UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Año XIII – Número 49 – Abril 2017
http://www.revistaunion.org

ÍNDICE

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Páginas 1

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene ahora una periodicidad quadrimestral, de modo que se publican três números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database***, está incluida en el catálogo ***Latindex*** y ***CAPES***

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril, 2017
Página 02-09

www.fisem.org/web/union
http://revistaunion.org

EDITORIAL

Estimados colegas y amigos,

Nosotras, las editoras de Unión hemos hecho todos esfuerzos posibles para mantener al día la publicación de la revista, cumpliendo con la periodicidad establecida y preocupadas por mantener la calidad de los artículos publicados. Para esto necesitamos, siempre de la colaboración de todos. Nuestra intención, más allá de contribuir al desarrollo del área de Educación Matemática, es permitir a Unión conseguir una calificación más alta en Qualis, indicador de calidad periódica da CAPES, una agencia brasileña de promoción de la investigación. Este esfuerzo ha sido recompensado en un momento como éste, cuando publicamos un nuevo número. En este número 49 los lectores encontrarán en la sección "Firma invitada" el artículo de **Cileda de Queiroze Silva Coutinho,** llamado **"Transnumeração: o uso do GeoGebra na transformação de representações dos dados".** Investigadora brasileña, Coutinho, profesora del Programa de Estudos Pós-Graduados en Educação Matemática da PUC/SP, obtuvo su doctorado en Francia y ha realizado investigaciones en el área de educación estadística y en educación financiera.

La transnumeración es uno de los tipos de pensamiento estadístico y, la construcción de procesos, que permiten su desarrollo, es el objetivo de este artículo. Coutinho nos dice que investigaciones en esta área, indica que la complejidad y variedad dependen de las herramientas disponibles para el sujeto. Propone una reflexión sobre la utilización de los aspectos dinámicos de GeoGebra para potenciar su desarrollo a partir de la superposición de representaciones. Estas acciones demandan poca complejidad cognitiva y de abstracción, por ello es posible su utilización en la Escuela Básica.

Además de esta sección, el número 49 contiene 11 artículos, 1 propuesta de aula y la habitual sección de problemas. A continuación, presentamos de forma sintética, estos artículos.

"Geometria Sintética: narrativa de um episódio com uma aluna-professora" es el título del primer articulo. Su autor es **José Carlos Pinto Leivas**. El artículo aborda um episódio en una clase de Geometría. Es una investigación cualitativa con características inductivas, explicativas y descriptivas. La pregunta es: ¿cómo el diálogo/mediación del profesor, en la realización de una situación problema, puede proporcionar la demostración sintética de una proposición matemática?

En **“Problemas de optimización vía álgebra”**, **José Albeiro Sánchez Cano,** presenta un método algebraico para la solución de problemas de optimización de funciones reales de una y dos variables reales con una condición o restricción, sin usar para ello la primera y segunda derivada. Dicho método proporcionará una forma sencilla de resolución, el cual podrá ser enseñado en cursos de educación secundaria.

“O que pensam professores a respeito de avaliação” es la tema abordado por los autores **André Luis Trevisan, Beatriz Haas Delamuta, Alessandra Maziero Lalin-Soato.** Estos autores buscan caracterizar conceptos presentados por los profesores de Matemáticas y Ciencias en relación con la evaluación del aprendizaje de los estudiantes. Los datos para el análisis provienen de la aplicación de un cuestionario contestado por cinco profesores participantes en un proyecto de educación continua.

“Una experiencia en la formación de profesores sobre concepciones desde una perspectiva etnomatemática”, desde la perspectiva de la formación docente, se desarrolla el artículo cuarto, escrito por **Veronica Albanese** y **Francisco Javier Perales**. Teniendo en cuenta que el Programa de Etnomatemática aborda las matemáticas desde una perspectiva epistemológica muy distinta de la tradición positivista. Los autores describen un taller desarrollado bajo esta perspectiva etnomatemática para profesores en formación.

Patricia Sastre Vázquez, Alejandra Cañibano y Rodolfo E. D`Andrea en el artículo **“Aplicación de la función exponencial sobre el cambio aritmético en la variable independiente”** presentan en forma general las propiedades más comunes de la función exponencial. Se presta mayor atención a una propiedad de esta función que, en general, no es introducida en los cursos elementales de matemática: “*Cambios aritméticos iguales en la variable x conducen a cambios proporcionales iguales en la variable y”.*

“**Estados de conocimiento en el desarrollo de la secuencia numérica de Catalina María Fernández Escalona”** es el sexto artigo de este número. La autora busca indicar que de las relaciones lógicas-ordinales que se dan entre los términos numéricos, se contempla una evolución desde estados con ausencias de las mismas, pasando por estados de descubrimiento de relaciones con instrumentos secuenciales sencillos, a un estado en el que la estructura operatoria de seriación se refleja en la secuencia numérica, propiciando su sistematización y, consecuentemente, el éxito operatorio.

El séptimo articulo es **“Función de primer grado. Construcción de significados desde una perspectiva variacional”.** Sus autores son: **Silvia Vrancken, Adriana Engler, Ana Leyendecker y Daniela Müller.** Consideran la importancia del estudio de las funciones en Ingeniería Agronómica y por qué decidió diseñar y implementar una situación de aprendizaje para dar significado a la función de primer grado como modelo de fenómenos de cambio.

“Estratégias utilizadas por um grupo de estudantes surdos ao estudar noções de função” es el artículo de **Eliane Ferreira Batista** y **Armando Traldi Jr.** Este artículo tiene como objetivo determinar las estrategias utilizadas por un grupo de estudiantes sordos mediante la resolución de las actividades relacionadas con las nociones de función

El siguiente articulo **“Qué motiva a las mujeres a estudiar matemáticas: un estudio de caso”**, tiene como autores a **Rosa Iris Monico Manzano y Mario Sánchez Aguilar.** Este texto se reporta a una investigación con el objetivo de identificar los factores que han motivado a estudiantes universitarias a elegir una licenciatura en Matemáticas. Los datos reportados fueron generados a través de 15 entrevistas semiestructuradas aplicadas a estudiantes de la licenciatura en Matemáticas de la (UAGro) en México.

Los dos últimos artículos del número 49 son **“Professores de Matemática no início da carreira docente: implicações à formação inicial”** de **Raquel Seriani, Cibele Aparecida Santos Rosa, Dilma Antunes Silva** y **“Dictados matemáticos: una herramienta para trabajar la competencia oral y escrita en el aula de matemáticas de Educación Infantil”** de **Ainhoa Berciano Alcaraz, María Luisa Novo Martín y Ángel Alsina i Pastell.**

El artículo de Seriani y otros tiene como objetivo examinar los retos, dificultades y sentimientos experimentados por los profesores de Matemáticas que comienzan sus carreras, que enseñan en los últimos años de la escuela primaria. Con enfoque cualitativo, la investigación analiza las "marcas" circunscritas em la carrera profesional de estos maestros. Por lo tanto, optaron por el uso de entrevistas semiestructuradas como una herramienta para la recolección de datos.

Y por último, Alcaraz y otros abogan que en la enseñanza de las matemáticas se han ido incorporando progresivamente herramientas docentes para fomentar um aprendizaje eficaz. En algunos casos, la repercusión del uso de estas herramientas ha sido claramente delimitada y estudiada, pero todavia quedan diferentes aspectos didácticos por analizar, como es el caso de los dictados.

En **“Mandala: otra forma de abordar conceptos geométricos”** los autores **Marisa Reid, Rosana Botta Gioda**y **Fabio Prieto** presentan una experiencia en el marco del proyecto "Enseñanza de la Geometría con utilización de distintos softwares” desarrollada en dos instituciones educativas de Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

“Funciones afines en contextos extra-matemáticos, con variables discretas”, es el problema del número 49 propuesto por nuestro colaborador habitual, el profesor **Uldarico Malaspina Jurado** de la Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM. Este problema surgió en un grupo formado por dos alumnos del primer ciclo de profesorado de secundaria en una clase de matemática. La Idea nació ante una situación propuesta a los alumnos con la invitación de proponer (crear) algún problema relacionado con tal situación.

Para terminar, quisiéramos agradecer la labor de los revisores y de otros colaboradores que han hecho posible este número.

¡Buena lectura!

EDITORAS

Celina Abar y Sonia Igliori

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene, a partir de 2017, una periodicidad cuatrimestral, de modo que se publican tres números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre.

EDITORIAL

Nós as editoras da Unión temos feito esforços para manter esta Revista em dia na publicação de seus números e nos preocupado com a manutenção da qualidade dos artigos publicados. Para isso precisamos, sempre, contar com a colaboração de todos. Nossa intenção, além daquela de contribuir com o desenvolvimento da área da Educação Matemática, é também possibilitar que Unión obtenha uma nota maior que a atual no Qualis, indicador de qualidade de periódicos da CAPES, um organismo brasileiro de fomento de pesquisa. Esse esforço tem sido recompensado em um momento como este, em que colocamos no ar mais um número. Estamos no 49. Nesse número os leitores encontram, na seção "Firma invitada", o artigo de **Cileda de Queiroz e Silva Coutinho,** denominado **"Transnumeração: o uso do GeoGebra na transformação de representações dos dados".** Coutinho é pesquisadora brasileira, professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Ela se doutorou na França e tem desenvolvido pesquisas na área de Educação Estatística e Educação Financeira.

A transnumeração é um dos tipos de pensamento estatístico e a construção de processos que permitem seu desenvolvimento. Nesse artigo Coutinho nos diz que pesquisas na área, tratando especificamente da sua construção, indicam que a complexidade e variedade dependem das ferramentas disponíveis ao sujeito. Ela propõe reflexão sobre a utilização dos aspectos dinâmicos do GeoGebra para potencializar seu desenvolvimento a partir da sobreposição de representações. Considera que essas ações demandam baixa complexidade cognitiva e de abstração, sendo, portanto, passíveis de utilização na Escola Básica.

Além dessa seção, o número 49 traz, 11 artigos, 1 proposta de aula e a seção de problemas. No que segue apresentamos, de forma sintética, esses trabalhos.

"Geometria Sintética: narrativa de um episódio com uma aluna-professora"é o título do primeiro artigo. É de autoria de **José Carlos Pinto Leivas**. Nele é abordado um episódio de uma aula de Geometria. Trata-se de pesquisa qualitativa com características indutiva, explicativa e descritiva. A questão foi verificar como o diálogo/intermediação do professor, na realização de uma situação-problema, pode proporcionar demonstração sintética de uma proposição matemática?

Em **"Problemas de optimización vía álgebra", José Albeiro Sánchez Cano,** apresenta um método algébrico para resolver problemas de otimização de funções reais de uma e duas variáveis reais com uma condição ou restrição é apresentada, sem usar as primeira e segunda derivadas. Este método fornece uma maneira simples de resolução, que será ministrado em cursos do ensino secundário

"O que pensam professores a respeito de avaliação" é a questão abordada por **André Luis Trevisan, Beatriz HaasDelamuta, Alessandra MazieroLalin-Soato.** Esses autores buscam caracterizar concepções apresentadas por professores de Matemática e Ciências a respeito da avaliação da aprendizagem dos alunos. Os dados para análise provém da aplicação de um questionário respondido por cinco professores participantes de um projeto de formação continuada.

"Una experiencia enlaformación de profesores sobre concepciones desde una perspectiva etnomatemática" é o artigo desenvolvido na perspectiva da formação de professores de autoria de **VeronicaAlbanese** e **Francisco Javier Perales.** Levando em conta que o Programa de Etnomatemática aborda a Matemática a partir de uma perspectiva epistemológica muito diferente da tradição positivista, eles se propõem a descrever uma oficina para professores em formação desenvolvida nessa perspectiva.

Patricia Sastre Vázquez, Alejandra Cañibano e **Rodolfo E. D`Andrea** no artigo **"Aplicación de lafunción exponencial sobre el cambio aritmético em la variable independiente"** apresentam as propriedades mais comuns da função exponencial, dando uma atenção maior à uma propriedade dessa função, que em geral não é introduzida nos cursos elementares de matemática: "*Mudanças aritméticas iguais na variável x conduzem a mudanças proporcionais iguais na variável y*".

"**Estados de conocimiento em el desarrollo de la secuencia numérica de Catalina María Fernández Escalona"** é o 6º artigo.Nele a autora busca indicar que das relações lógico-ordinais que se dá entre os termos numéricos se contempla uma evolução de estados com ausências das mesmas, passando por estados de descoberta de relações com instrumentos sequenciais simples, a um estado no qual a estrutura operatória da seriação se reflete na sequência numérica propiciando sua sistematização e, consequentemente o êxito operatório.

O 7º artigo intitula-se **“Función de primer grado. Construcción de significados desde una perspectiva variacional”.** Seus autores são: **Silvia Vrancken, Adriana Engler, Ana Leyendecker** e **Daniela Müller.** As reflexões apresentadas levam em conta a importância do estudo das funções em Engenharia Agronômica, e por isso decidiu-se desenhar e implementar uma situação de aprendizagem para dar significado à função de primeiro grau como um modelo de fenômenos de mudança.

“Estratégias utilizadas por um grupo de estudantes surdos ao estudar noções de função” é o artigo de **Eliane Ferreira Batista** e **Armando Traldi Jr.** Este artigo tem como objetivo verificar estratégias utilizadas por um grupo de estudantes surdos ao resolver atividades relacionadas às noções de função.

O artigo que segue intitula-se **“Qué motiva a las mujeres a estudiar matemáticas: um estúdio de caso”** e tem autoria de **Rosa Iris Monico Manzano** e **Mario Sánchez Aguilar.** Neste texto é apresentada uma investigação que teve por objetivo identificar os fatores que têm motivado estudantes universitárias a escolher uma licenciatura em Matemática. Os dados foram obtidos por meio de 15 entrevistas semiestruturadas feitas a estudantes da licenciatura em Matemática da Universidad Autónoma de Guerrero (México).

Os dois últimos artigos do número 49 são**: “Professores de Matemática no início da carreira docente: implicações à formação inicial”** de **Raquel Seriani, Cibele Aparecida Santos Rosa, Dilma Antunes Silva** e **“Dictados matemáticos: una herramienta para trabajar la competencia oral y escrita em el aula de Matemáticas de Educación Infantil” de Ainhoa Berciano Alcaraz, María Luisa Novo Martín** e **Àngel Alsina i Pastell.**

No artigo de Seriani e outros. a proposta é analizar os desafios, as dificuldades e sentimentos experimentados pelos professores de Matemática em início de carreira que lecionam nos anos finais do ensino fundamental.Com enfoque qualitativo, a pesquisa discute as “marcas” circunscritas nas trajetórias profissionais desses docentes. Para tanto, optou-se pela utilização de entrevistas semiestruturadas como instrumento para a coleta de dados**.**

E por último, Alcaraz e outros propugnam que no ensino de Matemática têm sido progressivamente incorporadas ferramentas educacionais para promover a aprendizagem eficaz. E que, em alguns casos, o impacto da utilização dessas ferramentas tem sido claramente definido e estudado, mas ainda existem diferentes aspectos didáticos para serem analisados, como é o caso de os ditados.

Em **“Mandala: otra forma de abordar conceptos geométricos”** os autores **Marisa Reid, Rosana BottaGioda** e **Fabio Prieto** apresentam uma experiência no âmbito do projeto "Ensino da Geometria com uso de distintos softwares" a qual foi desenvolvida em duas instituições de ensino em Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

O problema **“Funciones afines en contextos extra-matemáticos, convariables discretas”,** compõe a seção Problema do número 49 proposto pelo, sempre colaborador, Professor **Uldarico Malaspina Jurado** da Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM. Este problema surgiu em um grupo formado por dois alunos do primeiro ciclo de profesores secundários em uma aula de Matemática. A ideia surgiu em uma situação em que se propôs aos estudantes um convite para criar um problema relacionado com tal situação.

Finalmente, gostaríamos de agradecer o trabalho dos revisores e outros colaboradores que tornaram possível este número.

Boa leitura!

EDITORAS

Celina Abar e Sonia Igliori

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática é uma publicação da Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tem, a partir de 2017, uma periodicidade quadrimestral, de modo que se publicam tres números ao ano, nos meses de abril, agosto e dezembro.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril, 2017
Página 02-09

www.fisem.org/web/union
http://revistaunion.org

EDITORIAL

Estimados colegas y amigos,

Nosotras, las editoras de Unión hemos hecho todos esfuerzos posibles para mantener al día la publicación de la revista, cumpliendo con la periodicidad establecida y preocupadas por mantener la calidad de los artículos publicados. Para esto necesitamos, siempre de la colaboración de todos. Nuestra intención, más allá de contribuir al desarrollo del área de Educación Matemática, es permitir a Unión conseguir una calificación más alta en Qualis, indicador de calidad periódica da CAPES, una agencia brasileña de promoción de la investigación. Este esfuerzo ha sido recompensado en un momento como éste, cuando publicamos un nuevo número. En este número 49 los lectores encontrarán en la sección "Firma invitada" el artículo de **Cileda de Queiroze Silva Coutinho,** llamado **"Transnumeração: o uso do GeoGebra na transformação de representações dos dados".** Investigadora brasileña, Coutinho, profesora del Programa de Estudos Pós-Graduados en Educação Matemática da PUC/SP, obtuvo su doctorado en Francia y ha realizado investigaciones en el área de educación estadística y en educación financiera.

La transnumeración es uno de los tipos de pensamiento estadístico y, la construcción de procesos, que permiten su desarrollo, es el objetivo de este artículo. Coutinho nos dice que investigaciones en esta área, indica que la complejidad y variedad dependen de las herramientas disponibles para el sujeto. Propone una reflexión sobre la utilización de los aspectos dinámicos de GeoGebra para potenciar su desarrollo a partir de la superposición de representaciones. Estas acciones demandan poca complejidad cognitiva y de abstracción, por ello es posible su utilización en la Escuela Básica.

Además de esta sección, el número 49 contiene 11 artículos, 1 propuesta de aula y la habitual sección de problemas. A continuación, presentamos de forma sintética, estos artículos.

"Geometria Sintética: narrativa de um episódio com uma aluna-professora" es el título del primer articulo. Su autor es **José Carlos Pinto Leivas**. El artículo aborda um episódio en una clase de Geometría. Es una investigación cualitativa con características inductivas, explicativas y descriptivas. La pregunta es: ¿cómo el diálogo/mediación del profesor, en la realización de una situación problema, puede proporcionar la demostración sintética de una proposición matemática?

En **"Problemas de optimización vía álgebra"**, **José Albeiro Sánchez Cano,** presenta un método algebraico para la solución de problemas de optimización de funciones reales de una y dos variables reales con una condición o restricción, sin usar para ello la primera y segunda derivada. Dicho método proporcionará una forma sencilla de resolución, el cual podrá ser enseñado en cursos de educación secundaria.

"O que pensam professores a respeito de avaliação" es la tema abordado por los autores **André Luis Trevisan, Beatriz Haas Delamuta, Alessandra Maziero Lalin-Soato.** Estos autores buscan caracterizar conceptos presentados por los profesores de Matemáticas y Ciencias en relación con la evaluación del aprendizaje de los estudiantes. Los datos para el análisis provienen de la aplicación de un cuestionario contestado por cinco profesores participantes en un proyecto de educación continua.

"Una experiencia en la formación de profesores sobre concepciones desde una perspectiva etnomatemática", desde la perspectiva de la formación docente, se desarrolla el artículo cuarto, escrito por **Veronica Albanese** y **Francisco Javier Perales**. Teniendo en cuenta que el Programa de Etnomatemática aborda las matemáticas desde una perspectiva epistemológica muy distinta de la tradición positivista. Los autores describen un taller desarrollado bajo esta perspectiva etnomatemática para profesores en formación.

Patricia Sastre Vázquez, Alejandra Cañibano y Rodolfo E. D`Andrea en el artículo **"Aplicación de la función exponencial sobre el cambio aritmético en la variable independiente"** presentan en forma general las propiedades más comunes de la función exponencial. Se presta mayor atención a una propiedad de esta función que, en general, no es introducida en los cursos elementales de matemática: "*Cambios aritméticos iguales en la variable x conducen a cambios proporcionales iguales en la variable y".*

"**Estados de conocimiento en el desarrollo de la secuencia numérica de Catalina María Fernández Escalona"** es el sexto artigo de este número. La autora busca indicar que de las relaciones lógicas-ordinales que se dan entre los términos numéricos, se contempla una evolución desde estados con ausencias de las mismas, pasando por estados de descubrimiento de relaciones con instrumentos secuenciales sencillos, a un estado en el que la estructura operatoria de seriación se refleja en la secuencia numérica, propiciando su sistematización y, consecuentemente, el éxito operatorio.

El séptimo articulo es **“Función de primer grado. Construcción de significados desde una perspectiva variacional”.** Sus autores son: **Silvia Vrancken, Adriana Engler, Ana Leyendecker y Daniela Müller.** Consideran la importancia del estudio de las funciones en Ingeniería Agronómica y por qué decidió diseñar y implementar una situación de aprendizaje para dar significado a la función de primer grado como modelo de fenómenos de cambio.

“Estratégias utilizadas por um grupo de estudantes surdos ao estudar noções de função” es el artículo de **Eliane Ferreira Batista** y **Armando Traldi Jr.** Este artículo tiene como objetivo determinar las estrategias utilizadas por un grupo de estudiantes sordos mediante la resolución de las actividades relacionadas con las nociones de función

El siguiente articulo **“Qué motiva a las mujeres a estudiar matemáticas: un estudio de caso”**, tiene como autores a **Rosa Iris Monico Manzano y Mario Sánchez Aguilar.** Este texto se reporta a una investigación con el objetivo de identificar los factores que han motivado a estudiantes universitarias a elegir una licenciatura en Matemáticas. Los datos reportados fueron generados a través de 15 entrevistas semiestructuradas aplicadas a estudiantes de la licenciatura en Matemáticas de la (UAGro) en México.

Los dos últimos artículos del número 49 son **“Professores de Matemática no início da carreira docente: implicações à formação inicial”** de **Raquel Seriani, Cibele Aparecida Santos Rosa, Dilma Antunes Silva** y **“Dictados matemáticos: una herramienta para trabajar la competencia oral y escrita en el aula de matemáticas de Educación Infantil”** de **Ainhoa Berciano Alcaraz, María Luisa Novo Martín y Ángel Alsina i Pastell.**

El artículo de Seriani y otros tiene como objetivo examinar los retos, dificultades y sentimientos experimentados por los profesores de Matemáticas que comienzan sus carreras, que enseñan en los últimos años de la escuela primaria. Con enfoque cualitativo, la investigación analiza las "marcas" circunscritas em la carrera profesional de estos maestros. Por lo tanto, optaron por el uso de entrevistas semiestructuradas como una herramienta para la recolección de datos.

Y por último, Alcaraz y otros abogan que en la enseñanza de las matemáticas se han ido incorporando progresivamente herramientas docentes para fomentar um aprendizaje eficaz. En algunos casos, la repercusión del uso de estas herramientas ha sido claramente delimitada y estudiada, pero todavia quedan diferentes aspectos didácticos por analizar, como es el caso de los dictados.

En **"Mandala: otra forma de abordar conceptos geométricos"** los autores **Marisa Reid, Rosana Botta Gioda**y **Fabio Prieto** presentan una experiencia en el marco del proyecto "Enseñanza de la Geometría con utilización de distintos softwares" desarrollada en dos instituciones educativas de Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

"Funciones afines en contextos extra-matemáticos, con variables discretas", es el problema del número 49 propuesto por nuestro colaborador habitual, el profesor **Uldarico Malaspina Jurado** de la Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM. Este problema surgió en un grupo formado por dos alumnos del primer ciclo de profesorado de secundaria en una clase de matemática. La Idea nació ante una situación propuesta a los alumnos con la invitación de proponer (crear) algún problema relacionado con tal situación.

Para terminar, quisiéramos agradecer la labor de los revisores y de otros colaboradores que han hecho posible este número.

¡Buena lectura!

EDITORAS

Celina Abar y Sonia Igliori

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene, a partir de 2017, una periodicidad cuatrimestral, de modo que se publican tres números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre.

EDITORIAL

Nós as editoras da Unión temos feito esforços para manter esta Revista em dia na publicação de seus números e nos preocupado com a manutenção da qualidade dos artigos publicados. Para isso precisamos, sempre, contar com a colaboração de todos. Nossa intenção, além daquela de contribuir com o desenvolvimento da área da Educação Matemática, é também possibilitar que Unión obtenha uma nota maior que a atual no Qualis, indicador de qualidade de periódicos da CAPES, um organismo brasileiro de fomento de pesquisa. Esse esforço tem sido recompensado em um momento como este, em que colocamos no ar mais um número. Estamos no 49. Nesse número os leitores encontram, na seção “Firma invitada”, o artigo de **Cileda de Queiroz e Silva Coutinho,** denominado **“Transnumeração: o uso do GeoGebra na transformação de representações dos dados”.** Coutinho é pesquisadora brasileira, professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Ela se doutorou na França e tem desenvolvido pesquisas na área de Educação Estatística e Educação Financeira.

A transnumeração é um dos tipos de pensamento estatístico e a construção de processos que permitem seu desenvolvimento. Nesse artigo Coutinho nos diz que pesquisas na área, tratando especificamente da sua construção, indicam que a complexidade e variedade dependem das ferramentas disponíveis ao sujeito. Ela propõe reflexão sobre a utilização dos aspectos dinâmicos do GeoGebra para potencializar seu desenvolvimento a partir da sobreposição de representações. Considera que essas ações demandam baixa complexidade cognitiva e de abstração, sendo, portanto, passíveis de utilização na Escola Básica.

Além dessa seção, o número 49 traz, 11 artigos, 1 proposta de aula e a seção de problemas. No que segue apresentamos, de forma sintética, esses trabalhos.

“Geometria Sintética: narrativa de um episódio com uma aluna-professora”é o título do primeiro artigo. É de autoria de **José Carlos Pinto Leivas**. Nele é abordado um episódio de uma aula de Geometria. Trata-se de pesquisa qualitativa com características indutiva, explicativa e descritiva. A questão foi verificar como o diálogo/intermediação do professor, na realização de uma situação-problema, pode proporcionar demonstração sintética de uma proposição matemática?

Em **“Problemas de optimización vía álgebra”, José Albeiro Sánchez Cano,** apresenta um método algébrico para resolver problemas de otimização de funções reais de uma e duas variáveis reais com uma condição ou restrição é apresentada, sem usar as primeira e segunda derivadas. Este método fornece uma maneira simples de resolução, que será ministrado em cursos do ensino secundário

“O que pensam professores a respeito de avaliação” é a questão abordada por **André Luis Trevisan, Beatriz HaasDelamuta, Alessandra MazieroLalin-Soato.** Esses autores buscam caracterizar concepções apresentadas por professores de Matemática e Ciências a respeito da avaliação da aprendizagem dos alunos. Os dados para análise provém da aplicação de um questionário respondido por cinco professores participantes de um projeto de formação continuada.

“Una experiencia enlaformación de profesores sobre concepciones desde una perspectiva etnomatemática” é o artigo desenvolvido na perspectiva da formação de professores de autoria de **VeronicaAlbanese** e **Francisco Javier Perales.** Levando em conta que o Programa de Etnomatemática aborda a Matemática a partir de uma perspectiva epistemológica muito diferente da tradição positivista, eles se propõem a descrever uma oficina para professores em formação desenvolvida nessa perspectiva.

Patricia Sastre Vázquez, Alejandra Cañibano e **Rodolfo E. D`Andrea** no artigo **“Aplicación de lafunción exponencial sobre el cambio aritmético em la variable independiente”** apresentam as propriedades mais comuns da função exponencial, dando uma atenção maior à uma propriedade dessa função, que em geral não é introduzida nos cursos elementares de matemática: “*Mudanças aritméticas iguais na variável x conduzem a mudanças proporcionais iguais na variável y*”.

“**Estados de conocimiento em el desarrollo de la secuencia numérica de Catalina María Fernández Escalona”** é o 6º artigo.Nele a autora busca indicar que das relações lógico-ordinais que se dá entre os termos numéricos se contempla uma evolução de estados com ausências das mesmas, passando por estados de descoberta de relações com instrumentos sequenciais simples, a um estado no qual a estrutura operatória da seriação se reflete na sequência numérica propiciando sua sistematização e, consequentemente o êxito operatório.

O 7º artigo intitula-se **"Función de primer grado. Construcción de significados desde una perspectiva variacional".** Seus autores são: **Silvia Vrancken, Adriana Engler, Ana Leyendecker** e **Daniela Müller.** As reflexões apresentadas levam em conta a importância do estudo das funções em Engenharia Agronômica, e por isso decidiu-se desenhar e implementar uma situação de aprendizagem para dar significado à função de primeiro grau como um modelo de fenômenos de mudança.

"Estratégias utilizadas por um grupo de estudantes surdos ao estudar noções de função" é o artigo de **Eliane Ferreira Batista** e **Armando Traldi Jr.** Este artigo tem como objetivo verificar estratégias utilizadas por um grupo de estudantes surdos ao resolver atividades relacionadas às noções de função.

O artigo que segue intitula-se **"Qué motiva a las mujeres a estudiar matemáticas: um estúdio de caso"** e tem autoria de **Rosa Iris Monico Manzano** e **Mario Sánchez Aguilar.** Neste texto é apresentada uma investigação que teve por objetivo identificar os fatores que têm motivado estudantes universitárias a escolher uma licenciatura em Matemática. Os dados foram obtidos por meio de 15 entrevistas semiestruturadas feitas a estudantes da licenciatura em Matemática da Universidad Autónoma de Guerrero (México).

Os dois últimos artigos do número 49 são**: "Professores de Matemática no início da carreira docente: implicações à formação inicial"** de **Raquel Seriani, Cibele Aparecida Santos Rosa, Dilma Antunes Silva** e **"Dictados matemáticos: una herramienta para trabajar la competencia oral y escrita em el aula de Matemáticas de Educación Infantil" de Ainhoa Berciano Alcaraz, María Luisa Novo Martín** e **Àngel Alsina i Pastell.**

No artigo de Seriani e outros. a proposta é analizar os desafios, as dificuldades e sentimentos experimentados pelos professores de Matemática em início de carreira que lecionam nos anos finais do ensino fundamental.Com enfoque qualitativo, a pesquisa discute as "marcas" circunscritas nas trajetórias profissionais desses docentes. Para tanto, optou-se pela utilização de entrevistas semiestruturadas como instrumento para a coleta de dados**.**

E por último, Alcaraz e outros propugnam que no ensino de Matemática têm sido progressivamente incorporadas ferramentas educacionais para promover a aprendizagem eficaz. E que, em alguns casos, o impacto da utilização dessas ferramentas tem sido claramente definido e estudado, mas ainda existem diferentes aspectos didáticos para serem analisados, como é o caso de os ditados.

Em **“Mandala: otra forma de abordar conceptos geométricos”** os autores **Marisa Reid, Rosana BottaGioda** e **Fabio Prieto** apresentam uma experiência no âmbito do projeto "Ensino da Geometria com uso de distintos softwares" a qual foi desenvolvida em duas instituições de ensino em Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

O problema **“Funciones afines en contextos extra-matemáticos, convariables discretas”,** compõe a seção Problema do número 49 proposto pelo, sempre colaborador, Professor **Uldarico Malaspina Jurado** da Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM. Este problema surgiu em um grupo formado por dois alunos do primeiro ciclo de profesores secundários em uma aula de Matemática. A ideia surgiu em uma situação em que se propôs aos estudantes um convite para criar um problema relacionado com tal situação.

Finalmente, gostaríamos de agradecer o trabalho dos revisores e outros colaboradores que tornaram possível este número.

Boa leitura!

EDITORAS

Celina Abar e Sonia Igliori

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática é uma publicação da Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tem, a partir de 2017, uma periodicidade quadrimestral, de modo que se publicam tres números ao ano, nos meses de abril, agosto e dezembro.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 10

FIRMA INVITADA

COUTINHO, CILEDA DE QUEIROZ E SILVA
Doutora em Didática da Matemática pela Université Joseph Fourier – Grenoble I, França. Desenvolve pesquisas no campo da Educação Estatística e Educação Financeira no grupo de pesquisas PEA-MAT, Programa de Estudos PósGraduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, na linha de Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores.
E-mail para contato: cileda@pucsp.br ou cileda.coutinho@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 11-25

Transnumeração: o uso do Geogebra na transformação de representações dos dados

Cileda de Queiroz e Silva Coutinho

Resumen	La transnumeración es uno de los tipos de pensamento estadístico y la construcción de processos, que permiten su desarrollo, es el objetivo de este artículo. Investigaciones en el área que tratan específicamente de su construcción indican que la complejidad y variedade dependen de las herramientas disponibles para el sujeto. Es así que este texto, propone una reflexión sobre la utilización de los aspectos dinámicos del Geogebra para potencializar su desarrollo a partir de la sobreposición de representaciones. Tales acciones demandan baja complejidad cognitiva y de abstracción, por ello es posible su utilización en la Escuela Básica. **Palabras clave**: Pensamiento Estadístico, Construcción de Gráficos Estadísticos, Geogebra, Educación Estadística
Abstract	Transnumeration is one of the statistical thinking types and the construction of processes that allow its development is the focus of this paper. Researches in the field, dealing specifically with its construction, indicates that complexity and variety depends on the tools available to the subject. Thus, this text proposes a reflection about the use of dynamics aspects of Geogebra to potentiate its development from the overlap of representations. Such actions require low cognitive and abstraction complexity, and are therefore usable in the Basic School. **Keywords**: Statistical Thinking, Construction of Statistical Graphs, Geogebra, Statistics Education
Resumo	A transnumeração é um dos tipos de pensamento estatístico e a construção de processos que permitam seu desenvolvimento é o foco deste artigo. Pesquisas na área, tratando especificamente da sua construção, indicam que a complexidade e variedade dependem das ferramentas disponíveis ao sujeito. Assim, este texto propõe uma reflexão sobre a utilização dos aspectos dinâmicos do Geogebra para potencializar seu desenvolvimento a partir da sobreposição de representações. Tais ações demandam baixa complexidade cognitiva e de abstração, sendo, portanto, passíveis de utilização na Escola Básica. **Palavras-chave:** Pensamento Estatístico, Construção de gráficos estatísticos, Geogebra, Educação Estatística

1. Introdução

A construção de práticas docentes constitui um tema de pesquisa sempre relevante no que se refere às práticas para a abordagem de conteúdos da probabilidade, da estatística e da combinatória. Destacamos, particularmente, a demanda no que se refere ao uso de materiais didáticos e tecnologias como ferramentas para potencializar o desenvolvimento do pensamento estatístico, que necessita de um enfoque que priorize a construção de conceitos e não apenas de procedimentos mecanizados.

Não basta, por exemplo, o simples cálculo da média de um conjunto de dados, mas se faz necessária a análise do resultado de tal cálculo em função do contexto no qual os dados foram coletados, considerando a variação dos mesmos. Da mesma forma, não é suficiente uma abordagem na forma de tarefas que demandem a construção de gráficos sem sua análise, ou que demandem busca de informações nesses gráficos pela simples leitura dos eixos. Reforçamos o afirmado por Coutinho e Souza (2013), quando destacam a relevância da discussão sobre o uso de programas computacionais e planilhas eletrônicas na construção de gráficos estatísticos contribuindo assim para a incorporação de seu uso nas práticas do docente que ensina conteúdos estatísticos.

Nessa perspectiva, o objetivo desse texto é discutir as possíveis contribuições do programa Geogebra no processo de transnumeração, nos termos de Wild e Pfannkuch (1999), identificado como um dos tipos fundamentais do pensamento estatístico, envolvendo mudanças de representação para aumentar as formas de compreensão dos dados.

2. Transnumeração

A partir da definição de transnumeração trazida por Wild e Pfannkuch (1999), Chick (2004, p.168) destaca seus três aspectos principais, referenciando esses autores: “a captura de medidas do mundo real, a reorganização e o cálculo com os dados e a comunicação dos dados por meio de alguma representação”. A discussão é aprofundada em Chick, Pfannkuch e Watson (2005), em artigo no qual discutem aspectos específicos da transnumeração destacando que:

> Nossa capacidade de realizar a transnumeração também é limitada pelas ferramentas estatísticas do nosso repertório: quanto mais ferramentas temos à nossa disposição, mais técnicas podemos aplicar na nossa busca pelas histórias dos dados. (ibid, p.93)

Para estas autoras, a história dos dados é entendida como uma reunião de informações acerca de um indivíduo ou coisa. Defendem que o foco do ensino e da aprendizagem da Estatística não deve ser a construção de gráficos, mas sim no representar, explorar e pensar com os dados. Destacamos aqui a importância da utilização de ferramentas tecnológicas pelo professor que ensina conteúdos de estatística para seus alunos, qualquer que seja o nível de escolaridade.

No que se refere às técnicas transnumerativas, cuja construção é favorecida pelo uso de softwares de estatística dinâmica[1], destacamos a pesquisa de Lee et al (2014, p.26), que discutem o uso do software Fathom e do ThinkerPlots. Para esses autores,

> Se um gráfico demonstra seu próprio conjunto de características e possui suas próprias e únicas convenções estruturais e regras para trabalhar com ele, operações particulares podem ser usadas para transformar sua estrutura sem afetar as relações estatísticas ou ideias que ele designa. Por exemplo, uma descrição gráfica de um dado conjunto de dados pode ser alterada pela inserção de um símbolo que represente uma medida de centro ou uma linha de ajuste sem mudar as relações estatísticas descritas originalmente; no entanto, a representação agora dá significado para relações estatísticas adicionais entre dados e medidas que podem ser melhor exploradas.

Os autores discutem ainda aspectos da utilização de ferramentas estatísticas tais como Fathom e ThinkerPlots, defendendo que:

> (...) se representações com múltiplos gráficos são criadas por programas de estatística dinâmica existe então uma necessidade de compreender melhor como os usuários tiram vantagens de outros recursos do programa para realizar conexões entre as representações, e para representar e analisar dados de outras formas. (ibidem, p.26)

Entre os principais resultados apontados, Lee et all (2014) destacam que a utilização de ambientes de estatística dinâmica aumenta a possibilidade de construção de diferentes estratégias para resolver o problema pela mobilização de diferentes representações, favorecendo assim o desenvolvimento do conhecimento estatístico, tanto específico quanto tecnológico. Assim, afirmam que seus resultados indicam que tal desenvolvimento favorece a construção do conhecimento estatístico pedagógico tecnológico e as práticas docentes relacionadas.

Fazemos a hipótese de que a utilização de programas de estatística dinâmica permite ao sujeito explorar os recursos computacionais, facilitando o processo de decisão sobre o que fazer com o conjunto de dados. Chick, Pfannkuch e Watson (2005) afirmam que esse tipo de decisão é crítico para que se possa produzir boas representações desse conjunto. Essas autoras destacam que, para muitos alunos, gráficos são muito mais ilustrações do que ferramentas de raciocínio para detectar padrões e fazer emergir a informação contida nos dados.

No que se refere à transposição dos saberes a serem abordados em sala de aula, saberes estes apresentados nos livros didáticos, observamos uma tendência da utilização da representação gráfica como ponto de partida para o ensino e a aprendizagem de conteúdos da estatística descritiva. Referimo-nos aqui aos livros destinados aos conteúdos da Matemática presentes na Escola Básica que são

[1] Entendemos aqui por software de estatística dinâmica aquele que permite a manipulação direta dos dados pelo sujeito, por meio de seleção instantânea e transformações no conjunto de pontos, visando explorar tal conjunto e identificar padrões.

aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para serem escolhidos e adotados nas escolas das redes públicas de ensino.

Nesse contexto, destaca-se ainda mais a necessidade de pesquisas que tratem da abordagem relativa ao tratamento dos gráficos na construção do pensamento, raciocínio e letramento estatísticos, tanto na formação inicial e continuada dos professores como em atividades a serem desenvolvidas pelos alunos durante o processo de aprendizagem.

3. Um caminho percorrido

Nossa busca de compreender melhor o processo de utilização dos softwares de geometria dinâmica teve início em uma primeira tentativa de traduzir os tipos de apreensão de uma figura geométrica, nos termos da Teoria de Registros de Representação Semiótica – TRSS (Duval, 1884) para os gráficos estatísticos. Naquele projeto foram desenvolvidas duas dissertações de mestrado que tiveram como objetivo estudar as interações do sujeito com o software a partir de uma abordagem dos conteúdos da estatística nos termos da filosofia da Análise Exploratória de Dados.

As duas pesquisas, Vieira (2008) e Freitas (2010) utilizaram o Fathom como software e analisaram as representações gráficas construídas à luz da TRSS, sendo que o público-alvo na primeira pesquisa foi constituído por alunos do segundo ano do Ensino Médio brasileiro, enquanto que na segunda o grupo era formado por professores de Matemática que lecionavam nesse nível de escolaridade. Ambas observaram uma melhora significativa no letramento estatístico dos sujeitos a partir do desenvolvimento da sequência didática concebida para tal formação. Os alunos, observados por Vieira, não apresentaram qualquer dificuldade na manipulação do software, assim como os professores participantes da pesquisa de Freitas. A apropriação em ambos os casos foi bastante natural, embora nenhum dos grupos jamais tivesse tido contato com o Fathom.

Apesar de resultados favoráveis ao uso do software, no que se refere ao estudo da mobilização/articulação dos diversos registros de representação semiótica na construção dos conhecimentos estatísticos, passamos a analisar a utilização do software Geogebra, uma vez que sua gratuidade impulsionou seu uso nas escolas das redes públicas brasileiras. Outro software também livre passou a ser estudado em nossas pesquisas, o R, buscando-se assim um estudo comparativo quanto às possibilidades e fragilidades de um ou outro software. Citaremos dois dos trabalhos desenvolvidos em nosso grupo de pesquisa: em Coutinho e Souza (2013 e 2015) buscamos realizar uma análise didática dos softwares Geogebra e R na construção de gráficos, a partir de atividades desenvolvidas com professores em formação inicial e continuada. Para estes autores, a utilização de um ambiente computacional permite ao professor fazer a gestão das atividades de aprendizagem de forma que os procedimentos para a construção de gráficos não se tornem o foco dessas atividades, permitindo a discussão conceitual sobre a distribuição dos dados.

Os dois textos aqui referenciados consideram a abordagem dos gráficos estatísticos em atividades colaborativas de aprendizagem em sala de aula, desde a construção até a análise, que leva em conta não apenas as representações escolhidas, mas principalmente o conhecimento do contexto no qual os dados foram coletados. Para tanto, foram utilizados dois critérios de análise: (i) usabilidade didática; (ii) construção de dois tipos de gráficos em um mesmo sistema de eixos. O primeiro aspecto a destacar diz respeito ao primeiro critério: a usabilidade didática. Coutinho e Souza (2013) concebem usabilidade didática como o custo cognitivo da manipulação do software para a produção de significados a partir de transformações nos registros de representação semiótica mobilizados pelo sujeito.

Para ilustrar a discussão, Coutinho e Souza (2015) apresentam os seguintes exemplos de utilização de mais de uma representação, construídos com o uso do R e com o uso do Geogebra, e apresentados nas figuras 1 e 2. Os dados utilizados foram coletados em oficina ministrada pelos autores e permitem a identificação de pontos “outliers” pelos softwares.

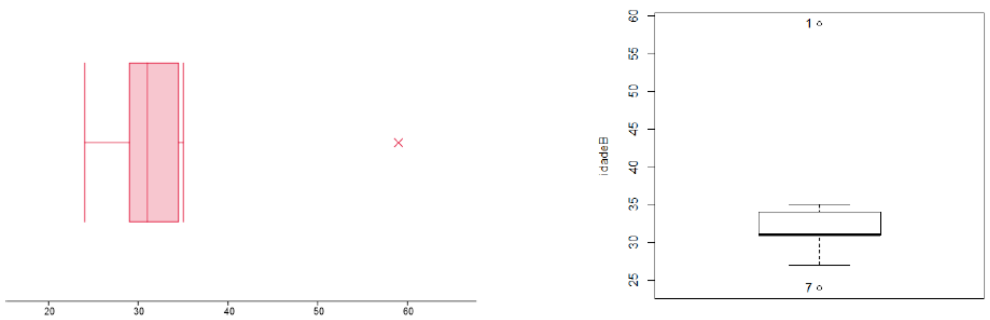


Figura 1. BoxPlot construído com uso do Geogebra (esqueda) e do R (direita).
Fonte: (Coutinho e Souza, 2015, p.4)

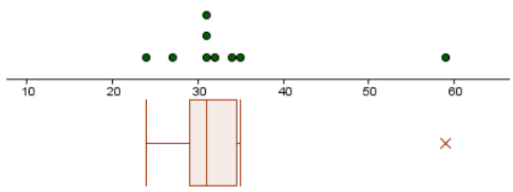


Figura 2. BoxPlot e Gráfico de Pontos construídos no Geogebra.
Fonte: (Coutinho e Souza, 2015, p.4)

Na sequência, os autores discutem a possibilidade de construção de mais de um gráfico em um mesmo sistema de eixos, o que é possível apenas no Geogebra. Essa possibilidade foi apontada por Coutinho, Almouloud e Silva (2012), que apontam para a possibilidade de análises mais coerentes uma vez que a visualização da figura (do conjunto de gráficos) faz apelo a uma mesma escala de eixos. No texto, os autores explicitam ainda as três atividades cognitivas, nos termos da TRSS, que um registro deve cumprir na construção do pensamento estatístico:

- a construção de um traço ou ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como elemento de um sistema determinado (entendemos assim os gráficos estatísticos, as tabelas de distribuição e de distribuição de frequências e as medidas resumo como registros de representação semiótica);
- a transformação de uma representação em outra a partir das regras do sistema considerado (transformação de tabelas pela modificação do tipo de agrupamento dos dados, transformação dos gráficos pela modificação das escalas dos eixos, etc);
- a conversão das representações produzidas em um sistema para representações de um outro sistema (conversão de tabelas em gráficos, tabelas em medidas, gráficos em medidas, e vice-versa). (Coutinho, Almouloud, Silva, 2012, pp249-250)

As condições identificadas nas pesquisas citadas (Coutinho, Almouloud, Silva, 2012; Coutinho, Souza, 2013 e 2015) convergem para as características das técnicas transnumerativas apresentadas por Lee et all (2014), Chick, Pfannkuch e Watson (2005), Chick (2004) e Wild e Pfannkuch (1999).

O grupo PEA-MAT continua avançando em suas pesquisas sobre o uso do Geogebra na construção de técnicas transnumerativas e, por consequência, no desenvolvimento do pensamento estatístico.

4. O Geogebra e a construção de técnicas transnumerativas

Assumimos, a partir desse ponto, a transnumeração como o tipo de pensamento estatístico que ocorre pela utilização simultânea de mais de um registro de representação semiótica de um conjunto de dados, articulada com a captura de medidas do sistema real que sejam relevantes e com a comunicação dos resultados que o sistema estatístico sugere sobre o sistema real, tal como enunciado por Chick, Pfannkuch e Watson (2005). Ou seja, é a busca pelas representações que, articuladas, nos contam a "história dos dados" da forma mais completa e eficaz.

E é segundo tal assumpção que nosso grupo avança em suas pesquisas, as quais até o momento apontam para uma grande dificuldade, tanto por parte de professores como de alunos: como fazer o bom questionamento, ou seja, nos termos do texto aqui trabalhado, como identificar a história contada pelos dados?

Para uso nesse texto, escolhemos um banco de dados utilizado em oficinas ministradas por nós, tanto para professores em exercício como para alunos de um curso de licenciatura no Estado de São Paulo. O material utilizado nesses encontros foi uma adaptação de um tutorial construído por professores participantes do nosso projeto no período de 2008 a 2010, feita a partir das evoluções do Geogebra. A versão original foi apresentada em um minicurso oferecido durante o III SHIAM, na UNICAMP, ocorrido nos dias 22 e 23 de julho de 2010.

A última adaptação desse tutorial foi utilizada com professores em formação continuada em Piúra e Huancavelica (Peru), por um projeto desenvolvido pela

Pontifícia Universidade Católica do Peru, assim como em curso de Mestrado em Ensino da Matemática daquela instituição.

Discutiremos a inserção, a cada etapa, de novas informações por meio de alterações no gráfico inicial, no mesmo sentido indicado por Lee et all (2014).

O problema proposto aos participantes dos minicursos citados constava da elaboração de uma questão de pesquisa para, em seguida, coletarem os dados seja no próprio grupo, seja com os respectivos alunos. A abordagem dos conteúdos se dava a partir de um banco de dados trazido por nós, com valores relativos ao Número de Horas de Sono, declarado por 47 pessoas (construído a partir de uma consulta feita por um dos professores a seus alunos adolescentes). A escolha por valores inteiros é uma variável didática importante, uma vez que com isso as dificuldades referentes ao trabalho com números decimais não se acumula às dificuldades inerentes à construção e leitura de gráficos.

Os participantes tinham acesso aos dados e, a partir de então, propunham formas de organizar e analisar para que pudessem obter informações úteis para responder à questão posta. As indicações dos professores sugeriam, em quase totalidade, a construção de histogramas (por considerarem número de horas de sono como variável contínua) ou gráfico de colunas (por observarem apenas os valores tabulados, que são números inteiros e, portanto, poderiam ser representados como variável discreta). Tais escolhas podem ser explicadas pelo fato de que tanto no Peru como na maior parte dos países com os quais tivemos algum contato com material didático utilizado, a estatística é abordada por diagrama de setores, gráfico de colunas ou histogramas. Em alguns materiais podem ser identificados também gráficos de linhas.

Um exemplo de testemunho da baixa utilização do gráfico de pontos nos livros didáticos é dado no extrato do texto de Díaz-Levicoy et all (2016), no qual os autores analisam livros didáticos utilizados no Chile. Vale lembrar que no currículo brasileiro esse gráfico não é abordado.

> Globalmente, podemos observar que existe un predominio de los gráficos de barras y pictogramas, frente a la escasez de los gráficos de puntos, líneas, tallo y hojas, y sectores; que corresponde con lo que se señala en el currículo, donde se sugiere trabajar los gráficos de barras desde los primeros cursos. (p.723)

4.1 O gráfico de pontos

O gráfico de pontos associa a cada valor assumido pela variável observada um ponto plotado no plano cartesiano. Ou seja, o conjunto de pontos representa a distribuição dos dados. Esse gráfico tem um baixo custo cognitivo, pois sua construção mobiliza apenas o conhecimento sobre plano cartesiano e escala e não requer um alto nível de abstração (cada ponto representa um elemento do conjunto de dados).

Para sua construção no Geogebra, ao escolhermos o gráfico na caixa de diálogos oferecida pelo software, temos acesso à sintaxe necessária para sua construção. No exemplo, a sintaxe digitada foi DiagramaDePontos[A1:A47].

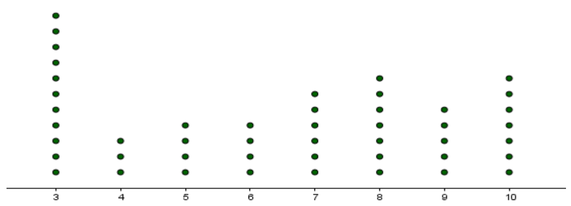


Figura 3. Gráfico de pontos relativo ao banco de dados “Horas de Sono”
Fonte: a autora

Observemos o processo desencadeado: da leitura do banco de dados para o gráfico de pontos. Este pode ser realizado em ambiente “papel e lápis”, por exemplo, marcando os pontos em uma grade (papel quadriculado) ou a partir de um eixo horizontal numerado, ou no quadro, em atividade coletiva com a classe.

Analisamos, na sequência, as técnicas transnumerativas empregadas. Os dados foram apresentados na tabela do Geogebra, ou seja, dispostos em uma única coluna com 47 linhas. Ao optarem pelo gráfico de pontos, passaram à sua construção pela digitação da sintaxe adequada. A tela apresenta simultaneamente a tabela e o gráfico, tal como mostrado na Figura 3. Neste primeiro passo, solicitamos aos professores participantes que descrevessem o conjunto formado pelo número de horas de sono dos 47 alunos respondentes.

4.2 O gráfico de Caixa ou Boxplot

Na sequência, anexamos à figura um boxplot referente a esse conjunto de dados, conforme Figura 4.

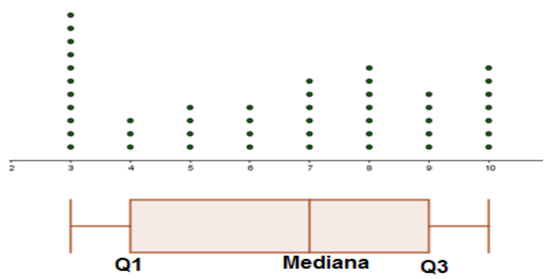


Figura 4. Representação dos dados por gráfico de pontos e boxplot
Fonte: a autora

4.2.1 A construção

A construção deste gráfico demanda algumas informações a serem explicitadas na linha de comando, na sintaxe adequada. No Geogebra, temos duas opções para construção do boxplot: com e sem outliers. Neste texto, abordaremos apenas a segunda. A caixa de ajuda das funções do software aparece como na Figura 5: ao escolher "BoxPlot" na lista de diagramas possíveis, aparece a sintaxe a ser utilizada.

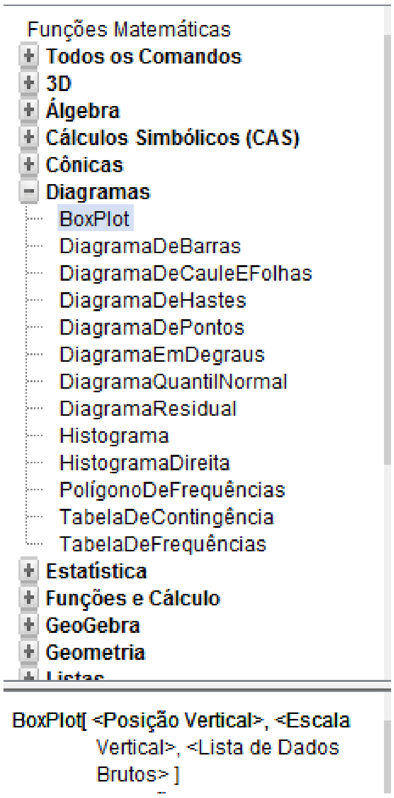


Figura 5. Caixa de diálogo com as opções oferecidas pelo Geogebra
Fonte: Geogebra

O comando "Posição Vertical" indica a posição do Boxplot no sistema de eixos coordenados: é a direção do eixo de simetria do gráfico. Assim, se assumirmos o valor 2, significa que o gráfico será construído tendo a reta y = 2 como eixo de simetria. O comando "Escala Vertical" indica metade da largura da caixa, ou seja, se assumirmos o valor 2, significa que a caixa terá largura de 4 unidades. "Lista de dados brutos" é o intervalo das células que contém os dados. No exemplo, B2 a B55. Logo, inserimos na linha de comando a seguinte sintaxe: BoxPlot[2,2,B2:B55]

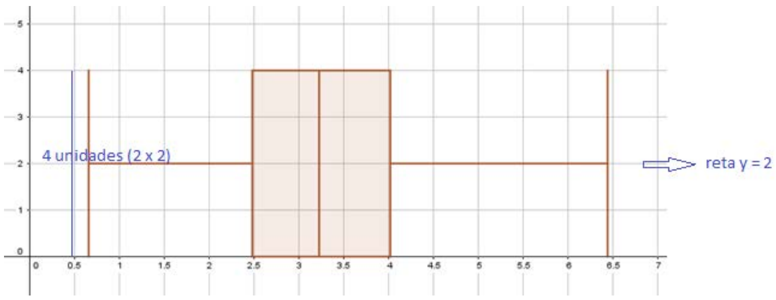


Figura 6. Explicitação dos elementos que compõem a sintaxe do gráfico boxplot
Fonte: a autora

No exemplo apresentado na figura 4, optamos por não apresentar a grade nem o eixo vertical. A utilização da grade é uma variável didática a ser considerada de acordo com o nível de escolaridade dos aprendizes ou mesmo do seu nível de conhecimento estatístico.

4.2.2 Técnicas transnumerativas

Observa-se assim os primeiros passos do processo transnumerativo, ou seja, da “mudança de representações para melhorar a compreensão”, nos termos de Wild e Pfannkuch (1999, p.227). Para Chick, Pfannkuch e Watson (2005), não podemos conhecer antecipadamente qual a melhor representação para os dados, mas quanto mais ferramentas computacionais temos a nossa disposição, maiores as chances de aplicar mais técnicas transnumerativas para buscar a história contada pelos dados. Nesse sentido, tanto o gráfico de pontos como o boxplot podem ser construídos em ambiente “papel e lápis”, mas a cada alteração de escala buscando uma melhor visualização dos dados teremos uma nova construção a ser realizada, o que introduz um elemento distrator: as técnicas para construção desses gráficos. Ou seja, o foco da análise dos dados deixa de ser a busca pela história para passar a ser a busca da técnica a ser utilizada.

A construção dos dois gráficos no mesmo sistema de eixos, conforme citam Coutinho e Souza (2013, 2015) permitiu analisar os dados de forma mais aprofundada, uma vez que o boxplot insere informações sobre a densidade dos dados em função do posicionamento dos quartis em relação aos valores máximo e mínimo. Ou seja, como cada intervalo identificado no boxplot contém exatamente 25% dos dados, a figura construída permite identificar maior concentração entre 3h e 4h (valor mínimo e primeiro quartil) e entre 9h e 10h (terceiro quartil e valor máximo). Metade do grupo pesquisado dorme entre 4h e 9h por noite, o que indica certa dispersão dos dados, que é confirmada na observação do gráfico de pontos.

Essa possibilidade de comparação representa um forte argumento em favor da utilização do mesmo sistema de eixos para a construção dos gráficos estatísticos. Destacamos que os estudos de Coutinho e Souza (2013, 2015) indicam que entre os softwares estudados por eles, apenas o Geogebra permitiu essa possibilidade.

4.3 Média e desvio-padrão

Na etapa seguinte, incluímos a linha que representa a posição do valor médio no conjunto de dados[2], o que nos encaminha de volta à indagação inicial: qual a história contada pelos dados? A figura 7 mostra a nova configuração construída.

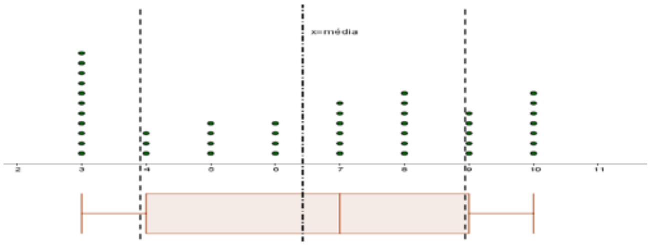


Figura 7. Inserção de novas informações a partir da média e do desvio-padrão
Fonte: a autora

4.4 A articulação das informações

Tal como afirmaram Lee et all (2014), foram inseridas informações que transformam sua estrutura, mas não afetaram as relações estatísticas já designadas. Elas permitem aprofundar a compreensão sobre a distribuição e sobre a variação contida no conjunto de dados. Ou seja, melhoram as condições para a construção do pensamento estatístico. A busca de compreensão pode ser ainda explorada pelo aspecto dinâmico do Geogebra: alterando valores no banco de dados, automaticamente os elementos introduzidos ao longo da análise também se modificam de forma dinâmica na tela.

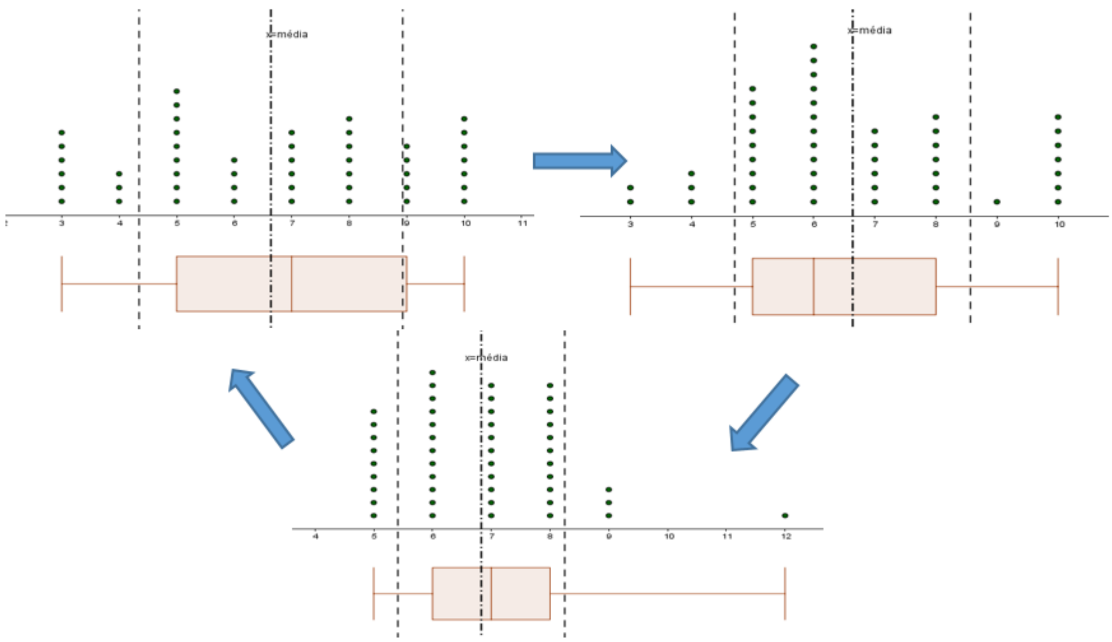


Figura 8. Variação dos valores da variável e o impacto sobre a média e sobre a forma do boxplot
Fonte: a autora

[2] Foram inseridas as retas que passando pelos valores $\bar{X}$, $\bar{X} - S$; $\bar{X} + S$.

