increasing the sample and comparing it with students of the faculty of education. **Keywords**: attitudes, Mathematics, teachers, Preschool, Elementary Education.
Resumo	Apresentamos os primeiros resultados de una investigação sobre as atitudes em relação à Matemática de professores de Educação Pré-escolar e Ensino Básico. A amostra é formada por 53 indivíduos. É usado um questionário, e analisa-se a possível influência das variáveis sexo (s), nível de ensino (ee), pertença a uma comunidade matemática em rede (pcr), anos de experiência profissional (ae) e situação profissional (cp). Encontra-se uma atitude positiva na atitude total e nos diferentes fatores. Aprecia-se que não existe relação com s ou ee, mas

	sim com ae, cp e pcr. Pretende-se continuar o estudo ampliando a amostra e comparando com os estudantes das facultades de educação. **Palavras-chave:** atitudes, Matemática, professores, Educação Pr[e-escolar, Ensino Básico.

1. Introducción

Son muchos los autores que reconocen que las Matemáticas desempeñan un papel importante en la vida de las personas. Sin embargo, para Mato y de la Torre (2010), las Matemáticas también suponen un problema en el aprendizaje para muchos estudiantes. Bazán y Aparicio (2006) señalan la preocupación tanto por el inadecuado rendimiento de los alumnos como por la apatía hacia la enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Matemáticas del alumnado y del profesorado.

La instrucción práctica es un mediador entre las concepciones del profesor y el aprendizaje del alumno (Jong, Hodges, Royal y Welder, 2015). Por eso las concepciones son un elemento muy importante. Tan es así, que Nortes Martínez-Artero y Nortes Checa (2013), entre otros autores, consideran que uno de los objetivos de la educación es desarrollar ciertas actitudes, y que incluso este aspecto es más importante que adquirir conocimientos.

El National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM, 1989), distingue dos grandes categorías en lo que a actitudes matemáticas se refiere: actitudes hacia las Matemáticas, y actitudes Matemáticas. Las primeras se ven más afectadas por la componente afectiva, y las segundas, por la cognitiva. Actualmente se sabe que ambas están interconectadas en nuestro cerebro y que pueden inhibirse o retroalimentarse (Young, Wu, y Menon, 2012; Wu, Amin, Barth, Malcarne, y Menon; 2012).

Otros estudios previos, como el trabajo de Fernández-Cézar y Aguirre Pérez (2010), se centran en recoger las actitudes hacia las Matemáticas de estudiantes del grado de maestro. Sin embargo, en este trabajo se estudian los realmente responsables del aprendizaje de Matemáticas en las aulas de Educación Infantil y Primaria en España: docentes en activo, correspondientes a alumnado de las edades de 3 a 5 años y de 6 a 12 años. Nos parece muy importante este colectivo porque en estas etapas es donde el alumnado tiene su primer contacto con las Matemáticas, y son estos los primeros docentes que irán conformando la visión de las Matemáticas de sus alumnos.

Mato y de la Torre (2010) destacan que la influencia de los profesores en la formación de actitudes de sus alumnos hacia las Matemáticas es un hecho contrastado por varias investigaciones. Estos mismos autores concluyen que las actitudes del alumnado frente a la Matemática pueden afectar al aprendizaje de esta materia. Sánchez, Segovia y Miñán (2011) señalan una considerable influencia de las actitudes hacia las Matemáticas de los docentes en el rendimiento de su alumnado.

Por lo tanto, nos enfrentamos a la siguiente dicotomía: la forma de aprender puede estar relacionada con las actitudes hacia las Matemáticas del alumnado, pero a su vez, la forma de enseñar también puede estar condicionada por la visión de las Matemáticas por parte del profesorado.

Por ello se plantea este estudio de las actitudes hacia las Matemáticas de maestros en ejercicio como parte de una investigación más amplia. En ella se pretende estudiar si las actitudes hacia las Matemáticas de estos maestros están relacionadas con las estrategias de enseñanza y estas a su vez con el rendimiento de los alumnos.

2. Revisión de la bibliografía

Son varios los autores que relacionan la efectividad y calidad de la enseñanza de los maestros con sus actitudes hacia las Matemáticas (Bishop y Nickson, 1983; Aiken, 1970; Larson, 1983; Ernest, 1988; Bülent y Erden, 2006; Onyango, 2012). Wilkins (2008) demuestra la fuerte correspondencia entre creencias y actitudes, la cual se extiende a la práctica docente. A su vez, Beilock, Gunderson, Ramirez y Levine (2010) reportan que influye negativamente la ansiedad ante las Matemáticas de unas maestras en los logros de sus alumnas. Y en la misma línea que esta investigación, pero en el lado opuesto, encontramos la de Bülent y Erden (2006), que muestra que las alumnas son más exitosas cuando sus maestros tienen una actitud fuerte y positiva hacia las Matemáticas.

Muchos profesores advierten en las actitudes negativas hacia las Matemáticas de su alumnado uno de los principales problemas a la hora de transmitir conocimientos (Auzmedi, 1992). Sweeting (2011) indica en su tesis que las experiencias en la escuela primaria suponen una influencia crítica en las actitudes de adultos que puedan convertirse en maestros y maestras.

Por consiguiente, la influencia de las actitudes tanto en la enseñanza, como en el aprendizaje de las Matemáticas, justifica la importancia del conocimiento de estas.

> Es muy importante avanzar en el conocimiento de la ansiedad hacia las Matemáticas, así como en las estrategias que podrían usarse para reducirla, que pasarán, sin duda alguna, por revisar e innovar la enseñanza de las Matemáticas y la calidad del buen profesor (Sánchez, Segovia y Miñán, 2011, p. 309-310).

Por lo tanto, detectar una actitud ansiosa hacia las Matemáticas es clave para poder actuar sobre ella.

Valle et al. (2016) estudian las actitudes hacia las Matemáticas en alumnado de Primaria. Otros autores (Akey, 2006; Mato y De la Torre, 2010; Zakaria y Nordin, 2008) trabajan con las actitudes de alumnado de Educación Secundaria, o las relacionan con la tecnología (Sánchez Ruiz y Ursini, 2010).

También existen algunas investigaciones sobre actitudes hacia las Matemáticas de alumnado universitario (Carmona Márquez, 2004; Nortes Martinez-Artero y Nortes Checa, 2014; Maz-Machado, León-Mantero, Casas, y Renaudo, 2015), algunos centrados en estudiantes de grado de maestro de Educación Primaria (Fernández-Cézar y Aguirre Pérez, 2010; Nortes Checa et al, 1992; Nortes Martínez-Artero y Nortes Checa, 2013, 2014; Maz-Machado, León-Mantero, Casas, 2014; Caballero, Blanco, y Guerrero, 2007; Sánchez, Segovia y Miñán, 2011).

Sin embargo, pocos estudios analizan las actitudes hacia las Matemáticas del profesorado que ya está en ejercicio (Sayers, 2007; Thiel, 2010; Sweeting, 2011). Roca (2007) estudia este colectivo, pero analiza las actitudes hacia una parte de las Matemáticas: la estadística. Las compara entre estudiantes y maestros pero no se encuentran investigaciones de este tipo sobre profesorado en activo y sus actitudes hacia las Matemáticas en el entorno iberoamericano.

El objetivo del estudio es doble. En primer lugar, se pretende determinar la actitud hacia las Matemáticas del profesorado de Educación Infantil y Primaria, cuyo alumnado en el contexto español figura entre 3 y 5 años para Educación Infantil y entre 6 y 12 años para Educación Primaria. En segundo lugar, estudiar la relación con los factores sexo, etapa en la que imparten docencia (EI o EP), categoría profesional (funcionariado o interinato), años de ejercicio de la profesión y pertenencia o no a una comunidad de aprendizaje en red.

3. Método

La metodología es cuantitativa y como herramienta se emplea el cuestionario de actitudes de Auzmendi (1992). Este consta de 25 ítems de respuesta en escala tipo Likert con valores del 1 al 5, siendo:

1: totalmente en desacuerdo

2: en desacuerdo

3: neutral, ni en acuerdo ni en desacuerdo

4: de acuerdo

5: totalmente de acuerdo

Los ítems 2, 5, 7, 10, 12, 15, 16, 17, 22 y 25 están expresados en negativo. Por lo tanto, los valores se han invertido para su análisis, que se realiza con el paquete estadístico SPSS v.22.

El cuestionario incluye cinco factores, que nosotros llamaremos dominios. Cada uno tiene asignado un número determinado y diferente de ítems. Es por ello que los rangos de cada factor varían, como se ve en la tabla 1.

Dominio	Ítems	Rango
Ansiedad	2*+ 3 + 7* + 8 + 12* + 13 + 17* + 18 + 22*	0-45
Agrado	4 + 9 + 14 + 24	0-20

Utilidad	1 + 6 + 15* + 16* + 19 + 21	0-30
Motivación	5* + 10 * + 25*	0-15
Confianza	11 + 20 + 23	0-15

Tabla 1. Dominios, ítems y rangos. *Valores de ítems formulados en negativo

El rango total de la puntuación de actitudes se situaría, pues, entre 0 y 125.

La muestra consta de 53 docentes en activo de los que se han recogido los siguientes datos personales: sexo, años de ejercicio de la profesión, etapa en la que imparten docencia (Educación Infantil o Primaria), categoría a la que pertenecen (funcionariado, personal que aprobó una oposición y tiene relación permanente con la administración pública, o interinato, personal contratado temporal de la misma administración) y la pertenencia o no a una comunidad de aprendizaje en red. En la tabla 2 se detalla el número de participantes de cada uno de los subgrupos considerados. Téngase en cuenta en la interpretación de la tabla 2 que todos los maestros analizados pertenecen a la misma comunidad en red: "OAOA", Otros Algoritmos para la Operaciones Aritméticas, y que los totales que se indican para cada factor de la muestra pueden no ser iguales dado que los datos que se solicitaban en la encuesta no fueron contestados en su totalidad.

Factores	Categorías por factor	N
Sexo (N=51)	Mujer	38
	Hombre	13
Años de ejercicio (N=52)	>15 años	31
	<15 años	21
Etapa(N=48)	Ed. Infantil (3-5 años)	11
	Ed. Primaria (6-12 años)	37
Categoría profesional (N=50)	Funcionariado	45
	Interinato	5
Comunidad matemática en red (N=53)	Pertenencia	32
	No pertenencia	21

Tabla 2. Subgrupos considerados en base a datos personales en la muestra

4. Resultados

Se analiza en primer lugar la normalidad de las respuestas de la muestra estudiada, que aparece en la figura 1. Se consideran las respuestas distribuidas normalmente, con coeficientes de asimetría y curtosis dentro del intervalo esperado [-2, 2], siendo 0,513 y 0,471, respectivamente.

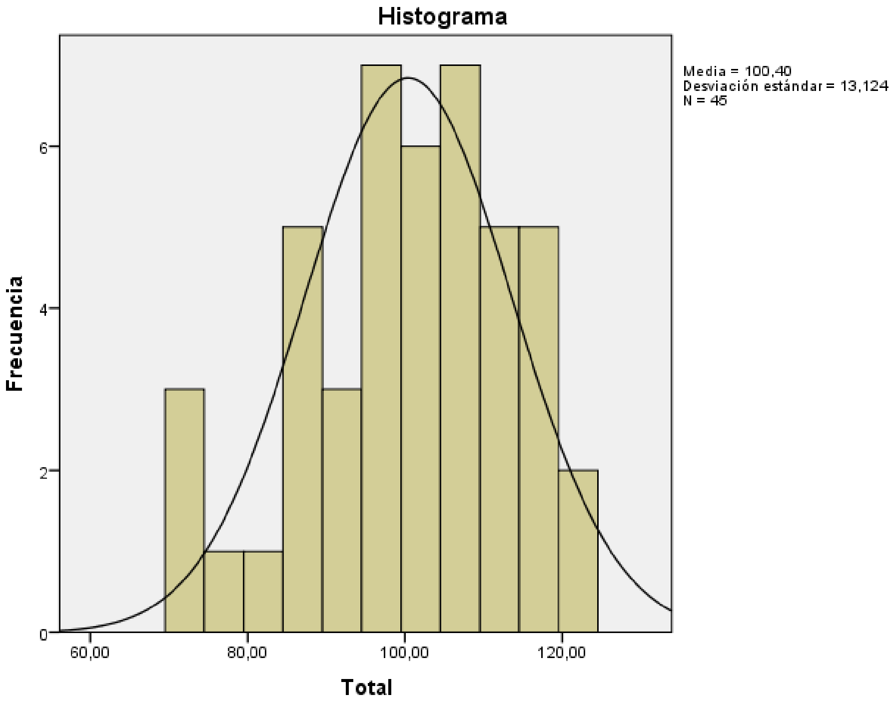


Figura 1. Histograma de frecuencias de actitud total

La tabla 3 muestra la media total y para cada uno de los dominios contemplados en el cuestionario de Auzmendi: ansiedad, agrado, utilidad, motivación y confianza.

MEDIAS	Auzmendi (1992)	Fernández-Cézar y Aguirre Pérez (2010)	Nortes Martínez-Artero y Nortes Checa (2013)	Muestra
Total	85,68	75,36	77,86	100,4
Ansiedad	31,1	25,7	25,95	36,46
Agrado	10,32	11,59	10,18	16,39
Utilidad	20,38	17,71	19,62	22,77
Motivación	11,99	9,51	10,91	12,37
Confianza	12,59	10,86	11,4	12,22

Tabla 3. Medias de los estudios

Tanto la normalidad como el tamaño de la muestra justifican una comparación de medias con un contraste t de Student de muestras independientes con varianzas diferentes. Dicha comparación revela que estadísticamente las medias son iguales tanto para la actitud total como para los dominios, excepto en agrado ($p<0.05$).

4.1. Actitud y factores considerados en la muestra

Se analiza la posible relación entre la actitud total y los dominios con cada uno de los factores: sexo, etapa educativa, categoría, pertenencia a la comunidad de aprendizaje en red y años de ejercicio como docente.

4.1.1. Sexo y etapa educativa

No existe diferencia significativa entre las medias para las variables sexo o etapa.

4.1.2. Categoría

Con una significación de 0,05, los maestros interinos superan en 1,2 puntos a los funcionarios solo en la media de agrado.

4.1.3. Pertenencia a una comunidad de aprendizaje en red

Respecto a la pertenencia a la comunidad de aprendizaje en red, los miembros de ésta superan a los que no forman parte de dicha comunidad tanto en el actitud total como en cada uno de los dominios ($p<0,05$) en los que Auzmendi divide las actitudes hacia las Matemáticas (tabla 4).

	Comunidad matemática	
	Sí pertenece	No pertenece
Ansiedad	37,93	33,83
Agrado	18,21	13,29
Utilidad	23,88	22,77
Motivación	12,91	11,35
Confianza	12,78	11,17
Total	106,03	90,19

Tabla 4. Medias para la variable pertenencia a una comunidad matemática

En la tabla 5 se expone la comparación de las submuestras atendiendo a la pertenencia o no a la comunidad matemática, con la muestra de referencia de Auzmendi. Aplicando un contraste t de Student, se observan diferencias significativas de medias para los dominios agrado y confianza.

		Auzmendi	Submuestra
Submuestra comunidad matemática	Agrado	10,32	18,21
Submuestra no comunidad matemática	Confianza	12,59	11,18

Tabla 5. Medias para la submuestra de pertenencia a la comunidad matemática

4.1.4. Años de ejercicio de la profesión

Por último, los años que llevan ejerciendo los maestros (tabla 6) también supone variaciones en la media de la actitud total y también para los dominios ansiedad y agrado ($p<0.05$).

	Años de ejercicio de la profesión	
	0-15 años	15 años <
Ansiedad	38,33	35,1
Agrado	18,16	15,15
Total	104,79	97,19

Tabla 6. Medias para la variable años de ejercicio de la profesión

4.2. Relación entre dominios

Para los dos dominios que han presentado diferencias significativas de medias, ansiedad y agrado, se emplea un modelo de regresión lineal con una significación menor del 0,05:

Ansiedad = 20,19 + 0,99 Agrado

Agrado = 0,74 Confianza + 0,28 Utilidad + 0,15 Ansiedad

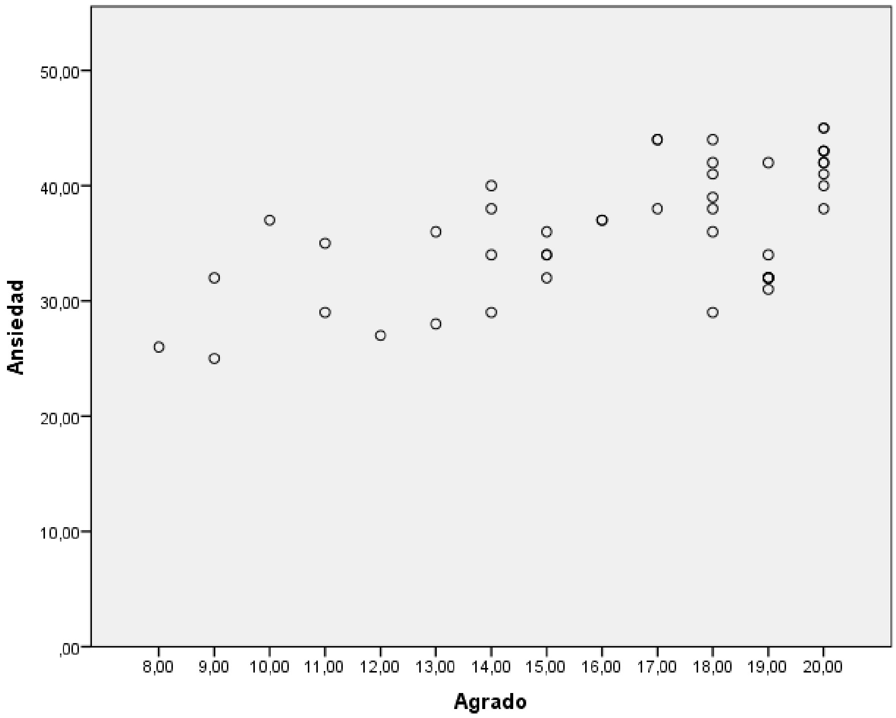


Figura 2. Gráfico de dispersión agrado-ansiedad

Se advierte que la ansiedad está fuertemente relacionada con el agrado, pero a su vez, el agrado no depende exclusivamente de la ansiedad, sino también de la confianza, seguida de la utilidad.

5. Discusión

Por lo general, las puntuaciones medias de la muestra (tabla 3) suelen ser superiores a las de Auzmendi. La media total de la muestra (100,4) se sitúa en el percentil 80 de la muestra de la autora.

Las medias de Fernández-Cézar y Aguirre Pérez (2010) y de Nortes Martínez-Artero y Nortes Checa (2013) para futuros docentes de Educación Primaria también son más bajas que las de nuestra muestra. El hecho de que nuestras medias sean más altas puede deberse a la propia naturaleza de las muestras, ya que la de Auzmendi está formada por alumnos de BUP (en el antiguo sistema educativo español, alumnado de 14 a 16 años) y COU (alumnado de 17 años), la de Fernández-Cézar y Aguirre Pérez y Nortes Martínez-Artero y Nortes Checa por alumnos de magisterio (alumnos mayores de 18 años). Nuestra muestra, sin embargo, la componen docentes en activo.

Dicha comparación revela que estadísticamente las medias son iguales tanto para la actitud total como para los dominios, excepto para agrado ($p<0.05$). La media de agrado en la muestra supera en 6 puntos a la de Auzmendi.

Respecto a la posible relación entre actitud total y los distintos dominios estudiados respecto de cada factor (sexo, etapa educativa, categoría, pertenencia a la comunidad de aprendizaje en red y años de ejercicio como docente), se observa que no existe diferencia significativa de medias para los factores sexo o etapa. Nortes Martínez-Artero y Nortes Checa (2013) descubren una actitud hacia las Matemáticas más positiva en hombres que en mujeres. Sin embargo, señalan que no existe unanimidad sobre que los hombres tengan una mejor actitud hacia las Matemáticas que las mujeres o viceversa. Nuestra muestra coincide con la de Fernández-Cézar y Aguirre Pérez (2010) respecto a la no influencia del género en las actitudes observadas. Esto lo argumentaba Auzmendi (1992) planteando que las actitudes menos favorables hacia las Matemáticas no dependen del sexo sino de la preparación previa.

Respecto a la etapa educativa en la que trabajan, no se han encontrado estudios sobre profesorado de Educación Infantil con el que comparar, por lo que consideramos interesante ahondar en este aspecto para obtener conclusiones a futuro.

En lo relativo a la categoría profesional, es sólo en el dominio agrado donde los interinos superan a los funcionarios. Sin embargo, cabe destacar, la baja presencia de interinos en la muestra; 5 interinos/as frente a 45 funcionarios/as (ver tabla 2).

El dominio agrado, según Auzmendi (1992), hace referencia al disfrute que provoca el trabajo matemático. El mayor disfrute del trabajo matemático por parte de los interinos puede deberse a su mejor preparación previa, como también indicaba Auzmendi para argumentar las diferencias que observaba en sus resultados respecto del sexo. Aunque puede haber interinos que tengan muchos años de docencia a sus espaldas, según nuestros resultados, si se asume que un funcionario tiene más años de experiencia que un interino, entonces los maestros más experimentados tendrían una menor tasa de agrado (véase apartado 'Años de ejercicio de la profesión').

Los miembros de la comunidad de aprendizaje en red superan tanto en el total, como en cada uno de los dominios a los que no son miembros. De todos los dominios, nos parece clave la ansiedad. La RAE define ansiedad como:

> 1. f. Estado de agitación, inquietud o zozobra del ánimo.
>
> 2. Med. Angustia que suele acompañar a muchas enfermedades, en particular a ciertas neurosis, y que no permite sosiego a los enfermos.

Por otro lado, la propia Auzmendi define ansiedad como "sentimiento de ansiedad, temor que el alumno manifiesta ante la materia de matemáticas" (Auzmendi, 1992, p. 86)

Aunque lingüísticamente 'ansiedad' a menudo pueda tener un sentido negativo, no es el caso para esta encuesta. Véase como ejemplo la pregunta 3 "Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto". En la escala Likert un 5 que correspondería a "Totalmente de acuerdo" y por tanto, una puntuación alta en ansiedad, supone que el sujeto no siente ese temor al que se refiere Auzmendi en su definición de ansiedad.

Esto contradice la afirmación de Nortes Martínez-Artero y Nortes Checa que plantean que

> "Hay que notar que el factor Ansiedad está considerado en sentido negativo, ya que la ansiedad alta hacia las Matemáticas es contraria a una actitud positiva hacia estas." (Nortes Martínez-Artero y Nortes Checa, 2013, p. 53)

Está claro en nuestros resultados que la variable 'pertenencia a una comunidad matemática' influye positivamente en todos los ítems que se miden. Podría decirse que la dinámica de esta comunidad, consistente en la colaboración entre el profesorado y el amor por enseñar, conduce a una visión más favorable de estas. Pero, ¿cabría admitir que esto está influyendo en el cómputo total? Al volver a situar las submuestras respecto a la muestra de Auzmendi (tabla 5), aparecen diferencias significativas de medias para el dominio agrado en el caso de pertenencia a la comunidad matemática. En el caso de la submuestra de no pertenencia, la media de confianza es menor que en la de Auzmendi.

Podría pensarse que cuanto mayor experiencia, mayor afianzamiento de conocimientos y por lo tanto una actitud más favorable. Sin embargo, los resultados obtenidos con esta muestra contradicen esta hipótesis, ya que los maestros con menos años de experiencia de la muestra difieren positiva y significativamente en ansiedad, agrado y en actitud total respecto a los más antiguos. Cabría establecer un paralelismo con el estudio de actitudes hacia la estadística de Estrada (2007) y pensar que la actitud global hacia las Matemáticas del profesorado empeore debido a dificultades encontradas en los alumnos o en ellos mismos.

La relación entre dominios indica que la ansiedad está relacionada con el agrado, y éste a su vez, además de la ansiedad, también depende de la confianza y de la utilidad. Podría decirse que cuando las Matemáticas producen agrado, se disminuye la ansiedad hacia éstas. Por otro lado, cuando se está confiado frente a las Matemáticas, se tiende a pensar que son útiles, nos generan poca ansiedad, y se obtiene más agrado.

6. Conclusiones

La media de actitud total de toda la muestra no presenta diferencia estadísticamente significativa respecto al estudio de Auzmendi más que en agrado. La media de actitud total de la muestra se sitúa en el percentil 80 de la reportada por Auzmendi.

Respecto a los factores estudiados en este trabajo, no existe diferencia significativa entre las medias para los factores sexo o etapa educativa. En relación a la categoría profesional, los maestros pertenecientes a interinato superan en agrado a los pertenecientes a funcionariado.

Por otro lado, los miembros de la comunidad matemática presentan una actitud total superior a aquellos que no pertenecen a esta. En los valores de cada uno de los dominios (ansiedad, agrado, utilidad, motivación y confianza) están por encima de los docentes que no forman parte de dicha comunidad.

Centrándonos en la antigüedad en el cargo de los docentes de la muestra, los que llevan ejerciendo más de 15 años tienen una puntación más baja en la actitud total, y también muestran menos ansiedad y agrado.

Y por último, en cuanto a los dominios, la ansiedad está relacionada con el agrado; sin embargo, el agrado está relacionado con la ansiedad, y además con la utilidad y la confianza.

6. Bibliografía

Aiken, L. R. (1970). Attitudes toward mathematics. *Review of educational research*, 40(4), 551-596.
Akey, T. M. (2006). *School Context, Student Attitudes and Behavior, and Academic Achievement: An Exploratory Analysis*. MDRC.

Asale, R. (2016). *Diccionario de la lengua española - Edición del Tricentenario*. *Diccionario de la lengua española*. Recuperado el 5 de abril de 2016 de http://dle.rae.es/

Auzmendi Escribano, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas media y universitaria*. *Características y medición.* Editorial Mensajero. España.

Bazán, J. L., Aparicio, A. S. (2006). Las actitudes hacia la Matemática-Estadística dentro de un modelo de aprendizaje*. Revista Semestral del Departamento de Educación ,* XV(28), 1-12.

Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G., y Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *107*(5), 1860-1863.

Bishop A.J., y Nickson M. (1983). *A Review of Research in Mathematical Education,* Part B, NFER-Nelson, Windsor.

Bülent, A. L. C. I., y Erden, M. (2006). The Effects Of Primary School Teachers' Attitudes Towards The Mathematics Achievement Forth Grade Students By Gender. *Journal of Education Faculty*, *8* (1), 13-21.

Caballero, A., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2007). Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación.* XI Simposio de la SEIEM (41-52).

Carmona Márquez J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística, *Statistics Education Research Journal*, 3(1), 5-28. http://www.stat.auckland.ac.nz/serj

Fernández-Cézar, R., y Aguirre Pérez, C. (2010). Actitudes iniciales hacia las matemáticas de los alumnos de grado de magisterio de Educación Primaria: Estudio de una situación en el EEES. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 23, 107-116.

Ernest P. (1988). *Proceedings of the 12th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, en A. Borbas Ed. Veszprem, Hungría, Vol. 1, 288-295.

Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la Estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio, en *M. Camacho, -P. Flores y P. Bolea (Eds.), Actas del XI Simposio de la SEIEM,* Santa Cruz de Tenerife, España (121-140).

Jong, C., Hodges, T. E., Royal, K. D., y Welder, R. M. (2015). Instruments to Measure Elementary Preservice Teachers' Conceptions: An Application of the Rasch Rating Scale Model. *Educational Research Quarterly*, *39*(1), 21.

Larson, C. N. (1983). Teacher Education: Techniques for Developing Positive Attitudes in Preservice Teachers. *Arithmetic teacher*, 31(2), 8-9.

Mato, M. D. y De la Torre, E. (2010). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. *PNA, 5*(1), 197-208.

Maz-Machado, A., León-Montero, C.M., Casas, J.C. y Renaudo, J. (2015) Attitude towards Mathematics of Computer Engineering Students. *British Journal of Education*, *Society and Behavioural Science*, 8, 127-133.

Maz-Machado, A., León-Mantero, C., Casas, J.C. (2014) Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes del grado de primaria. *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 597). Salamanca: SEIEM

National Council of Teachers of Mathematics. Commission on Standards for School Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*.

Nortes Martínez-Artero, R. y Nortes Checa (2013). Actitud hacia las Matemáticas en futuros docentes de primaria y de secundaria. Edetania, 44, 47-76, ISSN: 0214-8560

Nortes Martinez-Artero, R. y Nortes Checa, A. (2014). ¿Tienen ansiedad hacia las matemáticas los futuros matemáticos. *Profesorado: Revista de curriculum y formación del profesorado*, *18*(2), 153-170.

Onyango, J. A. (2012). A study of the relationship between teachers' attitudes towards mathematics and pupils achievement in mathematics in Kisumu municipal primary schools Kisumu district-Kenya (Tesis doctoral). Kenyatta University, Kenia.

Sánchez, J., Segovia, I. y Miñán, A. (2011). Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de Educación Primaria. *Revista de Curriculum y Formación del Profesorado,* *15*(3), 297-312. http://www.ugr.es/local/recfpro/rev153COL6.pdf.

Sánchez Ruiz, J.G., y Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 303-318.

Sayers, J. (2007) Primary teachers' attitudes towards and beliefs about mathematics teaching: the collective culture of one English primary school. Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5) Proceedings, Larnaca, Cyprus, 22-26 February 2007.

Sweeting, Kylie (2011). *Early years teachers' attitudes towards mathematics.* (Tesis doctoral).Queensland University of Technology, Queensland.

Thiel, O. (2010). Teachers' attitudes towards mathematics in early childhood education. *European Early Childhood Education Research Journal*, *18*(1), 105-115.

Valle, A., Regueiro, B., Piñeiro, I., Sánchez, B., Freire, C., y Ferradás, M. (2016). Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de Educación Primaria: Diferencias en función del curso y del género. *European Journal of Investigation in Health*, *6*(2), 119-132.

Wilkins, J. L. M. (2008). The relationship among elementary teachers' content knowledge, attitudes, beliefs, and practices. *Journal of Mathematic Teacher Education, 11* (2), 139-164.

Wu, S., Amin, H., Barth, M., Malcarne, V., y Menon, V. (2012). Math anxiety in second and third graders and its relation to mathematics achievement. Frontiers in psychology, 3, 162.

Young, C. B., Wu, S. S., y Menon, V. (2012). The neurodevelopmental basis of math anxiety. *Psychological Science*, 23(5), 492-501.

Zakaria, E., y Nordin, N. M. (2008). The Effects of Mathematics Anxiety on Matriculation Students as Related to Motivation and Achievement. Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education, 4(1).

Autores:

Gómezescobar Camino, Ariadna: Profesora Asociada en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Educación de Toledo (UCLM). Doctoranda en Investigación en Humanidades, Artes y Educación en la UCLM. Graduada en Magisterio de Educación Primaria. Ingeniero Superior Informático. Máster en Profesor de E.S.O. Email: ariadna.tic@gmail.com. ORCID: 0000-0001-5104-6269

Fernández Cézar, Raquel: Departamento de Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad de Castilla La Mancha. Ha investigado e investiga sobre el dominio afectivo en la enseñanza-aprendizaje de las Ciencias y las Matemáticas, tanto de profesorado como de alumnado. Email: raquel.fcezar@uclm.es. ORCID: 0000-0002-9013-7734

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 201-217

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Ensino de Probabilidade: contribuições de um jogo didático

Naiara Aparecida Ribeiro, Simone Lucas, Willian Damin, Hevyllyn de Assis dos Santos

Fecha de recepción: 16/08/2017
Fecha de aceptación: 23/10/2017

Resumen	El objetivo de este artículo es presentar las posibles contribuciones de un juego didático como organizador previo para el aprendizaje significativo del contenido de probabilidad, de acuerdo a Teoría da Aprendizaje Significativo de Ausubel. La aplicación del juego fue realizada con una clase del segundo año de la Escuela secundaria de una Escuela Estadual del Norte del Paraná, Brasil. Se clasifica esa investigación en cuanto a la finalidad, como aplicada, pues fue realizada de la sala de aula con la participación directa de los investigadores y los alumnos. Los resultados encontrados apuntam a que el organizador previo colaboró con el aprendizaje significativo del contenido de Probabilidad. **Palabras clave**: Probabilidad. Aprendizaje significativo. Enseñanza de Matematica. Escuela secundaria.
Abstract	The purpose of this article is to present possible contributions of a didactic game as a previous organizer for meaningful learning of probability content, according to Ausubel's Theory of Meaningful Learning. The application of the game was carried out with a second-year high school class from a State School in the North of Paraná, Brazil. This research is classified as the purpose, as applied, since it was carried out in the classroom with the direct participation of the researchers in the students. The results found that the previous organizer used the collaborated with significant learning of Probability. **Keywords**: Probability. Meaningful learning. Teaching of mathematics. High School.
Resumo	O objetivo deste artigo é apresentar as possíveis contribuições de um jogo didático como organizador prévio para a aprendizagem significativa do conteúdo de probabilidade, segundo a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel. A aplicação do jogo foi realizada com uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do Norte do Paraná, Brasil. Classifica-se essa pesquisa quanto à finalidade, como aplicada, pois, foi realizada em sala de aula com a participação direta dos pesquisadores e dos alunos. Os resultados encontrados apontam que o organizador prévio utilizado colaborou com a aprendizagem significativa do conteúdo de Probabilidade. **Palavras-chave:** Probabilidade. Aprendizagem Significativa. Ensino de Matemática. Ensino Médio.

1. Introdução

A sociedade a qual os alunos estão inseridos está em constante evolução, por isso, devem estar preparados para lidar com as mudanças decorrentes deste movimento e, um dos objetivos da escola que contribui com isso é a formação de cidadãos críticos e capazes de viver em sociedade.

Para que se tenha a formação da criticidade é necessário que os alunos participem de atividades que proporcionem o seu desenvolvimento. Assim, ensinar vai muito além de demonstrar regras e algoritmos de resolução, transcende o ato de explicar ao aluno os conhecimentos historicamente adquiridos pela sociedade. O professor antes de tudo deve ser um educador e não um simples reprodutor de informações, pois educar passa pelo processo de formação do cidadão que capacita os alunos a trabalharem com situações cotidianas de maneira ativa e pensante.

Entende-se que nessa perspectiva, a teoria da aprendizagem significativa, que tem sua ideia central baseada na compreensão da forma e do processo com que o aluno aprende com significado, ou seja, a forma com que o aluno traz para si significações do que lhe foi exposto e armazenar esse conhecimento em sua estrutura cognitiva, de forma a aprender significativamente “Essa teoria propõe explicar os mecanismos internos que ocorrem na mente humana com relação ao aprendizado e a estruturação do conhecimento” (Brum & Silva, 2015, p. 16).

No contexto da aprendizagem, o conteúdo de Probabilidade pode contribuir para a formação de criticidade, com a interpretação de informações, pois, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles.“As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis)” (Brasil, 1998, p. 52).

Tendo em vista a importância do conteúdo de probabilidade e o entendimento da aprendizagem significativa, um material didático introdutório pode contribuir para o processo de assimilação deste tema, com base nos conhecimentos prévios adquiridos por alunos participantes da pesquisa.

Assim, o objetivo deste artigo é apresentar as possíveis contribuições de um jogo didático[1] como organizador prévio para a aprendizagem significativa do conteúdo de probabilidade, no segundo ano do Ensino Médio, na forma de integrar novas ideais aos conceitos subsunçores, servindo como ponte para que os alunos aprendam o conteúdo proposto. Acredita-se que os alunos em contato com um material introdutório, apresentado antes do conteúdo, terão melhores condições para assimilar novos conteúdos relacionados com a probabilidade.

[1] Entende-se o jogo como um recurso didático para o ensino de Matemática, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Assim, utilizou-se o termo jogo didático e bingo didático na perspectiva desse documento orientador.

2. A Teoria da Aprendizagem Significativa

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) denotam que a aprendizagem pode ocorrer de forma mecânica ou significativa. Segundo esses autores a aprendizagem mecânica ocorre quando as associações que os alunos têm entre a nova aprendizagem e a já existente são fracas. Nesse caso, a nova informação não se associa adequadamente aos conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva do aluno. Moreira e Masini (2001, p.18), definem a aprendizagem mecânica “como sendo a aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma interação com conceitos relevantes na estrutura cognitiva. Nesse caso, a nova informação é armazenada de maneira arbitrária”.

Já a aprendizagem significativa ocorre quando a associação entre o conhecimento já existente e o novo são fortes e claras. “A aprendizagem significativa ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar de forma não arbitrária e substantiva (não literal) uma nova informação a outras com as quais o aprendiz já esteja familiarizado” (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1980, p. 23).

De acordo com Moreira e Buchweitz (1993), quando a aprendizagem vai se tornando significativa, os conhecimentos pré-existentes na estrutura cognitiva do aluno, vão se tornando cada vez mais elaborados e mais eficientes na função de servir de ancoragem para as novas informações a serem apresentadas.

Quando ocorre a aprendizagem significativa, a estrutura cognitiva do aluno é modificada e alterações relevantes também são processadas. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) em seu trabalho destacam que o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece.