A busca da história contada pelos dados permite também desencadear um debate sobre os conhecimentos estatísticos mobilizados na tomada de decisão pela inserção dos elementos no gráfico inicial: a observação de um valor extremo em relação ao conjunto de dados (no caso, um único valor 12h de sono a ser considerado em um conjunto variando entre 5h e 9h de sono) "desloca" a média, inicialmente um valor próximo à 6h30min (conforme Figura 7), para um valor que se aproxima bastante de 7h de sono (Figura 6). Propositalmente, não estamos abordando os valores exatos para a média, uma vez que nossa escolha é a de trabalhar apenas a visualização da figura construída. Ou seja, nos termos da TRSS, fazemos apelo aos tipos de apreensão da figura, tal como estudado por Vieira (2008) e por Freitas (2010), para a identificação da variação dos dados, e assim, buscar a história contada pelos dados sem fazer apelo aos cálculos de medidas.

Dessa forma, nossa opção pela busca da história dos dados por técnicas transnumerativas que não envolvam cálculos complexos só é possível pela utilização de ferramentas computacionais, no caso o Geogebra. Pode-se assim manter o foco da análise na compreensão das informações obtidas por meio dos processos transnumerativos (sempre olhando para os dados em função do seu contexto) e não nos procedimentos técnicos ligados à obtenção das medidas e das construções dos gráficos manualmente.

A discussão a partir das diferentes configurações resultantes das alterações nos valores do banco de dados também permite a identificação de simetrias e assimetrias presentes nos parâmetros para leitura dos dados. Por exemplo, consideremos o intervalo determinado a partir da relação entre média e desvio-padrão: $[\bar{X} - S; \bar{X} + S]$, que é sempre simétrico em relação ao valor da média $\bar{X}$. Por outro lado, o intervalo interquartílico (identificado na figura pela caixa do boxplot) só será simétrico em relação ao valor assumido pela mediana quando a distribuição de dados for perfeitamente simétrica.

No exemplo abordado neste texto, a representação final obtida por meio das transformações realizadas ao longo do processo transnumerativo permite identificar quantas horas de sono a maior parte do grupo declara, qual o valor que mais aparece, mas também a variação: o número de horas varia entre 3h e 10h (perceptível pelo gráfico de pontos e pelo boxplot), sendo que 50% do grupo indicam valores entre 3h e 4h ou entre 9h e 10h (perceptível pelo boxplot). Logo, a distribuição não é simétrica (perceptível pela forma do gráfico de pontos). Outras histórias podem ser "contadas" pelo posicionamento das retas que representam a média e o intervalo $[\bar{X} - S; \bar{X} + S]$.

Ao considerar o contexto no qual os dados foram coletados, ou seja, que os valores foram declarados por 47 adolescentes ao serem perguntados quantas horas de sono diário costumam ter, as informações lidas na representação final dos dados permitirão inferir/planejar ações referentes à saúde destes sujeitos, por exemplo.

5. Considerações

Buscamos, neste texto, provocar reflexão sobre formas de construir técnicas para a mudança de registros durante a resolução de um problema que envolva a análise de um conjunto de dados. Considerando que os elementos de conhecimento envolvidos são muitos e que buscamos delimitar nosso estudo ao pensamento estatístico, particularmente a transnumeração, articulamos técnicas oriundas da manipulação do software Geogebra com a mobilização de conhecimentos estatísticos que justificassem tais técnicas, propiciando assim o desenvolvimento do pensamento estatístico.

O processo aqui discutido parte de uma primeira transformação: da linguagem oral, na qual os sujeitos verbalizam os dados, até uma representação gráfica composta pela sobreposição de diversas outras – gráfico de pontos, boxplot, localização da média e delimitação do intervalo $[\bar{X} - S; \bar{X} + S]$. Fazemos a hipótese – e este estudo indica que é bastante viável – de que a utilização do Geogebra nessa construção de sobreposições consecutivas potencializa o aprofundamento na busca de informações trazidas pelos dados, ou seja, na busca da história contada pelos dados.

Segundo Wild e Pfannkuch (1999), o pensamento estatístico é composto por cinco elementos básicos, entre os quais a transnumeração e a consideração da variação dos dados. Nossos estudos e reflexões indicam que a utilização do Geogebra na sobreposição das representações dos dados permite o desenvolvimento da transnumeração e a percepção da variação a partir das possibilidades abertas pelos aspectos dinâmicos do software.

Ao abordar duas representações que não constam, usualmente, no currículo brasileiro, lançamos o foco sobre a possibilidade de incluí-las, uma vez que sua complexidade cognitiva e o nível de abstração exigido são compatíveis com os presentes em alunos da escola básica.

Outra perspectiva ainda em desenvolvimento em nosso grupo é a utilização do Geogebra quando se considera um banco de dados bidimensional: como as técnicas transnumerativas construídas com esse software, permitem a análise da correlação dos dados e da busca de modelos, entre outros elementos do pensamento estatístico?

Bibliografía

Chick, H. (2004) *Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation. Mathematics Education For The Third Millennium : Towards 2010: proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Sydney, p.167-174. Acesso em: 10 mar. 2017 de https://www.merga.net.au/documents/RP182004.pdf.

Chick, H.; Pfannkuch, M.; Watson, J. (2005). *Transnumerative thinking: finding and telling stories within data. Curriculum Matters*, Wellington, n. 1, p.86-107.

Coutinho, C. Q. S., Almouloud, S. Ag., Silva, M. J. F. (2012) *O desenvolvimento do letramento estatístico a partir do uso do Geogebra: um estudo com professores de matemática. Revemat*: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, 07(2), 246-265. Acesso em 15/03/2017 de http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p246.

Coutinho, C. Q. S.; Souza, F. S. (2013*). Aprendizagem da Estatística e o uso de ambientes computacionais: uma análise didática de programas para construção de gráficos estatísticos. In: VII Congreso Iberoameticano de Educación Matemática*, Montevideo, Uruguai. p.6221-6228. Acesso em 15/03/2017 de http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/234.pdf

Coutinho, C.Q.S.;Souza, F.S.. (2015). *Análise Didática do Uso dos Softwares R e Geogebra no Desenvolvimento do Letramento Estatístico.* In: M.A. Sorto (Ed.), *Advances in statistics education: developments, experiences and assessments. Proceedings of the Satellite conference of the International Association for Statistical Education (IASE),* July 2015, Rio de Janeiro, Brazil. Acesso em 15/03/2017 de http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=Advances_in_Stats_Education_2015.

Díaz-Levicoy, D.; Batanero, C.; Arteaga, P.; López-Martín, M. D. M., (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de educación primaria chilena. In Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.17, n.4, pp.715-739. Acesso em 15 mar. 2017 em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/23446/pdf.

Duval, R. *Les différents fonctionnements possibles d'une figure dans une démarche géométrique. Repères*, Grenoble, n.17, p. 121-138, oct. 1994. Acesso em: 10 mar. 2017 em http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/17_article_119.pdf.

Freitas, E. M. B. de. (2010). *Relações entre mobilização dos registros de representação semiótica e os níveis de letramento estatístico com duas professoras.* 213 f. Dissertação (Mestrado) PEPG em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Acesso em: 10 mar. 2017 em https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11450.

Lee, H. S.; Kersaint, G.; Harper, S. R.; Driskell, S. O.; Jones, D. L.; Leatham, K. R.; Angotti, R. L.; Adu-Gyamfi, K.. (2014). *Teachers' Use of Transnumeration in Solving Statistical Tasks with Dynamic Statistical Software. In Statistics Education Research Journal.* Volume 13 Number 1 (*on line*), pp.25-52. Acesso em 10/02/2017 de http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ13(1)_Lee.pdf.

VIEIRA, M.. (2008) *Análise Exploratória de Dados: Uma abordagem com alunos do Ensino Médio.* 185 f. Dissertação (Mestrado) - PEPG em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Acesso em: 10 mar. 2017 em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11347

Wild, C. J. and Pfannkuch, M. (1999), Statistical Thinking in Empirical Enquiry. International Statistical Review, 67: 223–248. doi:10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

Autora:
Cileda de Queiroz e Silva Coutinho: Doutora em Didática da Matemática pela Université Joseph Fourier – Grenoble I, França, desenvolve pesquisas no campo da Educação Estatística e Educação Financeira no grupo de pesquisas PEA-MAT, Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP.
cileda@pucsp.br

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 26-40

Geometria Sintética: narrativa de um episódio com uma aluna-professora

José Carlos Pinto Leivas

Fecha de recepción: 2016-02-08
Fecha de aceptación: 2017-02-26

Resumen	El artículo aborda un episodio en una clase de Geometría en una maestría en Enseñanza de las Matemáticas, en Brasil. Es una investigación cualitativa con características inductivas, explicativas y descriptivas. La pregunta: ¿cómo el diálogo/mediación del profesor, en la realización de una situación problema, puede proporcionar la demostración sintética de una proposición matemática? El propósito fue describir y analizar el episodio que involucra maestro y un alumno en la resolución. El método fue la Geometría Sintética; los datos, los diálogos de los dos. La conclusión es que el objetivo se ha logrado; el estudiante resuelve y la enunciación lo que llevaron al problema de Apolonio. **Palabras clave:** Geometría sintética o Pure. Episodio de una lección. Problema de Apollonius.
Abstract	This article discusses an episode of Geometry in a classroom a of a master's degree in Mathematics Teaching, by the author, in Brazil. It's a qualitative research with inductive, explanatory and descriptive characteristics. The research question is describing and analyze the dialogue/intermediation of a episode between the teacher and the student about a geometric problem-situation can provide the synthetic demonstration of a mathematical proposition. The method used was Synthetic Geometry and the data were the dialogues between them. We conclude that the objective was achieved since the student was able to troubleshoot the problem and formulate the proposition which led to the major problem of Apollonius. **Keywords**: Synthetic or Pure Geometry. Episode one classroom. Apollonius' problem.
Resumo	O artigo aborda um episódio de uma aula de Geometria num mestrado profissional em Ensino de Matemática, vivenciado pelo autor, no Brasil. Trata de pesquisa qualitativa com características indutiva, explicativa e descritiva. A questão foi verificar como o diálogo/intermediação do professor, na realização de uma situação-problema, pode proporcionar demonstração sintética de uma proposição matemática? O objetivo foi descrever e analisar o episódio de sala de aula entre professor e estudante na resolução da questão de pesquisa. O método foi o da Geometria Sintética e os dados foram os diálogos entre os dois. Conclui-se que o objetivo foi alcançado, pois a estudante obteve a solução e o enunciado de uma das proposições que conduziram ao *problema de Apolônio*. **Palavras-chave:** Geometria Sintética ou Pura. Episódio de uma aula. Problema de Apolônio.

1. Introdução

Um dos problemas interessantes em Geometria é o que está relacionado aos teoremas de concorrência. De acordo com Moise e Downs (1971, p. 444), “duas ou mais retas de um plano são concorrentes se existe um único ponto que pertence a todas elas. O ponto em comum é chamado ponto de concorrência”. No caso de se utilizar três retas, esse conceito é empregado em resultados relevantes, como no seguinte, denominado Teorema sobre a Concorrência das Mediatrizes: “As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes. O ponto de concorrência é equidistante dos vértices do triângulo” (Idem, p. 445). A demonstração a seguir é adaptada desses autores.

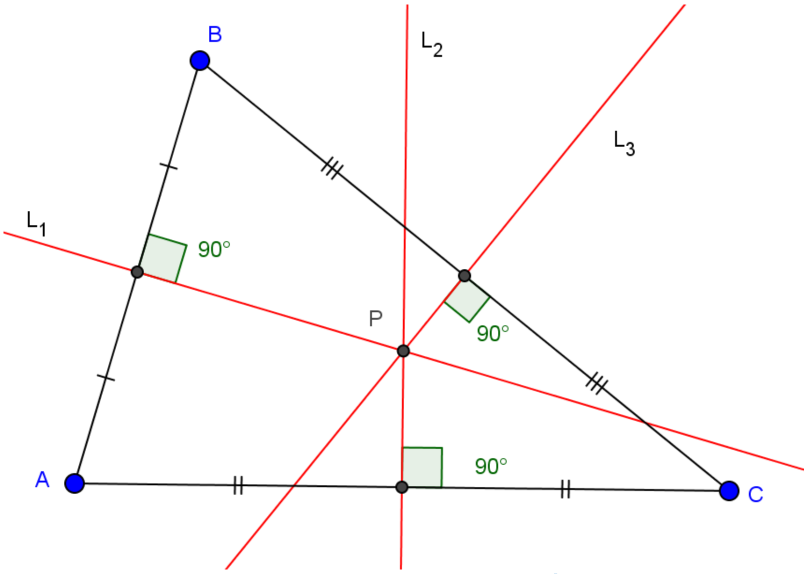


Figura 1. Mediatrizes de um triângulo.
Fonte: adaptado de Moise e Downs (1971, p. 445) pelo autor no GeoGebra.

Seja dado o triângulo ABC (Figura 1) e nele as mediatrizes L_1, L_2, L_3, dos lados AB, AC e BC, respectivamente. Se L_1 e L_2 fossem paralelas, então as retas contendo os lados AB e AC seriam paralelas (e coincidentes por terem um ponto em comum). Como a reta AB não é coincidente com a reta AC segue que L_1 e L_2 não são paralelas, ou seja, se interceptam no ponto P.

Por sua vez, as mediatrizes de um segmento, em um plano, dividem o segmento em duas partes congruentes, o que acarreta em serem congruentes os segmentos:

PA e PB, pois P pertence a L_1;

PA e PC, pois P está em L_2;

PB e PC, pois P está em L_3.

Dessa forma, as mediatrizes são concorrentes e o ponto de concorrência é equidistante dos vértices do triângulo e fica demonstrado o teorema que tem o seguinte corolário imediato: “Três pontos não colineares quaisquer estão sobre uma circunferência. ”

De fato, os três pontos pertencerão à circunferência de centro P e raio PA=PB=PC.

Neste artigo se abordará um episódio de uma aula de Geometria, realizada num Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, na qual o investigador é o professor responsável; envolveu uma aluna mestranda, que é professora em exercício e ocorreu no segundo semestre do ano de 2015. A questão de pesquisa foi: como o diálogo/intermediação do professor na realização de uma situação problema geométrica, pode proporcionar a demonstração sintética de uma proposição matemática? O objetivo da investigação foi **descrever e analisar o episódio de sala de aula envolvendo o professor e a estudante na resolução da questão de pesquisa.**

Para Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2002), dentre as muitas formas de tentativas de caracterizar o que seja uma pesquisa qualitativa está a de Patton (1986), pois ela parte do “pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem sempre um sentido, um significado, que não se dá a conhecer de modo imediato, precisando ser desvelado. ” (p. 131). Uma das características deste tipo de pesquisa, segundo os autores, é a abordagem indutiva, que é aquela na qual o investigador parte de observações mais livres. Além disso, “as investigações qualitativas, por sua diversidade e flexibilidade, não admitem regras precisas, aplicáveis a uma ampla gama de casos. ” (p. 147)

Segundo os autores, a observação dos fatos, os comportamentos e o cenário em que ocorre a pesquisa devem ser muito valorizados ao longo de seu desenvolvimento. Há vantagens na observação, tais como:

> a) independe do nível de conhecimento ou da capacidade verbal dos sujeitos; b) permite “checar”, na prática, a sinceridade de certas respostas que, às vezes, são dadas só para “causar boa impressão”; c) permite identificar comportamentos não intencionais ou inconscientes e explorar tópicos que os informantes não se sentem à vontade para discutir, e d) permite o registro do comportamento em seu contexto temporal-espacial. (Idem, p. 164)

No sentido apontado pelos autores, desenvolver uma pesquisa com um único participante, acompanhando, orientando e dialogando no transcurso da realização de uma tarefa investigativa pode produzir uma boa observação e retirada de conclusões. Assim, a presente pesquisa pode ser encarada como qualitativa e, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), pode ser considerada como descritiva “quando o pesquisador deseja descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou um problema” (p. 70). Como buscou-se explicar as causas dos problemas que iam surgindo para a chegada à resolução do problema geral, os porquês das tomadas de decisão parciais, colocando novas situações ante os questionamentos da estudante, pode-se considerá-la como explicativa o que, para os autores, é um apoio comum numa investigação do tipo descritiva.

Para Creswell (2010) existem pesquisas qualitativas tratadas em livros a respeito como a pesquisa de ação participativa ou a análise de discurso e “os pesquisadores podem estudar os indivíduos (narrativa, fenomenologia); explorar processos, atividades e eventos (estudo de caso, teoria fundamentada); [...]” (p. 210). Desta forma a presente investigação, por ter o envolvimento total de uma aluna-professora de um mestrado na investigação, **utilizando o investigador da**

narrativa da mesma na resolução da tarefa, acredita-se qualificá-la como qualitativa. Para este autor,

> as abordagens qualitativas de coleta, análise, interpretação e redação do relatório dos dados diferem das abordagens quantitativas tradicionais. A amostragem intencional, a coleta de dados abertos, a análise de textos ou de imagens, a representação de informações em figuras e em quadros e a interpretação pessoal dos achados informam procedimentos qualitativos. (grifo do autor, Idem, p. 21)

Entende-se que, na intencionalidade do pesquisador de verificar como a investigada elaborava seu pensamento na resolução da atividade proposta, registrar por escrito os procedimentos de forma aberta e reproduzir os esquemas elaborados nas representações geométricas envolvidas, houve o cumprimento de protocolo que define a atividade realizada como uma pesquisa bem definida em Educação Matemática, além de ter havido o planejamento e intencionalidade de uma atividade geométrica para uma aula específica com um problema bem definido.

Na medida em que a questão de pesquisa envolve a demonstração sintética, necessita-se estabelecer o que se entende pelo termo Geometria Sintética ou Geometria Pura e fazer um levantamento sobre alguns estudos a respeito.

No início do século XIX, alguns matemáticos expressaram preocupação com o fato de a Geometria Pura vir a desaparecer em função da Geometria Analítica. Eles diziam que essa última ajudaria a demonstrar propriedades e operações utilizando o sistema de coordenadas criado por Descartes. No entanto, isto não levaria a compreender propriedades meramente geométricas que não são perceptíveis utilizando apenas números, fórmulas ou as representações algébricas. Este uso se pode perceber que ocorre até os dias de hoje nas disciplinas de Geometria Analítica, nos cursos universitários brasileiros, em que os aspectos geométricos são pouco explorados.

De acordo com Lygeros (s.d.), Constantin Carathéodory publicou artigo no Jornal da Universidade de Bruxelas, em 1900, no qual tentou dar uma visão própria da Geometria Pura, indicando que ela é um dos primeiros ramos da Matemática a se constituir como disciplina por si só e que, na Antiguidade, os gregos a consideraram como verdadeira arte em termos de completude. Já na Renascença se buscou avançar, sem ir além da Geometria Pura, mas esses estudos levaram à formalização da Análise. Segundo o autor, Carathéodory considerou que os esforços realizados por Viète, Fermat, Pascal, Desargues, Newton, La Hire, na retomada da Geometria Pura, foram importantes para uma reconstituição da matemática grega, sendo que a mudança de fase cognitiva ocorreu no primeiro terço do século XIX com a introdução da Geometria Superior ou Sintética, a qual resolve problemas de forma elementar. A revolução em termos cognitivos avançou na França, de acordo com o artigo, com Monge, Carnot, Brianchon, Dupin, Gergonne, Poncelet e Chasles se espalhando pela Europa com Steiner e von Staudt.

Em seu tratado para a Educação Matemática, Klein (1927) buscou examinar as diferenças que existem entre Geometria Analítica e Geometria Sintética. Afirmou ele que a etimologia das palavras análise e síntese se referem a diferentes métodos de exposição. Interessa para o artigo o sentido de síntese, o qual expressa a saída de casos particulares, a partir dos quais se chega, pouco a pouco, a conceitos gerais. Assim, Klein (1927) chama

> [...] Geometria sintética, aquela na qual as figuras se estudam em si mesmas sem intervenção alguma de fórmulas, enquanto que na analítica essas se aplicam constantemente mediante o uso dos sistemas coordenados. Na realidade, a diferença entre ambas espécies de Geometria é puramente qualitativa: segundo que predominem as fórmulas ou as figuras, se tem uma ou outra Geometria, já que uma Geometria Analítica não pode, sem perder seu nome, prescindir em absoluto da representação geométrica, nem pelo contrário, a Geometria Sintética pode ir muito além sem expressar de um modo preciso, com fórmulas adequadas, seus resultados. (pp. 73-74)[1].

Pela definição do autor, entende-se que a Geometria Sintética pode ser encarada como um método de tratamento da Geometria. Esta concepção é reafirmada por Courant e Robbins (2000), por considerarem a necessidade de um princípio de classificação das numerosas e variadas propriedades das figuras no plano e no espaço, bem como na riqueza do conhecimento geométrico. Ao sintético afirmam que

> [...] é o método clássico de Euclides, no qual o assunto é construído sobre fundamentos puramente geométricos independentes da álgebra e do conceito de contínuo numérico e no qual os teoremas são deduzidos por raciocínio lógico a partir de um corpo inicial de proposições denominadas axiomas ou postulados. (p. 201)

Para Craig Spencer (1996) a Geometria Sintética é o tipo de geometria pela qual Euclides é famoso e que todos nós aprendemos na escola básica. Para o autor, ela é global, porém, se espera de sua elaboração, por meio de axiomas, como a Geometria Euclidiana, que seja instrutiva para o desenvolvimento de uma teoria local similar, mas bem mais geral. Diz ele que:

> Geometria sintética moderna, contudo, tem uma fundamentação mais logicamente completa e consistente. Neste capítulo o padrão desta fundamentação se adaptará com base nas considerações físicas anteriores, para desenvolver um sistema sintético de axiomas, o qual não implica coisas tais como uniformidade e isotropia. Esta geometria é global, porem se espera que sua elaboração, como a Geometria Euclidiana, será instrutiva para o desenvolvimento de uma teoria local similar, mas mais geral. (p.4)

Entende-se, pois, que a reorganização da geometria de Euclides por Hilbert, atende ao que o autor preconiza como uma Geometria Sintética moderna. Para Gascón (2002), à época em que Descartes começou a envolver coordenadas aos entes geométricos, afirma que: “vários matemáticos importantes (Poncelet, Chasles e Monge, entre outros), reivindicaram a importância dos métodos sintéticos da geometria pura, que proporcionam provas simples e intuitivas, frente aos potentes métodos analíticos, que não revelam o significado que se recebe” (p. 13). Em sua pesquisa o autor questiona a descontinuidade existente nos currículos na Espanha

---

[1] Todas as traduções constantes do artigo são livres e de responsabilidade do autor.

do ensino secundário e do bacharelado, o que não deixa de ser similar ao que ocorre no Brasil, em que a Geometria Analítica prioriza a álgebra e as fórmulas em função da geometria dos entes envolvidos. Para ele, o ensino de Geometria atual, entre outros aspectos, dá conta da falta de trânsito e complementariedade entre Geometria Sintética e Analítica, ou seja, vivem em mundos separados.

A fim de deixar o leitor motivado para estudos a respeito, ilustra-se um problema clássico que se pode atrelar ao estudo de Geometria Sintética. Apolônio (262-196 a.C.) é considerado um dos três gigantes da Matemática do século III a.C. (Eves, 2004), em um de seus trabalhos envolve tangências com 124 proposições, dentre as quais "o problema da construção de uma circunferência tangente a três circunferências dadas, permitindo-se a estas últimas que se degenerem independentemente em retas ou pontos" (p. 201). Esse ficou conhecido como problema de Apolônio e atraiu muitos matemáticos como Euler e Newton, de acordo com o autor.

Ortega e Ortega (2004, p. 59) afirmam: "este problema dá origem a dez casos possíveis e em alguns deles aparecem situações que obrigam a um tratamento particular." Além disso, indicam os autores que

> [...] o objetivo do artigo é mostrar como se podem conciliar a visão sintética, própria da Área do Desenho, com a Geometria Analítica, própria da Matemática desde o ponto de vista da Didática e combinar os estilos de resolução de forma complementares. Assim, se cria um marco interdisciplinar de análise didática que pode permitir opções de resolução e raciocínio mais apropriados a cada caso. (p. 60)

Os autores ilustram a solução sintética seguida da analítica para os dez casos, incluso aquele constante do episódio analisado no presente artigo, ou seja, obter uma circunferência que passa por três pontos não alinhados no plano. Concluem o artigo afirmando que "**quando as soluções sintéticas são interiorizadas, as aprendizagens são maiores**" (grifo do autor, Idem, p. 70).

Henriquez e Montoya (2015), em pesquisa realizada para uma tese doutoral, investigaram os enfoques sintético e analítico sobre o trabalho geométrico de professores do Liceu no Chile. Analisaram uma sessão, com um professor, a respeito do Teorema de Tales; as tarefas dadas por ele e verificaram a influência da visualização na resolução dessas. Utilizaram como fundamentação teórica os Espaços de Trabalho Matemático – ETM.

Portanto, utilizar a visualização no processo de construção do conhecimento sintético, na resolução da situação problema constante do presente artigo, é uma forma de dinamizar e atualizar os procedimentos empregados por Euclides na sua formalização geométrica. Entende-se por visualização como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos. Como indicaram Fiorentini e Lorenzato (2006), geometria, visualização e representação espacial e pensamento geométrico, é uma das linhas internacionais de pesquisa em Educação Matemática.

No livro I de Euclides (Os Elementos, 2009) aparecem algumas definições de figuras geométricas, dentre as quais:

> 15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos pontos no interior da figura, são iguais entre si.
> 16. E o ponto é chamado de centro do círculo. (p.97-98)

Julga-se importante a retomada da definição, pois em sua base fica perfeitamente definida a distinção entre círculo, como uma região, e circunferência como linha, a fronteira entre o interior do círculo e seu exterior. Já no livro IV de Os ELEMENTOS, há, dentre outras definições, as de inscrição e a circunscrição de figuras, das quais retiramos a seguinte: "6. E um círculo é dito estar circunscrito a uma figura, quando a circunferência do círculo toque cada ângulo daquela à qual está circunscrito" (p. 187).

Considere-se que, dados três pontos não alinhados no plano definem a figura triângulo, pode-se interpretar como o ângulo tocando cada vértice do triângulo ou cada um dos pontos. No mesmo livro IV é enunciada e demonstrada a proposição 5: "Circunscrever um círculo ao triângulo dado" (p. 191). Fica evidente, no transcorrer da demonstração que um ponto chave é a determinação do centro da figura e o outro, seu raio [definições 15 e 16, acima]. Há de se levar em conta que, em Euclides, o termo reta não tem o mesmo significado que tem hoje, o qual é denominado segmento de reta.

Também não é explicitado na demonstração o termo mediatriz. Assim: "Fiquem cortadas as retas AB, AC em duas nos pontos D, E (figura 2), e, a partir dos pontos D, E, fiquem traçadas as DF, EF em ângulos retos com AB, AC; encontrar-se-ão, então, ou no interior do triângulo ABC, ou sobre a reta BC ou no exterior da BC" (p.191). Na linguagem atual bastaria ser dito que o centro é o ponto F de interseção das mediatrizes obtidas a partir de dois pares de pontos, dentre os três dados, em que D é o ponto médio de AB e E é o de AC.

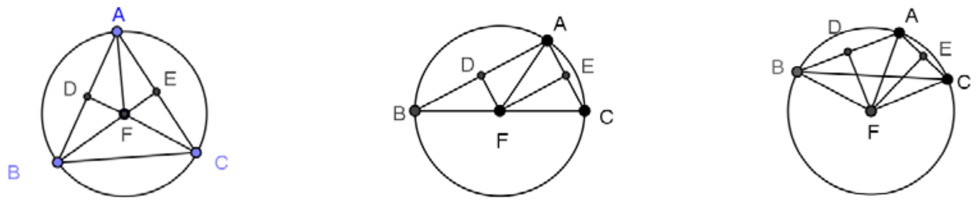


Figura 2. Circunscrição de uma circunferência por três pontos.
Fonte: adaptado de Os Elementos (2009, p. 191) pelo autor no GeoGebra.

A partir destes pressupostos, buscou-se analisar como uma estudante que cursava uma disciplina de Geometria em um Mestrado Profissional, resolvia um problema, utilizando princípios de Geometria Sintética, com a mediação e interlocução do professor no decorrer da realização da atividade, o que denominou-se um episódio investigativo.

2. O episódio

Situação problema

Dados os três pontos A=(-3,0). B=(1,-1) e C=(4,5) no plano cartesiano, representá-los na grade fornecida. Após a representação, se questionou: como obter um ponto que esteja a igual distância dos três, usando a Geometria Euclidiana?

Na figura 3 está a representação, na grade quadriculada fornecida, dos três pontos.

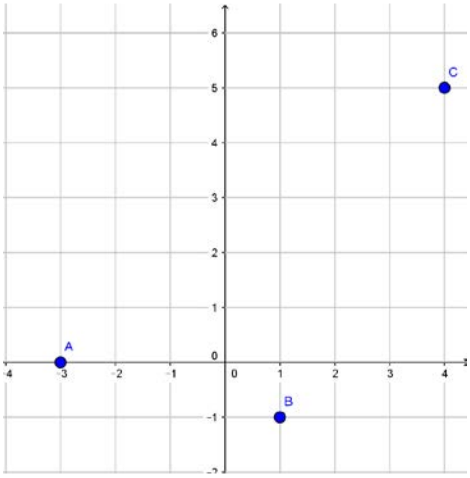


Figura 3. Representação dos pontos A,B e C.
Fonte: própria[2]

A seguir, narra-se o episódio de sala de aula, o qual permitiu, pelo registro realizado pelo professor investigador, produzir análise do "comportamento em seu contexto temporal-espacial" (Alves-Mazzotri e Gewandsznajder, 2002, p. 164).

Aluna: *eu imagino que seja aqui próximo ao ponto (0,3), pois daí a distância a cada um dos três seria a mesma. Traço um ponto entre A e C e a distância deste ponto até A deve ser a mesma até C. Deve ser uma reta passando por B e perpendicular a AC.*

Observou-se, na fala da aluna, que a mesma apresentou uma visualização aproximada da solução, intuitiva, sem comprovação ou argumentação matemática adequada. Ela apontou com o dedo para o ponto (0,3) (figura 4). Nisso já é possível perceber um primeiro enfoque do que Klein (1927) indicou como sendo "Geometria Sintética, aquela na qual as figuras se estudam em si mesmas sem intervenção alguma de fórmulas [...]" (p. 73).

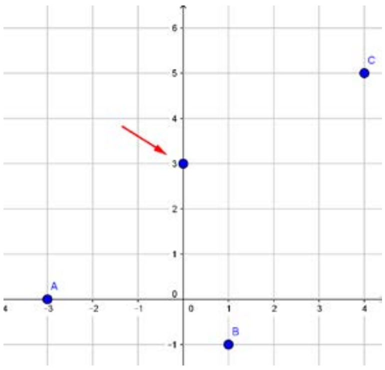


Figura 4. Ponto indicado pela aluna como solução da situação problema.

---

[2] Em função de que os registros da estudante foram feitos a lápis e que a reprodução não ofereceria qualidade, optou-se por fazê-los utilizando um software.

Fonte: própria

Em função de que a aluna não teve clareza sobre como obter a perpendicular (a alguma direção e passando por um ponto), e não tendo sido definido nenhum segmento, o professor estimulou sua reflexão sobre o que indicou, pois ela falou: perpendicular a B!

Professor: Lembre-se: reta perpendicular a um segmento de reta? O que você disse?

Aluna: *Tem de ser perpendicular a AC?*

Professor: sim

Na figura 5 há uma representação do que a aluna registrou. Note que o segmento de reta AC foi tracejado uma vez que ela não o representou, apenas mostrou com o seu dedo indicador de onde até onde iria tal segmento. As setas indicam o que ela quis mostrar.

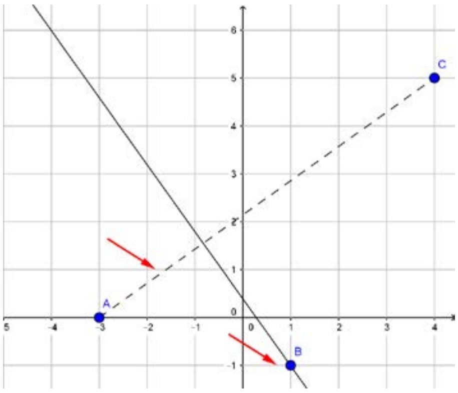


Figura 5. Representação da perpendicular por AC passando por B.
Fonte: autor

Aluna: *Como eu chamo esta reta? Não lembro direito se é mediatriz...*

Professor: Quem sabe você determina a mediatriz de AC! O que você precisa fazer?

Aluna – *Se me recordo é a perpendicular?*

Professor – Trace a perpendicular. Então...?

Aluna – *Tracei e prolonguei a reta. Achei a reta que é mediatriz. O ponto procurado que estou a definir, pertence à esta mediatriz. Imagino que...*

Ela teve de refletir sobre a ideia de mediatriz e relembrou que necessitaria partir não do ponto B e sim, do ponto médio do segmento que une os pontos A e C. Inicialmente, esboçou um segmento de reta indo deste ponto do segmento AC, aproximadamente até o ponto que acreditava ser o procurado, o (0,3) e ficou um pouco confusa, mas percebeu estar na vizinhança daquele ponto.

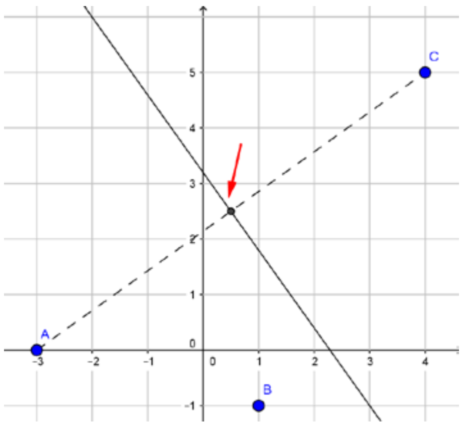


Figura 6. Tentativa de obtenção da ponto a partir da mediatriz do segmento AC.
Fonte: autor

Professor – E daí, onde ele vai estar?

Aluna – *Vou ter de achar distâncias iguais. Eu tenho o ponto aqui e não sei onde ele deve estar...*

A estudante ficou confusa por não saber localizar exatamente onde ficaria o ponto equidistante dos dois. Não se deu conta que qualquer ponto da mediatriz estaria a igual distância dos pontos A e C. A concepção de Geometria Sintética fornecida por Courant e Robbins (2000) se faz presente na medida em que “[...] é o método clássico de Euclides, no qual o assunto é construído sobre fundamentos puramente geométricos independente da álgebra [...]”. Essa construção é perseguida e o professor buscou estimulá-la a pensar que necessitava, também, encontrar a mediatriz entre outro par de pontos.

Professor – E se você não tivesse olhado para A e C?

Aluna – *Seria A e B? Seria o ponto médio de AB?*

Professor – Como você acharia o tal ponto?

Aluna – *Traçando um segmento de A até B e dividindo em ponto médio.*

Percebeu-se, ainda, a dificuldade na expressão do conceito envolvido, que não é de segmento e sim de mediatriz e, por isso, ela não percebeu que qualquer ponto desta reta poderia satisfazer, em parte, o procurado. Craig Spencer (1986) afirma que “Geometria sintética moderna, contudo, tem uma fundamentação mais logicamente completa e consistente” (p. 4) e, para que tal ocorresse, o pesquisador tentou retomar o que a aluna havia pensado a respeito no seguinte diálogo. Observou-se aqui o indicado por Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2002) quanto à pesquisa qualitativa: “permite ‘checar’, na prática, a sinceridade de certas respostas que, às vezes, são dadas só para ‘causar impressão’” (p.164)

Professor – Vamos retomar sua ideia... Você quer um ponto da reta que foi traçada. Obtenha o segmento AB.

Aluna – *Achei o ponto médio e o chamei de F. A distância de A até F é igual à distância de F até B.*

Vê-se que ela avançou no sentido de que o ponto médio F equidista dos dois extremos do segmento AB. Isto reafirma o indicado por Cobb et. al. (1992, apud Loureiro, 2015):

> o papel do professor envolve fazer inferências sobre o que ele e os alunos podem partilhar para os fins que têm em mãos. O professor avalia a fecundidade potencial dos alunos, individual e coletiva, para a sua aprendizagem futura. Os pressupostos do professor, potencialmente susceptíveis de serem revistos, tanto sobre os entendimentos consensuais como sobre as concepções individuais dos alunos, constituem a base sobre a qual o professor seleciona as atividades de ensino e inicia e guia as discussões." (p. 56)

Professor – E agora? Como foi seu raciocínio anterior?

A aluna explicou ao professor a forma como tinha raciocinado anteriormente, mas disse que F é um dos pontos.

Professor – Mas só tem este ponto F?

Ela ficou pensativa por algum tempo e afirmou que não. Novamente, houve o questionamento do investigador.

Professor – Onde se localizam estes pontos?

Aluna – *Se eu traçar uma perpendicular a AB por F terei infinitos pontos equidistantes de A e B. É a mediatriz deste segmento.*

Notou-se que a reflexão e a retomada da construção da primeira mediatriz foram produtivas uma vez que, de imediato, a construiu e concluiu sobre a existência de infinitos pontos equidistantes de A e de B. (figura 7). Os aspectos puramente geométricos estão proporcionando à aluna a aquisição/retomada conceitual almejada até o presente momento da investigação.

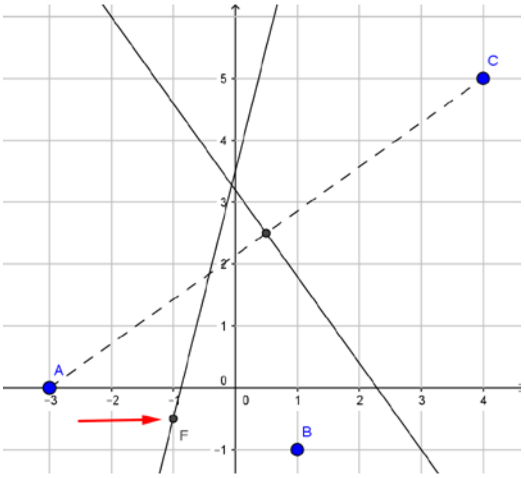


Figura 7. Ponto médio do segmento AB e a respectiva mediatriz
Fonte: autor

Professor – O que observas? Você procurava o que?

Aluna – *Os pontos que distam igualmente de A, B e C. Eu tinha dito que ele estaria na primeira mediatriz.*

A aluna pegou a régua para medir distâncias. Confundiu a mediatriz de AB com o eixo vertical. O professor a auxiliou a verificar que estava olhando de forma equivocada. Ela riu... prolongou a mediatriz e obteve os pontos de intersecção das mediatrizes.

Em seguida perguntou ao professor sobre a obtenção da terceira distância. Usou a régua para medir e verificar que as três distâncias são iguais, sem ter traçado a mediatriz do segmento BC. Os instrumentos de construções geométricas que são importantes na construção euclidiana se encontram presentes, reafirmando os princípios da Geometria Sintética de não utilizar fórmulas.

Professor - O que concluis sobre obter um ponto equidistante de três pontos dados no plano?

Aluna – Se eu traçar pontos médios de dois segmentos unindo dois pontos é o ponto equidistante dos três...

Ela não se expressou adequadamente e se confundiu na fala, pois interpretou como união de dois pontos, provavelmente por ter reunido a construção das duas mediatrizes. O que ela quis expressar foi que fazendo a interseção das duas mediatrizes encontrou um ponto P (figura 8) em comum entre elas e, portanto, este é também equidistante do terceiro ponto.

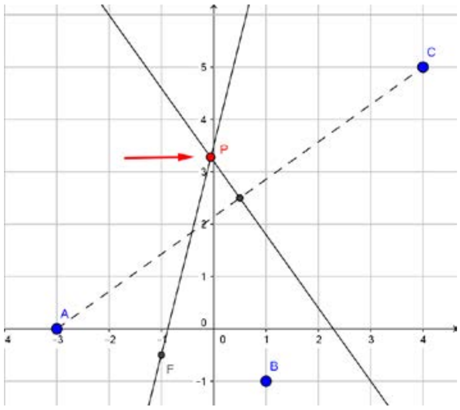


Figura 8. Ponto de intersecção das mediatrizes
Fonte: autor

Professor – Quais conceitos foram empregados nesta construção?

Aluna – *Segmento; mediatriz, retas perpendiculares; intersecção de retas.*

Professor – Achaste um ponto que seja equidistante dos três fornecidos no enunciado da situação problema? Será que existem outros pontos além deste?

A aluna foi categórica ao responder que não. O professor inverteu a pergunta.

Professor – Só os três pontos é que equidistam euclidianamente deste ponto P?

A aluna afirmou acreditar que não há outros pontos. O professor retomou com novo questionamento.

Professor – Os únicos pontos do plano equidistantes de P são A, B e C?

Aluna – *Não.*

Professor - Por quê?

A resposta da aluna foi vaga, sem maior convicção: porque existem outros pontos do plano. Indicou com o dedo alguns deles, visualmente equidistantes de P, mostrando a importância das habilidades visuais na construção geométrica sintética. O professor indagou quais seriam estes pontos e ela refletiu e explicou.

Aluna – *Porque se eu pensar numa circunferência de centro P e raio PB ou AP ou AC terei infinitos pontos equidistantes.*

Professor – Qual é o lugar geométrico obtido com esta construção?

A aluna agora respondeu convictamente: é uma circunferência. Ela animou-se e disse: o que eu fiz foi obter uma forma de encontrar uma circunferência que passa por três pontos dados e indaga o professor.

Aluna – *Posso fazer isso usando um compasso?*

O professor respondeu afirmativamente e sugeriu que ela o fizesse, pois estaria usando um dos instrumentos fundamentais para as construções na forma de geometria envolvida. Para finalizar o diálogo o professor retomou o problema inicial, que não fora explicitado para a aluna: **como se pode obter uma circunferência que passe por três pontos não alinhados no plano euclidiano?**

Aluna – *Por meio de retas perpendiculares.*

O professor voltou a questionar: são retas quaisquer? Como se chamam as retas que permitem obter a circunferência?

A aluna respondeu agora de forma precisa: são as mediatrizes dos segmentos que unem cada dois pontos dados. A partir delas eu obtenho o ponto de intersecção que é o centro da circunferência. Mas eu não preciso das três, bastam duas. O formalismo pretendido e a linguagem matemática apropriada foram alcançadas.

Neste momento, ela tomou seu compasso e construiu a circunferência que passa pelos três pontos não colineares (figura 9) que era a solução esperada para a situação problema pretendida pelo professor para aquele momento, cumprindo o objetivo proposto.

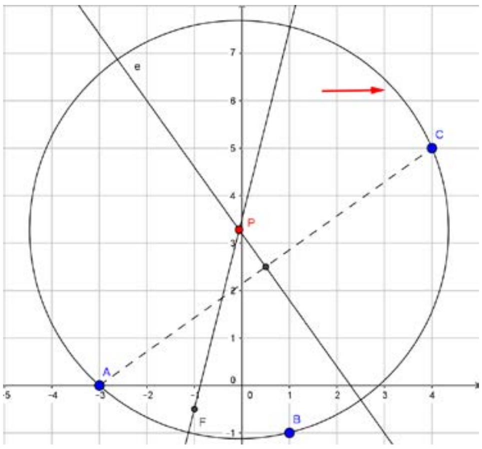


Figura 9. Circunferência que passa por três pontos não alinhados no plano.
Fonte: autor

Considerações finais

Neste artigo apresentou-se a análise e descrição de um episódio de sala de aula em um mestrado profissional em que o investigador buscou responder de que forma o diálogo e a intermediação do professor poderiam contribuir para a solução sintética de um problema geométrico. Neste sentido, sem apresentar inicialmente o problema, buscou-se, por meio da coleta, análise, interpretação e redação das falas da estudante e dos questionamentos e mediações do investigador, chegar ao enunciado de um dos problemas que conduzem ao importante *problema de Apolônio*, ou seja, **como determinar uma circunferência que circunscreva três pontos não alinhados**. Este é um dos dez resultados apontados por Ortega e Ortega (2004) para a chegada à solução geral.

Considerando a pesquisa como explicativa (Fiorentini e Lorenzato, 2006), ao reproduzir as construções geométricas realizadas pela estudante e as explicações que a levaram a obter respostas aos encaminhamentos do investigador, foi possível perceber que o uso de régua e compasso podem proporcionar o desenvolvimento de habilidades visuais fundamentais para a compreensão de resultados importantes da Geometria Euclidiana Plana, o que conduz à Geometria Sintética, ou seja, sem o uso de fórmulas ou coordenadas.

Ao explorar habilidades visuais nas tentativas de responder aos encaminhamentos do professor para obter soluções parciais, foi possível retomar conceitos geométricos e construções utilizando a régua e habilidades intuitivas o que favoreceu ao investigador levantar novas proposições sem, contudo, perder de vista o que a aluna vinha construindo, por exemplo, a chegada ao conceito de mediatriz e a interseção de duas delas que proporcionaram a obtenção do centro da circunferência que iria passar pelos três pontos dados e não alinhados.

Houve a necessidade de repensar a questão de distância entre pontos, sem o uso de fórmulas, de modo visual e intuitivo na determinação de pontos médios e, posteriormente, a caracterização do raio da circunferência circunscrita. Aos explicar e argumentar os processos de pensamento, a aluna formalizou conceitos e fez descobertas e redescobertas importantes para a Geometria Sintética, uma vez que não empregou fórmulas.

Não foi objetivo da investigação comparar métodos oriundos da Geometria Sintética com os da Analítica, pois visava-se, principalmente, descrever e analisar o episódio de sala de aula na resolução de uma questão intencional do investigador. Entende-se que o diálogo e a intermediação foram fundamentais para que a estudante pudesse obter a solução almejada. A pesquisa de Loureiro (2015) comprovou que os episódios analisados e descritos evidenciam também a necessidade de enriquecer a linguagem dos alunos e de lhes proporcionar um instrumento simples de visualização o que é possível corroborar com a investigação realizada no episódio de aula descrito no artigo.

Reafirma-se o indicado por Ortega e Ortega (2004) a respeito da importância da Geometria Sintética para a compreensão de resultados eminentemente abstratos e teóricos da geometria plana. Reitera-se, também, o indicado por Klein (1927) quanto ao sentido de síntese, o qual saindo de casos particulares, chegou, pouco a pouco, a conceitos gerais. Assim, acredita-se que o objetivo da investigação foi alcançado e que novas investigações possam ser realizadas com o fim de retomar essas construções, como o fizeram autores indicados no texto e que fornecem, de certa forma, um histórico a respeito.

Bibliografia

Alves-Mazzotti, A. J.; Gewandsznajder, F. (2002). *O método nas Ciências Naturais e Sociais*: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learing.

Courant, R.; Robbins, H. (2000). *O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Rio de Janeiro: Editora Moderna.

Craig Spencer, M.S. (1996). Differential Synthetic Geometry: A Possible Foundation for a Theory of Gravitation. Master of Science. College of Arts and Sciences University of Rochester Rochester, New York. Recuperado em 12 de dezembro de 2015, de http://enlightenment.supersaturated.com/essays/text/craigspencer/thesis/o3.pdf

Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. 3. ed. Porto Alegre: Artmed.

Eves, H. (2004) *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas, SP: Autores Associados.

Gascón, J. (2012). *Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? Revista SUMA*, v. 39, febrero 2002, pp. 13-25.

Henriquez, C. R.; Montoya, E.D. (2014). *El trabajo matemático de profesores en el tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. Actas… Cuarto Simposio Internacional ETM*. San Lorenzo de El Escorial, Madrid, España. Del 30 de Junio al 4 de Julio de 2014, pp.87-101.

Klein, F. (1927). *Matemática Elemental desde un punto de vista superior*. Trad. Roberto Araujo. v. II, Geometria. Madrid: Biblioteca Matemática.

Lygeros, N. (2016). *Sur la géométrie synthétique de Carathéodory*. S.d. Recuperado em 03 de janeiro de 2016, de http://www.lygeros.org/articles?n=3250&l=fr.

Loureiro, C. (2015). *Geometria em Coletivo - contributos para a sua compreensão. In: Revista VIDYA*, v. 35, n. 2, p. 55-74, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015.

Moise, E. E.; Downs, F. L. Jr. (1971). *Geometria Moderna* (trad. Watanabe, R. G. e Mello, D.A.). Parte II. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda.

Ortega, I.; Ortega, T. (2004). *Los diez problemas de Apolonio. Revista SUMA*, Junio 2004, pp. 59-70.

Os Elementos/Euclides. (2009). Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP.

José Carlos Pinto Leivas: Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UNIFRA; doutor em Educação (Matemática), mestre em Matemática Pura e Aplicada, especialista em Análise e Licenciado em Matemática, Coordenador do GT4 - Ensino Superior - da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, da qual foi secretario e diretor da regional do RS. Editor da revista Vidya.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 41-60

Problemas de optimización vía álgebra

Gustavo de J. Castañeda R., José Albeiro Sánchez Cano

Fecha de recepción: 2016-02-09
Fecha de aceptación: 2017-02-26

Resumen	Se presenta un método algebraico para la solución de problemas de optimización de funciones reales de una y dos variables reales con una condición o restricción, sin usar para ello la primera y segunda derivada. Dicho método proporcionará una forma sencilla de resolución, el cual podrá ser enseñado en cursos de educación secundaria. **Palabras clave**: Funciones algebraicas, máximos, mínimos. Enseñanza y aprendizaje, Universidad.
Abstract	An algebraic method for solving optimization problems of real functions of one and two real variables with a condition or restriction is presented, without using the first and second derivatives. This method provides a simple way of resolution, which be taught in high school courses. **Keywords**: Algebraic functions, maximum, minimum. Education and learning, University
Resumo	Um método algébrico para resolver problemas de otimização de funções reais de uma e duas variáveis reais com uma condição ou restrição é apresentada, sem usar as primeira e segunda derivadas. Este método fornece uma maneira simples de resolução, que será ministrado em cursos do ensino secundário **Palavras-chave:** funções algébricas ,máximo, mínimo. Ensino e Aprendizagem da Universidade.

1. Introducción

Una de las aplicaciones inmediatas del cálculo es la determinación de los valores extremos de una función. El método que se expondrá a continuación, para resolver problemas de máximos y mínimos no utiliza para nada el cálculo diferencial, solo se requiere un poco de conocimientos en álgebra elemental, en lo que concierne al planteamiento correcto de las ecuaciones así como en la resolución de ecuaciones. El método en sí es muy elemental y por tanto puede ser enseñado en cursos de álgebra impartidos en secundaria, de tal manera que nuestros jóvenes estudiantes resuelvan problemas que se presentan en muchas áreas de la vida diaria a través del álgebra**.**

Este método recoge la idea básica de los multiplicadores de Lagrange. Resolveremos problemas tales como maximizar volúmenes, ganancias y minimizar distancias, tiempos y costos.

Este método funciona en problemas de optimización cuando la función objetivo a maximizar o minimizar y la condición de restricción o ligadura son funciones algebraicas, más queda limitado cuando esas ecuaciones contienen: exponenciales, logarítmicas, trigonométricas o trigonométricas inversas. Pero ocasionalmente trabajaremos algunas de ellas, pues el método lo que hace, es volverla precisamente algebraicas.

En el primer curso de cálculo, se les enseña al estudiante a encontrar la gráfica de una función algebraica mediante el cálculo diferencial, esto es, mediante el criterio de la primera derivada se encuentra los extremos (máximo o mínimo), y con el uso de la segunda derivada, se encuentra los puntos de inflexión, esto es, donde cambia las concavidades. El método MAE, hace lo siguiente: convierte la función algebraica dada en una función polinómica, este método se basa en el siguiente hecho: después de volverla polinómica le exige que esta nueva función tenga dos raíces reales e iguales para así garantizar la existencia de extremo (en el caso de que exista dicho extremo).

Este método se construyó inicialmente para funciones polinómicas, todo este desarrollo se encuentra en (José Albeiro Sánchez C (2012)). Pero se observó que puede ser generalizado a funciones algebraicas (José Albeiro Sánchez C (2013)), incluso para algunas funciones trascendentes que puedan, en algunos casos, ser llevadas a polinómicas.

Los ejemplos siguientes son adecuadamente elaborados, esto es, ejemplos y ejercicios que se presentan en cualquier texto de cálculo diferencial, de forma tal que los sistemas de ecuaciones para la obtención de los extremos resulten relativamente fáciles de resolver, esto es para los polinomios de grado mayor que tres. En general, tales sistemas de ecuaciones resultan imposibles de resolver en forma exacta. Y en tales casos se utiliza un método numérico.

El teorema siguiente será crucial para el desarrollo de toda la obra. Dicho teorema fue construido precisamente para dar soporte al método expuesto (Método Algebraico Elemental (MAE)), está demostrado en (José Albeiro Sánchez C (2012)).

En la sección 3 se darán varios ejemplos tanto en ingeniería como en administración y economía, los cuales aparecen en cualquier texto de cálculo, usando dicho método. El cálculo diferencial es una herramienta valiosa para desarrollar estas ideas, pero el método algebraico elemental propuesto, llega a la misma solución, pero sin utilizar la primera y segunda derivada. El método algebraico resulta ser muy eficiente y fácil de utilizar, de modo que este método pueda ser enseñado en cursos inclusive a nivel de colegio.

En la literatura existen métodos para calcular máximos y mínimos de funciones de una variable real, los cuales se basan en consideraciones geométricas.

Recordemos primero el siguiente teorema que será de gran utilidad (Sánchez C. (2012)).

Teorema. Dada la función polinómica de grado n,

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \tag{1}$$

si la ecuación polinómica $f(x)-k=0$ tiene una raíz real de multiplicidad algebraica dos en $x=\alpha$, entonces f tiene un extremo relativo en el punto (α,k), esto es, $f(x)-k=0$ puede escribirse en la forma

$$f(x)-k=(x-\alpha)^2 P_{n-2}(x), \qquad P_{n-2}(\alpha)\neq 0 \tag{2}$$

donde $P_{n-2}(x)$ es un polinomio de grado $n-2$ en la variable x .

Demostración.

Supongamos inicialmente que $f(x)-k$, con f dada por (1), tiene una raíz de multiplicidad algebraica dos en $x=\alpha$, esto es

$$f(x)-k=(x-\alpha)^2 P_{n-2}(x), \quad p_{n-2}(\alpha)\neq 0, \quad n>2$$,

Luego derivando a ambos lados de la igualdad, se tiene

$$f'(x)=2(x-\alpha)P_{n-2}(x)+(x-\alpha)^2 P'_{n-2}(x)$$,

que al evaluar en $x=\alpha$, obtenemos $f'(\alpha)=0$. Veamos que efectivamente $x=\alpha$ es un extremo.

En efecto, derivando nuevamente, obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2P_{n-2}(x)+2(x-\alpha)P'_{n-2}(x)+2(x-\alpha)P'_{n-2}(x)+(x-\alpha)^2 P''_{n-2}(x) \\ &= (x-\alpha)^2 P''_{n-2}(x)+4(x-\alpha)P'_{n-2}(x)+2P_{n-2}(x) \end{aligned}$$

Al evaluar en $x=\alpha,$, se obtiene

$$f''(\alpha)=2P_{n-2}(\alpha)\neq 0$$

La última condición indica que f efectivamente tiene un extremo en $x=\alpha$.

Observar que si $P_{n-2}(\alpha)>0$, entonces $x=\alpha$ es de mínima, el valor mínimo por tanto, $f(\alpha)=k$ si $P_{n-2}(\alpha)<0$, entonces $x=\alpha$ es de máxima.

Nota 1: Si $P_{n-2}(\alpha)=0$ entonces el punto $(\alpha, f(\alpha))$ es un punto de inflexión.

Nota 2: El método consiste entonces en igualar la función $f(x)$ a un parámetro k, k a encontrar, el cual resultará ser el valor extremo (si existe). A la nueva función polinómica $g(x)=f(x)-k$, se le exige que satisfaga el teorema anterior.

2. Método

Supongamos que queremos maximizar (o minimizar) una función $f(x,y)$ en las variables x e y, sujeto a la condición (o ligadura) $g(x,y)=0$. Si nos acordamos de la interpretación geométrica de los multiplicadores de Lagrange: graficamos en el mismo sistema cartesiano las curvas de nivel de f, esto es, hacemos $f(x,y)=k$, k contante a encontrar, con la ecuación $g(x,y)=0$, luego nos hacemos la pregunta: ¿Para qué valores de k, la curva $f(x,y)=k$ es tangente a la curva $g(x,y)=0$?.(Ver figura 1)

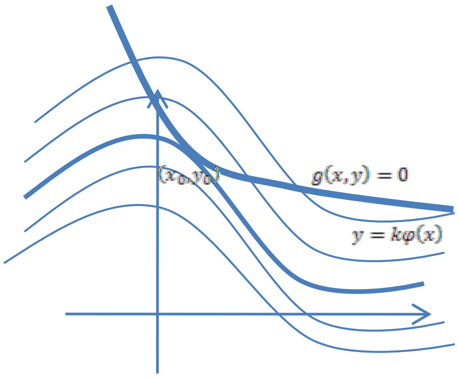


Figura 1

Procedemos como sigue:

La función objetivo (a maximizar o minimizar) $f(x,y)$ es igualada a una constante k, esto es $f(x,y)=k$, despejamos de esta (si se puede), por ejemplo, la variable y, de la cual resulta una función $\varphi(x)$, como sigue:

$$y = k\varphi(x) \tag{3}$$

Ahora, (3) es reemplazada en la condición de restricción (o ligadura) $g(x,y)=0$, esto es

$$g(x, k\varphi(x)) = 0 \tag{4}$$

luego encontramos los ceros de la ecuación (4), imponiendo a k valores para los cuales la ecuación (4), que a la postre se ha convertido ya en una polinómica, tenga raíces reales e iguales, ese valor "forzado" de k, es exactamente el valor máximo o mínimo y ocurre precisamente cuando la curva $y = k\phi(x)$ es tangente a la curva con ecuación $g(x,y)=0$ en el punto de tangencia (x_0, y_0). Es aquí, donde aplicamos el método algebraico elemental expuesto en (Sánchez, 2012_a) y (Sánchez, 2013_b), el cual, usando la notación del teorema:

$$g(x,k\varphi(x)) = P(x,k) = (x-\alpha)^2 P_{n-2}(x;k), \quad P_{n-2}(\alpha;k) \neq 0$$

Donde $P_{n-2}(x;k)$ es un polinomio de grado $n-2$.

En el caso de que $P(x;k)$ sea un polinomio de grado dos, se exige que el discriminante de la ecuación cuadrática resultante sea cero. En general, en el discriminante aparecerá una ecuación en la variable k. Como en principio el discriminante deberá ser mayor o igual a cero, de aquí se desprende el tipo de extremo, esto es, si $k \geq a$ entonces $k = a$ será el valor mínimo y si $k \leq b$ entonces $k = b$ será el valor máximo. Desigualdad estricta no produce valor extremo.

Para los otros casos, esto es, si $P(x;k)$ es un polinomio de grado mayor que dos, se tiene que el valor más grande de k que asuma dentro de un conjunto de valores será el valor máximo y el valor más pequeño de k será el valor mínimo.

Si la función f dada es polinómica, entonces se cumple la nota 1, esto es, (α,k) será un punto de inflexión cuando $P_{n-2}(\alpha;k) = 0$. Pero cuando la función es no polinómica, ya este criterio puede fallar.

3. Aplicación del método

3.1.1. Ejemplo 1

Encuentre los puntos de la hipérbola $y^2 - x^2 = 4$ que estén más cercanos al punto $(2,0)$.