Brum e Silva (2015) destacam que as estruturas cognitivas dos alunos se organizam por meio da aquisição, armazenamento e encadeamento das ideias de forma hierárquica.

> Ausubel vê o armazenamento de informações na mente humana como sendo altamente organizado, formando uma hierarquia conceitual na qual elementos mais específicos de conhecimento são relacionados (e assimilados) a conceitos e proposições mais gerais, mais inclusivos. Estrutura cognitiva significa, portanto, uma estrutura hierárquica de subsunçores que são abstrações da experiência do indivíduo (Moreira & Masini, 2001, p. 18).

Assim, pode-se entender como aprendizagem significativa aquela aprendizagem que ocorre quando uma nova informação passa a ter significado para o aluno, ou seja, essa nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica existente no cognitivo do aluno, a qual Moreira e Masini (2012) relatam que Ausubel chama de subsunçor.

> Consideram-se como subsunçores a ideisua mais ampla, que funciona como subordinador de outros conceitos na estrutura cognitiva e como ancoradouro no processo de assimilação. Como resultado dessa interação, o próprio subsunçor é modificado e diferenciado (Moreira & Masini, 2001, p. 108).

Burak e Aragão (2012, p. 27-28) citam que o processo de subsunção acontece na mente do indivíduo, feita por regiões de maior inclusividade para as de menor inclusividade, sempre interligadas em hierarquia, para organizar o conhecimento adquirido. Para os autores é a subsunção que explica vários fatores, como: a) a aquisição de novos significados; b) a extensão do período de retenção de significados; c) a estrutura hierárquica do conhecimento; e d) a ocorrência eventual de esquecimento.

Quando o aprendiz interioriza a nova informação, o conceito subsunçor que serviu de base para que essa nova informação fosse interiorizada, também se modifica ou até mesmo se desenvolve, tornando- se mais abrangentes. Concordando com Moreira e Masini (2001) essa modificação no subsunçor vai ocorrer de acordo com a frequência a qual o indivíduo tem uma aprendizagem significativa em conjunção com um dado subsunçor.

Para que esse processo de aquisição, retenção e organização de significados na estrutura cognitiva dos alunos seja claramente entendido introduz-se o princípio da assimilação.

Moreira e Masini (2012) descrevem uma representação de Ausubel para o princípio de assimilação.

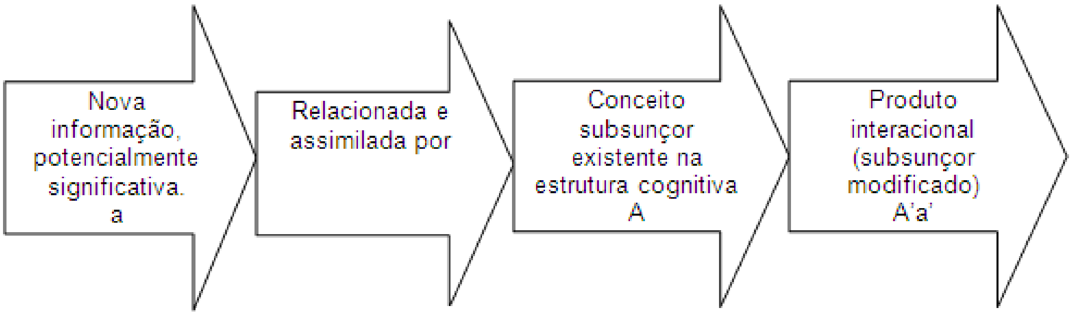


Figura 1. Princípio da assimilação.
Fonte: Moreira e Masini (2012).

Assim, esse processo pode ser descrito quando um novo conhecimento sendo potencialmente significativo é assimilado sob um conhecimento prévio mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva do aluno. Segundo colocações de Moreira e Masini (2001) a ideia do diagrama explicita, que não somente a nova informação a, mas também o conceito subsunçor A, a qual a nova informação se relaciona, ambos são modificados nessa interação.

Burak e Aragão (2012) corroboram com essa visão, enfatizando que:

> De acordo com o conceito de assimilação, não só a ideia potencialmente significativa a, mas também a ideia estabelecida A, à qual a é relacionada, mudam pelo processo de interação; os produtos da interação tornam-se a' e A' que permanecem em relação como membros de uma nova unidade compósita ou complexo ideacional a'A' (Burak & Aragão, 2012, p. 40).

Para esses autores essa hipótese de Ausubel é de grande importância, pois explica além da longevidade da ancoragem de conceitos aprendidos significativamente, mas também a forma de organização cognitiva do conhecimento.

A aprendizagem significativa busca certo tipo de suporte para um conhecimento organizado de forma gradativa. Vale ressaltar a importância da intervenção do professor, da sua prática pedagógica de estar atento e buscando entender como seu aluno aprende, de que forma pode agir para que seus ensinamentos surtam o efeito desejado. Em relação a esses aspectos, destaca-se o uso de organizadores prévios, para que possam auxiliar na base da aprendizagem significativa que são os conhecimentos prévios dos alunos.

Um organizador prévio consiste em uma estratégia que está amparado na utilização de materiais introdutórios, antes do próprio material de aprendizagem, para que o aluno consiga estabelecer relações entre os conteúdos.

> O organizador prévio tem a finalidade de criar pontos de ancoragem, em nível mais geral do que o material mais detalhado que a precede. Tais organizadores devem ser utilizados quando o estudante não dispõe em sua estrutura cognitiva, de subsunçores que ancorem novos conhecimentos ou quando for constatado que, os subsunçores identificados não estão suficientemente claros ou encontram-se desorganizados para desempenhar as funções de ancoragem (Brum, Schuhmacher & Silva, 2016, p. 45).

Um organizador prévio pode ser um texto, um vídeo ou um jogo. A principal função desses organizadores de acordo com a teoria Ausubeliana é a de servir de ponte entre o que o aluno já sabe e aquilo que ele precisa saber, com a finalidade de que aconteça uma aprendizagem significativa.

“Os organizadores são mais eficientes quando apresentados no início das tarefas de aprendizagem, do que quando introduzidos simultaneamente com o material aprendido, pois dessa forma suas propriedades ficam salientadas” (Moreira & Masini, 2001, p. 22). De acordo com esses autores para que os organizadores sejam úteis, necessitam ser formulados de maneira a ser familiar ao aluno, para assim serem aprendidos, e também devem ter o material de aprendizagem organizado para que tenham valor de resolução pedagógica.

Burak e Aragão (2012) classificam os organizadores prévios em dois tipos, expositivos e comparativos.

> Expositivos – que têm o propósito de fornecer subsunçores próximos e relevantes, no caso de material não familiar ao aluno. Comparativos – que têm o propósito de integrar novas ideias a conceitos similares e aumentar a possibilidade de discriminação entre novas ideias e outras ideias já existentes que sejam essencialmente diferentes, mas aparentemente semelhantes, no caso de material relativamente familiar ao aluno (Burak & Aragão, 2012, p. 46).

A respeito do uso de organizadores é possível enfatizar: a) a importância da disposição de ideias relevantes no cognitivo do aluno para que as novas ideias apresentadas se tornem realmente significativas, servindo de ancoragem e consequentemente de estabilidade; b) o uso de ideias gerais de uma disciplina como subsunçores; c) a identificação de conteúdo relevante já existente no cognitivo dos alunos que os próprios organizadores possibilitam, e a indicação de relevância desde o conteúdo já estabelecido, como sua importância ao que se vai aprender (Burak & Aragão, 2012).

Tendo em vista a aprendizagem significativa, utiliza-se de um jogo como organizador prévio no ensino de Probabilidade, como forma de gerar subsunçores e este servir de ponte para que os alunos aprendam o conteúdo proposto. Acredita-se que os alunos em contato com um material introdutório, apresentado antes do conteúdo a ser aprendido em si, poderão apresentar melhores condições para assimilar novos conteúdos relacionados com a probabilidade, pois, a teoria ausubeliana defende que a estrutura cognitiva dos alunos será trabalhada e subsunçores base para que eles aprendam significativamente o conteúdo serão gerados e assimilados.

3. O ensino de Probabilidade

A Probabilidade é um conteúdo amparado nas Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE) de Matemática do Paraná, pertencente ao bloco Conteúdo Estruturante de Tratamento da Informação, "que contribui para o desenvolvimento de condições de leitura crítica dos fatos ocorridos na sociedade e para interpretação de tabelas e gráficos que, de modo geral, são usados para apresentar ou descrever informações" (Paraná, 2008, p. 60).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) a relevância do ensino de Probabilidade se justifica pela importância e utilização de seus conteúdos na sociedade em que vivemos (Brasil, 1998), como o acaso, a incerteza e a aleatoriedade. Entende-se que é relevante que o aluno compreenda e consiga associar os conceitos probabilísticos com sua realidade, de forma que possa utilizá-los a favor da sua vida cotidiana.

> É necessário propiciar ao aluno um olhar diante da incerteza, pois ainda que se estude e se elabore um modelo teórico para o cálculo de probabilidade, como por exemplo, o resultado do lançamento de uma moeda honesta (probabilidade de Cara = ½), que em si não carrega incerteza enquanto modelo, é importante que o aluno perceba que, antes de realizarmos um lançamento de uma moeda deste tipo, o resultado é incerto. Ou seja, o aluno se depara com um modelo de previsão de um evento futuro que não lhe garante uma resposta exata ou certa como vinha até então trabalhando na matemática (Oliveira & Cordani, 2016, p. 1268).

Um dos objetivos da Probabilidade em relação aos alunos do Ensino Médio é de que o aluno compreenda que este tema pode ser relacionado a modelos que são úteis para simulação de eventos e medidas de incerteza para interpretar um problema (Brasil, 2002). "Componentes como o acaso, a aleatoriedade dão aos conceitos relacionados com a Probabilidade características próprias que requerem um conhecimento didático específico para sua abordagem em sala de aula" (Cavalcante, Andrade & Régnier, 2016, p. 02), o que vai ao encontro da pesquisa desenvolvida e relatada aqui, ao propor um organizador prévio como material didático para o ensino e aprendizagem do conteúdo proposto.

Ao propor o desenvolvimento do conteúdo de probabilidade em sala de aula, espera-se que os alunos possam: a) reconhecer a aleatoriedade de fenômenos e eventos naturais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados, b) quantificar e fazer previsões aplicadas à vida cotidiana que envolva o pensamento probabilístico e; c) identificar modelos e problemas que fazem uso de probabilidades (Brasil, 2002).

Ao tratar do conteúdo de Probabilidade, esta pesquisa pode contribuir com a formação do aluno como cidadão crítico, de maneira que o mesmo consiga interpretar, analisar e resolver possíveis eventos. Espera-se que o aluno consiga lidar com situações do acaso, permitindo um olhar diferenciado no meio em que vive, relacionando a Probabilidade com situações do seu cotidiano.

4. Procedimentos metodológicos

Esta pesquisa foi realizada com trinta (30) alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do Norte do Paraná. Os alunos participantes da pesquisa foram codificados pela letra A (referente à aluno), seguida de um algarismo sequencial (A1, A2, ..., A21), para facilitar a descrição e análise dos dados, bem como garantir o anonimato. Os alunos, menores de idade, dispunham de um termo de consentimento de seus pais e um termo de assentimento para a participação da pesquisa, condicionada ao cumprimento dos princípios éticos.

O trabalho desenvolveu-se em quatro momentos: 1° Momento (uma aula): diálogo a respeito dos objetivos da pesquisa e criação do mapa conceitual 1; 2º Momento (uma aula): identificação de subsunções; 3º Momento (três aulas): uso do organizador prévio e 4º Momento (uma aula): criação do mapa conceitual 2.

A aplicação ocorreu em seis aulas divididas em dois dias e na impossibilidade de apresentar todas as análises, foram selecionados cinco alunos, aleatoriamente, para compor os resultados da pesquisa, na tentativa de mostrar a viabilidade do organizador prévio utilizado. Os dados foram coletados durante a aplicação do jogo, realizado pelos pesquisadores, por meio de fotografias, gravação de áudio e vídeo, além das atividades escritas realizadas pelos alunos participantes.

Foi disponibilizado a cada aluno uma cartela do bingo, denomina por “cartela didática”, conforme David (2008). As cartelas foram impressas com as grades em branco para preenchimento dos alunos, a partir da orientação dos pesquisadores. A cada rodada, foram feitas perguntas sobre o tema de probabilidade e sempre que necessário os alunos realizaram os cálculos para responder a cada questionamento.

Para a realização do bingo foram utilizados: folhas sulfites em branco; bolas enumeradas de 1 a 20 que compõe o globo do jogo (estas podem ser confeccionadas manualmente); globo ou recipiente para comportar as bolas numeradas; canetas ou lápis para realização dos cálculos necessários.

O objetivo do jogo era preencher toda a grade numerada e o vencedor aquele que primeiro marcar todos os números da cartela. Essas cartelas são confeccionadas pelos alunos mediante algumas regras e conceitos elementares tais como sucessor, antecessor, adição e subtração, sendo esse tipo de atividade importante por trabalhar conceitos que em diversos momentos são utilizados em situações do cotidiano acadêmico. As regras usadas para o estabelecimento dos números estão de acordo com o trabalho de David (2008), apresentadas a seguir.

Para iniciar o preenchimento da cartela o primeiro número de cada aluno é sorteado entre as bolas numeradas de 1 a 20. Para obtenção do segundo número da cartela, é acrescido ao número sorteado, o dia de nascimento do aluno dono da cartela. O terceiro número da cartela é obtido adicionando ao sorteado o número referente ao mês de nascimento do aluno dono da cartela.

Os três últimos números são elaborados da mesma forma, porém será utilizado no lugar do número sorteado o número da chamada de cada aluno, assim os próximos dois números, serão acrescidos do dia e do mês de aniversário de cada aluno, respectivamente. Percebe-se que haverá números na cartela que excederão os números do globo, neste caso tem-se uma regra: para os números encontrados superiores a 20 e menores que 40 será subtraído o valor 20; para os números superiores a 40 será subtraído o valor 40; essas operações são necessárias pelo fato do bingo ser composto por bolas enumeradas de 1 à 20, não podendo exceder esse valor. Exemplo da construção de uma cartela didática: suponha que para um aluno o número sorteado é seja 15, o número da chamada seja 24 e o aniversário 19/11, então a constituição da cartela será:

1° número (número sorteado) Ex: 15 (Número sorteado)	**2° número (soma do dia de nascimento com o número sorteado) Ex: 19 +15 = 34 (valor obtido) 34 – 20 (pelo critério) =14**	**3° número (soma do mês de nascimento com o número sorteado) Ex: 11+15 = 26 (valor obtido) 26 – 20 (pelo critério) = 6**
4° número (número da chamada) Ex: 24 (número da chamada) 24 – 20 (pelo critério) = 4	**5° número (soma do dia de nascimento com o número da chamada) Ex: 19 + 24 = 43 (número obtido) 43 – 40 (pelo critério) = 3**	**6° número (soma do mês de nascimento) Ex: 11 + 24 = 35 (valor obtido) 35 – 20 = 15 (pelo critério) 15 + 1 (tomando-se o critério de sucessão) = 16**

Quadro 1. Modelo da construção de uma cartela
Fonte- Adaptado de David (2008)

Assim, a cartela desse aluno seria composta pelos números em negrito: 15, 14, 6, 4, 3 e 16. Veja que o número 15 se repetiu, no primeiro número e no sexto número. Nestes casos, em que os números na cartela coincidem adota-se o sucessor deste, caso ainda não seja solucionado o problema, utiliza-se o sucessor seguinte e até mesmo o antecessor. Após a confecção de todas as cartelas, inicia-se o jogo.

Com a aplicação do jogo, foram explorados alguns conceitos como os de: a) variabilidade; b) incerteza; c) estimativas; d) chance; e) espaço amostral e; f) aleatoriedade. Ainda, “encarar a probabilidade com menos formalismo, tentando se aproximar do caráter experimental da busca de um modelo” (Oliveira & Cordani, 2016, p. 1278), pois, acredita-se que o bingo didático pode trazer novos conhecimentos que servirão de ancoragem para aprendizagem de Probabilidade.

5. Análise da aplicação do Bingo Didático

Nesta pesquisa será utilizada a análise qualitativa de cunho interpretativo para estudar os dados coletados, baseado em dois aspectos: 1. as análises sobre os dados coletados são influenciadas por concepções e interpretações dos investigadores; 2. a investigação da própria prática pode influenciar as características dos dados coletados e as análises realizadas (Rosa, 2009).

Optou-se por esse tipo de análise, tendo em vista que no texto são apresentadas as ideias e as informações dos autores ao analisarem os dados coletados. A análise foi realizada a partir das discussões feitas em sala de aula e dos registros dos alunos.

Na aplicação do bingo didático foram feitas perguntas focando o tema de Probabilidade e a cada rodada solicitou-se que os alunos efetuassem os cálculos referentes as questões em uma folha A4 auxiliar de cálculos, a qual foi recolhida ao término da atividade.

A primeira discussão é descrita a seguir.

P: Qual é a Probabilidade de se sortear o número 21?

A1: É impossível professora! Se só tem uma sequência de 20 números, é óbvio que não terá o número 21. 0% de chance!

A2: Que pergunta boba, não tem 21 números, só tem 20. Então não tem chance nenhuma.

Com relação a essa pergunta o aluno A1 respondeu que teria 0% de chance, ou seja, relacionou chance com a probabilidade de um determinado evento acontecer, assim podemos destacar e concordar com Ausubel (2006) citado por Brum e Silva (2015), quando relatam que este autor enfatiza que o subsunçor (conhecimento prévio), pode ser identificado como sendo declarativo e que

> Também pressupõe um conjunto de outros conhecimentos procedimentais, afetivos e contextuais, que igualmente configuram a estrutura cognitiva prévia do estudante. O aluno entendeu que a probabilidade ajuda a determinar qual é a chance de uma situação ser realizada. (Brum & Silva, 2015, p. 22).

Percebe-se que os alunos apresentavam conhecimento a respeito de porcentagem e sua relação com as chances de sorteio, ou seja, havia uma familiaridade com os conceitos, até porque o conteúdo já havia sido estudado anteriormente, neste caso o organizador prévio serviu para facilitar a junção desse conhecimento com outros já conhecidos por ele, ou seja, aproximando do proposto por Ausubel (1963), facilitou a "integração desse conhecimento com outros similares já existentes na estrutura cognitiva, assim como para aumentar a discriminabilidade entre ideias novas e ideias prévias que são essencialmente diferentes, mas confundíveis (p. 83)".

Neste momento da aula os alunos foram questionados quanto a probabilidade de 0%, como seria a representação matemática que mostre esse dado, ou seja, como é feito o cálculo de probabilidade sem ser intuitivamente. Um dos alunos comentou:

A7: Deve ser uma divisão ou multiplicação professora!

P: Mas por quê? Qual motivo leva você a pensar assim?

A7: Pela lógica professora, pois dependendo o número que divido vai "dar zero", e multiplicando também.

P: Mas se eu subtrair dois números iguais, também resulta em zero, e aí? Lembre-se que vocês já viram esse tema em outro momento, pensem com calma.

A8: É uma divisão professora, me lembrei que vimos alguma coisa disso, espaço amostral, sei lá.

P: Realmente é por meio de uma divisão.

Vergnaud (1991) destaca que grande parte dos alunos possuem teoremas conhecidos intuitivamente, mas que não são formalizados por meio de estudos, isso os leva a encontrar ou não uma solução correta de um determinado problema, como a probabilidade de 0% no qual fazem a ligação com a divisão e multiplicação. Neste momento da aula os alunos foram levados a refletir a respeito do espaço amostral.

P: No lançamento de um dado, o espaço amostral é o conjunto cara e coroa. Mas por quê?

A10: Porque são os resultados possíveis.

P: Correto. Então o nosso espaço amostral seria exatamente o que?

A partir dessa reflexão os alunos chegaram à conclusão juntamente com dicas dos pesquisadores de que a probabilidade de um evento acontecer é dada pela razão entre os termos favoráveis e os termos possíveis do evento em questão.

Uma aluna (A10) destacou o que é espaço amostral: "a quantidade de números presentes no globo". Com isso percebe-se que o espaço amostral é um subsunçor que os alunos já possuíam antes da aplicação da atividade, Ausubel (2006) fala do subsunçor com um olhar cultural de tudo que se percorreu até este ser utilizado em sua aprendizagem.

Dentro dessa perspectiva Brum e Silva (2015) relatam que é

> Em função desse processo é que considera necessária a identificação e o estudo dos conceitos iniciais relevantes ou conceitos âncora, subsunçores, articuladores, integradores, presentes na estrutura cognitiva do estudante para que funcionem como pontes para novos conteúdos ensinados na escola (Brum & Silva, 2015, p. 22).

Esses subsunçores identificados serviram para nortear toda a aplicação da atividade, com vistas a contribuir com a formação probabilística dos estudantes. De acordo com Ausubel (2000) a aprendizagem significativa ocorre quando uma nova informação se ancora em um subsunçor.

Seguindo-se o jogo antes de sortear o primeiro número questionou-se novamente:

P: Qual é a probabilidade de acertar 6 números nas primeiras 6 rodadas?

Neste momento os alunos ficaram bem pensativos, alguns diziam que seria impossível, outros que era possível, além daqueles que brincavam que era tão possível que eles iriam vencer dessa forma. Assim foi realizado o cálculo juntamente com os alunos.

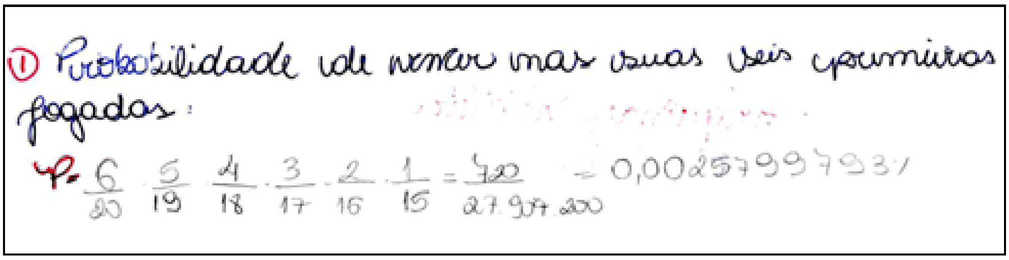


Figura 2. Cálculo realizado pelo aluno A12.
Fonte: Os autores.

A partir desses cálculos os alunos perceberam que é pequena a probabilidade de vitória nas seis primeiras rodadas, mas ela existe, destacando assim, os conceitos de variabilidade e incerteza, no julgamento da probabilidade de um evento acontecer.

A18: Nossa professora, a probabilidade é muito pequena, por isso que nos bingos de quermesse ninguém ganha de primeira.

P: Isso mesmo, mas isso não o impede ganhar, por menor que seja a probabilidade ela existe!

Percebe-se que o aluno pensou em uma situação comum à sua realidade. De acordo com os documentos oficiais (Brasil, 1998, Paraná, 2008), é proposto que os conteúdos sejam ensinados de forma a contemplar a realidade do aluno, permitindo que este conteúdo possa ser usual e útil para resolver problemas que possam se relacionar a eles. Brasil (1998, p. 49) ainda ressalta que “a finalidade não é a de que os alunos aprendam apenas a ler e interpretar representações gráficas, mas que se tornem capazes de descrever e interpretar sua realidade, usando conhecimentos matemáticos”.

Segundo Ausubel (2006), os subsunçores dos estudantes constituem um amplo esquema de ressignificação, e devem ser mobilizados durante todo o processo de ensino e aprendizagem dos alunos, dessa forma a partir dele, o indivíduo interpreta o mundo. Percebe-se isso quando os alunos destacam os bingos de quermesse.

Os alunos realizaram os cálculos na folha auxiliar para a resposta do professor. Neste primeiro momento com a ajuda do professor, buscando seus conhecimentos prévios foi feito uma conversa para explicar como se calcula a probabilidade de eventos múltiplos ocorrendo um após o outro, pois esse cálculo foi utilizado na primeira pergunta e será utilizado várias vezes durante a realização do jogo.

Baseado nos conhecimentos prévios já identificados os alunos mostraram que já possuíam uma noção de probabilidade de eventos múltiplos. Ausubel (2006) percebe que a identificação desses subsunçores, está relacionada à caracterização de pontos de ancoragem da estrutura cognitiva do aluno.

Ao final da segunda rodada apenas uma cartela teve dois números preenchidos, outra cartela teve apenas um número marcado e os demais estavam com cartelas sem nenhum número marcado. Nesse momento perguntou-se aos alunos:

P: Qual a probabilidade dessas cartelas ter um número marcado na próxima rodada? E qual teria maior chance de marcar o próximo número sorteado?

De imediato um dos alunos respondeu:

A9: Professora acho que quem marcou dois números é que tem maior chance, não é?

P: Será? Pense mais um pouco, não tente chutar.

A13: Pensando bem, temos que fazer o cálculo para saber a chance de cada um, não é isso professora?

P: É isso mesmo. Façam os cálculos que será mais fácil responder à pergunta.

Assim segue na figura 2 o cálculo realizado por um dos alunos neste momento.

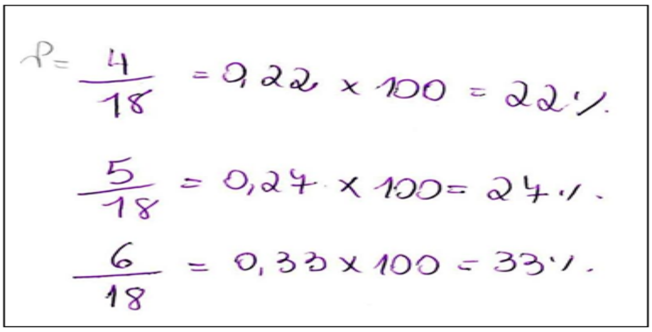


Figura 3. Cálculo realizado pelo aluno A20.
Fonte: Os autores.

Após os cálculos os alunos conseguiram responder aos questionamentos feitos.

A20: Agora ficou fácil. A cartela com dois números marcados tem 22% de chance de marcar o próximo número. A com um número tem 27% e as com nenhum, *33%. Aí dessas três a que tem maior chance de marcar são as cartelas que ainda não marcaram nenhum número, pois tem uma porcentagem maior de chance.*

Percebeu-se que além desse aluno, os demais também chegaram à mesma conclusão.

Articular porcentagem e razão ao conteúdo de Probabilidade é um exercício difícil para os alunos, pois, quando se fala em porcentagem, eles buscam trabalhar com regra de três e não se atentam para as diferentes representações que podem se atribuir a porcentagem. Nesta atividade percebeu-se que houve uma facilidade de entendimento em relação à divisão e porcentagem, assim como a melhor compreensão de probabilidade. Portanto a utilização de subsunçores contribuiu para a facilitação do entendimento do conteúdo de Probabilidade mediada pelo uso do organizador prévio.

Deste modo, foram realizadas mais duas rodadas e, antes de sortear o quinto número um dos alunos perguntou:

A15: Professora, será que é possível sabermos qual a probabilidade de vitória de quem marcou 4 números até agora?

A1: E quem marcou só 3 números?

A6: E eu que não marquei nenhum número, será que tenho chance de ganhar?

P: Excelente pergunta! É possível sim. Pensem comigo: Se a cartela possui seis números para serem marcados, e já foram marcados 4 números, então faltam dois números para preencher a cartela certo! E restam 15 números para serem sorteados, deste modo basta vocês fazerem o mesmo cálculo que fizemos no início da aula quando verificamos a probabilidade de vitória nas seis primeiras rodadas. Lembram que fomos multiplicando?

Com a explicação da professora, os alunos realizaram os cálculos na folha auxiliar, respondendo as três perguntas, como mostra a figura a seguir:

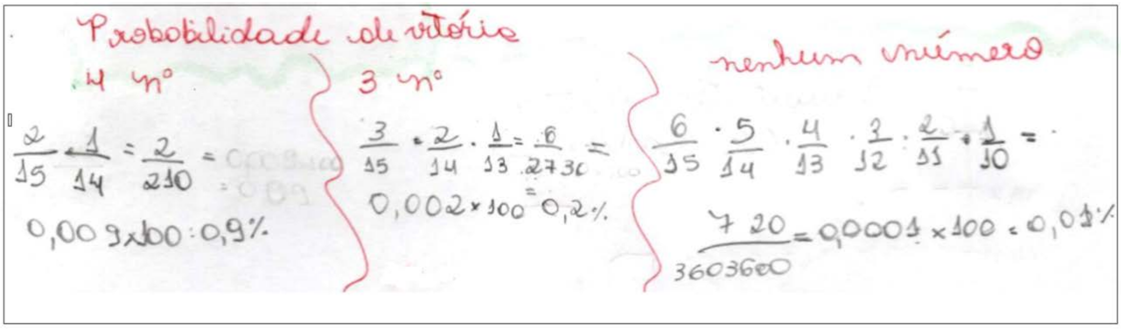


Figura 4. Probabilidade de vitória realizada pelo aluno A1.
Fonte: Os autores.

Com os cálculos os alunos concluíram as chances de cada uma dessas cartelas de vencer o jogo nas próximas rodadas.

Nesta atividade os alunos trabalharam com números decimais, além de trabalhar com multiplicação e divisão e também com uma ideia intuitiva de fatorial, que foi válida neste momento e citada pelos alunos, desta forma eles melhoram o conhecimento que já possuíam de números decimais e porcentagem, em que porcentagem é baseada em um todo. Moreira (2013, p. 8) defende que “o que ocorre entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos é uma interação cognitiva”. O interessante é que este autor explicita que o termo conhecido como ancoragem é simbólico, pois quando ele interage com outros subsunçores ele se modifica, e essa modificação Ausubel chama de princípio da assimilação.

Percebe-se também nesta atividade que os alunos precisaram coletar dados e organizá-los para que encontrar os dados de cada um, como se trata de probabilidade de vitória puderam entender o significado de espaço amostral e segundo Brasil (1998, p. 137) “no trabalho com Probabilidade é fundamental que os alunos compreendam o significado de espaço amostral e sua construção pela contagem dos casos possíveis”. Neste sentido o organizador serviu novamente para aprimorar as ideias dos alunos e diferenciar de outras similares.

Em continuidade ao jogo, na décima rodada houve um vencedor. Após a conferência foi atribuído um prêmio para a aluna vencedora, e um prêmio simbólico foi entregue aos demais participantes, pois os mesmos mereciam por participarem de forma efetiva na realização do bingo didático.

Alguns comentários foram feitos ao término do jogo, como pode-se observar a seguir:

A3: Como tudo é incerto. Eu estava indo bem no jogo, e de repente, outra pessoa ganhou na minha frente. É sorte mesmo, alguns têm mais sorte que outros, não há escolhidos.

A5: O sorteio é engraçado. Ás vezes segue uma sequência: 1, 2, 3. Outras é meio que ao acaso: 3, 8, 15.

Com base nessas informações os próprios alunos destacaram o nível de aleatoriedade do bingo, os quais chamaram de incerteza e ao acaso. “A principal finalidade para o estudo de Probabilidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória” (BRASIL, 1998, p. 52). Esse conceito adquirido poderá ajudar em conteúdos de probabilidade mais complexos que serão trabalhados em séries posteriores, como probabilidade condicional. Para a compreensão de situações probabilísticas é necessário o entendimento de da aleatoriedade e realizar comparações (Batista & Borba, 2016).

5. Considerações finais

Diante do objetivo delineado “apresentar as contribuições de um jogo como organizador prévio para a aprendizagem significativa de Probabilidade”, três pontos podem ser destacados: a) as atitudes dos alunos; b) o conceito de Probabilidade e; c) a aprendizagem significativa alcançada. Pois, no entendimento dos pesquisadores, esse é o tripé que sustentou os resultados no trabalho desenvolvido.

Com a aplicação do jogo, foram explorados os conceitos de: a) variabilidade, como fator determinante para fazer julgamentos e conclusões; b) incerteza, para julgar a probabilidade de um determinado evento; c) estimativas, de acordo com as suas opiniões; d) chance, para o cálculo de um evento ocorrer; e) espaço amostral, utilizado para cálculos de probabilidade e; f) aleatoriedade, de que a incerteza está presente nos eventos.

No desenvolvimento da atividade do Bingo, pode-se notar uma grande participação por parte de todos os alunos. É interessante relatar que durante a aplicação até os alunos mais tímidos, que em aulas tradicionais não costumam participar ativamente e não buscam expor suas dúvidas, se manifestaram, fizeram comentários, perguntas e até mesmos deram sua opinião a respeito do jogo, o que podemos destacar como um ponto importante da aplicação a socialização entre os alunos.

Por meio a análise das falas e atividades realizadas é possível dizer que o jogo tenha contribuído com a aprendizagem dos alunos em relação à Probabilidade, uma vez que durante o trabalho os alunos diferenciaram ideias semelhantes daquelas que já possuíam, bem como integraram novas ideias a sua estrutura cognitiva. Dentro desta análise, foi possível perceber que os alunos relacionam o conteúdo de Probabilidade com chances em jogos de azar.

Foi possível verificar também que a forma de integrar novas ideais aos conceitos subsunçores e, este servir de ponte para que os alunos aprendam o conteúdo proposto de Probabilidade foram contemplados, pois, eles foram instigados a responder as perguntas propostas baseadas no jogo aplicado.

Bibliografia

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional*. Interamericana. Rio de Janeiro. Brasil. Tradução de Eva Nick et al. 2. ed.

Batista, R., & Borba, R. E. S. (2016). No jogo é a moeda que diz, não é a gente que quer não: o que dizem crianças sobre a probabilidade. *Vidya*, (36)2, p. 237-255. Recuperado de: http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/index

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

______. (2002). *PCN Ensino Médio*: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Recuperado de: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf

Brum, W. P., & Silva, S. C. R. (2015). A utilização de uma ueps no ensino de matemática: uma investigação durante a apresentação do tema probabilidade. *Aprendizagem Significativa em Revista,* 5(1), p. 15-32.

Brum, W. P., SCHUHMACHER, E., & SILVA, S. C. R. (2016). A utilização de documentários enquanto organizadores prévios no ensino de geometria não Euclidiana em sala de aula. *Acta Scientiarum Education,* (38)1, p. 43-49, Recuperado de: http://periodicos.uem.br/ojs/index.php/ActaSciEduc/article/view/23293

Burak, D., & Aragão, R. M. (2012). *A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa*. CRV. Curitiba. Brasil.

Cavalcante, J. L., Andrade, V. L. V. X., & Régnier, J. C. (2016). O conceito de probabilidade na formação docente: uma reflexão apoiada pela análise estatística implicativa. *Vidya*, (36)2, p. 441-455. Recuperado de: http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/index.

David, J. C. (2008). Matemática e jogos de bingo: uma aplicação prática da probabilidade e teoria da contagem. (Dissertação Mestrado profissional em Projeto de Desenvolvimento Educacional). Universidade Estadual de Londrina. Londrina.

Moreira, M. A., Buchweitz, B. (1993). *Novas estratégias de ensino e aprendizagem*: os mapas conceituais e o Vê epistemológico. Plátano. Lisboa. Portugal.

Moreira, M. A. (2013). *Mapas conceituais e aprendizagem significativa*. Instituto de Física (UFRGS). Porto Alegre. Brasil Recuperado de: http://www.if.ufrgs.br/public/tapf/v24_n6_moreirapdf

Moreira, M. A., & Masini, E. F. S. (2001). *Aprendizagem Significativa*: A teoria de David Ausubel. Centauro. São Paulo. Brasil.

Oliveira, C. R., & Cordani, L. K. (2016). Julgando sob incerteza: heurísticas e vieses e o ensino de probabilidade e estatística. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, (18)3, p. 1265-1289.

Paraná. (2008). Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes curriculares da educação básica*: Matemática. Paraná: SEED/DEB.

Rosa, C. C. (2009). *Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de modelagem matemática no ensino médio*. (Dissertação Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Vergnaud, G. (1991). La théorie de schamps conceptuels. *RDM,* 6(10).

Naiara Aparecida Ribeiro: Licenciada em Matemática. Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), campus de Cornélio Procópio**.** Email: naiiara_ribeiro@hotmail.com

Simone Luccas: Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Docente do curso de Licenciatura em Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná, campus de Cornélio Procópio**.** Email: simoneluccas@uenp.edu.br

Willian Damin: Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus de Ponta Grossa. Docente Colaborador do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Norte do Paraná, campus de Cornélio Procópio**.** Email: wdamin@uenp.edu.br

Hevyllyn de Assis dos Santos: Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), campus de Cornélio Procópio**.** Email: hevyllynassis@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 218-235

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional: una experiencia sobre patrones con robots educativos programables

Ángel Alsina, Yeni Acosta Inchaustegui

Fecha de recepción: 31/10/2017
Fecha de aceptación: 11/12/2017

Resumen	El objetivo de este artículo es presentar las primeras orientaciones didácticas para desarrollar el razonamiento algebraico en Educación Infantil a través del pensamiento computacional, usando la robótica como recurso. A partir de los vínculos entre estos aspectos y el análisis de una experiencia con robots educativos programables para trabajar los patrones en 3-4 años, se establecen cinco recomendaciones iniciales en el marco de la educación STEAM: 1) plantear fenómenos relevantes, basados en la resolución de problemas; 2) fomentar procesos de razonamiento mediante buenas preguntas; 3) impulsar la interacción, la negociación y el diálogo; 4) vincular conocimientos de distinta naturaleza; 5) plantear la representación como medio para comprender, estructurar, capturar y transferir conceptos. **Palabras clave**: razonamiento algebraico, patrones, pensamiento computacional, Educación Infantil
Abstract	The aim of this article is to present some first didactic orientations to develop the algebraic reasoning in Pre-school Education through computational thinking, using robotics as a resource. From the links between these aspects and the analysis of a experience with programmable floor robots to work the patterns in 3-4 years, five initial recommendations are established in the framework of STEAM education: 1) raise relevant phenomena, based on problem solving; 2) encourage reasoning processes through good questions; 3) boost interaction, negotiation and dialogue; 4) link knowledge of a different nature; 5) raise representation as a means to understand, structure, capture and transfer concepts. **Keywords**: algebraic reasoning, patterns, computational thinking, Pre-school Education.
Resumo	O objetivo deste artigo é apresentar algumas primeiras orientações didáticas para desenvolver o raciocínio algébrico na Educação Infantil através do pensamento computacional, utilizando a robótica como recurso. A partir dos vínculos entre esses aspectos e a análise de uma experiência com robôs educacionais programáveis para trabalhar os padrões em 3-4 anos, cinco recomendações iniciais são estabelecidas

no âmbito da educação STEAM: 1) criar fenômenos relevantes, com base na resolução de problemas; 2) incentivar os processos de raciocínio através de boas questões; 3) impulsionar interação, negociação e diálogo; 4) relacionar o conhecimento de uma natureza diferente; 5) elevar a representação como um meio para compreender, estruturar, capturar e transferir conceitos.

Palavras-chave: raciocínio algébrico, padrões, pensamento computacional, educação infantil.

1. Introducción

El aprendizaje de los patrones, como un contenido intrínseco del álgebra y como una forma de pensamiento que contribuye al desarrollo de habilidades matemáticas, sigue siendo una temática poco estudiada, sobre todo en la primera infancia (Waters, 2004; Clements y Sarama, 2015). Estamos de acuerdo con Waters (2004) cuando expone y defiende que, desde los momentos tempranos de la primera infancia, el aprendizaje de los patrones se conjura como un elemento fundamental dentro y más allá de los currículos de matemáticas ya que, por ejemplo, ayuda a los alumnos a comprender algunas regularidades de su entorno inmediato y, de forma más genérica, a dar sentido a su mundo cotidiano. Por esta razón, *The National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) de Estados Unidos señala que es necesario que el profesorado de las primeras edades ponga al alcance de los alumnos de Educación Infantil entornos y oportunidades de aprendizaje que permitan explorar ideas matemáticas vinculadas a los patrones (NCTM, 2003).

Alsina (2012a, 2014) indica que estos entornos y oportunidades de aprendizaje de las matemáticas deberían ser globalizados, interdisciplinares, flexibles y orientados a aprender desde la acción y desde la resolución creativa de problemas. En esta línea, desde el marco de la educación STEAM, la Unión Europea ha empezado también a resaltar la idea de favorecer el aprendizaje del conocimiento matemático y/o científico a través del trabajo conjunto de diversas disciplinas. Este planteamiento educativo, que proviene del enfoque STEM difundido a través del conocido informe Rocard (Rocard et al., 2007), es el acrónimo de *Science, Technology, Engineering, Art, Mathematics* y, de acuerdo con sus impulsores, contribuye a conseguir una mayor competitividad y, por consiguiente, en el futuro ayudará a alcanzar una prosperidad económica superior y es un claro índice de la capacidad de un país para mantener un crecimiento sostenido.

Con base a estas consideraciones, el propósito de este artículo es ofrecer algunas orientaciones al profesorado de Educación Infantil para desarrollar el razonamiento algebraico a través del pensamiento computacional, usando la robótica como medio. Por lo tanto, nos situamos en un nuevo escenario educativo en el que los alumnos se inician en el mundo de la programación (Berry, 2013), con el objeto de crear las bases que permitirán la articulación de conocimientos matemáticos y habilidades computacionales más complejas en etapas posteriores. Para llevar a cabo este reto, asumimos las ideas planteadas por de Guzmán (2001, p. 10) acerca del papel de la educación matemática en la sociedad computarizada:

> En nuestro ambiente contemporáneo, con una fuerte tendencia hacia la deshumanización de la ciencia, a la despersonalización producida por nuestra cultura computarizada, es cada vez más necesario un saber humanizado en que el hombre y la máquina ocupen cada uno el lugar que le corresponde. La educación matemática adecuada puede contribuir eficazmente en esta importante tarea.

Desde este punto de vista, en la primera parte del artículo se realiza una breve caracterización acerca del razonamiento algebraico, así como del pensamiento computacional, para posteriormente poder establecer algunos vínculos entre ambos constructos. En la segunda parte se describe una experiencia de aula para alumnos de 3-4 años en la que, con la ayuda de los robots educativos programables, los alumnos se inician en el aprendizaje de los patrones a la vez que, como se ha indicado, se adentran en el mundo de la robótica y se empiezan a familiarizar con acciones vinculadas a la programación.

2. Razonamiento algebraico y pensamiento computacional: caracterización y vínculos

La investigación en educación matemática proporciona, entre otros aspectos, evidencias que facilitan la comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para así poder ofrecer y articular propuestas curriculares capaces de suscitar conocimientos más profundos. Estamos de acuerdo con de Guzmán (2001) cuando expone que “nuestra enseñanza ideal debería tratar de reflejar este carácter profundamente humano de la matemática, ganando con ello en asequibilidad, dinamismo, interés y atractivo” (p. 9). Para fundamentar esta idea, en este apartado se abordan tres aspectos interrelacionados: a) se caracteriza el razonamiento algebraico como un conjunto de conocimientos necesarios para poder organizar el mundo que nos rodea (Clements y Sarama, 2015); b) se caracteriza el pensamiento computacional como una herramienta eficaz para trabajar conocimientos matemáticos (Papert, 1985); c) se establecen algunos vínculos entre el razonamiento algebraico y el pensamiento computacional con el propósito de ofrecer algunas orientaciones didácticas.

2.1. El razonamiento algebraico

Este tipo de razonamiento se refiere a una forma de pensar que supone establecer generalizaciones y regularidades en diversas situaciones matemáticas. Para Godino y Font (2003):

> A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico […] Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebido como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central. (p. 774).

Desde esta óptica, apostamos por un tratamiento y fomento de este tipo de razonamiento durante los primeros años de escolarización, ya que diversas investigaciones sobre el desarrollo infantil constatan que “[…] los niños pequeños son alumnos capaces y la experiencia educativa durante la Educación Infantil puede tener un impacto positivo en el aprendizaje escolar” (Bowman, Donovan y Burns, 2001, p. 23).

En relación con los conocimientos algebraicos que los alumnos son capaces de aprender, el NCTM (2003, p. 402) establece los siguientes estándares para la etapa *Pre-K-2* (3 a 8 años de edad aproximadamente):

- Comprender patrones, relaciones y funciones: seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades; reconocer, descubrir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos, y pasar de una representación a otra; analizar cómo se generan patrones de repetición y de crecimiento
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos: ilustrar los procesos generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, usando números; usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas: modelizar situaciones relativas a la adición y substracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos.
- Analizar el cambio en contextos diversos: describir cambios cualitativos, como “ser más alto”; describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año.

Más adelante, esta misma asociación de profesores establece los siguientes puntos focales para alumnos de 3-4 años (NCTM, 2006, p. 24):

- Ordenar, clasificar y ordenar objetos por tamaño, cantidad, y otras propiedades.
- Reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o patrones numéricos simples y transferir de una representación a otra.
- Analizar cómo se generan y crecen dos patrones que se repiten.
- Utilizar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar una comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.
- Describir cambios cualitativos.

Como puede apreciarse, en ambos casos el aprendizaje de los patrones tiene un papel relevante ya que contribuyen a que los niños sean capaces de reconocer, ordenar y organizar su mundo, al haberse demostrado que el reconocimiento, la comparación y el análisis de patrones son factores que determinan y favorecen el desarrollo intelectual de los pequeños (NCTM, 2003).

Posteriormente, Clements y Sarama (2015, p. 314), indican que "crear patrones es buscar regularidades y estructuras matemáticas [...] los patrones son más que un contenido: son un proceso, un dominio de estudio y un hábito de la mente". Ello sugiere que debería articularse un tratamiento minucioso por parte del profesorado de Educación Infantil para que a partir de buenas preguntas y propuestas adecuadas se pueda ayudar a los alumnos a hacer generalizaciones y a poner en práctica y desarrollar, paulatinamente, el pensamiento algebraico.

Desde una perspectiva genérica, *The National Association for the Education of Young Children* (NAEYC) de Estados Unidos junto con el NCTM recomiendan que para fomentar el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades es imprescindible "utilizar currículos y prácticas docentes que fortalezcan los procesos infantiles de resolución de problemas y razonamiento, así como los de representación, comunicación y conexión de ideas matemáticas" (NAEYC y NCTM, 2013, p. 4). En la tabla 1 se exponen los estándares de procesos matemáticos (NCTM, 2003):

Resolución de problemas	Construir nuevo conocimiento matemático por medio de la resolución de problemas. Resolver problemas que surgen de las matemáticas y de otros contextos. Aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas. Controlar el proceso de resolver problemas matemáticos y reflexionar sobre él. (p. 55)
Razonamiento y prueba	Reconocer el razonamiento y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas. Hacer e investigar conjeturas matemáticas. Desarrollar y evaluar argumentos y pruebas. Seleccionar y usar varios tipos de razonamientos y métodos de prueba. (p. 59)
Comunicaciones	Organizar y consolidar su pensamiento matemático mediante la comunicación. Comunicar su pensamiento matemático de manera coherente y clara a los compañeros, profesores y otras personas. Analizar y evaluar el pensamiento matemático y las estrategias de los demás. Usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas de forma precisa. (p. 64)
Conexiones	Reconocer y usar conexiones entre las ideas matemáticas. Comprender cómo se relacionan las ideas matemáticas y se organizan en un todo coherente. Reconocer y aplicar las ideas matemáticas en contextos no matemáticos. (p. 68)
Representaciones	Crear y usar representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas. Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas. Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. (p. 71)

Tabla 1. Estándares de procesos matemáticos. (NCTM, 2003)

Estos procesos matemáticos se consolidan como las herramientas que vehiculan la adquisición y uso de los contenidos matemáticos, siempre y cuando sean abordados desde experiencias educativas bien diseñadas (Alsina, 2012b, 2014; NAEYC y NCTM, 2013). Por esta razón, apostamos por abordar el trabajo de los patrones utilizando de manera transversal los procesos de pensamiento matemático descritos.

2.2. El pensamiento computacional

A partir de las ideas de Papert, Wing (2006, p. 33) introdujo y desarrolló el término de pensamiento computacional como “una habilidad fundamental para todos, no solo para los informáticos. Para la lectura, la escritura y la aritmética, deberíamos promover el pensamiento computacional en la capacidad analítica de cada niño”. Unos años después, Valverde-Berrocoso, Fernández-Sánchez, Garrido-Arroyo (2015, p. 4) indican que,

> [...] es una competencia básica que todo ciudadano debería conocer para desenvolverse en la sociedad digital, pero no es una habilidad “rutinaria” o “mecánica”, ya que es una forma de resolver problemas de manera inteligente e imaginativa [...] además posee las características de combinar abstracción y pragmatismo, ya que se fundamenta en las matemáticas.

En este escenario, la escuela debe adoptar un papel crucial en la vinculación de propuestas curriculares enmarcadas en contextos de enseñanza-aprendizaje que favorezcan el desarrollo del pensamiento computacional. De acuerdo con Valverde-Berrocoso et al., (2015)

> Partiendo de la misma visión de unos sistemas educativos que no satisfacen las necesidades de una sociedad digital, las soluciones pasan por incorporar nuevas metodologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje y modificar sustancialmente el modelo organizativo de las instituciones educativas. (p. 3)

Este sin duda es uno de los grandes retos de la escuela contemporánea. Por tanto es necesario reivindicar que “lo verdaderamente importante vendrá a ser su preparación para el diálogo inteligente con las herramientas que ya existen, de las que algunos ya disponen y otros van a disponer en un futuro que ya casi es presente” (de Guzmán, 2001, p. 9). En este sentido, el pensamiento computacional puede aportar un escenario educativo que conduzca a nuevos fenómenos con soporte digital, nuevas prácticas disciplinares (modelización) y nuevas perspectivas epistémicas. Por esta razón, en los últimos años diversos gobiernos han empezado a introducir la programación como parte de sus currículos desde los primeros niveles de escolarización, como es el caso de Bulgaria, Chipre, Dinamarca, Estonia, Grecia, Irlanda, Polonia, Portugal o el Reino Unido, como herramienta para desarrollar el pensamiento computacional (Calao, Moreno-León, Correa, Robles, 2015).

Para valorar, promover e implementar este el pensamiento computacional en la educación, la *International Society for Technology in Education* (ISTE) y la *Computer Science Teachers Association* (CSTA) describen los rasgos esenciales de este tipo de pensamiento. En la tabla 2 se describen las particularidades de este pensamiento:

	HABILIDADES	ACTITUDES
Pensamiento computacional	Formular problemas de manera que nos permita usar una computadora y otras herramientas para encontrar la solución. Organizar y analizar lógicamente datos. Representar datos a través de abstracciones, como modelos y simulaciones. Automatizar soluciones a través del pensamiento algorítmico, es decir, mediante la secuenciación de pasos ordenados. Identificar, analizar e implementar posibles soluciones con el objetivo de conseguir el más eficiente. Generalizar y transferir este proceso de resolución de problemas a una amplia variedad de problemas.	Confianza en el manejo de la complejidad. Persistencia en el trabajo con problemas difíciles. Tolerancia a la ambigüedad. Capacidad para tratar con problemas abiertos. Capacidad de comunicarse y trabajar con otros para lograr un objetivo o solución común.

Tabla 2. Habilidades y actitudes que configuran el pensamiento computacional. (ISTE y CSTA, 2011, p. 13)

Desde esta óptica, y de acuerdo con Zapata-Ros (2015), abogamos por una intervención adaptada a los alumnos de las primeras edades que permita fomentar las habilidades implícitas en el pensamiento computacional, poniendo especial énfasis en las actitudes expuestas anteriormente.

2.3. Primeros vínculos entre el razonamiento algebraico y el pensamiento computacional

En el entramado de la caracterización del razonamiento algebraico y del pensamiento computacional se desprenden una serie de procesos, habilidades y actitudes que se complementan y vinculan en el trascurso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de la tecnología, considerando la metodología STEAM en la que se fundamenta nuestro trabajo. Observamos que desde la educación matemática se plantea el trabajo de los contenidos a través de la resolución de problemas, del razonamiento y la prueba, poniendo énfasis en la comunicación, las conexiones y la representación; y desde el pensamiento computacional encontramos también puntos convergentes que se pueden vincular con la finalidad de enriquecer y propiciar prácticas matemáticas más eficaces. Desde esta perspectiva, establecemos inicialmente cinco vínculos entre ambos constructos:

1. La resolución de problemas es una parte integral de las matemáticas y también del pensamiento computacional que permite construir conocimiento a partir de la formulación, la reflexión, la aplicación y adaptación de estrategias que contribuyan a encontrar soluciones que fomenten ciertas actitudes y capacidades desde el marco de la persistencia y la confianza. En este sentido, la educación STEAM

aporta fenómenos relevantes para trabajar el razonamiento algebraico a través del pensamiento computacional.

2. El razonamiento y la prueba fomenta la comprensión y uso eficaz de estrategias matemáticas para formular conjeturas, investigar y llegar a refutar o validar hipótesis a través de diversos tipos de razonamiento y métodos de prueba que permitan identificar, analizar e implementar soluciones pertinentes. Asimismo, el pensamiento computacional contribuye a organizar y analizar los datos de forma lógica. Desde este prisma, la educación STEAM permite desarrollar formas de pensar y de razonar de las que se puede nutrir tanto el razonamiento algebraico como el pensamiento computacional.

3. La comunicación permite organizar y estructurar el pensamiento mediante la interacción, la negociación y el diálogo como herramientas para analizar, evaluar y expresar ideas haciendo uso de un lenguaje conciso y coherente -tanto entre el grupo de iguales como con los docentes- con la finalidad de trabajar en el cumplimiento de un objetivo común. La metodología STEAM es un claro ejemplo de ello, en la que converge el uso de lenguaje algebraico y lenguajes computacionales.

4. Las conexiones matemáticas, por su parte, impulsan el reconocimiento y uso interrelacionado de las ideas matemáticas desde una perspectiva que facilite una comprensión, automatización y organización coherente que sea también aplicable en ámbitos no matemáticos. Por otro lado, el pensamiento computacional ayuda a generalizar y transferir el proceso de resolución de problemas a una amplia variedad de situaciones. De esta manera, pues, desde la educación STEAM se refuerza la capacidad de vincular conocimientos para abordar de una forma flexible e interdisciplinar una situación determinada.

5. La representación consiste en crear y usar representaciones con la finalidad de comprender, estructurar, capturar y transferir conceptos o relaciones teniendo como habilidad la predisposición para organizar de manera lógica los datos. En este sentido, como ya se ha indicado, en la metodología STEAM convergen representaciones de naturaleza algebraica y representaciones de naturaleza computacional.

En síntesis, los procesos matemáticos -expuestos en la tabla 1- se retroalimentan de las habilidades y actitudes computacionales -presentadas en la tabla 2-, confiriendo así un carácter que se fundamenta más desde el ámbito procedimental que conceptual. Tal como expone Alsina (2014), se debe insistir en la fehaciente necesidad de formular buenas praxis y preguntas que favorezcan los procesos de interacción, negociación y diálogo en el aula de matemáticas. También remarca la importancia de una enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas para promover los procesos de pensamiento y aprendizaje en una sociedad digital flagrante y volátil. Por lo tanto, no hay metodología contemporánea posible que no contemple el aprendizaje desde la acción: “se aprende a resolver problemas haciendo, manipulando, simulando, discutiendo, compartiendo, imaginando, observando, visualizando, etc." (Alsina, 2014, p. 8). Es por esta razón que en la experiencia que se describe a continuación hemos querido aprovechar y trabajar de manera transversal la adquisición de las primeras nociones de patrón y secuenciación a través del enriquecimiento y vinculación que yace entre las particularidades del pensamiento computacional y algebraico, en el marco de la educación STEAM.

3. Contextualización, diseño y análisis de una experiencia STEAM: patrones con robots educativos programables.

La propuesta se desarrolla en un grupo de 24 alumnos (12 niños y 12 niñas) de 3-4 años de una escuela pública de Girona, España. La media de edad es de 3 años y 7 meses, y en general presentan capacidades y habilidades adecuadas a su edad.

Las programaciones de aula se enmarcan en una metodología basada en proyectos en la que el alumno es el protagonista de sus descubrimientos, de manera que se priorizan los momentos de exploración, manipulación y experimentación. Para fomentar el aprendizaje de los patrones, se sigue el siguiente itinerario didáctico:

a) Identificar patrones simples.
b) Iniciarse en la construcción de seriaciones que siguen un patrón simple.
c) Anticipar acciones a partir de la identificación de una determinada secuencia.
d) Leer y representar el patrón.

Para la recogida de datos se utilizan de manera combinada las notas de campo y la documentación pedagógica. Las notas de campo nos han permitido conservar expresiones, razonamientos y diálogos de los alumnos durante las propuestas educativas llevadas a cabo. La documentación pedagógica, contemplada tanto desde el marco fotográfico como desde el registro audiovisual de las sesiones, nos ha facilitado el análisis en diferido del proceso y desarrollo de las actividades, para así interpretar, confrontar y dejar constancia gráfica de las acciones que han protagonizado los alumnos.

A continuación, detallamos las tres sesiones que se llevaron a cabo con los robots educativos programables con el fin de acercar a los niños al mundo de la robótica a partir de la programación de acciones que siguen un proceso secuencial. En este sentido toma especial relevancia el uso de determinadas estrategias matemáticas para conseguir un reto determinado, como la ejecución del patrón AAB (adelante-adelante-pausa) para ayudar a la abeja en su tarea de recogida del néctar.

Figura 1. Material utilizado para las sesiones: Robots educativos programables, tarjetas de instrucciones y tablero de elaboración propia con el recorrido objetivo.

Sesión 1: "Descubrimos los robots"

Llegan a la clase los robots educativos programables (*Bee-bots*), se presenta el material y se explican las acciones que pueden hacer las abejas a partir de las tarjetas de instrucción. Seguidamente, por parejas, se invita a los alumnos a explorar y familiarizarse con el material, como se aprecia en la figura 2.

Figura 2. Explorando libremente las acciones de las órdenes introducidas en los robots

Figura 3. ¡Mira, pasa por un puente!

Figura 4. Yo apreté muchas veces la flecha –refiriéndose a uno de los comandos del robot- y ahora también pasa por un puente.

Figuras 5 y 6. N1: ¡Que no se escape!
N2: Se irá volando.
N1: No, no puede volar, no tiene alas.

Durante esta sesión primera sesión se ha podido observar que los alumnos han ido explorando de manera autónoma el material puesto a su alcance: sus características, su funcionamiento, etc. A través de esta exploración libre se ha constatado que, ante el reto propuesto, los alumnos comprobaban sus hipótesis y conjeturas acerca del funcionamiento de los robots a través del ensayo y error, iniciándose en el uso del lenguaje computacional para comunicar sus propias conclusiones (figuras 3 a 6). En algunos casos, se han apreciado también algunas conexiones de tipo simbólico relacionadas con su entorno cercano.

Sesión 2: "Ayudamos a los robots a desplazarse"

Se agrupan los alumnos por parejas y forman 6 equipos. Una vez que ya conocen el funcionamiento de los robots, se presenta a los alumnos un tablero formado por 7 casillas para hacer un recorrido con las abejas: en la primera casilla hay una flor, en la segunda no hay nada, en la tercera hay de nuevo una flor, y así sucesivamente hasta llegar a la última casilla. El propósito es que deben pensar las instrucciones adecuadas para hacer una parada en cada flor y conseguir que la abeja se desplace hasta el otro extremo del tablero.

En primer lugar los alumnos hacen de robot con el objetivo de interiorizar el patrón de manera vivencial y posteriormente se establece un diálogo para fomentar el uso de lenguaje tanto algebraico como computacional. Entre todos se pacta que se debe introducir el patrón AAB (dos movimientos adelante-pausa).

Seguidamente ejecutan la acción. Como se ha indicado, trabajan por parejas y cuando la abeja llega a una flor, el compañero borra las órdenes introducidas, coge la abeja, la coloca en la colmena y la programa nuevamente siguiendo el patrón.

Durante toda la sesión, el docente fomenta, a través de buenas preguntas, el diálogo y la co-autoevaluación sobre las órdenes introducidas. En las figuras 7, 8 y 9 se muestran algunas evidencias en forma de transcripción.

Figura 7. Maestra: ¿Cuántas veces tenemos que marcar la tecla "pausa"?
L: Tres veces
Maestra: ¿Y por qué 3 veces? -pregunta la maestra-
L: Porqué hay 1, 2 y 3 flores.

Figura 8. N: ¡La abeja se paró en las tres flores!
Maestra: ¿Y cómo lo conseguisteis?
N: Apretando adelante-adelante-pausa muchas veces.

Figura 9. Maestra: ¿Qué ha pasado?
N1: No se paró en la flor…
N2: Es que si no borramos primero no sale bien. –Refiriéndose a que es necesario borrar las órdenes anteriores cuando se desean introducir nuevas-

Después de analizar la segunda sesión destacamos como, en un marco de resolución de problemas, y a través de la formulación de buenas preguntas, es decir, de interrogantes que suscitan respuestas que vayan más allá de la dicotomía del sí y del no, los alumnos reflexionan sobre la situación y resuelven el problema usando estrategias matemáticas. De esta manera los alumnos van ganando en confianza y seguridad para comunicar sus acciones tanto a sus compañeros como al docente, iniciándose en el uso de lenguaje tanto algebraico como computacional (por ejemplo: "adelante-adelante-pausa muchas veces"). Este hecho favorece el desarrollo de las capacidades de los alumnos y fomenta la participación y construcción cooperativa del conocimiento.

Sesión 3: "Dibujamos el camino"

La intención de esta última sesión es que los alumnos representen en un papel el desplazamiento realizado por las abejas en el tablero durante la sesión anterior. Para ayudarles a recordar dichos desplazamientos, en primer lugar, se inicia un diálogo con los alumnos y después todos juntos recordamos, a través de una grabación audiovisual, el recorrido que hacían los robots con las órdenes que los mismos alumnos introdujeron. Finalmente, ponemos a su alcance material para representar la seriación a partir de la técnica de estampación (figuras 10 y 11).

Figura 10. ¡Dos pasos hacia adelante ahora toca este! -Refiriéndose a la flor-

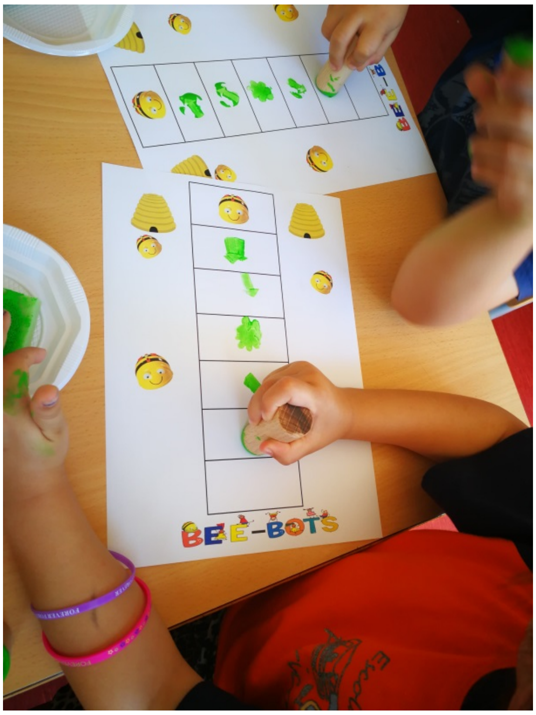


Figura 11. Un, dos, flor, un, dos… y después flor.

En esta sesión se ha puesto de manifiesto cómo los alumnos han sido capaces de iniciarse en la representación y validarla como un proceso que contribuye a organizar y comunicar ideas matemáticas.

El análisis posterior de las representaciones que han realizado los 22 alumnos nos ha permitido observar que el 41% de los participantes realizaron correctamente la representación, un 27% la ejecutó de manera incorrecta y un 32% con algún error. Estos datos evidencian que, en general, los alumnos de 3-4 años tienen dificultades para representar una acción abstracta en diferido.

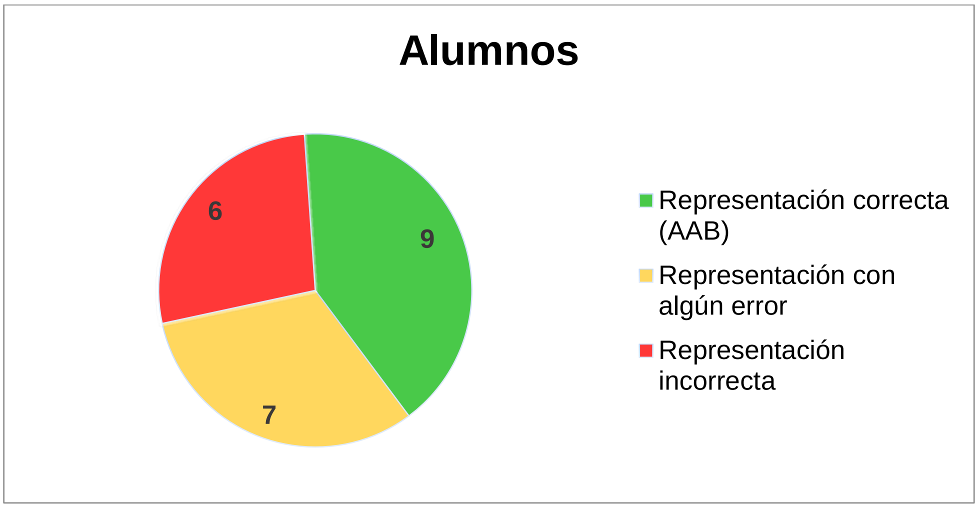


Figura 12. Diagrama circular sobre el trabajo de estampación realizado por los niños

4. Consideraciones finales

El objetivo de este trabajo ha consistido en aportar unas primeras orientaciones didácticas que contribuyan a desarrollar el razonamiento algebraico en las primeras edades a través del pensamiento computacional, en el marco de una educación STEAM.

A través de una experiencia con robots educativos programables, un grupo de alumnos de 3-4 años se ha iniciado en el aprendizaje de los patrones de repetición mediante la robótica y con acciones vinculadas a la programación (Berry, 2013), en sintonía con una de las últimas tendencias en el panorama educativo, que consiste en introducir la programación como parte del currículo desde los primeros niveles educativos como herramienta para desarrollar el pensamiento computacional (Calao et al., 2015).

A lo largo del artículo hemos puesto de manifiesto que el razonamiento algebraico y el pensamiento computacional guardan una estrecha relación, ya que ambos constructos comparten algunos rasgos fundamentales para el desarrollo intelectual de las personas. Por un lado, el reconocimiento, la comparación y el análisis de patrones contribuye a describir regularidades y, de modo más genérico, a reconocer, ordenar y organizar el mundo (NCTM, 2003). Por otro lado, el pensamiento computacional ayuda a comprender el comportamiento humano (Wing, 2006).

Dado el potencial de ambos aspectos, abogamos por una incorporación progresiva de este tipo de prácticas interdisciplinares en las que se fomenta el desarrollo del pensamiento matemático y computacional a través de la programación, usando una diversidad de recursos en función de la edad como robots educativos programables, *Scratch,* etc. Como se ha indicado, son diversos los países que han empezado a apuntar en esta dirección incorporando la programación en los currículos desde las primeras edades, pero esta tendencia sin duda debe ir acompañada de orientaciones didácticas específicas que faciliten al profesorado llevar a cabo este tipo de prácticas.

En este sentido, el análisis de los vínculos entre ambos tipos de pensamiento nos ha permitido establecer unas primeras cinco recomendaciones para el profesorado de Educación Infantil:

1. Plantear fenómenos relevantes, basados en la resolución de problemas, para fomentar el aprendizaje de los patrones y el desarrollo del pensamiento computacional. A partir de la descripción de la experiencia de los robots educativos programables hemos visto cómo, al introducir códigos secuenciados que acaban ejecutando una orden determinada, los alumnos aprenden a identificar regularidades de una manera que trasciende desde el campo concreto al abstracto.

2. Fomentar procesos de razonamiento mediante el planteamiento de buenas preguntas de las que se puede nutrir tanto el razonamiento algebraico como el

pensamiento computacional. De acuerdo con Alsina (2014), "cuando un niño argumenta críticamente el proceso de resolución y la solución de una situación, usando su propio lenguaje o bien otros recursos, estructura su pensamiento a la vez que muestra y va desarrollando su capacidad de razonar" (p. 11). En nuestro caso, por ejemplo, hemos visto como algunos alumnos han sido capaces de argumentar de forma adecuada las órdenes que debían darse para conseguir que las abejas se desplazaran en el tablero de acuerdo con la consigna dada.

3. Impulsar la interacción, la negociación y el diálogo en un marco de comunicación en el aula de matemáticas para dar sentido al uso tanto del lenguaje matemático como de los lenguajes computacionales. En la experiencia descrita los alumnos han empezado a usar lenguaje asociado al razonamiento algebraico y al pensamiento computacional, que se ha ido perfeccionando en las distintas sesiones: mientras que en la sesión 1 (de descubrimiento del material) apenas surgen nociones vinculadas a ambos aspectos, salvo en contadas excepciones (por ejemplo "apreté muchas veces la flecha", refiriéndose a uno de los comandos), en la segunda sesión aparecen diversas evidencias de ambos tipos de lenguaje ("adelante-adelante-pausa muchas veces"; etc.).

4. Vincular conocimientos de distinta naturaleza para abordar de una forma flexible e interdisciplinar una situación determinada. En el caso de las *Bee-bots*, el reconocimiento y uso interrelacionado del patrón AAB desde una perspectiva que facilita la comprensión, automatización y organización coherente, puede haber contribuido a que los alumnos lo apliquen posteriormente a otros ámbitos, a pesar de que hasta el momento no hemos obtenido evidencias en este sentido.

5. Plantear la representación como medio para comprender, estructurar, capturar y transferir conceptos o relaciones. En la experiencia descrita, por ejemplo, la representación ha permitido a los alumnos empezar a conquistar progresivamente lo simbólico -lenguaje escrito- a partir de lo concreto -situaciones reales- (Alsina, 2014). Además, han exteriorizado su grado de comprensión, lo cual ha permitido constatar que los alumnos de 3-4 años presentan todavía algunas dificultades para representar el recorrido realizado por las abejas, puesto que menos de la mitad de los alumnos (41%) han representado correctamente dicho itinerario. Ello invita a pensar que en estas edades puede ser adecuado fomentar también otros tipos de representaciones de naturaleza más oral, asumiendo que en general tienen mayores habilidades en este sentido.

En próximos estudios será necesario diseñar nuevas prácticas en el marco de la metodología STEAM que permitan ir concretando y ampliando las orientaciones didácticas descritas, a la vez que se analice mediante diseños de investigación adecuados cómo dichas prácticas abordan el desarrollo del pensamiento matemático y computacional, dado su relevante papel en el desarrollo intelectual de los alumnos de las primeras edades de escolarización.

Bibliografía

Alsina, Á. (2012a). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números, 80,* 7-24.

Alsina, Á. (2012b). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 1-14.

Alsina, Á. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números*, *86*, 5–28.

Berry, M. (2013). *Computing in the National Curriculum: a guide for primary teachers*. Bedford, UK: Computing at School. Recuperado de: http://www.computingatschool.org.uk/data/uploads/CASPrimaryComputing.pdf

Bowman, B.T., Donovan, M.S., Burns, M.S. (2001). *Eager to learn: Educating our preschoolers*. Washington, DC: National Academy Press.

Calao, L. A., Moreno-León, J., Correa, H. E., Robles, G. (2015). *Developing mathematical thinking with Scratch. Design for teaching and learning in a networked world* (pp. 17-27). Springer International Publishing.

Clements, D., Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad*. Gran Bretaña: Learning Tools LLC.

de Guzmán, M. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma, 19,* 5-25.

Godino, J., Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Granada: Universidad de Granada. Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf

ISTE, CSTA (2011). Computational Thinking: leadership toolkit. Recuperado de: https://c.ymcdn.com/sites/www.csteachers.org/resource/resmgr/471.11CTLeadershiptToolkit-S.pdf

NAEYC, NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 1-23.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NCTM (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: a quest for coherence*. Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

Papert, S. (1985). Different visions of logo. *Computers in the Schools. Interdisciplinary Journal of Practice, Theory, and Applied Research*, *2*(2-3), 3-8.

Rocard, M. (2007). *Science education NOW: A renewed pedagogy for the future of Europe*, Bruselas: European Commission. Recuperado de: http://ec.europa.eu/research/science-society/ document_library/pdf_06/report-rocard-onscience- education_en.pdf

Valverde-Berrocoso, J., Fernández-Sánchez, M.R., Garrido-Arroyo, M.C. (2015). El pensamiento computacional y las nuevas ecologías del aprendizaje. *RED, Revista de Educación a Distancia, 46*(3), 1-18. Waters (Fox), J. (2004). A Study of mathematical patterning in early childhood settings. En I. Putt, y M. Rhonda (Eds.), *Proceedings Mathematics education for the 3rh milllennium: Towards 2010. The 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia 2*, (pp. 321-328). Townsville, Queensland, Australia.

Wing, J. (2006). Computational Thinking: It represents a universally applicable attitude and skill set everyones, not just computer scientists, would be eager to learn and use. *Communications of the ACM, 49*(3), 33-35.

Zapata-Ros, M. (2015). Pensamiento computacional: Una nueva alfabetización digital. *RED, Revista de Educación a Distancia, 46*, 1-47.