Solución:

Sea (x,y) el punto de la hipérbola donde se tiene la distancia mínima con el punto $(2,0)$. (ver figura 2). Según el problema

$$\begin{cases} \min & d(x,y) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \\ s.a & (x,y) \in H: \quad y^2 - x^2 = 4 \end{cases}$$

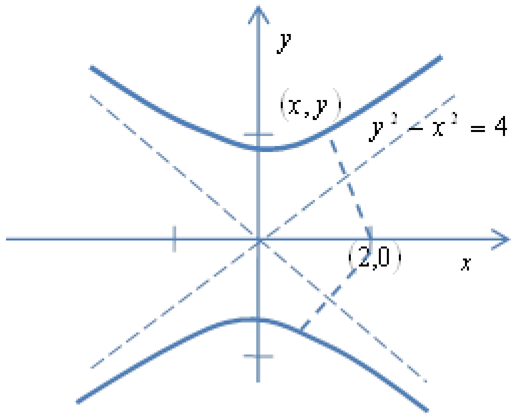


Figura 2

Según el método, hacemos $d(x,y)=k$, esto es, $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=k, k\geq 0.$ Lo cual es equivalente a tener: $(x-2)^2+y^2=k^2$.

Gráficamente lo que queremos es encontrar una circunferencia centrada en $(2,0)$ y radio k (la distancia mínima) que sea tangente en (x,y) a la hipérbola $y^2-x^2=4$. (ver figura 3).

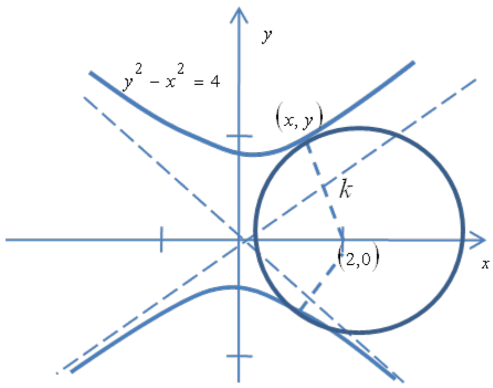


Figura 3

Se tiene el siguiente sistema a resolver:

$$\begin{cases} k^2=(x-2)^2+y^2 & (5) \\ y^2=4+x^2 & (6) \end{cases}$$

Reemplazando la ecuación (6) en la (5) se obtiene: $(x-2)^2+4+x^2=k^2$ o bien, resolviendo la cuadrática en la variable x, se tiene, $2x^2-4x+(8-k^2)=0$ cuya solución viene dada por $x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-8(8-k^2)}}{4}$, ahora como requerimos que las soluciones sean reales e iguales, obligamos entonces a que k cumpla lo siguiente:

$$16-8(8-k^2)\geq 0 \Leftrightarrow k\leq -\sqrt{6} \quad \vee \quad k\geq\sqrt{6}$$

así que la distancia mínima es $k=\sqrt{6}$ (observar el sentido de la desigualdad), y esto ocurre en el punto de abscisa $x=1$ y por (6), la ordenada será entonces $y=\pm\sqrt{5}$, por lo tanto los puntos de la hipérbola $y^2-x^2=4$ más cercanos al punto $(2,0)$ son: $(1,\sqrt{5})$ y $(1,-\sqrt{5})$.

3.1.2. Ejemplo 2

Se va a fabricar una lata para almacenar 1 litro de aceite. Encontrar las dimensiones que minimizarán el costo del material requerido para hacer el envase.

Solución:

Sean x radio de la base y y la altura del cilindro respectivamente. Según el problema:

$$\begin{cases} \min \quad S(x,y)=2\pi x^2+2\pi xy \\ s.a \quad V(x,y)=\pi x^2 y=1000 \ \text{cm}^3 \end{cases}$$

Donde $S(x,y)$ y $V(x,y)$ representan el área superficial y el volumen del cilindro respectivamente.

pongamos $S(x,y)=k$, esto es : $2\pi x^2+2\pi xy=k$, despejando la variable y, tenemos:

$$y=\frac{k-2\pi\ x^2}{2\pi\ x}, \qquad x>0$$

ahora nos preguntamos ¿para qué valores de k la gráfica cuya ecuación $y=\dfrac{k-2\pi\ x^2}{2\pi\ x}$,

es tangente a la curva $y=\dfrac{1000}{\pi\ x^2}$? . Nuestra k deberá ser positivo ya que x y y lo son. Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{k-2\pi\ x^2}{2\pi\ x} & (7) \\ y=\dfrac{1000}{\pi\ x^2} & (8) \end{cases}$$

igualando las ecuaciones (7) y (8), obtenemos:

$$\frac{k-2\pi\ x^2}{2\pi\ x}=\frac{1000}{\pi\ x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^3-\frac{k}{2\pi}x+\frac{1000}{\pi}=0$$

Como exigimos que las raíces sean reales e iguales, al menos dos de ellas, podemos escribir

$$x^3 - \frac{k}{2\pi}x + \frac{1000}{\pi} = (x-\alpha)^2(x-\beta) = x^3 - (\beta+2\alpha)x^2 + \left(2\alpha\beta+\alpha^2\right)x - \alpha^2\beta$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema.

$$\beta + 2\alpha = 0 \tag{9}$$

$$2\alpha\beta + \alpha^2 = -\frac{k}{2\pi} \tag{10}$$

$$-\alpha^2\beta = \frac{1000}{\pi} \tag{11}$$

de (9) se tiene

$$\beta = -2\alpha \tag{12}$$

Reemplazando (12) en la ecuación (11) se tiene:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \tag{13}$$

Luego por (12) se tiene que

$$\beta = -2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \tag{14}$$

Remplazando las ecuaciones (13) y (14) en la ecuación (10):

$$-4\sqrt[3]{\frac{500^2}{\pi^2}} + \sqrt[3]{\frac{500^2}{\pi^2}} = -\frac{k}{2\pi}$$

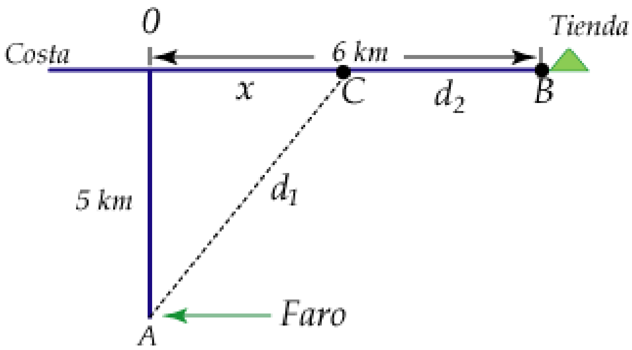
De donde se tiene que el área superficial mínima es $k = 300\sqrt[3]{2\pi}\ \ \mathrm{cm}^2$. Las dimensiones requeridas son: radio del cilindro $x = 5\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ y altura del cilindro $y = 10\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$.

3.1.3. Ejemplo 3

Un faro se encuentra ubicado en un punto A, situado a 5 Km. del punto más cercano O de una costa recta. En un punto B, también en la costa y a 6 Km. de O, hay una tienda. Si el guarda faros puede remar a $2\ km/h$, y puede caminar a $4\ km/h$, ¿dónde debe desembarcar en la costa, para ir del faro a la tienda en el menor tiempo posible?

Solución:

Se debe minimizar el tiempo de recorrido. Gráficamente la situación es la siguiente:



Sea *C* el punto de la playa en el que desemboca el guarda faros, designemos con x la distancia OC.

d_1 es la distancia en que debe remar desde *A* hasta *C*

d_2 es la distancia en que debe caminar desde *C* hasta *B*

Note, de la gráfica que $d_1 = \sqrt{25+x^2}$ y $d_2 = 6 - x$.

Además se tiene que la distancia *S* recorrida en un tiempo t es igual a la velocidad por el tiempo: o sea; $s = vt$ de donde $t = \frac{s}{v}$.

La distancia d_1 es recorrida con una velocidad de $2\ km/h$, y la distancia d_2 con una velocidad de $4\ km/h$, por lo que el tiempo total de recorrido será:

$$t = t(x) = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{2} + \frac{6-x}{4} \qquad (15)$$

siendo esta última la función a minimizar.

Luego según el método hacemos $t(x) = k$, esto es: $\frac{\sqrt{25+x^2}}{2} + \frac{6-x}{4} = k$. Luego después de algunas simplificaciones, se llega a la ecuación cuadrática

$3x^2-4x(2k-3)+\left(100-4x(2k-3)^2\right)=0$, como exigimos que las raíces sean reales e iguales, luego se tiene la solución

$$x=\frac{2}{3}(2k-3) \tag{16}$$

donde k verifica la siguiente ecuación:

$$16(2k-3)^2-12\left(100-4(2k-3)^2\right)\geq 0 \tag{17}$$

Pero esto último dice que $k\geq\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\sqrt{3} \quad \vee \ k\leq\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\sqrt{3}$. Esto es, el valor mínimo es $k=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\sqrt{3}$. Luego el punto donde ocurre el valor mínimo es, reemplazando el valor de k hallado en (16)

$$x=\frac{2}{3}(2k-3)\Rightarrow x=\frac{2}{3}\left(2\left(\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)-3\right)\Rightarrow x=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Luego por (15) se sigue que el tiempo mínimo será entonces

$$t=t\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{25+\frac{25}{3}}}{2}+\frac{6-\frac{5\sqrt{3}}{3}}{4}=\frac{5\sqrt{3}+6}{4}\approx 3.66\,h.$$

Luego, el guarda faros debe desembarcar en un punto C que está a $d_1=\sqrt{25+\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{km.}$ del punto C, para llegar a la tienda en el menor tiempo posible.

3.1.4. Ejemplo 4

La temperatura en un punto (x,y) en una placa de metal está dada por $T(x,y)=4x^2-4xy+y^2$. Una hormiga, camina sobre la placa, moviéndose sobre un círculo de radio 6 con centro en el origen. ¿Cuáles son la temperatura más alta y la más baja soportada por la hormiga en su recorrido?

Solución.

Se tiene el programa no lineal siguiente:

$$\begin{array}{ll} \max/\min & T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 \\ s.a & x^2 + y^2 = 36 \end{array}$$

Hacemos $T(x,y)=k$ y obtenemos:

$$(2x-y)^2 = k \quad \Rightarrow \quad y = 2x \pm \sqrt{k}, \quad k \geq 0 \qquad (18)$$

Reemplazando (18) en la condición, tenemos: $x^2 + \left(2x \pm \sqrt{k}\right)^2 = 36$, al simplificar tenemos la ecuación cuadrática: $5x^2 \pm 4\sqrt{k}x + (k-36) = 0$.

Usando la formula cuadrática tenemos:

$$x = \frac{\mp 4\sqrt{k} \pm \sqrt{16k - 20(k-36)}}{10}$$

Por un lado se tiene el x óptimo:

$$x_{OPT} = \mp \frac{2\sqrt{k}}{5} \qquad (19)$$

En donde el valor óptimo, $k = 180$ el cual se obtiene haciendo el discriminante igual a cero.

Observar que $k = 180$ es la temperatura máxima ya que

$$16k - 20(k-36) \geq 0; \quad \mathrm{k} \leq 180.$$

Reemplazando en (19) se tiene:

$$x_{OPT} = \mp \frac{2\sqrt{180}}{5} = \mp \frac{12}{\sqrt{5}}$$

Y para obtener el y óptimo, se reemplaza en (18), esto es,

$$y = 2\left(\mp \frac{12}{\sqrt{5}}\right) \pm 6\sqrt{5} \Rightarrow \quad y = \pm \frac{6}{\sqrt{5}}$$

En resumen:

Los puntos donde la temperatura es máxima: T= 180 ocurre en $\left(\mp \frac{12}{\sqrt{5}}, \pm \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$. Esto significa que la máxima temperatura ocurre en la frontera del círculo $x^2 + y^2 = 36$.

Observar que la temperatura mínima $k=0$ se da cuando $y=2x$, esto es, cuando $x^2+(2x)^2=36 \Rightarrow x=\pm\frac{6}{\sqrt{5}}$. Por lo tanto: Los puntos donde la temperatura es mínima: T=0 ocurre en $\left(\pm\frac{6}{\sqrt{5}},\pm\frac{12}{\sqrt{5}}\right)$.

3.2. Ejemplos en Administración y Economía

En los ejemplos siguientes encontraremos que las funciones que aparecen, no necesariamente son algebraicas, pero que pueden ser llevadas a algebraicas mediante el método. También, el método puede aplicarse a problemas de optimización con desigualdades de restricción.

3.1.1. Ejemplo 1

Una empresa produce un artículo cuya función de costo es $C(q)=280q++600$ y la función de demanda es $p=1000-40q,$ en donde p es el precio en dólares por unidad cuando se tiene una demanda de q unidades.
Calcular el nivel de producción que maximiza la ganancia del fabricante y determinar la ganancia máxima.

Solución. La ganancia está dada por la diferencia entre el ingreso y el costo, ahora el ingreso es la cantidad por el precio unitario, es decir, $R(q)=p.q=q(1000-40q)$ así, la ganancia es $G(q)=R(q)-C(q)$.

$$G(q)=q(1000-40q)-(280q+600)=700q-40q^2-600$$

Haciendo $G(q)=k$, llegamos a la ecuación cuadrática $40q^2-720q+600+k=0$ cuyas soluciones son: $q=\frac{720\pm\sqrt{720^2-160(600+k)}}{80}$, de donde se sigue que la solución óptima es $q=720/80=9$. Para hallar la ganancia optima, hacemos $720^2-160(600+k)\geq 0$ equivalentemente $k\leq 2640$, esto es k=2640 dólares y se obtiene para un nivel de producción de 9 unidades.

3.1.2. Ejemplo 2

Una compañía planea gastar 10000 dólares en publicidad. Cuesta 3000 dólares un minuto de publicidad en la televisión y 1000 un minuto de publicidad en la radio. Si la empresa compra x minutos de comerciales en la televisión e, y minutos de comerciales en la radio, su ingreso, en miles de dólares, está dado por $f(x,y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$.

¿Cuánto se debe invertir en publicidad en la televisión, cuanto en publicidad en radio con el fin de obtener el máximo ingreso?

Solución.

Se trata de resolver el modelo no lineal siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & f(x,y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y \\ s.a & 3x + y = 10 \end{array}$$

Hacemos $f(x,y) = k$ y obtenemos:

$$-2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y = k \qquad (20)$$

despejamos en la condición o restricción la variable y para obtener:

$$y = 10 - 3x \qquad (21)$$

Reemplazamos (21) en (20) para obtener $14x^2 - 69x + 70 + k = 0$

Usando la formula cuadrática encontramos que $x_{OPT} = 69/28 \approx 2.4243$

En (21) se obtiene el y óptimo: $y_{OPT} = 73/28 \approx 2.6071$

El valor óptimo (veremos que es un máximo) se obtiene haciendo el discriminante igual a cero.

$$4761 - 3920 - 56k = 0; \quad k = 841/56$$

Ahora k es el valor máximo, ya que el discriminante es mayor o igual a cero si $k \leq \frac{841}{56} \approx 15.0178$ dólares. De esta manera, La empresa deberá comprar $k = \frac{69}{28} \approx 2.4643$ minutos en televisión, y $\frac{73}{28} \approx 2.6071$minutos en la radio con el fin de obtener un ingreso máximo de $k = \frac{841}{56} \approx 15.0178$ miles de dólares.

3.1.3. Ejemplo 3

En un modelo de producción de dos productos, la función de utilidad está dada por $U(x_1, x_2) = \ln\sqrt{x_1.x_2}$ en la producción de estos dos productos se dispone de una cantidad $R \succ 0$ para invertir, dando origen a la siguiente restricción $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R$, siendo p_1, p_2 y R constantes positivas. Determinar los niveles de producción para obtener utilidad máxima.

Solución.

La solución al problema consiste en resolver el siguiente modelo matemático,

$$\left.\begin{array}{rl} \max & U(x_1, x_2) = \ln\sqrt{(x_1 \cdot x_2)} \\ \text{sujeto a .a} & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \quad (P)$$

Hacemos $U(x_1, x_2) = k$, donde k es el valor óptimo a determinar.

$$U(x_1, x_2) = \ln\left(\sqrt{x_1 \cdot x_2}\right) = k \quad \Rightarrow \left(\sqrt{x_1 . x_2}\right) = e^k ,$$

De donde obtenemos:

$$x_1 x_2 = \left(e^k\right)^2 = e^{2k} \tag{22}$$

De la condición de restricción despejamos x_1 para tener:

$$x_1 = \frac{R - p_2 x_2}{p_1} \tag{23}$$

Reemplazando (23) en (22) se tiene

$$\left(\frac{R - p_2 x_2}{p_1}\right) x_2 = e^{2k}$$

o bien

$$p_2 {x_2}^2 - R x_2 + p_1 e^{2k} = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática para x_2:

$$x_2 = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4 p_1 p_2 e^{2k}}}{2 p_2}$$

Se tiene que el valor de x_2 donde se obtiene el valor óptimo es: $x_2 = \dfrac{R}{2 p_2}$

Y el valor óptimo se encuentra haciendo el discriminante igual a cero (condición para la existencia de óptimo)

$$R^2 - 4p_1p_2e^{2k} = 0$$

$$e^{2k} = \tfrac{R^2}{4p_1p_2}$$

$$2k = \ln(\tfrac{R^2}{4p_1p_2})$$

$$k = \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{R^2}{4p_1p_2}).$$

Ahora,

$$x_1 = \frac{R - p_2x_2}{p_1} = \frac{R - p_2\,\tfrac{R}{2p_2}}{p_1} = \tfrac{R}{2P_1}$$

En resumen:

Los nivel de producción son $x_1 = \dfrac{R}{2p_1}$, $x_2 = \tfrac{R}{2P_2}$ y la máxima utilidad es

$k = \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{R^2}{4p_1p_2}).$

3.1.4. Ejemplo 4

Calcular la función de demanda de un consumidor cuya riqueza es $R \geq 0$, para el caso en que sus preferencias sean representables mediante la siguiente función de utilidad $U(x_1, x_2) = \sqrt{\ln(x_1) + \ln(x_2)}$.

Solución.

Aplicando propiedades de los logaritmos, luego el problema al que se enfrenta el consumidor es:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & U(x_1, x_2) = \sqrt{\ln(x_1)(x_2)} \\ \text{s.a} & p_1x_1 + p_2x_2 = R \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \quad (P)$$

Hacemos $U(x_1, x_2) = k$, donde k es tomado como el valor óptimo, obteniendo

$$x_1x_2 = e^{k^2} \qquad (24)$$

De la condición de restricción despejamos x_1 para tener:

$$x_1 = \frac{R - p_2x_2}{p_1} \qquad (25)$$

Reemplazando (25) en (24) se tiene:

$$\left(\frac{R - p_2 x_2}{p_1}\right) x_2 = e^{k^2} \Leftrightarrow \quad p_2 x_2^{\ 2} - R x_2 + p_1 e^{k^2} = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática para x_2:

$$x_2 = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4 p_1 p_2 e^{k^2}}}{2 p_2}$$

Se tiene que el valor de x_2 donde se obtiene el valor óptimo es: $x_2 = \dfrac{R}{2 p_2}$

Y el valor óptimo se encuentra haciendo el discriminante igual a cero (condición para la existencia de óptimo)

$$R^2 - 4 p_1 p_2 e^{k^2} = 0$$

O bien, despejando k:

$$k = \sqrt{\ln\left(\frac{R^2}{4 p_1 p_2}\right)}$$

Multiplicidad algebraica dos) luego el valor de $x_1 = \dfrac{R - p_2 x_2}{p_1}$, esto es,

$$x_1 = \frac{R - p_2\left(\dfrac{R}{2 p_2}\right)}{p_1} = \frac{R}{2 p_1}$$

En resumen:

El punto donde se obtiene el óptimo es. $\left(\dfrac{R}{2 p_1}, \dfrac{R}{2 p_2}\right)$ y el valor óptimo es

$$k = \frac{2R}{3\sqrt[3]{2 p_2^{\ 2} p_1}}$$

Exactamente el mismo resultado.

3.1.5. Ejemplo 5

Suponga que un consumidor desea maximizar la utilidad $U(x, y) = \sqrt{x} + y$ sujeto a la condición presupuestal $px + y \le M$ y $x \ge 0,\ y \ge 0.$ Es dado que $p > 0,\ M > 0.$

Solución.

Según el método, hacemos $U(x, y) = k$, esto es, $\sqrt{x} + y = k$, o bien, $y = M - px$, el cual resulta de despejar y de la condición.

Así que la ecuación a resolver es: $\sqrt{x}+M-px=k \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}=(k-M)+px$

Elevando al cuadrado a ambos miembros de la última ecuación

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left[(k-M)+px\right]^2 \Leftrightarrow x=(k-M)^2+2px(k-M)+p^2x^2$$

Reescribiendo la última ecuación:

$$p^2x^2+\left[2p(k-M)-1\right]x+(k-M)^2=0$$

Resolviendo para x,

$$x=\frac{1-2p(k-M)\pm\sqrt{\left[2p(k-M)-1\right]^2-4p^2(k-M)^2}}{2p^2}$$

Haciendo el discriminante igual a cero, se tiene

$$\begin{aligned}&\left[2p(k-M)-1\right]^2-4p^2(k-M)^2=0\\ &\Leftrightarrow 4p^2(k-M)^2-4p(k-M)+1-4p^2(k-M)^2=0\\ &\Rightarrow k=M+\frac{1}{4p}\end{aligned}$$

El cual se logra en

$$x=\frac{1-2p(k-M)}{2p^2}=\frac{1-2p\left(M+\frac{1}{4p}-M\right)}{2p^2}=\frac{1-\frac{1}{2}}{2p^2}=\frac{1}{4p^2}.$$

Luego el valor de la variable y es

$$y=M-px=M-p\left(\frac{1}{4p^2}\right)=M-\frac{1}{4p}.$$

Observar que $k\le M+\frac{1}{4p}$, de aquí que el valor de k es precisamente un valor máximo.

3.1.6. Ejemplo 6

Calcular la función de demanda de un consumidor cuya riqueza es $R\ge 0$, para el caso en que sus preferencias sean representables mediante la siguiente función de utilidad $U(x_1,x_2)=(x_1)^{1/3}(x_2)^{2/3}$.

Solución.

El problema al que se enfrenta el consumidor es:

$$\left.\begin{array}{rl} \max & U(x_1,x_2)=(x_1)^{1/3}(x_2)^{2/3} \\ \text{s.a} & p_1x_1+p_2x_2\leq R \\ & x_1\geq 0 \\ & x_2\geq 0 \end{array}\right\} \quad (P)$$

Hacemos $U(x_1,x_2)=k$, donde k es tomado como el valor óptimo. Tenemos

$$x_1{x_2}^2=k^3 \tag{26}$$

De la condición de restricción despejamos x_1 para tener:

$$x_1=\frac{R-p_2x_2}{p_1} \tag{27}$$

Reemplazando (27) en (26) en la condición de restricción, se tiene:

$$\left(\frac{R-p_2x_2}{p_1}\right){x_2}^2=k^3$$

o bien

$${x_2}^3-\frac{R}{p_2}{x_2}^2+\frac{p_1}{p_2}k^3=0$$

Como exigimos que las raíces sean reales e iguales, al menos dos de ellas, podemos escribir

$${x_2}^3-\frac{R}{p_2}{x_2}^2+\frac{p_1}{p_2}k^3=x^3-(\beta+2\alpha)x^2+(2\alpha\beta+\alpha^2)x-\alpha^2\beta$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema.

$$\beta+2\alpha=\frac{R}{p_2} \tag{28}$$

$$2\alpha\beta+\alpha^2=0 \tag{29}$$

$$-\alpha^2\beta=\frac{p_1}{p_2}k^3 \tag{30}$$

de (29) se tiene dos posibilidades:

$$\alpha=0, \quad ó \quad \alpha=-2\beta$$

Caso $\alpha=0$:

En (28) se obtiene $\beta=\dfrac{R}{p_2}$, y en (30) da el valor óptimo $k=0$ .esto indica que el extremo es el punto en el cual $x_2=\alpha=0$ y por tanto $\left(\dfrac{R}{p_1},0\right)$.

Caso $\alpha=-2\beta$:

En (28) se obtiene $\beta=-\dfrac{R}{3p_2}$, este valor en (30) produce

$$-\alpha^2\beta = \frac{p_1}{p_2}k^3 \quad \Rightarrow \quad -(-2\beta)^2\beta = \frac{p_1}{p_2}k^3 \quad \Rightarrow \quad k = -\sqrt[3]{\frac{4\beta^3 p_2}{p_1}}$$

Remplazando $\beta = -\dfrac{R}{3p_2}$ en la última ecuación obtenemos el valor óptimo:

$$k = -\sqrt[3]{\frac{4\beta^3 p_2}{p_1}} = -\sqrt[3]{\frac{4\left(-\dfrac{R}{3p_2}\right)^3 p_2}{p_1}} = \frac{2R}{3\sqrt[3]{2p_2{}^2 p_1}}$$

el cual ocurre en $x_2 = \alpha = -2\beta = \dfrac{2R}{3p_2}$, (ésta es la raíz escogida pues es de multiplicidad algebraica dos) luego el valor de $x_1 = \dfrac{R - p_2 x_2}{p_1}$, esto es,

$$x_1 = \frac{R - p_2\left(\dfrac{2R}{3p_2}\right)}{p_1} = \frac{R}{3p_1}$$

En resumen:

El punto donde se obtiene el óptimo es. $\left(\dfrac{R}{3p_1}, \dfrac{2R}{3p_2}\right)$ y el valor óptimo es

$$k = \frac{2R}{3\sqrt[3]{2p_2{}^2 p_1}}$$

Exactamente el mismo resultado que en cálculo.

Conclusiones

Se ha presentado un método novedoso para resolver problemas de optimización, los cuales aparecen en Ingeniería y Economía, sin el uso del cálculo diferencial, esto es, no es necesario usar la derivada para encontrar los puntos críticos. El método se puede aplicar a cualquier problema de optimización que usualmente aparecen en los textos de cálculo diferencial en una variable real.

El método puede ser enseñado tanto a nivel de colegio como primer semestre de universidad, dicho método requiere solo el conocimiento de álgebra elemental.

Bibliografía

Larson, Hostetler, Edwards (2008). Cálculo I. Octava edición. Mc Graw Hill.

Leithold, L. (1987). El Cálculo con Geometría Analítica. Ed. Harla. 5 Ed.

Sánchez-Cano, José A. (2012). Método alterno para la gráfica de funciones algebraicas. Revista UNION, 30, 41-59.
Sánchez-Cano, José A. (2013). Método alternativo para la gráfica de funciones algebraicas. Revista SUMA, 73,25-38.

Gustavo de J. Castañeda R.: **Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad Politécnica de Valencia (España), Profesor del Departamento de Ciencias Matemáticas de la Universidad EAFIT, en Medellín (Colombia). e-mail: gcasta@eafit.edu.co.**

Sánchez Cano, José Albeiro**: Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad Politécnica de Valencia (España), Profesor Investigador del Departamento de Ciencias Matemáticas de la Universidad EAFIT, en Medellín (Colombia). e-mail: josanche@eafit.edu.co**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 61-72

O que pensam professores a respeito de avaliação

André Luis Trevisan, Beatriz Haas Delamuta, Alessandra Maziero Lalin-Soato

Fecha de recepción: 2016-02-11
Fecha de aceptación: 2017-01-20

Resumen	En este artículo se busca caracterizar conceptos presentados por los profesores de matemáticas y ciencias en relación con la evaluación del aprendizaje de los estudiantes. Los datos para el análisis provienen de la aplicación de un cuestionario contestado por cinco profesores participantes de un proyecto de educación continua. Los resultados mostraron que, a excepción de uno de los profesores que parecían demostrar un concepto de calificación de la evaluación, los otros parecen identificar las funciones de evaluación más allá de la clasificación, mostrando entender la necesidad de adoptar su perspectiva formativa **Palabras clave:** Educación matemática; evaluación del Aprendizaje Escolar; concepciones de los professores.
Abstract	This article characterizes concepts of mathematics and science teachers, regarding the assessment of student learning. The data for analysis comes from a questionnaire answered by five participating teachers of a education project. The results showed that, except for one of those teachers who seemed to demonstrate a graded concept of assessment, the others seem to identify assessment functions besides the classification, showing understand the need to take their formative perspective. **Keywords:** Mathematics Education; assessment of school learning; conceptions of teachers.
Resumo	Este artigo tem por objetivo caracterizar concepções apresentadas por professores de Matemática e Ciências a respeito da avaliação da aprendizagem dos alunos. Os dados para análise provém da aplicação de um questionário respondido por cinco professores participantes de um projeto de formação continuada. Os resultados apontaram que, à exceção de um desses professores, que pareceu demonstrar uma concepção classificatória de avaliação, os demais parecem identificar funções da avaliação para além da classificação, mostrando compreender a necessidade de se tomar sua perspectiva formativa. **Palavras-chave:** Educação Matemática; avaliação da aprendizagem escolar; concepções de professores.

1. Introdução

A avaliação orienta os processos de ensino e de aprendizagem no contexto escolar, e tem sido objeto de discussão e investigação de diversos pesquisadores. Segundo Antunes (2012, p.10) “a tarefa do professor ao avaliar exige competência, discernimento, equilíbrio, além, é claro, de conhecimentos técnicos”.

Conforme aponta Barlow (2006, p.12), avaliar vem do latim *a+valere*, que significa atribuir valor e mérito ao objeto em estudo, sendo que a avaliação pode significar então “a ação de fazer aparecer o valor de um indivíduo ou objeto”. Sob um olhar desatento, poder-se-ia (equivocadamente) concluir que, no contexto escolar, avaliar significa apenas “medir” o conhecimento que o aluno (supostamente) adquiriu, o que reforçaria as práticas avaliativas constantemente observadas em salas de aula.

Porém, segundo ainda Barlow (2006, p.12, grifos do autor),

> convém assinalar, antes de tudo, que valor, *valoris* é quase desconhecido no latim clássico. Esse termo abstrato é derivado do verbo *valere*, que não significa valer, mas estar forte, em boa saúde, vigoroso […]. Na língua latina, como se vê, nossos valores não são coisas, e sim formas de ser: não se trata propriamente de conquistar este ou aquele valor, em uma perspectiva moralista ou mercantil, mas de se tornar cada vez mais válido, o que significa, como vimos, em boa saúde física e mental, eficaz, pleno de sentido.

Conclui apontando que,

> portanto, nessa perspectiva, avaliar é demarcar o grau de êxito e, ao mesmo tempo, as possibilidades ainda abertas de “ser melhor”, de uma realização. E igualmente, dar vazão a um sentido, revelar em uma conduta a parcela de inteligibilidade já adquirida e a que falta adquirir (BARLOW, 2006, p. 12).

O que muitas vezes se observa nas práticas de salas de aula é uma avaliação que, numa melhor hipótese, revela a “parcela de inteligibilidade já adquirida”, menosprezando, ou mesmo ignorando, aquela que se “falta adquirir”, as “possibilidades ainda abertas de ‘ser melhor’”.

Entendemos avaliação como um processo que permite aos professores tanto obter informações a respeito do conhecimento já elaborado pelos estudantes, quanto revelar o que precisa “ainda ser feito”, inclusive oferecendo indícios se sua proposta de trabalho, as metodologias de ensino que adota e as ações em sala de aula que estão oportunizando aos estudantes a elaboração desse conhecimento. Além disso, a avaliação não deve ser vista como um processo que envolve apenas os professores, mas diversos outros elementos, como o próprio conteúdo da disciplina, o material, o apoio e trabalho pedagógico e, principalmente, os estudantes. Para esses últimos (assim como para os professores), a avaliação deveria ser vista como um processo que ocorre a todo o momento, e que oferece elementos que contribuem para a (re)elaboração constante de conhecimentos, e não apenas como um jogo de “tudo ou nada”, no qual se busca a nota (o valor, no sentido atribuído usualmente nas práticas escolares) como único fim. Os erros precisam tornar-se desencadeadores de discussões que oportunizem aos estudantes compreendê-los para que, assim, possam ultrapassá-los.

Para Hadji (2001) avaliar implica estabelecer uma comparação, que reside na constituição daquilo que se espera (um referente, um ideal) em relação a qual se compara aquilo que de fato existe, que se constata na realidade (o referido), e no estabelecimento de critérios que ao mesmo tempo indicam as expectativas de quem avalia e as finalidades que se atribui a essa ação.

Melchior (1994) aponta que a avaliação desempenha um papel fundamental nas práticas educativas, e deve ser pensada como uma ação que integra tanto professores quanto estudantes:

> para o aluno é importante conhecer os resultados de seu empenho e esforço, não só pela satisfação da aprendizagem, mas especialmente, pelo significado que tem o conhecimento de suas capacidades para futuras aprendizagens [...] para o professor os resultados dos seus alunos poderão contribuir para uma análise reflexiva, sentido de avaliar a eficácia de seu desempenho. A partir desses resultados, o professor tem a possibilidade de melhorar sua compreensão das formas de aprendizagem dos alunos e do processo de ensino e aprendizagem (MELCHIOR, 1994, p. 15).

Nessa mesma direção, Freitas et. al. (2012, p.31) enfatizam a ideia de que “a avaliação é um processo que necessita ser assumido pelo professor e pelo aluno conjuntamente. Nesse sentido, a avaliação é um instrumento para gerar mais desenvolvimento”. Despresbiteris (1999) aponta a necessidade de se analisar os focos da avaliação, os objetivos, as funções, quem está solicitando a avaliação, que metodologia será utilizada e para quem deverão ser fornecidos os resultados.

Segundo Buriasco (2000, p. 157), as práticas observadas nas aulas de Matemática desviam a avaliação de sua dimensão diagnóstica (avaliação formativa) para uma dimensão meramente seletiva: “a avaliação se desvia de sua função diagnóstica e volta-se, quase que exclusivamente, para a função classificatória, que é incentivada no modo de vida de uma sociedade que valoriza a competição”.

Chueiri (2008, p. 61-62) aponta que “embora a prática pedagógica permaneça delimitada pelo modelo positivista, observamos o movimento que denuncia sua insuficiência para responder às demandas cotidianas”. Segundo a autora, é imprescindível romper com o paradigma epistemológico que circunscreve o processo avaliativo, pautado numa lógica de avaliação como medida, e implementar práticas pedagógicas com novos significados.

As concepções sobre avaliação parecem desempenhar um papel determinante na forma como o professor percepciona e promove a avaliação. Concordamos com Raposo e Freire (2008, p. 100) quando apontam que, apesar da avaliação ser “uma área de investigação que coloca dificuldades, […] o estudo das concepções é essencial para um maior entendimento da avaliação que é implementada pelos professores e dos constrangimentos que estes sentem no processo avaliativo”.

Este artigo procura caracterizar concepções de avaliação apresentadas por um grupo de cinco professores de Matemática e Ciências, participantes de um projeto de formação continuada, com base em informações obtidas com a aplicação de um questionário no início dos encontros de formação. Em especial, estamos interessados em caracterizar o modo como esses professores concebem a avaliação e o modo como essas concepções se refletem em práticas avaliativas que dizem implementar. Os dados apresentados e analisados não intentam discutir o projeto de formação do qual estes professores foram sujeitos, mas apresentar uma reflexão dos mesmos, tomando por base o quadro teórico descrito a seguir.

2. Procedimentos metodológicos

Esta é uma investigação qualitativa de cunho interpretativo (BOGDAN, BIKLEN, 1994). Pela dimensão da amostra e pelas opções metodológicas adotadas, este estudo não permite uma generalização dos resultados, mas uma reflexão dos mesmos, tomando por base quadro teórico apresentado.

Os professores envolvidos

Participaram do estudo cinco professores de Matemática e Ciências, sendo três homens e duas mulheres, com idade entre 32 e 56 anos. Esses professores apresentam percursos profissionais e pessoais diversificados, com uma experiência docente que varia entre os sete e os vinte anos de ensino, um deles graduado em Ciências com Habilitação em Matemática e os demais licenciados em Matemática, todos com formação pelo menos em nível de pós-graduação.

Todos atuam ministrando aulas de Matemática e/ou Ciências em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, em escolas públicas de um mesmo município localizado na região metropolitana de Londrina/PR/Brasil. Uma das professoras atua também nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

No ano de 2013, esses profissionais participaram de dez encontros de um projeto de formação continuada[1] que objetivou criar nas escolas envolvidas espaços de discussão e reflexão que propiciassem aos professores de Matemática e Ciências um repensar de suas práticas avaliativas e, consequente, de suas práticas pedagógicas.

Coleta de dados

Ao fim do primeiro encontro do projeto, os professores participantes foram convidados a preencher em casa um formulário que objetivou traçar um perfil parcial da equipe, bem como responder a um questionário contendo 10 questões (Apêndice). O questionário buscou caracterizar o modo como esses professores concebem a avaliação e o modo como essas concepções se refletem em práticas avaliativas que dizem implementar. Antes de ser aplicado, foi validado por uma equipe de cinco pesquisadores (incluindo o primeiro e terceiros autores), participantes de um projeto de pesquisa da qual este texto é recorte. Dos seis participantes, cinco deles (objeto dessa investigação) retornaram as respostas, que poderiam ser manuscritas ou digitadas e enviadas por e-mail.

A utilização dos dados para fins de pesquisa foi autorizada pelos mesmos por meio da assinatura de um termo de consentimento livre e esclarecido. Foi garantida

[1] Projeto intitulado “Oficinas de avaliação: uma proposta para repensar a prática avaliativa na Educação Básica”. É desenvolvido em paralelo com o projeto de pesquisa “Avaliação da aprendizagem em ensino de Ciências da Natureza e Matemática”, aprovado em Edital da Fundação Araucária (Conv. 386/2012), da qual a segunda autora foi bolsista de iniciação científica entre os anos de 2013 e 2014. Ambos são coordenados pelo primeiro autor deste artigo, contando com a colaboração da terceira autora.

a confidencialidade do estudo pela omissão dos seus nomes e utilização das letras de A a E para referências ao longo do texto.

3. Análise e discussão dos resultados

A realização de leituras sucessivas nas respostas fornecidas pelos professores – tanto das respostas fornecidas para uma mesma questão, quanto das respostas fornecidas por um mesmo professor, possibilitaram-nos agrupar trechos que apresentavam alguma similaridade, e assim organizar categorias de análise representativas do conjunto de ideias observadas. As categorias foram organizadas em dois temas: Conceito/concepção de avaliação e Práticas Avaliativas. A primeira diz respeito ao modo como esses professores concebem a avaliação e a segunda ao modo como essas concepções se refletem em práticas avaliativas que eles dizem implementar em suas aulas.

Na sequência são apresentados os resultados da análise, tomando por base o quadro teórico, fundamentados na interpretação efetuada das respostas dos professores. Trechos em itálico, desse ponto do texto em diante, indicam transcrições das respostas dos professores entrevistados.

3.1. Conceito/concepção de avaliação

A análise dos questionários apontou que os professores refletem distintas concepções a respeito de avaliação. A professora D, por exemplo, afirma que a avaliação é uma forma de *medir o que o aluno conseguiu apropriar do conteúdo e essa avaliação não precisa ser somente através de provas formais*. A avaliação da aprendizagem parece estar associada, para a professora D, a uma medida, mostrando valorizar conhecimentos das quais o estudante tenha *se apropriado durante as aulas*. Na direção do que aponta Hadji (2001, p.20), “a ideia de que a avaliação é uma medida dos desempenhos dos alunos está solidamente enraizada na mente dos professores e, frequentemente, na dos alunos”.

Em seu discurso, essa professora valoriza os produtos da aprendizagem e utiliza a avaliação com uma função predominantemente classificatória. O aluno é apontado como único condicionante do insucesso, uma vez que, para ela, um mau rendimento pode ser *por falta de interesse, de estudo, déficits de atenção, discalculia, baixa autoestima, o desinteresse pela matemática, a falta de pré-requisitos e preguiça por parte de alguns alunos*. A afinidade com a disciplina, por outro lado, parece ser o fator atrelado ao bom rendimento do aluno, que, para a professora, deve-se *à facilidade para resolução de exercícios, o gostar da matéria, ser estudioso e interessado*. Fica clara em suas respostas uma avaliação tomada numa forma tradicional, centrada no professor e estando os alunos como meros coadjuvantes do processo, sendo os únicos responsáveis pelo seu sucesso ou fracasso.

A avaliação parece estar associada, para o professor C, à quantificação da aprendizagem dos alunos. Quando questionado a respeito dos fatores relacionados a um mau rendimento dos estudantes, aponta *o desinteresse pelo conteúdo, falta de comprometimento com os estudos, não realizar tarefa, não prestar atenção às aulas*, enfatizando assim o aluno como condicionante do fracasso. Entretanto, diferentemente da professora D, ele parece reconhecer seu o papel nesse fracasso, apontando que a metodologia adotada também pode contribuir para o insucesso na avaliação, e que, caso a qualidade de aprendizado não seja satisfatória para a grande maioria dos alunos, é por que *há algo de errado* com ela. Ao apontar que a avaliação possibilita ao professor refletir sobre sua prática pedagógica, esse professor parece tê-la tomado para além de uma medida, aproximando-a de seu caráter formativo. Esse professor diz que, infelizmente, *a avaliação hoje é utilizada apenas para quantificar o aprendizado do aluno e a reflexão muitas vezes acaba não acontecendo*. Embora discordemos que tal característica esteja presente apenas *hoje* (como se no passado tivéssemos experiências com avaliação para além de sua função classificatória), reconhecemos em sua fala seu descontentamento com a forma como a avaliação é tomada no contexto escolar, e certo imobilismo quanto às possibilidades de mudança.

Melchior (1994) aponta o papel fundamental que a avaliação deve ter para o aluno: possibilitar uma análise de seu empenho, esforço e se autoavaliar para perceber suas falhas e por meio dessa reflexão aprender a se autoconhecer. Destaca também que o professor não tem apenas a função de elaborar a avaliação e sim de conhecer o nível de cada aluno, para encontrar outras afirmativas, com o fim de auxiliar todos os alunos em seus desenvolvimentos.

O entendimento do professor enquanto sujeito do processo de avaliação aparece nas respostas dos professores A, B e E. Para o professor B, *a avaliação é um processo mediado pelo professor e que serve de parâmetro para nortear decisões diante do trabalho pedagógico*, e para o professor E ela *possibilita diagnosticar o desenvolvimento dos alunos e dos professores frente à aprendizagem*. Já para a professora A, a avaliação possibilita verificar se *sua comunicação com os estudantes está satisfatória e também para redirecionar ou manter a direção do trabalho*. Para esses professores, a avaliação parece estar atrelada à orientação e regulação dos processos de ensino e de aprendizagem, com ênfase em sua vertente formativa. Essa perspectiva aproxima-se da ideia de avaliação como norteadora de decisões diante do trabalho pedagógico, como apontado por Sant'Anna (2013).

Depresbiteris (1999) aponta que a avaliação alimenta o processo oferecendo indícios ao professor e ao aluno sobre o que foi ensinado e aprendido, o que parece ser reconhecido pelos professores A, B, C e E. Nessa mesma direção, Sant'Anna (2013, p.24), afirma que "a avaliação tem como pressuposto oferecer ao professor oportunidade de verificar, continuamente, se as atividades, métodos, procedimentos, recursos, e técnicas que ele utiliza estão possibilitando ao aluno alcance dos objetivos propostos", ou seja, a avaliação possibilita ao professor analisar seus métodos de ensino e os resultados obtidos.

3.2. Práticas avaliativas

Parece haver uma diversificação de recursos e metodologias adotadas por alguns dos professores em suas aulas: *recursos de informática, jogos, desafios e história da matemática* são apontados pelo professor E; *situações abertas, TV pendrive, Geogebra e tarefas de investigação matemática* foram apontados pelos professores A, B e C. Apesar desses indícios de diversificação de metodologias utilizadas durante as aulas, a prova escrita, individual e sem consulta, com questões parecidas ou idênticas às resolvidas em sala de aula, aparece como o instrumento privilegiado para avaliação nas aulas de Matemática. Um estudo envolvendo provas escritas fornecidas por alguns desses professores (e de outros participantes de outras edições do projeto) apontou a prevalência de questões de reprodução (TREVISAN; AMARAL, 2016). Além disso, o trabalho em equipes e a observação dos alunos durante as aulas foram apontadas por alguns dos professores (estudo realizado por Mendes, Trevisan e Souza (2016)), embora, pelas respostas fornecidas, essas estratégias parecem ter um peso pouco significativo quando se trata da atribuição de notas.

O professor B aponta que, na elaboração das provas, costuma colocar *questões mais simples, com resoluções mais curtas*, acrescentando que, para ele, *questões complexas e desafiadoras devem ser trabalhadas em sala*. Já o professor C menciona escolher questões parecidas com aquelas que resolve em sala e também com aquelas propostas nas listas de exercícios.

No que diz respeito à atribuição de notas, o professor B diz que contempla o uso de uma prova escrita (correspondendo a 50% da nota), uso de trabalhos escritos (feitos em sala ou em casa, com peso de 30%) e os demais 20% atribuídos em função das *atitudes e ações* em sala de aula. Em especial, no que tange a esse último aspecto, processo de avaliação parece ser fortemente dependente do significado atribuído pelo professor às atitudes e ações dos alunos, e os critérios são baseados na sua própria interpretação. Tal fato foi constatado em estudo similar a este, realizado por Raposo e Freire (2008, p.115), na qual os autores constataram que, “para os docentes, a avaliação aplicada nas escolas é pouco objectiva, com a aplicação de critérios de avaliação muito gerais e parece estar demasiado dependente da interpretação de cada professor”.

Acerca da correção, pontuação e *feedback* das questões da prova escrita, os professores A, B, C e E apontam considerar uma pontuação parcial na correção das questões da prova, e não apenas o certo e o errado, aproveitando os resultados para buscar identificar dificuldades dos alunos. Esse último aspecto é explicitado pela professora A, quando aponta que procura *entender as estratégias utilizadas e também a orientação de situações equivocadas*, e que sempre pede aos alunos que justifiquem as respostas, para que assim ela possa *entender melhor sua resolução*. Aponta também buscar implementar em suas aulas, como *feedback* da avaliação, uma espécie de *correção dialogada com a classe em formato circular*.

Segundo o professor C, a correção é feita buscando fazer inferências acerca do pensamento do aluno e não buscando somente verificar se ele acertou a resposta final, e, caso a questão esteja parcialmente correta, atribuindo uma nota parcial. Ele reconhece a importância do *feedback* no processo de avaliação, apontando que é favorável a uma *conversa com o aluno sobre o que aconteceu em cada questão, tentando identificar os caminhos tomados para encontrar a resposta.* Alerta, entretanto, o elevado número de alunos e turmas como fator que inviabiliza tal procedimento. O que costuma fazer é, ao devolver as provas, fazer uma discussão das questões, tentando sanar as dúvidas que ainda persistem.

O professor B menciona sempre destacar para os alunos que em matemática o mais importante é buscar um caminho, uma vez que *podemos ter vários caminhos diferentes para se chegar à solução de um mesmo problema*. Já o professor E parece reconhecer a importância do *feedback* na prática avaliativa, pois diz tentar realizar uma devolutiva individual dos resultados das provas, característica de uma concepção formativa de avaliação. Entretanto, diz apresentar uma análise percentual dos resultados, comparando o desempenho dos alunos, o que aproximaria sua prática da vertente classificatória de avaliação.

Conforme aponta Melchior (1994), devem-se realizar discussões das provas com os alunos, para que esses vejam seus erros e assim se autoavaliem. A autora afirma também que o professor deve fazer uso dos resultados das atividades do aluno para obter indícios de seu processo de elaboração do conhecimento, e assim promover as intervenções necessárias.

Além do próprio professor como condicionante das práticas avaliativas, os alunos e o contexto de ensino parecem ser dois fatores que recorrentemente aparecem nas respostas do questionário. No que se refere aos alunos, destacamos como suas caraterísticas determinam tanto as estratégias de ensino quanto de avaliação. Assim, para o professor D, as provas são feitas *de acordo com o nível da turma*, e para a professora A a escolha das tarefas que utiliza na avaliação *depende da turma e dos seus questionamentos*. Essa última aponta também que, numa prova escrita, distribui as notas apenas após a análise das resoluções de todos os estudantes, e o professor B que, *quando acontece de existir questões que grande parte dos alunos não conseguiu resolver, essas são anuladas e retomadas em aula*.

Essa atitude do professor B vai ao encontro do que Sant'Anna (2013, p.60) propõe:

> se um número x de questões a classe toda ou uma percentagem significativa de alunos não corresponde aos resultados desejados, esta habilidade, atitude ou informação deveria ser desconsiderada e retomada no novo planejamento, pois ficou constatado que a aprendizagem não ocorreu.

O contexto de ensino aparece como fator condicionante das práticas avaliativas, aparecendo implícita ou explicitamente nas respostas apresentadas por todos os professores nas questões respondidas. O elevado número de alunos, por exemplo, é mencionado pelo professor C, quando aponta a inviabilidade de realizar um *feedback* individualizado no contexto de avaliação em salas de aula regulares (*não dou conta de fazer o feedback de cada questão*, respondeu ele).

É de sua importância o planejamento das ações de avaliação, como lembra Depresbiteris (1999, p.42):

> ao fazer uma avaliação, um avaliador sempre deverá ter em mente algumas questões como, por exemplo: qual será o foco ou quais serão os focos da avaliação; quais os objetivos e as funções da avaliação; quem está solicitando a avaliação; que metodologia de avaliação será utilizada; para quem deverão ser fornecidos os resultados.

Nessa mesma direção, Sant'Anna (2013, p.67) aponta que

> a elaboração de itens é facilitada quando obedece a um plano. O plano de prova pode ser apresentado por uma tabela de especificação. A listagem de conteúdos específicos é feita através da amostra de conteúdos estudados e uma distribuição equilibrada de questões. Durante a elaboração dos itens o professor necessita tomar decisões (exemplos das decisões: como aplicar, formar, fazer roteiro, objetivos, instruções...).

Entretanto, alguns fatores alheios aos processos de ensino e de aprendizagem, que ocorrem ao longo do ano letivo aparecem na fala da professora A como situações que atrapalham seu planejamento de avaliação: *reuniões marcadas em cima da hora, teatros, palestras, projetos*, são alguns deles. Muitas vezes tais fatores acabam comprometendo o planejamento do professor, e consequentemente as intenções que ele tinha originalmente acabam se perdendo.

Ao citar a necessidade de cumprimento do conteúdo programático, o professor C explicita o papel do programa como fator interveniente nas práticas avaliativas dos professores. Ao mesmo tempo em que condiciona as práticas avaliativas, o currículo "cria-se" a partir do que os professores exigem em seus exames ou avaliações, como exigem e como o valorizam (SACRISTÁN, 1998; TREVISAN; MENDES, 2015). Assim, esse mesmo professor diz escolher para as aulas questões parecidas com as que serão cobradas na avaliação.

> Os trabalhos acadêmicos que estes [os alunos] realizam, os exames que o professor/a impõe, nos quais se valorizam certos conhecimentos adquiridos e reproduzidos de forma singular, ou os que se valorizam em provas externas, serão um indicador muito decisivo para saber o que se sugere e obriga a aprender e como fazê-lo (SACRISTÁN, 1998, p. 139).

A organização linear do currículo está presente nas respostas de alguns professores, e aparece também como fator condicionante das práticas avaliativas. Nessa concepção, "a ideia de 'pré-requisito' aparece fortemente, reforçando mitos que foram criados a respeito do conhecimento, ligando-os à ideia de acumulação e linearidade dos conteúdos predeterminados em sequências rígidas" (SILVA; PIRES, 2013, p. 250). O professor E aponta que, ao selecionar questões para as aulas e para avaliação, utiliza *exercícios de fixação e em outro momento resolução de problemas*, como se os primeiros fossem pré-requisitos para os demais. Ao mencionar a exploração do conteúdo equações do primeiro grau, a professora A menciona escolher, para compor seu instrumento de avaliação, *situações onde o trabalho aumentava gradativamente*, deixando implícita a ideia que as questões precisam ser organizadas começando das mais fáceis para as mais difíceis, segundo certa linearidade.

A ideia de recuperação paralela como uma prova aplicada ao final de uma etapa de trabalho, em geral com o intuito de "facilitar" a obtenção de notas, bastante presente no ideário escolar, aparece na fala do professor B, quando este menciona que, *para toda uma avaliação geral acontece uma retomada do conteúdo e aplicação de uma chamada recuperação paralela (geralmente mais fáceis)*.

Em uma espécie de "desabafo", esse professor aponta o insucesso nas avaliações como um problema de extrema complexidade, para além da escola, o que inclui instâncias como o Ministério da Educação (responsável pelas políticas públicas que orientam o trabalho na escola), os legisladores (que, segundo ele, não vivem no meio escolar e não conseguem enxergar os problemas sociais que grande parte dos alunos importam para o chão da escola), as políticas de aprovações artificiais, a omissão dos pais. Menciona os mecanismos avaliativos que *impõe a obrigatoriedade de ser dar notas para minimizar índices pífios (mas reais) e apresentar resultados onde se fingi que são efetivos*. Embora não concordemos com os termos nos quais esse professor relata tais fatos, destacamos que as políticas públicas para Educação, a questão social e a leitura equivocada que muitos professores e equipes pedagógicas fazem do conceito de progressão continuada (tomada como sinônimo de "aprovação automática") são fatores presentes no contexto escolar e determinantes das práticas avaliativas presentes em sala de aula.

4. Considerações finais

À exceção da professora D, que pareceu demonstrar uma concepção classificatória de avaliação, os demais professores (A, B, C e E) mostram identificar funções da avaliação para além da classificação, mostrando compreender a necessidade de se tomar sua perspectiva formativa. Todos esses últimos adotam um discurso que se aproxima das recomendações presentes nos documentos oficiais e na literatura, que preconiza as funções reguladora e orientadora da avaliação, buscando aproveitar resultados de provas como meio para identificar dificuldades dos alunos e repensar suas práticas.

Assim,

> o ato de classificar e quantificar as aprendizagens pode ser dirigido por uma intencionalidade formativa, precisando, para isso, que seja ultrapassada a mera constatação do que foi aprendido. Implica, pois, que os resultados obtidos sejam impulsionadores de processos geradores de melhoria das aprendizagens (MARINHO, FERNANDES, LEITE, 2014, p. 160).

As práticas avaliativas desses professores mostram "ajustar-se" às condições de trabalho às quais esses professores são submetidos. Parecem oscilar entre a necessidade de organizar uma avaliação que contribua para a aprendizagem e uma avaliação que "meça" essas aprendizagens. Essa dicotomia presente em suas ações cotidianas parece desestabilizar e muitas vezes desestimular sua atuação.

Além do próprio professor e alunos, o contexto que circunscreve a sala de aula mostra-se como um fator decisivo nas práticas avaliativas dos professores. O número de alunos por turma, os imprevistos da rotina escolar, a preocupação com o cumprimento do programa, as cobranças que sofrem por agentes externos são alguns dos fatores que condicionam o que, quando e como avaliar.

A utilização da prova escrita, individual e sem consulta, como instrumento privilegiado de avaliação é presente nas falas de todos os professores. Embora reconheçam a importância da diversificação dos instrumentos de avaliação, atribuem ao contexto educacional a dificuldade/impossibilidade de utilizá-los.

Além disso, a elaboração dessa prova parece ser um trabalho individual e fortemente influenciado pelas interpretações que o professor faz do conceito de avaliação. Conforme apontam Raposo e Freire (2008, p. 115), a "promoção do diálogo e da troca de ideias são dois aspectos que, para os professores, poderiam contribuir para a clarificação de dúvidas e a construção de saberes em avaliação". Para esses autores, a aplicação destes procedimentos implicaria uma mudança na forma de trabalho dos professores, identificada pelos participantes como individualista e isolada.

O projeto de extensão do qual este artigo é fruto, iniciado em 2013 e ainda em andamento (SOUZA; MONDEK; TREVISAN, 2016) vai ao encontro desta perspectiva, uma vez que tem oportunizado aos envolvidos a criação, nas escolas, de espaços de discussão e reflexão e de desenvolvimento profissional (SOUZA; TREVISAN, 2015; TREVISAN; SOUZA; MONDEK, 2016), e também propiciado aos professores envolvidos repensar suas práticas avaliativas e, consequentemente, suas práticas pedagógicas. Entendemos que a compreensão das concepções que orientam professores em suas práticas avaliativas é fundamental para o planejamento de ações que possibilitem a construção de uma cultura de avaliação que contribua para a aprendizagem.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio financeiro recebido da Fundação Araucária (Convênio 386/2012), bem como a disponibilidade dos professores participantes.

Referências

Antunes, C. (2012). *A avaliação da aprendizagem escolar* (9a ed). Petrópolis: Vozes.
Barlow, M. (2006). *Avaliação escolar*: mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed.
Bogdan, R. C.; Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Portugal: Ed. Porto.
Buriasco, R. L. C. de. (2000). Algumas considerações sobre avaliação educacional. *Estudos em Avaliação Educacional*, 22, 155-177.
Chueiri, M.S. F. (2008). Concepções sobre a Avaliação Escolar. *Estudos em Avaliação Educacional*, 19 (39), 49-64.
Depresbiteris, L. (1999). *Avaliação educacional em três atos* (4a ed). São Paulo: Editora Senac.
Freitas, L. C. et al. (2012) *Avaliação Educacional*: caminhando pela contramão. (4a ed). Petrópolis: Vozes.
Hadji, C. (2001). *Avaliação desmistificada*. Porto Alegre: Artmed.
Marinho, P.; Fernandes, P.; Leite, C. (2014). A avaliação da aprendizagem: da pluralidade de enunciações à dualidade de concepções. *Acta Scientiarum*, 36 (1) 151-162.
Melchior, M. C. (1994). *Avaliação pedagógica*: função e necessidade. Porto Alegre: Mercado aberto.
Mendes, M. T.; Trevisan, A. L.; Souza, T. da S. (2016). Observação do trabalho em grupo como instrumento de avaliação da aprendizagem em aulas de Matemática. *Perspectivas da Educação Matemática*, 9 (20), 581-593.
Raphael, H. S. (1998). *Avaliação escolar*: em busca de sua compreensão. São Paulo: Brasiliense.
Raposo, P.; Freire, A. (2008). Avaliação das aprendizagens: perspectivas de professores de Física e Química. *Revista da Educação*, 16 (1), 97-129.
Sacristán, J.G. (1998). O currículo: os conteúdos do ensino ou uma análise prática? In: Sacristán. J.G; Gómez, A.L.P. *Compreender e transformar o ensino* (4a ed). São Paulo: ArtMed.
Sant'Anna, I. M. (2013). *Por que avaliar?*: critérios e instrumentos (16a ed). Petrópolis: Vozes.
Silva, M. A.; Pires, C. M. C. (2013). A riqueza nos currículos de Matemática do Ensino Médio: em busca de critérios para seleção e organização de conteúdos. Zetetiké, 21 (39), 19-52.

Souza, T. da S.; Trevisan, A. L. (2015). Desenvolvimento profissional de um grupo de professores de Matemática. *Anais do Encontro Paranaense de Educação Matemática*, Ponta Grossa, PR, Brasil, 13.

Souza, T. da S.; Mondek, S. A.; Trevisan, A. L. (2015). Desenvolvimento profissional de professores de Matemática por meio da reflexão compartilhada: retratos de uma experiência. *Anais do Simpósio Nacional de Ensino e aprendizagem*. Londrina, Paraná, 3.

Trevisan, A. L.; Mendes, M. T. (2015). Aprendizagens de um grupo de professores que discutem avaliação da aprendizagem escolar. *Anais do Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática*, Campinas, SP, 5.

Trevisan, A. L.; Amaral, R. G. (2016). A Taxionomia de Bloom revisada aplicada à avaliação: um estudo de provas escritas de Matemática. *Ciência & Educação*, 22 (2), 451-464.

Trevisan, A. L.; Souza, T. S.; Mondek, S. A. (2016). Práticas avaliativas de professores de Matemática: uma análise na perspectiva do desenvolvimento profissional docente. *Anais do Congresso Nacional de Formação de Professores (CNFP),* Águas de Lindóia, SP, 4.

Apêndice

Questionário aplicado para os professores

1. Que tipo de metodologia e quais recursos didáticos utiliza em suas aulas?
2. Que critérios costuma utilizar ao escolher os exercícios que propõe durante a aula?
3. Para você o que é e para que serve a avaliação?
4. Como costuma ser feita a avaliação dos estudantes (que instrumentos utiliza)?
5. Conte-nos um pouco a respeito das provas escritas utilizadas em suas disciplinas (periodicidade da aplicação, como é elaborada, como seleciona as questões, como distribui os pontos).
6. Como é feita a correção das provas e atribuições de notas?
7. Como costuma divulgar os resultados da avaliação e que uso costuma fazer deles?
8. Para você, num contexto de avaliação, o que significa a expressão “feedback”? Como ele pode ser “implementado”?
9. A que fatores você atribui um mau rendimento dos estudantes na avaliação? E um bom rendimento?

André Luis Trevisan. Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Docente do Departamento de Matemática e do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)/ câmpus Londrina. E-mail: andrelt@utfpr.edu.br.

Beatriz Haas Delamuta. Licenciada em Química. Mestranda em Ensino na Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP). E-mail: beatrizhaas@hotmail.com.