Autores:

Primer autor: Alsina, Ángel**: Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina. Email: angel.alsina@udg.edu**

Segundo autor: Acosta Inchaustegui, Yenisel: **Máster en Atención a la Diversidad en una Educación Inclusiva. Miembro del Grupo de Investigación "Educación, Infancia y Conexiones" de la Universidad de Girona. Graduada en Maestra de Educación Infantil con mención de "Expresiones y ambientes en la Escuela Infantil". Email: yeni.acosta@udg.edu**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 236-249

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Análisis del conteo como contenido matemático en un episodio de dibujos animados para educación infantil

Pablo Beltrán-Pellicer, Alberto Arnal-Bailera, José M. Muñoz-Escolano

Fecha de recepción: 11/12/2017
Fecha de aceptación: 23/01/2018

Resumen	Si bien la mayoría de los trabajos existentes sobre la utilización de series y películas en educación matemática se centran en la etapa secundaria, es evidente que también tiene su aplicación en infantil y primaria. Este recurso pone en juego objetos matemáticos en situaciones cotidianas o imaginables por el alumnado que permiten mejorar la idoneidad de los procesos de aprendizaje. Ahora bien, los docentes deben ser competentes para identificar estos objetos, así como su intencionalidad y su significado. En este estudio, utilizamos herramientas del Enfoque Ontosemiótico para ilustrar un análisis de un episodio de una serie de dibujos animados infantiles (3-6 años) en torno al conteo. **Palabras clave**: dibujos animados, educación matemática, educación en la primera infancia.
Abstract	While most of the existing work on the use of series and movies in mathematics education focuses on the secondary stage, it is evident that it also has its application in children and primary education. This resource puts into play mathematical objects in everyday or imaginable situations by the students, allowing to improve the suitability of the learning processes. Now, teachers must be competent to identify these objects, as well as their intentionality and meaning. In this study, we use tools from the Onto-semiotic Approach to illustrate an analysis of an episode of a series of children's cartoons (3-6 years) around counting. **Keywords**: animated cartoons, mathematics education, early-childhood education.
Resumo	Embora a maior parte do trabalho existente sobre o uso de séries e filmes em educação matemática se centre no estágio secundário, é evidente que também tem sua aplicação em crianças e educação primária. Esse recurso coloca em prática objetos matemáticos em situações cotidianas ou imaginários pelos alunos, permitindo melhorar a adequação dos processos de aprendizagem. Agora, os professores devem ser competentes para identificar esses objetos, bem como sua intencionalidade e significado. Neste estudo, usamos ferramentas da Abordagem Ontosemiótica para ilustrar a análise de um episódio de uma série de desenhos animados de crianças (3-6 anos) em torno da contagem. **Palavras-chave:** Desenhos animados, educação matemática, educação infantil.

1. Introducción

La ficción audiovisual posee un lenguaje propio, el cinematográfico, que por su capacidad expresiva ha sido objeto de interés de docentes e investigadores. Largometrajes y series conforman un recurso didáctico ampliamente utilizado en las aulas para la enseñanza y el aprendizaje de diferentes campos. En general, puede decirse que estamos ante un recurso sobre el que se han elaborado diversas propuestas para el aula y que resulta accesible al profesorado, con alta disponibilidad y que, a priori, es atractivo y motivador para los alumnos. En el ámbito de la educación matemática existe cierta tradición que pone de relevancia la relación entre cine y matemáticas y, como veremos, la mayoría de estas propuestas están centradas en la etapa secundaria. Es habitual que las actividades se elaboren en torno al visionado de fragmentos breves, para aprovechar al máximo el tiempo lectivo disponible,

No obstante, el empleo de este recurso dista en muchas ocasiones de ser el óptimo. En este sentido, Hobbs (2006, pp. 40-44) enumera hasta siete formas no adecuadas de utilización del vídeo en el aula:

1. No tener un objetivo instruccional bien definido.
2. No utilizar la pausa, el rebobinado y no volver a visionar el material.
3. Que el docente se tome las proyecciones como tiempo de descanso o para preparar otras cosas.
4. Que el docente desconecte mentalmente en las proyecciones.
5. El docente utiliza las proyecciones como una recompensa para su alumnado.
6. El docente emplea este recurso únicamente para captar la atención del alumnado.
7. El docente utiliza el vídeo como una forma de regular el comportamiento del alumnado.

Teniendo en cuenta estos puntos, una secuencia adecuada para educación infantil podría partir del visionado de un breve episodio o fragmento que movilizara cierto contenido matemático, como algunas técnicas de recuento. Posteriormente, se discutirían en asamblea, de forma guiada por el docente, ciertos aspectos de ese contenido: «¿hasta qué número han contado?», «¿cómo lo han hecho? «¿sabemos nosotros?». Resulta natural también volver a ver el vídeo, detenerlo y preguntarse si los personajes han realizado bien el recuento (a veces hay gazapos), o contar otros objetos que aparezcan. Ahora bien, de forma previa a plantear la actividad, interesa analizar la relevancia epistémica de los fragmentos que se vayan a visionar. Es decir, tener claras las prácticas, objetos y procesos matemáticos que se ponen en juego, y diseñar las tareas para alinearse con dichos elementos.

Por otro lado, entre los 3 y 5 años, los dibujos animados constituyen un medio preferencial para el acceso a la cultura, como objeto de construcción social, por parte de los niños (Sevillano, de la Torre, & Carreras, 2015). Es interesante, por tanto, preguntarse por las matemáticas que transmiten, en su sentido más amplio, ya que los significados personales y creencias que vayan adquiriendo los niños se verán influidos por la manera en que estas son presentadas.

En estudios previos sobre la utilización de fragmentos de dibujos animados (Beltrán-Pellicer, 2017; Beltrán-Pellicer, Arnal-Bailera, & Muñoz-Escolano, 2017a, 2017b) nos hemos interesado por este tipo producciones orientadas al público de infantil y de primaria, emitidas en canales de entretenimiento, pero con cierta intencionalidad didáctica. En dichos trabajos se analizan fragmentos de *Equipo Umizoomi*, que tiene entre su equipo de asesores pedagógicos a investigadores en educación matemática como English y Ginsburg, y de *Dora, la exploradora*, de los mismos productores.

En este trabajo utilizamos herramientas teóricas propias de enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Font, Godino & Gallardo, 2013; Godino, Batanero, & Font, 2007) para identificar los sistemas de prácticas y revelar la naturaleza de los objetos matemáticos que emergen en un episodio de la popular serie de dibujos animados *Peppa Pig* (Baker & Astley, 2004-2017).

2. Antecedentes, marco teórico y objetivo

Los antecedentes han de buscarse, en primer lugar, en los esfuerzos de docentes e investigadores en establecer una relación entre cine y matemáticas más allá de lo anecdótico. Son ejemplos claros de ello los libros y artículos de Población (2006), Polster & Ross (2012), Reinhold (1997) o Sorando (2014). Así mismo, varios de estos autores indagan en las posibilidades aplicaciones de esta relación en el aula de matemáticas, sugiriendo actividades, principalmente, en torno a la utilización de fragmentos seleccionados (Martín & Martín, 2009; Raga, Muedra, & Requena, 2009; Sorando, 2004). De esta forma, al tratarse de un recurso explotado por el profesorado, principalmente en secundaria, es natural preguntarse por la naturaleza y por la idoneidad didáctica de tales propuestas (Beltrán-Pellicer, 2015; Beltrán-Pellicer & Asti, 2014).

En el ámbito de la educación infantil, Población (2014) señala que en las series y películas de dibujos animados también hay abundancia de referencias matemáticas y que, aunque puedan resultar simples, muestran las matemáticas como una actividad útil en situaciones cotidianas.

Como hemos mencionado, recientemente hemos analizado episodios de dibujos animados (Beltrán-Pellicer, 2017; Beltrán-Pellicer, et al., 2017a, 2017b) con la mirada puesta en los futuros profesores de educación infantil y primaria. Con el objetivo de describir el contenido matemático, analizamos los objetos matemáticos primarios desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero, & Font, 2007), dentro del modelo general de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas que propone para la formación de profesorado (Godino, Batanero, Font, & Giacomone, 2016).

El objetivo del trabajo desarrollado en este artículo es mostrar la aplicación de las herramientas teóricas de análisis del EOS (configuración ontosemiótica) sobre un fragmento de un episodio de dibujos animados orientado al entretenimiento, pero con contenido matemático. Tal análisis, a su vez, persigue una doble finalidad. Por un lado, ejemplificar formalmente este tipo de descripción epistémica, como base para el diseño de procesos de enseñanza-aprendizaje y, por otro lado, abre una línea de investigación al poder ser considerado como un instrumento en la formación didáctico-matemática de maestros.

3. Metodología

La metodología es de carácter cualitativo e interpretativo, centrada en el entendimiento de los significados involucrados en el proceso de estudio (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010). Como hemos mencionado anteriormente, en este artículo nos centramos en el análisis de un episodio de una serie infantil orientada al entretenimiento, por lo que hemos seleccionado la serie de dibujos *Peppa Pig*. Se trata de una serie muy popular entre el público infantil, que comenzó a emitirse en 2004 y que, todavía en 2017, sigue estando de plena actualidad. La protagonista de la serie es Peppa, una cerdita con rasgos antropomorfos que vive con su familia, compuesta por sus padres y su hermano pequeño George. Muchos episodios se desarrollan en la casa familiar o en escenarios cotidianos, como el supermercado, la escuela, etc.

Para llevar a cabo la interpretación del episodio de dibujos animados vamos a aplicar la herramienta de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y significados, como se recoge en el trabajo de Giacomone, Godino, Wilhelmi, & Blanco (2016).

4. Resultados y discusión: análisis de un episodio

A continuación, se analiza el episodio titulado *Números* (tercera temporada de *Peppa Pig*, episodio 25), identificando los tipos de prácticas matemáticas, los objetos y los significados correspondientes (un análisis completo incluiría también una identificación de los procesos) que van apareciendo a lo largo de sus escasos 4 minutos de duración. La descomposición del episodio en unidades de análisis (situaciones) en función de la narrativa, y que se concreta en los cambios de contexto o escenario, puede interpretarse como una sucesión de configuraciones ontosemióticas, en las que diversos objetos matemáticos se articulan por medio de sus representaciones ostensivas.

En las transcripciones, denotaremos los números con palabras cuando se pronuncien verbalmente en el episodio, reservando los símbolos numéricos cuando estos aparezcan escritos.

4.1. Situación inicial

El episodio se desarrolla en la escuela de Peppa, lo que justifica desde el punto de vista narrativo el tratamiento tan explícito de los números que se hace en él. Hemos de tener presente que *Peppa Pig* es una serie cuyo principal objetivo es el de entretener, y no posee, por ejemplo, esa intencionalidad didáctica que se aprecia en *Equipo Umizoomi* o *Dora, la exploradora*. Es en los primeros instantes (0:22-0:35), cuando el narrador nos introduce el contexto en el que se va a desarrollar la acción, la escuela de Peppa:

NARRADOR: Hoy es día de escuela para Peppa y sus amigos.
MADAME GAZELLE: Buenos días niños. Hoy dedicaremos la clase a aprender los números. ¿Alguien me puede decir para qué sirven los números?
PEPPA: Los números son para contar.
MADAME GAZELLE: Sí, Peppa.

La primera pregunta que lanza Madame Gazelle, la maestra de Peppa, no es en absoluto inocente. Está preguntado por la utilidad de los números, a lo que Peppa responde, simplemente, que sirven para contar. A pesar de que la maestra da por buena la respuesta, la realidad es bien distinta, pues los números no se utilizan únicamente para efectuar recuentos de cardinales o indicar ordinales. Así, por ejemplo, también se utilizan para medir o para codificar (Cid, Godino, & Batanero, 2003). Por el contexto y al público al que va dirigido el capítulo (niños menores de 6 años), también se asume que los números a los que se refiere Madame Gazelle son números naturales o enteros positivos.

Después de esta situación inicial, se suceden una serie de tres situaciones alrededor del concepto de número.

4.2. Descomposición en unidades de análisis (situaciones-problema)

La situación 1 comienza inmediatamente después de la presentación del contexto del episodio y del tema central del mismo (0:36-1:24). Se trata, en realidad, tres situaciones de recitado de la secuencia numérica, que no conllevan ningún significado ni como cardinal ni como ordinal, aunque en lugar de recitar, en los diálogos se emplee el verbo contar. Así, se recita del 1 al 4, del 1 al 7 y, finalmente, del 8 al 10. Sí que se aprecia, al final de esta situación, el principio de correspondencia uno a uno, cuando la maestra señala la grafía de los números 8, 9 y 10 conforme los van recitando:

MADAME GAZELLE: ¿A quién le gustaría contar un poco? A ver, tú, Pedro.
PEDRO: Uno, dos, tres, cuatro.
NARRADOR: Pedro ha contado hasta cuatro.
MADAME GAZELLE: Muy bien, Pedro, ¿alguien sabe contar hasta más de cuatro?
REBECCA: Yo, yo, yo. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.
NARRADOR: Rebeca ha contado hasta siete.
MADAME GAZELLE: Excelente, Rebecca.
CANDY: ¡Madame Gazelle!
MADAME GAZELLE: Excelente, Rebecca. Dime, Candy
CANDY: Mi mamá sabe contar hasta diez.
TODOS: ¡Hala!

MADAME GAZELLE: (Mientras señala los números 8, 9 y 10 en una pizarra) Bien, después del siete, van el ocho, el nueve y el diez.
TODOS: Ocho, nueve, diez.

Además del lenguaje verbal, los números aparecen representados en la grafía indo-arábiga sobre la pizarra del aula. La Figura 1 muestra esta pizarra y, en la esquina superior derecha, también se aprecian otros números.

Figura 1. Situación de recitado, correspondencia uno a uno.
Fuente: *Peppa Pig, Números (3x25)* (Baker & Astley, 2004-2017).

Además del lenguaje verbal, los números aparecen representados en la grafía indo-arábiga sobre la pizarra del aula. La Figura 1 muestra esta pizarra y, en la esquina superior derecha, también se aprecian otros números.

Cuando suena el timbre del recreo, los alumnos salen a jugar. Peppa y dos amigas se ponen a jugar a la comba y, tras haber saltado unas cuantas veces a la comba, cantando una canción, da comienzo la situación 2 (1:52-2:14). El momento exacto es cuando uno de los personajes (Zoe) propone ver quién salta más veces:

ZOE: Tengo una idea, vamos a ver quién salta más veces seguidas sin parar.
REBECCA: Me pido contar.
(Peppa salta 5, Susy 8 y Zoe 10, mientras Rebecca recita la secuencia de uno hasta diez)
REBECCA: ¡Ha ganado Zoe!

Aquí se aprecia un significado más rico de los números. Ya no es un simple recitado, pues están asignando números a los cardinales de los conjuntos de los saltos realizados hasta un momento dado por cada personaje. Como realizan los saltos a la vez, es más difícil apreciar el significado de cardinalidad de los números, ya que basta con observar quién termina el último. En la escena, vuelve a observarse con claridad el principio de correspondencia uno a uno, pues los personajes nombran el número justo en el momento de realizar el salto.

La situación 3 (2:14-2:53) comienza cuando entra el personaje llamado Pedro en escena con un hula hoop. Le invitan a saltar a la comba, pero Pedro prefiere jugar al hula hoop. Así que, en lugar de contar saltos, cuentan vueltas del aro del hula hoop, que complica la aplicación del principio de correspondencia, al no poder distinguir claramente cuándo termina una vuelta y empieza la siguiente. Sin embargo, la situación 3 se diferencia de la anterior en que antes de contar, Pedro realiza una estimación del número de saltos que cree que puede alcanzar. Como piensa que se le da muy bien, lo indica con un número exageradamente grande (un millón), y luego le añade tres. En este punto, se aprecia cierto conocimiento de formación de las palabras que determinan números de más de dos cifras en el sistema decimal y un indicio de que el proceso de contar no tiene fin:

SUSY: ¿Cuántas veces lo puedes hacer sin que se caiga?
PEDRO: Creo que un millón… y tres.
PEPPA: Hala, cuántas veces
ZOE: Empieza, vamos a contar.
TODAS: (Conforme salta Pedro) Una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.
ZOE: Has hecho ocho.

El principio de correspondencia uno a uno se pone a prueba en la situación 4 (2:53-3:09), que comienza cuando entra en escena Emily, personaje caracterizado como un elefante, que baila el hula hoop con la trompa. Las vueltas, en este caso, son mucho más rápidas que las de Pedro y resulta complicado asignar un número a cada una:

ZOE: Yo creo que han sido como unas… ¡cien veces! (son 5 o 6 veces en realidad)

A continuación, nos encontramos con la situación 5 (3:09-3:35). George, el hermano pequeño de Peppa, quiere jugar al juego tradicional de la pídola (una variante), en el que uno de los participantes salta apoyando las manos sobre la espalda de otro, el cual está doblado sobre sí mismo hacia delante. Los saltos se realizan sobre una cuadrícula de rayuela, como se aprecia en las Figuras 2 y 3, haciendo corresponder cada salto con el número correspondiente, mientras los van recitando (uno, dos, tres, …, diez).

Figura 2. Escena del juego de la pídola, antes de comenzar a saltar. Fuente: *Peppa Pig, Números (3x25)* (Baker & Astley, 2004-2017).

Resulta curioso el hecho de que la representación de los números sobre la rayuela (Figura 1), sea diferente a la que se observa cuando George está saltando (Figura 2). Así, cuando se puede observar la rayuela entera en la pantalla, los números siguen un orden secuencial, pero no una línea recta. En cambio, los saltos de George se producen sobre una suerte de recta numérica.

Figura 3. Escena del juego de la pídola, George saltando. Fuente: *Peppa Pig, Números (3x25)* (Baker & Astley, 2004-2017).

La sexta, y última, de las situaciones, tiene lugar cuando regresan al aula (3:40-4:46) e informan a la maestra de que ya saben contar, pero solo cuando están jugando. En realidad, antes del recreo no estaban contando, solamente recitando. Durante el recreo han sido capaces de contar colecciones de diferentes objetos: saltos a la comba, vueltas de hula hoop y saltos de pídola:

PEPPA: Madame Gazelle. Ya sabemos todos contar hasta diez.
MADAME GAZELLE: Estupendo
PEDRO: Pero nos sale bien si contamos jugando.
MADAME GAZELLE: Richard, Edmond, por favor, traed la cuerda de saltar super larga.

A continuación, entra el padre de Peppa, Papá Pig, que venía a recogerla, y la profesora le invita a saltar a la comba. En la escena se observa cómo cuentan hasta 10 mientras dan saltos y, con cada salto, se incorpora un nuevo personaje a la comba y aparece la grafía del número por pantalla (Figura 4). Como reflejaremos en la configuración ontosemiótica, la riqueza en representaciones de esta situación es especial, pues tenemos:

- Un conjunto, los personajes que hay en cada momento saltando a la comba.
- Otro conjunto, los saltos que lleva realizados Papá Pig.
- La grafía del número que expresa la cardinalidad de los conjuntos que se han formado hasta un momento dado.
- Cada palabra numérica se canta cada vez que se incorpora alguien y se da un nuevo salto (uno, dos, tres, etc.).
- La pizarra de clase con la secuencia simbólica del 1 al 10.
- Los cristales de las ventanas de clase con la secuencia simbólica del 1 al 9.

Figura 4. Significado del número como ordinal y como cardinal. Fuente: *Peppa Pig, Números (3x25)* (Baker & Astley, 2004-2017).

La situación termina volviendo a poner en juego números muy grandes (100):

MADAME GAZELLE: ¿Qué pasa, estás muy cansado?
PAPÁ PIG: Qué va, estoy bien. Podría seguir hasta cien.
MADAME GAZELLE: ¡Buena idea, Papá Pig! Venga, a saltar hasta cien.
PAPÁ PIG: No, mejor hasta veinte.
MADAME GAZELLE: Muy bien, solo hasta veinte.
TODOS: (Mientras toca Madame Gazelle la guitarra y salta Papá Pig) ¡Once! ¡Doce!

4.3. Configuraciones epistémicas de objetos y significados

En cada una de estas situaciones se ponen en marcha diversos sistemas de prácticas operativas y discursivas (recitado, cálculo de cardinales, comparación de cardinales, etc.) de las que emergen diferentes objetos matemáticos y significados. De acuerdo con la ontología propia del EOS (Godino, et al., 2007), estos objetos se clasifican en: lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos. La peculiaridad de aplicar este tipo de análisis sobre fragmentos de un episodio de dibujos animados es que las representaciones de estos objetos, esto es, su faceta ostensiva, se articula dentro del hilo narrativo de la acción.

De esta forma, en la Tabla 1 desglosamos la configuración epistémica (CE) de cada una de las situaciones con contenido matemático que se identifican a lo largo del episodio. Los objetos matemáticos no han de verse como entidades aisladas, sino que sobre ellos actúan funciones semióticas, dotándoles de significación. Así, en el caso que nos ocupa, la faceta ostensiva de todos ellos la conforman las representaciones (lenguaje verbal, gráfico, simbólico, etc.) que se observan en cada situación.

Un aspecto que diferencia esta serie de dibujos animados de las que hemos analizado en anteriores trabajos (*Equipo Umizoomi* y *Dora, la exploradora*) es que en *Peppa Pig* la acción no se detiene para que los personajes, rompiendo la cuarta pared, se dirijan a los espectadores para preguntarles por la solución a un determinado problema. En *Peppa Pig*, en cambio, tenemos la figura del narrador, que únicamente aparece en momentos muy concretos, ayudando a contextualizar la historia (p. ej., «hoy es día de escuela») y acercando el lenguaje a la narrativa propia de los cuentos infantiles.

CE	Objetos	Uso e intencionalidad de las prácticas
1	*Lenguajes*: verbal (palabras numéricas), simbólico (grafía de los números, en la pizarra de clase). *Conceptos*: número (sin significado). *Procedimientos*: recitado de la secuencia numérica.	Recitar la secuencia numérica del 1 al 4, del 1 al 7 y del 8 al 10.
2	*Lenguajes*: verbal (palabras numéricas), visual (saltos de comba). *Conceptos*: número (cardinal). *Procedimientos*: técnica de recuento recitando la secuencia numérica a la vez que se produce un nuevo salto. El cardinal del conjunto es el último número recitado (implícito, no se enfatiza pronunciando de nuevo la última palabra). *Proposiciones*: - Para ver quién salta más a la comba se pueden calcular los cardinales de los conjuntos de saltos de forma simultánea. - El cardinal es mayor si la palabra se pronuncia más tarde en el recitado de la secuencia numérica. *Argumentos*: - Porque si la palabra que denota el último elemento del conjunto se pronuncia más tarde, el cardinal de ese conjunto es mayor que el del primero.	Ver quién salta más a la comba.
3	*Lenguajes*: verbal (palabras numéricas), visual (vueltas de hula hoop). *Conceptos*: número (cardinal). *Procedimientos*: técnica de recuento recitando la secuencia numérica a la vez que se produce una nueva vuelta. El cardinal del conjunto es el último número recitado. *Proposiciones*: - Las expresiones «un millón» o «un millón y tres» sirven para denotar cardinales inimaginablemente grandes de colecciones de objetos. *Argumentos*: -Porque la expresión «un millón» aparecería mucho más tarde en la secuencia numérica (implícito, no se justifica expresamente).	Contar cuántas vueltas puede dar Pedro al hula hoop.
4	*Lenguajes*: verbal (palabras numéricas), visual (vueltas de hula hoop). *Conceptos*: número (cardinal). *Proposiciones*: - La expresión «cien veces» sirve para denotar cardinales de conjuntos grandes que no podemos contar directamente mediante la correspondencia uno a uno. - No se puede contar de forma exacta si no se puede establecer una correspondencia uno a uno con las vueltas del aro. *Argumentos*: porque no da tiempo a recitar la palabra que determina el número correspondiente cada vez.	Contar cuántas vueltas puede dar Emily al hula hoop.
5	*Lenguajes*: verbal (palabras numéricas), visual (saltos), simbólico (grafía de los números en la rayuela). *Conceptos*: número (cardinal), recta numérica.	Contar el número de saltos de pídola que da George.

	Procedimientos: técnica de recuento recitando la secuencia numérica a la vez que se produce un nuevo salto y se señala la grafía del número correspondiente. El cardinal del conjunto es el último número que se recita o que aparece escrito (implícito, no se enfatiza pronunciando de nuevo la última palabra).	
6	*Lenguajes*: verbal (palabras numéricas), visual (saltos y personajes saltando en cada momento), simbólico (grafía de los números en la pantalla, en la pizarra y en la pared). *Concepto*: número (cardinal), siguiente. *Procedimientos*: técnica de recuento recitando la secuencia numérica a la vez que se produce un nuevo salto, se incorpora un nuevo elemento al conjunto de personajes saltando y se señala la grafía del número correspondiente. El cardinal del conjunto es el último número que se recita o que aparece escrito (implícito, no se enfatiza pronunciando de nuevo la última palabra). *Proposiciones*: - La siguiente palabra en la secuencia numérica denota el cardinal de un nuevo conjunto formado por los elementos del primer conjunto y un nuevo elemento más. - La palabra numérica «cien» sirve para denotar cardinales grandes de colecciones de objetos. - El número 20 es un número menor que el número 100. Argumentos: - Porque la aplicación del principio de correspondencia uno a uno implica añadir un elemento al conjunto a la vez que se pronuncia la siguiente palabra de la secuencia numérica. - Porque los niños son capaces de recitar hasta el 20 y no hasta el 100.	Demostrar a la maestra que saben contar cuando juegan saltando 10 veces a la comba.

Tabla 1. Configuraciones epistémicas (CE) de objetos y significados del episodio completo.

5. Conclusiones

Al principio del episodio, la maestra emplea la palabra «contar» para referirse exclusivamente al recitado de la secuencia numérica. Como apuntan diversos autores (Cid, Godino, & Batanero, 2003; Godino, Font, Wilhelmi, & Arreche, 2009), el número natural se construye alrededor de su significado como cardinal y ordinal, y para ello no basta con recitar. La sucesión de situaciones, descritas a partir de sus configuraciones epistémicas, pone de relevancia que, al menos, se añade el significado de cardinal a partir del recuento de diferentes colecciones de objetos, relacionándolo con diversas representaciones (lenguaje verbal, gráfico, simbólico). Este proceso de significación, a lo largo del episodio, permite hablar de una idoneidad epistémica media-alta, considerando los indicadores de Godino (2013), donde se señala la importancia de implicar diversas representaciones de un mismo objeto matemático y de articular los significados parciales en el seno de un proceso formativo.

Ahora bien, el análisis revela que no se enfatiza lo suficiente la obtención del cardinal, ya que no se repite la palabra que denota al último elemento de cada conjunto en los recuentos. Por otro lado, en alguna de las situaciones, no es posible aplicar fácilmente el principio de correspondencia uno a uno entre las palabras de la secuencia numérica y los objetos a contar. Es el caso de las vueltas de hula hoop, donde resulta complicado discernir cuándo acaba una vuelta y cuándo empieza otra.

El docente que planee utilizar este fragmento (o uno similar) deberá tener en cuenta estos aspectos para maximizar la idoneidad del proceso de enseñanza-aprendizaje que diseñe en torno a él y, de esta forma, evitar la utilización no-óptima de este recurso (Hobbs, 2006). Por ejemplo, después de haber visto una vez el episodio, se puede detener la proyección para hacer hincapié en el cálculo de cardinales.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro de los proyectos MINECO EDU2016-74848-P y EDU2015-65378-P subvencionados por FEDER, AEI; y en el grupo «S119-Investigación en Educación Matemática» financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

Bibliografía

Baker, M., & Astley, N. (2004-2017). Peppa Pig. [Serie de TV]. Reino Unido: Astley Baker Davies Ltd. / Contender Group / Entertainment One.

Beltrán-Pellicer, P. (2015). *Series y largometrajes como recurso didáctico en matemáticas en educación secundaria*. Tesis doctoral. UNED.

Beltrán-Pellicer, P. (2017). Un equipo matemático para resolver problemas. *EDMA0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(1), 75-81.

Beltrán-Pellicer, P., Arnal-Bailera, A., & Muñoz-Escolano, J. M. (2017a). Análisis ontosemiótico de un episodio de dibujos animados con contenido matemático. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Beltrán-Pellicer, P., Arnal-Bailera, A., & Muñoz-Escolano, J.M. (2017b). Reconocer prácticas, objetos, y procesos matemáticos al seleccionar dibujos animados para el aula de infantil y primaria. En E. López-Meneses, D. Cobos, A. H. Martín; L. Molina-García & A. Jaén (Eds.) *INNOVAGOGÍA 2016. Libro de Actas de III Congreso Internacional sobre Innovación Pedagógica y Praxis Educativa*. AFOE Formación: Sevilla, ES. Disponible en, http://www.innovagogia.es/

Beltrán-Pellicer, P., & Asti, A. (2014). Utilización didáctica del cine en Matemáticas. *Enseñanza y Teaching: Revista Interuniversitaria de Didáctica, 32*, 123–145.

Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97–124. DOI: 10.1007/s10649-012-9411-0.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 275-284). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Arreche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es el número? *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 19*, 34-46.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127–135.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Hobbs, R. (2006). Non-optimal uses of video in the classroom. *Learning, Media and Technology, 31*(1), 35-50.

Martín, A., & Martín, M. (2009). El cine como recurso didáctico en el aula de matemáticas: La Habitación de Fermat. *Sigma, 34*, 91-106.

Población, A. J. (2006). *Las Matemáticas en el Cine. Proyecto Sur de Ediciones*. Real Sociedad Matemática Española.

Población, A. J. (2014). Cine y matemáticas: dibujos animados y matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de Las Matemáticas, 66*.

Polster, B., & Ross, M. (2012). *Math Goes to the Movies*. Johns Hopkins University Press.

Raga, M. C., Muedra, A., & Requena, J. (2009). *Matemáticas de cine*. Generalitat Valenciana.

Reinhold, A. G. (1997). Math in the Movies. *Math Horizons, 4*(4), 9-12.

Sevillano, M., de la Torre, S., & Carreras, C. (2015). El cine, recurso formativo. 18 años de investigación del grupo GIAD. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 46.

Sorando, J. M. (2004). Matemáticas... de cine. *SUMA, 47*, 125-131.

Sorando, J. M. (2014). *100 escenas de cine y TV para la clase de Matemáticas*. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Pablo Beltrán-Pellicer
Doctor en Innovación e Investigación en Didáctica por la Universidad Nacional de Educación a Distancia y Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (España). Actualmente es profesor asociado en el área de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Zaragoza (España) y profesor de secundaria y bachillerato. pbeltran@unizar.es

Alberto Arnal-Bailera
Profesor en la Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza, Área de didáctica de la matemática. Doctor en Didáctica de las Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona (2013). Sus intereses de investigación se centran en el análisis de secuencias didácticas que introduzcan elementos innovadores en la enseñanza de las matemáticas. albarnal@unizar.es

José María Muñoz-Escolano
Licenciado en Matemáticas y Doctor por la Universidad de Zaragoza. Sus intereses de investigación se centran en la didáctica del número racional y la proporcionalidad, el análisis de recursos para la enseñanza de las matemáticas y la historia de la educación matemática. En la actualidad, trabaja como profesor Contratado Doctor interino en la Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza (España). jmescola@unizar.es

Autor para correspondencia:

Pablo Beltrán-Pellicer
Facultad de Educación. Universidad de Zaragoza.
C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009, Zaragoza (España).
Teléfono: +34 876554812
e-Mail: pbeltran@unizar.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 250-262

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

EL USO DE COMANDOS Y GUIONES EN LA ELABORACIÓN DE SIMULADORES CON GEOGEBRA

Luis Andrés Castillo Bracho, Juan Luis Prieto G.

Fecha de recepción: 06/06/2017
Fecha de aceptación: 11/11/2017

Resumen	Elaborar simuladores con GeoGebra es una actividad que consiste en construir dibujos dinámicos que representan las formas y movimientos de fenómenos reales. La experiencia con esta actividad ha mostrado una tendencia de los estudiantes a utilizar solamente herramientas de construcción y medida para lograr lo anterior, produciendo muchas veces complicaciones técnicas difíciles de superar. Ante esta realidad, el uso de comandos y guiones representa una opción viable para superar estas complicaciones. En este trabajo se describen dos experiencias concretas de uso de comandos y guiones para elaborar simuladores con GeoGebra, que son un aporte directo a esta actividad. **Palabras clave**: Construcción geométrica, simuladores, comandos, guiones, GeoGebra
Abstract	Elaborating simulators with GeoGebra is an activity that consists of constructing dynamic drawings that represent the forms and movements of real phenomena. Experience with this activity has shown a tendency for students to use only construction and measurement tools to achieve the above, often producing technical complications difficult to overcome. Faced with this reality, the use of commands and scripts represents a viable option to overcome these complications. This work describes two concrete experiences of using commands and scripts to develop simulators with GeoGebra, which are a direct contribution to this activity. **Keywords**: Geometry construction, simulations, commands, scripts, GeoGebra
Resumo	Elaborar simulações com o software GeoGebra é uma atividade que consiste em construir desenhos dinâmicos que representam as formas e movimentos de fenômenos reais. A experiência com esta atividade tem mostrado uma tendência dos estudantes a utilizarem somente ferramentas de construção e medida para a realização das simulações, produzindo muitas vezes ligações técnicas que são difíceis de superar. Diante dessa realidade, o uso de comandos e scripts representa uma opção viável para superar essas complicações. Neste trabalho descrevem-se duas experiências concretas com uso de comandos e scripts para elaboração de simulações com o GeoGebra, que poderão contribuir muito para a realização dessa atividade **Palavras-chave:** Construções geométricas, simuladores, comandos, scripts, GeoGebra

1. Introducción

En el año 2013, el *Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática* pone en marcha el proyecto "Club GeoGebra para la Diversidad" en Venezuela, Básicamente, el proyecto consiste en conformar pequeños colectivos de estudiantes de Educación Media (14-17 años) que se dedican a elaborar simuladores con GeoGebra (Prieto & Gutiérrez, 2015; 2016). Los clubes GeoGebra funcionan en instituciones oficiales y son dirigidos por profesores de Matemática y Física, quienes asumen el rol de "promotores" de los aprendizajes.

El medio por excelencia para la elaboración de los simuladores es el GeoGebra, un software de matemática dinámica que ofrece, entre otras aplicaciones, un entorno de geometría dinámica en 2D y 3D (Hohenwarter & Preiner, 2007; Mihailova, Mierlus-Mazilu & Velikova, 2014). El funcionamiento del GeoGebra es aprendido en la medida que los estudiantes se involucran en la actividad de elaboración de simuladores, a medida que transcurren las sesiones de trabajo. Sin embargo, además de sus herramientas de construcción y medida, el software posee otras funcionalidades dinámicas, entre éstas los "comandos" y "guiones", que aún no han sido incorporadas plenamente en la dinámica de elaboración de simuladores en los clubes, muy a pesar de las ventajas que representa su uso.

Con el fin de contribuir al uso de comandos y guiones en la elaboración de simuladores que ocurren en los Clubes GeoGebra, este trabajo describe dos experiencias producidas en estos contextos en donde se pone de manifiesto la utilidad de estas opciones del software, destacando las ventajas que ha representado su uso para los estudiantes involucrados.

2. Elaboración de Simuladores con GeoGebra

Actualmente, los simuladores computacionales son muy utilizados en diversos campos científicos, tales como, en Ingeniería, Medicina, Economía, Matemática, Física, entre otros. En el campo de la Educación, esta clase de simuladores han sido utilizados como medios para el estudio de fenómenos y contenidos propios de la Matemática y de las Ciencias Naturales, derivando en experiencias de mucho provecho para profesores y estudiantes (Clark, Nelson, Sengupta & D'Angelo, 2009). Al usar un simulador, los estudiantes interaccionan con el modelo computacional del fenómeno correspondiente, de tal manera que llegan a manipular las variables que controlan el modelo con el fin de analizar, comprender y predecir el comportamiento del fenómeno, conforme el tiempo transcurre.

Elaborar un simulador computacional supone construir el modelo computacional que represente a determinado fenómeno real en un medio tecnológico específico (Baek, 2009; Pugnaloni, 2008; Rodríguez & Roggero, 2014). En el caso del GeoGebra, el modelo computacional que se produce tiene todas las cualidades de un *dibujo dinámico* (Laborde, 1997, p. 40), en el sentido de haber sido construido en un entorno de geometría dinámica y mantener invariantes las propiedades y relaciones que son declaradas en su construcción. Estos modelos son construidos en la vista gráfica del GeoGebra en atención a unos modelos matemáticos que orientan la construcción y que son el resultado de la matematización del fenómeno (Gutiérrez, Prieto & Ortiz, 2017, pp. 40 - 45). La complejidad de las formas y movimientos asociados a cada situación que se intenta representar con el GeoGebra, hace necesario considerar tanto al conjunto de objetos matemáticos que orientan la construcción de los dibujos dinámicos, como las diferentes herramientas y funcionalidades del software que permiten lograr la consistencia deseada en la representación del fenómeno (o alguna parte de éste).

En esta parte, es importante mencionar que la actividad de elaboración de un simulador con GeoGebra está organizada por *tareas de simulación* (Rubio, Prieto & Ortiz, 2016). Para resolver una tarea de este tipo, los estudiantes deben: (*i*) elaborar un "boceto" de aquella parte del fenómeno que se quiera representar en el software, (*ii*) identificar las formas y movimientos presentes en el boceto desde un punto de vista matemático y (*iii*) construir los dibujos dinámicos asociados a tales formas y movimientos. En relación a la construcción, es una tendencia generalizada que los estudiantes utilicen solo las herramientas de construcción y medida del GeoGebra para elaborar los dibujos dinámicos. Sin embargo, las experiencias aquí descritas muestran cómo algunos *comandos* y *guiones* del software pueden ser de gran ayuda al momento de las construcciones.

3. Comandos y Guiones del GeoGebra

Los *comandos* del GeoGebra son funcionalidades dinámicas que permiten tanto la creación de nuevos objetos geométricos sobre la Vista Gráfica, como la modificación de los existentes. La sintaxis de los comandos ya viene predeterminada por el software, por lo cual su utilización está condicionada por los parámetros que cada uno de los comandos requiera. La implementación de estos comandos se hace por medio de la barra de entrada. Vale resaltar que el GeoGebra en su versión 5.0 brinda a los usuarios un panel de ayuda, llamado *Ayuda de Comandos*, en el que se muestran todos los comandos disponibles, organizados por categorías (ver Figura 1a). Cuando alguno de los comandos es seleccionado, la sintaxis para cada uno aparece en la zona inferior del panel (ver Figura 1b).

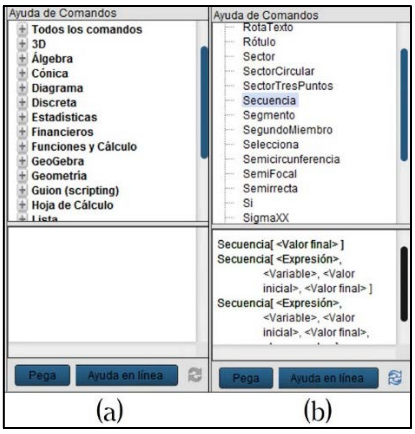


Figura 1. Panel Ayuda de comando del GeoGebra.
Fuente: Los Autores.

En relación a los *guiones*, en el GeoGebra existen dos lenguajes disponibles para estas opciones: *GeoGebraScript* y *JavaScript*. En este trabajo nos interesa centrar la atención en el primero. El lenguaje *GeoGebraScript* se define básicamente como un conjunto de comandos de GeoGebra que son ejecutados en un determinado orden. Bajo este lenguaje, los guiones son escritos al modificar las propiedades de los objetos (puntos, rectas, casillas de control, deslizadores, botones, entre otros) que se construyen en la Vista Gráfica del software, específicamente usando las opciones ofrecidas por la pestaña *Programas de guion (Scripting)* (ver Figura 2). La ejecución de los guiones depende de la situación en la que sean escritos. Por ejemplo, la opción “Clic” indica que el guion se ejecutará al hacer clic sobre el objeto que posea la cualidad. La segunda opción, “Al actualizar” indica que el guion se ejecutará cuando algún valor o propiedad del objeto varíe. Por ejemplo, si el objeto es un punto, el guion será ejecutado cuando éste varía sus coordenadas. En el caso de ser un deslizador, el guion se ejecuta cuando este objeto cambie su valor.

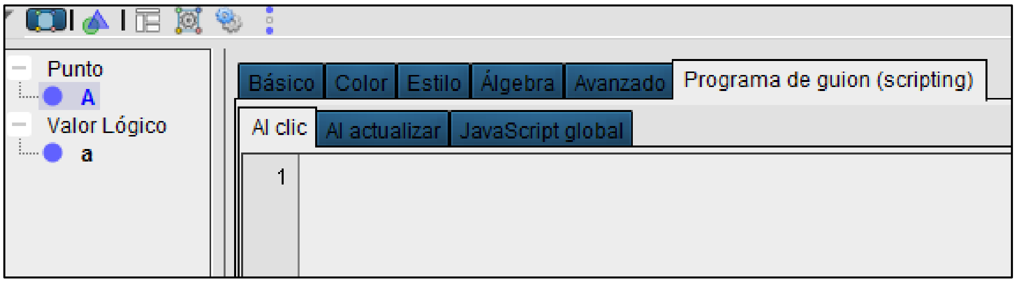


Figura 2. Pestaña Programas de guion (Scripting) del GeoGebra.
Fuente: Los Autores.

4. Contexto de las experiencias

Las experiencias comentadas en este trabajo fueron desarrolladas en una sesión de trabajo del Club GeoGebra “Leonor de Fernández”, ubicado en el municipio Mara del estado Zulia, al occidente del país. La sesión tuvo lugar durante el año escolar 2015-2016, y en ella participaron tres (03) estudiantes de cuarto año (16 años) de media y dos (02) profesores de matemática que desempeñaban funciones de promotores del aprendizaje en el marco del proyecto. Para resguardar la identidad de los alumnos, en este trabajo nos referimos a ellos con los seudónimos de David y Carolina.

Estos alumnos atendían a las tareas de simulación de fenómenos diferentes. En el caso de David, la tarea de simulación consistió en *representar la rueda de escape* del mecanismo interno de un reloj de péndulo (ver Figura 3a), para lo cual se utilizaron algunos comandos del GeoGebra. En cuanto a Carolina, su tarea de simulación consistió en *representar el cilindro hidráulico* de una grúa autopropulsada (ver Figura 3b), cuya resolución condujo al uso de guiones.

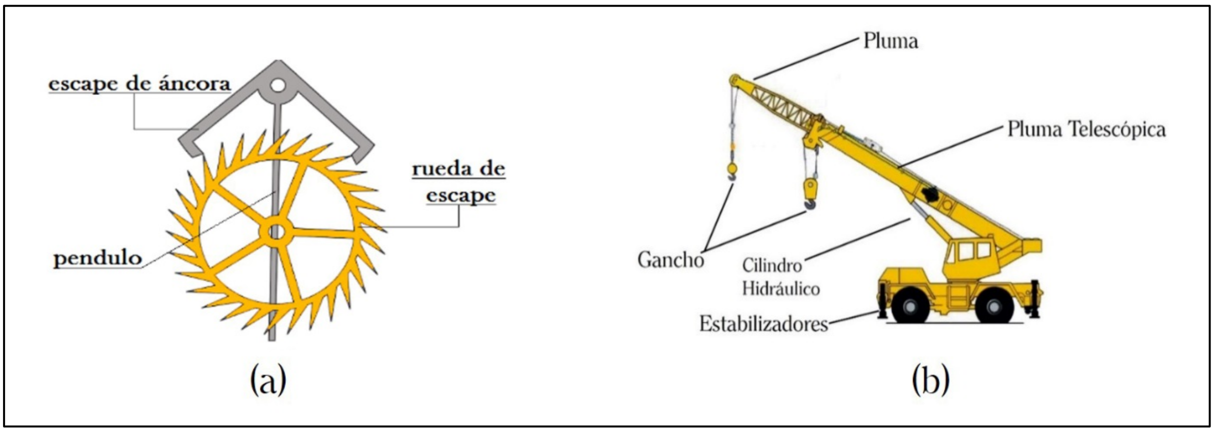


Figura 3. Imagen de referencia de los fenómenos y elementos constitutivos.
Fuente: Los Autores.

5. Descripción de las Experiencias

A continuación, se describe la manera en que David y Carolina, con la ayuda de los promotores, atienden a la resolución de sus respectivas tareas de simulación, haciendo uso de comandos y guiones.

5.1. El caso de David

Para dar respuesta a la tarea de simulación, David elaboró un boceto de la rueda de escape sobre el cual identificó los siguientes objetos geométricos: triángulos, rectángulos y coronas circulares (ver Figura 4). A partir de este momento, la atención fue puesta en la construcción progresiva de cada uno de estos objetos en la vista gráfica del software.

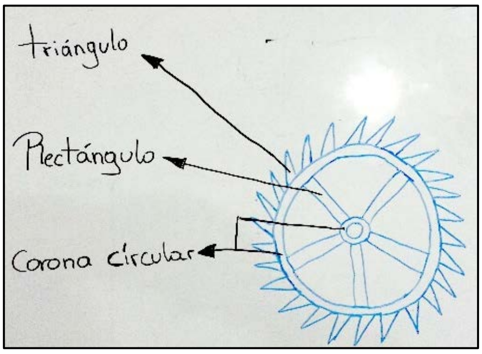


Figura 4. Boceto de la rueda de escape.
Fuente: Los Autores.

En primer lugar, David decidió construir un triángulo que representa a uno de los dientes de la rueda. La construcción de este objeto se hizo a partir de un punto libre. La característica de estos dientes en la realidad es que ellos rotan con respecto a un punto que se encuentra en el eje de la rueda (centro de la corona circular). Por lo tanto, la construcción tuvo en cuenta tanto la rotación de la figura, como la forma de esta. Para esta construcción se siguieron los pasos que se indican en la Tabla 1.

#	Herramienta del GeoGebra	Descripción del uso de la herramienta
1	Punto	Crea un punto libre C
2	Paralela	Traza una recta paralela al $eje\ x$ que pasa por C
3	Circunferencia (centro, radio)	Construye una circunferencia con centro en C y de radio pm
4	Intersección	Se interceptaron la circunferencia y recta anteriormente creadas, obteniendo el punto D
5	Rotación	Se roto el punto D con respecto a C y un ángulo a $60°$ con sentido horario, obteniendo D'
6	Deslizador	Se creó un deslizador de tipo ángulo, denominado α con un mínimo de $0°$ y máximo de $360°$
7	Rotación	Se roto el punto C con respecto a D' y un ángulo α con sentido horario, obteniendo C'
8	Circunferencia (centro, radio)	Construye una circunferencia con centro en D' y de radio $pm/1.3$
9	Circunferencia (centro, radio)	Construye una circunferencia con centro en C' y de radio $pm/3$
10	Intersección	Se interceptaron las circunferencias del paso 8 y 9, obteniendo el punto E
11	Circunferencia (centro, radio)	Construye una circunferencia con centro en C' y de radio $pm/4$
13	Intersección	Se interceptaron las circunferencias del paso 8 y 12, obteniendo el punto F
14	Polígono	Se construyó el triángulo con los vértices C', E y F, denominado polígono1.

Tabla 1. Pasos para la construcción del triángulo de vértices $C'EF$

Los pasos anteriores permitieron a David obtener el $\Delta C'EF$, como se muestra en la Figura 5.

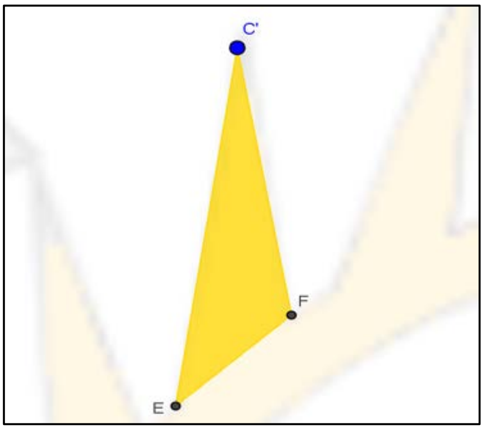


Figura 5. Construcción del polígono1.
Fuente: Los Autores.

La técnica de construcción descrita en la tabla 1 revela que la construcción del triángulo (el *polígono1*) se hizo mediante catorce pasos que involucraron tan solo herramientas de construcción geométrica. En principio, la construcción de los triángulos restantes suponía para David la tarea de rotar el *poligono1* veintinueve veces, produciendo un simulador con una carga excesiva de objetos que afectaría la animación del movimiento. Para trascender esta dificultad, uno de los promotores sugiere a David utilizar un comando del GeoGebra llamado “Secuencia”, con el cual es posible generar los 29 triángulos de manera simultánea, agrupándolos en una lista.

En la tabla 2 se muestran los pasos para la construcción de los triángulos de la Figura 6, usando dicho comando.

#	Herramienta del GeoGebra	Descripción del uso de la herramienta
1	Comando del GeoGebra: Secuencia[<Expresión>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final>, <Incremento>]	Se insertó el comando secuencia en la barra de entrada de la siguiente forma: Secuencia[Rota[polígono1, i, *D’*],i, 12°, 348°, 12°].

Tabla 2. Pasos para la construcción de los 29 triángulos

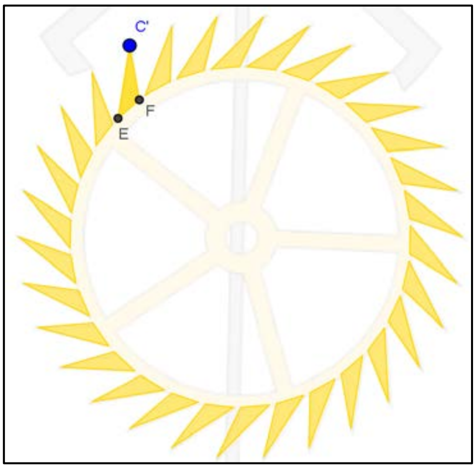


Figura 6. Construcción de los 29 triángulos.
Fuente: Los Autores.

5.1. El caso de Carolina

Al igual que David, Carolina elaboró un boceto sobre el aspecto del fenómeno a simular que, en este caso, se trató del cilindro hidráulico de una grúa autopropulsada. En un primer boceto de la pieza, la estudiante logró identificar dos (02) rectángulos y un (01) triángulo (ver Figura 7a). En un segundo boceto se puede apreciar el movimiento del cilindro en el mecanismo (ver Figura 7b). A partir de este momento, el foco de atención se colocó en la construcción de cada uno de estos elementos (forma y movimiento) sobre la Vista Gráfica del GeoGebra.

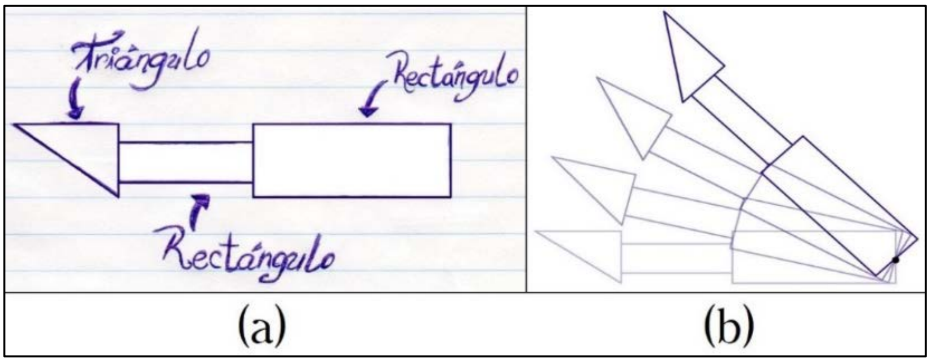


Figura 7. Bocetos del cilindro hidráulico.
Fuente: Los Autores.

Carolina decidió construir primeramente un rectángulo (el primero de derecha a izquierda en la Figura 7a) que representa el barril del cilindro. La construcción de la figura geométrica empezó por un punto libre. La característica del barril es que realiza un movimiento parcialmente circular, siendo el centro de este movimiento un punto que se posa sobre el perno del barril (punto medio entre los vértices inferiores). En este sentido, la construcción del rectángulo tuvo en cuenta tanto la rotación de la figura, como la forma de esta. Los pasos con los cuales se obtuvo el $\square\ C'D''GF$, como se muestra en la Figura 8 se muestran en la Tabla 3.

#	Herramienta del GeoGebra	Descripción del uso de la herramienta
1	Punto	Crea un punto libre C
2	Paralela	Traza una recta paralela al $eje\ x$ que pasa por C
3	Circunferencia (centro, radio)	Construye una circunferencia con centro en C y de radio pm
4	Intersección	Se interceptaron la circunferencia y recta anteriormente creadas, obteniendo el punto D
5	Rotación	Se roto el punto D con respecto a C y un ángulo a $40°$ con sentido horario, obteniendo D'
6	Punto medio o centro	Se creó el punto medio entre C y D'
7	Deslizador	Se creó un deslizador de tipo ángulo, denominado α con un mínimo de $1°$ y máximo de $90°$
8	Rotación	Se roto el punto C con respecto a E y un ángulo α con sentido antihorario, obteniendo C'
9	Rotación	Se roto el punto D' con respecto a E y un ángulo α con sentido antihorario, obteniendo D''
10	Segmento	Se trazó el segmento $\overline{C'D''}$
11	Perpendicular	Se construyó una perpendicular al segmento $\overline{C'D''}$ por C'
12	Circunferencia (centro, radio)	Construye una circunferencia con centro en C' y de radio $5{,}1 \cdot pm$
13	Intersección	Se interceptaron la recta del paso 11 con la circunferencia del paso 12, obteniendo el punto F
14	Perpendicular	Se construyó una perpendicular al segmento $\overline{C'D''}$ por D''
15	Perpendicular	Se construyó una perpendicular a la recta del paso 11 por F
16	Intersección	Se interceptaron las rectas del paso 14 y 15, obteniendo el punto G

17	Polígono	Se construyó el rectángulo con los puntos C', D'', G y F. Este fue denominado polígono1.

Tabla 3. Pasos para la construcción del □ $C'D''GF$

Como resultado de la técnica anterior, se obtuvo el dibujo de la Figura 8.

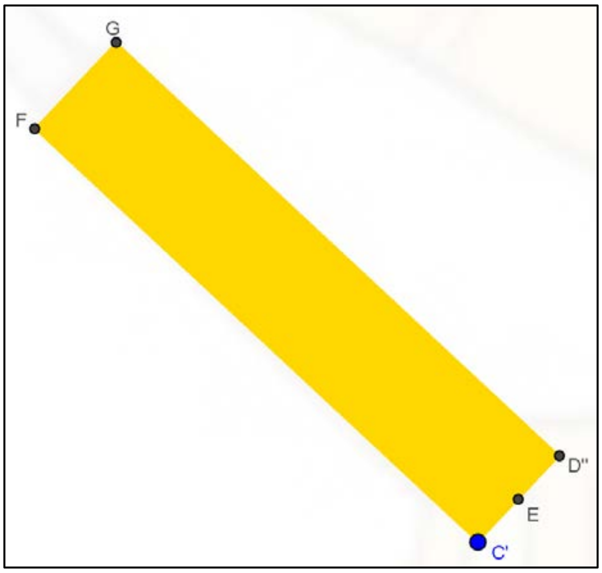


Figura 8. Construcción del □ $C'D''GF$
Fuente: Los Autores.

La técnica de construcción descrita en la Tabla 3 muestra que la construcción del rectángulo (el *polígono1*) responde a los requerimientos tanto de la forma, como al movimiento del barril. Esto se logró por medio de 17 pasos en los cuales se usa exclusivamente herramientas de construcción geométrica. Carolina hace uso de estas herramientas, pero no logra la consistencia deseada para la construcción del segundo rectángulo, pues el rectángulo pierde su forma al ser sometido a la prueba del arrastre. El trazado de este objeto geométrico partió del vértice F del primer rectángulo, decisión que fue basada en el deseo de hacer que el segundo rectángulo heredara el movimiento de rotación del □ $C'D''GF$. Sin embargo, el rectángulo a construir debía representar tanto la forma de la pieza como el movimiento de ésta. Carolina asumió que si el ancho del rectángulo fuese dinámico, esto es, que su medida variara, lo anterior seria logrado. Por lo tanto, la construcción del rectángulo se enfocó en representar el movimiento y la forma de la figura a la vez. Los pasos dibujar el rectángulo se muestran en la Tabla 4.

#	Herramienta del GeoGebra	Descripción del uso de la herramienta
1	Circunferencia (centro, radio)	Construye una circunferencia centrada en F y de radio $pm/5$
2	Intersección	Se interceptaron la circunferencia de paso 1 y el segmento $\overline{FG}$ obteniendo el punto H
3	Circunferencia (centro, radio)	Construye la circunferencia centrada en G y de radio $pm/3{,}9$
4	Intersección	Se interceptaron la circunferencia de paso 3 y el segmento $\overline{FG}$ obteniendo el punto I

5	Perpendicular	Se construyó una perpendicular al segmento $\overline{FG}$ por H
6	Deslizador	Se creó un deslizador de tipo número, denominado rd
7	Circunferencia (centro, radio)	Construye una circunferencia con centro en H y de radio $4{,}4pm \cdot rd$
8	Intersección	Se interceptaron la recta del paso 5 con la circunferencia del paso 7, obteniendo el punto J
9	Perpendicular	Se construyó una perpendicular al segmento $\overline{FG}$ por I
10	Perpendicular	Se construyó una perpendicular a la recta del paso 5 por J
11	Intersección	Se interceptaron las rectas del paso 14 y 15, obteniendo el punto K
12	Polígono	Se construyó el rectángulo con los puntos H, I, K y J. Este fue denominado polígono2.

Tabla 4. Pasos para la construcción del segundo rectángulo

Los pasos anteriores permitieron a Carolina obtener el dibujo de la Figura 9.

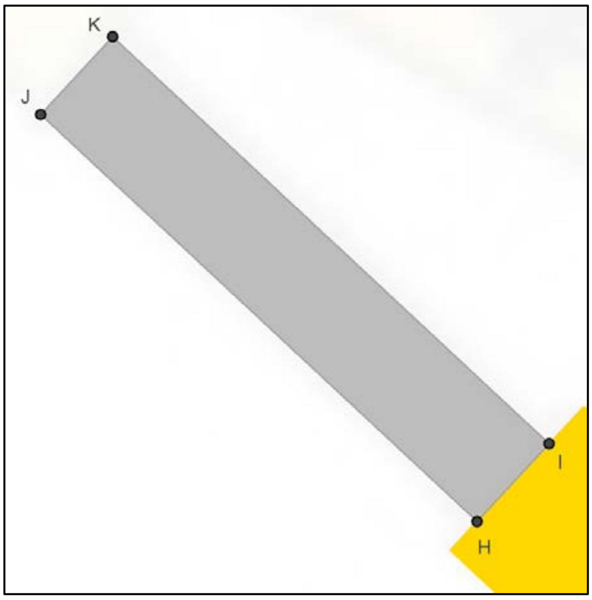


Figura 9. Construcción del $\square$ $HIKJ$
Fuente: Los Autores.

Al igual que en la construcción del primer rectángulo, la técnica de construcción de Carolina para el trazado del $\square$ $HIKJ$ (el *polígono2*), descrita en la Tabla 4, da cuenta de un uso exclusivo de herramientas de construcción y medida a lo largo de la aplicación de los doce pasos. Sin embargo, uno de los promotores se percató que el movimiento de entrada y salida que realizaba el rectángulo de la figura 8, así como la rotación del rectángulo de la figura 8, no estaban sincronizados, es decir, no se producían de manera simultánea. Para trascender esta dificultad, el mismo promotor sugirió a Carolina construir un guion en el GeoGebra con el cual fuese posible que éstos movimientos se produjeran simultáneamente y, de esta manera, no tener que verse en la necesidad de reconstruir todo nuevamente. En la tabla 5 se muestran los pasos para lograr lo anterior.

#	Herramienta del GeoGebra	Descripción del uso de la herramienta
1	Barra de entrada	Se insertó en la barra de entrada la siguiente expresión $\beta = rd \cdot 180°/\pi$
2	Guion	Se escribió el siguiente Guion en el deslizador rd sobre la pestaña "Al actualizar": – $Valor(\alpha, 49° - \beta)$ – $Si(rd \leq 0, Valor(\alpha, 49°))$

Tabla 5. Pasos mover los rectángulos de manera simultánea

6. CONCLUSIONES

Las experiencias de elaboración de simuladores con GeoGebra que se describen en este trabajo ponen de manifiesto, por un lado, la tendencia a usar, casi de forma exclusiva, las herramientas de construcción y medida del GeoGebra por parte de los estudiantes. Por otro lado, se pudo notar cómo, en el caso de Carolina, estas herramientas resultaron insuficientes para la representación de los objetos geométricos identificados, según el comportamiento de la pieza del cual emergen. En parte, este hecho puede explicarse dada la escaza preparación que tienen los promotores de los clubes en cuanto al uso de otras funcionalidades dinámicas del GeoGebra, más allá de las herramientas de construcción y medida.

Entre las ventajas que supone el uso de comandos y guiones para la construcción de los objetos identificados en los bocetos de los estudiantes se tienen: (i) una disminución en el número de objetos construidos en la Vista Gráfica y, por tanto, en el número de pasos ejecutados, y (ii) la modificación y/o vinculación entre objetos geométricos que evita la repetición de técnicas de construcción para nuevos objetos o, en el caso más extremo, tener que reconstruir todo el dibujo dinámico.

En este sentido, apoyar el uso de los comandos y guiones en experiencias de elaboración de simuladores con GeoGebra resulta de suma importancia debido a que permite articular y/o vincular los modelos matemáticos construidos en la interfaz del software, garantizando con ello la obtención de un modelo computacional más próximo a la realidad que éste simula.

Bibliografía

Baek, Y. (2009). Digital Simulation in Teaching and Learning. En D. Gibson & Y. Baek (Eds.), *Digital Simulations for Improving Education: Learning Through Artificial Teaching Environments* (pp. 25-51). USA: IGI Global.

Clark, D. B., Nelson, B., Sengupta, P. & D' Angelo, C. (2009). Rethinking science learning through digital games and simulations: Genres, examples, and evidence. *The National Research Council Workshop on Gaming and Simulations*, October 6-7, Washington, DC. Recuperado de: http://sites.nationalacademies.org/cs/groups/dbassesite/documents/webpage/dbasse_080068.pdf

Gutiérrez, R., Prieto, J. L. & Ortiz, J. (en prensa). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación Matemática*.

Hohenwarter, M. & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. The Journal of Online Mathematics and its Applications. Recuperado de: http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/

Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig. (Ed.), *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática* (pp.33-48). México: Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Mihailova, M., Mierlus-Mazilu, I. & Velikova E. (2014). Transition from 2d to 3d with GeoGebra, *Romanian Journal of Mathematics and Computer Science*, V. 4,(2). pp.209-222. ISSN: 2247 – 689X. Recuperado de: http://www.rjm-cs.ro/MihailovaMierlusVelikova2014.pdf

Prieto, J. L. & Gutiérrez, R. E. (Comps.) (2015). *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo: A. C. Aprender en Red. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Juan_Prieto_G/publication/291043405_Memorias_del_I_Encuentro_de_Clubes_GeoGebra_del_Estado_Zulia/links/569dbc8f08ae950bd7a6af42/Memorias-del-I-Encuentro-de-Clubes-GeoGebra-del-Estado-Zulia.pdf

Prieto, J. L. & Gutiérrez, R. E. (Comps.) (2016). *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo: A. C. Aprender en Red. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Juan_Prieto_G/publication/309206509_Memorias_del_II_Encuentro_de_Clubes_GeoGebra_del_Estado_Zulia/links/58058ac708aee314f68e25e1/Memorias-del-II-Encuentro-de-Clubes-GeoGebra-del-Estado-Zulia.pdf

Pugnaloni, L. A. (2008) Los simuladores. El papel de la simulación en la ciencia. *Ciencia Hoy*, No. 105, pp. 27-34. ISSN: 1666-5171. Recuperado de: http://www.cienciahoy.org.ar/ch/ln/hoy105/simuladores.htm

Rodríguez L. & Roggero, P. (2014). La modelización y simulación computacional como metodología de investigación social, *Polis Revista Latinoamérica*. (33), 39. ISSN: 0718-6568. Recuperado de: https://polis.revues.org/pdf/10568

Rubio, L. M., Prieto, J. L. & Ortiz, J. (2016). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI),* 2, pp. 90-111. ISSN: 2386-4303. Recuperado de: https://www.upo.es/revistas/index.php/IJERI/article/viewFile/1586/1320

Autores:

Castillo B., Luis Andrés: **Licenciado en Educación mención Matemática y Física, Venezuela. Investigador PEII Nivel A. Coordinador Tecnologías Digitales y Soporte de la Asociación Civil Aprender en Red y del Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática. Miembro de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT). E-mail: luiscastleb@gmail.com**

Prieto G., Juan Luis: **Profesor agregado de la Universidad del Zulia, Venezuela. Investigador PEII Nivel B. Coordinador General de la Asociación Civil Aprender en Red y del Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática. Tesorero de la Asociación Venezolana de Educación Matemática. E-mail: juanl.prietog@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 263-278

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

CONTEXTOS DINÁMICOS DE LUGARES GEOMÉTRICOS

Silvia Bernardis, Susana Moriena

Fecha de recepción: 09/09/2017
Fecha de aceptación: 24/10/2017

Resumen	En la escuela secundaria se aborda el tema lugares geométricos en el plano desde el primer año (13 años). El desafío que constituye tanto la búsqueda del lugar como su demostración lo convierte en un verdadero problema para los estudiantes.En este artículo se presenta una propuesta para su tratamiento de manera dinámica en diferentes contextos. Las tareas que se incluyen consideramos que interesarán a los estudiantes, despertarán en ellos la incertidumbre y los motivará en la búsqueda de una solución.La secuencia sigue la organización propuesta por Douady (1983) a través de la dialéctica herramienta-objeto. Los problemas que se proponen consisten en situaciones de localización que se plantean en espacios geográficos conocidos por los estudiantes y se abordan utilizando Geogebra y Google Earth **Palabras clave**: Lugar geométrico, Contexto dinámico, Escuela Secundaria.
Abstract	In the secondary school the subject of geometric locus in the plane is approached on the map from the first year, the challenge that constitutes both the search of the place and its demonstration makes it a real problem for the students.This article presents a proposal for its treatment in a dynamic way in different contexts. The tasks that we consider to be of interest to students will awaken uncertainty in them and motivate them in the search for a solution.The sequence follows the organization proposed by Douady (1983) through the tool-object dialectic. The problems consist of different location situations that arise in geographic spaces known to the students and are addressed using Geogebra and Google Earth. **Keywords**: Geometric locus, Dynamic context, Secondary school
Resumo	Na escola secundária aborda-se o tema lugar geométrico no plano desde o primeiro ano (13 anos). O desafio que constitui tanto a busca do lugar como a sua demonstração o converte num verdadeiro problema para os estudantes.Neste artigo apresenta-se uma proposta para o seu tratamento de maneira dinâmica em diferentes contextos. As tarefas que se incluem consideramos que interessarão aos estudantes, acordarão neles a incerteza e motivá-lo-ás na busca de uma solução. A sequência segue a organização proposta por Douady (1983) através da dialética ferramenta-objeto. Os problemas que se apresentam consistem em situações de localização em espaços geográficos conhecidos pelos estudantes e se abordam por médio do software Geogebra e o aplicativo Google Earth. **Palavras-chave:** Lugar geométrico, Contexto dinâmico, Escola Secundária

1. Introducción

En el currículo de la escuela secundaria en Argentina desde el primer año (13 años) se propone el reconocimiento y verificación de las condiciones que cumplen los puntos del plano como lugar geométrico. El desafío que constituye tanto la búsqueda del lugar geométrico como su demostración lo convierte en un verdadero problema para los estudiantes.

En este artículo se presenta una propuesta para abordarlo de manera dinámica en diferentes contextos. Se espera que las tareas diseñadas promuevan el interés de los estudiantes, despierten en ellos la incertidumbre y los motiven en la búsqueda de una solución.

La secuencia se basa en las ideas de Douady (1983) que propone a través de la dialéctica herramienta-objeto hacer aparecer las nociones matemáticas como herramienta para resolver problemas, de manera que los alumnos construyan el sentido de las mismas.

Para resolver cada problema será necesario que los estudiantes realicen una adaptación del concepto geométrico conocido y utilizado para resolverlo (herramienta). Luego construirán su definición como lugar geométrico del plano (objeto).

Los problemas que conforman la secuencia consisten en distintas situaciones de localización que se plantean en espacios geográficos conocidos por los estudiantes. Para ello y como una motivación adicional las resoluciones se realizan utilizando dos recursos tecnológicos: Geogebra y Google Earth.

2. Marco Teórico

Según Douady (1994) en un concepto matemático conviene distinguir entre su carácter herramienta y su carácter objeto.

La autora considera que los conceptos tienen un estatus de herramienta, en tanto sirven para que alguien actúe sobre un problema en determinado contexto. Supone la posibilidad de utilizarlos para analizar, modelar, resolver e interpretar cierto tipo de situaciones problemáticas.

El carácter de objeto supone la consideración del concepto “como objeto cultural que tiene su lugar en una construcción más amplia que es la del conocimiento inteligente en un momento dado, reconocido socialmente” (Douady, 1983). Interesa aquí el modo en que los conceptos se relacionan y constituyen un cuerpo organizado y sistematizado de conocimientos.

En cuanto a la dialéctica herramienta-objeto, aclara Douady, es contraria a una enseñanza tradicional donde aprendo-aplico, donde primero deben enseñarse los algoritmos y definiciones para luego buscar situaciones que permitan aplicar los conceptos trabajados. Por el contrario, Douady, propone que resulta imposible aprender cuando un concepto carece de sentido para el alumno. Para construir una enseñanza diferente, restituyendo el sentido a las herramientas que los alumnos utilizan, asegurando a los objetos correspondientes una presentación institucional, considera la autora que debemos caracterizar otra organización de enseñanza. "En esta organización el enseñante tiene en cuenta oficialmente la construcción del saber de los alumnos por los alumnos mismos. Esta organización está fundada desde el punto de vista cognoscitivo, sobre tres puntos: el juego de marcos, la dialéctica viejo-nuevo y la dialéctica herramienta-objeto (Douady, 1983, p. 5).

El juego de marcos responde a que en la mayoría de los conceptos pueden intervenir distintos dominios, diversos marcos físico, geométrico, numérico, gráfico u otros. Para cada uno de ellos se traduce un concepto en términos de objetos y relaciones que podemos llamar los significados. El juego de marcos proporciona la posibilidad de generar cambios en la interpretación de los problemas que podrían, por un lado, habilitar la evolución de las concepciones de los estudiantes y, por el otro, activar el proceso de aprendizaje. Estos cambios exigen reformulaciones del problema y la puesta en acción de herramientas y técnicas distintas a las iniciales.

En cuanto a la dialéctica viejo-nuevo, Douady propone la puesta en marcha de un objeto conocido como instrumento explícito para iniciar un procedimiento de resolución de un problema o por lo menos de una parte del problema. Es decir, se moviliza lo "antiguo" para resolver parcialmente el problema.

Es a través de la dialéctica herramienta-objeto, sostiene la autora, haciendo aparecer las nociones matemáticas como herramienta para resolver problemas, como los alumnos construirán el sentido. Sólo después estas herramientas podrán ser estudiadas por sí mismas (como objeto). Los requisitos más obvios para que las propiedades y la estructura de una herramienta conceptual pasen a ser objetos es que hayan sido una herramienta.

Para el tratamiento del tema lugar geométrico se diseñó una secuencia que tiene como propósito resignificar algunos conceptos matemáticos conocidos por los estudiantes desde otra mirada, en este caso desde el punto de vista de los lugares geométricos. El abordaje de las tareas se apoya en el trabajo con el software Geogebra[1] e imágenes satelitales a través de Google Earth[2].

Según Caicedo López (2012) la dificultad de materializar la graficación a partir de la descripción sintética del lugar geométrico correspondiente, hace que no se haya aprovechado la oportunidad de articular esta descripción con su representación visual; una forma de aprovechar el dinamismo para enseñar geometría es a partir de la construcción de curvas como lugares geométricos en Geogebra.

---

[1] GeoGebra es un software de matemática que integra geometría, álgebra y cálculo, desarrollado por Markus LLohenwartre en la Universidad de Salzburgo para la enseñanza de matemática escolar.

[2] Google Earth es un programa informático que muestra un globo terráqueo virtual que permite visualizar múltiple cartografía, con base en la fotografía satelital. El programa fue creado bajo el nombre de EarthViewer 3D por la compañía Keyhole Inc.

Corredor Gutiérrez (2011) menciona algunas de las ventajas que la utilización de un software de geometría dinámica (GD) ofrece para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría:

- facilita procesos que en el papel son imposibles o que requieren de muchos dibujos para llegar a una generalización.
- enriquece las tareas de construcción, incorporando una gran variedad de funcionalidades, asociadas a la simplificación de construcciones fundamentales.
- permite invertir la relación entre el saber geométrico y las construcciones. La construcción con regla y compás es consecuencia y aplicación de un saber geométrico, mientras que en GD las construcciones son un método para generar conocimiento geométrico.

3. Propuesta para el aula

La propuesta que se presenta tiene como objetivo principal que los estudiantes construyan el concepto de lugar geométrico y lo utilicen para definir objetos geométricos.

A continuación, se presenta el enunciado del problema. Posteriormente, se describe una propuesta para su resolución. La secuencia se plantea por medio de la organización esquemática propuesta por Douady para la dialéctica herramienta-objeto y se utilizan las distintas fases para abordarla con los estudiantes.

Problema: Puente peatonal. En Colastiné[3] nos encontramos con la vía rápida de la Ruta 1 (ver Figura 1). Dos gremios AMSAFE[4] y STIA[5] que tienen sus respectivos campings situados en un mismo margen de la ruta solicitan la construcción de un puente peatonal sobre dicha ruta. Los ingenieros les han prometido que lo colocarán a la misma distancia de los dos para que ninguno salga perjudicado. ¿Dónde estaría situado?

[3] Colastiné es una localidad cercana a la ciudad de Santa Fe ubicada sobre la Ruta 1.
[4] AMSAFE: Asociación del Magisterio de Santa Fe.
[5] STIA: Sindicato de Trabajadores de la Industria de la Alimentación.