Alessandra Maziero Lalin Soato. Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Técnica em assuntos educacionais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)/ câmpus Apucarana. E-mail: alessandrasoato@utfpr.edu.br.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 73-83

Una experiencia en la formación de profesores sobre concepciones desde una perspectiva etnomatemática

Veronica Albanese, Francisco Javier Perales

Fecha de recepción: 2016-02-15
Fecha de aceptación: 2016-12-28

Resumen	El Programa de Etnomatemática aborda las matemáticas desde una perspectiva epistemológica muy distinta de la tradición positivista. En este documento nos proponemos describir un taller desarrollado bajo esta perspectiva etnomatemática para profesores en formación. El taller se diseña partiendo de la definición de unas dimensiones (práctica, social y cultural) que moldean la visión de las matemáticas desde la Etnomatemática con el objetivo de hacer reflexionar a los participantes sobre sus concepciones respecto a la naturaleza del conocimiento matemático. **Palabras clave**: etnomatemática, formación de profesores, concepciones, perspectiva sociocultural
Abstract	The Ethnomathematical program approaches mathematics from a very different epistemological perspective than the positivist tradition. In this paper we propose to describe a workshop developed under this Ethnomathematical perspective for teacher education. The design of the workshop is based on the definition of some dimensions (practical, social and cultural) that shape the vision of mathematics from Ethnomathematics and aims to make the participants reflect about their conceptions on the nature of the mathematical knowledge. **Keywords**: ethnomathematics, teacher education, belief, sociocultural perspective
Resumo	O Programa de Etnomatemática aborda a matemática a partir de uma perspectiva epistemológica muito diferente da tradição positivista. Neste artigo nos propomos a descrever uma oficina para professores em formação desenvolvida nessa perspectiva etnomatemática. A oficina desenvolve-se partindo da definição de uma das dimensões (prática, social e cultural) que moldam a visão da matemática na Etnomatemática com o objetivo de levar os participantes a refletir sobre suas concepções a respeito da natureza do conhecimento matemático. **Palavras-chave**: etnomatemática, formação de professores, concepções, perspectiva sociocultural.

1. Planteamiento

La Etnomatemática nace a raíz de los estudios antropológicos sobre las diferentes formas de hacer matemáticas de algunos pueblos indígenas y, en general, se propone investigar las prácticas de los grupos culturales (D'Ambrosio, 1985; Barton, 1996). Posteriormente, evoluciona al tratar de confrontar los diferentes quehaceres matemáticos, ampliando su concepción del conocimiento matemático para incluir las maneras en que se genera, organiza y comparte el mismo dentro de los diversos grupos culturales. Esta nueva perspectiva se alimenta de las contribuciones de diversas disciplinas que comparten una postura relativista del conocimiento (Oliveras y Albanese, 2012).

1.1. Antecedentes

Por las razones mencionadas, algunos investigadores han empleado la perspectiva etnomatemática en cursos, seminarios y talleres con el fin de concienciar a los docentes, principalmente en formación, sobre el hecho de que las matemáticas son un producto social y cultural, y de esta forma hacer reflexionar los participantes sobre sus concepciones. Indicamos algunos antecedentes como ejemplo:

En España, en la tesis doctoral de Oliveras (1996) se presentan las matemáticas implícitas en varias artesanías andaluzas para trabajar con futuros profesores la toma de conciencia sobre sus creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas.

En Mozambique, Gerdes (1998) se propone concienciar sobre las bases sociales y culturales del conocimiento matemático fomentando en la formación docente el reconocimiento de las raíces de las matemáticas en las distintas culturas.

En Costa Rica, Gavarrete (2012) promueve una visión relativista de las matemáticas en la formación de maestros indígenas, incluyendo actividades cotidianas de esos pueblos originarios como herramienta de educación.

1.2. Objetivo y relevancia

En nuestro caso también decidimos desarrollar un taller para profesores en formación -y algunos en activo- de la Universidad de Buenos Aires (Argentina), con el objetivo de generar reflexión sobre sus concepciones acerca de la naturaleza de las matemáticas.

La identificación previa de unas dimensiones, que caracterizan la visión de las matemáticas desde la perspectiva etnomatemática, nos permitió realizar ciertas observaciones sobre las aportaciones que el taller ofrecía para la reflexión acerca de las concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas de los participantes.

La elección de realizar el taller en Argentina se debe a las siguientes razones: 1) el taller se propone la (re)construcción de una modelización que recurre al concepto matemático de grafo para elaborar una artesanía argentina, y 2) las directrices legislativas vigentes en el momento del desarrollo del taller promueven principios que la Etnomatemática comparte. Algunas consideraciones a propósito de la proximidad de la legislación a los principios de la Etnomatemática están ampliamente recogidas en otra publicación (Albanese, Santillán y Oliveras, 2014). En particular destacamos: la integración del saber universal con los saberes rurales locales; la construcción del conocimiento de los estudiantes recorriendo el proceso de construcción del mismo en el ámbito científico; y el aprovechamiento de recursos y situaciones del entorno para introducir los conceptos escolares.

2. Dimensiones de la Etnomatemática e implicaciones educativas

Tal y como acabamos de mencionar, nuestro propósito inicial fue identificar los aspectos de la visión sobre la naturaleza de las matemáticas que se promueven dentro del programa de Etnomatemática y así diseñar un taller basado en estos aspectos. Para ello definimos y describimos unas dimensiones de la Etnomatemática que forjan una visión constructivista y relativista del conocimiento matemático.

Entonces revisamos los aportes de aquellos investigadores etnomatemáticos que expresaron sus opiniones, desde esta perspectiva de investigación, sobre *qué se considera por matemáticas*, poniendo de manifiesto visiones con matices distintos que nosotros sistematizamos definiendo las dimensiones que aquí proponemos. Asimismo destacamos las implicaciones de cada dimensión en la educación, centrándonos concretamente en la formación docente. Veámoslas.

2.1 Dimensión práctica

D'Ambrosio (2008) define la Etnomatemática como el estudio de las técnicas (Ticas) de entender, explicar (Matema) el entorno (Etno), apuntando al conocimiento, en particular matemático, como una herramienta para la comprensión y el manejo de la realidad. Las matemáticas resultan ser una manera de conocer el entorno para desempeñar las actividades diarias, tomar decisiones y modificar lo que tenemos alrededor, permitiendo controlarlo.

En esta dimensión <u>práctica</u> se insertan elementos de las dimensiones conceptuales y cognitivas que define D'Ambrosio (2008) porque confluyen las ideas de matemáticas como instrumento para representar y moldear la realidad junto con las ideas de matemáticas como herramienta para organizar las experiencias.

En el contexto educativo, asumir la dimensión práctica implica profundizar la relación entre las matemáticas y la realidad, valorar su origen en las prácticas diarias, y fomentar su utilización en la manipulación del entorno, favoreciendo así experiencias significativas que ajusten contenidos y patrones de instrucción a los intereses y estilos de aprendizaje de los estudiantes (Shirley, 2001).

2.2 Dimensión social

Barton (2012) entiende las matemáticas como sistemas de significados para dar sentido a cantidad, relaciones y espacio. Estos sistemas se construyen y comparten dentro de comunidades que tienen una misma visión de la realidad y por consiguiente consensuan códigos comunes para comunicarse (Albanese y Perales, 2014). Se insiste por tanto en la importancia del lenguaje para la comunicación. Knijnik (2012) coincide con Barton (2012) y toma la teoría de los juegos del lenguaje de Wittgenstein como fundamento de esta visión de las matemáticas como sistemas, proponiendo que el estudio de los mismos se centre en su funcionamiento y su uso.

En esta dimensión <u>social</u> se insertan algunos matices de la dimensión política de D'Ambrosio (2008; 2012), dado que la comunicación y el consenso involucran mecanismos de poder.

En el contexto educativo esto se refleja en la necesidad de promover los principios del constructivismo social, es decir, fomentar una metodología que permita la construcción del conocimiento con el trabajo en pequeños grupos que consiente compartir experiencias y llegar a un acuerdo sobre la interpretación compartida de las mismas (Oliveras, 1996).

2.3 Dimensión cultural

La Etnomatemática considera que las matemáticas y las distintas culturas están profundamente relacionadas. Si el locus de las matemáticas se sitúa en la mente colectiva de la humanidad, esto significa que el origen de las matemáticas se encuentra en la cultura, visto como el cuerpo de pensamientos y conducta del hombre (White, citado en Gavarrete, 2012).

El aspecto clave de esta postura es la existencia de diferentes matemáticas. Estas diferencias están ligadas precisamente a las culturas en donde se construyen. Epistemológicamente se avala un relativismo que permite la coexistencia (temporal) de diversas matemáticas. D'Ambrosio (2008) considera prevalentemente una visión histórica, en donde admite una evolución de las matemáticas ligada a la evolución de las culturas en el tiempo; sin embargo, Barton (2012) insiste en la necesidad de una posición filosófica que asuma la existencia *contemporáneamente* de diferentes matemáticas, y que estas no estén subordinadas (ni temporalmente ni por valor) unas a las otras.

En esta dimensión cultural se inserta la dimensión epistemológica e histórica de D'Ambrosio (2008), considerando los matices del párrafo anterior.

Respecto al contexto educativo esta dimensión se puede trabajar a través de propuestas que incluyan las matemáticas de grupos culturales que manifiestan diferentes concepciones y pensamientos sobre las nociones matemáticas respecto a las que se suelen considerar en las escuelas (Shirley, 2001). Así por tanto se propondría la indagación en algún elemento del bagaje cultural cercano al entorno de los estudiantes, promoviendo el desarrollo de ideas matemáticas a partir de ello (Bishop, 1999; Gavarrete, 2012; Oliveras, 1996).

En la Figura 1 recogemos las relaciones entre las dimensiones que definimos y las propuestas por D'Ambrosio (2008).

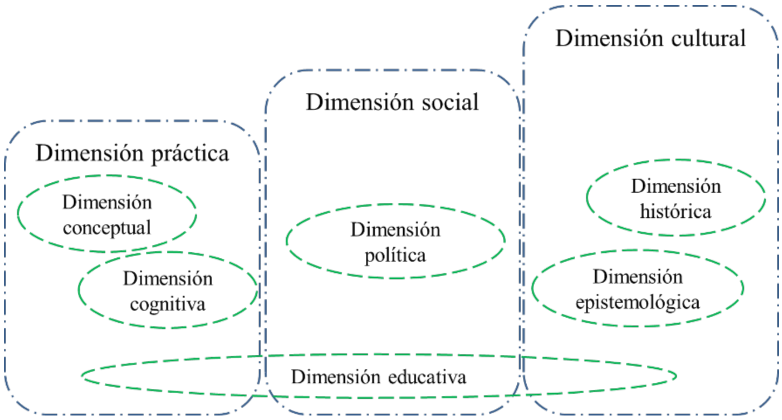


Figura 1. Esquema de relaciones entre las dimensiones de la Etnomatemática de D'Ambrosio (2008), y las dimensiones sobre la naturaleza de las matemáticas desde la Etnomatemática que consideramos en este trabajo.
Fuente: Albanese (2014).

3. Descripción del taller

El taller que diseñamos sigue una línea iniciada por Oliveras (1996) en su trabajo doctoral y profundizada por Gavarrete (2012) y Oliveras y Gavarrete (2012), línea que pretende desarrollar trabajos de indagación sobre signos culturales por parte de los docentes en formación. Un signo cultural es un rasgo o elemento, tangible o intangible (material o inmaterial), de una cultura o microcultura determinada que involucre algún pensamiento matemático; su estudio sirve para después elaborar tareas y realizar actividades centradas en las matemáticas implícitas en la fabricación –si es tangible– o práctica del signo –si es intangible–.

El signo cultural alrededor del cual diseñamos nuestro taller es una artesanía de trenzado de la región de Salta (Argentina). Ya se ha indagado el potencial matemático de este signo en algunas investigaciones anteriores (Oliveras y Albanese, 2012; Albanese, Oliveras y Perales, 2014). El trabajo de campo etnográfico y la interpretación de los datos proporcionaron una modelización matemática del trenzado que creemos presenta grandes posibilidades para un entorno educativo (Albanese, Oliveras y Perales, 2012). El taller surge de la idea de recrear en el aula cómo puede haberse gestado esta modelización que los artesanos manejan, primero dejando que cada participante construya su propia manera de pensar la acción de trenzar, y después compartiendo con los otros participantes para llegar a un acuerdo hacia una misma forma de pensar esa práctica.

El taller se inserta en un curso para profesores en formación. El diseño se puso a prueba y se validó previamente en una experiencia piloto, realizada en un curso de Etnomatemática del Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (España). Finalmente se lleva a cabo como una sesión de un curso optativo de *Taller de Modelización y Producción Matemática* de la carrera de Profesorado en Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires. Participan un grupo de 14 personas, compuesto por los 12 estudiantes del curso y las dos profesoras del mismo. En la primera parte de la sesión participan también otros 3 profesores de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales que no concluyeron el taller por incompatibilidad de horarios con sus compromisos académicos.

En dicho taller se plantea una metodología de indagación porque se pide a los participantes que investiguen la práctica de trenzar y construyan una representación de la elaboración de un trenzado simple, para después consensuarla en pequeños grupos. La innovación que proponemos se sitúa tanto en la metodología, que se basa en la experiencia directa de realización de las trenzas, además del trabajo en pequeños grupos, como también en el contenido que focaliza la atención hacia tareas concretas. La construcción de fichas de trabajo y la utilización de material manipulativo están inspiradas en el trabajo de Gavarrete (2012).

El taller se organiza en tres momentos, cada uno centrado en una o más fichas (Tabla 1): (A) presentación de la Etnomatemática a través de una puesta en común donde los participantes comentan la lectura de fragmentos seleccionados de varios autores (Barton, 1996; Bishop, 1999; D'Ambrosio, 2008; Gerdes, 1996); (B) realización y representación de trenzas; y (C) puesta en común final en la que los participantes expresan sus comentarios sobre el trabajo realizado y sus implicaciones sobre la naturaleza de las matemáticas, respondiendo a cinco preguntas abiertas que denominamos cuestionario final.

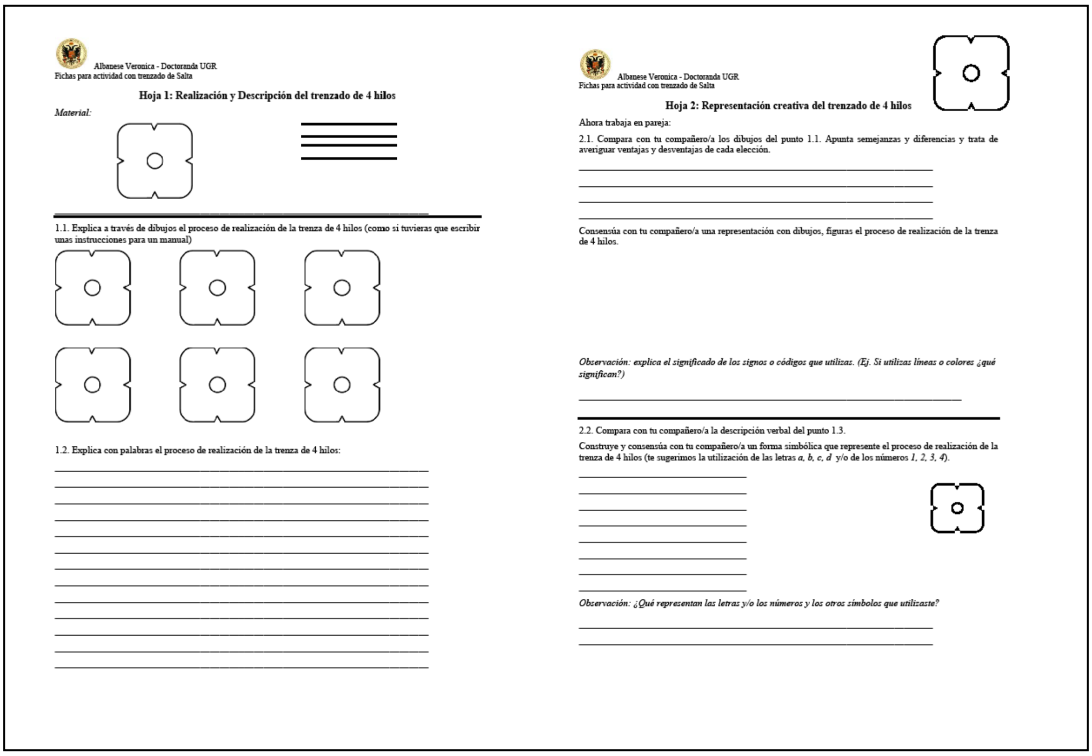
El momento central (B), focalizado en la actividad artesanal, se compone de cuatro fases. Cada una de las fases se caracteriza por una interacción distinta entre los participantes: en la primera fase se trabaja de forma individual, en la segunda los participantes trabajan en pequeños grupos y en la tercera y cuarta los grupos interaccionan para la puesta en común de los resultados de cada grupo y para reconocer los patrones, respectivamente (Tabla 1). Estas fases son descritas a continuación.

A. Reflexión introductoria: interacción entre todos los participantes.
B. Actividad práctico–creativa:
Fase 1. Descripción de la realización del trenzado: individual.
Fase 2. Representación creativa consensuada: en pequeños grupos.
Fase 3. Confrontación de las representaciones y de la modelización artesanal: interacción entre los grupos.
Fase 4. Reconocimiento patrones trenzas de 8 para inventar trenzas de 16: interacción entre todos.
C. Reflexión conclusiva: interacción entre todos los participantes.

Tabla 1. Desarrollo de la actividad con las interacciones.

Fase 1: se proporciona a los participantes las herramientas necesarias para la realización de un trenzado simple (Albanese, Oliveras y Perales, 2012): unas cuerdas y un aparato de madera cuya forma se muestra en la Figura 2. Entonces se les solicita que, individualmente, describan el proceso; primero de manera gráfica–icónica y después con palabras (Hoja 1 de la Figura 2). La idea es que el trenzado se forma por el intercambio de las posiciones de los hilos que se fijan en las ranuras del aparato.

Fase 2: los participantes realizan una representación creativa dirigida hacia la construcción de una modelización (Hoja 2 de la Figura 2), es decir, a partir de la descripción individual realizada anteriormente, los participantes llegan a un consenso dentro del grupo sobre una representación icónica y después simbólica que sintetice y describa el proceso de trenzado; para ello reflexionan críticamente sobre las ventajas y limitaciones de las decisiones tomadas en la utilización de las notaciones. Aquí se trata de representar el movimiento de los hilos que se intercambian de posiciones.


Albanese Veronica - Doctoranda UGR
Fichas para actividad con trenzado de Salta

Hoja 1: Realización y Descripción del trenzado de 4 hilos

Material:

1.1. Explica a través de dibujos el proceso de realización de la trenza de 4 hilos (como si tuvieras que escribir unas instrucciones para un manual)

1.2. Explica con palabras el proceso de realización de la trenza de 4 hilos:

Albanese Veronica - Doctoranda UGR
Fichas para actividad con trenzado de Salta

Hoja 2: Representación creativa del trenzado de 4 hilos

Ahora trabaja en pareja:

2.1. Compara con tu compañero/a los dibujos del punto 1.1. Apunta semejanzas y diferencias y trata de averiguar ventajas y desventajas de cada elección.

Consensúa con tu compañero/a una representación con dibujos, figuras el proceso de realización de la trenza de 4 hilos.

Observación: explica el significado de los signos o códigos que utilizas. (Ej. Si utilizas líneas o colores ¿qué significan?)

2.2. Compara con tu compañero/a la descripción verbal del punto 1.3.

Construye y consensúa con tu compañero/a un forma simbólica que represente el proceso de realización de la trenza de 4 hilos (te sugerimos la utilización de las letras *a, b, c, d* y/o de los números *1, 2, 3, 4*).

Observación: ¿Qué representan las letras y/o los números y los otros símbolos que utilizaste?

Figura 2. Las Hojas 1 (izquierda) y 2 (derecha) diseñadas para el momento (B) del taller.
Fuente: Albanese (2014).

Fase 3: en la puesta en común de las representaciones consensuadas se promueve una nueva reflexión sobre las decisiones tomadas por cada grupo. Finalmente se presenta la modelización artesanal del trenzado de cuatro hilos que involucra el concepto matemático de grafo. Si se representan las posiciones como vértices y los movimientos con flechas que constituyen las aristas se forma un grafo compuesto por circuitos de dos vértices cada uno (Figura 3).

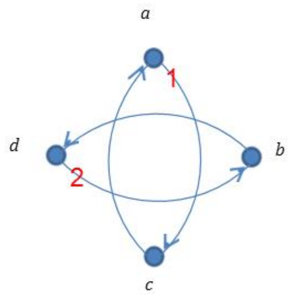


Figura 3. El grafo que modeliza la trenza que maneja en las fases 1, 2 y 3.
Fuente: XXXX (2012).

Fase 4: se propone a los participantes la modelización artesanal de tres trenzas de ocho hilos como se describe en Albanese (2015): el reconocimiento de patrones en los grafos que las representan les permite después inventar grafos de trenzas de 16 hilos.

Cabe destacar que en las Fases 1 y 4 se hace hincapié en la dimensión práctica de las matemáticas como herramientas para entender la realidad y organizar la experiencia; en la Fase 2 se pone énfasis en la dimensión social de consensuar y compartir las producciones matemáticas dentro de la comunidad; mientras en la fase 3 se insiste en la dimensión cultural, en las diferentes formas de pensar matemáticamente y se reconoce a la cultura artesanal como una cultura creadora de conocimiento.

4. Las reflexiones de algunos participantes

Los comentarios de los participantes que grabamos y trascribimos en el momento inicial (A) y final (C), junto a las respuestas al cuestionario final, compuesto por cinco preguntas abiertas (Albanese, Perales y Oliveras, 2016), nos proporcionan evidencias de la reflexión sobre las concepciones de muchos participantes, que plantean dudas con respecto a lo que ellos mismos han considerado matemáticas hasta ese momento, y reflexionan sobre el pensar y hacer matemáticas en contextos como el del taller propuesto.

Algunas de las preguntas del cuestionario fueron:

1. ¿Qué pensamiento matemático has puesto en juego al realizar, representar e inventar trenzas?

2. ¿Qué implicaciones sobre la naturaleza de las matemáticas conlleva esta actividad?

Destacamos aquí las reflexiones de tres de los participantes, elegidos entre los estudiantes del curso, es decir, profesores en formación que seleccionamos por la riqueza de su proceso de reflexión. Marcaremos en itálica las expresiones literales de los participantes.

Participante 1). En la puesta en común inicial este participante reconoce que para él la propuesta de la Etnomatemática es novedosa, pero al mismo tiempo se muestra interesado en pensar, ver y valorar las ideas que pueden surgir en distintos grupos culturales (dimensión cultural). En la puesta en común final destaca la relevancia que un problema adquiere con respecto a los factores culturales y reconoce que es el individuo quien busca sistemas de generalización para controlar la realidad y comunicarse sobre ella. En estas declaraciones reconocemos elementos de las tres dimensiones, además bien relacionadas entre ellas, ya que: el individuo recurre al pensamiento matemático para controlar la realidad (dimensión práctica), busca una forma común a su comunidad para comunicarse (dimensión social), y se admite que estas formas de pensar puedan ser distintas (dimensión cultural). Respondiendo al cuestionario este participante reflexiona acerca de que las matemáticas parecen *ser algo intrínseco a la actividad humana* y que el hombre tiende a ver reglas y utilizar patrones para manejar la realidad. Destacamos así una percepción de la dimensión social y práctica. Después observa que se puede llegar a un resultado de formas muy distintas y valora haber considerado puntos de vista distintos del propio. Apreciamos aquí un reconocimiento de la dimensión cultural.

Participante 2). En la puesta en común inicial esta participante manifiesta su interés por la visión de unas matemáticas que sean instrumento de reflexión sobre la realidad, para responder al *para qué me sirven* las matemáticas. Después matiza la búsqueda de una dimensión práctica. En la puesta en común final comenta su inquietud hacia que las matemáticas son *algo más que hacer cuentas* y respondiendo al cuestionario reflexiona acerca de que las matemáticas son una *forma estructurada de trabajar* y una *ciencia socialmente construida,* e insiste en su utilización en actividades cotidianas y para resolver situaciones concretas, *cada uno a su manera*. Identificamos estas observaciones, respectivamente, en la dimensión social por la construcción social de esa ciencia, práctica, por el empleo de la misma para entender y controlar la realidad y finalmente cultural, ya que hay distintas maneras de hacer matemática.

Participante 3). En la puesta en común inicial esta participante enfatiza la implicación sobre la forma de enseñar en algunas facultades, lo que permite identificar la toma de conciencia acerca de que las necesidades matemáticas de otros gremios son diversas -por ejemplo la de los médicos y de los psicólogos- (dimensión cultural). En la puesta en común final sugiere un replanteamiento de *qué son las matemáticas*, y manifiesta inquietud sobre qué autoridad tendría que decir qué es y qué no es matemático, destacando la insuficiencia de la institución escolar-académica en esta tarea. En las respuestas al cuestionario insiste en que las matemáticas están involucradas en muchas actividades cotidianas, si bien la escuela no lo reconoce ni lo considera a la hora de enseñar (dimensión práctica).

En los tres casos, en medida diferente, los participantes aprecian las novedades que para ellos supone acercarse a la Etnomatemática y manifiestan el cuestionamiento que ellos mismos realizan a sus concepciones.

Cuando responden al cuestionario hacen afirmaciones sobre las matemáticas que nos dejan evidencias de la reflexión, a diferentes niveles, acerca de las dimensiones descritas anteriormente.

5. Reflexiones finales

Como se vislumbra de los casos descritos, consideramos que el taller que llevamos a cabo favorece efectivamente una reflexión acerca de las concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas de los participantes, tal como nos habíamos propuesto.

Cabe destacar que las dimensiones práctica, social, cultural, definidas desde la perspectiva etnomatemática, se mostraron como herramientas muy útiles tanto en el diseño del taller como en la interpretación de las evidencias sobre las concepciones de los participantes.

La experiencia con el trenzado en donde se les plantea la construcción de una representación que proporcione las indicaciones de cómo elaborar una trenza hace vivenciar a los participantes el hecho de que el conocimiento matemático sirve para organizarse y manejar la realidad (dimensión práctica); la necesidad de consensuar la modelización para poder comunicarse les hizo vivenciar la dimensión social de compartir un lenguaje común; y el confronto con los compañeros y con la solución del gremio artesanal les enseña que existen diversos puntos de vista que dependen de distintas formas de pensar matemáticamente (dimensión cultural).

En la puesta en común inicial las observaciones de los participantes se dirigen hacia inquietudes bastante vagas sobre el valor social de las matemáticas y el cuestionamiento de su universalidad, mientras en las respuestas al cuestionario parecen haber focalizado su atención en las implicaciones de las dimensiones sobre la naturaleza de las matemáticas. Merece la pena aclarar que en ningún momento se hizo una referencia explícita a las dimensiones durante el taller, a pesar de ello casi todas las reflexiones están relacionadas con aquellas.

Observamos que la idea de comenzar desde una práctica manual concreta ha llamado mucho la atención de los participantes, que se han cuestionado de dónde vienen las matemáticas, en qué consisten y cómo considerar las diversas matemáticas que surgen en distintos contextos y grupos culturales.

Ponemos de manifiesto la buena acogida que ha recibido esta propuesta de taller entre los participantes. Creemos que esto se debe en buena parte a la afinidad, en metodología y contenido, que nuestra propuesta presenta con el curso en donde se inserta. De hecho, los estudiantes ya se enfrentaban a temas de matemáticas presentes en la naturaleza, la sociedad o en las mismas matemáticas, y se hacían sus propias preguntas que intentaban responder con pequeñas investigaciones. Este clima abierto hacia el planteamiento de cuestiones sin preguntas -ni respuestas- prefijadas ha sido tierra fértil para nosotros.

Bibliografía

Albanese, V. (2015). *Aprender Grafos Haciendo Trenzas*. Una Innovación Educativa en Combinatoria. Granada: La Autora.

Albanese, V., (2014). *Etnomatemáticas en artesanías de trenzado y concepciones sobre las Matemáticas en la formación docente*. Tesis Doctoral (Doctorado en Educación). Granada: Universidad de Granada.

Albanese, V., Oliveras, M. L., & Perales, F. J. (2012). Modelización matemática del trenzado artesanal. *Epsilon*, *29*(81), 53-62. Recuperado de http://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/regalo81.pdf

Albanese, V., Oliveras, M. L., & Perales, F. J. (2014). Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado: Aplicación de un Modelo Metodológico elaborado. *Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 1-20. doi: 10.1590/1980-4415v28n48a01

Albanese, V., Perales, F. J., y Oliveras, M. L. (2016). Matemática y lenguaje: concepciones de los profesores sobre las matemáticas, una mirada desde la etnomatemática. *Perfiles educativos*, 38(152), 31-50.

Albanese, V., & Perales, F. J. (2014). Pensar Matemáticamente: Una Visión Etnomatemática de la Práctica Artesanal Soguera. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*(3), 261-288.

Albanese, V., Santillán, A., & Oliveras, M. L. (2014). Etnomatemática y formación docente: el contexto argentino. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(1), 198-220.

Barton, B. (1996). Making sense of ethnomathematics: Ethnomathematics is making sense. *Educational Studies in Mathematics, 31*(1), 201-233. doi: 10.1007/BF00143932

Barton, B. (2008). *The language of mathematics: Telling mathematical tales*. Melbourne: Springer.

Barton, B. (2012). Ethnomathematics and Philosophy. In H. Forgasz & F D. Rivera (Eds.), *Towards Equity in Mathematics Education: Gender, Culture, and Diversity* (pp. 231-240). Berlin: Springer.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación Matemática*. Barcelona: Paidós.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the learning of Mathematics, 5*(1), 44-48. Retrived from http://www.jstor.org/discover/10.2307/40247876?uid=3737952&uid=2&uid=4&sid=21104965310753

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática – Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.

D'Ambrosio, U. (2012). The Program Ethnomathematics: theoretical basis and the dynamics of cultural encounters. *Cosmopolis. A Journal of Cosmopolitics, 3-4*, 13-41.

Gavarrete, M. E. (2012). *Modelo de aplicación de etnomatemáticas en la formación de profesores indígenas de Costa Rica.* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada.

Gerdes, P. (1996). Ethnomathematics and mathematics education. In A. J. Bishop (Ed.), *International handbook of mathematics education* (pp. 909-943). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gerdes, P. (1998). On culture and mathematics teacher education*. Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(1), 33-53. doi: 10.1023/A:1009955031429

Knijnik, G. (2012). Differentially positioned language games: ethnomathematics from a philosophical perspective. *Educational Studies in Mathematics, 80*(1-2), 87-100. doi: 10.1007/s10649-012-9396-8

Oliveras, M. L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Oliveras, M. L., & Albanese, V. (2012). Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado: un modelo metodológico para investigación. *Boletim de Educação Matemática, 26*(44), 1295-1324. doi: 10.1590/S0103-636X2012000400010

Oliveras, M. L., & Gavarrete, M. E. (2012). Modelo de aplicación de etnomatemáticas en la formación de profesores para contextos indígenas en Costa Rica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 15*(3), 339-372. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v15n3/v15n3a5.pdf

Shirley, L. (2001). Ethnomathematics as a fundamental of instructional methodology. *ZDM, 33*(3), 85-87. doi: 10.1007/BF02655699

Primer autor: Albanese, Veronica:

Contacto: very_alba@hotmail.it; Dpto. Didáctica de las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, Campus Universitario de Cartuja s/n, 18071, Granada; tlno. 958243983

Para publicación: Doctora en Educación**,** Profesora de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, Granada

CV: Licenciada en Matemática. Máster en Didáctica de la Matemática. Doctora en Educación. Profesora Ayudante Doctora del Departamento de Didáctica de la Matemática. Su investigación se centra en la didáctica de la matemática, en particular la Etnomatemática, la formación docente y las concepciones sobre la naturaleza de la matemática.

Segundo autor: Perales, Francisco Javier:

Contacto: fperales@ugr.es, Dpto. Didáctica de las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, Campus Universitario de Cartuja s/n, 18071, Granada; tlno. 958243983

Para publicación: Doctor en Física, Catedrático de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, Granada

CV: Profesor Catedrático del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales. Su docencia se dirige esencialmente hacia la formación inicial del profesorado. Sus líneas de investigación están relacionadas con la Didáctica de las Ciencias y la Educación Ambiental.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 84-96

Aplicación de la función exponencial sobre el cambio aritmético en la variable independiente

Patricia Sastre Vázquez, Alejandra Cañibano, Rodolfo E. D`Andrea

Fecha de recepción: 2016-02-20
Fecha de aceptación: 2017-03-01

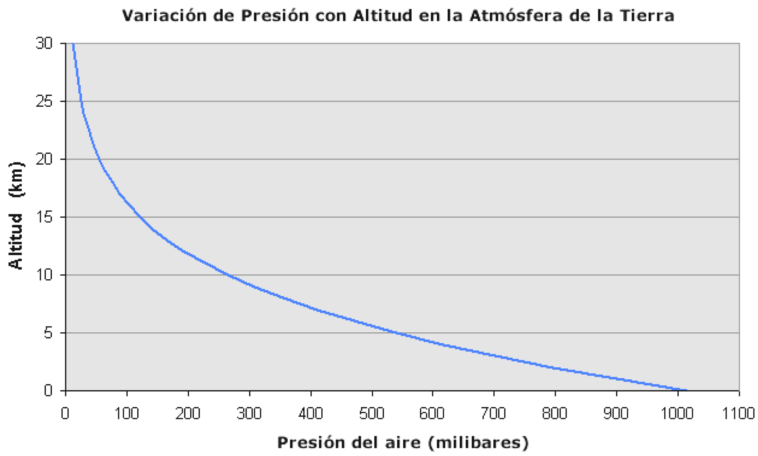
Resumen	En este trabajo se presentan en forma general las propiedades más comunes de la función exponencial. Se presta mayor atención a una propiedad de esta función que en general no es introducida en los cursos elementales de matemática: "*Cambios aritméticos iguales en la variable x conducen a cambios proporcionales iguales en la variable y. Si llamamos c al cambio aritmético en x, entonces(b^c-1) es el cambio proporcional en y".* Además, se dan algunos conceptos elementales del estudio de series de tiempo, y finalmente se presenta una aplicación. **Palabras clave:** Función exponencial, proporcionalidad, serie temporal
Abstract	In this work are presented in general form properties more common of the exponential function. Greater attention to a property of this function that is not generally introduced in elementary mathematics courses: "arithmetic equal changes in the variable x lead to equal proportional changes in the variable and." "If we call the arithmetic shift in x c, then (bc-1) is the proportional change in and" also realize some basic concepts in the study of time series, and finally presents an application. **Keywords:** Exponential function, proportion, temporal series
Resumo	Neste trabalho são apresentadas de um modo geral as propriedades mais comuns da função exponencial. Uma atenção maior é dada a uma propriedade dessa função, que em geral não é introduzida nos cursos elementares de matemática: "Mudanças aritméticas iguais na variável x conduzem a mudanças proporcionais iguais na variável y. Se chamarmos c a mudança aritmética em x, então (bc-1) é a mudança proporcional em y" Além disso são dados alguns conceitos elementares do estudo de séries de tempo, e finalmente se apresenta uma aplicação. **Palavras chaves**: Função exponencial, proporcionalidade, série temporal

1. Introducción

En muchas ocasiones los montañistas presentan algunos síntomas como cefalea, malestares gastrointestinales, debilidad o fatiga, inestabilidad o vértigos, trastornos del sueño. Estos síntomas son señales de los efectos de la altura sobre el organismo humano, la cual está en íntima relación con la presión atmosférica.

La presión atmosférica es causada por el peso del aire sobre un cierto punto de la superficie terrestre. Por lo tanto, es natural presumir que cuanto más alto esté un lugar, tanto menor será la presión, pues es menor la cantidad de aire que hay por arriba del lugar. Así, en una montaña la cantidad de aire que hay en la parte más alta es menor que la que hay sobre una playa, debido a la diferencia de alturas. Es decir, cuanto mayor es la altura de la superficie terrestre respecto al nivel del mar, menor es la presión del aire. Dicho de otro modo: la presión atmosférica disminuye con la altura.

Sin embargo, la disminución que sufre la presión atmosférica con la altura no es directamente proporcional a la altura, ya que el aire puede comprimirse mucho. Las masas de aire más próximas al suelo están comprimidas por el propio peso del aire de las capas superiores y son, por tanto, más densas. Así, cerca del nivel del mar un pequeño ascenso en altura supone una gran disminución de la presión, mientras que a gran altura hay que ascender mucho más para que la presión disminuya en la misma medida. La presión atmosférica es de alrededor 1014 milibares al nivel del mar. A una elevación de 10 kilómetros aproximadamente la altura del Monte Everest, la presión es de 265 milibares. En el siguiente se representa la variación de la presión atmosférica respecto de la altitud en la Tierra.



Extraído de Ventanas al Universo por Randy Russell.
http://www.windows2universe.org/earth/Atmosphere/pressure_vs_altitude.html&lang=sp

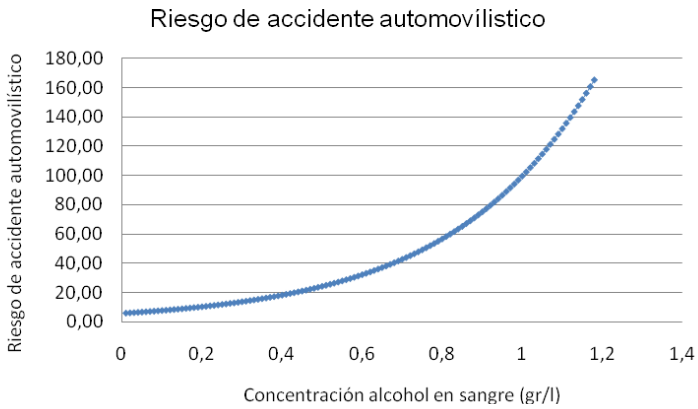
La ingesta del alcohol afecta a las capacidades físicas de las personas. Provoca una importante disminución de los reflejos, se altera el campo visual, perturba los oídos, disminuye la resistencia física y aumenta la fatiga y el sueño. El alcohol es uno de los factores de riesgo implicados en los accidentes de tráfico. Conducir bajo los efectos del alcohol es peligroso. Los conductores deberían ser conscientes sobre el riesgo al cual se exponen cuando conducen de este modo.

La alcoholemia representa el volumen de alcohol que hay en la sangre y se mide en gramos de alcohol por cada litro de sangre (g/l) o su equivalente en aire espirado.

En general las legislaciones vigentes establecen que las tasas de alcoholemia permitidas para los conductores son de 0,5 gr/l. Sin embrago la tendencia a nivel internacional es ir rebajando las tasas máximas permitidas, con la finalidad de alcanzar al menos el límite de 0,1-0,2 g/l para conductores en general y a 0,0 g/l para los profesionales. Un modelo matemático que predice la probabilidad de tener un accidente automovilístico al conducir bajo los efectos del alcohol, es:

$$R(x) = 6 \bullet e^{2,81\,x}$$

Donde, x: es la concentración de alcohol en la sangre, k: es una constante, R: es la probabilidad de tener un accidente (expresada en porcentaje); e: corresponde a 2,71.



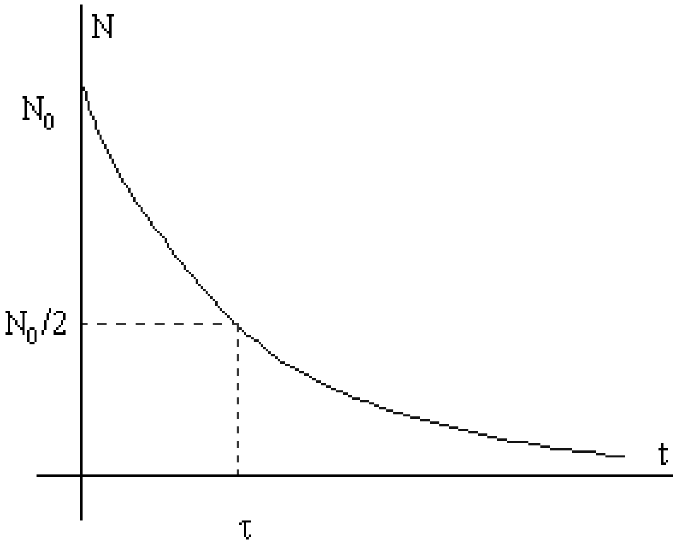
A partir de una alcoholemia de 0,5 g/l los efectos del alcohol son evidentes para la gran mayoría de las personas, pero aún por debajo de ese nivel de alcohol en sangre puede haber ya un mayor riesgo de accidente. Además, por debajo de la tasa legal el conductor no suele ser consciente del riesgo al que se expone y no toma las precauciones adecuadas, por lo que puede aumentar su nivel de tolerancia al riesgo. Así, la probabilidad de tener un accidente teniendo una concentración de 1 gr. de alcohol en la sangre es 1, es decir, que el riesgo es del 100 %.

Los núcleos de la materia están compuestos por protones y neutrones, que permanecen unidos por la llamada fuerza fuerte. Algunos núcleos tienen una combinación de protones y neutrones con una configuración no estable. Estos núcleos son inestables o radiactivos. Las sustancias radiactivas se desintegran emitiendo radiaciones y transformándose en otras sustancias. Este proceso se realiza con el paso del tiempo y a un ritmo que varía según el tipo de sustancia.

Se ha observado que todos los procesos radiactivos simples siguen una ley exponencial decreciente. Si N_0 es el número de núcleos radiactivos en el instante inicial, después de un cierto tiempo t, el número de núcleos radiactivos presentes N se ha reducido a

$$N=N_0e^{-\beta t}$$

Donde β es una característica de la sustancia radiactiva denominada constante de desintegración.



Los fenómenos descriptos antes pueden modelarse utilizando la función exponencial, la cual es útil para describir numerosos fenómenos naturales. Así presentan comportamiento exponencial: la reproducción de una colonia de bacterias, la desintegración de una sustancia radiactiva, algunos crecimientos demográficos, la inflación, la capitalización de un dinero colocado a interés compuesto, etc. Se define la función exponencial del siguiente modo:

$$y = ab^x \qquad \text{con } a \neq 0 \quad \text{y} \quad b > 1$$

2. Propiedades generales de la función exponencial

Algunas de las propiedades que generalmente se explicitan cuando se introduce al estudio de la función exponencial son las siguientes:

1) La función existe para cualquier valor real, es decir el dominio de la función es el conjunto R.
2) En todos los casos la función pasa por un punto fijo: el (0,1), o sea que siempre: corta al eje de ordenadas en el punto (0,1).
3) Los valores de y son siempre positivos, por tanto: la función siempre toma valores positivos para cualquier valor de x, es decir el condominio es el conjunto de los reales positivos.
4) Siempre creciente o siempre decreciente (para cualquier valor real), dependiendo de los valores de la base "a".
5) Se acerca al eje X tanto como se desee, sin llegar a cortarlo, hacia la derecha en el caso en que a<1 y hacia la izquierda en caso de a>1. Se dice por ello que el eje X es una asíntota horizontal (hacía la izquierda si a>1 y hacía la derecha si a<1)

3. Cambio Aritmético en la Variable Independiente

En la función exponencial existe una propiedad muy útil que relaciona los cambios que producen en la variable *x* respecto a la variable *y*, la cual en general no se enuncia:

1) Cambios aritméticos iguales en la variable x conducen a cambios proporcionales iguales en la variable y.
2) Si llamamos c al cambio aritmético en x, entonces (b^c-1) es el cambio proporcional en y.

Se probará esta propiedad y luego se verá una aplicación práctica de la misma. Sean x_1, x_2, x_3 y $x_4 \in Df(x) = ab^x$ tales que $x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = c$, entonces se quiere probar que: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_1)} = \dfrac{f(x_4) - f(x_3)}{f(x_3)}$

Que es lo mismo que: $\dfrac{y_2 - y_1}{y_1} = \dfrac{y_4 - y_3}{y_3}$ (1)

Para ello, teniendo en cuenta que $y = ab^x$ con $a \neq 0$ y $b > 1$, y que $x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = c$, se calculan los valores de función que corresponde a los x_1, x_2, x_3 y $x_4 \in Df(x)$, luego se los reemplaza en ambas miembros de la expresión (1), con lo cual se obtiene:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{ab^{x_2} - ab^{x_1}}{ab^{x_1}} = \frac{b^{x_2}}{b^{x_1}} - 1 = b^{(x_2 - x_1)} - 1 = b^c - 1 \quad (2)$$

$$\frac{y_4 - y_3}{y_3} = \frac{ab^{x_4} - ab^{x_3}}{ab^{x_3}} = \frac{b^{x_4}}{b^{x_3}} - 1 = b^{(x_4 - x_3)} - 1 = b^c - 1 \quad (3)$$

De las expresiones (2) y (3) surge que efectivamente la expresión (1) es verdadera, con lo cual queda probada la propiedad.

Si la función exponencial se define en una forma más general como: $y = ab^{px}$ con $a \neq 0$ y $b > 1$, entonces la propiedad anterior se transforma en: $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{y_i} = b^{pc} - 1$.

3.1. Aplicación sobre cambio aritmético en la variable independiente

Al momento de planificar actividades futuras surgirán, entre otras, algunas de estas preguntas: ¿Han aumentado las ventas, (o las producciones)?; ¿Cuál ha sido el cambio proporcional mensual en las ventas?; ¿Existe un superávit de la cantidad de agua caída en la zona en los últimos días?; ¿ Cuál ha sido el cambio proporcional en las lluvias anuales?; Es decir, en muchas situaciones, tomando como base lo ocurrido en el pasado se requiere conocer el comportamiento futuro de ciertos fenómenos con el fin de planificar, prever o prevenir. Una técnica muy importante para hacer inferencias sobre el futuro, con base en lo ocurrido en el pasado, es el análisis de series de tiempo.

Arellano, (2001), define *Serie de Tiempo* a un conjunto de mediciones de cierto fenómeno o experimento registradas secuencialmente en el tiempo. Estas observaciones serán denotadas por $\{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)\} = \{x(t) : t \in T \subseteq R\}$ con $x(t_i)$ el valor de la variable x en el instante t_i. Si T = Z se dice que la serie de tiempo es discreta, y si T = R se dice que la serie de tiempo es continua. Cuando $t_{i+1} - t_i = k$ para todo $i = 1,\ldots,n-1$, se dice que la serie es equiespaciada, en caso contrario será no equiespaciada. Un modelo clásico para una serie de tiempo, supone que una serie $x(1), \ldots, x(n)$ puede ser expresada como suma o producto de tres componentes:

1) *Tendencia:* representa el comportamiento predominante de la serie, puede interpretarse vagamente como el cambio de la media a lo largo de un periodo
2) *Estacionalidad*: representa un movimiento periódico de la serie de tiempo, siendo la duración de la unidad del periodo generalmente menor que un año
3) *Error aleatorio*: representa movimientos irregulares (al azar) y todos los tipos de movimientos de una serie de tiempo que no sea tendencia, variaciones estacionales y fluctuaciones cíclicas.

Esta autora establece tres modelos de series de tiempos, que generalmente se aceptan como buenas aproximaciones a las verdaderas relaciones, entre los componentes de los datos observados. Estos son:

1) Aditivo: $$x(t) = T(t) + E(t) + A(t)$$

2) Multiplicativo: $$x(t) = T(t) \cdot E(t) \cdot A(t)$$

3) Mixto: $$x(t) = T(t) \cdot E(t) + A(t)$$

Donde: $x(t)$ serie observada en instante t; $T(t)$ componente de tendencia; $E(t)$ componente estacional y $A(t)$ componente aleatoria (accidental).

Un modelo aditivo (1), es adecuado, por ejemplo, cuando $E(t)$ no depende de otras componentes, como $T(t)$, sí por el contrario la estacionalidad varía con la tendencia, el modelo más adecuado es un modelo multiplicativo (2). Es claro que el modelo (2) puede ser transformado en aditivo, tomando logaritmos. El problema que se presenta, es modelar adecuadamente las componentes de la serie. Si la componente estacional $E(t)$ no está presente, y el modelo aditivo es adecuado, esto es:

$$X(t) = T(t) + A(t)$$

Un método para estimar la tendencia *T(t)*, consiste en ajustar una función del tiempo, como un polinomio, una exponencial u otra función suave de *t*. Entre las funciones adecuadas para esta tarea se encuentran las presentadas en la Tabla 1:

Tabla 1: Funciones útiles para estimar la tendencia en el modelo *X(t) = T(t) + A(t)*

Lineal	$T(t) = n + m\,t$
Exponencial	$T(t) = n\,e^{mt}$
Exponencial modificada	$T(t) = n + m\,e^{pt}$
Polinomial	$T(t) = a_0 + a_{1t}, \ldots, + a_{mt}^{m}$
Gompertz 0 < r < 1	$T(t) = e^{(n + m(rt))}$
Logística	$T(t) = \frac{1}{n + m(r^2)},\ 0 < r < 1$

Debe tenerse en cuenta que la curva de tendencia tiene que cubrir un periodo relativamente largo para ser una buena representación de la tendencia a largo plazo. Sin embargo, la tendencia rectilínea y exponencial son aplicables a corto plazo, puesto que una curva con forma de *S* a largo plazo, puede parecer una recta en un período restringido de tiempo.

Al analizar una serie de tiempo, lo primero que debe hacerse es graficar la serie. Esto permite detectar las componentes esenciales de la serie. El gráfico de la serie permitirá ver: tendencias, variación estacional y variaciones irregulares (o componente aleatoria). Para obtener un modelo, es necesario estimar la tendencia y la estacionalidad. Para estimar la tendencia, se supone que la componente estacional no está presente. La estimación se logra al ajustar una función de tiempo a un polinomio o creando una función que intente capturar patrones importantes en los datos, dejando fuera el ruido, lo cual se conoce como suavizar o alisar o atenuar al conjunto de datos. Para estimar la estacionalidad se requiere haber decidido el modelo a utilizar (mixto o aditivo). Una vez estimada la tendencia y la estacionalidad se está en condiciones de predecir.

Ejercicio: Para el modelo matemático que predice la probabilidad de tener un accidente automovilístico al conducir bajo los efectos del alcohol: R(x) = 6 • e $^{2,81\,x}$, confeccionar una tabla donde se ponga en evidencia la validez de la propiedad anterior : $\frac{y_{i+1} - y_i}{y_i} = b^{pc} - 1$. Teniendo en cuenta que para este modelo son: *a=6; b=e*; *p= 2,81* y c =0,1, entonces es: $b^{pc} - 1 = e^{2,81*0,1} - 1 = 1{,}32 - 1 = 0{,}32$

X(gr/l)	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
R(x) %	18,46	24,45	32,39	42,9	56,81	75,25	99,66	131,99	174,82	231,54
y2-y1	5,99	7,93	10,51	13,92	18,43	24,41	32,33	42,83	56,72	
(y2-y1)/y1	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	

3.2. Ejemplo

En la Tabla 2 se muestran los datos correspondientes a las exportaciones de una empresa, expresadas en millones de dólares. Se solicita:

1) Elaborar los gráficos para los datos y las tendencias.
2) Interpretar los datos para los casos en que se ajusten modelos: lineal y exponencial
3) Pronosticar la tendencia de exportación para el tercer trimestre del año 2016 aplicando ambos modelos.

Tabla 3: Exportaciones en millones de dólares de la Empresa R& P

	Trimestre			
Año	I	II	III	IV
2008			412	366
2009	297	468	406	359
2010	288	406	304	224
2011	232	396	396	354
2012	312	466	437	386
2013	350	482	401	323
2014	278	413	422	410
2015	403	618	593	527
2016	524	675		

Sea *t* cada uno de los 32 trimestres que van de 2008 a 2016, o sea que *t* = 1 para el tercer trimestre de 2007, *t* = 2 para el cuarto trimestre, y así sucesivamente. Así que el dominio de definición de *t* es el conjunto de los enteros de 1 a 32 inclusive, y sea *T(t)* las exportaciones trimestrales en millones de dólares. Con estos datos se desea estimar la tendencia. Suponiendo que la componente estacional *E(t)* no está presente y que el modelo aditivo es adecuado. Entonces el modelo es: $x(t) = T(t) + A(t)$

En este caso podemos estimar la tendencia *T(t)*, lo cual significa ajustar una función del tiempo, utilizando alguna de las funciones presentadas en la Tabla 2. En este ejemplo se hace uso de los modelos: 1) lineal y 2) exponencial.

Modelo lineal: $\boldsymbol{T(t) = n + m\,t}$

En este modelo, que en términos de los ejes cartesianos pueden escribirse como: $y(x) = n + m\,x$, se tienen 2 parámetros *n* y *m*, los cuales pueden estimarse utilizando el método de mínimos cuadrados, tarea que es posible ejecutar sin dificultades mediante una simple planilla de cálculo. Así se obtiene:

$$T(t) = n + m\,t \qquad\qquad T(t) = 299{,}3 + 6{,}34\,t$$

ó lo que es igual: $\mathrm{y} = 299{,}30 + 6{,}34\,\mathrm{x}$

El valor de la pendiente *m*= $6{,}34$ al ser positivo indica que existe una tendencia ascendente de las exportaciones aumentando a un cambio o razón promedio de 6,34 millones de dólares por cada trimestre. El valor de *m* $= 299{,}30$, ordenada al origen, indica el punto en donde la recta corta al eje Y, o sea cuando se anula X o (x=0 ó *t* = 0), es decir indica que las exportaciones estimadas para el inicio del análisis, para este ejemplo el tercer trimestre del año 2007, son 299,30 millones de dólares. Para pronosticar la tendencia de exportación para el tercer trimestre del año 2016 se reemplaza *t* = 33 en la recta de tendencia, obteniendo el siguiente resultado:

$$T(t) = 299{,}30 + 6{,}34\ t$$

$$T(33) = 299{,}30 + 6{,}34 \cdot 33 = 508{,}52$$

Es decir, aplicando el modelo lineal se estima que las exportaciones para el tercer trimestre del año 2016 serian de 508,52 millones de dólares.

Modelo exponencial: $\boldsymbol{T(t) = n\, e^{m\, t}}$

En este caso, que en términos de los ejes cartesianos pueden escribirse como: $y = n\, e^{mt}$ también existen 2 parámetros para estimar, *n y m*, sin embargo el modelo no es lineal, con lo cual, para poder aplicar el método de mínimos cuadrados, es necesario primero realizar una transformación en los datos. Es posible obtener un modelo lineal, a partir del exponencial, simplemente aplicando logaritmos:

$$T(t) = n\, e^{m\, t}$$

$$Ln\, T = Ln\, n + m\, \mathrm{t} \qquad (4)$$

Reemplazando en la expresión (4), $T´(t) = Ln$ y $n´ = Ln\, n$**,** puede reescribirse el modelo exponencial de la siguiente forma:

$$T´(t) = n´ + m\, t \qquad (5)$$

La expresión (5) permite, mediante el ajuste por el método de mínimos cuadrados, estimar los parámetros del modelo exponencial. Así para el modelo $T´(t) = n´ + m\, t$ (5), se obtiene: $\boldsymbol{T´(t) = 5{,}711 + 0{,}016\, t}$

Sabiendo que *m* = 0,016 y teniendo en cuenta que dado que es: $n´ = Ln\, n$**,** entonces es: *n*= $e^{(5{,}711)}$ = 302,17309, con lo cual el modelo exponencial $T(t) = n\, e^{m\, t}$ quedaría escrito como :

$$T(t) = 302{,}173\, e^{0{,}016\, t}$$

Para pronosticar la tendencia de exportación para el tercer trimestre del año 2016 se reemplaza t = 33 en la ecuación de tendencia, obteniendo el siguiente resultado:

$$T(t) = 302{,}173\ e^{0{,}016*33} = 512{,}34$$

Es decir, aplicando el modelo exponencial se estima que las exportaciones para el tercer trimestre del año 2016 serian de 512,34 millones de dólares.

4. Resultados y Conclusiones

Obtenidos los modelos matemáticos que permitirán realizar estimaciones del monto en millones de dólares de las exportaciones trimestrales de una empresa, es necesario también realizar una interpretación de los parámetros. En el ejemplo presentado, para los modelos considerados, se obtuvieron las siguientes expresiones matemáticas:

$$T(t) = 299{,}3 + 6{,}34\ t \qquad \text{Modelo lineal}$$

$$T(t) = 302{,}173\ e^{0{,}016\ t} \qquad \text{Modelo exponencial}$$

En el modelo lineal, cuya representación gráfica es una recta, (ver Gráfico 1 al pie), el coeficiente de la variable independiente, el tiempo en trimestres, indica la relación entre la variación de la Tendencia *T(t)* con respecto a la variación temporal, entre dos trimestres, Dicho de otro modo, el coeficiente de la variable *tiempo*, *t,* (pendiente de la recta), es el aumento en la *Tendencia T(t)*, cuando el tiempo se aumenta en 1 trimestre.

Cuando se dice que un camino tiene la pendiente 5%, significa que por cada 100 unidades horizontales asciende 5 unidades, es decir, el cociente de las ordenadas por las abscisas correspondientes es 5/100. Nótese que el valor de la pendiente de una recta no depende de la elección particular de los puntos elegidos. En el modelo lineal del caso que se está estudiando, el coeficiente de la variable independiente es 6,34 por lo cual se puede afirmar:

Si se considera un modelo lineal, la tendencia del monto de las exportaciones trimestrales de la empresa aumenta uniformemente en 6,34 millones de dólares por trimestre.

Nótese que en el modelo lineal este aumento en la Tendencia no depende de los trimestres que se estudien. De la observación de la Tabla 4 surge claramente que la afirmación anterior no es verdadera cuando se considera el modelo exponencial. En este último caso las variaciones en la tendencia, en cada trimestre, dependen del punto considerado, y se pueden calcular encontrando las derivadas de la función en los puntos en cuestión. La pregunta que se formularía el docente, al plantear el estudio de la función exponencial en un curso introductorio de matemática en el cual aún no se ha introducido el concepto de derivada es: ¿Qué se podría decir de la variación de la tendencia en el caso exponencial?

La relación encontrada en (3): "*Si llamamos c al cambio aritmético en x, entonces (b^c-1) es el cambio proporcional en y*", permite calcular cual es la variación proporcional que sufren las exportaciones de la empresa al pasar de un determinado trimestre a otro. Se trata de poner en evidencia que el modelo exponencial es el apropiado para representar fenómenos donde cambios constantes en una variable independiente, ocasionan de manera porcentual estos mismos cambios en la variable dependiente. Es decir, cuando una cantidad crece o decrece proporcionalmente a los cambios en su valor, el modelo exponencial es el apropiado.

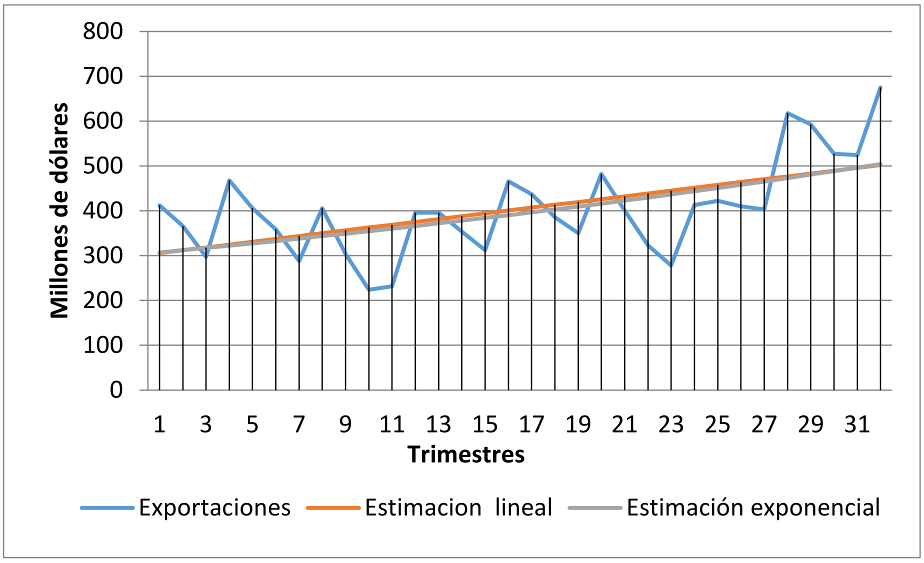
Al hablar de un crecimiento exponencial, también se está diciendo que la variación en una determinada cantidad, de manera porcentual y dentro del contexto, es proporcional a los cambios en los valores de esta misma cantidad. Para el ejemplo presentado, la función general $y = ab^x$ con $a \neq 0$ y $b > 1$ r, presentada al comienzo, se convierte en $y = ne^{mx}$, con lo cual, para este caso la base *b* es el número *e=2.71828*. Con lo cual: $\dfrac{y_4 - y_3}{y_3} = b^{mc} - 1 = e^{mc} - 1$

En el ejemplo, para el caso del modelo exponencial, donde se encontró: $T(t) = 302{,}173\, e^{0{,}016\, t}$, puede calcularse la variación proporcional en el monto de las exportaciones cuando se considera un trimestre. Ya que *b=e; c=1* y *m=0,016*, entonces:

$$b^{mc} - 1 = e^{m} - 1 = 2{,}718^{0{,}016} - 1 = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$$

Luego es posible afirmar que:

Si se considera un modelo exponencial, la tendencia del monto de las exportaciones de la empresa, expresadas en millones de dólares, aumenta uniformemente en una proporción de 0,02 en cada trimestre. O sea que al pasar de un trimestre a otro, el cambio proporcional en la tendencia es del 2 %.