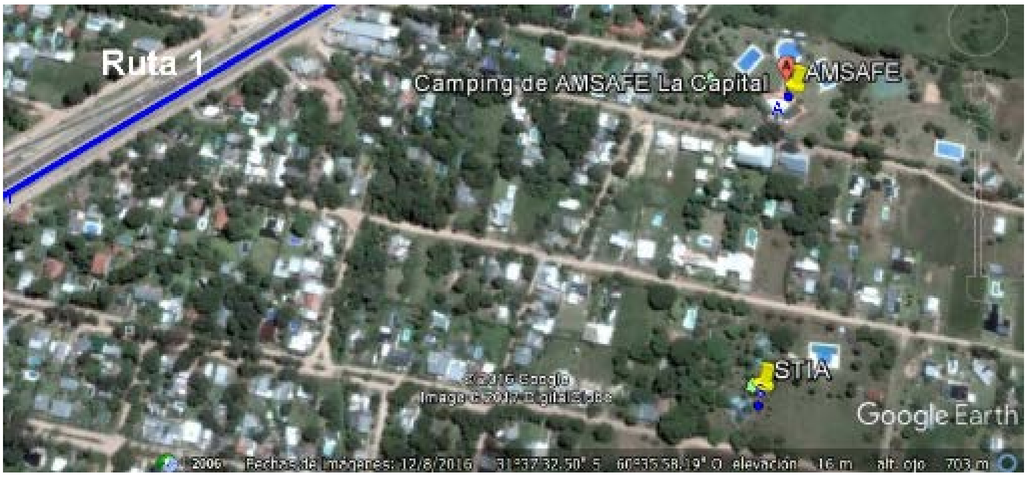


Figura 1. Imagen satelital de la Ruta 1.

3.1. Fase 1: Antiguo

En esta primera etapa se pone en marcha un objeto conocido como instrumento explícito para iniciar un proceso de resolución del problema o por lo menos de una parte del problema. Según Douady (1983), se moviliza lo "antiguo" para resolver parcialmente el problema.

A continuación se presenta una respuesta esperada de los estudiantes a través de la exploración con el software.

Exploración del lugar

Una pregunta que el docente puede realizar para incentivar la exploración por medio del software es la siguiente, ¿cuáles son los puntos que están a igual distancia de ambos campings?

Para hallarlos se sugiere crear por medio de la herramienta *deslizador* el número a (medida del radio). Luego construir las circunferencias de centros A y S, respectivamente, y radio a (utilizando la herramienta *Circunferencia dado su centro y radio*). De esta manera, en la intersección de ambas se obtienen los puntos C y D. Luego se utiliza la herramienta *Rastro* (para ello, ubicar el cursor en el punto y con botón derecho desplegar el menú) tanto para el punto C como para el punto D. Finalmente se modifica el valor del radio a y al mover el deslizador se obtienen muchos puntos más. Es importante resaltar que los puntos obtenidos son algunos de los posibles.

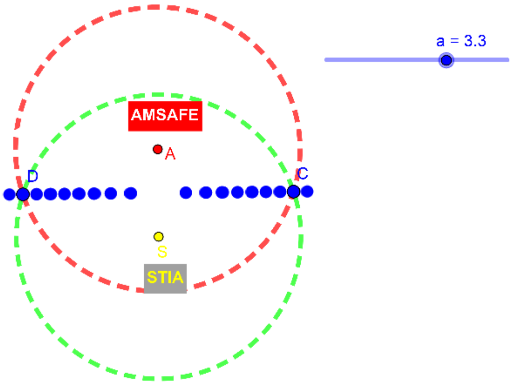


Figura 2. *Deslizador* para el radio y *Rastro* activado.

Luego de experimentar con el arrastre es conveniente presentar a los estudiantes la herramienta *Lugar geométrico* que dispone Geogebra. Por medio de esta opción al indicar primero el punto C y después el punto en el deslizador a, se obtiene el lugar geométrico que describe C cuando a varía. Análogamente, indicando el punto D y el punto en el deslizador a, se obtiene el lugar geométrico que describe D cuando a varía. Es decir, los estudiantes tendrán una idea más cercana del lugar geométrico buscado. Nuevamente es importante aclarar que los puntos obtenidos son algunos de los posibles. El docente podrá a esta altura retomar el concepto de Mediatriz del segmento AS y compararlo con el objeto construido por el software.

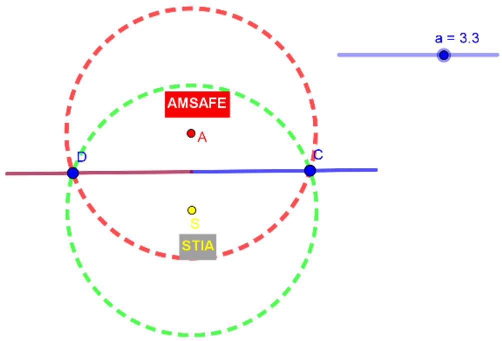


Figura 3. Construcción con *Lugar geométrico*.

3.2. Fase 2: Búsqueda

Según Douady (1983) en esta segunda etapa, el alumno encuentra dificultades para resolver completamente su problema, llama a esta etapa "nuevo implícito". Desde la óptica de los alumnos, las concepciones en juego, entran en conflicto o en resonancia con las antiguas. Los errores o contradicciones pueden convertirse en las posturas de procesos dialécticos de formulación y validación para resolver los conflictos y asegurar las integraciones necesarias.

Construcción del Lugar Geométrico

Frente a la necesidad de hallar todos los puntos posibles y luego de la exploración realizada los estudiantes hallarán el lugar geométrico buscado y finalmente podrán trazarlo en forma completa mediante la herramienta *Mediatriz*. Para los estudiantes la Mediatriz es un objeto conocido desde la escuela Primaria, en este problema aparece con otra mirada, la del lugar geométrico.

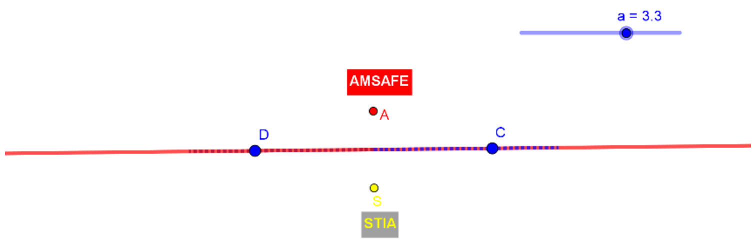


Figura 4. Construcción de la Mediatriz del segmento AB.

Finalmente, al volver al problema se observa que la construcción del puente peatonal se realizará en la intersección de la ruta 1 con la mediatriz del segmento que une Amsafe (A) con Stia (S).

Figura 5. Respuesta al problema.

3.3. Fase 3: Explicitación

En la etapa anterior algunos elementos tuvieron un rol importante, casi decisivo y son susceptibles de ser apropiados para ese momento del aprendizaje. Están formulados en términos de objetos o en términos de prácticas; con su condición de empleo circunstancial. Se trata de “nuevo explícito” susceptible de reempleo y familiarización.

Comprobación de la Definición

Es importante utilizar las herramientas que ofrece el software para comprobar que si un punto E (ubicando punto sobre objeto) está en la mediatriz L cumple la propiedad de estar a la misma distancia de los puntos extremos del segmento y si no está en L no cumple con dicha propiedad.

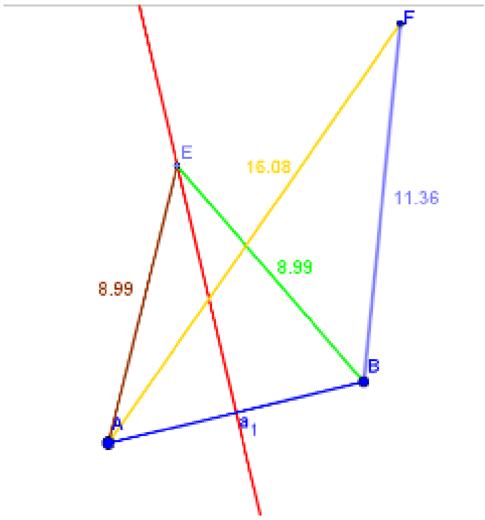


Figura 6. Comprobación del lugar.

3.4. Fase 4: Institucionalización

El docente realiza la institucionalización de lo que es nuevo Comprobación del lugar y retiene con las convenciones en curso, eventualmente definiciones, teoremas y demostraciones. Esto nuevo que se retiene está destinado a funcionar, posteriormente como antiguo.

La definición que adoptamos lugar geométrico es la siguiente:

> En Geometría Plana se da el nombre de lugar geométrico a la figura formada por todos los puntos del plano que gozan de una propiedad común. (Rouché y Camberousse, 1915, p.20)

Las tareas tienen como objetivo poner en acción el método de los lugares geométricos (Rey Pastor y Puig Adam, 1948) que describimos a continuación.

Para afirmar que una figura L es el lugar geométrico de todos los puntos que tienen una cierta propiedad P, es necesario demostrar las dos proposiciones siguientes.

Directa: Todo punto del lugar L tiene esta propiedad P.

Recíproca: Todo punto que tiene la propiedad P pertenece al lugar L. O bien su equivalente la Contraria: Todo punto que no pertenece al lugar L no tiene esta propiedad P.

Son equivalentes las condiciones pertenecer al lugar L y tener la propiedad P.

El punto está en L $\Leftrightarrow$ Tiene la propiedad P

En el problema que se desarrolla, el lugar geométrico buscado es la mediatriz del segmento AB, cuya definición se muestra a continuación.

Se llama mediatriz del segmento AB a la recta que es perpendicular a este segmento y que pasa por su punto medio.

Demostración del Lugar Geométrico

Teorema 1: La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de los puntos extremos del segmento.

1) **Si el punto está en L cumple la propiedad P**

Todo punto de la mediatriz L tiene la propiedad P, es decir está a la misma distancia de los puntos extremos del segmento.

Caso 1: Si C es el punto medio de AB se tiene, de manera inmediata, que la longitud del segmento AC es igual a la longitud del segmento BC.

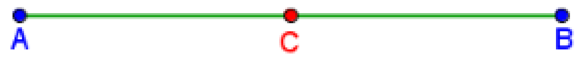


Figura 7. C es el punto medio del segmento AB.

Caso 2: Sea D cualquier otro punto de la mediatriz del segmento AB, diferente del punto medio C. Entonces AC es congruente con CB por definición de punto medio.

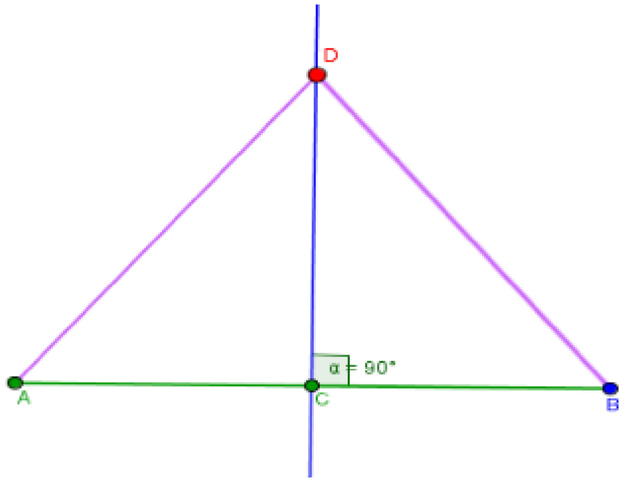


Figura 8. D es un punto cualquiera de la mediatriz.

Además el segmento CD es común en los triángulos ADC y CDB. Como los dos triángulos ADC y CDB tienen dos lados y el ángulo comprendido entre estos dos lados respectivamente congruentes (90°).

Luego, el segmento AD es congruente con el segmento BD.

2) **Si el punto cumple la propiedad P está en L⇔ si el punto no está en L, no cumple la propiedad P**

Si un punto E no pertenece a la mediatriz del segmento AB entonces no equidista de los extremos del segmento.

Sea E un punto que no pertenece a la mediatriz. En este caso E pertenece al semiplano que contiene a B. Demostraremos que E está más cerca de B que de A. Unimos E con A, la intersección de este segmento con la mediatriz determina el punto D. Sabemos que AD es congruente con BD.

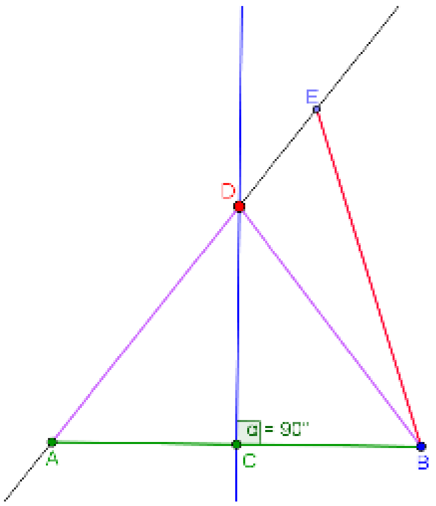


Figura 9. Desigualdad triangular |EB|<|DE|+|DB|.

Como se observa en la Figura 9, por desigualdad triangular se obtiene que |EB|<|DE|+|DB|.

Como el segmento AD es congruente con el segmento BD entonces la longitud del segmento EB es menor que la suma de las longitudes de los segmentos DE y AD (|EB|<|DE|+|AD|).

Tenemos que la longitud del segmento EB es menor que el segmento AE (|EB|<|AE|). Lo cual demuestra que E no equidista del punto A y del punto B, de modo que AE ≠ BE.

Luego de 1) y 2) hemos probado que el lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB.

3.5. Fase 5: Familiarización-reinvención

A continuación se proponen nuevos problemas destinados a experimentar el método del lugar geométrico. Para poner en juego el funcionamiento como instrumento explícito el objeto que se ha institucionalizado.

Problema 1: Rotonda

En el frente del hotel UNL-ATE[6] de ciudad universitaria se desea construir una calle de ingreso. El cordón de la calle delimita un jardín en cuyo punto central se ubicará una fuente (en el punto F). Realiza el trazado de la calle teniendo en cuenta que cada punto del cordón equidiste de la fuente (ver Figura 10).

Figura 10. Imagen satelital de la obra del hotel UNL-ATE.

En este problema el lugar geométrico que se obtiene es la circunferencia, cuya definición se muestra a continuación.

[6] UNL: Universidad Nacional del Litoral ATE: Asociación Trabajadores del Estado

El lugar geométrico de los puntos de un plano que están a igual distancia r de un punto fijo O es la circunferencia que tiene radio r y centro O.

Problema 2: La estación de servicio

Construir una estación de servicio que esté a la misma distancia de las dos rutas, la 168 y la 1. ¿Dónde podríamos ubicarla?

Figura 11. Imagen satelital del lugar.

Este problema el lugar geométrico que se obtiene es la bisectriz, cuya definición se muestra a continuación.

El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados de un ángulo es la bisectriz.

Figura 12. Respuesta al problema.

Problema 3: Supermercado

Se desea construir un supermercado que quede a igual distancia de tres ciudades: Santa Fe, San José del Rincón y Paraná. ¿Dónde podría ubicarse?

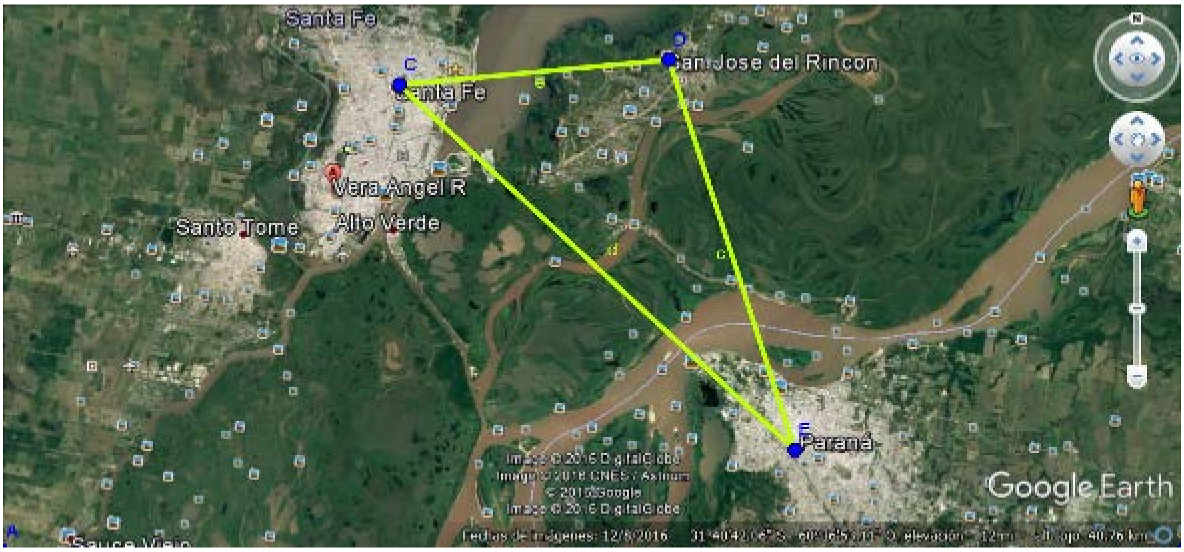


Figura 13. Imagen satelital del lugar.

En el caso del problema el lugar geométrico que se obtiene es el circuncentro del triángulo, cuya definición se muestra a continuación.

El lugar geométrico de los puntos del plano que está a igual distancia de los tres vértices de un triángulo es el circuncentro.

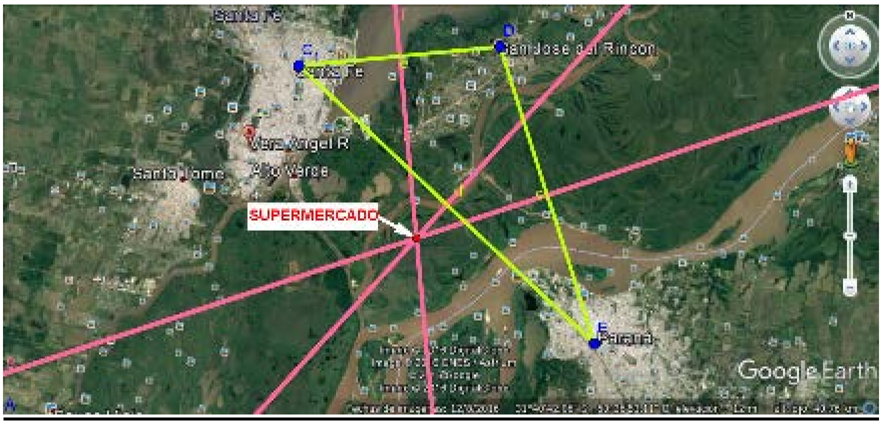


Figura 14. Respuesta al problema.

Problema 4: ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano que distan el doble de los vértices que de los lados opuestos en el triángulo ABC?

En el caso del problema el lugar geométrico que se obtiene es el baricentro de un triángulo, cuya definición se muestra a continuación.

El lugar geométrico de los puntos del plano que distan el doble de los vértices que de sus lados opuestos en un triángulo es el baricentro.

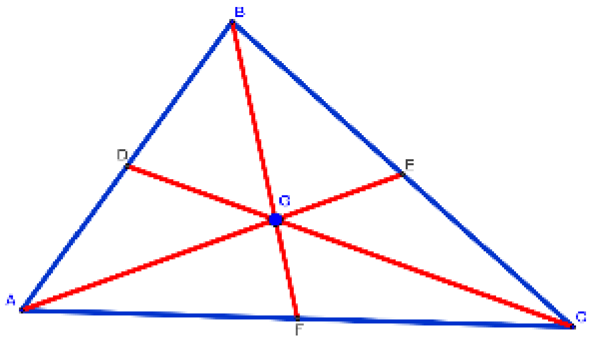


Figura 15. Baricentro de un triángulo.

3.6. Fase 6: Complejidad de la tarea o nuevo problema

Se utilizan los nuevos conocimientos dentro de una situación más compleja que implica otros conceptos y propiedades conocidas o por aprender.

Problema 5: Baricentros

Trazar una circunferencia que pase por los tres vértices del triángulo ABC del Problema 4. Mover uno de los vértices sobre la circunferencia. ¿Cuál es el lugar geométrico que describe el baricentro?[7]

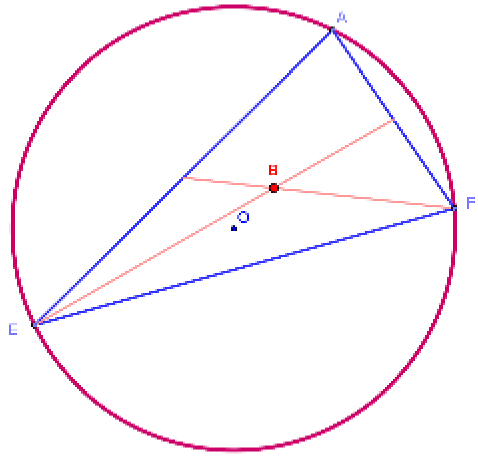


Figura 16. Baricentro del triángulo inscripto en la circunferencia.

[7] Problema adaptado de Corredor Gutiérrez (2011)

Para cualquier triangulo inscrito en una circunferencia encontremos el radio r del lugar geométrico y la razón de éste con el radio de la circunferencia R.

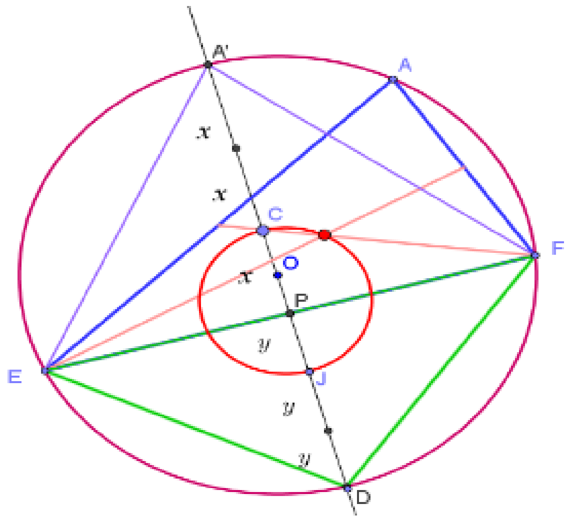


Figura 17. Respuesta al problema.

Como C es el baricentro del triángulo EA’F y lo mismo ocurre con J en EDF. Encontramos el radio del lugar geométrico, tenemos que: 3x+3y=2R, así:

$$r = \frac{x+y}{2} = \frac{R}{3}$$

El radio del lugar geométrico r equivale a la tercera parte del radio de la circunferencia C(O,R).

El lugar geométrico que describe el baricentro es la circunferencia de radio la tercera parte del radio de la circunferencia en la que se inscribe el triángulo.

4. Reflexiones finales

Los problemas propuestos se resuelven recurriendo a la construcción de algún lugar geométrico, esto permite al estudiante indagar si el problema tiene solución y en caso afirmativo, permite conjeturar si existe más de una solución. Además de descubrir el objeto geométrico buscado a través del arrastre, la construcción del lugar y la manipulación constante de la figura.

Con la GD se muestra la geometría de una forma que promueve la comprensión del contenido matemático involucrado y en sus justificaciones. El desarrollo y el trabajo con un software constituyen un apoyo indispensable de visualización. La interpretación geométrica de manera dinámica, permite ver más claramente varios conceptos.

Al hacer las construcciones para la solución de un determinado problema, el estudiante revisa propiedades y conceptos propios de la geometría, lo cual ayuda a la reafirmación de los mismos. Claramente en esta propuesta la dialéctica herramienta-objeto (Douady, 1983), utilizada para la secuencia, nos brinda la posibilidad de interactuar con los conceptos previos desde el inicio para abordar el tema "lugar geométrico".

5. Bibliografía

Douady, R. (1983). Relación enseñanza-aprendizaje. Dialéctica instrumento- objeto, juego de marcos. En: *Cuaderno de didáctica de la matemática Nº 3*. París: Université Paris Diderot-Paris 7. Traducido en Selección Bibliográfica I, Programa para la Transformación de la Formación Docente. Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación. Buenos Aires, 1994. También disponible en: http://www.slideshare.net/favalenc/dialectica-douady.

Caicedo López, J. (2012). *Resolución de problemas de construcción geométrica en GEOGEBRA empleando lugares geométricos y algo más*. Acta de la conferencia latinoamericana de Geogebra. Uruguay.

Corredor Gutiérrez, L. (2011). Geometría dinámica y lugares geométricos. Recuperado el 4 de agosto de 2017, de: http://www.konradlorenz.edu.co/images/investigaciones/matematicas/geometria_dinamica_luis_Fernando.pdf

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1948). *Metodología de la Matemática Elemental*. Buenos Aires: Estrada.

Rouché, E. y de Camberousse, Ch. (1915). *Tratado de Geometría Elemental*. 6ta. Edición. Madrid: Sucesores de Hernando.

Autores:

Primer autor: **Bernardis, Silvia:** Magíster en Didácticas Específicas. Profesor Asociado de la carrera de Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina). Codirectora de proyecto CAI+D, formación en investigación en el área de Educación, en la especialidad Educación Matemática.

Segundo autor: **Susana Moriena**: Especialista en Didácticas Específicas. Profesor Asociado de la carrera de Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina). Directora de proyectos CAI+D, formación en investigación en el área de Educación, en la especialidad Educación Matemática.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 279-305

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Historia de la Educación Matemática en Latinoamérica: 10 claves para su comprensión

Fredy Enrique González

Resumen	En esta exposición se proponen diez claves para comprender el proceso de evolución histórica de la Educación Matemática en América Latina hispana; en primer lugar se asume que Latinoamérica, como resultado de la emergencia de un conjunto de república a partir de los diversos procesos independentistas, no puede ser considerada como un bloque uniforme; se reconoce que la educación puede ser asumida como un proceso de transculturación conceptual en el cual los libros, además de propiciar una educación dogmática, fueron utilizados como medios para transmitir una cultura matemática foránea; se verifica que la formación en Matemática estaba reservada a las elites, y que, además, el conocimiento matemático que circuló durante la Colonia fue muy limitado y estuvo reservado a los miembros de las elites dominantes; se constata que la educación matemática durante la colonización española y durante las primeras décadas de la vida republicana fue Elitista, Dogmática, Memorística, Patriarcalista, Religiosa, Rígida, y Asistemática; se examina brevemente la Situación Internacional de la Matemática y su Enseñanza al comenzar el S. XX, el papel desempeñado por Marhall Stone en el processo de Internacionalización de la Educación Matemática, así como también el papel de las CIAEM en el desarrollo de la Educación Matemática en América Latina, junto con el de Otras Organizaciones, Revistas y Grupos de Educación Matemática en la región. ***Palabras Clave:*** Historia Social, Transculturización Conceptual, Repúblicas independientes, Colonización Española
Abstract	In this paper ten keys are proposed to understand the process of historical evolution of Mathematics Education in Hispanic Latin America; In the first place it is assumed that Latin America, as a result of the emergence of diferent republics from the various independence processes, can not be considered as a uniform block; it is recognized that education can be assumed as a process of Conceptual Transculturation in which books, in addition to fostering a dogmatic education, were used as means to transmit a foreign mathematical culture; it is verified that the formation in Mathematics was reserved to the elites, and that, in addition, the mathematical knowledge that circulated during the Colony was very limited and was reserved to the members of the dominant elites; it is verified that the mathematical education during the Spanish colonization and during the first decades of the republican life was Elitist, Dogmatic, Memorística, Patriarcalista, Religious, Rigid, and Asistematic; The International situation of Mathematics and its teaching is briefly examined at the beginning of the 20th Century, the role played by Marhall Stone in the process of Internationalization of Mathematics Education, as well as the role of the IACME in the development of Mathematics Education in

	Latin America, together with that of Other Organizations, Journals and Mathematics Education Groups in the region. ***Keywords:*** Social History, Conceptual Transculturization, Independent Republics, Spanish Colonization.
Resumo	Nesta exposição, são propostas dez chaves para entender o processo de evolução histórica da Educação Matemática na América Latina; em primeiro lugar, presume-se que a América Latina, como resultado da emergência de um conjunto de repúblicas a partir dos vários processos de independência, não pode ser considerada como um bloco uniforme; reconhece-se que a educação pode ser assumida como um processo de Transculturação Conceitual em que os livros, além de promover uma educação dogmática, foram utilizados como meios para transmitir uma cultura matemática estrangeira; verificaram que a formação em matemática foi reservado para a elite, e também o conhecimento matemático que circulou durante o período colonial era muito limitado e foi reservado para os membros das elites dominantes; verifica-se que a educação matemática durante a colonização espanhola e durante as primeiras décadas de vida republicana era elitista, dogmático, mnemônica, patriarcal, religiosa, rígida, e não sistemática; analisa-se brevemente a situação internacional da matemática e seu ensino no início do século XX, o papel desempenhado por Marshall Stone no Processo de Internacionalização da Educação Matemática, bem como o papel do CIAEM no desenvolvimento da Educação Matemática na América Latina, juntamente com o de outras organizações, jornais e Grupos de Educação Matemática na região. ***Palavras-chave:*** História social, transculturação conceitual, repúblicas independentes, colonização espanhola.

Introducción

La Historia de la Educación Matemática es un asunto que provoca un interés cada vez mayor entre los miembros de la comunidad internacional de educadores matemáticos; como prueba de ello podrían mencionarse, entre otros, los siguientes indicios:

1. Desenvolvimiento de grupos de trabajo estables en eventos de carácter internacional dedicados a la historia de la Educación Matemática, tales como el *TSG 24 History of the teaching and learning of mathematics del International Congress of Mathematical Education*, cuyos miembros comparten los hallazgos y asuntos pendientes en la historia de la educación matemática así como también trabajan en la búsqueda de acuerdos relacionados con las cuestiones metodológicas propias de la investigación en esta temática.
2. Organización de eventos específicamente abocados al tema; entre estos destaca el .*Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática*, del cual se han llevado a efecto cuatro ediciones: I CIHEM 2011 (Covilhã, Portugal), II CIHEM 2013 (Cancún, México), III CIHEM 2015 (Belém do Pará, Brasil); VI CIHEM 2017 (Murcia, España); este CIHEM está considerado como un escenario que: propicia el intercambio académico, profesional y conceptual de los educadores matemáticos de América Latina, España y Portugal que tienen como asunto de interés investigativo a la historia de la educación matemática en estos espacios sociogeográficos; permite

compartir las perspectivas asumidas, los temas abordados y las metodologías puestas en juego por dichos investigadores; coadyuva a la divulgación, difusión y publicación de la producción científica generada en este ámbito; promueve la creación de nuevos grupos de trabajo y la colaboración entre los que ya están creados; contribuye al examen del estado del arte en este emergente campo de estudio, así como también ayuda a configurar su prospectiva.

3. Apertura de Secciones Fijas en revistas propias del campo de la Educación Matemática; como ejemplo se puede mostrar la sección de la Revista UNIÓN intitulada *Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica* (ver: http://www.fisem.org/www/union/)
4. Creación de Revistas Especializadas como HISTEMAT - Revista de História da Educação Matemática (http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT) enfocada en la divulgación, entre investigadores, profesores, y demás personas interesadas en la dimensión histórica tanto de la matemática como de su enseñanza, de resultados de investigaciones relativas a la historia de la educación matemática y otros asuntos conexos.
5. Publicación de *Handbook*, como el *Handbook on the History of Mathematics Education* (KARP, SCHUBRING, 2014) en el cual se examina la historia de la educación matemática considerando múltiples épocas, civilizaciones, países y culturas; teniendo presente el interés que un número cada vez mayor de educadores matemáticos en todo el mundo, tiene sobre el desarrollo disciplinario de la Educación Matemática, no sólo en sus países de origen, sino a nivel global.

En el escenario antes descrito es donde se ubica el presente trabajo en el cual se ofrecen diez claves que podrían ayudar a comprender la trayectoria descrita por la evolución histórica de la Educación Matemática en América Latina.

I

A pesar de haber padecido un proceso común de colonización, los países de la América Latina hispana, luego de sus respectivos procesos de lucha contra los colonizadores acaecidos durante la primeramitad del S. XIX, devinieron en repúblicas independientes, lo cual confiere a Latinoamérica una gran diversidad; al respecto, TÜNNERMANN (2007) afirma que:

> La expresión América Latina comprende una realidad sumamente compleja, donde se dan casi por igual las diversidades y similitudes. De ahí que si se pone el acento en las diferencias y regionalismos, es posible negar la existencia de América Latina y de la unidad esencial que brota de su misma diversidad. Si seguimos esa línea, se llega a afirmar que no existe una América Latina, sino tantas como países o subregiones la componen, por lo que cualquier pretensión de reducirla a una sola entidad no es más que aceptar, a sabiendas, un mito o una ficción. 6

Tal diversidad se da en todos los órdenes en general, y en el educativo en particular, esto último habría de tener incidencia en las trayectorias seguidas por la dinámica de sus correspondientes procesos orientados a la formación matemática de sus habitantes, lo cual se expresa en diferencias en cuanto a. orientaciones filosóficas, estamento jurídico, disposiciones metodológicas, materiales utilizados como apoyo a la enseñanza, entre otros aspectos; sin embargo, autores como Walter Beyer (cronista de la Asociación Venezolana de Educación Matemática, ASOVEMAT), afirman que.

> son más las similitudes que las diferencias. Por ejemplo la adopción del sistema lancasteriano en gran parte de Hispanoamérica luego del proceso independentista, el uso de obras de texto comunes como las de Lacroix, Legendre, el Catecismo de Aritmética Comercial de Urcullu, las de José Mariano Vallejo; ola posterior introducción en el ámbito educativo de las ideas positivistas, etc.. (W. BEYER, Comunicación Personal, 25 de marzo de 2017)

Asumiendo que toda colonización se sustenta sobre un proceso de avasallamiento en todos los órdenes de los pueblos colonizados y en la imposición del colonizador, es plausible asumir que la educación matemática durante el periodo colonial constituyó un proceso de ***transculturización conceptual***, mediante el cual las matemáticas presentes en las prácticas sociales de las comunidades aborígenes colonizadas fueron ignoradas, suprimidas o castigadas, y fue impuesta la cultura matemática de los colonizadores; en, D´AMBROSIO (1999: 356-357) hay referencia para el caso del sistema numérico de los Aztecas.

Sin embargo, esto formó parte del proceso más amplio de avasallamiento cultural propio de todas las acciones de conquista; así lo refiere D´AMBROSIO (2014):

> Los cronistas de la Conquista ofrecieron explicaciones absolutamente distintas a las de los habitantes originarios de las tierras conquistadas acerca del cosmos, de la creación del universo y de las formas como ellos se relacionaban con el medio ambiente circundante. Los sistemas religiosos, las estructuras políticas, la arquitectura y distribución de los espacios urbanos, las ciencias y los valores de los pueblos indígenas del Mundo Americano fueron, en pocas décadas, suprimidos y sustituidos por los del conquistador. Gran parte de los comportamientos y de las culturas originarias de los pueblos conquistados fueron prohibidos (p.186)

Así, la mencionada ***transculturización conceptual* ha de ser asumida**como una instancia específica de la “*transferencia de conocimientos*” (D´AMBROSIO, 1999) promovida por los conquistadores de los territorios agrupados hoy bajo la denominación de América Latina.

De acuerdo con lo anterior, los procesos de desarrollo y consolidación de las repúblicas latinoamericanas recién independizadas de la metrópoli hispana, heredaron las coordenadas teóricas y referenciales que habían sido asumidas por los líderes, tanto militares como civiles, de los movimientos independentistas; entre éstas pueden ser mencionadas las correspondientes a la Ilustración, especialmente aquella según la cual *la* *educación es un medio para que los países puedan redimirse tanto de la ignorancia como de la pobreza*. Como consecuencia de la adopción de esta posición, se desarrollaron esfuerzos orientados hacia la preparación de maestros y el establecimiento de sistemas educativos nacionales, en el entendido de que éstos podrían coadyuvar a la unificación de las naciones. En efecto, de acuerdo con OSSENBACH (1993):

> A pesar de que el liberalismo europeo en boga a principios del siglo XIX procuró que el Estado se abstuviera de intervenir en los asuntos sociales, desde un principio las necesidades de construcción nacional propiciaron una serie de medidas estatales, entre ellas las medidas de política educativa, a las que se asignó un papel integrador. Igualmente se llevaron a cabo diversas políticas sectoriales destinadas a mejorar las condiciones de vida de la sociedad o para el fomento y defensa de ciertas actividades económicas, sobre todo en aquellos países de mayor retraso industrial. (…)
>
> Desde todas estas perspectivas, la función que el Estado cumple en el campo de la educación tiene un significado muy importante. A la educación se le atribuyen funciones tales como las de integración de los distintos grupos sociales, culturales y étnicos, la creación de una identidad nacional y la legitimación del poder del Estado. Se trata, en definitiva, de conseguir el consenso, de manera que el Estado no se reduzca a ser un aparato de mando e incluso de represión, sino que, mediante una compleja red de funciones que llevan a efecto la dirección cultural e ideológica de la sociedad, consiga el consenso entre los diversos sectores de la sociedad. La educación adquiere en ese sentido una significación relevante, dado su carácter de órgano óptimo para la generación del consenso. Junto a ello, los procesos de secularización del Estado, que se discutieron ardientemente en relación a la escuela laica y los problemas de la libertad de enseñanza, forman también parte de esta lucha hacia el consenso. El Estado como representante de lo general rompe el monopolio ejercido por la Iglesia en materia educativa. La secularización de la política se presenta como requisito para una nación unitaria y un poder estatal indiscutido. (Ossenbech, 1993: 1)

Lo anterior implicaba la identificación de quiénes podrían ser maestros en las escuelas elementales. Las exigencias para ser maestro eran mínimas. saber leer, escribir con toda clase de letras y manejo de las cuatro operaciones aritméticas básicas. ¿Quiénes satisfacían este "perfil"? Habitualmente personas vinculadas al mundo clerical (predominantemente católico) o al campo de lo jurídico; para merecer el título de maestro era necesario

> además de la habilidad para "leer, escribir y contar, algunos requisitos igualmente destacables, como los de ser hombre blanco y decente, arreglado, de buen procedimiento y sin vicio alguno" (MARTÍNEZ Y COL., 1989, p. 37, citado por CALVO, 2004, p. 7)

Calvo (2004), agrega que

> El titulo certificaba las buenas costumbres, más la garantía sobre un saber no era lo que más se destacaba. Pero aun más importante, expresa el reconocimiento legal por parte del poder para desempeñar un oficio, que de ahora en adelante será susceptible de control y vigilancia de las autoridades. (CALVO, 2004; 7)

Los espacios donde se llevaban a cabo actividades de formación eran recintos muy precarios, mantenidos por iniciativa propia de un maestro que sostenía "la escuela" a sus propias expensas debido al escaso o nulo apoyo oficial; esta situación contrastaba con lo que ocurría en los monasterios o conventos dependientes de la Iglesia, donde las condiciones eran mejores.