La Tabla 4 puede ser útil para proponer al alumno la comprobación de las propiedades enunciadas, lo cual puede realizarse mediante cálculos sencillos

t	T	$T(t) = 299{,}3 + 6{,}34\,t$		$T(t) = 302{,}173\, e^{0{,}016\,t}$	D	$(y_{i+1}-y_i)/y_i$
1	412	305,64	6,34	307,04	4,95	0,0161
2	366	311,98	6,34	312	5,03	0,0161
3	297	318,32	6,34	317,03	5,11	0,0161
4	468	324,66	6,34	322,14	5,2	0,0161
5	406	331	6,34	327,34	5,28	0,0161
6	359	337,34	6,34	332,62	5,36	0,0161

Bibliografía

Arellano, M. (2001): "Introducción al Análisis Clásico de Series de Tiempo", Estadística http://www.5campus.com/leccion/seriest

Makridakis, S; Wheelright, S.C.; McGee, V.E. (1983). Forecasting: Methods and Applications. Wiley, New York.

Peña, Daniel. (1989). Estadística, Modelos y Métodos 2. Modelos Lineales y Series Temporales. Alianza Universidad, Madrid.

Russell, R. (2009) Ventanas al Universo. http://www.windows2universe.org/earth/Atmosphere/pressure_vs_altitude.html&lang=sp

Alejandra Cañibano. Agrimensora, por la Universidad Nacional de La Plata (Argentina) y Magister en Investigación Biológica Aplicada por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Argentina). Docente del Área Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Comparte su trabajo con la enseñanza de la matemática en el nivel medio y adultos de escuelas estatales. Ha escrito diversos trabajos con la finalidad de mostrar las bondades de la matemática aplicada. mac@faa.unicen.edu.ar

Patricia Sastre Vázquez. Agrimensora, por la Universidad Nacional del Sur (Argentina) y Doctora en Matemática Aplicada, por la Universidad de Alicante (España). Profesora Titular del Área de Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Profesora Titular de Análisis II y Matemática, de la Facultad de Agronomía de la Universidad de Morón (Argentina). Es directora del Proyecto: “Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería”. Secretaria de Ciencia y Técnica de la UNCPBA. Ha dictado cursos de posgrado en el país y en el extranjero. Tiene publicados trabajos en el área de la Educación Matemática y otras disciplinas relacionadas con la Agronomía y la Modelización, en Revistas Nacionales e Internacionales. Es autora de libros y capítulos de libros tanto de investigación como de docencia. Ha integrado tribunales de Tesis Doctorales en España. Formó parte de numerosos comités científicos de Congresos Internacionales. psastre@faa.unicen.edu.ar; pasava2001@yahoo.com.

Rodolfo Eliseo D´Andrea, argentino. Magíster en Educación Matemática y Doctorando por la Universidad Nacional del Comahue. Profesor Adjunto en el Área de Matemática en Pontificia Universidad Católica Argentina (PUCA), Campus Rosario. Integrante de un Proyecto de Investigación sobre Lenguaje Matemático y Procesos de validación en estudiantes de Ingeniería (Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Sede Azul). Ha participado, como ponente, en numerosos congresos sobre Educación Matemática.
Email: rodolfoedandrea@yahoo.com.ar

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 97-121

Estados de conocimiento en el desarrollo de la secuencia numérica

Catalina María Fernández Escalona

Fecha de recepción: 2016-04-22
Fecha de aceptación: 2017-03-24

Resumen	Esta investigación trata de determinar los estados de conocimiento en el desarrollo de la secuencia numérica a través de las relaciones lógicas-ordinales que se da entre los términos numéricos. Partiendo de las citadas relaciones se contempla una evolución desde estados con ausencias de las mismas, pasando por estados de descubrimiento de relaciones con instrumentos secuenciales sencillos, a un estado en el que la estructura operatoria de seriación se refleja en la secuencia numérica propiciando su sistematización y, consecuentemente, el éxito operatorio. **Palabras clave**: Secuencia numérica; relación lógica ordinal; acción de contar.
Abstract	This research tries to determine the states of knowledge in the development of the numerical sequence through the logical-ordinal relations that occurs between the numerical terms. Likewise, one can also observe a developmental process in terms of logical-ordinal relationships, starting with states characterized by a lack thereof, then moving through states characterized by the discovery of relationships through simple sequential instruments, until a state is achieved in which the operational structure for seriation is reflected in the number sequence itself, leading to its systemization and consequently, operational success. **Keywords**: Number sequence; ordinal-logical relationships; the act of counting.
Resumo	Esta investigação trata de determinar os estados de conhecimento no desenvolvimento da sequência numérica por meio das relações lógico-ordinais que se dá entre os termos numéricos. Partindo das citadas relações se contempla uma evolução de estados com ausências das mesmas, passando por estados de descoberta de relações com instrumentos seqüenciais simples, a um estado no qual a estrutura operatória da seriação se reflete na seqüência numérica propiciando sua sistematização e, consequentemente o êxito operatório. **Palavras-chave:** Sequência numérica; relação lógica ordinal; ação de contar.

1. Introducción

1. Introducción

Se dirá que un escolar ha alcanzado el nivel máximo en el desarrollo de la secuencia numérica cuando sea capaz de tener un método sistemático en su reproducción. (Castro, Cañadas y Molina, 2010; Grize, 1979; Ortiz, 2009; Piaget, 1983).

Esto conlleva la aplicación de esquemas de seriación cíclica y doble subyacente a la secuencia numérica. Dicha aplicación pasa por el entendimiento de que el primer tramo de la secuencia (del 0 al 9) constituye un *ciclo* a partir del cual, y con una regla de combinación (seriación doble), se genera toda la serie de números naturales. Según la psicogénesis de la seriación (Piaget e Inhelder, 1976), si un escolar domina el ciclo, hasta alcanzar el éxito operatorio pasa por tres etapas: a) ~~No~~ no consigue repetir la secuencia del uno al cien, pero sí es capaz de reproducir tramos de la misma, b) Es capaz de contar del uno al cien pero recibiendo ayuda en el cambio de decenas, y c) Conoce un método sistemático para repetir la serie numérica, sabe que cuando se “agotan” los números que empiezan por "1" el siguiente es empezar por "2" y unir éste a todos los del ciclo, y cuando esto se termina se debe continuar con el "3", y así sucesivamente. (Fernández, 2015).

La secuencia numérica es vista desde una perspectiva de la estructura lógica de seriación. En este sentido, para llevar a cabo una planificación adecuada de actividades numéricas en Educación Infantil, se debería tener en cuenta la génesis del conocimiento, (Vergnaud, 2013), y estudiar la evolución que presentan los escolares ante tareas de seriación. Según dicha génesis, se consigue dominar antes las series en las que el criterio es sencillo, como la alternancia, frente a las series que se construyen a partir de una relación de orden como es el caso de los números naturales puestos en sucesión mediante un criterio cardinal (Clements, 1984).

En definitiva, se trata de un estudio de la secuencia numérica desde una perspectiva de la estructura lógica de seriación, con lo cual para estudiar el desarrollo de la misma, se debería empezar por situaciones pre-numéricas que se rijan por los mismos principios que la acción de contar (principio de correspondencia uno a uno y de orden estable) pero sin el uso de términos numéricos, para que el desconocimiento de los mismos no enmascare el verdadero conocimiento lógico-matemático subyacente al conteo (Briand, 1999).

El estudio del número como una serie implica estudiar la relación lógica ordinal existente entre los términos de la secuencia numérica ya que una serie se construye a través del encadenamiento aditivo. Esta capacidad alude al proceso de construcción de una *sucesión de siguientes*: A un elemento le continúa otro elemento y a éste otro y así sucesivamente según una relación asimétrica y biunívoca que genera una progresión en el sentido de Bertrand Russell y por consiguiente la serie (Brannon, 2002; Clark, 1983, Fernández, 2015).

Este trabajo está centrado en las nociones básicas del número, en su aspecto ordinal, que revierte gran dificultad y que llega a ser de gran importancia para la construcción matemática y didáctica del número (Fernández, 2010; Frege, 1884; Gillies, 2011; Ortiz, 2009; Russell, 1982). Se trata de un estudio sobre la naturaleza del conocimiento de la secuencia numérica, que posibilita el descubrimiento de relaciones lógicas ordinales entre sus términos. La manera de abordar dicho estudio es analizando la evolución de la comprensión de las relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica por parte del escolar mediante estados de conocimiento (Piaget y Apostel, 1986)

1.1. *Estados de conocimiento*

La opción que se ha elegido para la determinación de los estados es la de un razonamiento progresivo, a partir de los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores a las superiores, resumido y estructurado por etapas o aproximaciones. Cada aproximación corresponde a un estado diferente, que viene especificado por su descripción y justificación, así como por las competencias teóricas que le corresponden desde un punto de vista de la progresión de las capacidades dadas en un sujeto ideal.

1.1.1. Estado I

En el inicio de las primeras nociones secuenciales, el escolar no está aún en disposición de interpretar una serie desde el punto de vista lógico-ordinal. Teniendo en cuenta el subsistema lingüístico relativo a la seriación (Sinclair de Zwart, 1978), hay que pasar por tres fases previas hasta alcanzar la “serie comparativa en un sentido” y culminar con la “serie comparativa en los dos sentidos”; dichas fases consisten en asignar un término a cada elemento de la serie para diferenciarlos pero no para compararlos**.**

Por consiguiente, se establece que la primera aproximación para alcanzar las relaciones lógicas ordinales en cualquier serie es la diferenciación de sus elementos, a cada elemento le corresponde un único señalamiento o ser etiquetado una sola vez. Los sujetos que hacen un gesto rasante para describir la serie estarán por debajo de este estado.

1.1.2. Estado II

Una vez diferenciados los términos de una serie mediante el etiquetaje se pasa a la interpretación espacial o temporal de la misma, manifestándose los primeros esquemas comparativos entre sus términos.

Según Piaget (1983), la construcción del espacio matemático comienza con la topología, con en el *orden de los puntos sobre una línea*, lo que posibilita la construcción de referencias ordinales. De este modo, al indicar que un elemento está al lado del otro se está indicando el “siguiente inmediato”, y la cuestión de cómo se comparan dos términos cualesquiera no consecutivos se resuelve con las relaciones “hacia delante” ó “hacia atrás” tomando como referencia uno de los términos a comparar, que de esta forma se convierte en “primer y último elemento” al dividir la línea de puntos en dos clases: todos los que están delante y todos los que están detrás. (Dieudonné, 1989).

Análogamente, el orden temporal, como conocimiento igualmente infralógico constituye un soporte intuitivo importante de referencias ordinales.

1.1.3. Estado III

En el estado anterior la secuencia que se usaba como instrumento de etiquetación y comparación era la línea topológica en la que no es necesaria la verbalización. En este estado es necesario que el individuo aplique esquemas secuenciales mediante series sencillas como la alternancia, se empieza a caracterizar cada elemento de la serie como único al compararlo con el anterior y siguiente inmediato. Las relaciones ordinales entre elementos consecutivos se manifiestan mediante una dicotomía, y esto, evolutivamente hablando, son conceptos primarios (Piaget & Inhelder, 1976; Sinclair De Zwart, 1978; Stegmüller, 1970)

Usando la alternancia como instrumento secuencial, se puede llegar a lo más alto teniendo en cuenta las ideas evolutivas de los autores citados anteriormente: a)*Etiquetación*; b)*Serie comparativa en un sentido*: Determinar una posición ordinal empezando por el primer elemento; c)*Serie comparativa en los dos sentidos*: se alcanza cuando se llega a determinar una posición ordinal a partir de otra dada como dato. Los esquemas lógicos matemáticos que se manifiestan son: esquemas de primero y último; *cada elemento ocupa un lugar determinado*, y, *comparativa en dos sentidos* ya que un término cualquiera de una clase es anterior a uno y posterior a otro de la clase complementaria.

1.1.4. Estado IV

Se utiliza la acción de contar para la comparación lógica-ordinal entre los elementos de la serie. En el estado anterior la secuencia que se usaba como instrumento de etiquetación y comparación era la alternancia, mientras que en este estado es necesario que el sujeto disponga de una secuencia estable y convencional y del principio de correspondencia uno a uno de la acción de contar (Sarnecka & Gelman, 2004).

Además de aplicar los mismos esquemas secuenciales que en el estado anterior, será necesario aplicar esquemas secuenciales y relaciones lógicas ordinales propias del conteo como es la relación anti-simétrica y que todo elemento es tratado simultáneamente como primero y último (Muldoon, Lewis & Towse, 2005). Se manifiestan esquemas lógico-matemáticos como:

- *La sucesión de siguientes es una característica que se mantiene ante cualquier división realizada en la secuencia numérica*: el que un término sea el siguiente de otro es independiente del término elegido para el inicio.

- *Esquemas acumulativos del conteo*: Un término al ser enumerado, pasa de ser siguiente de uno dado a ser el primero de una nueva división de la secuencia a partir del cual se puede empezar a contar.

1.1.5. Estado V

Se relacionan dos términos cualquiera de la secuencia numérica a la que se ha sometido, previamente, a una correspondencia serial con la alternancia.

En los estados anteriores se comparaban dos elementos de una serie lineal discreta mediante la alternancia (Estado III) o el conteo (Estado IV). Pues bien, en este estado se sustituye la serie lineal por la secuencia numérica, se trata de comparar sus términos mediante la alternancia.

Se aplican esquemas secuenciales tales como: *"anterior"* y *"posterior"* mediante un método sistemático de construir la secuencia numérica vía la correspondencia serial ó contar de dos en dos empezando por uno.

El dominio de este instrumento secuencial supone el logro en la *etiquetación, serie comparativa en un sentido y serie comparativa en los dos sentidos*.

1.1.6. Estado VI.

Se relacionan ordinalmente dos términos cualquiera de la secuencia numérica, en ella cada término puede ser considerado en sí mismo en cuanto a sus relaciones lógicas-ordinales con todos los demás.

En este estado los sujetos alcanzan la *sistematización de la secuencia numérica* según la estructura lógica de seriación, y actúan sobre ella con estrategias ligadas a la estructura serial; todo ello hace que los escolares sean capaces de razonar ordinalmente sobre la secuencia numérica, tienen un dominio de la misma, lo que permite: contar de n en n, solucionar a+b y a-b con el llamado *recuento progresivo, interpretar las tablas de multiplicar y* afrontar toda la aritmética a partir del dominio ordinal de la secuencia numérica. (Geary, 2006)

En lo que sigue se tratará la validación empírica de los estados de conocimiento.

2. Método

2.1. Participantes

Se toma una muestra representativa, según el medio sociocultural, urbano o rural, y según el tipo de enseñanza, pública o privada, de la población de escolares correspondientes al segundo ciclo de Educación Infantil de Málaga capital y provincia. Se pretende realizar un estudio transversal.

Se eligen cinco centros escolares con las siguientes características:

a. Dos centros de la capital, uno público y otro privado, denominados B y C respectivamente.

b. Tres centros de la provincia:

b1. Dos urbanos, uno público y otro privado (M y R)

b2. Uno público rural (H)

El criterio para la elección de la muestra viene dado por una distribución por edades dentro de cada curso. Los escolares que participan son elegidos entre aquellos que se ofrecen voluntarios para realizar la entrevista. El sistema de elección es el siguiente: se elige el quinto de la lista, si ese no está en las condiciones anteriormente señaladas, entonces se elige el siguiente y así sucesivamente.

	3 AÑOS	4 AÑOS	5AÑOS	NIÑOS/ NIÑAS
CAPITAL- PÚBLICO-B	3	3	3	4/5
CAPITAL- PRIVADO-R	3	3	3	4/5
PROVINCIA- PÚBLICO-M	3	3	4	5/5
PROVINCIA- CONCERTADO-R	3	4	3	6/4
RURAL- PÚBLICO-H	3	3	3	3/6

Tabla 1. Composición de la muestra

En total la muestra está compuesta por 47 escolares del segundo ciclo de Educación Infantil, 22 niños y 25 niñas, inicialmente se pretendía que el número de niñas y niños coincidieran, pero no fue así por las peculiaridades del colegio rural H.

2.2. Instrumento

Se usa las entrevistas clínicas sobre la base de un material concreto como instrumento para llevar a cabo el estudio empírico cualitativo.

El material empleado en esta prueba es el que aparece en las fotos de la figura 1.

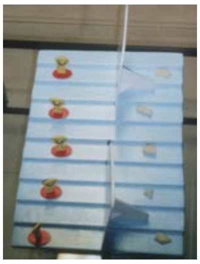


Figura 1. Material usado en el estudio empírico cualitativo

2.3. *Procedimiento*

Cada uno de los seis Estados de Conocimiento lleva asociado una tarea, así el Estado K (K varía de I a VI) lleva asociada la tarea K, entonces el procedimiento es el siguiente:

> Para cada uno de los estados su tarea asociada conlleva, a su vez tres situaciones. Para la situación K1 (primera de la tarea K) se ha realizado una clasificación de respuestas atendiendo a que el niño realizara o no la actividad. Si la realiza correctamente se analiza el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces pasa a realizar la situación K2 (segunda de la tarea K). Si no realiza con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasa a realizar la situación K3 (tercera de la tarea K). Si no realiza con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasa a realizar nuevamente la situación K1 (primera de la tarea K). Si la realiza correctamente se analiza el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces se da por finalizada la tarea.

A continuación, las figuras 2, 3, 4, 5, 6, y 7 presentan, de manera esquemática, el procedimiento seguido en el desarrollo de las entrevistas para cada una de las tareas asociadas a los estados correspondientes.

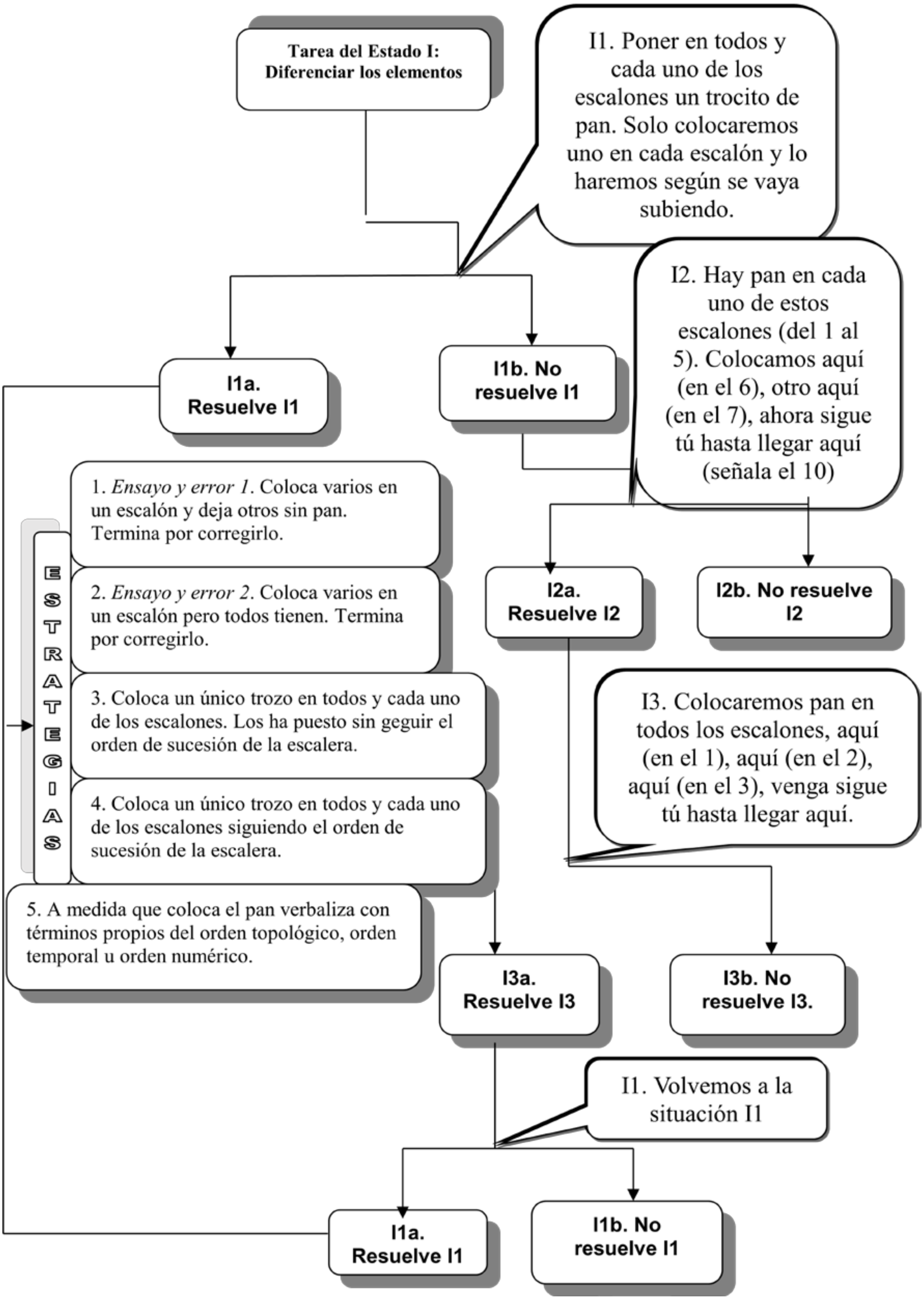


Figura 2. Procedimiento de la Tarea 1 asociada al Estado I

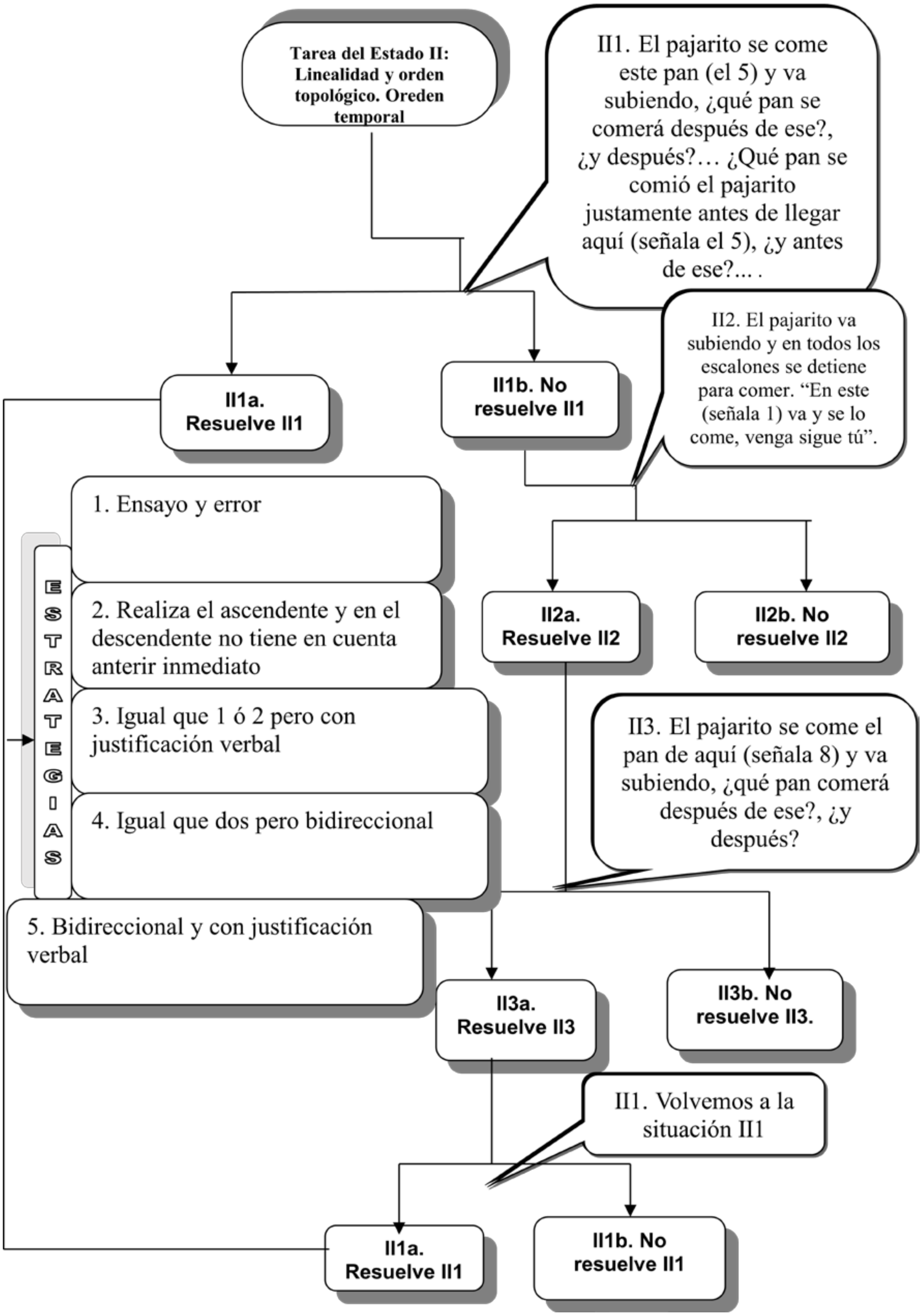


Figura 3. Procedimiento de la Tarea 2 asociada al Estado II

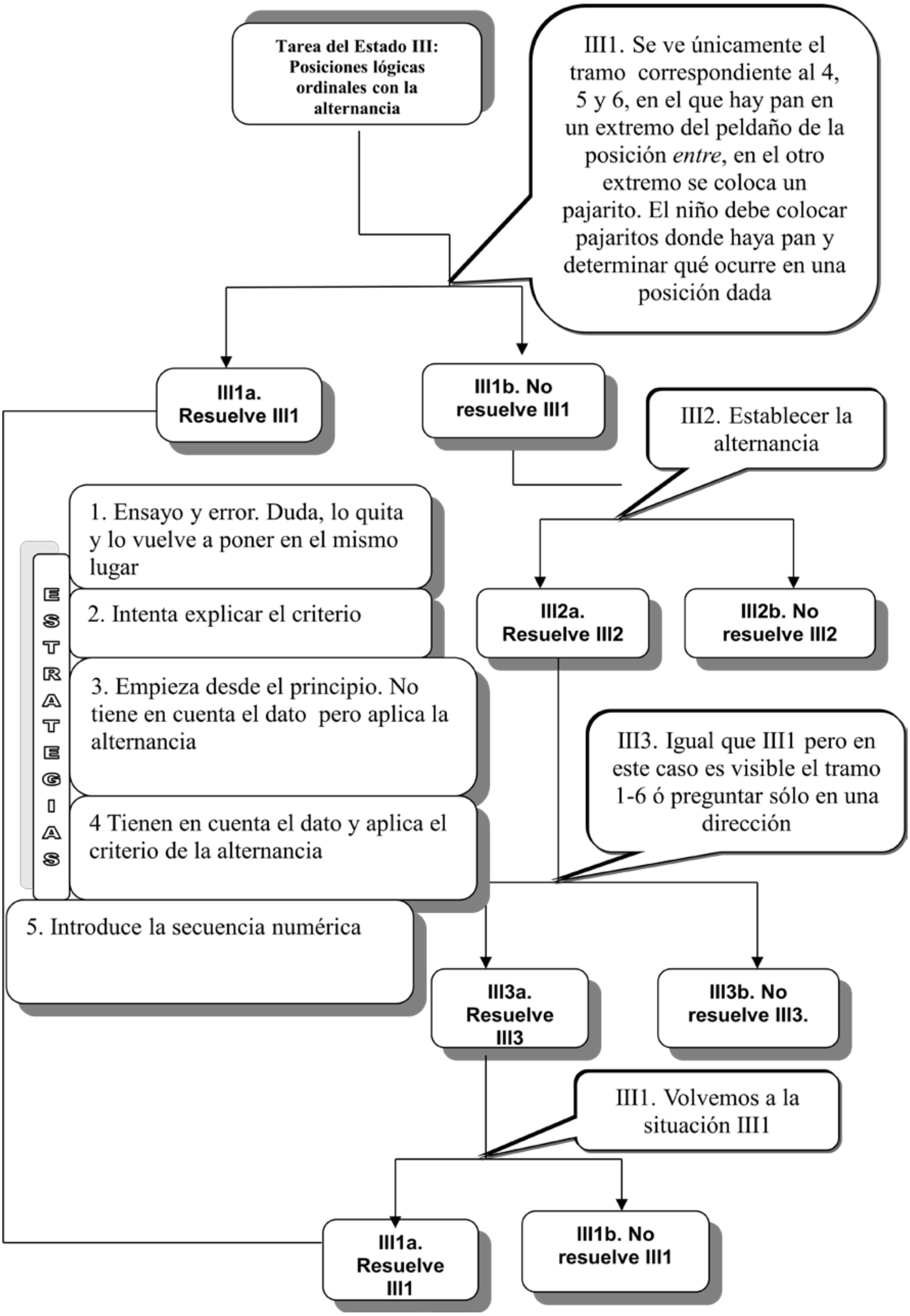


Figura 4. Procedimiento de la Tarea 3 asociada al Estado III

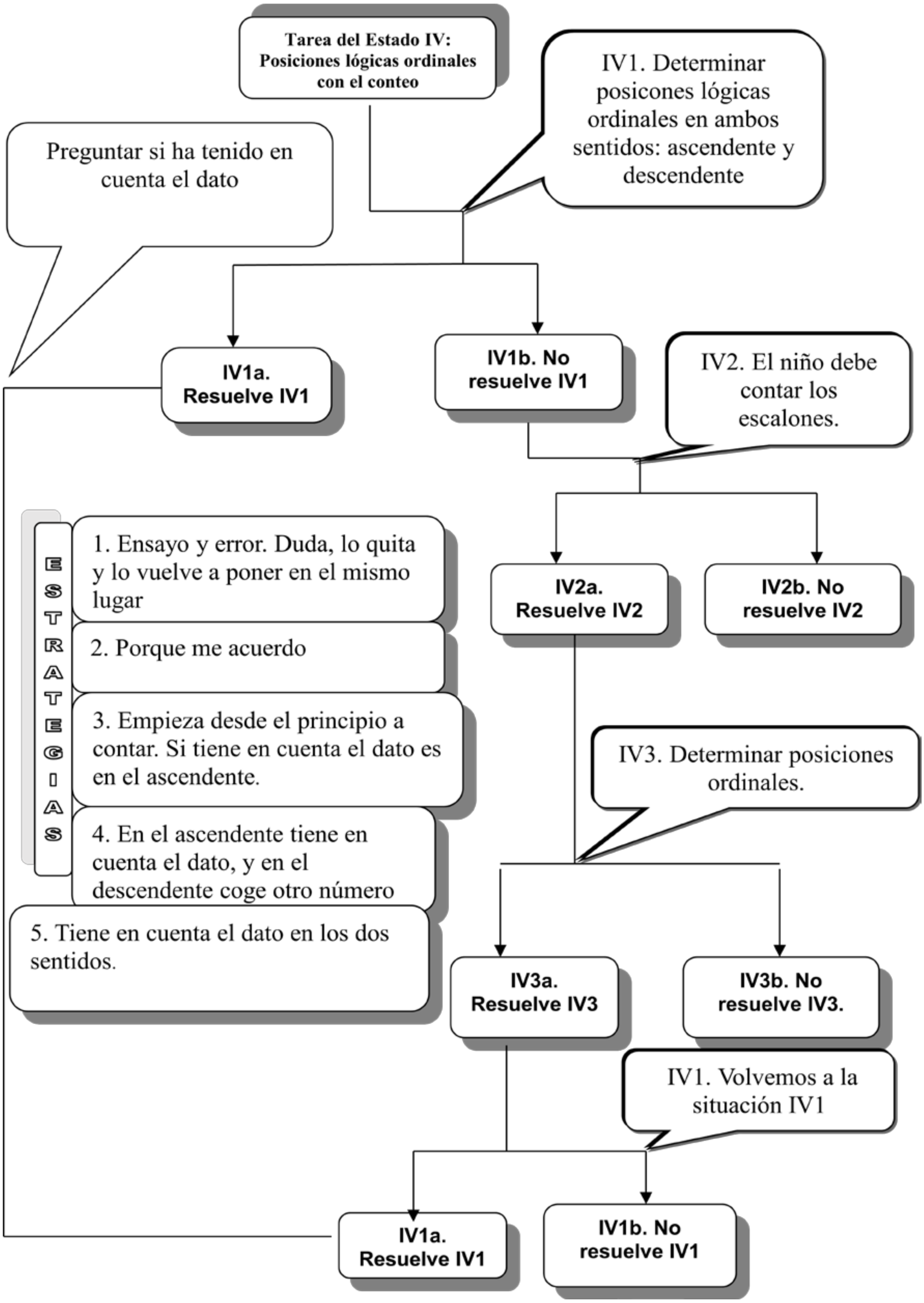


Figura 5. Procedimiento de la Tarea 4 asociada al Estado IV

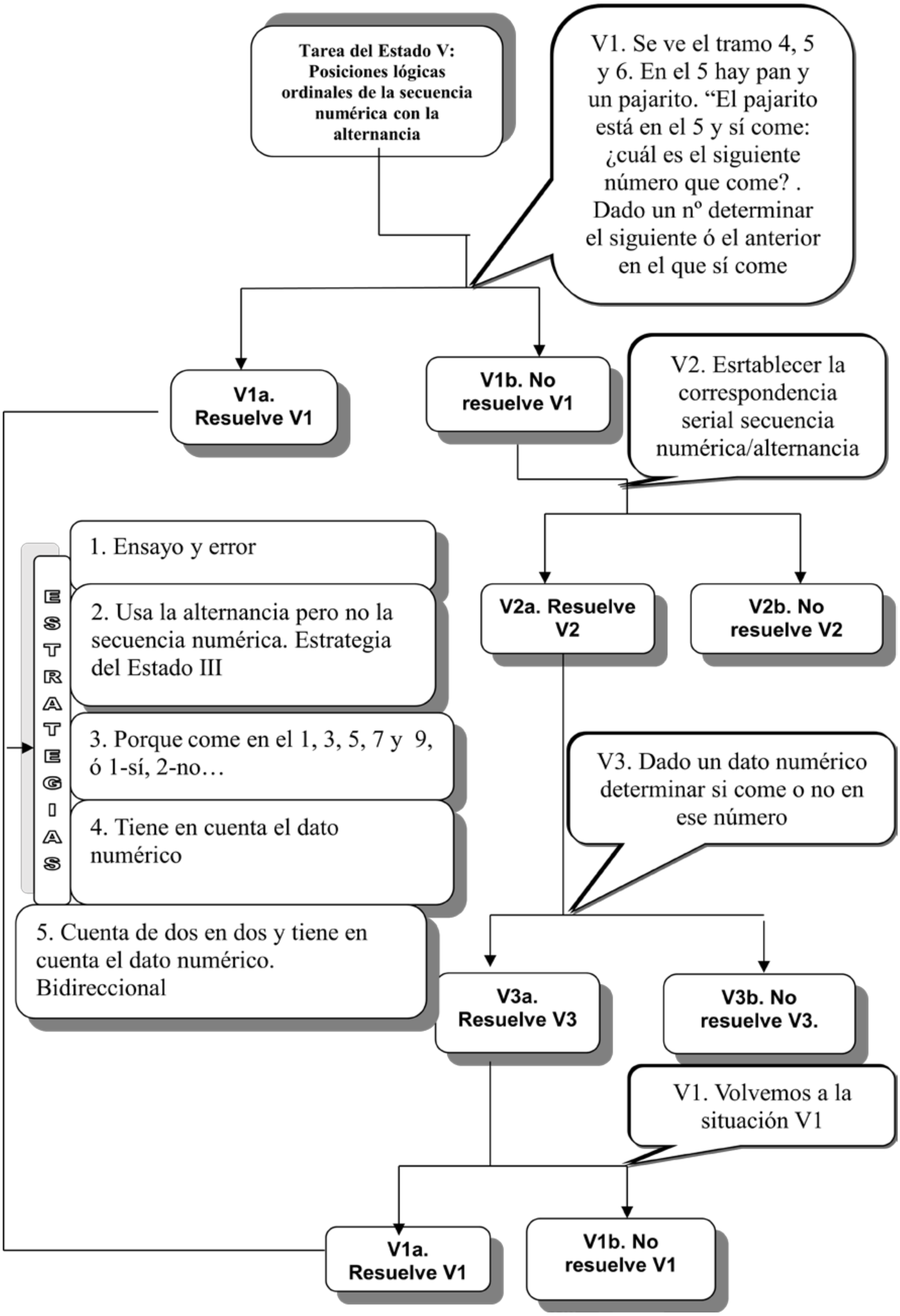


Figura 6. Procedimiento de la Tarea 5 asociada al Estado V

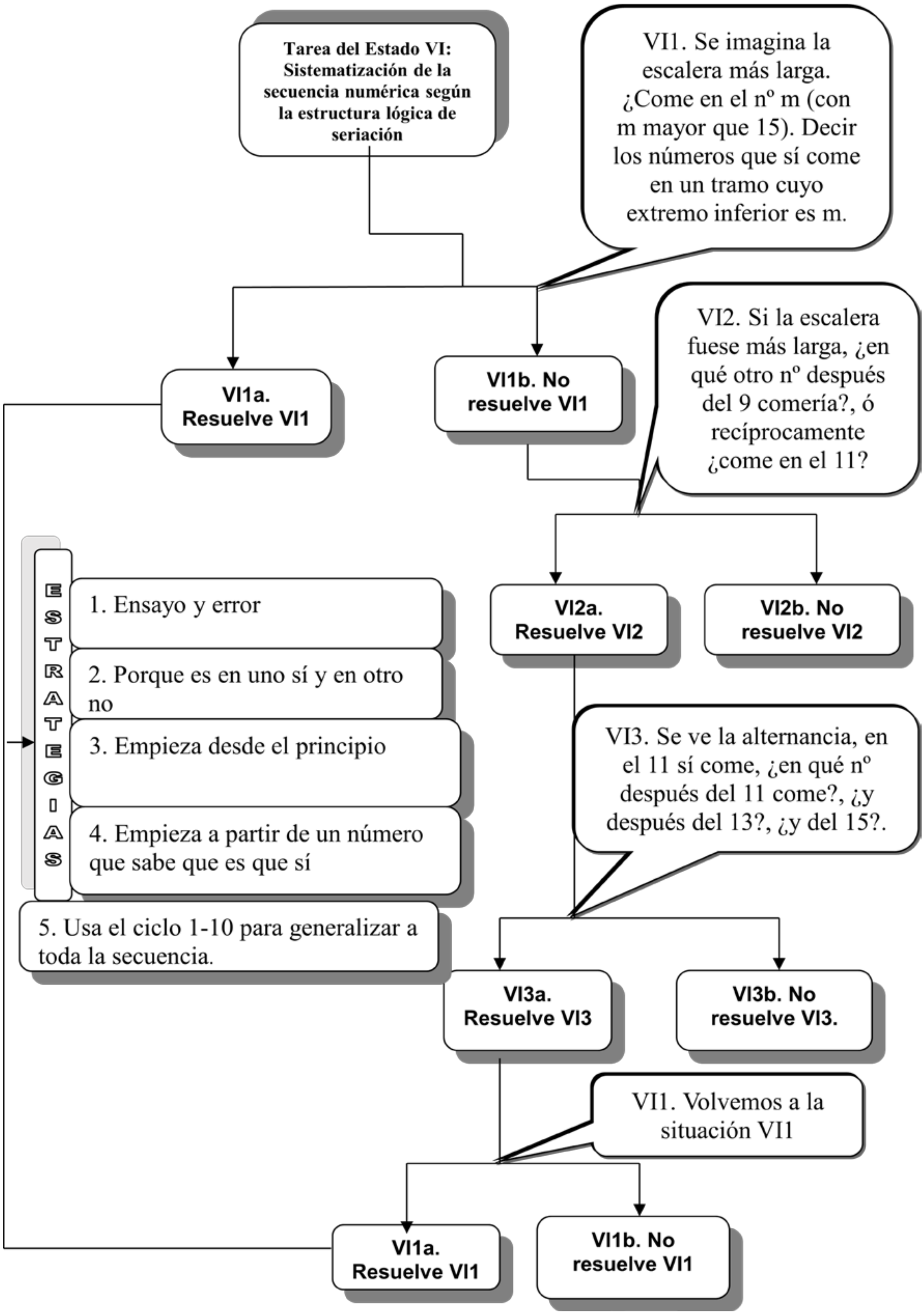


Figura 7. Procedimiento de la Tarea 6 asociada al Estado VI

2.4. Análisis de resultados

Un escolar supera con éxito la tarea del Estado K si realiza correctamente la situación K1 en cualquiera de sus dos presentaciones, es decir, si están en la categoría K1a. En el caso que un sujeto se encuentre en esta situación se observará la estrategia seguida y se codificará con un número del 1 al 5, según la tabla 2, pasando al análisis de respuestas según las coordenadas que presenta cada individuo en la realización de dicha tarea.

ESTADOS		ESTRATEGIAS
I.	***1.***	Ensayo y error 1
	2.	Ensayo y error 2
	3.	Coloca un único trozo en todos y cada uno de los escalones. Los ha puesto sin seguir el orden de sucesión de la escalera
	4.	Coloca un único trozo en todos y cada uno de los escalones siguiendo el orden de sucesión de la escalera
	5.	A medida que etiqueta verbaliza con términos propios del orden topológico, temporal o numérico.
II.	***1.***	Ensayo y error.
	2.	En el descendente no tiene en cuenta el anterior inmediato sino cualquier anterior
	3.	Igual que el 1 ó 2 pero con justificación verbal
	4.	Lo hace correctamente en los dos sentidos
	5.	Igual que 4 pero con justificación verbal
III.	***1.***	"Porque me acuerdo".
	2.	Intenta explicar el criterio
	3.	Empieza desde el principio, no tiene en cuenta el dato, pero aplica el criterio de la alternancia.
	4.	Tiene en cuenta el dato y aplica el criterio de la alternancia.
	5.	Introduce la secuencia numérica ó alude a la alternancia como instrumento para contar
IV.	***1.***	Ensayo y error
	2.	"Porque sí".
	3.	Empieza desde el principio a contar. Tiene en cuenta el dato si es ascendente, cuando es descendente empieza desde uno.
	4.	Tiene en cuenta el dato si es ascendente y en ocasiones cuando es descendente. En algunos casos y si es descendente, coge otro número para razonar sobre él.
	5.	Cuenta desde 5 e introduce términos ordinales, cuenta de dos en dos, etc. Bidireccional.
V.	***1.***	Porque sí.
	2.	Usa la alternancia, pero no la secuencia numérica.
	3.	Empieza desde el principio
	4.	Tiene en cuenta el dato
	5.	Tiene en cuenta el dato y cuenta de dos en dos. Bidireccional

VI	***1.***	Porque sí.
	2.	Porque es en uno sí y en otro no
	3.	Porque come en el 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15…
	4.	Porque van de dos en dos y tiene en cuenta un número distinto de uno.
	5.	Usa el ciclo 1-10 para generalizar a toda la secuencia

Tabla 2. Codificación de estrategias

2.4.1. Realizar con éxito la tarea asociada al Estado VI: (VI1a) ó (VI1b,VI2a, VI3a, VI1a)

Si el escolar ha superado la tarea asociada al Estado VI con la estrategia más evolucionada (5), quiere decir que es capaz de aplicar esquemas lógicos de seriación cíclica a la secuencia numérica, trasladando las relaciones lógicas ordinales entre los términos presentes en el tramo 1-10 a toda la secuencia. En esta situación se encuentran a REm. (5,4) y a MMa. (5,8), CEd. (4,11).

MMa (5,8). **I** – … ¿Y en el 45 hay pan?. **N** – *Dice que sí con la cabeza.*. **I** – ¿Por qué?. **N** –Porque es igual que el 5 y el 35. **I** – Ah, ¿y en el 47?. **N** – *Dice que sí con la cabeza.* **I** – ¿También? ¿Por qué?. **N** – Porque es igual que el 7. **I** – ¿Y en el 36?. **N** – *Dice que no con la cabeza.*. **I** – ¿Por qué?. **N** – Porque el 6 *(señala el 6)* está sin pan.

REm. (5,4). **I** – Pero, ¿por qué sabes tú que en el 49 sí come?. **N** – Porque....Porque ha cogido dos escalones del 17 al 19. **I** –. ¿En el 66, come?. **N** – No. **I** – ¿Por qué?. **N** – Porque en el 65 come y en el 66 no, en el 67 sí. **I** – Pero, ¿tú por qué sabes que en el 65 es que sí?. **N** – En el ...sí, sí. **I** – Ah, en el 65 es que sí, ¿por qué los sabes?. **N** – Porque del 3 al , digo del 63 al 65 come. **I** – Y..¿Tú sabes si come en el 92?. **N** – No.. **I** – ¿No come en el 92? ¿Por qué?. **N** – Porque ha cogido uno, ...¿en el 42 has dicho?. **I** – En el 92. **N** – Porque tenía que comer en el 93. **I** –¿Por qué sabes tú que en el 93 sí? **N** – Porque del 91 al 93 se come. **I** Venga, dime en todos los que come. En el 83 sí, ¿después? **N** – En el 85 sí, en el 87 también, en el 89 también, en el 91 también, en el 93 también, en el 95 también, en el noventa y ..., a ver, en el 97 también, en el 99 también, en el noventa y....noventa y.. también come.

CEd. (4,11). **N** – En el 21 sí comía, en el 22 no, no en el 23 sí, 24 no, en el 25 sí y en el 26 no, y en el 27 sí y en el 28 no y en el 29 sí. **I** – Yo te he dicho en el 32. **N** – En el 31 sí y en el 32 no. **I** –. Y si yo te digo en el 48. **N** – *Piensa en silencio.* **I** – Pero, ¿cómo lo estás pensando? Dilo en voz alta. **N** – 26, 27, 28, 29, ,30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41 sí, en el 42 no, en el 43 sí, en el 44 no, en el 45 sí, en el 46 no. 47 sí, en el 48 no y en el 49 sí. **I** – Pero yo te he dicho 48. **N** – En el 48 no come **I** – Y si yo ahora te digo en el ..., 57. **N** – *Piensa callada.* **I** – ¿En el 57 qué? Dilo en voz alta lo que estás pensando. **N** – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, ...40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59.

En el 1 sí, en el 2 no, en el 3 sí, en el 5 sí, en el 8 ..., en el 7 sí, en el 9 sí. **I** – Entonces, ¿qué pasa en el 57?. **N** – En el 57 sí, cuenta.

Si usa estrategias menos evolucionadas que la **5**, significará que no ha llegado a extrapolar el tramo 1-10 al resto de la secuencia (en el sentido de seriación cíclica), pero conoce la relación lógica ordinal entre los términos numéricos, con números mayores que 10, versus alternancia como instrumento comparativo, por tanto, aplica esquemas lógicos-matemáticos propios del estado V a un tramo de cuyo extremo inferior es mayor que 10.

Por consiguiente, se obtiene el resultado número 1.

2.4.2. Realizar con éxito la tarea asociada al Estado V: (V1a) ó (V1b,V2a, V3a, V1a)

El 23.4% de la muestra presenta las coordenadas V1a. Estos escolares, siempre y cuando la estrategia seguida sea **3** o mayor que **3** (la **2** es una estrategia propia de estados inferiores) estarán usando relaciones lógicas ordinales entre los términos numéricos en el tramo 1-10, son capaces de establecer el instrumento secuencial, determinar posiciones ordinales y lógicas ordinales con ese instrumento y usarlo mentalmente prevaleciendo el criterio numérico.

Las coordenadas (V1b, V2a, V3a, V1a) las presentan RJu (3,11) CEd. (4,11), BJu. (5,4). No es significativo que se haya superado la tarea en la segunda ocasión de la situación V1, ya que CEd (4,11) es uno de los tres escolares que después realizarán con éxito la tarea del estado siguiente, pero hay que tener en cuenta que esta niña ha superado la situación con una estrategia del tipo 4, es decir tiene en cuenta el dato y actúa mentalmente de forma sintética ante la correspondencia serial secuencia numérica/alternancia.

CEd. (4,11). **I** – …Entonces come en el 5, ¿qué número viene después en el que también come? **N** – El 6. **I** – No, tiene que ser en el que sí come. Bueno, el Piolín en el 5 come, ¿de acuerdo? Ese es el 5 y come. Pues si come en el 5, ¿come en el 8?. **N** – No. **I** – ¿Por qué?. **N** – Porque no está. **I** – Éste es el 5, Mira a ver si ese es el 8. **N** – ¿Quito esto *(el muro)*? **I** – No, no, ahí no se ve si ese es el 8. …….**I** – Pero, ¿por qué no está? Tienes que saber que en el 5, éste (5) es el 5, que en el 5 sí come. …..**N** – Es no porque en el 7 comía y en el 8 no. **I** – Muy bien, en el 9, ¿come?......**N** – Porque en el 8 no comía y en el 9 sí. **I** – Entonces, después del 7, ¿en qué número come?. **N** – En el 8. **I** – El 8 es el que viene después del 7 pero ¿es en el que sí come?. **N** – En el 8 no comía y en el 9 sí.

2.4.3. Comparación de respuestas de las tareas asociadas a los Estados V y VI

En el Estado V se da la construcción del instrumento serial en el tramo 1-10, hay por tanto un soporte concreto material, mientras que en las tareas del Estado VI se da la aplicación de ese soporte a otros tramos de la secuencia numérica distinto del 1-10.

1. Hay escolares que no alcanzan a resolver la tarea asociada al Estado VI pero han llegado a superar las situaciones VI2 y VI3 además de la tarea asociada al Estado V. Presentan una de estas dos opciones:

✓ No determinan el *primer elemento* del tramo al que aplicar el instrumento secuencial "a-sí, a⁺-no…." del que disponen y conocen (pues son escolares que han superado la tarea del Estado V) como es el caso de RJa (4,11), RAl (5,8) ó MNu. (6,2).

RAl (5,8) I.Cuando lleguemos al 20, en el 20 ¿habrá pan o no?. **N** – No. **I** – ¿Por qué? **N** – Sí, sí, sí. **I** – ¿Por qué?. **N** – Por ... porque en el 20 hay pan ...hasta el 22... Entonces en el 20 y el 22...

✓ Tienen un método sistemático para averiguarlo: "empezar desde 1 con el instrumento secuencial "a-sí, a⁺-no….", pero ese método se dificulta cuando se trata de un número grande (resuelven el problema del *primer elemento*) y no llegan a dar la solución. En esta situación están CNa. (5,7) ó REl. (6,2).

REl. (6,2). I –Entonces, ahora, Elena, dime desde el 45,... ¿en el 45 come?.**N** – *(Se queda un rato en silencio pensando.)* **I** – ¿Cómo lo estás pensando? ¿Contando desde el 19? **N** – Es que ....*(se pone la mano en la cabeza pensativa).* **I** – ¿Qué has empezado desde el 1? **N** – Porque es que como...**I** – ¿Qué has empezado desde el 1 a contar? En el 1, en el 3,... ¿todo eso?. **N** – Y si no, ¿cómo?

Con ello se concluyen los resultados 2 y 3.

2. En este punto están los escolares que no llegan a resolver la tarea asociada al estado V pero han realizado la segunda y tercera situación, es decir están en V2a y V3a, y que con respecto a la tarea del estado VI no han superado la segunda.

No saben determinar el siguiente número en el que sí come en el tramo 1-10, por eso no superan con éxito la tarea asociada al Estado V, pero al realizar correctamente las situaciones V2 y V3 muestran competencias en la construcción del instrumento secuencial (situación V2) y en la determinación de una posición lógica ordinal en el tramo 1-10 (situación V3). Y con respecto al Estado VI no construyen la secuencia precisamente porque no saben decir el siguiente número en el que sí come y por tanto a partir de 9 no saben continuar, por lo que no superan la situación VI2, es decir son sujetos que aunque, les resuelva el problema del primer elemento, no saben continuar en tramos cuyo extremo inferior es superior a 10.

En esta situación se encuentran: RAn. (4,2), CSu. (4,10), BIn. (6,2), CPa (5,9).

RAn. (4,2), I – Y así van todos, vale. Entonces, ¿en el 12 hay pan?.**N** – No. **I** – ¿Por qué?. **N** – Porque yo cuento en el 1 y en el 2 y en el 3 y en el 4 y en el 5 y en el 6 en el 7 y en el 8 y en el 9 y en el 10 y en el 7 y en el 8 y en el 9 y en el 10 y en el 12 y en el 13, y en el 14 y en el 12 no hay pan[1]. …**I** – Muy bien, Antonio, entonces después del 13 ¿en qué número come?. **N** – Voy a contar. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... 9, 10, el 11, el 12, el 13,el ... , después del 13, el ...14. **I** –Es el número que le sigue a 13 que sí come. **N** –¿Qué?… **I** – ¿Y en el 22 hay pan?. **N** – No. **I** – ¿Por qué?. **N** – Sí, sí, sí. **N** – Porque... es que, es que, es que... el primero que sí[2]. **I** – Después del 22 ¿qué números vienen en los que sí come?. **N** –¿Qué?…

Con todo ello se obtiene el resultado número 4**.**

3. Con respecto a la tarea V se dan las coordenadas (V1b, V2a,V3b), y para el estado VI se dan: (VI1b, VI2b, VI3b).

En esta situación se encuentran RJa (4,6), y la cuestión central está en que este niño no sabe determinar el siguiente número a uno dado en el que sí come, tanto en el tramo 1-10, como en otros tramos de la secuencia numérica. La construcción del instrumento secuencial no es sintética, dividiéndolo en dos: por una parte está al alternancia y por otra la secuencia numérica.

4. Este punto es igual que el anterior pero con respecto a la tarea del estado VI los escolares no han superado la situación VI2, presentan las coordenadas, con respecto a la tarea del estado V: (V1b, V2a,V3b), y para el estado VI: (VI1b, VI2b).

Están en esta situación: RMa (4,11), ROl. (5,3), construyen el instrumento secuencial en el tramo 1-10, pero no lo usan para determinar posiciones ordinales, ni lógicas ordinales, ni son capaces de extender la secuencia construida a otros tramos distintos del señalado.

RMa. (4,11) **I** –¿En qué número, después del 5,... el Piolín come? **N** – ¿Qué número? **I** – Después del 5 come. -**N** – *Pone un Piolín en el escalón 7.* **I** – Pero, ¿qué número es ese? **N** – Ese, el 7[3]. … **I** – La escalera es más larga, ¿eh? Está el 11, el 12, el 13, ... ¿ En qué número después del 9 come, cariño?. **N** – En el 3. **I** – ¿En el 3 come después del 9? ¿Por qué?. **N** – Porque... porque está mirando a los otros y por eso... quiere comer, pero ya no quiere comer.

Luego tenemos el resultado número 5.

5. Respuestas de la tarea asociada al estado V con las coordenadas: (V1b, V2b), y con respecto al estado VI: (VI1b, VI2b).

---

[1] Aplica sí-no a la secuencia, pero no sabe determinar el siguiente en la secuencia que es sí por eso es V1b

[2] La determinación del primer elemento es capital

[3] Se mueve mentalmente con la alternancia y con los números por separado.

En esta situación se encuentran: MMa (5,5), MPa. (5,8), CFe. (3,11), BMa (4,4), BLi. (4,4), BRu (4,10), BLo (5,7). Estos niños y niñas no han sido capaces de establecer el instrumento secuencial en el tramo 1-10, ni en ninguno otro.

MMa (5,5). I – Mira los piolínes están colocados en uno sí y en otro no, y este (1) es el 1, dime los números en los que están colocados estos piolines (señala los de los escalones 3, 5, 7 y 9. **N** – *(Empieza hablando muy bajito)* ...el 8 y el ... el 9. (*señala el Piolín del escalón 9.* **I** – Dime los números sólo de los escalones que tiene pajaritos.. **N** – El 1 y el ... el 2 (3).... el 3, el 4(5), el 5(7), el 6 (9).

2.4.4. Realizar con éxito la tarea asociada al Estado IV: (IV1a) ó (IV1b,IV2a, IV3a, IV1a)

Se empieza el análisis con los escolares que de primera instancia han resuelto la situación IV1 de la tarea asociada al estado IV; son los que desde el principio tienen en cuenta el dato numérico y usan la acción de contar.

Los que superan la situación con estrategia 5 llegarán a lo más alto en la prueba, como es el caso de REm (5,4), RAl (5,8), MMa (5,8), MNu (6,3), CEd (4,11). Que realicen con éxito la tarea de este estado con la estrategia señalada, significa que tienen en cuenta el dato de manera bidireccional, cuentan de dos en dos, introducen términos ordinales y son capaces de establecer relaciones lógicas ordinales con la acción de contar. Esto lo podemos observar en el siguiente ejemplo:

MMa, (5,8). I – … Éste (5) es el 5, ¿por qué sabes que éste (7) es el 7?. **N** – Porque me paso el 6. **I** – Ahora sólo dejamos este que está en el 7. Quiero que sabiendo que ese es el 7 pongas uno en el 3. **N** – Coloca uno en el 3. I–¿Por qué sabes que éste (3) es el 3?. **N** – Porque he contado para abajo. **I** – ¿Cómo?. **N** – Porque me paso al 6, al 5, al 4 y al 3

Los que pasan la tarea con la estrategia 4 significa que tienen en cuenta el dato de manera unidireccional, pero en sentido descendente cogen otro dato y a partir de él razonan como es el caso de CLu. (5,4).

CLu. (5,4). I – Claro, pero si uno está aquí, ese es el número 5, ¿qué has hecho para adivinar que éste (9) es el número 9. **N** – Pues he hecho 5, 6, 7, 8 y 9 *(va señalando con el dedo los escalones).* **I** Ahora (*quita el Piolín 9)* éste (5) es el número 5, yo quiero que sabiendo que es el número 5 coloques uno en el número 3. **N** – Yo lo he puesto porque yo sé cual es el número 3. *(Coloca uno en el escalón 3).* **I** – Ahora ponemos uno en el número 9 *(lo pone)* como tú habías dicho antes. Quiero que pongas uno en el número 7, ¿de acuerdo? Pero sabiendo que éste (9) es el número 9 **N** – Está chupao, porque el 6 es ahí *(pone un Piolín en el escalón 6).* **I** – ¿Y por qué sabes que es ahí?. **N** – Porque, mira, aquí éste el 6 (6). y este (7) es el 7.

Resuelven la tarea con la estrategia 3 los siguientes escolares: REl (6,2), RJu (3,11), RAn (4,2), RJa (4,6), REl (6,2), MJu 4,2, MPa (5,8), CSu (4,10), HCi (5,8). Se caracterizan porque en sentido ascendente tienen en cuenta el dato para localizar una posición ordinal a partir de otra mediante el conteo, pero en sentido descendente empiezan desde uno, siendo una estrategia menos evolucionada que la anterior, pero se siguen manteniendo los mismos logros.

Los que resuelven la tarea con estrategias inferiores a 3 son los que lo hacen por ensayo y error. Han tenido dificultad a la hora de considerar dos números simultáneamente, al tener que localizar una posición ordinal a partir de otra, pero resuelven fácilmente el problema de localizar una posición ordinal a través del conteo.

2.4.5. Realizar con éxito la tarea asociada al Estado III: (III1a) ó (III1b, III2a, III3a, III1a)

El 40,4% de la muestra presenta la coordenada (III1a). Cuando la estrategia seguida sea 2, significa que conoce el criterio de la alternancia y actúan con ese razonamiento (“porque en uno hay y en otro no”, “porque da un salto”, etc.) pero no tienen en cuenta el dato, ni empiezan desde uno (les faltaría un método sistemático), por tanto actúan por ensayo y error hasta encontrar la solución, aunque cuentan con un instrumento secuencial, conocen el criterio pero les falta el *primer elemento* que genera la sucesión.

Es significativo la frase de RAI (5,8) cuando se refiere a la alternancia como instrumento secuencial para contar: “Porque...porque **he contado** y habías dicho uno sí, otro no, otro sí. *(Coloca los dedos en los escalones 1, 2, 3 y 4)* “

Seis escolares presentan las coordenadas (III1b, III2a, III3a, III1a), cuatro de ellos la realizan con estrategia menor ó igual a 2, y uno con la estrategia 3, ninguno logrará realizar la tarea del estado V.