> El acceso a la educación en la época colonial se limitaba a las primeras letras, en las escasas escuelas mantenidas por algunos conventos, parroquias y cabildos. Sin embargo, pocos podían asistir a estos establecimientos, que además no contaban con la infraestructura adecuada. Gran parte de la formación se realizaba al interior del hogar, en el caso de la clase alta, o bien en los talleres, en calidad de aprendiz de algún oficio, o en las labores agrícolas. Existían cuatro tipos de establecimientos de primera enseñanza. escuelas de "mínimos", de "menores", de "mayores" y de "latinidad". A las dos primeras, las más numerosas, se asistía especialmente para aprender a leer, escribir y rezar. En las escuelas "mayores" se enseñaba, además, gramática, principios de aritmética, catecismo y escritura por medio del dictado. Las escuelas de "latinidad" eran las más excepcionales y conducían a estudios superiores. (BIBLIOTECA NACIONAL DE CHILE, s/f).

II

La génesis de los sistemas educativos nacionales en Latinoamérica podría asociarse con la promulgación de leyes y ordenanzas que obligaban a crear escuelas (para niños y niñas) primero en monasterios y conventos, y después en cada pueblo o provincia.

La creación de este marco jurídico a nivel estatal, hizo posible –también- la introducción de "métodos" de enseñanza que debían ser asumidos por los maestros, quienes comenzaron a ser entrenados para que pudieran aplicarlos; uno de dichos métodos ampliamente aplicado fue el "Método de Enseñanza Mutua", ideado por Joseph Lancaster, basándose en las ideas de Andrew Bell (ORANTES, 2002)

En la institucionalización de los sistemas educativos nacionales en Latinoamérica, también incidió mucho la creación de "escuelas normales" a partir del segundo cuarto del S. XIX; en Venezuela, la primera Escuela Normal de Dibujo, para formar maestros en esta área, fue fundada el 19 de noviembre de 1836 (ARIS, 2001, p. 2); mientras que en 1841, Feliciano Montenegro y Colón (1781-1853), un ilustre caraqueño que hizo notables contribuciones a la educación venezolana (FRANCESCHI, 2012), fundó la primera Escuela

Normal Primaria (Aris, 2001, p. 2, citado por Peñalver, 2005, p. 18); el objetivo de estas escuelas normales era la formación del personal docente que iría a trabajar en las escuelas; su intención era la de que los futuros maestros se apropiasen de las “normas de enseñanza”, es decir, de los modos, métodos, maneras más idóneos para realizar la tarea transmisionista de conocimientos; para ello, eran concebidas “aulas modelo” donde los estudiantes para maestro contaban con un contexto realístico en el cual podían asimilar y ensayar las “normas”, es decir, los métodos de enseñanza que, *a posteriori*, debían poner en práctica en sus respectivas aulas reales.

Sostiene PEÑALVER (2005) que

> La experiencia de la escuela normal, como dispositivo esencial que garantizaba no solo el despliegue de los ideales de la Ilustración y la ilustración misma de los ciudadanos, sino que además era la referencia directa del progreso, la ciencia, la técnica y las ideas, se extendió por Europa y América. (p. 12)

En el Cuadro 1, basado en Aris (2001), Báez Osorio (2004) y Salgado Peña (2006), se hace una cronogénesis de la fundación de escuelas normales en algunos de los países latinoamericanos.

Cuadro 1. Cronogénesis de la Fundación de Escuelas Normales en América Latina

País	**Año**	**Primeras Escuelas Normales**
México	1822	La primera escuela normal de México es fundada en 1822 por iniciativa de la compañía Lancasteriana, pero es durante la época de Porfirio Díaz donde se consolida el normalismo en México con la finalidad de educar unificadamente en un país de contrastes territoriales y culturales
Perú	1822	Perú Organiza su primera escuela normal de varones en 1822 bajo el modelo lancasteriano y en 1933 se funda la normal femenina
Honduras	1836	Honduras, la primera escuela normal lancasteriana funcionó entre 1836 y 1840. Después, entre 1875 y 1887 se amplía la formación normalista al emitirse acuerdos para la creación de las normales en diferentes regiones del país. En 1905 se funda la escuela normal de señoritas y en 1906 la escuela normal de varones en la capital
Venezuela	1836	Venezuela Desde los inicios de la vida republicana en 1811 existió preocupación por crear instituciones que se encargaran de preparar maestros. Para 1824 la Municipalidad de Caracas contrató a Joseph Lancaster para que fundase escuelas y ayudase a la formación de maestros que promovieran la metodología que él fomentaba, en la cual los alumnos más adelantados colaboraban con el maestro, sin embargo la situación política no permitió que ello se llevara a cabo. El 19 de noviembre

		de 1836 se creó la primera escuela normal de dibujo para formar maestros en esta área, la cual existió por casi cuarenta años. Y en 1841 Feliciano Montenegro y Colón, hombre preocupado por la enseñanza creó una escuela normal primaria en Caracas (Tomado de Aris, 2001, p. 2).
Costa Rica	1838	En Costa Rica se crea en 1838, por la municipalidad de Heredia, la primera escuela de formación de maestros, exclusiva para varones En 1914 se fundó la Escuela Normal de Costa Rica, de manera definitiva y funcionó con regularidad hasta 1940, cuando fue incorporada a la Escuela de Pedagogía de la recién creada Universidad de Costa Rica y en 1950 se funda la de Heredia que posteriormente dará origen a la Universidad Nacional de Costa Rica.
Chile	1842	En Chile se crea la Escuela Normal de Preceptores en 1842
República Dominicana	1863	Republica Dominicana, la educación normal se institucionaliza con la emisión de la ley para el establecimiento de las escuelas normales entre 1863 y 1916
Argentina	1870	Inicia la Escuela Normal del Paraná en 1870, a iniciativa en ambos casos del educador argentino Domingo Faustino Sarmiento
Colombia	1872	En Colombia, el 20 de enero de 1872 fue creada la Escuela Normal de Varones, establecida en el estado de Cundinamarca, se convirtió en la primera escuela normal que existió en el país. (BÁEZ OSORIO, 2004).
Panamá	1872	Panamá la escuela normal de varones fue abierta en 1872, para 1880 el estado había ampliado la cobertura educativa y aumenta la creación de escuelas normales para cubrir la demanda de maestros
Uruguay	1885	Uruguay, “el proceso se inicia en 1885 con la inauguración del nuevo local para concentrar a los institutos normales de Montevideo y de esta manera profesionalizar la carrera docente magisterial” (CARABALLO, 2004, citado por UNESCO/IESALC, 2006, p. 172).
Ecuador	1889	Ecuador hace lo propio en 1889 al organizar la normal de varones y en 1901 la normal de señoritas
Nicaragua	1908	Nicaragua funda la primera escuela normal de señoritas en 1908 y en 1913 inicia sus labores el instituto pedagógico de Managua para varones
Bolivia	1909	Bolivia en 1909 se funda la escuela normal de maestros y preceptores del Sucre bajo el liderazgo de una misión Belga y posteriormente, se crea en 1930, la escuela normal indígena Warisata (LOZADA PEREIRA, 2009)
Cuba	1959	En Cuba se organizaron 6 escuelas normales antes de 1959, de acuerdo a la división política administrativa de aquella época
El Salvador	1968	El Salvador se da el mismo fenómeno que en los demás países de Centro América; antes de 1968, en el período identificado como “prerreforma”, funcionaban 67 escuelas normales que, a partir de esa fecha, son agrupadas en un solo programa de formación docente en la Ciudad Normal Alberto Masferrer

Fuentes: ARIS (2001), BÁEZ OSORIO (2004), SALGADO PEÑA (2006),

III

Lo dicho anteriormente, podría generar la falsa idea de que en el período postcolonial, los gobiernos de las repúblicas recién constituidas, priorizaban la educación elemental; por el contrario, la educación continuó siendo un asunto de élites, las cuales se preocuparon por educar a sus miembros a un nivel superior al elemental, en lo que –con el tiempo- llegaría a constituir los niveles secundario y postsecundario, cuya organización en muchos países precedió a la del nivel elemental, y tenían prioridad en la asignación de los escasos recursos existentes.

Esto se asocia con las necesidades formativas, manifestadas por los miembros de la emergente burocracia gubernamental y de las jerarquías, tanto militar como eclesiástica; en esto desempeñaron un papel crucial los colegios regentados por órdenes religiosas, tales como las de los Jesuitas y los Dominicos, entre otras.

La preservación de la integridad política y social de las recién independizadas repúblicas, exigía preparar profesionalmente a los encargados tanto de su defensa como de su administración; ello se expresó tanto en la extensión y el mejoramiento de las universidades, existentes desde principios del S. XIX, como en la creación de escuelas, colegios y academias militares que, transcurrido cierto tiempo, también admitieron estudiantes civiles; aún cuando algunas de ellas admitieron civiles desde sus inicios; como es el caso de la Academia Militar de Matemáticas,fundada en Caracas por Juan Manuel Cagigal el 4 de noviembre de 1831(ARRATIA, 2002).

La preparación de estas élites cívico-militares implicaba estudios de medicina, derecho, ciencias económicas y naturales, y diferentes ingenierías, tanto civil como militar; este último hecho coadyuvó a incrementar el interés por el estudio de las matemáticas, dada la importancia de éstas en la formación ingenieril; ello explica, en cierto modo, porqué muchos ingenieros, tanto civiles como militares, como antes lo habían hecho curas y sacerdotes, devinieron en maestros de matemática.

En síntesis, la educación durante la época colonial presentaba las siguientes características:

Elitista: la mayoría de la población fue excluida de la educación, la cual constituyó un privilegio para los miembros de las clases dominantes.

Dogmática: no admitía cuestionamiento alguno, debido a que era impuesta desde el poder estatal.

Memorística: estimulaba la memorización del contenido transmitido por el maestro al exigir su repetición textual (al pie de la letra) por parte de los discentes.

Patriarcalista: excluía a las mujeres salvo, excepcionalmente, a las pertenecientes a un número muy reducido de familias con un elevado poder económico; en este caso la educación recibida por estas privilegiadas mujeres era muy elemental y simple.

Religiosa: en la educación se reflejaba el carácter predominantemente religioso de la sociedad, lo cual era manifiesto en el contenido y forma de los materiales utilizados así como también en el discurso de los maestros.

Rígida: la severidad y disciplina eran altamente valoradas, hasta el punto de llegar al castigo físico como medio para propiciar el logro de los aprendizajes ("la letra con sangre entra")

Asistemática: no existían normas que regularan los procesos educativos (CORVALAN, 2014)

IV

Un aspecto sustancial de este proceso es el que tiene que ver con los libros de texto que eran utilizados para sustentar el estudio de la Matemática(BEYER, 2006, 2009, 2010); dichos textos fueron producidos en la Metrópoli y tenían una notable influencia francesa, inglesa o alemana; algo que facilitó el uso de estos textos fue su traducción al castellano (o al portugués en el caso de Brasil); es necesario notar que en algunos países se estimuló a quienes enseñaban matemática a que escribiesen sus propios textos, además del uso de los textos empleados en la Metrópoli, en su idioma original o traducido, otro elemento dinamizador de los estudios de Matemática en las nacientes repúblicas, fue la contratación de profesores extranjeros.

Necesario es decir que, si bien es cierto que para la formación a nivel "superior" (universidades y academias) se disponía de textos (en el idioma original o traducidos), en el nivel elemental se apreciaba una notable escasez, lo cual obligaba a adoptar textos foráneos; sin embargo, a partir de mediados del S. XIX, comenzaron a ser publicados libros por autores nacionales aunque su contenido, estructura y disposición tenían rasgos análogos a los de los libros de los autores con quienes ellos habían sido formados (BEYER, 2010).

Un hecho destacable de estos textos es que muchosde ellos estaban estructurados como un catecismo(BEYER, 2009), en los que se formulaban preguntas cuya única respuesta era dada por el texto mismo y debían ser reproducidas por el estudiante de modo literalmenteidéntico; esta característica catequística de los libros de texto, permite presumir un enfoque predominantemente dogmático de la enseñanza de la matemática en esos tiempos.

Puede afirmarse que el conocimiento matemático que circuló en los países colonizados por España era muy limitado; básicamente estaba constituido por nociones fundamentales de geometría plana, cálculo aritmético (las cuatro operaciones, quebrados, decimales, regla de tres, etc.) y elementos de trigonometría, los cuales resultaban necesarios para realizar las actividades comerciales y militares básicas de aquel tiempo. Quienes tuvieron la responsabilidad de "difundir la matemática" a nivel elemental fueron religiosos y maestros particulares.

La enseñanza de la Matemática a nivel superior al elemental formaba parte de los estudios realizados en las instancias destinadas a la formación de ingenieros, militares y civiles, así como de los miembros de las élites civiles y religiosas, lo cual tenía lugar en las "academias" militares y en los colegios; esta actividad enseñante y difusora del conocimiento de las matemáticas es lo que Peirrotti (1999) denomina "*proto-cultura matemática*" en Hispanoamérica; la cual estaba conformada, básicamente, por "nociones de geometría plana, cálculo aritmético (las cuatro operaciones, quebrados, decimales, regla de tres, etc.) y elementos de trigonometría" (ob. cit., p. 2). Este mismo autor indica que, durante esta etapa, no se produjeron nuevos aportes al saber matemático ni se abandonó el concepto de "ciencia útil" que planteaba como justificación para el estudio de estas nociones, el que pudieran ayudar a "resolver los problemas que plantea la vida cotidiana o la profesional" (PIERROTTI, 1999; p. 7).

V

En los inicios del S. XX, el panorama latinoamericano es el de una región conformada por repúblicas independientes, con instituciones educativas relativamente estables que les servían para la satisfacción de las necesidades de formación de su burocracia administrativa y las de su estamento militar; sin embargo, la situación de los niveles elemental y secundario daba muestras de precariedad; claro está, la situación en los diferentes países era heterogénea.

No obstante, se pueden identificar algunos rasgos generales compartidos por las repúblicas recientemente constituidas; entre ellos están los siguientes.

1. Constitución de sistemas educativos nacionales: a este respecto, Ossenbach (1993), señala que:

> En países como Argentina, Uruguay o Costa Rica la pronta estabilidad del Estado dio lugar a la creación de un sólido sistema educativo. Por el contrario, en Estados menos consolidados el proyecto de gestión política debió apoyarse más en el ejército y otros

> órganos represivos que en la educación. Este fue el caso de países como Guatemala o el Ecuador. (Ossenbach, 1993; ¶22)

2. Progresivo avance de la educación laica
3. Necesidad de producir libros de texto para la enseñanza de la matemática a nivel elemental.
4. Preocupación por la calidad y formación de aquellos que tenían la responsabilidad de enseñar matemática; una de las estrategias fue la contratación de profesores extranjeros quienes trajeron consigo sus libros de texto y metodologías de enseñanza, las cuales transfirieron a los estudiantes y profesores entrenados por ellos lo cual, a la larga, se vería reflejado en los currículos y planes de estudio.

Podría decirse que durante esta etapa la producción de conocimiento matemático en América Latina fue prácticamente nula; la situación que Yajaira Freites describe para Venezuela, podría extrapolarse al resto de los países de la región; en efecto, esta investigadora adscrita al Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, IVIC, afirma que:

> En el siglo XVIII, pocos de los habitantes de Tierra Firme o de la Tierra de Gracia podían asegurar con propiedad que sabían algo de matemáticas, por ejemplo, de las simples nociones de la aritmética: el contar, sumar y restar. Este era un saber que pocos criollos dominaban y quienes lo detentaban solían ser funcionarios de la Corona, especialmente los militares, los oficiales de la Real Intendencia y de Hacienda y por supuesto, algunos ministros de la Iglesia. No olvidemos que gracias al Obispo Martí, fue levantando una especie de censo durante su extensa visita a su grey. En consecuencia, los venezolanos nos fuimos apropiando del saber matemático tardíamente; los primeros universitarios de la Real y Pontificia Universidad de Caracas, si bien sabían latín y gramática castellana, y se graduaban en derecho, cánones o en medicina, tenían escasas nociones de matemáticas; éstas no eran parte de su instrucción. (Freites, 2000; 9).

Esta fue una etapa de “transferencia del conocimiento matemático a las colonias, condicionada por factores sociales, políticos y culturales” (D´AMBROSIO, 1999), y de poca o prácticamente nula producción de conocimiento matemático nuevo.

Para superar la situación antes descrita, la presencia de profesores extranjeros contratados resultó beneficiosa para los países contratantes puesto que con su actividad influyeron de varias maneras. (a) incrementando la cultura matemática de los profesores nacionales; (b) propiciando el desarrollo de una actitud positiva hacia el estudio de la matemática; (c) proponiendo modelos a seguir en la formación de quienes requiriesen estudios de matemática en su formación (v.g. los ingenieros).

Un detalle importante de esta es que “el currículum era el libro”; es decir, los estudios de matemática eran realizados siguiendo con fidelidad el contenido de los libros de texto usados por los profesores; algunos de tales textos llegaron a ser utilizados durante décadas.

VI

Desde el punto de vista filosófico e ideológico, puede señalarse que la educación en América Latina transitó desde las ideas derivadas de la Ilustración, hacia las del Positivismo de Augusto Comte, con sus correlatos metodológicos basados, respectivamente en el dogmatismo y en el empirismo, el cual posteriormente dio paso auna enseñanza intuitiva siguiendo las ideas de Pestalozzi, entre otros.

La puesta en práctica de las acciones derivadas de la adopción de tales postulados filosóficos requería de un personal específicamente entrenado para ello, lo cual tuvo lugar en las denominadas “escuelas normales” (Ver Cuadro 1); ello contribuyó a la profesionalización de los maestros de enseñanza elemental; sin embargo, los procedimientos formativos empleados se caracterizaron por ser formalistas y memorísticos, basados en el autoritarismo y la disciplina; ante lo cual insurgieron autores como María Montessori, Ovide Decroly, John Dewey, Georg Kerschensteiner, Edouard Claparède, Adolphe Ferrière, Roger Cousinet y Célestin Freinet, entre otros.

Como reacción a la enseñanza tradicional, emergió el Movimiento de la Escuela Nueva el cual:

> tuvo una notable influencia más allá de las fronteras de Europa y Norteamérica, haciéndose sentir en otras regiones con diversos grados de intensidad, como sucedió en el caso de América Latina, donde en varios países, como Argentina, Chile, Colombia, Brasil y Venezuela, por ejemplo, estuvo matizado por las particularidades propias de cada uno de los respectivos contextos nacionales. En el caso venezolano, es de señalar que las ideas de la Escuela Nueva se hicieron notar de manera especial bajo el liderazgo de Luis Beltrán Prieto Figueroa, en el período comprendido entre los años 1936 y 1948. (Narváez, 2006; p. 6)

Las ideas educativas provenientes de los EEUU, específicamente debidas a la penetración de pedagogos estadounidenses, entre quienes destaca John Dewey, hicieron que –poco a poco- las ideas educativas europeas fueron dando paso al pensamiento pedagógico estadounidense, el cual –crecientemente- fue ocupando cada vez más espacio en los países latinoamericanos; todo ello apareado con una serie de circunstancias económicas (Revolución Industrial) y políticas (I Guerra Mundial) que afectaron las relaciones entre los países a nivel global, siendo Latinoamérica una región particularmente sensible, donde tuvieron lugar procesos importantes tales como: urbanización, crecimiento de las clases medias, migraciones desde Europa y movilizaciones internas de la población nacional desde el campo hacia las ciudades.

VII

En la década de los 60´s del S. XX, tanto en Europa como en EEUU, estaban siendo llevados a cabo procesos de reforma en la enseñanza de la Matemática a nivel preuniversitario, enmarcados en lo que se denominó “Guerra Fría”; América Latina fue uno de los escenarios de dicha guerra; de allí el interés por extender a esta región las mencionadas reformas; un espacio y medio para ello fue la realización de las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática (CIAEM), cuya primera edición tuvo lugar en diciembre de 1961 en Bogotá, Colombia.

Las reformas implicaban cambios tanto en la concepción acerca de la Matemática como en el modo de enseñarla, derivados de la adopción del enfoque denominado “Matemática Moderna”.La tarea del Comité Interamericano de Educación Matemática –responsable de organizar las Conferencias- consistía en dar seguimiento, asegurar la continuidad y promover nuevos proyectos derivados de las ideas y conceptos planteados en la I CIAEM, todo ello con la finalidad de elevar la calidad de la enseñanza de la Matemática en los niveles universitario y preuniversitario en los países del ámbito latinoamericano.

El progreso de las reformas propuestas en la I CIAEM, fue evaluado cinco años después durante la II CIAEM que tuvo lugar en Lima, Perú, en 1966; los países participantes en esta segunda edición dieron a conocer la situación mediante la presentación de informes nacionales; así se pudo constatar que la implementación de las reformas confrontó, entre otras, las siguientes dificultades.

1. Falta de credibilidad por parte de los docentes, padres y opinión pública en general, acerca de la necesidad y factibilidad de la reforma.
2. Falta de preparación de los docentes para implementar la reforma.
3. Inexistencia de libros de texto adecuados.
4. Resistencia a la modificación de los currículos y planes de estudio obligatorios.

Si bien es cierto que el Movimiento de Matemática Moderna no dio los resultados esperados, sí propició un logro muy importante. la creación y desarrollo de la comunidad latinoamericana de educadores matemáticos, integrada por grupos de profesores que se reunían para.

1. Reflexionar e investigar sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.
2. Estudiar no solo Matemática sino también sobre su didáctica.
3. Examinar los planteamientos hechos por psicólogos, sociólogos y matemáticos acerca del aprendizaje de la Matemática.

De esta manera se fueron creando condiciones para que la formación matemática de las personas, es decir, su educación en Matemática, se fuera convirtiendo en un espacio para la producción profesional de saberes, lo cual constituiría uno de los factores coadyuvantes de la emergencia de la Educación Matemática como una disciplina académica específica.

VIII

La génesis de la Educación Matemática como campo disciplinario (científico) está asociada con la preocupación de los propios matemáticos por la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en los niveles educativos preuniversitarios; en efecto, desde finales del S. XIX, los matemáticos del mundo iniciaron la realización de su congreso internacional (*International Congress of Mathematicians*, ICM), cuya primera edición se llevó a cabo en Zurich en 1897; en el segundo, tres años después en París, presidido por Henri Poincaré, fue donde David Hilbert pronunció su célebre conferencia sobre Problemas Matemáticos; el 3º en Alemania (1904); y, el 4º (1908) en Roma; los ICM se han venido realizando de modo recurrente cada cuatro años (salvo en ocasión de las dos Guerras Mundiales).

El 4º ICM fue particularmente importante puesto que fue allí cuando, por iniciativa de David Smith (EEUU) y Félix Klein (Alemania) se creó la *Comission Internationale de L´Ensignament Mathématique,* CIEM (SMITH, 1910). Los matemáticos habían comenzado sus reflexiones teóricas sobre la educación matemática desde finales del S. XIX, lo cual se expresó en la fundación de la revista *L´Enseignement Mathématique* en 1899; llama la atención que en el primer número de esta revista fue incluido el artículo del psicólogo Alfred Binet, intitulado *Pedagogía Científica*; este hecho, según refiere Ubiratan D´Ambrosio, resulta muy interesante puesto que es un indicio de la contemporaneidad de tres cuestiones fundamentales: (a) la aparición de nuevas formas de aseguramiento del rigor en Matemática; (b) la emergencia de la Psicología como campo científico; y, (c) las preocupaciones, tanto de los matemáticos como de los psicólogos, por los pormenores del aprendizaje de la Matemática; así que este tema fue el asunto de interés indagatorio de las que podrían ser consideradas con propiedad como las primeras investigaciones en educación matemática, cuya trayectoria ha sido muy bien descrita por Jeremy Kilpatrick en su ya clásico trabajo acerca de la Historia de la Investigación en Educación Matemática (Kilpatrick, 1992).Es importante resaltar que desde su primera edición en 1897, en cada ICM ha sido incluida alguna actividad relacionada con la enseñanza de la Matemática (en ALBERS, ALEXANDERSON, REID, 1987, puede ser leida una historia ilustrada de los ICM, cuyos *proceedings* pueden ser revisados en https://www.mathunion.org/icm/proceedings).

IX

En 1950, el ICM se llevó a cabo por segunda vez fuera de Europa (la primera fue en 1924, cuando el ICM se celebró en Canadá) y luego de la 2ª Guerra Mundial; este ICM (Cambridge, 1950) también fue el primero cuya organización, oficialmente, estuvo a cargo de la *International Mathematical Union*, IMU; ésta fue creada en 1920 –durante el VI ICM- pero había sido desactivada por causa de la 2ª Guerra Mundial; su reactivación ocurrió en 1946, un año después de la fundación de la UNESCO (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura; un organismo de la ONU fundado en 1945 y cuya su sede está en París, Francia), y de cuyo *Consejo Internacional de Organizaciones Científicas* pasó a formar parte y oficialmente asumió la tarea de organizar los ICM.

En 1908, en el IV Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Roma durante los días 6 al 11 de abril, fue fundada la *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* (también denominada Internationale Mathematische Unterrichtskommission, y Commissione Internazionale dell'insegnamento matemático), la cual fue disuelta en 1920 debido a los estragos causados por la 1ª Guerra Mundial.

La *Commission* fue reconstituida en 1928, durante la realización del VIII Congreso Internacional de Matemáticos, llevado a cabo en Bologna, Italia, del 3 al 10 de septiembre; y en el IX ICM (Zurich, 5-12 de septiembre de 1932), se le habilita para que continúe sus actividades durante cuatro años más, funciones éstas que le son renovadas en 1936 (X ICM, Oslo; 13 al 18 de julio) hasta el XI ICM que habría de realizarse en 1940; sin embargo, en 1939 estalla la 2ª Guerra Mundial, conflagración que se prolongó hasta 1945, por lo cual la *Commmision* tuvo que suspender las actividades hasta que hubiesen condiciones favorables para reanudarlas.

En 1950 se realizó el XI ICM (30 de agosto al 6 de septiembre, Cambridge, EEUU); en el mismo se llevó a cabo la Sección VII (Historia y Educación) permanente del ICM, pero la participación de la *Commission* no resultó significativa. En marzo de 1952 tuvo lugar la Primera Asamblea General de la IMU, durante la cual la *Commission* es definida como una subcomisión permanente de la IMU,como idiomas oficiales se establecieron Inglés, Francés, Alemán e Italiano, y como órgano oficial, se asumió a la revista *L'Enseignement Mathématique*.

Entre el 31 de agosto y el 1 de septiembre de 1954, durante la Segunda Asamblea General de la IMU, enmarcada en la realización del XII ICM (Amsterdan, 2-9 de septiembre de 1954), la *Commission* es rebautizada como *International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)*, teniendo la responsabilidad de encargarse de la realización de las actividades de la IMU relativas a la enseñanza de la matemática, así como también la proposición de programas destinados a promover el desarrollo de la educación matemática a todos los niveles, procurando el reconocimiento público de su importancia; desde entonces la ICMI/IMU ha desempeñado un relevante papel en el desarrollo de la educación matemática a nivel mundial. Es conveniente señalar que, al escribir “educación matemática”, con las iniciales en minúsculas, se está haciendo referencia a la formación en matemática que ha de recibir las personas en contextos escolares o no escolares.

Al decir de Mattos y Batarce (2010), el cambio de nombre a la *Commission*, traduciendo su denominación del francés al inglés no es un hecho menor; al contrario, según estos autores, ello marca un hito en la definitiva internacionalización de la Educación Matemática y la posibilidad para que ésta pudiera consolidarse como un campo disciplinario con una especificidad propia; tanto así que en 1968 –apenas 18 años después de su conformación- la ICMI decidió organizar los *International Congress of Mathematic Education*, ICME, cuya primera edición fue en 1969, en Lyon, Francia; y a partir de entonces se celebra cada cuatro años de modo intercalado con los International Congress of Mathematicians, ICM.

Durante el XI ICM tuvo lugar un importante acontecimiento; en efecto, en esta edición del ICM fue reactivada la *Comission Internationale de L´Ensignament Mathématique* (CIEM) que, en la Asamblea General de la IMU realizada durante el XII ICM (Amsterdam, 1954), fue rebautizada como *International Comission of Mathematics Instruction,* ICMI, constituyéndose en una comisión especializada de la IMU;un reporte sobre la labor de la

ICMI durante las cinco décadas transcurridas entre 1966 y 2016 fue elaborado por HODGSON & NISS (2018).

X

Hemos realizado la digresión anterior por su aporte a la comprensión de la Historia de la Educación Matemática en América Latina debido a la influencia sobre los educadores matemáticos latinoamericanos, de las ideas que circulan en los ICME.

Como se dijo antes, un año después de la creación de la UNESCO, en 1946 la IMU pasó a formar parte del Consejo Internacional de Organizaciones Científicas de este organismo, y la *International Commission of Mathematical Instruction, ICMI*, se constituyó en una de las comisiones especializadas de la IMU, teniendo como asunto de interés (foco) la enseñanza de la Matemática; así que es comprensible que entre la UNESCO y la ICMI se establecieran vínculos de colaboración mutua, los cuales han sido examinados ampliamente por Valente (2014).

Así que una comprensión cabal del desenvolvimiento de la Educación Matemática en América Latina amerita tener en cuenta las preocupaciones globales de los organismos creados en el período posterior a la 2ª Guerra Mundial (que fue conocido como Guerra Fría, Ver Nota 1); dichas preocupaciones derivadas de circunstancias económicas, sociales, culturales y, fundamentalmente, políticas, entre las que se destacan las siguientes: Fundación de la UNESCO (1945); Reactivación de la IMU (1946); Plan Marshal (1948-1952), Creación de la Organización Europea de Cooperación Económica, OECE; Constitución de la *Commission Internationales pur l´etude et l´amelioration de L´Enseignement de Mathématique*, CIEAEM, 1950; (Nota 2); Re-denominación de la *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* como *International Commission of Mathematical Instruction*, 1954; Lanzamiento del Sputnik por la URSS, 1957; Revolución Cubana, 1959; Incorporación de EEUU y Canadá a la OECE, y re-denominación de ésta como OCDE, 1960.

Tales acontecimientos que, en principio, tuvieron como epicentro a Europa, algunos de ellos en el marco del Plan Marshall, luego se extendieron al denominado "mundo occidental" en cuyo ámbito los EEUU pretendía desempeñar un papel hegemónico; así que, tomando en cuenta que la "reconstrucción de Europa" requería tanto de "mano de obra calificada" como de la formación de cuadros científicos y técnicos, es entendible que –asumiendo que "la ciencia es una fuerza motriz del progreso"- los argumentos justificativos, los fundamentos, los medios, modos y propósitos para mejorar la calidad de la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática, hayan sido uno de los espacios de confrontación.

Por su parte la CIEAEM (Nota 3), encargó a un conjunto de científicos de primer nivel, liderados por Caleb Gattegno y Jean Piaget, que realizaran un estudio de los aportes para la enseñanza de la Matemática que pudieran ser extraídos de los avances generados por las –para ese momento- más recientes investigaciones en los campos de la lógica, la epistemología, la historia, la psicología, la pedagogía y, por supuesto, la matemática; el trabajo de este equipo vio luz en un célebre libro intitulado *L´Enseignement des Mathématiques* (PIAGET, BETH, DIEUDONNE, LICHNEROWICZ, CHOQUET & GATTEGNO, 1955).

Un aspecto clave de este libro fue la dilucidación de la intersección existente entre la psicología, la didáctica, la epistemología y la Matemática, especialmente entre estas dos últimas; gracias al trabajo de Jean Piaget se evidenció el vínculo entre las estructuras cognitivas y las de la matemática (PIAGET, 1971); además, esta obra se convirtió en una referencia fundamental en las discusiones sobre los cambios que habrían de tener lugar en la enseñanza de la Matemática Escolar que se mantuvieron circunscritas al ámbito europeo.

Fue en este marco donde la OECE propició la realización del *Seminario de Royamount* del cual emergió "un programa moderno de Matemática para la educación secundaria", fuertemente influenciado por las ideas estructuralistas que, tanto en Matemática como en Psicología, Antropología y Lingüística, predominaban en esa época, fundamentándose sobre las ideas de Jean Piaget y las del Grupo Bourbaki.

XI

Mientras lo anterior estaba teniendo lugar en Europa, otro tantoocurría en EEUU, pero con diferencias significativas en cuanto a: organismos de financiación, personajes e instituciones involucradas, formación de grupos de investigación, objetivos de los programas de reforma, materiales usados en la formación de profesores, estrategias para motivar la atracción hacia la Matemática y su estudio, las perspectivas de los líderes del proceso, orientación hacia la práctica vs orientación hacia lo teórico, entre otros aspectos.

Entre 1908 y 1954, la participación de América Latina en las actividades de la IMU y sus comisiones especializadas fue escasa, contrariamente a lo que ocurría en Europa y EEUU; fue gracias al impulso del proceso de internacionalización desarrollado por Marshall Stone quien, como Presidente de la ICMI (1959-1962) posicionó a la América Latina en el movimiento internacional de la Educación Matemática; para ello, con el apoyo de la UNESCO y de la Organización de Estados Americanos, OEA, propició la creación de escenarios donde pudieran ser examinados los problemas confrontados por la enseñanza de la Matemática en los países de las Américas; entre esos escenarios destaca la Conferencia Interamericana de Educación Matemática, CIAEM, cuya primera edición tuvo lugar en Bogotá, Colombia, en diciembre de 1961, ocho años antes de que en 1969, se realizara el 1er. Congreso Internacional de Educación Matemática (I ICME), siendo Hans Freudenthal Presidente de la ICMI.

La 1ª CIAEM serviría de plataforma para impulsar un programa de reforma de la Enseñanza de la Matemática en las Américas que se proponía. cambiar el modo de enseñar Geometría a nivel preuniversitario, adoptar el enfoque estructuralista en la enseñanza de la Matemática, procurar que esas ideas fueran asumidas tanto por los profesores en servicio como por quienes se estuviesen formando para ser profesores que enseñarían Matemática.

Las debilidades propias de la comunidad de matemáticos latinoamericanos hizo posible que la I CIAEM se convirtiera en un escenario donde convergerían las iniciativas europeas sobre enseñanza de la Matemática con las que estaban siendo puestas en juego en EEUU, teniendo este país la pretensión neo-colonizadora de que las mismas fueran asumidas por los países latinoamericanos; algunos pormenores sobre este proceso pueden ser encontrados en Mosquera (2010).