2.4.6. Comparación de respuestas de las tareas asociadas a los Estados III, IV y V

En estos tres estados se da la construcción de un instrumento secuencial, se trata de analizar y estudiar cuando los escolares usan el instrumento secuencial propio del estado V en función de los instrumentos construidos en los dos estados previos.

2.4.6.1. Realizan correctamente cada una de las tareas asociadas a los estados.

Se presentan estas ternas de estrategias: (2, 3, 2) (4,5,4), (5, 5, 5), (5, 5, 4), (3,3,3), (3, 3, 2) (3,4,2) (4,4,2), (2,4,2) (4, 3, 2) (1,2,1). La estrategia del estado V nunca mejora la del estado III, en todo caso la iguala. Las actuaciones del tipo (x, y, 2) muestran que los escolares prefieren usar, los instrumentos secuenciales propios de los estados III y IV, por separado para resolver problemas propios del estado V. Pero ninguno de ellos alcanza el estado VI.

Los que actúan de la forma (4, 4, 2), que a pesar de conseguir buenos rendimientos en las tareas asociadas a los estados III y IV, no consiguen razonar con los esquemas lógicos matemáticos propios del Estado V.

Las ternas del tipo (x, y, 3) únicamente aparecen cuando x e y toman también el valor 3, ello significa que para el uso de los instrumentos secuenciales de cualquier estado se debe disponer de un método sistemático.

Cuando aparece (x, y, 4) ó (x, y, 5), se da que x e y toman valores mayores ó iguales a 4, y ello significa que los escolares utilizan la alternancia y el conteo para determinar posiciones lógicas ordinales pues tienen en cuenta el dato, y es cuando usan la correspondencia serial como instrumento secuencial para determinar posiciones lógicas ordinales. Entre ellos están los que presentan la posibilidad de alcanzar el Estado VI.

2.4.6.2. Resuelven las tareas asociadas a los estados III y IV pero no resuelven la del estado V.

Cuando no se supera la situación V3, es decir cuando con respecto al estado V se tienen las coordenadas (V1b, V2a, V3b), y se han superado las tareas correspondientes a los estados III y IV, se considera que, aunque se logre establecer el instrumento secuencial, éste no le sirve para resolver problemas de ordinación, a pesar de que con los instrumentos secuenciales propios de los estados III y IV sí han resuelto tareas de esos estados. En esta situación se encuentran: RJa (4,6), RMa (4,11), ROl (5,3). Las estrategias que presentan estos escolares en los estados III y IV no pasan de 2 para el III y de 3 para el IV.

Considerando, ahora el caso en el que no se llega a resolver la tarea del Estado V dándose las coordenadas (V1b, V2b), pero habiéndose realizado con éxito las tareas asociadas a los estados III y IV, tenemos que para estos casos los sujetos han sido capaces de establecer, por separado, la alternancia y conteo como instrumentos secuenciales llegando a determinar posiciones lógicas ordinales pero son incapaces de establecer un nuevo instrumento que sintetice los dos anteriores mediante una correspondencia serial. En este caso nos encontramos a MMa (5,5), MPa (5,8),CFe (3,11).

2.4.6.3. Resuelven las tareas asociadas al estado III pero no resuelven las de los estados IV y V.

En esta situación hay un caso: HLo (4,7). Esta niña tiene muy claro el criterio de la alternancia y no se equivoca nunca con el razonamiento “porque en uno hay y en otro no”, sin embargo, con respecto al conteo, se equivoca a la hora de localizar posiciones ordinales (IV3b) y lógicas ordinales (IV1b). Y en cuanto a la secuencia del Estado V, no llega ni siquiera a construir la correspondencia serial.

Con ello se obtiene resultado número 6.

2.4.6.4. Resuelven la tarea asociadas al estado IV pero no resuelven las de los estados III y V.

No se ha encontrado casos en esta situación, todos los escolares entrevistados que han resuelto la tarea de conteo, habían resuelto previamente la tarea de la alternancia.

2.4.6.5. Resuelven la tarea asociadas al estado V pero no resuelven las de los estados III y IV.

No se da esta situación entre los escolares de la muestra.

2.4.6.6. No resuelven ninguna de las tareas asociadas los estados III, IV y V.

Hay quién construye los instrumentos secuenciales con la alternancia y el conteo pero no resuelve los problemas de ordinación planteados en las tareas III y IV; corresponden a las coordenadas (III2a, IV2a). En esta situación se encuentran: MRa (4,4), MAl (5,1), CAd (4,8), BIn (6,2), HDa (4,4).

Se dan casos en los que el Estado IV presenta las coordenadas (IV1b, IV2a, IV3b) y no se resuelven las tareas asociadas a los Estados III y V, lo que conduce al resultado número 7.

2.4.7. Realizar con éxito la tarea asociada a los Estado I y II: ((I1a) ó (I1b, I2a, I3a, I1a)) y ((II1a) ó (II1b, II2a, II3a, II1a))

El 88,9% ha superado con éxito las tareas asociadas a los estados I y II, con coordenadas (I1a) y (II1a) con estrategias mayores ó iguales que 3 con respecto a la segunda tarea y con estrategias mayores o iguales que 4 respecto a la primera.

Por tanto, los escolares son capaces de diferenciar los elementos de una serie al tener que etiquetarlos, también pueden comparar dos elementos consecutivos mediante la relación infra-lógica “estar al lado de” del orden topológico.

2.4.8. Comparación de respuestas de las tareas asociadas a los Estados I y II con respecto a los demás estados.

El aspecto a destacar se da cuando se presentan las coordenadas (II1b, II2a, II3a, II1a) con respecto a la segunda tarea. Ello significa que los escolares identifican a nivel verbal *antes* y *después*, ó frases como “justamente antes” y “antes de”, dado un término de una serie sólo ven un sentido, por eso en un principio es II1b, pero después de plantear las situaciones II2 y II3, toma en consideración los dos sentidos.

Los escolares que están en la situación son: MAl (3,4), MMar (3,11), MPa (5,8), CRo (3,6), BJo (3,10). No llegan a realizar las tareas del estado siguiente salvo el caso de MPa (5,8) que realiza correctamente hasta la tarea del estado IV, pero este niño procede con la estrategia 4 en el estado II.

3. Resultados

1. Para establecer relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica en cualquier tramo de ella, es necesario que se apliquen esquemas lógicos-matemáticos de seriación cíclica generados por el tramo 1-10.

2. Los escolares que únicamente usan el instrumento secuencial, sin llegar a aplicar esquemas lógicos matemáticos de *primer elemento* para la determinación de posiciones ordinales en un tramo cuyo extremo inferior es superior a 10, no alcanzan el Estado VI de relaciones lógicas-ordinales de la secuencia numérica.

3. No basta con tener un método en la determinación de posiciones ordinales, para conseguir, con ello, establecer relaciones lógicas ordinales en cualquier tramo de la secuencia.

4. El que un escolar tenga construido el instrumento secuencial en el tramo 1-10 secuencia numérica /alternancia y localice posiciones ordinales con ese instrumento en ese tramo, no es condición suficiente para: Determinar posiciones lógicas ordinales en el tramo 1-10 versus alternancia como instrumento comparativo, y extender el instrumento secuencial a tramos cuyos extremos inferiores sean mayores que 10.

5. El establecimiento por parte del escolar, del instrumento secuencial para manifestar relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica, en el tramo 1-10, no es condición suficiente para extender la secuencia construida a otros tramos distintos del señalado.

6. Los escolares resuelven mejor tareas de ordinación con instrumentos secuenciales sencillos como la alternancia que las mismas tareas con el conteo.

7. El que un individuo cuente correctamente del 1 al 10, no garantiza el éxito en la resolución de problemas ordinales en ese tramo.

4. Discusión

Con una didáctica del número natural teniendo en cuenta los estados de conocimiento, se alcanzaría la sistematización de la secuencia mediante la estructura de seriación cíclica subyacente, lo que permitiría: contar de n en n, recuento progresivo para solucionar problemas de suma y resta, tablas de multiplicar y cálculo mental.

Se debe tener en cuenta la génesis del conocimiento serial aplicado a la secuencia numérica tal y como se ha hecho en el establecimiento de los estados, explícitamente tener en cuenta dicha génesis significa que aunque el dominio del 1 al 10 se realice de una manera memorística, hay que conseguir que se establezcan relaciones de secuenciación propias del conteo trabajando actividades con esquemas lógicos matemáticos como estos:

- En el tramo 1-10 cada término es primero y último: primero de los que le suceden y último de los que le anteceden.
- La relación de siguiente es antisimétrica: cada elemento ocupa un lugar determinado y no puede cambiarse por otro.
- Conseguir todos los siguientes a partir del siguiente inmediato de cada uno de los términos trabajando la sucesión de siguiente

Una vez que se domina el tramo 1-10, trabajar el esquema de seriación cíclica subyacente a la secuencia numérica: si el siguiente de 5 es 6, entonces el siguiente de 15 es 16, de 25 es 26, de 35 el 36, etc. Trabajando la decena ordinal y con ello los inicios del cálculo mental: si 5 y 2 son 7 entonces 15 y 2 son 17, 25 y 2 son 27, 35 y 2 son 37, etc., todo lo que ocurre en el ciclo se da en cualquier decena y eso es lo que se debería trabajar explícitamente con los niños y niñas según los estados de conocimiento presentados en este trabajo.

Referencias

Brannon, E. M. (2002). *The development of ordinal numerical knowledge in infancy*. *Cognition*, 83, 223-240.

Briand, J. (1999). *Contribution à la Rèorganisation des savoirs prè-numèriques et numèriques. Ètude et rèalisation d´une situation d´enseignement de l´enumeration dans le domaine prènmumèrique*. *Recherches en didactique des mathèmatiques*, 19 (1), 41-75.

Castro, E.; Cañadas, M.C. & Molina, M. (2010*). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. UNO,* 54, 55-67.

Clark, J. (1983). *Development of Seriation and Its Relation to the Achievement of Inferential Transitivity*. *Journal of Research in Science Teaching*, 20 (8), 781-94.

Clements, D.H. (1984). *Training effects on the development and generalization of Piagetian logical operations and knowledge of number*. *Journal of Educatinal Psychology*, 76*,* 766-776.

Dieudonné J. (1989). *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*. Alianza Universal. Madrid.

Fernández, C. (2015). *Análisis cognitivo de la secuencia numérica: procesamiento de la información y epistemología genética. Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, PEL,* 52(2), 172-188.

Fernández, C (2010). *Análisis epistemológico de la secuencia numérica. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME),* 13*,* 59-88.

Frege, G. (1884) *Die Grundlagen der Arthmetik.* Eine logisch-mathematische Untersuchung ùber den Begriff der Zahl. [Trd. cast. de U. Moulines, *Fundamentos de la Artimética*. Barcelona: Laia, 1972].

Geary, D.C. (2006). Development of Mathematical Understanding. En W. DAMON & R. LERNER (Eds.), *Handbook of child psychology. Vol. 2: Cognition, perception and language* (pp. 777- 810)*.* Wiley.New York.

Gillies, D. (2011). *Frege, Dedekind, and Peano on the foundations of arithmetic*. Routledge. London.

Grize, J.B (1979). Observaciones sobre la epistemología matemática de los números naturales. En J. PIAGET (Ed.). *Tratado de lógica y conocimiento científico. Vol. II: Epistemología de la lógica* (pp. 109-120). Piados. Buenos Aires.

Muldoon, K., Lewis, C. & Towse, J. (2005): *Because it's there! why some children count, rather than infer numerical relationships*. *Cognitive Development,* 20 (3), 472-496.

Ortiz, A. (2009). *Lógica y pensamiento aritmético*. *PNA,* 3 (2), 51-72.

Piaget. J. (1983). *Introducción a la Epistemología Genética. Tomo 1. El Pensamiento Matemático.* Paidós. Buenos Aires.

Piaget. J. & Apostel, L. (Eds) (1986). *Construcción y validación de las teorías científicas. Contribución de la epistemología genética*. Piados Studio. Barcelona.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1976). *Génesis de las estructuras lógicas elementales: clasificaciones y seriaciones.* Guadalupe. Buenos Aires.

Russell, B. (1982). *Los Principios de la Matemática*. Espasa Calpe. Madrid. (Versión original 1903).

Sarnecka,B. W. & Gelman, S.A. (2004). *Six does not just mean a lot: Preschoolers see number words as specific. Cognition*, 92, 329-352.

Sinclair De Zwart, H. (1978). *Adquisición del lenguaje y desarrollo de la mente*. Oikos-Tau, S. A. Barcelona.

Stegmüller, W. (1970). *Teoría y Experiencia*. Ariel. Barcelona.

Vergnaud, G. (2013). *Pourquoi la théorie des champs conceptuels?. Infancia y Aprendizaje,* 36 (2), 131-161.

Catalina Maria Fernandez Escalona
Profesora titular de Universidad de Málaga
Un sexenio de investigación
Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales
cfernandez@uma.es

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 122-142

Función de primer grado. Construcción de significados desde una perspectiva variacional

Silvia Vrancken, Adriana Engler, Ana Leyendecker, Daniela Müller

Fecha de recepción: 2016-10-06
Fecha de aceptación: 2017-01-02

Resumen	Considerando la importancia del estudio de las funciones en Ingeniería Agronómica, se decidió diseñar e implementar una situación de aprendizaje para dar significado a la función de primer grado como modelo de fenómenos de cambio. Se enuncian las actividades propuestas y se presentan algunos resultados de su implementación, en cuanto a los logros y a las dificultades detectadas.Los alumnos fueron capaces de reconocer elementos importantes que caracterizan a esta función e identificar el tipo de situaciones que permite modelar. Las tareas promovieron el empleo de estrategias y argumentos importantes para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. **Palabras clave**: pensamiento variacional, enseñanza, aprendizaje, universidad
Abstract	Given the importance of the study of functions in Agronomic Engineering we decided to design and implement a learning situation to give meaning to the first-degree function as a model for change phenomena. In this paper, we present the proposed activities, present some results of its implementation and describe the successes and difficulties encountered. The students were able to recognize important elements that characterize this function and identified the type of situation that allows modeling. The tasks promoted the use of strategies and important arguments to the development of the thought and variational language arguments. **Keywords**: variational thinking, teaching, learning, university
Resumo	Considerando a importância do estudo das funções em Engenharia Agronômica, decidiu-se desenhar e implementar uma situação de aprendizagem para dar significado à função de primeiro grau como um modelo de fenômenos de mudança. Enunciam-se as atividades propostas e se apresentam alguns resultados da sua implementação, quanto as metas atingidas e dificuldades detectadas. Os alunos foram capazes de reconhecer elementos importantes que caracterizam essa função e de identificar os tipos de situações que se permite modelar. As tarefas promoveram o emprego de estratégias e argumentos importantes para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem variacional. **Palavras-chave:** pensamento variacional, ensino, aprendizagem, universidade

1. Introducción

Al iniciar el estudio de matemática en Ingeniería Agronómica es importante que los estudiantes conozcan y comprendan diferentes herramientas que les permitan crear o interpretar modelos matemáticos que reflejen la realidad de su entorno y utilizar la matemática en la solución de problemas.

La matemática juega un rol fundamental cuando es necesario cuantificar o medir cualquier fenómeno y sus variaciones. En este sentido, el estudio de los procesos de variación y cambio es fundamental para la generación y evaluación del comportamiento de modelos matemáticos representativos de situaciones reales, de contextos cotidianos, científicos o profesionales. Así, el estudio de las funciones ocupa un espacio importante en la currícula de matemática de esta carrera.

En los últimos tiempos se enfatiza la importancia del estudio de las funciones desde los primeros cursos de la escuela, especialmente por su uso en la resolución de problemas. En los diseños curriculares para la educación secundaria en Argentina se propone su estudio en distintos registros (coloquial, numérico, gráfico, algebraico), favoreciendo la modelación de situaciones en diversos contextos, que permiten caracterizar las nociones de dependencia y variación. En particular, en las orientaciones curriculares propuestas para el Ciclo Orientado, se lee:

> La modelización de situaciones extra e intramatemáticas mediante funciones permite interpretar y caracterizar las nociones de dependencia y variabilidad -constitutivas de la noción de función- y seleccionar la representación más adecuada a la situación: tablas, fórmulas, gráficos cartesianos realizados con recursos tecnológicos. Son variadas las situaciones de la realidad que tienen un comportamiento que admite ser descripto mediante funciones, lo que constituye un eje rico en oportunidades para vincular con las distintas Orientaciones. (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, 2013, p. 21)

Sin embargo, al comenzar su estudio en el primer año de la universidad, se observan dificultades en la comprensión de las funciones. En muchos casos, los estudiantes logran caracterizarlas a través de una tabla de valores, su definición algebraica y su representación gráfica. Pueden plantear y resolver problemas sencillos. Sin embargo, tienen dificultades al ser enfrentados a situaciones que requieren una interpretación variacional de ciertas nociones.

Numerosos investigadores en educación matemática exponen esta problemática. Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2003) expresan que los estudiantes que comienzan sus estudios universitarios tienen una comprensión deficiente sobre las funciones. Hacen referencia a los resultados de Tall (1992, citado por Carlson et al., 2003), quien encontró que, aunque las imágenes conceptuales de función de alumnos universitarios de los primeros niveles incluían una noción de correspondencia, la idea de operación, ecuación, fórmula y gráfica, no abarcaba la concepción de dos variables cambiando en forma conjunta, cada una con respecto a la otra. Los autores remarcan que en los cursos universitarios de los primeros años no se realizan tareas que permitan solucionar esta deficiencia.

Pérez (2011) afirma que, al no confrontar a los estudiantes con situaciones que les permitan desarrollar conocimientos y habilidades matemáticas relacionadas a la variación y a la modelación de fenómenos, no se favorece la modificación de sus estructuras cognitivas y no se les da la posibilidad de construir conocimiento matemático que sea significativo para su vida.

Por su parte, Cantoral, Montiel y Reyes (2014) señalan que las situaciones variacionales no se presentan al estudiante en su entorno como expresiones matemáticas, sino como datos, gráficos o problemas contextualizados, por lo cual es fundamental plantear en el aula situaciones que permitan identificar las variables, cuantificarlas, establecer relaciones entre ellas, analizar cómo cambian y cómo se relacionan sus cambios. Esto significa que la escuela "debe proveer de conocimientos funcionales, esto es, de herramientas matemáticas importantes en sí mismas y para interactuar con el entorno que les rodea: poner en uso el conocimiento matemático" (p. 22).

Es así que resulta necesario ampliar el análisis realizado en los niveles escolares previos, que permita a los estudiantes la comprensión de las funciones desde una perspectiva variacional, a fin de proporcionar una base significativa para el estudio del cálculo. De este modo podrán aplicar el conocimiento escolar a la resolución de problemas, esto es, un uso funcional del conocimiento matemático.

Esto lleva a investigar sobre la naturaleza y formas de propiciar en el aula la construcción de conocimiento matemático significativo relacionado a las funciones. En este trabajo en particular, se aborda el estudio de la función de primer grado.

2. Antecedentes y justificación

Distintos autores muestran cómo el desarrollo de actividades matemáticas relacionadas a prácticas como la modelación y la predicción de fenómenos de naturaleza variacional, favorece la comprensión de nociones y conceptos tales como razón de cambio, función, límite y derivada, entre otros, generando y favoreciendo aprendizajes significativos así como un uso funcional de conocimiento matemático en la resolución de problemas.

Caballero y Cantoral (2015, p. 308) señalan:

> …el desarrollo de ideas ligadas a lo variacional puede ayudar a los estudiantes a tener mejores herramientas, en cuanto a argumentaciones y significaciones para enfrentar situaciones, no sólo en lo referente a las asignaturas escolares, sino más ampliamente, en actividades profesionales relacionadas con fenómenos físicos, químicos, biológicos, entre otros. Esto se debe a que el cambio y la variación se encuentran en las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales, a partir de las cuales la predicción, y por tanto lo variacional, se construye socialmente (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez, 2006; Cantoral, 2013).

Por otro lado, Posada y Villa (2006) expresan que el papel preponderante que ha tenido la modelación de fenómenos de variación en el desarrollo histórico del concepto de función sugiere que el tratamiento de situaciones relacionadas con este tipo de fenómenos proporciona ideas para el diseño de situaciones que ayudan a los estudiantes a reconocer en este concepto un modelo matemático que permite describir, sistematizar y organizar situaciones en contextos de variación y cambio. A partir de análisis preliminares proponen consolidar el desarrollo del pensamiento variacional a través de tres elementos:

> …la noción de variación base para la construcción del concepto matemático de variable, el proceso de modelación matemática como estrategia didáctica para la construcción matemática de relaciones y variaciones, y los sistemas semióticos de representación como elementos que auxilian este proceso de modelación y permiten objetivar los conceptos matemáticos (p. 171-172).

Con relación a la función de primer grado opinan:

> Para el caso de los fenómenos que implican variaciones cuya razón de cambio es constante, se puede reconocer que es la función lineal el modelo matemático de los mismos. Por tanto, dicha constante es el eje central en la identificación del concepto como un modelo matemático (p. 173).

Señalan también que la función de primer grado, caracterizada por la razón de cambio constante, representa una estructura más general de la proporcionalidad entre magnitudes que permite "visualizar y sistematizar los diferentes estados de variación lineal entre dos cantidades de magnitud, es decir, la correlación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de diferencias es una constante" (p. 113).

Carlson et al*.* (2003) sostienen que la comprensión de situaciones que involucran la razón de cambio es fundamental tanto para el entendimiento de nociones involucradas a las funciones, como para la interpretación de modelos variacionales y la comprensión de los conceptos principales del cálculo. Subrayan la necesidad de fomentar el razonamiento covariacional de los estudiantes, esto es, el desarrollo de actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra. En este sentido destacan la importancia de que los estudiantes tengan oportunidades de analizar la naturaleza covariacional de las funciones en situaciones de la vida real.

Pérez (2011) expone sobre la complejidad que supone la construcción de conocimiento matemático y la generación de aprendizajes funcionales, en el sentido de que los estudiantes sean capaces de reconstruir significados de manera permanente, que les permitan integrar la matemática a su vida cotidiana y resolver los problemas que se le presentan. Esto exige el rediseño del currículo matemático de manera que "favorezca el desarrollo de prácticas educativas en las cuales los estudiantes hagan uso de la matemática para analizar, comunicar información, entender o explicar fenómenos de la ciencia y situaciones de su entorno, así como, para tomar decisiones" (p. i). La autora concibe el aprendizaje en precálculo como:

> …el producto de la actividad humana de los estudiantes para modelar lo cambiante por medio de la interacción en procesos de conceptualización, operación y formalización de lo variacional tanto en el plano matemático como en el sociocultural. Por tanto, dicho aprendizaje será construido en la medida que ellos logren desarrollar recursos y estrategias variacionales para modelar actividades de tal naturaleza. (p. 48)

En este sentido investigó cómo reorganizar los contenidos de precálculo en unidades didácticas que tienen como objetivo que los estudiantes desarrollen conocimientos y herramientas matemáticas que les permitan entender y explicar fenómenos de naturaleza variacional. Teniendo en cuenta análisis preliminares, diseñó y puso en práctica una unidad que tiene como finalidad la modelación y la generación de aprendizajes relacionados a la función de primer grado. Afirma que algunas tareas matemáticas que pueden permitir el estudio de esta función desde un punto de vista variacional son: reconocer que la relación entre las dos variables involucradas es constante, cuantificar los cambios de cada variable y calcular cuánto se incrementan los valores de una variable con respecto a la otra, identificar la relación lineal de manera numérica y gráfica, estimar y explicar que tan rápido cambia lo que cambia, representar algebraicamente la relación a partir de su representación gráfica, relacionar la variación constante expresada verbalmente con su gráfica. En sus conclusiones señala que la modelación de lo variacional otorga un significado a la matemática que se intenta construir. La naturaleza misma de las situaciones y la discusión de los aspectos variacionales, favorece la evolución de los recursos y habilidades matemáticas de los estudiantes, a la vez que se propicia el vislumbramiento de aspectos funcionales de la matemática y el contexto que permite relacionar las experiencias de los estudiantes con las situaciones planteadas.

La revisión de antecedentes permite considerar que un acercamiento variacional al estudio de la función de primer grado, que pretenda identificar a la razón constante entre los cambios de la variable dependiente con respecto a los cambios de la variable independiente como la característica principal de estas funciones, y que busque poner al estudiante en actividad matemática a partir de las numerosas situaciones que se presentan en la vida cotidiana y en las ciencias, puede favorecer la comprensión, la construcción de conocimiento matemático funcional y el desarrollo del pensamiento.

3. Elementos teóricos

En el marco de la educación matemática, se coincide con Cantoral, Montiel y Reyes (2014) en reconocer la importancia de la actividad social en la construcción de conocimiento, asumida ésta en relación a los usos del conocimiento matemático.

En este sentido, el pensamiento y lenguaje variacional, como línea de investigación y como forma de pensamiento, ofrece elementos teóricos que permiten encuadrar este trabajo. Cantoral et al. (2003) expresan:

> El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando estructuras y lenguajes variacionales. (p. 185)

Esta línea de trabajo atiende el estudio sistemático de las nociones de variación y cambio en distintos contextos de las ciencias, en la vida cotidiana y en la matemática misma. Se centra “en la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando aquello que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios” (Caballero y Cantoral, 2013, p. 1196). Se caracteriza por proponer el estudio de situaciones relacionadas a fenómenos de cambio que se basan en el uso de los conocimientos matemáticos que se pretenden significar. Para estos autores, una situación variacional es “el conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de *estrategias variacionales* y que requieren establecer puntos de análisis entre diversos estados del cambio” (p. 1199).

Una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias variacionales cuando “hace uso de maniobras, ideas, técnicas o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando” (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005, p. 464).

En este marco, el desarrollo del pensamiento variacional tiene lugar dentro de una situación variacional, en la que el uso de distintas estrategias variacionales genera el estudio de la variación, ya que sirven como punto de partida para el análisis y la reflexión sobre el cambio y sus efectos. Esto facilita la identificación de lo que cambia en una situación, el análisis de la manera en que se dan los cambios y la cuantificación de esos cambios.

Con la implementación de situaciones que propician el desarrollo del pensamiento variacional se fomenta la formulación de conjeturas, su puesta a prueba, su generalización, la argumentación que permita sustentarlas o rechazarlas. Se promueven así procesos cognitivos que van más allá de la memoria y la algoritmia. En este sentido es fundamental proponer tareas de tratamiento y conversión entre las distintas representaciones del concepto de función. De acuerdo con Duval (2008), no hay pensamiento matemático sin estas dos actividades cognitivas fundamentales, esto es tareas que impliquen la transformación de la representación en el mismo registro en la que ha sido formada y su coordinación con representaciones en otros registros.

Por otro lado, si el interés es que estos conocimientos se incorporen a las estructuras lógicas de los estudiantes y el desarrollo de su pensamiento matemático, se debe rever el papel del docente y del alumno en el aula, buscando alternativas que favorezcan la participación activa de este último, que lo lleven a involucrarse en la construcción de su propio conocimiento (Cantoral, 2013). Así, el rol del docente pasa de expositor a guía, mediador y facilitador. El profesor debe ser capaz de diseñar situaciones de aprendizaje que permitan la aplicación de conocimientos y lleven a la resolución de problemas, que promuevan la actividad individual y grupal de los alumnos, que les otorgue más responsabilidad y que los involucre en su propio proceso de aprendizaje.

En este sentido se asume una situación de aprendizaje como:

> …un espacio de encuentro en el que los participantes (profesor y alumnos), coordinan acciones a través de un proceso de interpretación/comprensión mediante el cual logran construir significados que comparten. Las situaciones de aprendizaje se construyen de acuerdo a los conocimientos que el alumno debe aprender y a las características que estos saberes presentan y se realizan con un método óptimo. (García, 2011, p. 16)

Según la misma autora, todos y cada uno de los estudiantes deben tener oportunidad de manifestar sus conocimientos previos, “…los que constituirán una base sobre la cual construir aprendizajes como resultado de acciones conjuntas…” (p. 16). Así, los estudiantes logran construir conocimiento y, lo que es más importante, utilizar ese conocimiento en distintos contextos, resolviendo problemas.

4. Aspectos metodológicos

En base a lo manifestado, se decidió diseñar e implementar una situación de aprendizaje que permita dar significado a nociones relacionadas a la función de primer grado como modelo de fenómenos de cambio y que involucre al alumno en la construcción de conocimiento significativo y funcional. Se implementó con todos los alumnos cursantes de Matemática I en comisiones de aproximadamente 35 alumnos, en tres fases, que se desarrollaron en tres clases sucesivas, de una, dos y una hora respectivamente. La fase inicial, de motivación y exploración de los conocimientos previos, una intermedia, que tuvo como finalidad utilizar y relacionar esos saberes previos para construir nuevos conocimientos y significados, y una fase final, de integración y valoración de los aprendizajes.

En la fase inicial los alumnos resolvieron con lápiz y papel tres actividades, trabajando de a pares. Se intentó recuperar los conocimientos sobre la función de primer grado y aportar elementos para mejorar su comprensión y su significado desde un punto de vista variacional.

La docente entregó una copia de los enunciados a todos los alumnos. En esta etapa dejó que los alumnos trabajaran solos. Su papel fue de orientación y motivación para que realicen las actividades. Sólo intervino cuando no entendían los enunciados. Al finalizar el tiempo de trabajo, los estudiantes entregaron una de las resoluciones y la otra la guardaron para la discusión grupal y el control de las respuestas durante la clase siguiente.

En la primera parte del segundo encuentro, fase intermedia, se inició el debate. A partir de lo observado en la clase anterior y de las dificultades y logros detectados en las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes, la docente coordinó una puesta en común. Sus intervenciones fueron para guiar la discusión, pedir explicación sobre las estrategias y procedimientos utilizados y, especialmente, promover el reconocimiento de la variación en las situaciones propuestas. Luego, la profesora explicó y formalizó el trabajo realizado por los alumnos. Relacionó los aspectos numéricos, gráficos y analíticos de los conceptos involucrados, e introdujo las nociones variacionales que cada actividad permitía resaltar.

En la fase final se propuso la resolución de nuevas situaciones con las que se pretendió conocer su avance con respecto al desarrollo de nociones y significados variacionales y valorar la comprensión respecto de los conceptos involucrados.

5. Diseño de las actividades y resultados de su implementación

De acuerdo a la revisión teórica y de antecedentes realizada, se resolvió considerar actividades que propicien el desarrollo de tareas de naturaleza variacional, así como el tratamiento y conversión entre distintas representaciones del concepto de función (verbal, numérica, gráfica, algebraica).

Se presentaron situaciones sencillas, del contexto cotidiano, que permitan a los estudiantes descubrir el rol fundamental que tienen los incrementos de las cantidades de las variables independiente y dependiente, así como el cociente entre los mismos, para construir el modelo de la función correspondiente a la situación planteada.

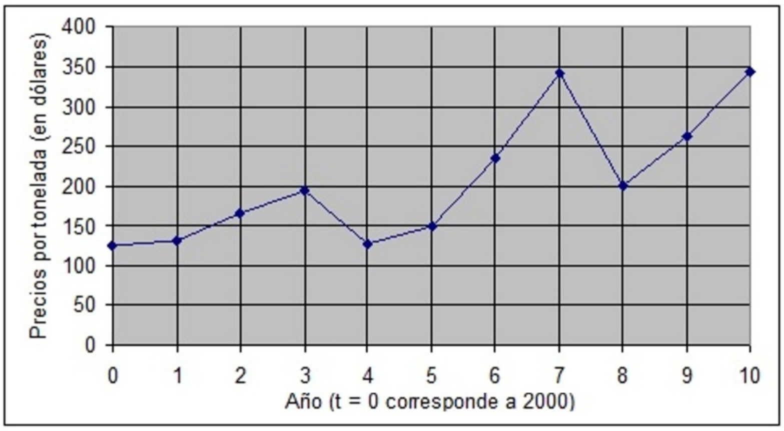
Con su desarrollo se pretendió que los estudiantes valoren el uso de los conocimientos matemáticos en su área de especialidad. Se previó que puedan apelar a sus conocimientos previos y a la intuición para resolverlas.

Su resolución promovió distintas tareas:

- La identificación de magnitudes asociadas a situaciones de variación, presentadas en distintos sistemas de representación.
- La descripción de las relaciones entre las variables en un proceso de cambio.
- La identificación de situaciones de razón de cambio constante y de una situación de variación constante con la recta o con segmentos de recta.
- La justificación de las estrategias usadas para cuantificar los cambios a partir de las distintas representaciones.
- El reconocimiento de la razón de cambio para analizar cuánto cambia una variable cuando la otra cambia determinada cantidad.
- La comparación de razones de cambio para reconocer la mayor o menor rapidez de cambio.
- La relación entre la razón de cambio constante y la pendiente de la recta.

A continuación, se enuncian las actividades, se desarrolla un breve análisis a priori de cada una y se presentan los resultados, esencialmente cualitativos, de la revisión de las hojas de trabajo de los alumnos. El análisis, realizado sobre 72 producciones, tiene en cuenta el desarrollo e interpretación de los aspectos variacionales involucrados, así como las transformaciones entre distintas representaciones semióticas. Los logros y dificultades detectados son importantes para las etapas de validación e institucionalización del conocimiento.

Actividad 1. La gráfica muestra la tendencia de los precios del trigo durante el período 2000-2010. Los precios tomados corresponden al mes de diciembre de cada año analizado.



Elaboración propia sobre datos extraídos de
http://www.siia.gov.ar/index.php/series-por-tema/agricultura.

a) Determine los períodos en los que el precio tuvo el mayor y el menor cambio. Determine si en esos períodos el precio por tonelada de trigo aumentó o disminuyó. ¿Cuánto aumentó o disminuyó?

b) Encuentre la pendiente del segmento de recta que conecta los años 2006 y 2007 y del segmento que conecta los años 2007 y 2008. Interprete su significado en el contexto del problema.

Se presenta una gráfica extraída de una página web, de interés particular para los productores agropecuarios y, por ende, para estudiantes de agronomía.

Su resolución exige el tratamiento a partir de la representación gráfica y la conversión al registro numérico y al verbal. Los alumnos deben ser capaces de identificar las variables involucradas, los valores que toma la variable dependiente para un valor específico de la independiente y determinar cómo cambia una variable cuando cambia la otra. Para esto, primero es necesario fijar la atención en el comportamiento global de la función, en todo su dominio y por intervalos, y luego en el comportamiento puntual.

En el primer inciso se requiere la comparación del cambio de la variable dependiente, referido a la variación en un período específico de tiempo.

Al analizar las respuestas se observó, en primer lugar, diferencias al considerar los períodos. Gran parte de las parejas (52) consideró intervalos de un año, mientras que 13 consideraron períodos diferentes. En estos casos se observa que su elección tuvo en cuenta los tramos donde la gráfica crece o decrece o bien, aquellos que gráficamente parecen corresponder a la misma recta.

Se encontró también que siete parejas no pudieron establecer períodos. Se refieren al cambio en determinado año, lo que muestra que no lograron comprender la situación.

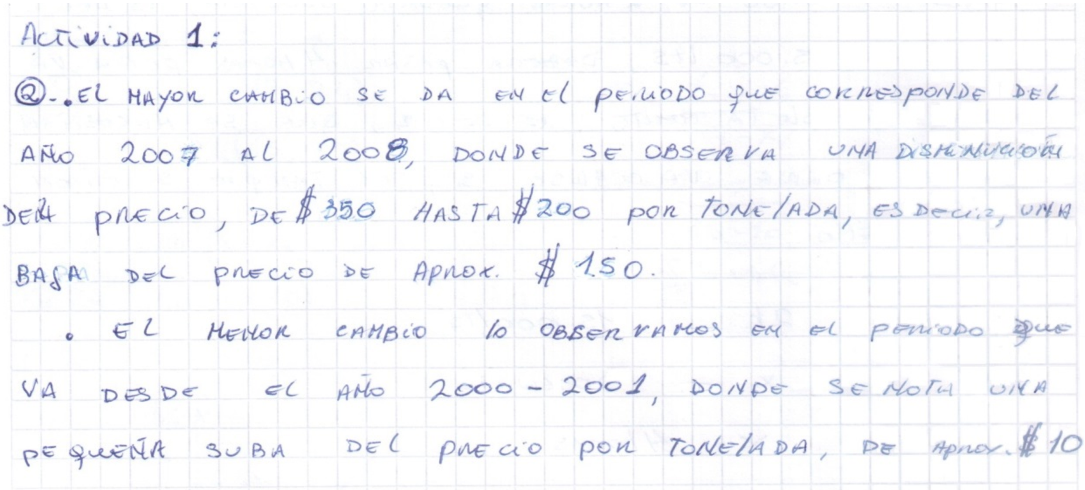
Se estudiaron luego los aspectos cualitativos, referidos a cómo cambia, y los cuantitativos, respecto a cuánto cambia.

Se detectaron problemas de interpretación en la identificación de los períodos en que el precio tuvo el mayor y el menor cambio. En diez trabajos se observó que identificaron mayor cambio con el intervalo de mayor aumento del precio del trigo, y el de menor cambio con el de mayor disminución del precio. Por ejemplo, una respuesta fue: *“El período que tuvo mayor cambio fue del 2006 al 2007 que aumentó 100 U$S. El período que tuvo menor cambio fue del 2007 al 2008 que disminuyó 140 U$S”*.

Del total, el 57 % respondió que el mayor cambio se dio en el período 2007-2008, correspondiendo a una disminución de los precios, mientras que el menor cambio se produjo en el período 2000-2001, con un aumento de los precios.

Los alumnos que habían considerado períodos de distinta amplitud, analizaron según su respuesta anterior. Respondieron correctamente diez parejas.

Con respecto a la pregunta relacionada con la cuantificación de los cambios, el 60% calculó cuánto cambió el precio en los períodos seleccionados, mientras que el resto sólo expresó entre qué valores varió. En la Figura 1 se presenta una resolución en la que aparecen las dos respuestas.


ACTIVIDAD 1:

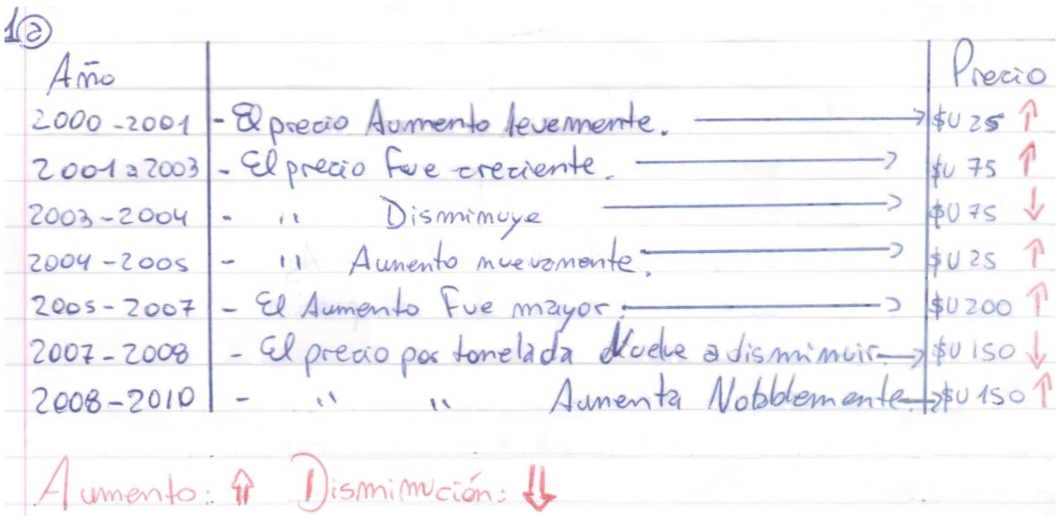
a)-. EL MAYOR CAMBIO SE DA EN EL PERIODO QUE CORRESPONDE DEL AÑO 2007 AL 2008, DONDE SE OBSERVA UNA DISMINUCIÓN DEL PRECIO, DE \$350 HASTA \$200 POR TONELADA, ES DECIR, UNA BAJA DEL PRECIO DE APROX. \$150.

• EL MENOR CAMBIO LO OBSERVAMOS EN EL PERIODO QUE VA DESDE EL AÑO 2000 - 2001, DONDE SE NOTA UNA PEQUEÑA SUBA DEL PRECIO POR TONELADA, DE APROX. \$10

Figura 1

Estas respuestas requieren el tratamiento de la información en el registro gráfico y su conversión al registro numérico, lo que permite la cuantificación del cambio, al realizar las diferencias de las ordenadas de las imágenes de los puntos correspondientes a los extremos de los intervalos.

En otros casos, los alumnos realizaron un análisis más detallado de la evolución de los precios a través del tiempo. Trabajos como el de la Figura 2, implican la comparación en el registro gráfico, de las pendientes de los distintos tramos, lo cual está relacionado a un concepto dinámico de pendiente. Resulta interesante la estrategia para organizar los datos obtenidos de la gráfica. La determinación de si *el precio del trigo aumentó* o *disminuyó* lleva al otorgamiento de significado al signo de los cambios y de las pendientes de los segmentos.


1a)

Año		Precio
2000-2001	- El precio Aumento levemente. →	\$U 25 ↑
2001 a 2003	- El precio fue creciente. →	\$U 75 ↑
2003-2004	- " Disminuye →	\$U 75 ↓
2004-2005	- " Aumento nuevamente. →	\$U 25 ↑
2005-2007	- El Aumento fue mayor. →	\$U 200 ↑
2007-2008	- El precio por tonelada vuelve a disminuir →	\$U 150 ↓
2008-2010	- " " Aumenta Nobblemente →	\$U 150 ↑

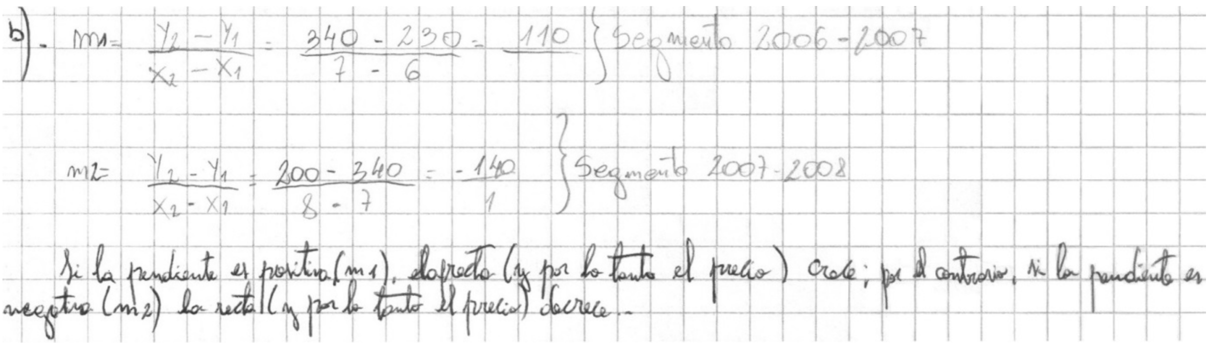
Aumento: ⇑ Disminución: ⇓

Figura 2

Estas respuestas son importantes desde una perspectiva variacional ya que suponen el análisis del cambio de un estado con el paso del tiempo. Según la caracterización realizada por Caballero y Cantoral (2013) el análisis de la forma en que cambia una variable en distintos intervalos, implica la utilización de distintas estrategias variacionales. En primer lugar, la estrategia de seriación. A partir del patrón de comportamiento de la gráfica, los estudiantes fueron capaces de analizar los estados de la función para distintos valores del tiempo. Luego de seleccionar el intervalo correspondiente al mayor y al menor cambio, analizaron el estado de la función en el punto inicial y el punto final, a fin de establecer la diferencia entre ambos, es decir, cuánto cambia la variable. Esto supone el uso de otra estrategia importante, la comparación.

En el segundo inciso se pretende conectar la pendiente de los segmentos de recta con la razón de cambio en una situación de cambio constante por tramos. De la gráfica se extrae la información necesaria para determinar el valor de la pendiente. A pesar de que los estudiantes deberían tener los conocimientos previos para calcular las pendientes, sólo en 40 trabajos lo hicieron correctamente. La mayor dificultad encontrada fue que 12 parejas trabajaron con la variable independiente medida directamente en años.

Con respecto a la interpretación en el contexto del problema, la mayoría hizo alusión al cambio del precio. Asociaron el signo positivo de la pendiente con aumento del precio y el signo negativo con una disminución. Aunque no lograron darse cuenta de que en los cálculos realizados se relacionan los cambios de las dos variables en juego, identificaron el significado del signo de la pendiente e incluso algunos lo vincularon a la recta creciente o decreciente, como por ejemplo, en el trabajo de la Figura 3.


b). $m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{340 - 230}{7 - 6} = 110$ } Segmento 2006-2007

$m_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{200 - 340}{8 - 7} = \dfrac{-140}{1}$ } Segmento 2007-2008

Si la pendiente es positiva (m_1), la recta (y por lo tanto el precio) crece; por el contrario, si la pendiente es negativa (m_2) la recta (y por lo tanto el precio) decrece.

Figura 3

Una interpretación más completa exige que los estudiantes visualicen la coordinación entre los valores de las variables que cambian de manera conjunta, es decir, el cambio de una variable con respecto a la otra. Se encontró que en sólo tres trabajos se acercaron a una interpretación de la pendiente como razón de cambio: *"La pendiente indica lo que cambia el precio por tonelada de un año para otro", "la pendiente indica la variación del precio por tonelada de año a año", "en el año 2006 y 2007 el precio subió 110 dólares por año mientras que en el 2007 al 2008 disminuyó 150 dólares en 1 año".*

Aparecieron otras conclusiones importantes para el análisis variacional, como las de algunos alumnos que agregan que en el período 2006-2007 la pendiente muestra que se dio el mayor aumento, mientras que en el período 2007-2008 se produjo la mayor disminución.

En general, se puede concluir que la resolución de esta actividad permitió la realización de distintas tareas de carácter variacional: identificaron qué cambia (precio, variable dependiente) y reconocieron con respecto a qué cambia (tiempo, variable independiente), identificando la relación entre ambas. Interpretaron la variación (para determinar los períodos de mayor y menor cambio, para determinar si el precio aumentó o disminuyó, para relacionar el significado de la pendiente con el de razón de cambio), cuantificaron los cambios, argumentaron sobre la variación.

Los alumnos fueron capaces de leer global y puntualmente la gráfica, lo que les permitió extraer información sobre el comportamiento de la función por intervalos y en puntos específicos. Su interpretación les permitió argumentar sobre los intervalos de mayor o menor cambio y determinar cuánto cambia la variable en esos intervalos. Su conocimiento matemático sobre la pendiente fue usado y, aunque les costó interpretarla como una razón de cambio, fue resignificado al relacionar los intervalos de mayor o menor cambio y los de cambio positivo y cambio negativo, con la inclinación de los segmentos de recta.

En la etapa de discusión e institucionalización de la actividad se introdujo la notación simbólica de los cambios (estado inicial, estado final, cuantificación del cambio y la razón de cambio) e interpretó el significado del signo de los cambios. Es importante resaltar que, en problemas aplicados a diversos contextos, la pendiente se puede interpretar como una razón de cambio (o tasa de cambio), además de usar la noción de razón de cambio para comparar los cambios en los distintos períodos y reconocerla como una herramienta que permite distinguir situaciones de mayor o menor rapidez de cambio.

Actividad 2. Un edificio tiene un tanque cilíndrico para reserva de agua. El tanque, de 45000 litros de capacidad, se encuentra totalmente lleno y comienza a vaciarse para hacerle mantenimiento. Se desocupa a razón constante, de tal forma que al cabo de 2 horas quedan 30000 litros.

a) ¿Cuánto tiempo hace falta para que el tanque se desocupe completamente?

b) ¿En qué intervalo de tiempo la cantidad de agua que queda en el tanque cambia de 22500 litros a 11250 litros?

c) Si el volumen del tanque fuera el doble y se desocupa a razón constante, ¿qué debe hacerse para que luego de 2 horas también queden 30000 litros?

El objetivo de esta actividad es construir conocimiento matemático relacionado a la función de primer grado, a partir del reconocimiento de la razón de cambio constante que la identifica. En este caso, el modelo lineal no queda explícito en el enunciado. Su resolución supone comprender qué significa y qué datos aporta que el tanque se desocupe a razón constante. Para esto es importante centrar la atención en la variación y no sólo en las variables.

El alumno debe ser capaz de determinar las magnitudes que cambian como las variables independiente y dependiente, identificar los incrementos del tiempo y el volumen del tanque como herramientas que permiten cuantificar el cambio, identificar la capacidad inicial del tanque como un parámetro constante que representa el estado inicial que no varía.

La actividad está enunciada en el registro verbal. Su resolución requiere en primer lugar el tratamiento en este registro, traduciendo del lenguaje cotidiano al específico de la matemática. La comprensión del significado de las preguntas en el contexto del problema no es un proceso trivial.

Las preguntas plantean la predicción sobre estados futuros correspondientes a la situación dada. Requieren el análisis y cuantificación de los datos numéricos y de sus cambios y/o el planteo del modelo algebraico, con la finalidad de, a partir de valores o estados conocidos, anticipar valores o estados futuros. Estas tareas llevarán a realizar conversiones a los registros numérico, gráfico o algebraico.

Al revisar los trabajos, se encontró que el 80% respondió correctamente el primer inciso mientras que sólo el 25% analizó correctamente el segundo. La mayoría no respondió lo pedido ya que determinó el tiempo que se demora en vaciar los 11250 litros.

Los estudiantes trabajaron en distintos registros y utilizaron diferentes representaciones. En el enunciado están dados, de manera no explícita, dos pares de valores de la función, por lo que se presumía que buscarían la expresión algebraica que modela la situación. Sin embargo, muchos utilizaron estrategias y argumentos numéricos y/o gráficos, así como algunos transitaron de un registro a otro, especialmente del numérico al gráfico, convirtiendo nuevamente al numérico y al verbal para interpretar las soluciones. Recurrieron a la tabulación, analizaron los datos a partir de la tabla numérica y construyeron gráficas que interpretaron variacionalmente. De esta manera, lograron realizar acciones identificadas por Caballero y Cantoral (2013) como tareas variacionales.

Para responder a las preguntas, utilizaron distintos procedimientos que muestran que relacionaron el fenómeno de vaciamiento a razón constante con una situación de proporcionalidad directa. Aplicaron directamente regla de tres, subdividieron los incrementos de las dos variables puestas en juego, realizaron tareas de interpolación, calcularon las razones entre los incrementos, representaron el fenómeno en una gráfica, llevaron registros de la situación en distintos períodos de tiempo o encontraron el modelo algebraico correspondiente.

En el trabajo de la Figura 5, los estudiantes realizaron tareas de conversión y tratamiento en el registro numérico.

A partir de los datos construyeron una tabla de valores y realizaron un procedimiento de interpolación de manera de responder las preguntas.

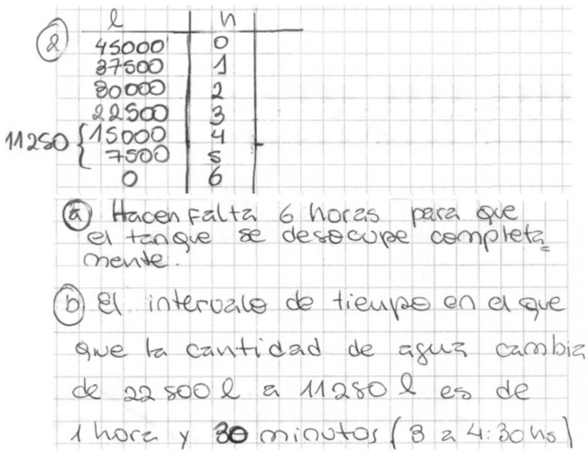


Figura 5

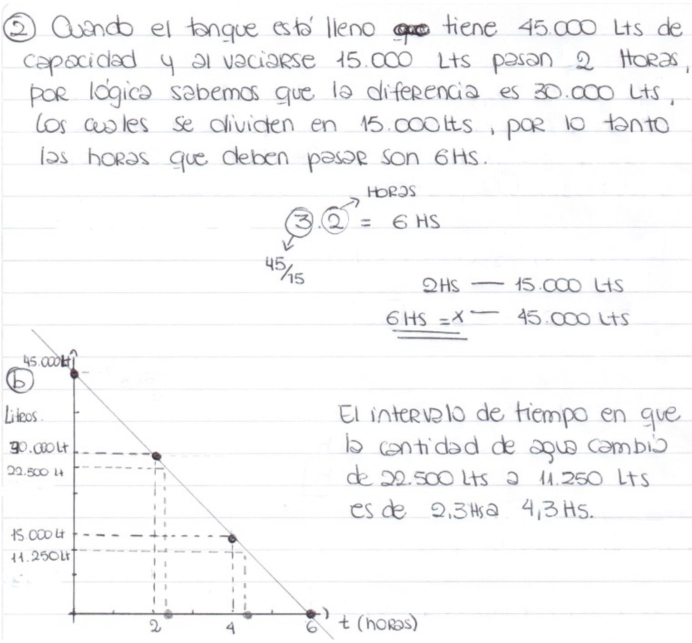


Figura 4

En este trabajo, los alumnos realizaron tareas de conversión y tratamiento en los registros numérico y gráfico.

Mostraron de varias maneras cómo obtener el tiempo que demora el tanque en vaciarse. Utilizaron estrategias que implican el reconocimiento de una relación de proporcionalidad: sumas y restas, cociente y producto, regla de tres.

Para determinar el intervalo de tiempo en que la cantidad de agua pasa de 22 500 a 11 250 litros, representaron gráficamente la función que modela la situación y utilizaron esta representación para aproximar, aunque con errores, la respuesta.

En la figura siguiente se observa cómo representaron los datos en el registro gráfico, convirtiendo al registro algebraico para determinar la ley de la función. Utilizaron el modelo algebraico para determinar lo pedido en cada inciso.

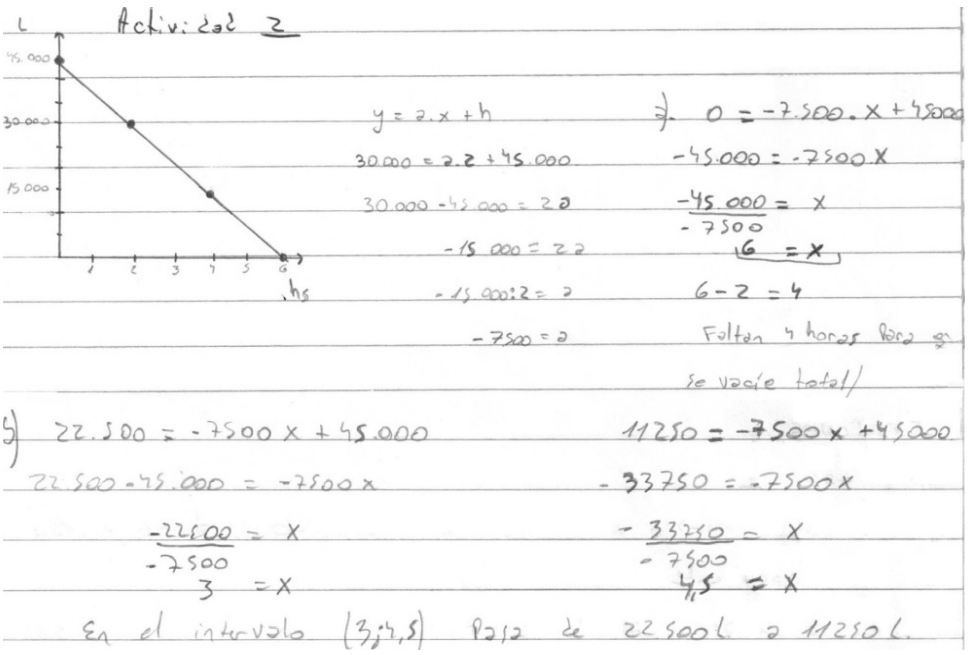


Figura 6

En este caso, los alumnos trabajaron en los registros numérico y gráfico. Utilizaron regla de tres para determinar el tiempo que se requiere para vaciar el tanque y luego usaron los datos para representar gráficamente la función.

Realizaron una tarea de tratamiento en el registro gráfico, efectuando un proceso de interpolación que les permitió responder el segundo inciso de manera correcta.

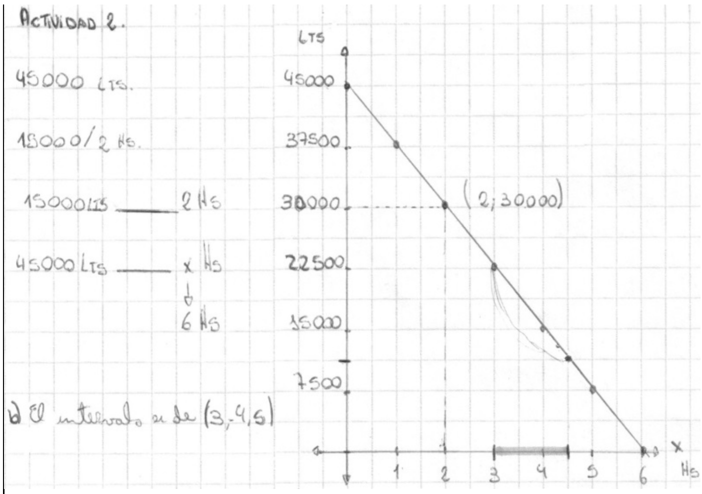


Figura 7

Las tareas y estrategias utilizadas por los alumnos coinciden con las detectadas en otras experiencias relacionadas al estudio de la función de primer grado. Se coincide con Méndez y Arrieta (2009) en la importancia de estas prácticas, quienes las reportan como prácticas comunes de la modelación lineal. Favorecen la aparición de herramientas matemáticas y argumentativas y llevan a que los estudiantes puedan enfrentarse a situaciones similares en otros contextos.

Para responder al inciso c), 24 alumnos recurrieron a procedimientos similares a los utilizados en el inciso a) (aplicaron regla de tres, hicieron una tabla, determinaron el nuevo modelo algebraico, representaron gráficamente).

De los alumnos restantes, 22 enunciaron una respuesta en la que se vislumbra un análisis que tuvo en cuenta los resultados anteriores. No todos hicieron referencia explícitamente a la velocidad de vaciado, pero sí a aumentar, de alguna manera, el caudal de salida. En la Figura 8 se presentan un par de respuestas.

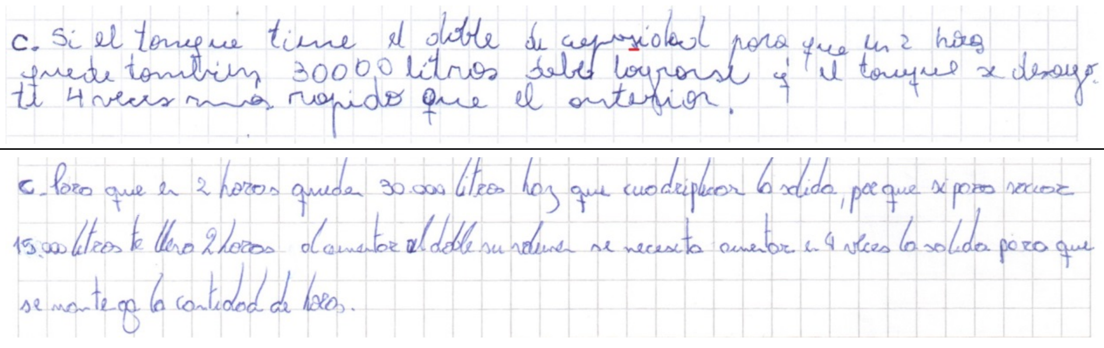


Figura 8

Este tipo de análisis implica el reconocimiento de la proporcionalidad de los datos, y requiere además la comparación entre dos estados de fenómenos distintos.

La naturaleza del fenómeno variacional presentado en esta actividad, permitió que interpretaran sus características y respondieran las preguntas recurriendo a distintas herramientas. En la etapa de discusión grupal se insistió sobre la validez de la utilización de la regla de tres, se examinó cómo se refleja la razón constante en las distintas estrategias y representaciones utilizadas, y cómo se relaciona la razón con la pendiente de la recta.

Es importante resaltar que los alumnos utilizaron su conocimiento sobre el significado de la razón de cambio en un contexto específico. Esto les permitió dar nuevos significados a las nociones relacionadas a la función de primer grado, así como generar nuevo conocimiento matemático.

Actividad 3. Para estimar la edad de los árboles los biólogos emplean un modelo lineal que relaciona el diámetro del árbol con la edad. El modelo es útil porque es mucho más fácil medir el diámetro del árbol que su edad (lo que requiere herramientas especiales para extraer una sección transversal representativa del árbol y contar los anillos). Para cierta variedad de robles, se determinó que el diámetro del tronco de un árbol de 24 años de edad es 10 cm y el de uno de 32 años es 15 cm.

a) Determine la ley de una función de primer grado que modele los datos. Represente gráficamente.

b) Use el modelo para estimar la edad de un roble cuyo diámetro es de 45 cm.

c) Explique el significado de la pendiente en el contexto del problema.