Historia de la Educación Matemática en Latinoamérica:

10 Claves para su comprensión

La indagación documental que sirvió de base al presente ensayo, permite caracterizar a la Latinoamérica hispana como unidad de la diversidad de repúblicas emergentes de sus respectivos procesos de lucha por independizarse de las potencias de las cuales fueron colonias. (*Clave 1: América Latina Hispana como un conjunto de repúblicas que emergen a partir de procesos independentistas*). Sin embargo, aun cuando se asumieron como *No Colonias*, en ellas permanecieron, como parte de su herencia cultural, los referenciales teóricos que habían sido asumidos por los representantes de las élites colonizadoras; ello sirve de base para caracterizar como proceso de Transculturización Conceptual a la Cultura Matemática imperante durante la Colonia y la cual se prolongó durante sus primeras décadas de vida como repúblicas independientes. (*Clave 2: La Educación en América Latina constituyó un proceso de Transculturización Conceptual*)

Tal transculturización se producía, principalmente, mediante el desarrollo de procesos de enseñanza de la Matemática basados en libros producidos en la Metrópoli, muchos de ellos en forma de catecismo y que eran seguidos al pie de la letra por los miembros de las órdenes religiosas quienes fungieron como los primeros maestros, y después por personas especialmente preparadas para ello, siempre u cuando cumplieran con ciertos requisitos rígidamente establecidos, la evolución de este proceso formativo devino en la creación de las denominadas Escuelas Normales. (*Clave 3: Los Libros como medios para transmitir una cultura matemática foránea; Clave 4: Los Libros estaban escritos en forma de catecismos, base de una Enseñanza Dogmática*)

Por otro lado, tanto en la Colonia, como durante las primeras décadas de la época republicana, la educación era un asunto de élites civiles y militares; este proceso, de alguna manera, constituyó una continuación de la "evangelización de los vencidos" (ALAPERRINE-BOUYER, 2007). (*Clave 5: Los integrantes de las élites, civiles y militares, eran los que necesitaban aprender matemática durante la Colonización española y las primeras décadas de las repúblicas independientes emergentes*).

.Como proceso de Transculturización Conceptual o de "Transferencia del Conocimiento Matemático" (D´AMBROSIO, 1999), al término de la colonización española, la educación en general y la educación matemática en particular se caracterizaba por ser: Elitista, Dogmática, Memorística, Patriarcalista, Religiosa, Rígida, y Asistemática. (*Clave 6: Características distintivas de la educación al finalizar la colonización española en América*)

Como puede inferirse de lo dicho hasta ahora, debido al desplazamiento y a la invisibilización de las prácticas matemáticas de los pueblos originarios de América, durante la Colonización española y hasta bastante tiempo después las emergentes repúblicas independientes, al decir de D´AMBROSIO (1999: 1), continuaron siendo "consumidoras del conocimiento generado en Europa, hasta la transición del siglo XIX al XX, cuando la producción local de matemáticas comenzó a ser trazada";

En este sentido, conviene resaltar que en 1908, durante el Congreso Internacional de Matemáticos que tuvo lugar en Roma, se creó, presidida por Félix Klein, la *International Commission on Mathematical Instruction*, ICMI, cuyo propósito principal reforzar el interés que los matemáticos estaban desarrollando por los que ocurría con la educación escolar, y particularmente con la educación matemática; desde entonces se inició un movimiento, hoy en día cada vez más robusto y de alcance mundial, que ha dado lugar a procesos de disciplinarización e institucionalización de la Educación Matemática como un ámbito profesional para la producción de conocimientos y saberes sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática; de tal manera que una comprensión cabal de la Historia de la Educación Matemática en América Latina, requiere la consideración de estos aspectos (*Clave 7: Situación Internacional de la Matemática y su Enseñanza al comenzar el S. XX*).

El desenvolvimiento de la Educación Matemática en la América Latina hispana es producto de la labor de muchísimas personas; entre ellas se destaca la figura de Marshall Stone (1903.1989) (*Clave 8: Marshall Stone y la Internacionalización de la Educación Matemática*); según BARRANTES & RUIZ (1988):

> Debe mencionarse, especialmente, que Stone tenía una gran simpatía por América Latina, directamente benefició a muchos estudiantes latinoamericanos que hacían su camino en el mundo de las matemáticas norteamericanas (entre ellos, el Prof. José Joaquín Trejos Fernández, quien fue Presidente de la República de Costa Rica entre 1966 y 1970). La mejor muestra de su aprecio por la región latinoamericana es, sin embargo, el haberse involucrado tan decisivamente en la construcción y permanencia del Comité Interamericano de Educación Matemática, CIAEM durante tantos años (siendo su presidente entre 1961 hasta 1972). (p. 25)

El bien ganado prestigio de Marshall Stone constituyó un aval para las actividades en pro de la Educación Matemática que realizó en Latinoamérica, siendo una de las más importantes la promoción de la I Conferencia Interamericana de Educación Matemática, la cual se realizó en Bogotá (Colombia) en diciembre de 1961, donde fue elegido como presidente del CIAEM, cargo en el cual permaneció durante más de una década. Estas conferencias se han sostenido desde entonces (están próximas a cumplir seis décadas), y han desempeñado un papel fundamental en la consolidación de la Educación Matemática en la región latinoamericana (*Clave 9: El papel de las CIAEM en el desarrollo de la Educación Matemática en América Latina*).

La robustez actual de la Educación Matemática en la América Latina hispana es innegable, tal como lo testimonia la obra colectiva editada por ROSARIO, SCOTT, & VOGELI, B. (2014), en la cual se oferece uma visión exaustivamente compreensiva del desarrollo de las matemáticas y su enseñanza en las siguientes naciones de América del Sur, América Central y el Caribe: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Guyana, Haití, Honduras, México, Panamá. , Paraguay, Perú, Puerto Rico, Trinidad y Tobago y Venezuela. Esta región es sede o está vinculada con varias de las más importantes organizaciones de educadores matemáticos: el Comité Interamericano de Educación Matemática, CIAEM; el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa,Clame; la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática, FISEM, esta última agrupa a las asociaciones de educadores matemáticos existentes en América Latina, España y Portugal. Además, se cuenta con revistas de alto impacto, entre las que cabe mencionar: RELIME (México); BOLEMA, ZETETIKÉ, HISTEMAT (Brasil) y UNION, está última es producida en España pero es un órgano de difusión de la producción científica de los educadores matemáticos vinculados con las sociedades agrupadas en la FISEM. (*Clave 10: Otras Organizaciones, Revistas y Grupos de Educación Matemática en América Latina*).

NOTAS

Nota 1. La Guerra Fría fue un enfrentamiento político, económico, social, militar, informativo, científico y deportivo iniciado al finalizar la Segunda Guerra Mundial entre el llamado bloque Occidental (occidental-capitalista) liderado por Estados Unidos, y el bloque del Este (oriental-comunista) liderado por la Unión Soviética. Su origen se suele situar en 1945, durante las tensiones de la posguerra, y se prolongó hasta la disolución de la Unión Soviética (inicio de la Perestroika en 1985, caída del muro de Berlín en 1989 y golpe de Estado en la URSS de 1991). Ninguno de los dos bloques tomó nunca acciones directas contra el otro, razón por la que se denominó al conflicto «guerra fría». https://es.wikipedia.org/wiki/Guerra_Fría

Nota 2. Para la historia de la Commission Internationales pur l´etude et l´amelioration de l´enseignament de Mathématique, ver http://www.cieaem.org/?q=fr/node/27

Nota 3. Para una historia de la ICMI ver: http://www.mathunion.org/icmi/icmi/overview-of-icmi/

Referencias

ALAPERRINE-BOUYER, Monique (2007).*La Educación de las Elites Indígenas en el Perú Colonial*. Lima, Institut français d’études andines,IFEA-Instituto Riva Agüero.

ALBERS,Donald J., ALEXANDERSON, G. L., REID, Constance. (1987) International Mathematical Congresses: An Illustrated History 1893-1986. Springer-Verlag New York Inc. Disponible en: https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/History/history.ocr.pdf. Consulta: 09/02/2018; 07:12

ARIS, Yolanda. (2001). *La Escuela Normal Miguel José Sanz de Barquisimeto (Venezuela) 1946-1980*. Ponencia presentada en el V Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Latinoamericana; organizado por el Ministerio de Educación Publica de

Costa Rica, San José de Costa Rica, 21 al 24 de mayo de 2001. Disponible en: http://studylib.es/doc/629032/escuelas-normales-en-venezuela. Consulta: 14-04-2017; 07:05.

ARRATIA, Argimiro. (2002). Elogio a la locura de Cajigal de mi tío Caupolicán. *El Nacional, Papel Literario*, p. 4, Sabado, 2 de marzo de 2002. Disponible en: http://www.lsi.upc.edu/~argimiro/mypapers/newspapers/cajigal.html. Consulta: 08/02/2018. 05:13

BÁEZ OSORIO, Miryam. (2004). Escuela Normales de Varones del Siglo XIX en Colombia. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana, Rhela (6)*, 179-208.

BARRANTES, Hugo; RUIZ ZÚÑIGA, Ángel. (1988). *La Historia del Comité Interamericano de Educación Matemática.* Santafé de Bogotá, D.C., Colombia: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales; Colección Enrique Pérez Arbeláez Nº 13. Disponible en: http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/La Historia del Comite Interamericano de Educacion Matematica.pdf Consulta: 09/02/2018: 16:47

BEYER K, Walter O. (2006). Algunos libros de Aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1912. *Revista de Pedagogía. 27*(78): 71-110

BEYER K, Walter O. (2009). Catecismos y matemáticas: confluencia de corrientes de pensamiento. *Paradígma, 30*(1), 117-150. Recuperado en 14 de abril de 2017, de http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512009000100007&lng=es&tlng=es.

BEYER K, Walter O. (2010). *Estudio evolutivo de la enseñanza de las matemáticas elementales en Venezuela a través de los textos escolares*: 1826-1969. Universidad Central de Venezuela. Tesis Doctoral No Publicada

CALVO, Gloria. (2004). *La Formación de Docentes en Colombia. Un estudio diagnóstico.* Bogotá, Colombia: Universidad PedagógicaNacional – IESALC/UNESCO. Disponible en: http://unesdoc.unesco.org/images/0013/001399/139926s.pdf. Consulta: 07/02/2018; 19:27.

CARABALLO, Darwin (2004) *La formación docente en el Uruguay*. UNESCO-IESALC.

CORVALAN R, Javier. DE ESCUELA EVANGELIZADORA COLONIAL A SISTEMA EDUCATIVO COMPETITIVO Y SEGMENTADO EN ISLA DE PASCUA. **Chungará (Arica)**, Arica , v. 46, n. 4, p. 681-692, dic. 2014 . Disponible en <https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0717-73562014000400010&lng=es&nrm=iso>. accedido en 08 feb. 2018. http://dx.doi.org/10.4067/S0717-73562014000400010.

D'AMBROSIO, Ubiratan. (1999). La transferencia del conocimiento matemático a las colonias factores sociales, políticos y culturales. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, ISSN 0210-8615, Vol. 22, Nº 44, 1999, págs. 347-380. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/28274157_La_transferencia_del_conocimie nto_matematico_a_las_colonias_factores_sociales_politicos_y_culturales Consulta: 09/02/2018; 05:15

D´AMBROSIO, U. (2014). 2. Mathematics Education in Latin America, in the Premodern Period. En: A. KARP and G. SCHUBRING (eds.) *Handbook on the History of Mathematics Education*. New York: Springer Science + Business Media, 186-196.

FRANCESCHI, Napoleón. (2012). *Vida y Obra del Ilustre Caraqueño Don Feliciano Montenegro Colón*. Edición digital revisada por el autor. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/262736514_Napoleon_Franceschi_Feliciano_Montenegro_y_Colon. Consulta: 07/02/2018. 20:22

FREITES, Yajaira. (2000). Un Esbozo Histórico de las Matemáticas en Venezuela. I Parte: Desde la Colonia Hasta Finales del Siglo XIX. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, VII*(1 y 2) 9-37. Disponible en: https://www.emis.de/journals/BAMV/vol07.html Consulta: 09/02/2018; 05:45

HODGSON B.R., NISS M. (2018) ICMI 1966–2016: A Double Insiders' View of the Latest Half Century of the International Commission on Mathematical Instruction. In: Kaiser G., Forgasz H., Graven M., Kuzniak A., Simmt E., Xu B. (eds) *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. Disponible en: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-72170-5_14.pdf. Consulta: 10/02/2018; 06:00

KARP, Alexander & SCHUBRING, Gert (Eds), Handbook on the History of Mathematics Education, pp. 283–302. New York: Springer. Disponible en: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/36970268/Karp_A_2014__Schubring_Handbook_on_the_History_of_Mathematics_Education_S-libre.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1518191710&Signature=7Hg%2F0C7OCtY1lL1Ze2EA5tTfUYo%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DHandbook_on_the_History_of_Mathematics_E.pdf

KILPATRICK, J. (1992). A history of research in mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 3–38). New York: Macmillan.

LOZADA PEREIRA, Blithz. La historia de la formación docente en bolivia comparada con las tendencias educativas de latinoamérica y el caribe. *Estudios Bolivianos* [online]. 2009, n.15, pp. 103-173. ISSN 2078-0362. Disponible en: http://www.revistasbolivianas.org.bo/pdf/rieb/n15/a06.pdf Consulta: 07/02/2018

MARTINEZ BOOM, Alberto; CASTRO, Jorge y NOGUERA, Carlos. (1989). *Crónica del desarraigo: Historia del Maestro en Colombia*, Bogota, Magisterio.

MATTOS, Adriana Cesar, BATARCE, Marcelo Salles. (2010). As origens da educação matemática. En: José Manuel Matos & Manuel Saraiva, Editores. *Actas do I Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática*. Caparica, Portugal: UIED, Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento. pp 347-353.

MOSQUERA, Julio. Matemática Moderna y Neocolonialismo en Venezuela. En: MATOS, José Manuel; VALENTE, Wagner.(Ed.) (2010). *A Reforma da Matemática Moderna em Contextos ibero-americanos.* UIED, Unidade de Investigação, Educação e Desenvolvimento. Capítulo 5. 103-136. Disponible en: https://run.unl.pt/bitstream/10362/5321/1/Matos_2010.pdf Consulta 09/02/2018 10: 13

NARVÁEZ, Eleazar. (2006). Una mirada a la escuela nueva. *Educere, 10*(35), 629-636. http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-49102006000400008&lng=es&tlng=es ; Consulta:14/04/2017; 10:00

ORANTES, A. (2002, noviembre). *Cartas de un psicólogo a su maestra. Sexta Carta. La enseñanza mutua y las redes de pericias.* Documento en Línea. Disponible en: http://www.crquan.com/aorantes/trabajos/cartas/ca6-mutu.htm.

OSSENBACH SAUTER, Gabriela (1993, enero-abril). *Estado y Educación en América Latina a partir de su independencia (siglos XIX y XX)*. *Revista Iberoamericana de Educación Número 1* - Estado y Educación. Disponible en: http://rieoei.org/oeivirt/rie01a04.htm. Consulta: 13-04-2017; 22:47.

PEÑALVER, Luis. (2005). La Formación Docente en Venezula: un estudio diagnóstico. Caracas, Venezuela: IESALC/UNESCO. Disponible en: www.oei.es/historico/docentes/.../informe_formacion_docente_venezuela_iesalc.pdf Consulta: 07/02/2018; 19:48.

PIAGET, J. Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. En: PIAGET, J., E. W. BETH, J. DIEUDONNE, A. LICHNEROWICZ, G. CHOQUET et C. GATTEGNO.(1971). *La enseñanza de la Matemática* Aguilar. Colección Psicología y Educación. Madrid: Ed. Aguilar, pp. 3-28.

PIAGET, J., E. W. BETH, J. DIEUDONNE, A. LICHNEROWICZ, G. CHOQUET et C. GATTEGNO. (1955). *L'Enseignement des Mathematiques*. Delachaux & Niestle, Neuchatel. Hay versión en español; Piaget, J. y otros. (1971). *La enseñanza de la Matemática*. Aguilar. Colección Psicología y Educación. Ed. Aguilar. Madrid.

PIERROTI, Nelson. (1999). Los estudios de temas matemáticos anteriores a la creación de la Facultad de Matemáticas en Uruguay (1888). *Revista Galileo Nro. 19*. Montevideo. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Los estudios de temas matemáticos anteriores a la creación de la Facultad de Matemáticas en Uruguay (1888). Revista "GALILEO" Nº 19, Revista en Línea dedicada a temas metacientíficos, publicada por el Instituto de Filosofía FHCE. Montevideo, Uruguay. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Nelson_Pierrotti/publication/252627660_Los_estudios_de_tema_matematicos_anteriores_a_la_creacion_de_la_Facultad_de_Matematicas_en_Uruguay_1888/links/02e7e51f3f6ab34615000000/Los-estudios-de-tema-matematicos-anteriores-a-la-creacion-de-la-Facultad-de-Matematicas-en-Uruguay-1888

ROSARIO, H., SCOTT, P., & VOGELI, B. (2014). *Mathematics and its Teaching in the Southern Americas.* London-New Jersey-Singapore: World Scientific.

SALGADO PEÑA, Ramón Ulises. (2006): La formación docente en la región: de las normales a las universidades. En: IESALC. *Informe sobre la educación superior en América Latina y el Caribe 2000-2005. La Metamorfosis de la Educación Superior*. Caracas: Instituto Internacional de la UNESCO para la Educación Superior de América Latina y el Caribe, IESALC. pp 171-182.

SMITH, David Eugene. (1910). The International Commission on the Teaching of Mathematics. *The American mathematical Monthly, 17*(1); 1-8; Disponible en: https://www.jstor.org/stable/pdf/2970539.pdf; Consulta: 09/02/2018; 06:20

TÜNNERMANN BERNHEIM, Carlos. (2007). *América Latina: identidad y diversidad cultural. El aporte de las universidades al proceso integracionista*. Documento en Línea. Disponible en: https://polis.revues.org/4122. Consulta: 13.04-2017; 22:29.

UNESCO/IESALC. (2006). *INFORME SOBRE LA EDUCACIÓN SUPERIOR EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE. 2000-2005.La metamorfosis de la educación superior*. Caracas: UNESCO/IESALC. Disponible en: https://documentop.com/informe-sobre-la-educacion-superior-en-america-unesco-iesalc_59f930141723dd5a8e26a18e.html Consulta: 07/02/2018; 21:50

VALENTE, W. (2010). A Unesco e as duas primeiras Conferencias Interamericanas de Educaçao Matemática. *REMATEC, 9*(15), 22-39.

Fredy González. Profesor Visitante en la Universidad Federal de Rio Grande do Norte, Departamento de Prácticas Educativas y Currículo (UFRN/DPEC, Brasil) PhD con énfasis en Matemática Educativa (Universidad de Carabobo, Venezuela, 1997); Master en Matemática. Profesor de Matemática. Se he desempeñado durante más de dos décadas a la formación de profesores de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL Maracay, Venezuela), siendo coordinador fundador del Doctorado en Educación Matemática 2008-2013 y Subdirector de Investigación y Postgrado (1999-2003). Coordinador del componente de investigación del Centro de Estudios Educativos del Instituto Tecnológico de Santo Domingo (CEED-INTEC, 2015-2016). Desarrolla investigación en Historia de la Educación Matemática. Ha publicado más de medio centenas de artículos en revistas indexadas, siendo profesor invitado de numerosas universidades iberoamericanas. E mail. fredygonzalez@hotmail.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas XX-XX

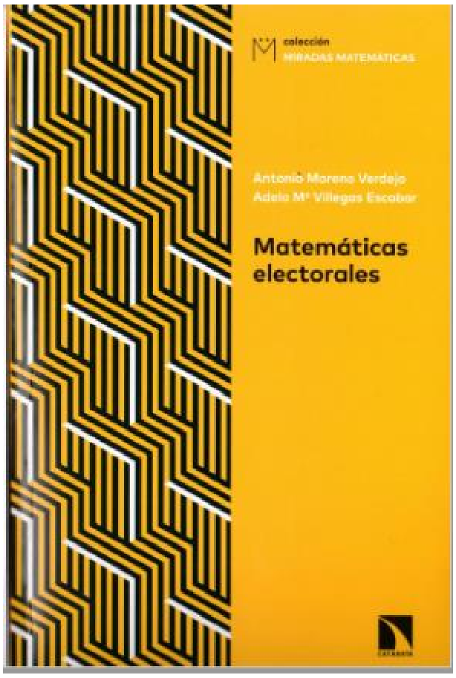
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

RESEÑA: Matemáticas electorales

Serapio García Cuesta

Un libro para profesores de secundaria y bachillerato con ejemplos sobre la mecánica electoral para la enseñanza de las matemáticas en el aula

La elección de los representantes políticos es una de las características de la democracia y requiere resolver un problema aparentemente sencillo: cómo reflejar la opinión de la población en un número determinado de escaño. Por ejemplo, en España, votan más de 35 millones de personas y su elección se tiene que reflejar en la composición de los 350 diputados del Congreso.



Diferentes modelos matemáticos han dado respuesta a esta cuestión definiendo diversos métodos de reparto. Aunque ninguno es perfecto, nos muestran la importancia de la matemática, que además se ha vuelto el lenguaje del análisis político al utilizarse la estadística casi a diario. ¿Por qué Hillary Clinton perdió contra Donald Trump teniendo más votos? ¿Podemos fiarnos de los sondeos a pie de urna? Es tal su relevancia que ya en la ESO y en bachillerato se explican sus fundamentos. En este libro, la estadística y la probabilidad muestran su valor para la ciudadanía. Y es que solo dominándolos se podrán interpretar de forma crítica los sondeos de opinión o los resultados de unas elecciones generales.

ICMAT
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Página 10

FIRMAS INVITADAS

Dario Fiorentini

Licenciado en Matemáticas con Maestría en Matemática Aplicada e Doctorado en Educación (Unicamp). Actualmente es docente-investigador del CNPq (1D) y miembro del Comité de Educación del CNPq. Actua en la formación de docentes e investigadores en cursos de Maestría y Doctorado en Educación (Unicamp, Campinas/Brasil) en la línea “Saberes docentes y formación y desarrollo profesional de maestros”, con énfasis en matemáticas. Dirigió 14 tesis de maestría y 25 de doctorado. Publicó 16 libros (con colegas), 48 capítulos de libros y 60 artículos en revistas nacionales y internacionales y más 100 trabajos completos en anales de congresos científicos. Actualmente es editor de la Revista Zetetiké e fue Coordinador de Programa de Maestria e Doctorado en Educación (Unicamp). Internacionalmente, mantiene intercambio de estudios con Argentina, Colombia y Portugal e asesoró proyectos/programas de investigación y formación docente en Argentina, Portugal y Guatemala.
E-mail: dariofiore@terra.com.br. dariof@g.unicamp.br
ORCID: orcid.org/0000-0001-5536-0781

Eliane Matesco Cristovão

Professora do Instituto de Matemática e Computação (IMC) da Universidade Federal de Itajubá (Unifei). Doutora em Educação, subárea Ensino e Práticas Culturais (2015), Mestre em Educação Matemática (2007), Especialista em Ciência, Arte e Prática Pedagógica (1997) e licenciada em Matemática (1995), todos pela Unicamp. Email: limatesco@unifei.edu.br

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 307-313

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

¿Cómo crear problemas de matemáticas? Experiencias didácticas con profesores en formación.

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Jorge fue a la bodega a comprar una o más bolsas de 1 kg de arroz, una o más bolsas de 1 kg azúcar y una o más cajas de 1 litro de leche. Si los precios de cada unidad de estos productos envasados son 3 soles, 2 soles y 2,50 soles respectivamente, ¿qué cantidades de estos productos envasados debería comprar para que el total a pagar sea exactamente 20 soles?

Ciertamente, no hay recetas para crear ni para resolver problemas de matemáticas. La base fundamental es la creatividad y los conocimientos matemáticos; sin embargo, ante la reconocida importancia de la creación de problemas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos, se hace necesario desarrollar pistas y estrategias para crear problemas, sobre todo para los profesores en formación y en ejercicio. Considero que parte fundamental de esas pistas es que quien crea un problema tenga en cuenta los cuatro elementos esenciales de todo problema: *información* (datos cuantitativos, figurales o relacionales)*; requerimiento* (lo que se pide que se encuentre, examine o concluya); *contexto* (intra matemático o extra matemático); *y entorno matemático* (marco matemático global) (Malaspina, *2017)*. Con este enfoque y como parte de un taller desarrollado con profesores en formación, el problema con el que iniciamos este artículo fue creado por un grupo de tres alumnas del primer ciclo de estudios de profesorado en educación inicial, en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

El taller se desarrolló mediante trabajos grupales en una experiencia didáctica con tres bloques de actividades, a partir de un problema propuesto en el marco de un episodio en una clase con alumnos de segundo grado de primaria, usando instrumentos especialmente diseñados.

A continuación, se describen los tres bloques de actividades del taller:

Actividades I.

a) Presentación del episodio en el cual se narra que la profesora Zoila propuso a sus alumnos de segundo grado de primaria el siguiente problema:

> *En la pizarra están escritos los números 43; 96; 14; y 87. Encuentren el número que sea la mayor suma que se puede obtener sumando dos de estos números.*

b) Comprensión y resolución del problema.
c) Creación y resolución de un problema que los alumnos del taller habrían propuesto a sus alumnos, con las ideas que sugiere el problema propuesto por la profesora Zoila.

Actividades II.

a) Reconocimiento de la información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático del problema propuesto por la profesora Zoila.
b) Reconocimiento de la información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático del problema creado en el bloque de Actividades I.

Actividades III.

a) Creación y resolución de un nuevo problema, modificando uno o más de los elementos del problema propuesto por Zoila.
b) Reconocimiento de la información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático del problema creado en la parte (a).

Notar que las Actividades III se desarrollan ya en conocimiento de los cuatro elementos fundamentales de un problema y el reconocimiento de estos, tanto en el problema de la profesora Zoila, como en el problema creado en la parte (c) de las Actividades I,

En general, y también por apreciación propia de los estudiantes participantes en el taller, los problemas que crearon en el tercer bloque de actividades fueron más interesantes o retadores que los problemas que crearon en el primer bloque de actividades, sin el conocimiento e identificación de los elementos de todo problema.

A continuación, se muestra el caso del Grupo 9, conformado por tres alumnas del primer ciclo universitario del profesorado de educación inicial:

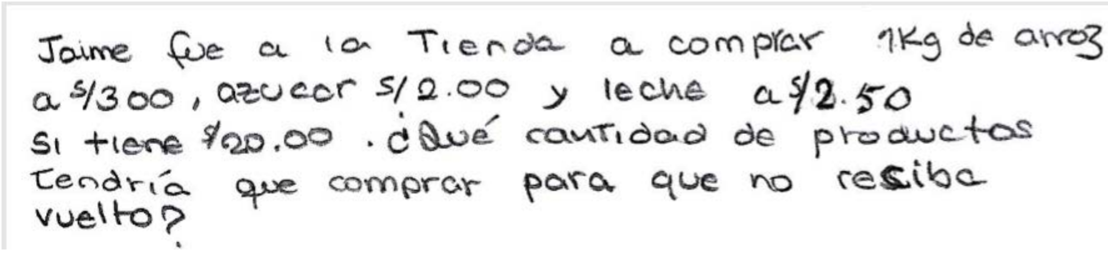
- Problema creado en el bloque de Actividades I, pensado para el primer grado de primaria:

> El siguiente ejercicio consiste en escoger cuatro números menores de 20 y para finalizar sumarlos.

Las alumnas identificaron en este problema:

Información:	Los números naturales menores que 20.
Requerimiento:	Escoger cuatro números menores que 20 y sumarlos.
Contexto:	Intra matemático
Entorno matemático:	Números naturales, adición.

- Problema creado en el bloque de Actividades III, pensado para el sexto grado de primaria[1]:


Jaime fue a la Tienda a comprar 1Kg de arroz a S/3 00, azucar S/2.00 y leche a S/2.50 Si tiene S/20.00. ¿Qué cantidad de productos Tendría que comprar para que no reciba vuelto?

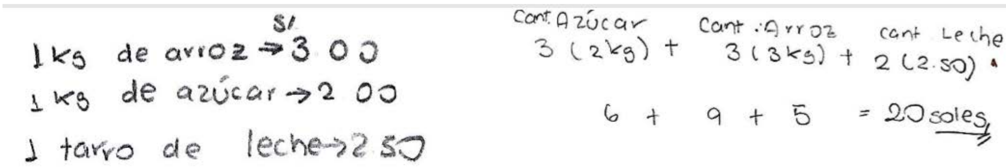
Las alumnas identificaron en este problema:

Información:	Cantidades, precios.
Requerimiento:	Encontrar una cantidad exacta (que se tenga que pagar exactamente 20 soles)
Contexto:	Extra matemático
Entorno matemático:	Operaciones combinadas de multiplicación de cantidades por precios (incluyendo expresiones decimales) y sumas de estas.

Comentarios

1. Este problema tiene muchas potencialidades matemáticas y didácticas:

- No tiene solución única.
  Así, la solución mostrada por las autoras es


1 kg de arroz → S/ 3 00
1 kg de azúcar → 2 00
1 tarro de leche → 2 50
Cant. Azúcar 3 (2kg) + Cant. Arroz 3 (3kg) + cant. Leche 2 (2.50)
6 + 9 + 5 = 20 soles

O sea:

3 kg de azúcar:	6 soles
3 kg de arroz:	9 soles
2 litros de leche:	5 soles

Esta compra, efectivamente, hace un total de 20 soles, pero hay otras soluciones; por ejemplo:

[1] Se presenta la versión original del problema. Ha sido ligeramente modificado en su redacción para su presentación al inicio de este artículo, manteniendo lo esencial y buscando solo mayor claridad y precisión.

1 kg de azúcar:	2 soles
1 kg de arroz:	3 soles
6 litros de leche:	15 soles

El lector queda invitado a encontrar otras soluciones.

Es interesante y muy instructivo proponer problemas como este, que no tengan una respuesta única. Más aún, que el problema haya sido creado por alumnas que están empezando su formación de profesoras de educación inicial. Esto provino de cambiar el contexto intra matemático del problema que crearon en el bloque de Actividades I, con el consiguiente cambio de información; hacer más exigente el requerimiento de la suma (ahora no se trata solo de sumar números, sino de escoger los sumandos adecuadamente para que la suma total sea 20); y ampliar el entorno matemático, considerando operaciones combinadas de multiplicación con adición, y expresiones decimales.

- Una manera formal de resolver este problema, es usar las variables x, y y z para representar las cantidades (enteras positivas) de kilos de azúcar y arroz, y de litros de leche, respectivamente. Así,

$2x$ representa lo que hay que pagar por x kilos de azúcar, a 2 soles cada kilo;

$3y$ representa lo que hay que pagar por y kilos de arroz, a 3 soles cada kilo

$2{,}5z$ representa lo que hay que pagar por z litros de leche, a 2,5 soles cada litro.

$2x + 3y + 2{,}5z$ representa el pago total por x kilos de azúcar, y kilos de arroz y z litros de leche, a los precios indicados.

La ecuación

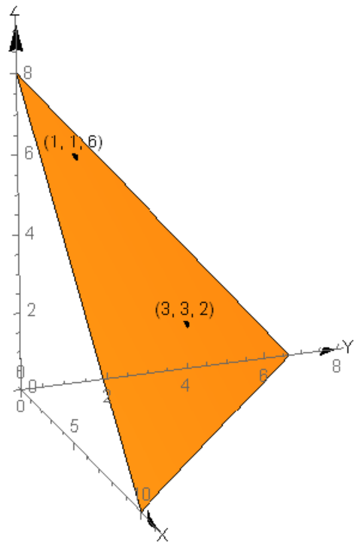
$$2x + 3y + 2{,}5z = 20, \qquad x, y, z \in Z^+$$

expresa que 20 es el pago total por la compra de cantidades enteras de bolsas de 1 kg azúcar, bolsas de 1 kg de arroz y cajas de 1 litro de leche.

El problema es ahora encontrar los posibles valores enteros positivos de las variables. Estamos, así, en el campo de las ecuaciones diofánticas y, una vez más, se tiene un caso de avance en conocimientos matemáticos mediante la creación de problemas. Ciertamente, es un campo que no corresponde a la educación primaria, pero una vez planteada la ecuación, se puede ir encontrando soluciones por ensayo y error, que es un recurso interesante, sobre todo cuando se hace mediante un "tanteo inteligente". En este caso, un buen punto de partida es observar que al tener que obtener como resultado el número entero 20, la variable z solo puede tomar los valores 2, 4 o 6 para que las variables x e y puedan tomar valores enteros positivos adecuados.

- El problema se puede enfocar también en el entorno matemático de la geometría analítica tridimensional, considerando la ecuación con las variables en R_0^+ (los números reales no negativos) y tener así una región triangular plana, apoyada en los ejes coordenados de un sistema cartesiano tridimensional. Un requerimiento similar al del problema, en este contexto intra matemático, sería determinar los puntos de coordenadas enteras ubicados en esa región triangular.

  A continuación, se muestra la gráfica, usando el software *Mathematica*. Sobre la región triangular están marcados los puntos (3; 3; 2) y (1; 1; 6), que son los que corresponden a las soluciones mostradas en el comentario 1, en el contexto extra matemático. (Notar que se han usado escalas diferentes en los ejes coordenados para hacer más clara la presentación.)



2. Conocer los elementos de los problemas, identificarlos en problemas concretos y comparar los elementos de unos con los de otros, contribuye a estimular la creatividad para la invención de nuevos problemas mediante la modificación de uno o más de estos elementos. Esto se evidencia en la diferencia en la calidad de los problemas creados en el bloque de Actividades I (sin tomar conciencia de los cuatro elementos de los problemas ni hacer un ejercicio de reconocerlos en problemas concretos) y la calidad de los problemas creados en el bloque de Actividades III (luego de haber desarrollado las Actividades II, en las que se toma conciencia de estos elementos y se les identifica, tanto en el problema del episodio como en el problema creado).

3. Otras ayudas para crear problemas haciendo variaciones a un problema dado, es formularse preguntas, como la ya conocida *¿Qué pasaría si…?* O *¿Qué pasaría si no…?*, destacada por Brown y Walter desde 1983. Así, con el enfoque de identificación de los cuatro elementos básicos de un problema, quien se proponga crear un problema a partir de otro dado, puede apoyarse, específicamente, en preguntas como las siguientes:

¿Qué pasaría si cambio la información? (La reduzco, la amplío o la modifico)

¿Qué pasaría si cambio el requerimiento? (Considero otras operaciones, otras relaciones en la información, gráficos, casos particulares, generalizaciones, demostraciones, etc. Esto está muy relacionado con el contexto y el entorno matemático que se considere para el nuevo problema.

¿Qué pasaría si cambio el contexto? (Paso de intra matemático a extra matemático; o modifico el contexto extra matemático; o paso de extra matemático a intra matemático y como requerimiento considero una generalización o una demostración.)

¿Qué pasaría si cambio el entorno matemático? (Considero un conjunto de números más amplio que el del problema original, considero el uso de otras propiedades o conceptos matemáticos, etc.)

4. Un campo interesante para desarrollar experiencias didácticas, es concretar más pistas para crear problemas, a partir de situaciones dadas o configuradas (problemas por *elaboración*). El camino natural, practicado en algunos talleres que hemos desarrollado, es preguntarse inicialmente sobre la información que se puede seleccionar de la situación (o añadir o modificar la que se percibe) y luego sobre los requerimientos que se pueden hacer con tal información. Teniendo esto como punto de partida, se puede ir construyendo y afinando el problema, precisando el contexto y el entorno matemático.

5. Otra pista para iniciar a los docentes en formación en la creación de problemas, a partir de una situación dada, es acompañar la descripción de la situación con algunas palabras que se les sugiere usar en el problema a crear. A continuación, ilustramos esta pista con un ejemplo muy sencillo, desarrollado en el marco de una clase a futuros profesores de primeros grados de educación básica, al pedirles crear un problema para usarlo con niños de segundo grado de primaria:

Situación: En la pizarra están escritos los números 18 y 7.

Actividad: Crear un problema a partir de esta situación.

Evidentemente, hay problemas muy sencillos, que más bien son ejercicios, como encontrar la suma o la diferencia de tales números.

Se obtuvo resultados interesantes al dar la siguiente lista de palabras que podrían utilizar al crear el problema: *Pedrito, Quique, canicas, más, menos, total*.

Así surgieron los siguientes problemas:

- En una actividad individual:

Pedrito tiene 18 canicas y Quique tiene 7 canicas más que Pedrito. ¿Cuántas canicas tienen en total?

- En una actividad grupal:

Pedrito y Quique jugarán a las canicas. Se sabe que Pedrito tiene 18 canicas, que en el juego Quique le ganó 7 canicas a Pedrito y que ahora ambos tienen la misma cantidad de canicas. ¿Cuántas canicas tenía Quique al comenzar el juego?

6. Las pistas dadas en este artículo son también válidas para la creación de problemas en niveles educativos más avanzados y tenemos experiencias en talleres desarrollados con profesores de secundaria y de universidad. La atención especial a problemas de nivel primario es por la importancia de formar profesores que ganen experiencias en la creación de problemas e integren estas actividades en sus clases desde la educación básica.

7. En los talleres de creación de problemas, sobre todo con profesores en formación o en servicio, todas estas pistas se complementan con las estrategias Episodio, Problema-pre, Problema-pos (EPP); y Situación, Problema-pre, Problema-pos (SPP), ya expuestas en foros internacionales y usadas en varias tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas. Más aún, en Malaspina (2017) y en Torres (2016) se muestran casos en los que estas estrategias han sido ampliadas, considerando una fase de reflexión didáctica, usando herramientas del enfoque ontosemiótico de la instrucción y el conocimiento matemático (EOS).

Referencias:

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*. Psychology Press.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.*), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*
Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf

Torres, C. (2016). *Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico.* Tesis de Maestría no publicada. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Pontificia Universidad Católica del Perú.
Disponible en http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/7226