Esta actividad (adaptada de un problema presentado por Stewart, Redlin y Watson, 2012) plantea la obtención de la expresión algebraica de la función de primer grado correspondiente a los datos presentados. Esto exige básicamente la conversión del registro verbal al algebraico, pero puede dar lugar al tratamiento y conversión entre representaciones de los registros numérico y gráfico.

Al leer el problema, surge que los biólogos determinan la edad de los árboles a partir de la medición del diámetro del tronco. La variable dependiente es la edad del árbol y la variable independiente es el diámetro del tronco. Luego, la edad del árbol es una función de primer grado del diámetro del tronco. Este aspecto hace interesante el problema ya que los estudiantes están más acostumbrados a trabajar con situaciones en las que el tiempo es la variable independiente.

Según los datos, los puntos P(10, 24) y Q(15, 32) pertenecen a la gráfica de la función. Se puede determinar que $1{,}6\frac{\text{años}}{\text{cm}}$ es la razón o tasa de cambio de la edad del árbol con respecto a la medida del diámetro. Esto significa que la edad del árbol aumenta a razón de 1,6 años por cada centímetro que crece el diámetro. Si se deja expresada como $\frac{8}{5}\frac{\text{años}}{\text{cm}}$ se puede decir que, por cada 5 cm que aumenta el diámetro, transcurren 8 años.

Comprender esta situación y lograr escribir la expresión algebraica de la función, hace mucho más sencilla la tarea de predecir, que es uno de los aspectos más importantes en relación a la modelación de fenómenos.

Al revisar los trabajos se detectó que 35 parejas respondieron los tres incisos, mientras que 14 no respondieron la actividad completa, ocho no respondieron los incisos b) y c) y 12 no contestaron el último ítem.

Al analizar las respuestas de los incisos a) y b), se observó que, en general, obtuvieron la pendiente y la ley de la función utilizando las fórmulas conocidas y determinaron la edad del árbol reemplazando en la expresión algebraica.

Sin embargo, nueve parejas determinaron la ley directamente a partir de la observación de la gráfica.

En la Figura 9 se presenta esa forma de trabajo. Se observa que, aunque parece que en un primer momento no distinguieron la variable independiente y la dependiente, luego utilizaron los datos de la gráfica para determinar la ley e incluso, para predecir el valor pedido en el segundo inciso.

Al responder sobre el significado de la pendiente, relacionaron el crecimiento del diámetro con respecto al transcurso del tiempo.

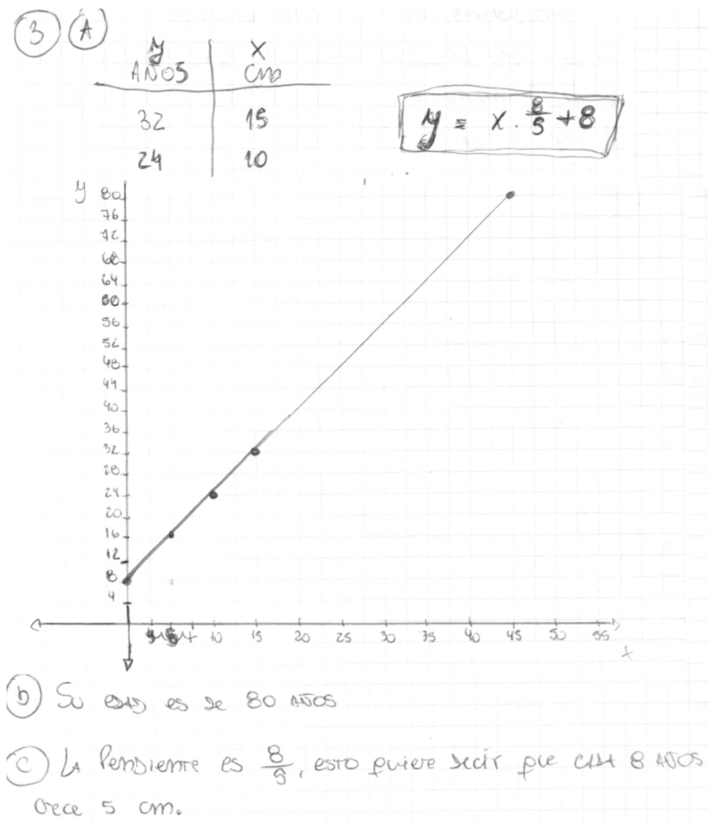


Figura 9

En relación al tercer inciso, 15 parejas escribieron alguna idea que se aproxima a la interpretación de la pendiente en la situación planteada. Algunas respuestas fueron: *"la pendiente es* $\frac{8}{5}$ *porque cada 5 cm el árbol aumenta 8 años", "el significado es que cada 8 años crece 5 cm", "la pendiente nos dice que cada una determinada cantidad de centímetros el roble crece una determinada cantidad de años. Es decir, que cada 5 cm más del diámetro del tronco el árbol tiene 8 años más", "cuando aumenta 5 cm el diámetro tiene 8 años más".*

Algunos confundieron las variables independiente y dependiente pero relacionaron la pendiente con una razón: *"el significado que tiene la pendiente en el contexto del problema es el cociente entre la variación del diámetro con respecto a la edad del árbol",* "la pendiente es la relación entre los años y el diámetro del tronco del árbol".

Como se observa en la Figura 10, los estudiantes determinaron la pendiente a partir del par de valores dado y la utilizaron para encontrar la ley de la función. Si bien la interpretación de la pendiente no es completa, se observa en la representación gráfica que tienen una comprensión clara de su significado en este registro, ya que dibujaron la recta marcando la ordenada al origen y representando la variación vertical y horizontal para encontrar otro punto que pertenece a la gráfica.

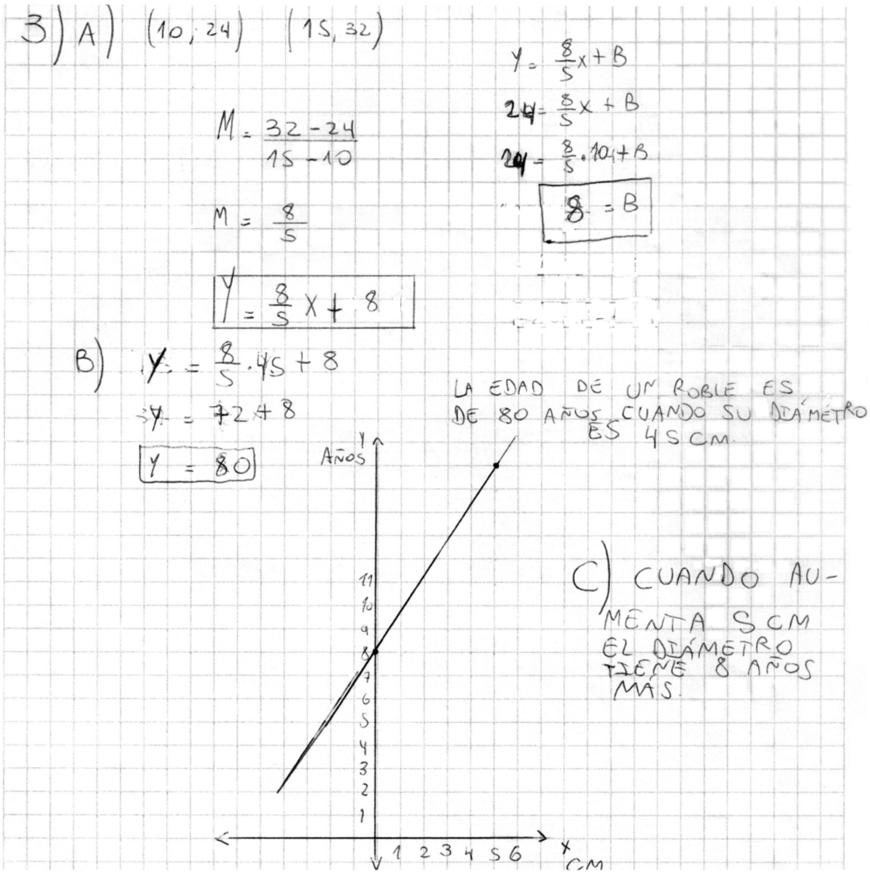


Figura 10

Se resalta nuevamente la aplicación de distintas estrategias. Los alumnos utilizaron sus conocimientos para responder a las preguntas. La resolución les exigió el reconocimiento de variables en un modelo de variación y la reinterpretación de las relaciones de dependencia. Pudieron identificar la razón que se mantiene constante, cualesquiera sean los pares de valores pertenecientes a la función que se consideren y la individualización de esta razón con la pendiente de la recta.

En el proceso de solución y en los trabajos escritos se pudo reconocer que, a pesar de que la actividad estaba redactada de manera más tradicional y se podía resolver a partir de la determinación del modelo algebraico, varios estudiantes lograron organizar y analizar la información dada registro numérico o en el gráfico y responder las preguntas. Se considera, en coincidencia con Caballero y Cantoral (2013), que son tareas que favorecen el desarrollo del pensamiento variacional.

En la etapa de debate grupal se discutió especialmente el problema con las variables y se consideraron algunas de las respuestas para resaltar los distintos aspectos variacionales que cada una de las representaciones utilizadas permite analizar y relacionarlas entre sí.

6. Reflexiones finales

El análisis general de las actividades planteadas permite expresar que se logró, por parte de los estudiantes, la realización de distintas tareas variacionales, como la tabulación, el análisis y tratamiento de los datos en una tabla, la construcción y análisis de una gráfica. Estas tareas implicaron el empleo de diferentes estrategias variacionales (la comparación, la seriación y la predicción), que les permitieron analizar la variación involucrada en cada situación y generar diversos argumentos variacionales. Todos estos elementos son importantes ya que involucran el uso del pensamiento y lenguaje variacional.

En relación a los elementos conceptuales, los alumnos lograron la individualización de las variables, la organización de los datos en tablas que facilitan el reconocimiento de la forma en que una varía en relación a la otra, la caracterización de la función y sus elementos. Fueron capaces de reconocer la razón de cambio constante como el elemento que identifica a la función de primer grado, relacionarla con la pendiente de su gráfica, así como identificar el tipo de situaciones que esta función permite modelar.

En cuanto a las representaciones semióticas, recurrieron espontáneamente al tratamiento y conversión a otros registros. Esto permitió explorar diferentes formas de manejar la información y desarrollar la capacidad de identificar los datos que son útiles para la resolución de cada situación. Esto es muy importante, ya que, como afirma Duval (2008), la diversificación de representaciones de un mismo objeto matemático es indispensable para la comprensión.

La observación del trabajo en clase y el análisis de sus resoluciones, lleva a considerar que los estudiantes resolvieron las actividades a partir de sus conocimientos previos y apelando a su intuición. Como se mostró en el análisis de distintas respuestas, el planteo de situaciones en contextos reales y cotidianos, favoreció que los alumnos utilicen sus conocimientos sobre la función de primer grado, identifiquen conexiones con el entorno que los rodea y, a su vez, den nuevo sentido y significado a los conceptos.

La metodología de trabajo permitió que todos los alumnos se involucraran y se dispusieran a analizar las actividades. La formación de parejas favoreció este aspecto, ya que ninguno tomó una actitud pasiva. Se generó un ambiente de trabajo que llevó, no sólo a realizar las tareas y responder las preguntas planteadas en cada situación, sino también a que se intercambiaran opiniones referidas a los distintos argumentos y estrategias utilizadas en los procesos de solución. Las discusiones con la clase completa fueron muy enriquecedoras, ya que les permitieron reflexionar sobre sus propias ideas, confrontar sus pensamientos y generar argumentos que permitan validarlos.

Este tipo de experiencias favorece el alejamiento de desarrollos exclusivamente procedimentales y algorítmicos que llevan a aprendizajes mecánicos, que no permiten otorgar sentido y significado a los conocimientos. A partir del planteo de situaciones cercanas al estudiante, de contextos cotidianos o relacionados a su carrera, se promueven distintas etapas de los procesos de aprendizaje, desde la formación de ideas intuitivas, hasta la internalización de los conceptos.

Para los docentes se constituyen en desafíos importantes que permiten analizar los procesos de pensamiento de los estudiantes, así como los mecanismos de construcción de conocimiento. Su implementación permite orientar la práctica docente de manera de generar en los estudiantes aprendizajes significativos.

Bibliografía

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En R. Flores (Ed.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1195-1203. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2015). Pensamiento y lenguaje variacional: un estudio sobre mecanismos de construcción del conocimiento matemático. En F. Rodríguez y R. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 307-314. México: CIMATES.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R. y Garza, A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado el 03 de junio de 2015 de http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/6586/1/images/desarrollo_ del_ pensamiento_y_leng_v_smc_baja.pdf

Cantoral, R.; Molina, J. y Sánchez M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R; Montiel, G. y Reyes, D. (2014). Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático. *Revista Pedagógica Escri/viendo*, *11(24)*, 17-26.

Carlson, M.; Jacobs, S.; Coe, E.; Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de referencia y un estudio. *EMA*, *8 (2)*, 121-156.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G. Schubring and F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 39-62). Rotterdam: Sense Publishers.

García, M. (2011). *Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto derivada*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Matemática Educativa de la UAG. Chilpancingo, México.

Méndez, M. y Arrieta, J. (2009). La experiencia como la evolución de las prácticas sociales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1353-1360. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2013). *Educación secundaria. Ciclo orientado. Orientaciones curriculares.* Recuperado el 10 de mayo de 2015 de https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content /download/ 191117/ 931874/file/C.Orientado-Dic.2013.pdf

Pérez, I. (2011). *Unidades didácticas en el área de Precálculo. Un estudio sobre la efectividad de organizadores de contenido*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, México.

Posada, F. y Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Stewart, J.; Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo, Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición.* México: Cengage Learning.

Autores:

Vrancken Silvia es Profesora en Matemática y Magíster en Didácticas Específicas por la Universidad Nacional del Litoral. Docente de las asignaturas del área Matemática de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral. Se dedica a la investigación en Educación Matemática, en especial relacionada a la enseñanza y aprendizaje del cálculo y la incorporación de las nuevas tecnologías. Esperanza. Santa Fe. Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar

Engler Adriana es Doctora en Matemática Educativa, Magíster en Educación Psico-Informática y Licenciada en Matemática Aplicada. Investigadora en Educación Matemática. Profesora Titular de las asignaturas del área Matemática de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral. Esperanza. Santa Fe. Argentina
aengler@fca.unl.edu.ar

Müller Daniela es Profesora en Matemática y Magíster en Didáctica de las Ciencias Experimentales por la Universidad Nacional del Litoral. Se desempeña en el área de Educación Matemática, en especial en el uso de recursos informáticos de las tecnologías de la información y comunicación integradas a las actividades del aula tradicional. Trabaja en el desarrollo e implementación de aulas virtuales. Esperanza. Santa Fe. Argentina
dmuller@fca.unl.edu.ar

Leyendecker Ana es alumna avanzada de la carrera Licenciatura en Matemática Aplicada de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Litoral. Docente de las asignaturas del área Matemática de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral.
Esperanza. Santa Fe. Argentina
aleyendecker@fca.unl.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 143-162

Estratégias utilizadas por um Grupo de estudantes surdos ao estudar noções de Função

Eliane Ferreira Batista, Armando Traldi Jr.

Fecha de recepción: xx/xx/xxxx
Fecha de aceptación: xx/xx/xxxx

Resumen

Este artículo es parte de la investigación de maestría tiene como objetivo determinar las estrategias utilizadas por un grupo de estudiantes sordos mediante la resolución de las actividades relacionadas con las nociones de función. Esta investigación se desarrolló en un colegio bilingüe, con los supuestos de las teorías de pensamiento y lenguaje, y la pedagogía visual. El estudio fue de tipo cualitativo, con los instrumentos de observación de la recopilación de datos, los protocolos y la entrevista. Se destaca por ser las principales consideraciones, estos estudiantes se utilizan las estrategias mentales de cálculo, cálculo numérico, figuras de apoyo, ejemplos numéricos, utilizando los datos de las tablas y la necesidad de señalización de los estados.
Palabras clave: estrategias de resolución; estudiantes sordos;

Abstract

This article is part of a master's degree research which has as purpose to verify the strategies utilized by a deaf students group to solve activities related to function concepts. This research has been developed in a bilingual school and it had as assumptions the theories of Thought and Language and Visual Pedagogy. The study has been qualitative, and it had as data collection tools the observation, the protocols and the interview. Stands out as main considerations, after the that this students group use strategies of mental calculation, numerical calculation, figures' support, numeric examples, use of table's data and necessity of enunciation's signaling.
Keywords: Strategies of Resolution; Deaf Students; mathematical language.

Resumo

Este artigo é parte de uma pesquisa de mestrado que tem como objetivo verificar estratégias utilizadas por um grupo de estudantes surdos ao resolver atividades relacionadas às noções de função. A pesquisa foi desenvolvida em uma escola bilíngue, tendo como pressupostos as teorias do Pensamento e linguagem, e da Pedagogia visual. O estudo foi qualitativo, tendo como instrumentos de coleta de dados a observação, os protocolos e a entrevista. Destaca-se como as principais considerações, que esses estudantes se utilizam de estratégias de cálculo mental, cálculo numérico, apoio em figuras, exemplos numéricos, utilização de dados das tabelas e necessidade da sinalização dos enunciados.
Palavras-chave: Estratégias de resolução; estudantes surdos; linguagem matemática.

1. Introdução

Este estudo tem como tema "O processo de ensino-aprendizagem de Matemática para estudantes surdos". A motivação e relevância para o seu desenvolvimento se deu a partir da prática profissional da primeira autora enquanto professora de matemática na rede estadual e municipal de ensino, tendo o convívio com estudantes surdos, e o resultado de estudos como o de Traldi (2010), que revela que o estudante surdo, em comparação com os estudantes ouvintes, tem tido pouca oportunidade de acesso e permanência no ensino superior, enquanto que o estudo de Spencer (2010), afirma que o estudante surdo, quando colocado em igualdade de condições de aprendizagem com os estudantes ouvintes, tem o mesmo desempenho acadêmico que eles.

Essa autora também revela, a partir dos seus estudos, que se faz necessário desenvolver pesquisas que tenham como objetivo compreender a relação entre o processo de ensino-aprendizagem do estudante surdo, sua competência e a sua comunicação, visto que a língua é um dos maiores desafios enfrentados na vida acadêmica desses estudantes.

Neste mesmo caminho, Campello (2008) desenvolve em seus estudos uma perspectiva de abordagem dos conteúdos escolares pautada na Pedagogia Visual. Segundo essa autora, a língua de sinais, é um dos recursos viso-gestual e espacial dos surdos, em que se insere a sua cultura ao mesmo tempo em que a produz e a reafirma. Para a autora, a comunicação por meio da modalidade viso-gestual é muito importante e seus signos são elementos de fortalecimento da cultura dos sujeitos, fator imprescindível no processo de escolarização.

Vygotsky (2001) também destaca a importância da linguagem, pois para este autor, pensamento e linguagem estão intimamente relacionados, sendo quase impossível diferenciar se um fenômeno se trata de um pensamento ou de uma linguagem. Esse autor buscava compreender a relação entre as ideias que as pessoas desenvolvem e o que dizem ou escrevem. Para ele uma palavra que não representa uma ideia é uma coisa morta, da mesma forma que uma ideia não incorporada em palavras não passa de uma sombra (Vygotsky, 2001, p. 02).

A partir destes estudos desenvolvemos uma pesquisa com o objetivo de verificar estratégias utilizadas por um grupo de estudantes surdos ao resolver atividades relacionadas às noções de função, destacando os aspectos da língua e do pensamento.

2. Cenário do Estudo desenvolvido

A pesquisa realizada foi desenvolvida em um colégio particular bilíngue. O colégio atende estudantes surdos desde 2002 em uma perspectiva bilíngue de trabalho, na qual a Língua Brasileira de Sinais (Libras) é considerada a primeira Língua da pessoa surda, enquanto que Língua Portuguesa, em suas modalidades oral e escrita, é considerada a segunda Língua, mas, não menos importante.

Os dados foram coletados a partir do desenvolvimento de atividades em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, com 19 estudantes surdos. Dezesseis desses, estudaram em uma escola da prefeitura de São Paulo (EMEB), no Ensino

Fundamental, dois estudaram na mesma instituição em que a pesquisa foi realizada desde o Ensino Fundamental II e um deles estudou em outra escola particular bilíngue.

Apesar dos 19 estudantes terem participado do desenvolvimento das atividades, optou-se por analisar os dados de apenas oito estudantes, não considerando os dados para análise dos estudantes que faltaram em mais de uma aula durante o desenvolvimento das atividades, os que não tinham domínio de Libras e os que não apresentaram a autorização dos pais para participarem da pesquisa. Estes estudantes foram nomeados como E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7 e E8.

A metodologia utilizada para a pesquisa foi do tipo qualitativa, desenvolvida em duas etapas: (i) um estudo exploratório, na perspectiva de Gil (2008), dos aspectos históricos da educação de estudantes surdos e estudo bibliográfico acerca de pesquisas realizadas com a temática educação matemática para surdos, na perspectiva de compreender o que já se tem pesquisado sobre o assunto para elaboração de hipóteses operacionalizáveis; (ii) pesquisa ação, na perspectiva de Woodside e Wilson (2003), para o levantamento dos dados e análise na expectativa de compreender o objetivo proposto.

A coleta de dados foi a partir dos seguintes instrumentos: protocolos dos estudantes, observações da pesquisadora e da professora da turma durante o processo de aplicação e entrevistas.

As atividades propostas foram dividas em quatro momentos, buscando no primeiro momento propor situações que envolve-se a habilidade visual, inspiradas nas ideias de Campello (2008), no segundo momento foram propostos problemas envolvendo noções de função, no terceiro momento foram retomadas algumas das atividades realizadas nos dois momentos anteriores acrescentando a solicitação de se fazer esboço de gráficos, utilizando o *software* GeoGebra. No quarto momento foram propostas atividades com a finalidade de retomar os assuntos discutidos na expectativa de esclarecer possíveis dúvidas.

Neste artigo serão apresentadas quatro atividades, sendo que cada uma delas se refere a cada momento do desenvolvimento da sequência.

3. Luzes teóricas

Considerando um dos aspectos do objetivo do estudo que é o papel da “língua” no processo ensino-aprendizagem de matemática para estudantes surdos, buscamos fundamentos nos estudos de Vygotsky (2001), que apresenta importantes contribuições a respeito da língua e do pensamento. O autor afirma que devemos entender o pensamento e a fala como um processo relacionado entre si.

Para Vygotsky (2001, p. 102):

> O significado duma palavra representa uma amálgama tão estreita de pensamento e linguagem que é difícil dizer se se trata de um fenômeno de pensamento, ou se se trata de um fenômeno de linguagem. Uma palavra sem significado é um som vazio; portanto, o significado é um critério da palavra e um componente indispensável. Pareceria portanto que poderia

> ser encarado como um fenômeno linguístico. Mas do ponto de vista da psicologia, o significado de cada palavra é uma generalização, um conceito. E, como as generalizações e os conceitos são inegavelmente atos de pensamento, podemos encarar o significado como um fenômeno do pensar. No entanto, daqui não se segue que o pensamento pertença a duas esferas diferentes da vida psíquica. O significado das palavras só é um fenômeno de pensamento na medida em que é encarnado pela fala e só é um fenômeno linguístico na medida em que se encontra ligado com o pensamento e por este é iluminado. É um fenômeno do pensamento verbal ou da fala significante — uma união do pensamento e da linguagem.

Para Vygotsky (2001), há uma articulação entre pensamento e linguagem, ambos estão estreitamente relacionados. Para ele é difícil definir se o significado de uma palavra é um fenômeno de pensamento ou de linguagem. Ele, ainda afirma que a estrutura da língua que uma pessoa fala influencia a maneira com que esta pessoa percebe o universo.

Partindo desse pressuposto, entende-se que estudantes necessitam utilizar sua língua natural, como base para a construção do pensamento e conceitos. No caso de estudantes surdos, estes necessitam utilizar a língua de sinais, como base para construção do pensamento e desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

Para esse autor:

> Uma palavra não se refere a um objeto simples, mas a um grupo ou a uma classe de objetos e, por conseguinte, cada palavra é já de si uma generalização. A generalização é um ato verbal de pensamento e reflete a realidade duma forma totalmente diferente da sensação e da percepção. Esta diferença qualitativa a se encontra implicada na proposição segundo a qual há um salto qualitativo não só entre a total ausência de consciência (na matéria inanimada) e a sensação, mas também entre a sensação e o pensamento. (Vygotsky, 2001, p. 10).

Entende-se que o conceito de cada palavra está relacionado a um grupo de palavras, e cada uma destas já é uma generalização, logo a generalização de um conceito ou de uma palavra do pensamento reflete a realidade relacionada com a sensação e percepção. Este processo pode estar relacionado com a história de vida ao qual a pessoa pertence.

De acordo com Vygotsky, todas as atividades cognitivas básicas do indivíduo ocorrem de acordo com sua história social e acabam se constituindo no produto do desenvolvimento histórico-social de sua comunidade.

Esse autor faz importantes considerações acerca da pessoa com deficiência. Ele visualiza que a sociedade e a cultura são aspectos importantes para combater a deficiência. Para ele:

> Provavelmente a humanidade vencerá, tarde ou cedo, a cegueira, a surdez e a debilidade mental[1]. Porém, as vencerá muito antes no plano social e

[1] Conservamos o termo de acordo com o texto do autor, no entanto atualmente usamos o termo "deficiência intelectual".

> pedagógico que no plano médico e biológico. É possível que não esteja distante o tempo em que a pedagogia se envergonhe do próprio conceito de "criança deficiente", como assinalamento de um defeito insuperável da sua natureza. O surdo que fala e o cego que trabalha são partícipes da vida comum em toda sua plenitude, eles mesmos não experimentaram sua insuficiência nem deram motivo aos demais. Está em nossas mãos fazer com que a criança cega, surda ou débil mental não seja deficiente. Então desaparecerá também esse conceito, signo inequívoco de nosso próprio defeito. [...] Todavia, fisicamente, a cegueira e a surdez existirão durante muito tempo na terra. O cego seguirá sendo cego e o surdo, surdo, porém deixarão de ser deficientes porque a defectividade é um conceito social, tanto que o defeito é uma sobreposição da cegueira, da surdez, da mudez. A cegueira em si não faz uma criança deficiente, não é uma defectividade, isto é, uma deficiência, uma carência, uma enfermidade. Chega a sê-lo somente em certas condições sociais de existência do cego. É um signo da diferença entre a sua conduta e a dos outros. A educação social vencerá a deficiência. (Vygotski, 1997, p.82)

Como já previsto por Vygotsky, observa-se que a educação tem caminhado para superar os desafios pedagógicos apresentados por estudantes com deficiências. Ele afirma que estes avanços se darão primeiro no campo social e pedagógico que no campo médico e biológico.

Ainda este autor nos alerta que tanto a educação como a sociedade necessitam propor ações para compreender que pessoas surdas, cegas ou com deficiência intelectual precisam ser vistas considerando suas potencialidades.

Para Vygotsky (1997) é possível que uma pessoa cega ou surda, possui apenas uma característica biológica, não uma deficiência, pois a defectividade é um conceito social.

Outra autora que contribui para nossas reflexões acerca da aprendizagem dos estudantes surdos foi Campello, pois esta traz importantes considerações acerca da Pedagogia Visual, uma metodologia de ensino fundamentada em recursos visuais. Segundo Campello (2008), a língua de sinais, é um dos recursos viso-gestual e espacial dos surdos, onde se insere a sua cultura ao mesmo tempo em que a produz e a reafirma. Para a autora a comunicação por meio da modalidade viso-gestual é muito importante e seus signos são elemento de fortalecimento da cultura dos sujeitos.

Ainda essa autora afirma, em relação aos registros escritos dos conteúdos "ensinados":

> Os signos da língua dos sujeitos Surdos-Mudos possuem um caráter visual, independentemente da escrita e da oralidade. Esses possuem um "outro" modo de olhar, com percepções do mundo pautadas nesse caráter visual que difere do caráter da fala tendo a palavra como signo. O registro por e com a escrita do português pode ser realizada de forma mecânica sem "nada dizer" ao aluno Surdo-Mudo, mesmo que as anotações sejam feitas por ele. É sabido que muitos alunos não surdos mudos são exímios copistas sem que compreendam nada do que escrevem. As palavras para eles não possuem valor de signo. (Campello 2008, p. 135)

Diante disto, observa-se que os signos visuais apresentam um importante significado em seu aspecto visual não dependendo da escrita e da oralidade, podendo este representar os registros dos estudantes surdos trazendo importantes significados. Devemos considerar também que os registros realizados em língua portuguesa para os estudantes surdos podem não ter significado se apresentados de forma isolada.

Considerar a Pedagogia Visual na escolarização dos estudantes surdos, implica na necessidade de propostas pedagógicas que visam atender aos estudantes surdos em seu processo de escolarização. Além de ser necessário o desenvolvimento de materiais educacionais específicos para o processo de ensino e aprendizagem destes estudantes.

A técnica da Pedagogia Visual exige, sobretudo, o uso da imagem, captando em todas as suas essências o que as rodeiam, traduzindo todas as formas de interpretações e do modo de se ver, de forma subjetiva e objetiva. Para Campello:

> Não é, simplesmente, usar a língua de sinais brasileira, como uma língua simples, mecanizada, e sim, muito mais. Exige captações de todos os elementos que rodeiam os sujeitos Surdos-Mudos para transformá-los em signos visuais. (Campello 2008 p.138)

Campello, ressalta que a Pedagogia Visual tem que estar relacionada com o mundo e a experiência visual do estudante surdo, desde o nível da educação infantil, passando pelo ensino fundamental e médio a graduação e pós graduação.

A utilização dessa pedagogia propõe técnicas, perspectivas e recursos relacionados a "visão", nessa pedagogia:

> ...a imagem na “apreensão do estímulo visual” e perspectiva emergem de acordo com forças bidimensionais e tridimensionais, o que exigem uma nova forma de pensar o processo perceptivo e o processamento visual daquilo que rodeia o sujeito Surdo-Mudo e qual seu olhar sobre o mundo no processo de ensinar e aprender. A imagem em perspectiva é, nessas condições, talvez uma espécie de hibridismo entre a percepção visual e a imagem não técnica, no caso da percepção auditiva, como treinamento da fala e da audição. Devido a isso, mostra-se assim, a multiplicidade de identidades dos sujeitos Surdos-Mudos. (Campello, 2008 p.138)

Dessa forma, percebe-se que o processo de ensino e aprendizagem de estudantes surdos devem estar embasados em aspectos visuais, considerando que a língua de sinais uma língua viso-gestual está relacionada com o processo de pensamento e construção de conceitos destes estudantes.

No próximo item serão apresentadas quatro atividades aplicadas com um grupo de estudantes e a análise dos dados fundamentada nos aportes teóricos deste estudo.

4. Coleta de dados

Conforme já anunciado os dados foram coletados por meio de atividades propostas em quatro diferentes momentos. Neste artigo serão apresentadas atividades adaptadas a partir da pesquisa de Scano (2009) e atividades inspiradas no livro didático de Andrini (2012).

Vale ressaltar que se optou por digitar as respostas dos estudantes para uma melhor visualização dos registros, e que a escrita está de acordo com a apresentada nos protocolos dos estudantes.

4.1 Primeiro momento

No Primeiro Momento foram propostas atividades, explorando os aspectos visuais diferentes registros de uma função (tabela, gráfico e diagrama). A seguir, é apresentada uma das atividades desenvolvidas neste momento. Esta atividade buscou explorar o aspecto visual de observação dos estudantes, conforme defendido por Campello (2008).

Os três registros foram apresentados simultaneamente, junto com questões que buscavam verificar a compreensão dos estudantes em relação a variação entre grandezas e familiarizar os estudantes com os diferentes registros.

Atividade

I. Em uma *lan house*, o preço a pagar pelo cliente consiste em uma taxa fixa no valor de R$3,00 acrescentado de R$2,50 por hora adicional, a tabela a seguir representa esta situação, observe: (Obs: Na tabela de preços o valor a ser pago é alterado apenas na hora inteira, isto é, caso o cliente fique 2h15mim, pagará o preço de 3 horas).[2]

Tempo (horas)	]0,1]	]1,2]	]2,3]	]3,4]	]4,5]	]5,6]
Valor a ser pago por tempo de uso da *lan house*	*R$3,00*	R$5,50	R$8,00	R$10,50	R$13,00	R$15,50

Figura 1. Atividade 1 - Item I
Fonte: Arquivo da Pesquisadora

II. O gráfico a seguir representa o valor a ser pago por um cliente ao utilizar os serviços de uma *lan house*, consistindo em uma taxa fixa, no valor de R$3,00 e R$2,50 por hora utilizada, vejamos:

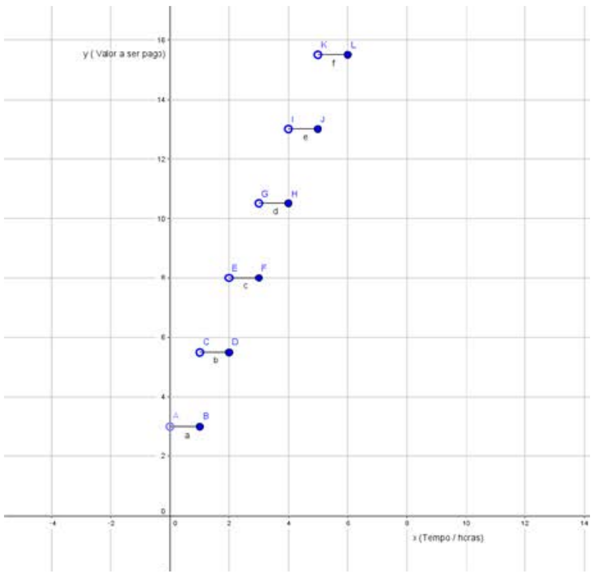


Figura 2. Atividade 1 - Item II
Fonte: Arquivo da Pesquisadora

[2] Inspirado em Andrini (2012)

III. O diagrama seguinte corresponde ao valor a ser pago na utilização de uma *lan house*, sendo uma taxa fixa no valor de R$3,00 e R$2,50 por hora adicional:

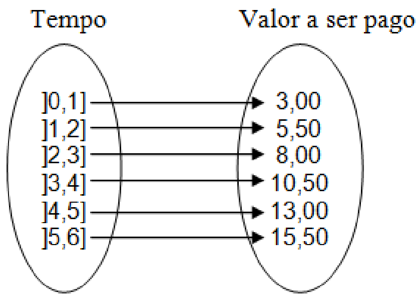


Figura 3. Atividade 1. Item III

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Após a observação da tabela, do gráfico e do diagrama, responda às seguintes questões:

a)Há relação entre a tabela, o gráfico e o diagrama? Caso sim, quais são essas relações?

b) Qual dos três itens (tabela, gráfico e diagrama) proporciona uma melhor compreensão?

A seguir, apresentamos as respostas dos estudantes.

a)

E1: *"O valor dos três iguais os total de cada o número do tipo de horas. O informação do tempo, horas, gráfico e total igual é apresentado de tabela mas diferente de tabela gráfico do círculo, tabela e tabela total."*
E2: *"Em uma lan house, o preço a pagar ser uma taxa fixa no valor de R$3,00 e R$2,50 por hora utilizada. Tudo matemática igual, mas diferente desenham e mostrar"*
E3: *"A: tabela é total (1,2,3,4,5 horas) pagar na lan house, B: A linha de matemática (computador) de responder e C é o tempo que pagar as horas do computador, é o diagrama (total).*
E4: *"Minha opinião acho que é igual de matemática, mas tem diferentes vez. Eu só entendeu de pouco, mas só tempo (horas), o dinheiro mas tem só igual linha, número do igual."*
E5: *"Eu acho que só opinião é igual. A: tempo hora também dinheiro; B: é linha diferente; C: É igual tempo hora. Matemática é igual tempo hora mostra."*
E6: *"É combina a matemática é própria matemática tratar o número e tempo, só 1 horas. É feito diferente e informação a matemática."*
E7: *"A minha opinião que é melhor gráfico mais fácil para entender! Outro depende. Falta informação para explicar todos três registros são igualmente, explique mais claro, (todos são igualmente), só que diferente, mostram jeito diferente."*

E8: *"Eu acho que só pouca iguais, só alguns. É iguais só de número, iguais não sentido de mostrar. 1: É hora de dinheiro; 2: É linha e hora; 3: É hora e dinheiro."*

Protocolo 1. Respostas da Atividade 1 do item "a".

b)

E1: *"É melhor de tabela da total."*
E2: "Melhor rápido entender é A porque mostrar tudo preço e horas".
E3: *"É melhor (tabela A)."*
E4: *"Eu acho melhor o diagrama."*
E5: *"Acho que é melhor C."*
E6: *"É melhor tabela e fica mais fácil."*
E7: *"O melhor diagrama e tabela são melhores."*
E8: "*É diagrama."*

Protocolo 2. Resposta da Atividade 1 do item "b".

Analise desta atividade

Observa-se que a forma utilizada pelos estudantes na construção das frases usadas para responder as questões teve influência da Libras. Foi necessária uma habilidade diferenciada por parte dos pesquisadores para poder entender, visto que eles têm como primeira língua a Libras, e não possuem proficiência na escrita da Língua Portuguesa, tendo a construção das suas frases escritas apoiadas em Libras. Vygotsky (2001, p.02) afirma que a estrutura da língua que uma pessoa fala influencia a maneira com que esta pessoa percebe o universo. Para este autor existe uma relação entre as ideias que as pessoas desenvolvem e o que dizem ou escrevem.

Outro aspecto possível de se afirmar a partir desta atividade e das outras que compunham o conjunto de atividades deste momento, é que os estudantes não tiveram dificuldades em compreender a função representada a partir de diferentes registros, e perceberem a articulação entre eles. No entanto, é fato que os registros na forma de diagramas e tabelas foram os que os estudantes tiveram mais facilidade em compreender, enquanto que nos registros gráficos e verbais tiveram mais dificuldades.

4.2 Segundo momento

O objetivo desse momento é apresentar aos estudantes problemas envolvendo noções de função. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997, p.32), a resolução de problemas pode ser vista como ponto de partida da atividade matemática em contrapartida à simples resolução de procedimentos e ao acúmulo de informações, uma vez que possibilita aos estudantes a mobilização dos conhecimentos e o gerenciamento das informações que estão ao seu alcance.

Nesse momento foram propostas aos estudantes atividades com a expectativa de verificar quais estratégias eles utilizam para resolver os diferentes problemas.

Atividade

O perímetro de um quadrado é determinado a partir da medida de seu lado. Nessas condições responda: [3]

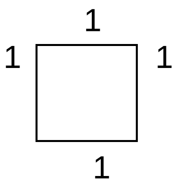
a) Qual é o perímetro de um quadrado medindo 1cm de lado?
b) Qual é o perímetro de um quadrado medindo 2 cm de lado?
c) Qual é o perímetro de um quadrado medindo 5,5 cm de lado?
d) Qual é a medida de cada lado de um quadrado que tem 24 cm de perímetro?
e) Escreva uma sentença matemática que represente o perímetro de qualquer quadrado e justifique sua resposta.

A seguir, apresentamos as respostas dos estudantes.

a)

E1: *"4 cm."*

E2: *"4 cm." (Fez o desenho do quadrado com os valores dos lados para responder a questão).*



E3: *"4 cm de um quadrado".*
E4: *"4cm quadrado".*
E5: *"4cm".*
E6: *"4cm quadrado".*
E7: *"4 cm de um quadrado".*
E8: *"É quatro / 4cm".*

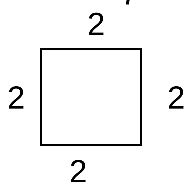
Protocolo 3. Resposta da Atividade 2 do item "a".

[3] Scano (2009)

b)

E1: *"8cm."*

E2: *"8 cm." (Fez o desenho do quadrado com os valores dos lados para responder a questão).*

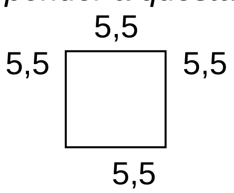


E3: *"8cm de um quadrado."*
E4: *"8 cm quadrado".*
E5: *"8cm".*
E6: *"8cm de um quadrado."*
E7: *"8cm de um quadrado."*
E8: *"É oito / 8cm".*

Protocolo 4. Resposta da Atividade 2 do item "b".

c)

E1: *"22,0cm."*
E2: *"22 cm." (Fez o desenho do quadrado com os valores dos lados para responder a questão).*



E3: *"22,0 cm de um quadrado."*
E4: *"21,0 cm quadrado."*
E5: *"22,0 cm".*
E6: *"40 cm quadrado".*
E7: *"22 cm de um quadrado."*
E8: "*É 22,0".*

Protocolo 5. Resposta da Atividade 2 do item "c".

d)

E1: *"6cm." (Realizou a operação de divisão 24:4 para responder a questão.*
E2: *"6cm." (Realizou os cálculos: 24:2 = 12:2 = 6cm para responder a questão).*
E3: *"6 cada lado de um quadrado."*
E4: *"6".*
E5: *"Realizou a operação de divisão 24:4".*
E6: *"6cm quadrado".*
E7: *"6cm de um quadrado."*
E8: *"6"*

Protocolo 6. Resposta da Atividade 2 do item "d".

e)

E1: *"A divisão da multiplicação o número."*
E2: *"4x ; 4.15 = 60cm." (Realizou o desenho de um quadrado com 15cm de lado para responder a questão).*

15cm
15cm 15cm
15cm

4. x
4 . 15 = 60 cm

E3: *"4x ; 4 . 2 = 8 ; 4 . 3 = 12 ; 4 . 20 = 80".*
E4: *"4x ; 4 . 2 = 8 ; 4 . 3 = 12 ; 4 . 20 = 80".(Fez o desenho de um quadrado de lado 5cm para responder a questão).*

5cm
5cm 5cm
5cm

4. x
4 . 2 = 8
4 . 3 = 12
4 . 20 = 80

E5: *"4x". (Fez o desenho de um quadrado com os números 1,2,3 e 4 de lado, para responder a questão e exemplificou: 4 . 5 = 20 ; 4 . 2 = 8 ; 4 . 3 = 12; 4 . 20 = 80; escreveu : Multiplicação).*

1
4 2
3

4. x
4 . 5 = 20
4. 2 = 8
4 . 3 = 12
4 . 20 = 80 *Multiplicação*

E6: *"4x". (Fez o desenho de um quadrado com os números 1,2,3 e 4 de lado, para responder a questão e exemplificou: 4 . 5 = 20 ; 4 . 2 = 8 ; 4 . 3 = 12; 4 . 20 = 80; escreveu : Precisa mesmo a multiplicação; Sentença / Fórmula 4.x).*

1
4 2
3

4. x
4 . 5 = 20
4. 2 = 8
4 . 3 = 12
4 . 20 = 80 *Sentença / Fórmula 4.x*

E7: "4x". (Exemplificou: *4 . 5 = 20 ; 4 . 2 = 8 ; 4 . 3 = 12; 4 . 20 = 80*
E8: *"4x". (Exemplificou: 4 .3 apontando uma seta para o três, mostrando que é o x; escreveu ao lado: Multiplicação).*

4 . x 4 . 3 Multiplicação
$\downarrow$
x

Protocolo 7. Resposta da Atividade 2 do item "e".

Após o desenvolvimento dessa atividade e de outras que foram desenvolvidas no segundo momento é possível afirmar que os estudantes compreenderam a relação entre as grandezas perímetro e lado. Eles utilizaram o cálculo por algoritmos e o mental para resolver as questões que solicitam o valor total do perímetro, indo ao encontro do que é afirmado nos PCN (1997, p.78) nas atividades de resolução de problemas é comum que os estudantes construam registros numéricos para expressar os procedimentos de cálculo mental que utilizam.

Também se utilizaram de figuras para resolver a atividade, que segundo Cavalcanti (2001, p.127), o uso do desenho é um importante recurso para o ensino da matemática. Verificou-se em outras atividades, propostas no segundo momento, que os estudantes obtiveram sucesso na escrita da sentença matemática que representam diferentes funções. Para Usiskin (1995) esta compreensão é importante para o estudo da álgebra.

Pode-se afirmar que os estudantes surdos obtiveram sucesso na resolução das atividades e utilizaram principalmente das estratégias de cálculo numérico, apoio em figuras, representação algébrica e cálculo mental.

4.3 Terceiro momento

No Terceiro momento foram retomadas duas atividades já realizadas no início da sequência. O foco desse momento era o desenvolvimento da habilidade de leitura, interpretação e construção de gráficos de funções. As atividades desse momento foram desenvolvidas usando o *software* GeoGebra. A seguir será discutida uma das atividades.

Atividade

Em uma das atividades propostas no Primeiro Momento, vimos que "O perímetro de um quadrado é determinado a partir da medida de seu lado". Dessa forma p (x) = 4x pode representar o perímetro de qualquer quadrado em função da medida de seu lado, ou seja, para um quadrado com a medida do lado igual a 1cm, temos que p (1) = 4 . 1 = 4, perímetro igual a 4 cm. Em que (1, 4) pode representar um par ordenado que por sua vez pode ser representado em um plano cartesiano por um ponto.[4]

a) No GeoGebra, marque dois pontos, A e B, que representem pares ordenados da função p (x) = 4x. (Obs: Para inserir os pontos, clique sobre a opção "ponto" no *software* GeoGebra e digite os pontos no campo de entrada).

[4] Scano (2009)

b) Registre as coordenadas desses pontos: A(,) e B (,).
c) Trace uma reta por esses dois pontos e mostre sua equação. Qual a relação dessa equação com a função? (Obs: Para inserir uma reta, clicar no botão reta, em seguida, clicar sobre dois pontos).
d) Considerando a função que determina o perímetro, o que os valores do eixo x representam? E os valores do eixo y?
e) Marque um ponto C sobre essa reta. Movimente este ponto sobre a reta e registre o que você observa em relação aos valores das coordenadas desse ponto.

A seguir, apresentamos as respostas dos estudantes.

a) Nesse item todos estudantes conseguiram desenvolver a atividade e registraram os pontos escolhidos no item b, conforme descrito abaixo.

b)

E1: "A (1 , 4) e B (4 , 20)".
E2: "A (1 , 4) e B (3 , 12)".
E3: "A (1 , 4) e B (4 , 20)".
E4: "A *(0,5 , 2) e B (1 , 4)".*
E5: "A (1 , 4) e B (2 , 8)".
E6: "A *(0,5 , 2) e B (1 , 4)".*
E7: "A *(0,5 , 2) e B (12, 0)".*
E8: "A *(0,5 , 2) e B (1 , 4)".*

Protocolo 8. Resposta da Atividade 3 do item "b".

c)

E1: *" f(x) = 4 . x (função) e y = 5,33 . x – 1,33 (equação da reta) ".*
E2: *"Equação: 4 . x - y = 0 ; Função P(l) = 4l ";*
E3: *" f(x) = 4 . x (função) e y = 5,33 . x – 1,33 (equação da reta) ".*
E4: *" f(x) = 4 . x (função) e y = 4 . x (equação da reta) ".*
E5: *" f(x) = 4 . x (função) e y = 4 . x (equação da reta) ".*
E6: *" f(x) = 4 . x (função) e y = 4 . x (equação da reta) ".*
E7: *"y = -0,36.x + 4,36 (equação da reta) e f(x) = 4 . x (função)".*
E8: *"y = 4.x".*

Protocolo 9. Resposta da Atividade 3 do item "c".

d)

E1: *"Eixo x: medida do lado(l); Eixo y: medida do perímetro(P)".*		
E2: *"Medida do lado (l)*		*Medida do Perímetro (P)"*
	1	*4*
	3	*12*
E3: *"Eixo: medida do lado(l); Eixo: medida do perímetro(P)".*		

E4: *"x: medida do lado(l); y: medida do perímetro(P)".*
E5: *"Eixo x: medida do lado (l)(1,4) ; Eixo y: medida do perímetro(P)(2,8)".*
E6: *"x: medida do lado(l); y: medida do perímetro(P)".*
E7: *"x: medida do lado; y: medida do perímetro".*
E8: "*f(x) = 4.x (função); y = 4.x (equação da reta)".*

Protocolo 10. Resposta da Atividade 3 do item "d".

e)

E1: "*É o x e y mudar e proporcional".*
E2: *"Eixo x e y pode mudando também 4 . x ".*
E3: *"Se tem eixo x e y são mudar o número o proporcional".*
E4: *"Proporcional x e y".*
E5: *"x e y troca; proporcional"*
E6: "*Proporcional y↑ e x→ "*
E7: "*Sei que números mudam".*
E8: "*x e y tem mudança ; proporcional".*

Protocolo 11. Resposta da Atividade 3 do item "e".

Análise

O grupo de estudantes surdos analisados não apresentaram dificuldades em compreender os comandos solicitados na atividade em relação ao Geogebra. No entanto, vale destacar que sempre a professora fazia a tradução do enunciado para Libras. Eles observaram os gráficos construídos e retiraram todas as informações solicitadas. Vale ressaltar que conforme Campello (2008) afirma, esses aspectos visuais, são fundamentais para o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes surdos.

4.4 Quarto momento

No quarto momento foram propostas diferentes atividades para avaliar a aprendizagem da sequência desenvolvida até o momento. O objetivo das atividades foi avaliar se os estudantes: (i) compreenderam o conceito de variação entre grandezas; (ii) desenvolveram a habilidade de representar na forma algébrica funções apresentadas na forma numérica, por meio de tabelas e gráficos; (iii) reconhecer as grandezas envolvidas nas atividades desenvolvidas, assim como a variação entre elas; (iv) construírem exemplos de funções.

A seguir, será apresentada uma das atividades desenvolvidas neste momento.

Atividade 4

A locadora de veículo *Aluga fácil*, oferece as seguintes condições para aluguel de carros: uma taxa fixa de R$90,00, mais R$1,50 por quilômetro rodado. Observe a tabela e o gráfico que corresponde essa situação:[5]

I)

I)Quilômetro rodado	A partir de 0.	5	10	15	20	25
Valor a ser pago em relação a quantidade de quilômetro rodado. (R$)	R$90,00	R$ 97,50	R$ 105,00	R$ 112,50	R$ 120,00	R$ 127,50

Figura4. Atividade 4 - Item I
Fonte: Tabela elaborada pela pesquisadora a partir da Atividade de Scano (2009)

II)

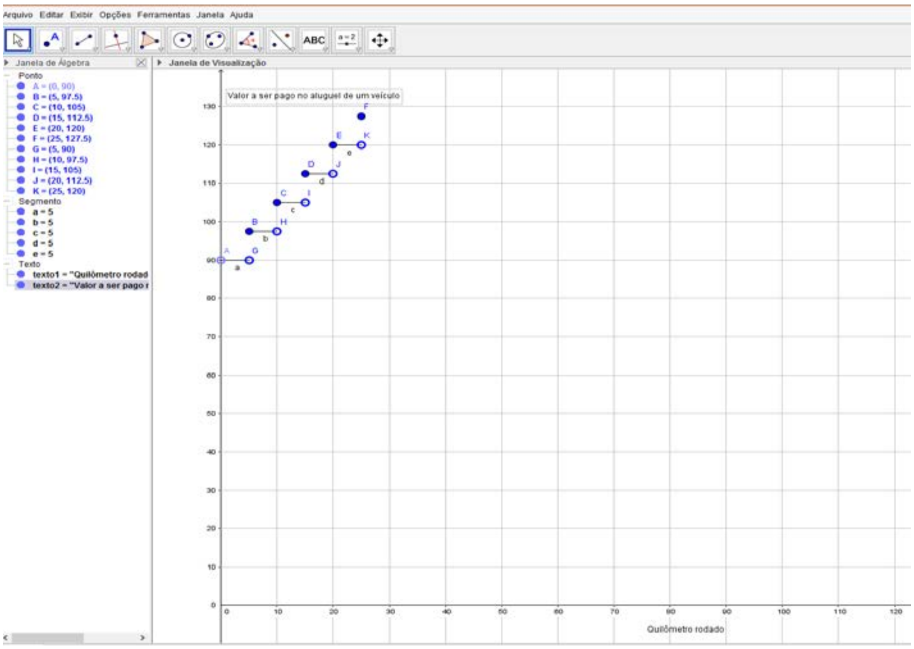


Figura 5. Atividade 5 - Item II
Fonte: Gráfico elaborado pela pesquisadora a partir da Atividade de Scano (2009)

Responda:

a) Qual é a variação do valor pago em relação aos quilômetros rodados, considerando o intervalo de 5 Km?

b) Qual o valor a ser pago por um cliente que rodou 30 quilômetros?

A seguir, apresentamos as respostas dos estudantes. O estudante E1 não participou desta atividade.

[5] Scano (2009)

a)

Todos os estudantes utilizaram a estratégia de montar o algoritmo para verificar a variação do valor pago.
E2, E3, E4, E5, E6, E7 e E8: Realizaram os cálculos:

$$\begin{array}{r} 105{,}00 \\ -\ \ 97{,}50 \\ \hline 7{,}50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 112{,}50 \\ -\ 105{,}00 \\ \hline 7{,}50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 120{,}00 \\ -\ 112{,}50 \\ \hline 7{,}50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 127{,}50 \\ -\ 120{,}00 \\ \hline 7{,}50 \end{array}$$

Respostas:
E2: É igual para 5 quilômetros rodado mesmo regular de 7,50 ; 5km pago R$7,50".
E3: *5km paga R$7,50".*
E4, E5, E6, E7 e E8: Regularidade 7,50 ; 5km paga R$ 7,50.

Protocolo 12. Resposta da Atividade 4 do item "a".

b)

E2, E3, E4, E5 e E8: *"Realizaram a operação por meio da sentença matemática:*

f(x) = 90 + 1,50 . x
f(x) = 90 + 1,50 . 30
f(x) = 90 + 45,00
f(x) = 135,00

Em 30 dias pagou R$135,00".

E6 e E7: *"Realizou a operação por meio da sentença matemática:*

f(x) = 90 + 1,50 . x
1,50 x 30 = 45,00
90 + 45,00 = 135,00".

Protocolo 13. Resposta da Atividade 4 do item "b".

Análise

Os estudantes fizeram a atividade proposta e encontraram o valor da variação. Não apresentaram dificuldade em compreender o que a questão estava solicitando no item (a). A hipótese é que já se familiarizaram com a linguagem, visto que já tinham desenvolvido outras atividades com solicitações parecidas. No item (b), todos os estudantes sentiram a necessidade de escrever a função algebricamente, para depois calcular o valor numérico procurado. Nenhum estudante apresentou a resposta, usando a ideia de acrescentar R$ 7,50 no valor de 25 dias. A hipótese da utilização desta estratégia é devido a pesquisadora ter por diferentes momentos solicitado que eles registrassem no papel a estratégia de resolução.

Vale ressaltar que os estudantes obtiveram sucesso nas outras atividades propostas neste momento, e que foram poucas as dúvidas que surgiram.

5. Considerações finais

Retomando o objetivo anunciado no inicio do artigo: de verificar estratégias utilizadas por um grupo de estudantes surdos ao resolver atividades relacionadas às noções de função, destacando os aspectos da língua e do pensamento, pode-se afirmar a partir dos dados analisados que os estudantes surdos utilizam-se das estratégias de cálculo mental, cálculo por algoritmo, apoio em desenhos e sentem a necessidade de fazer anotações numéricas e algébricas para responder problemas anunciados na língua natural.

Outro aspecto revelado no estudo é que os estudantes surdos declararam que as funções representadas por tabelas e diagramas são mais fáceis de serem compreendidas do que as representadas por gráficos ou língua natural. Este fato pode ser atribuído a dificuldade da compreensão da língua portuguesa, no caso dos enunciados verbais e pela proposta curricular do ensino fundamental II explorar mais a leitura de tabelas e diagramas do que de gráficos.

Neste sentido, ainda vale destacar que, no aspecto visual, há uma "equivalência" mais evidente nos registros na forma de tabela e digrama, do que nos gráficos, pois na leitura do gráfico são exigidos outros conhecimentos matemáticos, como por exemplo, pares ordenados e sistemas de eixos ortogonais.

Vale acrescentar que neste estudo foi possível identificar aspectos que foram além dos objetivos anunciados. O primeiro deles é a necessidade de uma compreensão diferenciada do que é escrito pelos estudantes surdos, pois por não terem a língua portuguesa como primeira língua, a escrita deles é apoiada na forma de comunicação em Libras e não na língua falada em português.

O outro aspecto é a necessidade de elaboração de material didático diferenciado para o surdo, em que os enunciados propostos das atividades sejam traduzidos para Libras e que se explore sempre aspectos visuais.

A partir deste estudo, analisando os erros e acertos dos estudantes surdos, suas potencialidades em relação ao conteúdo estudado e as reflexões teóricas realizadas a partir do texto de Vygotsky (1997), pode-se afirmar que os estudantes surdos tem a mesma competência acadêmica que os estudantes ouvintes, e que a nosso ver, estes estudantes não pertencem a uma educação especial, mas sim a um grupo de minoria linguística, considerando que suas necessidades estão relacionadas com a língua.

Bibliografia

ANDRINI, A. e VASCONSCELOS M. J. (2012). Praticando matemática. Editora do Brasil. São Paulo.

BARRETO, M. M. (2007). *Matemática e Educação Sexual: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários.* UFRGS. Porto Alegre.

BICUDO, M. A. (1999). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepção & Perspectivas.* Unesp. São Paulo/SP.

BRASIL. MEC. SEF. *Parâmetros Curriculares Nacionais Matemática.* Brasília, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> Acesso em 22/07/2016.

BRASIL. MEC. SEF. *Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio*. Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em 23/09/2015;

CAMPELLO, Ana Regina e Souza. Pedagogia Visual na Educação de Surdos– Mudos. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de pós Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, 2008.

CAVALCANTI, C. *Diferentes formas de resolver problemas*. In : SMOLE, K. S. DINIZ, M. I. (Orgs.). *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2001.

DUVAL, R. (2003) *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática* In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.* Campinas, SP: Papirus. p.11-33.

GIL, A. C. (2008) *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas.

SCANO, F. C. (2009). *Função Afim: Uma sequência didática envolvendo atividades com GeoGebra* - PUC-SP, São Paulo.

SPENCER, P. E., Marc M., Adams J. & Sapere P. (2010). *Evidence-based practice in educating deaf and hard-of-hearing children: teaching to their cognitive strengths and needs*. European Journal Of Special Needs Education**.** Acesso em 10 de Setembro de 2016. Disponível em: < https://eric.ed.gov/?id=EJ917906>.

TRALDI JR, A. (2014). *Um olhar para educação de Surdos*. XVII ENDIPE 2014. Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza – CE. Disponível em: < http://www.uece.br/endipe2014/ebooks/livro3/459%20UM%20OLHAR%20PARA%20A%20EDUCA%C3%87%C3%83O%20DE%20SURDOS.pdf>Acesso em 22/08/2016.

USISKIN, Z. (1995). *Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis.* In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Alberto P. As ideias da álgebra. Atual. São Paulo.

VYGOTSKY, L. S. (1983) *Fundamentos de Defectologia.* Tomo 5; Editorial Pedagógica, Moscú; De la presente edición Visor Dis. S.A, Madrid.

VYGOTSKY, L. S. (2001). *Pensamento e linguagem.* Edição eletrônica: Ridendo CastigatMores. Acesso em 10 de Setembro de 2016. Disponível em: < http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/vigo.html>

WOODSIDE, A.G.; WILSON, E.J. (2003) *Case study research methods for theory building. Journal of Business & Industrial Marketing*, Vol 18, N. 6/7, pp. 493-508.

Autores:

Eliane Ferreira Batista. Mestre - IFSP-SP. Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática - Professora da rede municipal e estadual de ensino de São Paulo - SP.
elianefbatista@yahoo.com.br.

Armando Traldi Jr. IFSP-SP. Doutor em Educação Matemática - PUC-SP. Professor do Departamento de Ciências Naturais e Matemática do IFSP - traldijr@gmail.com.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 163-180

Qué motiva a las mujeres a estudiar Matemáticas: un estudio de caso

Rosa Iris Monico Manzano, Mario Sánchez Aguilar

Fecha de recepción: 15/12/2016
Fecha de aceptación: 05/01/2017

Resumen	Se reporta una investigación con el objetivo de identificar los factores que han motivado a estudiantes universitarias a elegir una licenciatura en Matemáticas. Los datos reportados fueron generados a través de 15 entrevistas semiestructuradas aplicadas a estudiantes de la licenciatura en Matemáticas de la (UAGro) en México. Algunos factores identificados son: gusto por las matemáticas y que se sientan buenas en matemáticas. Nos apoyamos en el concepto teórico identidad para argumentar que los factores que hemos identificado son elementos constituyentes de una identidad positiva como estudiantes de matemáticas, esto favorece la elección de las matemáticas como carrera universitaria. **Palabras clave**: Estudiantes de Matemáticas, Elección de Carrera, Educación Superior, Identidad.
Abstract	An investigation was conducted to identify the factors that have motivated female students to pursue an university degree in Mathematics. The data reported were obtained through semi-structured interviews to 15 female university students in Mathematics from the Autonomous University of Guerrero in Mexico. The data were analyzed by using a qualitative method. Some identified factors are: a taste for mathematics and feeling themselves good at mathematics. Using the concept of identity, we conclude that these factors allow the girls to build an identity as good mathematics students, this in turn favors the choice of mathematics as a university career. **Keywords**: Mathematics students, Career Choice, Higher Education, Identity.
Resumo	Este texto apresenta uma investigação que teve por objetivo identificar os fatores que têm motivado estudantes universitárias a escolher uma licenciatura em Matemática. Os dados foram obtidos por meio de 15 entrevistas semiestruturadas feitas a estudantes da licenciatura em Matemática da Universidad Autónoma de Guerrero (México), com análise qualitativa das mesmas. Alguns fatores identificados foram: gosto pela Matemática e o fato de serem boas alunas nessa matéria. Sustentados no conceito teórico de identidade argumentamos que os fatores identificados são elementos constituintes de uma identidade positiva de estudantes de Matemática. Concluimos que esses fatores permitem a construção de uma identidade a de boas estudantes de Matemática, favorecendo a seleção da área da Matemática para os estudos universitarios. **Palavras-chave:** Mulheres na matemática, Seleção de carreira, Educação Superior, Identidade.

1. Introducción

En distintos países alrededor del mundo existe un bajo interés entre los jóvenes por estudiar una carrera universitaria relacionada con ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (Organisation For Economic Co-Operation And Development, 2008; Stine y Matthews 2009; European Commission, 2012). Según distintos reportes, este problema de reclutamiento de jóvenes hacia las carreras científicas, está más acentuado entre las mujeres (Buerk, 1983; Pedersen, 2013; Cerinsek, Hribar, Glodez y Dolinsek, 2013; Mendick, 2005). Se sabe que durante el proceso de elección de carrera es más probable que las mujeres jóvenes se inclinen por disciplinas relacionadas con las ciencias sociales y humanidades.

Este fenómeno global es una preocupación pues se gradúan muy pocas mujeres en estas áreas del conocimiento, es decir, las mujeres están poco representadas en estas carreras. Para los países desarrollados y emergentes esta situación representa un reto ya que necesitan científicos que se desarrollen en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, pues es la base para su industria. Sin embargo, también se debe considerar la diversidad de la fuerza laboral científica; en el caso de las mujeres, ellas pueden enriquecer la creatividad y agudeza de las investigaciones científicas mediante sus conocimientos, puntos de vista y formas de apreciación, que pueden ser muy distintas a las de sus colegas hombres (Del Giudice, 2014). Dada esta problemática, se han desarrollado diversos estudios enfocados en entender qué es lo que motiva o repele a las mujeres a estudiar ciencias exactas, ingeniería y matemáticas (Buerk, 1983; Kleanthous y Williams, 2013; Pedersen, 2013; Cerinsek et al. 2013; Mendick, 2005; Onion, 2011; Piatek-Jimenez, 2008).

México es un país que no se escapa de la situación antes descrita, pues son pocas las estudiantes mujeres que se matriculan en carreras de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas. Los datos del Anuario estadístico de la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES) correspondiente al ciclo escolar 2013-2014 muestra la matrícula nacional de las mujeres en nivel licenciatura. Tomando en cuenta sólo la matrícula de las licenciaturas en matemáticas tenemos que: 13,046 estudiantes están matriculados en una licenciatura de matemáticas de los cuales 4,910 son mujeres, representando así un 38% de los estudiantes matriculados en una licenciatura en matemáticas. Esta es una tendencia que se ha mantenido por algunos años como se constata en el trabajo de Barrera (2012), quien presenta algunas cifras correspondientes a los años 1994 y 2004, y en las cuales se muestran los porcentajes de mujeres estudiando matemáticas en el nivel superior en México, estos datos revelan que:

a) Las mujeres representan el 38% de las personas que estudian una licenciatura en matemáticas
b) 24% de las personas que estudian una maestría en alguna especialidad matemática son mujeres
c) Las mujeres representan también el 24% de las personas que estudian un doctorado en alguna especialidad matemática

De manera similar, las mujeres en investigación matemática son pocas. Por ejemplo Barrera (2012) menciona que en todos los niveles del Sistema Nacional de

Investigadores (SNI) hay un mayor número de hombres que de mujeres, pero el número de mujeres va disminuyendo conforme aumenta el nivel, siendo los niveles 2 y 3 los más bajos en cuanto a la presencia de mujeres.

A pesar de la baja presencia de mujeres matemáticas en México, existen muy pocas investigaciones que busquen conocer los factores que atraen o repelen a las mujeres de este país para estudiar matemáticas. Es por eso, que la investigación que se reporta en este artículo se enfoca en identificar los factores que han motivado a estudiantes mexicanas a elegir una carrera en matemáticas. Este artículo tiene como objetivo ampliar el conocimiento que se tiene acerca de los factores que atraen a las mujeres a estudiar una carrera en matemáticas en México. La aproximación a la problemática de los factores que atraen a las mujeres mexicanas a estudiar matemáticas y que se reporta en este artículo, consiste en presentar un estudio de caso, esto es, nos enfocamos en reportar los factores que han motivado a mujeres mexicanas provenientes de la Universidad Autónoma de Guerrero en el suroeste mexicano. En particular, en este estudio se aborda la pregunta:

¿Cuáles son los factores que motivan a estudiantes femeninas de la Universidad Autónoma de Guerrero a elegir la carrera de matemáticas?

El proceso de elección de carreras relacionadas con la ciencia y la tecnología entre los jóvenes puede estudiarse desde distintos ángulos como la perspectiva de género (Forgasz, Leder y Tan, 2014), la perspectiva biológica (Hill y Rogers, 2012), o a través del concepto teórico de *identidad* (ver por ejemplo Holmegaard, Ulriksen y Madsen, 2014; Black y Williams, 2013; Piatek-Jimenez, 2008). Este último concepto ha probado ser útil para brindar explicaciones acerca de los factores que pueden motivar o desmotivar a los jóvenes a estudiar este tipo de carreras. Así, en el estudio que aquí reportamos nos apoyamos en dicho concepto teórico para argumentar que los factores que hemos identificado son elementos constituyentes de una identidad positiva como estudiantes de matemáticas.

2. Antecedentes

¿Qué se sabe acerca de los factores que atraen o repelen a las mujeres hacia el estudio de las matemáticas? En esta sección presentamos una síntesis de resultados de investigaciones que se han abocado a identificar qué es lo que motiva y ahuyenta a las mujeres a estudiar matemáticas en niveles educativos avanzados; para facilitar su presentación hemos agrupado estos resultados en dos categorías, a saber: factores provenientes del contexto escolar, y factores provenientes de contextos no escolares, tales categorías se crearon una vez analizadas las investigaciones.

2.1. Factores provenientes del contexto escolar

En esta sección encontraremos agrupados todos los factores mencionados en la literatura relacionados con el ambiente escolar, como lo son los maestros de matemáticas, las clases de matemáticas, las experiencias que se tienen en el aula al practicar o tomar una clase de matemáticas.

Onion (2011) reporta que las mujeres que participan en su estudio recuerdan haber tenido experiencias negativas con las matemáticas, como experiencias de violencia física por parte del profesor de matemáticas, lo que las ahuyentó del estudio de las matemáticas. También Buerk (1982), menciona que la manera de enseñar de los profesores hace ver a las matemáticas como aburridas, además de que las mostraban como algo dualistas, es decir, que las estudiantes tienen una visión de las matemáticas donde cada problema tiene una solución, correcta o incorrecta, bien o mal, y donde no puede haber un punto medio. Además muestra que varias mujeres han tenido experiencias negativas de las matemáticas, experiencias de vergüenza y de no sentirse capaces.

Se sabe también que los maestros influyen significativamente en la decisión de las mujeres de estudiar carreras que tengan que ver con matemáticas, ingenierías o ciencias (Cerinsek et al. 2013). Este mismo estudio reporta que las mujeres pueden ser influenciadas por las competencias o concursos de matemáticas para estudiar carreras relacionadas con matemáticas, ciencia o ingeniería.

Como otro factor tenemos el interés que surge de estudiar algún curso avanzado de matemáticas ya sea por propio interés, o porque necesitan o perciben a las matemáticas como un prerrequisito necesario para sus futuras elecciones de carreras (Pedersen, 2013).

2.2. Factores provenientes de contextos no escolares

En esta categoría se agrupan todos los factores que se encuentran en la literatura descrita anteriormente que motivan o desmotivan a las mujeres a estudiar matemáticas, pero que no se dan dentro del ámbito escolar, tal como la influencia de los padres, las imágenes públicas de las matemáticas, y la influencia de los medios masivos de comunicación.

Un factor mencionado por Kleanthous y Williams (2013) es que la influencia de los padres o la familia se nota cuando algunas mujeres deciden estudiar cursos relacionados con matemáticas. Ellos argumentan que las estudiantes con padres que creen que estudiar matemáticas es importante son más propensas a estudiar cursos de matemáticas. También Cerinsek et al. (2013) encontraron que las madres influyen significativamente en la decisión de las mujeres, de estudiar carreras que tengan que ver con matemáticas, ingenierías o ciencias.

Por otra parte, Piatek-Jimenez (2008) menciona que las mujeres reciben menos estímulo que los hombres para estudiar matemáticas de parte de los padres, consejeros y compañeros. Cuando las niñas tienen éxito en las matemáticas, éste se atribuye más al esfuerzo y al trabajo que al talento o capacidad. Esto puede afectar el rendimiento en matemáticas de las mujeres y dar como resultado el pensar que las matemáticas son de dominio masculino.

Las mujeres jóvenes tienen más probabilidades de aspirar a carreras relacionadas con la salud, principalmente porque ponen un mayor valor en ayudar a los demás o a contribuir a la sociedad. Las razones más comunes que las mujeres dan para explicar su interés por las ciencias de la vida, es su deseo de cuidar a las personas y a los animales.

Otro factor no escolar son los medios de comunicación, las mujeres son influenciadas por las representaciones de las matemáticas en películas, el teatro o la televisión, para estudiar carreras que tengan que ver con matemáticas, ciencias o ingeniería (Cerinsek et al. 2013).

Algunas mujeres tienen creencias estereotipadas sobre los matemáticos describiéndolos como personas excepcionalmente inteligentes, obsesionados por las matemáticas y socialmente incompetentes. Algunas mujeres se convencen de que no tienen ninguna de estas características, consideran que la primera es inalcanzable y las dos últimas indeseables, pues esto les provocará un estilo de vida aburrido. Esto les impide identificarse como un matemático o tomar la decisión de seguir una carrera matemática (Piatek-Jimenez, 2008; Cerinsek et al., 2013)

Mendick (2005) y Onion (2011) mencionan que las matemáticas suelen percibirse como algo masculino y esto entra en conflicto con la identidad femenina de algunas mujeres. Podemos entender que las mujeres no se sientan a gusto haciendo matemáticas ya que, de acuerdo a estos autores, en la práctica de las matemáticas se acentúa la masculinidad y esto hace que para las mujeres sea más difícil elegir una carrera que tenga que ver con matemáticas, pues ponen en riesgo su feminidad.

3. Sobre el concepto de identidad

Como se mencionó en la introducción, varios estudios educativos contemporáneos enfocados en entender qué impulsa y aleja a las mujeres a elegir carreras relacionadas con la ciencia, la tecnología y las matemáticas, se han apoyado en el concepto teórico de identidad. La utilidad de este concepto radica en proporcionar explicaciones coherentes acerca de las motivaciones que tienen las mujeres para involucrarse en este tipo de estudios. Pero, ¿qué se entiende por *identidad*? Enseguida hacemos una introducción de este concepto, la cual estará ceñida al campo de la investigación educativa, particularmente al de la investigación en educación matemática.

El concepto de identidad en educación no es nuevo. Una de las referencias clásicas sobre este concepto en educación es el trabajo de Gee; aquí el concepto de identidad es definido de la siguiente manera:

> El ‘tipo de persona’ que se reconoce que uno ‘es’, en un momento y lugar determinado, puede cambiar de un momento a otro en la interacción, puede cambiar de un contexto a otro, y, por supuesto, puede ser ambiguo e inestable. Ser reconocido como un cierto ‘tipo de persona’, en un contexto dado es lo que quiero decir aquí por ‘identidad’. (Gee, 2001, p. 99, nuestra traducción)

En términos más simples, tu identidad es quién te sientes que eres, lo cual puede definirse por tus gustos, capacidades y afiliaciones. Además, la identidad no es única ni fija: puedes tener una identidad como estudiante, como hijo de familia, como amigo, y tu identidad puede evolucionar durante distintos momentos de tu vida. Algo que es importante de señalar es que la identidad, a pesar de ser de uno, no es definida únicamente por nosotros mismos. Como Gee (2001) asegura, uno llega a ser reconocido en un contexto dado —y por otros— como un cierto “tipo de persona”. Este reconocimiento externo contribuye a definir nuestra propia identidad.

3.1. Identidad y educación matemática

En el campo de la educación matemática el concepto de identidad ha cobrado especial importancia en el estudio del desarrollo de profesores y estudiantes de matemáticas. Se sabe, por ejemplo, que en la clase de matemáticas el estudiante no solo aprende conceptos y algoritmos, sino también aprende a identificar quién es él o ella respecto a las matemáticas; es decir, identifica si es un estudiante de matemáticas bueno, malo o regular. Pero esta identificación se va constituyendo con lo que otros —nuestros padres, nuestros maestros, nuestros compañeros— ven en nosotros como estudiantes de matemáticas. Anderson lo enuncia de la siguiente manera:

> […] la identidad se refiere a la forma en que nos definimos a nosotros mismos y cómo los demás nos definen […]. Nuestra identidad incluye la percepción de nuestras experiencias con los demás, así como nuestras aspiraciones. De esta manera, la identidad —quiénes somos— se forma en nuestra relación con los demás, que se extiende desde el pasado y hacia el futuro. Las identidades son moldeables y dinámicas, una construcción permanente de lo que somos como resultado de nuestra participación con otros en la experiencia de la vida (Anderson, 2007, p. 8, nuestra traducción).

Algunos autores como Sfard y Prusak, definen a la identidad como las colecciones de historias que las personas tienen acerca de sus experiencias con las matemáticas: “[…] sugerimos que las identidades pueden ser definidas como colecciones de historias sobre personas o, más específicamente, como esas narrativas acerca de individuos que son *cosificables*, *endosables* y *significativas”* (Sfard y Prusak 2005, p. 16, nuestra traducción).

Otros estudios han utilizado el concepto de identidad para brindar explicaciones sobre el porqué algunas mujeres no se sienten atraídas hacia el estudio de las matemáticas o carreras relacionadas, o por qué algunas entran en conflicto cuando deciden hacerlo. Un ejemplo es el trabajo de Black y Williams (2013) en el que nos muestran el caso de Mary, una estudiante que experimenta una especie de tensión al tratar de satisfacer dos caminos de vida asociados a dos de sus identidades: por un lado, su aspiración de convertirse en ingeniera, el cual entra en conflicto o contradice los preceptos asociados al ser una “buena mujer musulmana”. Otro ejemplo es el estudio de Piatek-Jimenez (2008), quien sugiere que algunas mujeres deciden no seguir estudiando matemáticas en niveles educativos superiores debido a que la idea o concepción que tienen de lo que es un matemático —excepcionalmente inteligente, obsesionado con las matemáticas, y socialmente inepto— no es compatible o entra en conflicto con su identidad y sus aspiraciones como mujeres.

3.2. El concepto de identidad en nuestra investigación y su rol

En nuestra investigación utilizamos el concepto de *identidad como estudiante de matemáticas*, y lo entendemos en el sentido de Anderson (2007), es decir, como la concepción que tiene un estudiante de sí mismo respecto a las matemáticas. Esta concepción tiene que ver con el tipo de estudiante que creemos ser; sin embargo, esta concepción que se tiene de uno mismo no la construimos de manera individual e independiente de los demás. Nuestra identidad como estudiantes es el resultado de nuestra interacción con el profesor, nuestros padres, nuestros compañeros, el contenido matemático y otras experiencias relacionadas con las matemáticas dentro y fuera de la escuela.

La importancia de utilizar el concepto de identidad en esta investigación es que nos servirá para brindar una explicación coherente y general a los factores motivantes identificados, pues creemos que dichos factores son los que favorecen que las estudiantes construyan una identidad como buenas estudiantes de matemáticas. Así, el concepto de identidad nos permitirá entender mejor cómo es que las estudiantes se crean una identidad matemática, y qué tipo de experiencias son las que las llevan a decidirse a estudiar una carrera de matemáticas.

4. Método

Para tratar de determinar los factores que motivan a estudiantes femeninas de la Universidad Autónoma de Guerrero a elegir la carrera de matemáticas, se entrevistaron a estudiantes enroladas en dicha carrera y Universidad. En el nivel licenciatura de esta Universidad se encuentran inscritos aproximadamente 25,267 alumnos de los cuales 12,401 son mujeres. Enseguida se describen las características de las mujeres que participaron en el estudio, así como la manera en que se recolectaron y se analizaron los datos.

4.1. Población de estudio

Los datos en los que se basa nuestro estudio provienen de las entrevistas realizadas a 15 estudiantes mujeres de la Licenciatura en Matemáticas del nodo Chilpancingo, de la Universidad Autónoma de Guerrero. Al momento de ser entrevistadas, las estudiantes cursaban primero, tercero, quinto y séptimo semestre, y cuatro de ellas estaban en proceso de titulación. Sus edades se encontraban entre los 21 a 22 años. En cuanto a sus antecedentes matemáticos, estas mujeres estaban cursando o habían cursado las siguientes materias del primer semestre de la licenciatura: cálculo I, matemáticas finitas, geometría analítica I, elementos de geometría. Sin embargo, las estudiantes más avanzadas ya habían tomado cursos de probabilidad, análisis numérico, métodos estadísticos, álgebra lineal, álgebra moderna, variable compleja, y ecuaciones diferenciales.

4.2. Recolección y análisis de los datos

Las entrevistas se realizaron durante los meses de septiembre y noviembre del 2014, fueron audiograbadas y su duración es de 9 minutos y 32 segundos en promedio. La participación de todas las entrevistadas fue voluntaria. Antes de ser entrevistadas se les daba una pequeña introducción de los motivos de la entrevista, se les notificó que todo lo que ellas dijeran se trataría de manera confidencial, ya que no les pedimos datos personales. Las entrevistas fueron realizadas dentro de las instalaciones de la Unidad Académica de Matemáticas, en espacios como pasillos, salones y en la biblioteca, éstas se realizaron en horas libres de las estudiantes y después de clases.

Las entrevistas realizadas fueron semiestructuradas, y se utilizó un cuestionario como guía para llevarlas a cabo. Tal cuestionario fue tomado de una investigación relacionada y con un objetivo similar a la que se reporta en este manuscrito (ver Aguilar, Vázquez, Mendoza, Zavaleta y Alonso, 2013). El cuestionario (ver anexo) está dividido en dos secciones, la primera considera las experiencias de las mujeres entrevistadas con las matemáticas antes de estudiar la carrera, y la segunda se enfoca en las experiencias relacionadas con su tránsito por la carrera de matemáticas. Es importante notar que no todas las preguntas del cuestionario se relacionan directamente con nuestra pregunta de investigación: las preguntas que fueron fundamentales para identificar los factores motivantes son la número 2 de la primera sección (*¿Puedes mencionar una o más experiencias o actividades de tu pasado que te hayan influenciado para elegir esta carrera?*) y la número 1 de la segunda sección del cuestionario (*¿Fue difícil escoger tu carrera, siempre supiste que querías estudiar esto o hubo algún incidente particular que te hizo elegir esta carrera?*); el resto de las preguntas nos sirvieron para ampliar la información generada por estas dos preguntas, y para obtener información adicional acerca de las historias de estas mujeres como estudiantes de matemáticas.

Una vez reunidos los datos, para analizarlos se escuchaban las entrevistas repetidamente y de manera independiente por los dos autores de este artículo; así se trataba de identificar en las respuestas de las estudiantes elementos como experiencias, situaciones o personajes que las motivaron a elegir la carrera de matemáticas. Posteriormente los autores nos reuníamos para discutir y consensuar los elementos identificados en cada una de las entrevistas. Una vez identificados estos elementos, se transcribieron y se concentraron en tablas para posteriormente agruparlos en categorías temáticas. Estas categorías son interpretadas como los factores que favorecen que las mujeres hayan elegido la carrera de matemáticas.

Nuestro método de investigación puede ser enmarcado en la tradición de la *investigación narrativa* (ver por ejemplo Riessman, 2008) en la que se pueden utilizar distintas fuentes de información como notas de campo, autobiografías, diarios, historias, conversaciones, etc. como un medio para entender cómo las personas crean significados en sus vidas como narrativas. En nuestro caso nos basamos en las historias que las estudiantes nos contaban a través de las entrevistas, para tratar de identificar los factores que las motivaron a estudiar matemáticas. Este tipo de investigación narrativa es común en estudios de educación matemática donde el concepto de identidad funciona como referente teórico (como ejemplo ver Sfard y Prusak, 2005).

5. Resultados

De acuerdo con los datos analizados basados en las 15 entrevistas realizadas, presentamos enseguida los factores motivantes que fueron más frecuentes en las historias de las estudiantes. Los factores identificados han sido clasificados en cuatro categorías, las cuales se presentan enseguida. Mostraremos algunas transcripciones de las narraciones que produjeron las entrevistadas, las cuales fueron seleccionadas por ser representativas de cada una de estas categorías.

5.1. Gusto por las matemáticas

En las entrevistas analizadas un factor muy mencionado fue que las estudiantes tenían cierto gusto por las matemáticas. 9 de las 15 estudiantes entrevistadas mencionaron a éste como un factor motivante, varias de ellas hacen una diferenciación entre las matemáticas y sus demás materias, no saben cómo describir el porqué les gustaban las matemáticas, pero se sentían muy atraídas por tal materia, en algunas de ellas este gusto por las matemáticas inicia desde niveles básicos de educación. Las siguientes transcripciones ilustran este punto:

Entrevista 1. Minuto 2:30
Investigadora: *¿Me podrías explicar con más detalle cómo te diste cuenta que se te facilitaban las matemáticas?*
Estudiante 1: *Pues… este, es que hay varias materias que también se me facilitaban pero no me gustaban y las matemáticas se me facilitaban y me gustaban, me atraían y como que les ponía más empeño.*

Entrevista 6. Minuto 4:13
Investigadora: *¿Podría decirse que eso fue lo que te incitó a que decidieras estudiar una carrera de matemáticas?*
Estudiante 6: *¡Eeeh! no porque ya desde antes ya, ya me gustaban, ya lo había pensado, te digo es que es la materia cómo decirlo así, que más me gusta…*

Entrevista 10. Minuto 00:30
Investigadora: *¿Siempre te gustaron las matemáticas?*
Estudiante 10: *Sí siempre desde que iba en primaria recuerdo que era muy inteligente en el sentido de resolver los problemas y sí siempre me han gustado.*

Entrevista 14. Minuto 0:29
Investigadora: *¿Siempre te gustaron las matemáticas?*
Estudiante 14: *Sí, siempre desde pequeña.*
Investigadora: *¿Por qué, por qué te gustaban?*
Estudiante 14: *No sé, siento que los números son mejor que las letras, es que sentí que primero aprendía así, los números que las letras…*

5.2. Buena en matemáticas

Otro factor muy mencionado fue que las estudiantes, en algún momento de su vida, se dieron cuenta que eran buenas en matemáticas. No todas se dieron cuenta de la misma forma, sino que estuvieron expuestas a prácticas, situaciones, personas a su alrededor, o el contexto en el que se encontraban, que les comunicaban que eran buenas en la materia de matemáticas. Algunas se daban cuenta porque sus compañeros les pedían ayuda o les decían explícitamente que eran buenas, otras porque sus profesores les decían que eran buenas estudiantes, también cuando obtenían buenas calificaciones o resolvían problemas complicados rápidamente y bien. De las 15 entrevistadas, 9 dijeron que se sentían buenas en matemáticas. Las transcripciones de las narrativas que enseguida se exponen ejemplifican estas situaciones.

Entrevista 3. Minuto 0:56
Estudiante 3: *Pues cuando estábamos en clases o nos dejaban alguna tarea o ejercicios, siempre lo terminaba antes y cuando nos revisaba el profesor siempre tenía bien todo. Así que ahí me di cuenta que se me facilitaban mucho las matemáticas y aparte porque mis maestros también me decían.*

Entrevista 4. Minuto 0:45
Estudiante 4: *Pues se me hacía más fácil, las tareas las resolvía muy rápido los ejercicios, siempre estaba, era la primera en terminar, no era tanto que yo le pusiera más empeño sino que, cuando dejaban un ejercicio o una tarea la resolvía muy fácilmente.*

Entrevista 10.Minuto 2:28
Investigadora: *¿Eras buena estudiante de matemáticas?*
Estudiante 10: *Fíjate que sí, siempre fui buena, en, podría decirse, me mencionas otras materias y siempre en matemáticas sobresalía, así siempre y siento que es lo mío.*

Entrevista 12. Minuto 02:23
Investigadora: *¿Eras buena estudiante de matemáticas?*
Estudiante 12: *Sí.*
Investigadora: *¿Tenías buenas calificaciones?*
Estudiante 12: *Sí.*
Investigadora: *¿Puros dieces?*
Estudiante 12: *Nueves y dieces, por eso también opté, ajá.*

5.3. Concursos de matemáticas

Los concursos de matemáticas, principalmente olimpiadas de matemáticas, son otro factor que motivó a las estudiantes entrevistadas a estudiar una licenciatura en matemáticas, 4 de las 15 estudiantes entrevistadas dijeron que fue una experiencia muy buena asistir a ese tipo de eventos y que eso fue lo que les motivó. Algunas de ellas mencionan que estar en ese tipo de concursos creaba un ambiente muy agradable, y conocían personas interesantes. Algunas de ellas asistían a los concursos porque sus profesores las invitaban, otras porque presentaban exámenes y los aprobaban, o porque sus compañeros las alentaban a asistir.

Entrevista 2. Minuto 0:23
Estudiante 2: *Bueno en secundaria siempre iba a concursos de, habilidades matemáticas y eso fue lo que más me inclinó hacia esta… materia.*

Entrevista 3. Minuto 2:31
Investigadora: *¿Por qué entraste en el concurso?*
Estudiante 3: *Pues era una de las mejores de mi grupo y siempre me elegían a mí para ir a los concursos… siempre me decían que fuera yo.*

Entrevista 13. Minuto 0:33
Estudiante 13: *Pues la única experiencia que me gustó así fue cuando la, la tuve en la secundaria que concursé este, en un, cómo sería, la cosa que era como un concurso de matemáticas.*
Investigadora: *¿Una olimpiada?*
Estudiante 13: *Ajá, y primero hicieron la olimpiada ahí, bueno primero fue este en la escuela y ya ahí mis compañeros me estuvieron diciendo que concursara, pero por mis nervios y todo eso siempre decía que no pero ya en tercer año fue*

cuando concursé y saqué primer lugar ahí en la, ahí en la escuela y ya después fue este en el estado, estatal y ya después fue que saqué segundo lugar… me gustó y fue lo que más me motivó, que sí podía estudiar matemáticas.

5.4. Maestros de matemáticas

Otro factor motivante para las estudiantes fueron sus profesores de matemáticas. 4 de las 15 entrevistadas mencionaron que su profesor de matemáticas les dijo explícitamente que eran buenas estudiantes de matemáticas por lo tanto tenían que estudiar una carrera que tuviera muchas matemáticas; algunas de ellas también mencionan que sus profesores de matemáticas eran muy agradables y que les gustaba mucho la manera de dar su clase, entre otras cosas.

Entrevista 7. Minuto 1:24
Estudiante 7: *En secundaria pues sí fue divertido … en secundaria tuve un muy buen maestro que es de matemáticas y luego pues yo me acercaba a él y le empezaba a preguntar cosas y luego me decía pues vas a estudiar matemáticas ¿verdad? …*

Entrevista 5. Minuto 1:40
Investigadora: *¿Qué es lo que te gustaba de las clases de tu maestro y de su forma de enseñar?*
Estudiante 5: *¿Qué me gustaba?, pues todo, pues prácticamente todo, bueno los contenidos matemáticos aparte que se me facilitaban el maestro hacía más fácil todavía que los entendiera y los problemas que dejaba según yo estaban sencillos.*
Investigadora: *¿Y de su forma de enseñar?*
Estudiante 5: *De su forma de enseñar, no sé todos explicaban muy bien afortunadamente la mayoría de los profesores que me tocaban o que me tocaron más bien sí me enseñaron muy bien matemáticas.*

Entrevista 14. Minuto 0:20
Estudiante 14:*… siempre me llevé bien con los maestros de matemáticas, así que me sentía como un poco identificada con ellos, por eso siento que me agrada estar aquí.*

Entrevista 15. Minuto 00:15
Estudiante 15: *Experiencia, bueno este, mis maestros ¿no?, mi maestro en la primaria fue una, sí, motivación para, seguir estudiando matemáticas porque él era muy bueno.*
Investigadora: *¿Tu maestro de primaria?*
Estudiante 15: *Sí, de primaria y también de secundaria tuve uno así que, sí, como que me motivó.*

6. Discusión de resultados

Las estudiantes de esta investigación, han sido atraídas a estudiar una carrera de matemáticas por alguno de los siguientes factores: su gusto por las matemáticas, sentirse buena en matemáticas, los concursos de matemáticas, y sus maestros de matemáticas, siendo más mencionados los dos primeros.

Al comparar los factores identificados en la literatura y los que mostramos en los resultados, notamos que no son muy diferentes. Por ejemplo, Cerinsek et al. (2013) declaran que las mujeres pueden ser influenciadas por las competencias de matemáticas, para estudiar matemáticas, ciencia o ingeniería, el cual fue un factor que se dejó ver en las narrativas que produjeron las entrevistadas de nuestro estudio. También Piatek-Jimenez (2008) y Pedersen (2013) señalan que las mujeres tienen creencias más bajas en cuanto a sus propias habilidades matemáticas que los chicos, pues ellas no se sienten tan buenas en matemáticas, en este caso podemos notar que las estudiantes de nuestro estudio tienen una creencia diferente a las del estudio mencionado, pues ellas sí se sienten buenas en matemáticas y es eso mismo las motiva a estudiar una carrera con fuerte contenido matemático. Por otro lado Cerinsek et al. (2013) mencionan que los maestros influyen significativamente en la decisión de las mujeres de estudiar carreras que tengan que ver con matemáticas, ingenierías o ciencias, como sucede con cuatro de nuestras quince entrevistadas.

6.1. El concepto de identidad como una posible explicación los resultados

Todos los factores motivadores identificados en las narrativas de las estudiantes que participaron en este estudio permiten ver que dichas estudiantes han estado expuestas a experiencias particulares en su vida con las matemáticas, experiencias proporcionadas por las personas que las rodean o por el contexto en el que se han encontrado a lo largo de su educación matemática. Sin embargo nuestras entrevistadas no han vivido experiencias cualesquiera, sino que, tuvieron experiencias que les han permitido construirse una identidad como buenas estudiantes de matemáticas, ya que como Gee (2001) afirma, una persona puede reconocer lo que es, en un momento y lugar determinado.

Por ejemplo, cuando su profesor les menciona que son buenas en matemáticas, o las eligen para un concurso de matemáticas, también por sus buenas calificaciones o cuando resuelven problemas de matemáticas rápidamente, estos hechos hacen que ellas se vayan dando cuenta de que son buenas estudiantes de matemáticas. Todos estos factores permiten que las estudiantes construyan una identidad como estudiantes de matemáticas destacadas. Esta construcción es un proceso que es resultado de saber lo que otros piensan de ellas y no cualquiera “otros” sino personas significativas en su vida como sus profesores, sus compañeros, que son los más próximos en darles a conocer cómo es que ellas se desempeñan en la matemática escolar. Como lo menciona Anderson (2007) la identidad como estudiante de matemáticas se refiere a la forma en que nos vemos a nosotros mismos y cómo los demás nos ven.

En suma, afirmamos que todas estas experiencias del pasado fueron moldeando una identidad como buena estudiante de matemáticas en las mujeres de nuestro estudio. En consecuencia, se puede afirmar, que cuando una estudiante llega a crear una identidad como buena estudiante en matemáticas, podría esperarse que ella, al llegar el momento de elegir una carrera o licenciatura, se matricule en una licenciatura en matemáticas o en una carrera relacionada con las matemáticas ya que es una elección congruente con las habilidades y actitudes que ella cree poseer.

6.2. Recomendaciones que se desprenden de los resultados

Los factores motivantes más mencionados han sido dos, el gusto por las matemáticas y que las estudiantes se sientan buenas en matemáticas, pero esto no se da por sí solo, sino que es resultado de otros elementos: por ejemplo, cuando el profesor les dice explícitamente que son buenas, cuando ellas se sienten especiales porque el profesor las invita a participar en los concursos de matemáticas. Tomando en cuenta esto, se concluye que los profesores pueden ser una pieza muy importante para que una estudiante se sepa buena en matemáticas. Considerando lo anterior, los profesores deberían favorecer que se reconozca de manera explícita y pública la capacidad y el trabajo matemático de las estudiantes en el salón de clases, ya que esto fomentaría que más estudiantes construyeran una identidad como buena estudiante de matemáticas. También se podría considerar el organizar más concursos de matemáticas donde las chicas puedan participar y desarrollar mejor sus habilidades, pues según las estudiantes que participaron en esta investigación, ellas se sienten en un ambiente agradable al estar en ese tipo de eventos, es por eso que se debería de dar oportunidad a más estudiantes a ser parte de estos eventos académicos.

6.3. Futuras líneas de investigación

La investigación realizada fue producto del interés de dar respuesta a una incógnita, al tratar de despejar esta pregunta y empaparse de toda la información que está involucrada en este tema resultan nuevas interrogantes, que se podrían contestar en nuevas investigaciones, estos apartados de la investigación se mencionan algunas de ellas.

Con respecto a qué motiva a las mujeres a estudiar una licenciatura en matemáticas y también qué otros aspectos permiten que éstas tengan una buena identidad como estudiantes de matemáticas, nos podemos preguntar: ¿qué pasa con las estudiantes después de ingresar a la licenciatura en matemáticas?, ¿siguen conservando su identidad como buenas estudiantes de matemáticas? Nos preguntamos esto ya que ha sido bien documentado que existen problemas en los estudiantes de matemáticas (de adaptación, de integración, de desempeño académico, y otros) al transitar de la educación media a la educación superior (ver por ejemplo De Guzmán; Hodgson; Robert y Villani, 1998).

Al estar más cerca de los matemáticos o personajes que se desarrollan en este campo y ver el contexto en el que se desarrollan ¿su opinión acerca de los matemáticos, mejora o qué sucede con ella? También ¿qué es lo que las retiene y las hace concluir la licenciatura?, si la terminan ¿qué pasa con ellas ya en el campo laboral?, ¿tienen las mismas oportunidades de trabajo que un hombre?

Otra buena interrogante sería, ¿qué pasa con todas las chicas que no deciden estudiar matemáticas?, ¿qué las desmotivó a estudiar una licenciatura en matemáticas?, ¿cómo es que se construyeron una mala identidad en matemáticas? Por otra parte, ¿qué motiva a los hombres a estudiar una carrera relacionada con matemáticas? ¿son muy diferentes los factores que les ayudan a construirse una buena identidad como estudiantes de matemáticas en comparación con las mujeres? Estas son algunas de las interrogantes que creemos se podrían y valdría la pena indagar en trabajos futuros relacionados con la problemática planteada en este estudio.

Agradecimientos

Esta investigación forma parte del proyecto “Factores que favorecen la elección de las matemáticas como profesión entre mujeres mexicanas” financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México (CONACYT) con número de registro 196550.

Bibliografía

Aguilar, M. S., Vázquez, A. R., Mendoza, A. R., Zavaleta, J. G. M. y Alonso, A. C. (2013). Factors motivating the choice of mathematics as a career among mexican female students. En B. Ubuz, C. Haser y Mariotti, M.A. (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (1409-1418). Turquía: European Society for Research in Mathematics Education.

Anderson, R. (2007). Being a mathematics learner: four faces of identity. *The Mathematics Educator*, *17*(1), 7–14.

ANUIES (2014). *Anuario educación superior-licenciaturas. Anuarios estadísticos de educación superior*. [base de datos]. D.F., México: ANUIES.

Barrera, P. S. (2012). Mujeres matemáticas en México. *Ciencia, 63 (3),* 44–53.

Buerk, D. (1983). An experience with some able women who avoid mathematics. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 19–24.

Black, L. y Williams, J. (2013). Contradiction and conflict between ‘leading identities’ : becoming an engineer versus becoming a ‘good muslim’ woman. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 1–14.

Cerinsek, G., Hribar, T., Glodez, N. y Dolinsek, S. (2013). Which are my future career priorities and what influenced my choice of studying science, technology, engineering or mathematics? Some insights on educational choice-Case of Slovenia. *International Journal of Science Education, 35*(17), 2999–3025.

De Guzmán, M., Hodgson, B., Robert, A. y Villani, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 3*, 747–762.

Del Giudice, M. (2014). Why it’ s crucial to get more women into science. *National Geographic* [en línea]. Recuperado el 8 de diciembre de 2016, de http://news.nationalgeographic.com/news/2014/11/141107-gender-studies-women-scientific-research-feminist/

European Commission (2009). *Statistics and Indicators on Gender Equality in Science. She figures 2009*. Bruselas: European Commission.

Forgasz, H., Leder, G. y Tan, H. (2014). Public views on the gendering of mathematics and related careers: international comparisons*. Educational Studies in Mathematics, 87*(3), 369–388.

Gee, J. P. (2001). Identity as an analytic lens for research in education. *Review of Research in Education, 25*(1), 99–125.

Hill, T. P. y Rogers, E. (2012). Gender gaps in science: the creativity factor. *The Mathematical Intelligencer, 34*(2), 19–26.

Holmegaard, H. T., Ulriksen, L. M. y Madsen, L. M. (2014). The process of choosing what to study: a longitudinal study of upper secondary students' identity work when choosing higher education. *Scandinavian Journal of Educational Research, 58*(1), 21–40.

Kleanthous, I. y Williams, J. (2013). Perceived parental influence and students' dispositions to study mathematically-demanding courses in higher education. *Research in Mathematics Education, 15*(1), 50–69.

Mendick, H. (2005). Mathematical stories: why do more boys than girls choose to study mathematics at AS-level in England? *British Journal of Sociology of Education , 26*(2), 235–251.

Onion, A. J. (2011). Women' s stories of learning mathematics. *Research in Mathematics Education, 13*(3), 307–308.

Organisation for Economic Co-operation and Development (2008) Encouraging *Student Interest in Science and Technology Studies*. Paris: OECD.

Pedersen, I. F. (2013). "I need advanced mathematics to pursue the career of my choice". Norwegian students' motivations for enrolling in mathematics and plans for postsecondary studies. *Nordic Studies in Mathematics Education, 18*(1), 61–83.

Piatek-Jimenez, K. (2008). Images of mathematicians: a new perspective on the shortage of women in mathematical careers. ZDM – *Mathematics Education, 40*(4), 633–646.

Riessman, C. (2008). *Narrative Methods for the Human Sciences*. E.U.A.: Sage.

Sfard, A. y Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher, 34*(4), 14–22.

Stine, D. D. y Matthews, C. M. (2009). *The U.S. Science and Technology Workforce*. Washington, DC: Congressional Research Service.

Anexo

CUESTIONARIO

INTRODUCCIÓN:

Esta es una entrevista que tiene como propósito principal localizar algunas de las experiencias que has tenido con las matemáticas a lo largo de tu vida, tanto dentro como fuera de la escuela. En esta entrevista no hay respuestas correctas o incorrectas, es más bien una entrevista que busca conocer tus experiencias y opiniones acerca de las matemáticas.

La información que nos proporciones servirá para desarrollar un estudio sobre mujeres que estudian matemáticas. Tu identidad no será revelada, es decir, es probable que se utilicen datos de esta entrevista en el estudio pero no se revelará quién los proporcionó. Por favor trata de contestar de la manera más sincera posible y utiliza todo el tiempo que necesites.

SECCIÓN I
EXPERIENCIAS CON LAS MATEMÁTICAS ANTES DE ESTUDIAR LA CARRERA

Preguntas para abrir la plática:

1. **¿Edad? ¿Semestre?**
2. **¿Puedes mencionar una o más experiencias o actividades de tu pasado que te hayan influenciado para elegir esta carrera?**

a. En caso de que declaren gusto por las matemáticas

¿Siempre te gustaron las matemáticas? ¿Por qué?

b. ***En caso de que haya evidencia de que la entrevistada en algún momento se dio cuenta de que tenía facilidad para las matemáticas:***

¿Me podrías explicar con más detalle cómo te diste cuenta de que se te facilitaban las matemáticas?
¿Eras buena estudiante de matemáticas? ¿Tenías buenas calificaciones?
¿Te consideras diferente por ello?
¿Ayudabas a tus compañeros a resolver problemas o a estudiar matemáticas? ¿Cómo fue esa experiencia?

c. ***En caso de que mencione a alguno de sus profesores como un factor que influyó en su gusto por las matemáticas:***

¿Qué es lo que te gustaba de las clases de tu maestro y de su forma de enseñar?
¿Tienes alguna anécdota relacionada con tu maestro y su clase?

d. ***En caso de que mencione a las Olimpiadas o algún otro concurso:***

¿Por qué entraste en el concurso?
¿Cómo fue tu experiencia en el concurso (positiva/negativa)?
¿Los problemas de la Olimpiada/concurso eran diferentes a los que resolvías en la escuela? Si es así, ¿En qué se diferencian?

e. ***En caso de que hable de aplicaciones de la matemática***

¿Recuerdas haber resuelto algún problema con matemáticas en tu vida cotidiana o en la escuela?

SECCIÓN II
EXPERIENCIAS RELACIONADAS CON LA CARRERA DE MATEMÁTICAS

1. ¿Fue difícil escoger tu carrera, siempre supiste que querías estudiar esto o hubo algún incidente particular que te hizo elegir esta carrera?

2. ***Preguntas sobre la elección de carrera:***

¿Recibiste orientación en tu escuela o dentro de tu familia para elegir la carrera?
¿El costo de la carrera influyó en tu elección?
¿La localización de la escuela influyó en tu elección?
¿El prestigio de la escuela influyó en tu elección?
¿Qué dijeron tus familiares cuando mencionaste que querías estudiar matemáticas? ¿Y tus amigos?

3. ***Preguntas sobre su visión de la carrera:***

¿Qué tipo de trabajo hace un matemático?
¿A qué piensas dedicarte cuando termines la carrera?
¿Alguna vez has pensado en cambiarte de carrera? ¿Por qué?

Nombre autor 1: Monico Manzano Rosa Iris
Dirección electrónica: rosairism8@gmail
Dirección postal: Col. Lomas del poniente Calle: Ensenada #13
C.P. 39077, Chilpancingo, Guerrero, Mexico.
Teléfono: (044) 7471226989
Título: Licenciado en Matemáticas
Institución a la que pertenece: Universidad Autónoma de Guerrero. Unidad Académica de Matemáticas, Nodo Chilpancingo.
Lugar de residencia: Chilpancingo, Guerrero.
Reseña bibliográfica: Lic. en Matemáticas, Becaria Conacyt de la Maestría en Ciencias Área Matemática Educativa. Chilpancingo, Guerrero, México.

Nombre autor 2: Sánchez Aguilar Mario
Dirección electrónica: mosanchez@ipn.mx
Dirección postal:
CICATA-Legaria
Calzada Legaria No. 694, Col. Irrigación
C.P. 11500 Del. Miguel Hidalgo, Ciudad de México
México
Teléfono: (55) 57296300 ext. 67732
Título: Doctor
Institución a la que pertenece: Instituto Politécnico Nacional, CICATA Legaria, Programa de Matemática Educativa
Reseña bibliográfica: Profesor titular del Instituto Politécnico Nacional de México, especializado en educación matemática. Realizó sus estudios de Doctorado en investigación en Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Roskilde en Dinamarca (RUC) (2007–2010).
Lugar de residencia: Ciudad de México
Publicaciones más recientes:
Borba, M.C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S. & Aguilar, M.S. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. ZDM Mathematics Education, 48(5), 589-610. doi: 10.1007/s11858-016-0798-4
Aguilar, M.S., Rosas, A., Zavaleta, J.G.M. & Romo-Vázquez, A. (2016). Exploring high-achieving students' images of mathematicians. International Journal of Science and Mathematics Education, 14(3), 527-548. doi: 10.1007/s10763-014-9586-1
Silva, J.L.A.R. & Aguilar, M.S. (2016). Using context variety and students' discussions in recognizing statistical situations. Teaching Statistics, 38(1), 22-24. doi: 10.1111/test.12086

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 181-199

Professores de matemática no início da carreira docente: implicações à formação inicial

Raquel Seriani, Dilma Antunes Silva, Cibele Aparecida Santos Ros

Fecha de recepción: 2017-01-06
Fecha de aceptación: 2017-03-09

Resumen	Este estudio tiene como objetivo examinar los retos, dificultades y sentimientos experimentados por los profesores de matemáticas que comienzan sus carreras que enseñan en los últimos años de la escuela primaria. Con enfoque cualitativo, la investigación analiza las "marcas" circunscritas en la carrera profesional de estos maestros. Por lo tanto, optamos por el uso de entrevistas semiestructuradas como una herramienta para la recolección de datos. Los resultados corroboran el área de estudios sobre los desafíos, el sentimiento de abandono o soledad pedagógica que enfrentan los maestros a unirse a la carrera docente, ya sea en la educación básica o la educación superior. Estos aspectos obligan a los profesores para crear estrategias que a menudo son contrarias a sus puntos de vista. **Palabras clave:** dificultades. Sentimientos. Desafíos. profesores principiantes. Matemáticas.
Abstract	This study aims to examine the challenges, difficulties and feelings experienced by mathematics teachers beginning their careers who teach in the final years of elementary school. With qualitative approach, the research discusses the "brands" circumscribed in the professional careers of these teachers. Therefore, we opted for the use of semi-structured interviews as a tool for data collection. The results substantiate the area of studies about the challenges, the feeling of abandonment or pedagogical loneliness faced by teachers to join the teaching career, either in basic education or higher education. These aspects force teachers to create strategies that are often contrary to their views. **Keywords:** Difficulties. Feelings. Challenges. Teachers beginner. Mathematics**.**
Resumo	O presente trabalho tem como propósito analisar os desafios, as dificuldades e sentimentos experimentados pelos professores de Matemática em início de carreira que lecionam nos anos finais do ensino fundamental. Com enfoque qualitativo, a pesquisa discute as “marcas” circunscritas nas trajetórias profissionais desses docentes. Para tanto, optou-se pela a utilização de entrevistas semiestruturadas como instrumento para a coleta de dados. Os resultados encontrados consubstanciam os estudos da área acerca dos desafios, do sentimento de abandono ou solidão pedagógica, enfrentados pelos docentes ao ingressarem na carreira do magistério, seja na educação básica ou no ensino superior. Tais aspectos forçam os docentes as criarem estratégias que, muitas vezes são contrárias às suas concepções. **Palavras-chave:** Dificuldades. Sentimentos. Desafios. Professores iniciantes. Matemática.

1. A Entrada na carreira

O início da docência é um período de tempo que compreende os primeiros anos na profissão, nos quais os docentes fazem a transição de estudantes a professores. Nessa direção, Huberman (1995), Cavaco (1995) e Garcia (1998) são concordes ao enfatizarem que o início da carreira é uma etapa muito importante para os professores, pois é desse processo de transição que dúvidas e dificuldades começam a aparecer, dando novos contornos à experiência profissional do docente,

A esse respeito, é possível observar no depoimento do professor César[1], certa estranheza dificuldade em lidar com o comportamento dos alunos: “O início foi muito difícil, pois os alunos não [tinham] interesse. É tudo tão diferente de quando eu estudava [...]”.

O excerto a seguir elucida mais claramente as dificuldades enfrentadas pelo professor durante seu início da carreira. Também revela que apesar de o início da careira ser considerado um período crucial da trajetória profissional dos professores, o mesmo também é visto como um dos mais difíceis, e porque não dizer piores, da profissão, visto que o docente ainda não se sente nem está preparado para assumir a responsabilidade profissional que a docência exige.

> *[...] Nos primeiros meses, eu pensei que eles [os alunos] estivessem me testando [...]. Foi uma época difícil, pois além de eu estar sem preparo para lidar com alunos indisciplinados, eu achava que só deveria me basear nas apostilas que o Estado mandava. E, aí, eu não conseguia nada, pois a apostila apresentava conteúdos muito além daquilo que os alunos sabiam. Eu não buscava outros materiais, porque a coordenadora da escola dizia que eu teria de seguir a apostila e se não seguisse o Estado poderia me punir. Nossa! Como eu era bobinho e acreditava em tudo! (Professor César)*

Pode-se relacionar o que aconteceu com César aos estudos de Huberman (1995), que ele chama de “choque de realidade”. O autor enfatiza que o impacto com a realidade acontece quando o professor depara-se com situações que não vivenciou durante a graduação. Com isso, o docente passa a conviver receoso, surgem os medos, as inseguranças, as dificuldades para lidar com alunos “indisciplinados” e abre-se espaço para outras que situações possam repercutir em dificuldades de atuação no início da carreira.

Em outro momento, César comenta que quando entrou pela primeira vez em sala de aula, os alunos rejeitaram-no, além disso, se deu conta de o que ele aprendera durante a graduação não correspondia às expectativas criadas quando era estudante.

> *Depois desse dia, aprendi que tudo o que eu aprendi na faculdade e no estágio não tinha nada a ver com a realidade escolar que eu estava vivenciando. Eu aprendi que devo respeitar o aluno e vice-versa, mas não foi bem isto o que aconteceu. Acho que as disciplinas estudadas na faculdade deveriam enfatizar a parte prática e não tanta teoria. (César (Professor Cesar).*

[1] Todos os nomes são fictícios.

No discurso de Cesar, pode-se notar que no início da carreira, o docente idealiza a situação que vai vivenciar. Dessa forma, decepciona-se com os imprevistos que surgem.

Mariano (2006) comenta que, por mais que o professor esteja preparado para atuar em sala de aula, precisa estar ciente de que surgem situações inesperadas com as quais ele não vivenciou durante a graduação. Assim, é essencial considerar a relação empática entre professor e aluno, para que a aula provoque reflexões sobre as ações dos alunos, como também as consequências para a prática educativa.

Em consonância com este assunto, Rey (1995) defende a ideia de que a relação professor-aluno é afetada pelas ideias que um tem do outro e até mesmo as representações mútuas entre os mesmos. A interação professor-aluno não pode ser reduzida ao processo cognitivo de construção de conhecimento, pois envolve também as dimensões afetivas e motivacionais.

Fanfani (2000) enfatiza que os atuais alunos são diferentes dos primeiros "clientes" da educação escolar moderna. Isso porque as mudanças nos modos de produção, na estrutura social e familiar, as transformações no plano das instâncias de produção e difusão da cultura afetam a vida dos jovens. Alguns demonstram desencanto e frustração, porque não veem relação entre escolaridade, obtenção do diploma e o esperado emprego seguido de reconhecimento social.

Atualmente, a escola perdeu a capacidade de impor regras que determinem a permanência ou a evasão escolar. Assim, os estudantes devem saber que ir ou não à escola não é uma questão de escolha, mas é uma obrigação que consta na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 9.394/96.

Fanfani (2000) lembra que, ultimamente, a "onipotência" do professor foi substituída pela visão mais complexa e política das relações. A relação professor-aluno é horizontal e o respeito, por exemplo, deve ser uma atitude recíproca e não só uma obrigação do aluno com o professor. Por isso, o importante é que o professor ao longo da trajetória formativa reflita sobre o quanto é capaz de reconstruir os próprios caminhos, leve em consideração que deve sempre aprender seja com outros professores ou até mesmo com os alunos. E esta é uma forma de interação ativa entre professor e alunos que abrem horizontes para novos conhecimentos, habilidades, atitudes e convicções, bem como a fixação e consolidação dos conhecimentos e convicções adquiridas ao longo de sua trajetória de vida.

1.1. Apoio e contexto escolar

Entende-se por apoio todo tipo de ajuda ou orientação que o docente recebe quando é inserido em um processo de aprendizagem profissional. Em vários depoimentos dos professores entrevistados, pode-se observar que o apoio, tanto da família como dos membros da escola é apontado como uma dificuldade no início da carreira.

Considerando o processo de aprendizagem profissional, Bleach (1999) menciona que o apoio aos novos professores deve enfatizar aspectos pessoais e profissionais. Ressalta que a dimensão afetiva é muito importante, pois frustração, ansiedade e desapontamento são aspectos inevitáveis e válidos da aprendizagem, embora os professores iniciantes permaneçam no "fio da navalha" entre um desafio que pode ser resolvido e uma ameaça que não pode. Percebe-se isto no depoimento de Lucas:

> *No começo, não contei com a ajuda de ninguém, pois eu achava que se ficasse fazendo perguntas os colegas me considerariam incapaz. Então, eu ficava só olhando como os mais experientes faziam, e eu tentava ser igual, mas nem sempre funcionava, pois os alunos não me respeitavam. Eu ficava frustrado e triste por não conseguir ser a autoridade da sala de aula. A falta de apoio dos colegas e da equipe gestora me deixava muito ansioso e com sentimento de fracasso (Lucas)*

Neste caso, o aprendizado pelo trabalho caracterizou-se por um sentimento de drama, pois a falta de apoio e a indiferença da equipe gestora trouxeram a sensação de fracasso profissional.

O professor iniciante, embora traga conhecimentos teóricos contemporâneos, acaba pela vivência com outros professores mais experientes recusando o conhecimento que traz e adotando posturas que o aproximam mais do modelo tradicional.

Para Mariano (2006), a solidão e o isolamento são sentimentos que tomam conta do professor iniciante. Isso se deve, sobretudo, pela ausência de um trabalho coletivo nas escolas e pela inexperiência e insegurança. Quando foi citada uma questão referente ao apoio recebido, os professores Maria e César comentaram que não puderam contar com a ajuda de ninguém. Maria ainda acrescenta:

> *[...] só recebia críticas da direção. A diretora dizia que os problemas com alunos não são dela. Eu me lembro como ela falava "querida, infelizmente, você tem de aprender a dar aula sozinha. Então, eu acreditava que deveria resolver tudo sozinha e pronto! Chegava em casa, chorava e ficava pesquisando algumas teorias para me ajudar, mas não adiantava nada, pois tudo o que eu lia parecia inútil.Os alunos só queriam conversar e me ignoravam. (Maria)*

O depoimento de Cesar elucida bem o quadro de abandono e de descaso, os quais teve que enfrentar no início de sua carreira como professor.

> *Um dia eu comentei com a coordenadora que estava com dificuldades, e ela me disse. "Você não é filho de professor? Então, pergunte ao seu pai como você deve fazer. Eu não tenho tempo de ficar ensinando teorias que você não aprendeu na faculdade". Fiquei triste, mas levantei a cabeça e segui em frente, claro, quase chorando. Achei isto um absurdo, pois ela tinha a obrigação de me ajudar. (César).*

De acordo com esses depoimentos, Lima (2005) lembra que saber novas teorias pedagógicas não é tão importante, pois o docente iniciante precisa encontrar outros modos de ensinar, que ele tenha algo mais significativo do que aquilo que ensina para colocar no lugar do que sabe e acredita funcionar.

A esse respeito, Couto (1998 apud Mussolini, 2004) explicita que a tarefa de assumir o papel como professor não é fácil, pois este é um momento que pode ser temível se o docente não receber apoio necessário ou não estiver preparado para assumir tal responsabilidade.

O apoio dos colegas é essencial na socialização. Por isso, Nunes (2002) afirma que "enquanto possível fonte de conhecimentos de natureza prática e, quando uma interação significativa se estabelece, isto serve de modelo de trabalho colaborativo". Ele explica que ao iniciar a carreira é frequente o docente procurar ajuda de companheiros. Alguns desses colegas, conforme o autor podem tornar-se modelos de como trabalhar e agir em sala de aula. O autor ainda assinala que, dessa forma, esses companheiros são muito importantes nesse processo de socialização docente, uma vez que muitos colaboram com recurso material, conhecimentos teóricos, regras, entre outros.

Cole (1992) garante que os professores em início de carreira precisam de assistência continuada e apoio em seu desenvolvimento para que consigam identificar as próprias necessidades de apoio e preferências sobre seu próprio desenvolvimento profissional. Foi o que aconteceu com Miriam. A professora afirma a importância do apoio que recebeu dos colegas que ao iniciar a carreira:

> *Contei com a ajuda de meus colegas de trabalho e da faculdade. Reuníamo-nos uma vez por semana para conversar sobre tudo que se passava na escola. Trocávamos atividades, discutíamos as dificuldades e criávamos material para trabalhar com os alunos. Eu chegava em casa cheia de ideias e depois compartilhava com meus alunos (Miriam).*

Desse modo, ao entrar em um mundo para o qual não estava devidamente preparado, as práticas dos professores ditos "mais experientes" acabam sendo referenciais para o iniciante na carreira docente.

Em relação ao ensino da Matemática, Cooney (1985) menciona que os professores em início de carreira enfrentam conflitos por não estarem preparados para o embate entre suas crenças, valores, expectativas dos alunos e das famílias sobre os professores e o currículo. Por outro lado, a relação que o docente tem com a Matemática parece ser um fator importante na forma como ele lida com o ensino da disciplina.

2. Dificuldades, sentimentos e desafios.

Para o profissional que está iniciando a carreira docente, as dificuldades e os desafios estão presentes em seu trabalho. Sabe-se que é com a prática que o profissional aprende realmente ser professor e a lidar com os desafios e dificuldades, com base nas experiências cotidianas. Além disso, a equipe escolar também exerce um papel.

Marcelo (1999, p. 113) alude que "os primeiros anos de ensino são especialmente importantes porque os professores devem fazer a transição de estudantes para professores e, por isso, surgem dúvidas, tensões […]". Se por um lado o início de carreira docente é importante, por outro, é um período difícil, no qual o professor vivencia novos papéis e depara-se com inúmeros desafios, tais como a organização das atividades em sala de aula, o relacionamento com os estudantes e com os próprios colegas professores, gestores e familiares.

A professora Miriam comentou que o início foi muito complicado em relação ao respeito e à realidade vivida em sala de aula.

> *O início foi um pouco difícil, pois eu estava acostumada com crianças pequenas da escolinha e, de repente, me deparei com alunos de 11, 12 e 13 anos. Eles não me respeitavam; não me deixavam falar, e eu ficava muito nervosa, porque queria que eles ficassem quietos para me escutar. No começo, eu tentei me basear no tempo em que eu era aluna, mas não deu certo [...]. Atualmente, a realidade é outra, bem diferente de quando estudei. Hoje, enquanto tento explicar, alguns alunos não estão dando a mínima atenção. Eles conversam, riem e não prestam a atenção no que falo. Isto é cansativo e desgastante, pois eu quero que eles aprendam de verdade, mas parece que nada chama a atenção deles(Miriam).*

A professora Maria também explicitou que o início de sua carreira foi muito complexo e continua sendo, pois o desinteresse dos alunos é o maior dos desafios que ela enfrenta.

> *A maioria dos meus alunos não quer saber de aprender Matemática. Um dia, um menino me disse "Meu pai falou que se eu tirar 5,0 já está ótimo para passar de ano, porque Matemática é difícil e não vai servir pra nada quando eu for vender droga". Fiquei indignada com esta fala, pois percebi que tanto pra ele quanto pra família a educação não tem sentido algum. No início, senti solidão e vontade de desistir, pois não aguentava os alunos me desrespeitando. Porém, percebi que alguns queriam aprender, e eu preparava as aulas com carinho e percebia que estes gostavam. Confesso que não é nada fácil, a classe agitada, e eu tentando explicar matemática. Às vezes, tinha vontade de arrumar meu material e ir embora, mas ao mesmo tempo pensava que isso fazia parte do trabalho que precisava aprender a administrar as situações (Maria).*

Diante desse depoimento, a afirmação de Huberman (1995) é pontual. Segundo o autor, a iniciação à docência é um período de aprendizagens intensas, que pode traumatizar e despertar no professor a necessidade de sobreviver aos desafios da profissão. Em outro estudo, ele complementa que, alguns desafios como a sobrevivência e a descoberta fazem parte desta etapa (Huberman, 1995). Ainda segundo Huberman, os conflitos vivenciados com relação ao comportamento dos alunos, principal dificuldade dos professores, fizeram emergir os mais diversos sentimentos, como solidão, vontade de desistir e cansaço, entre outros.

Percebe-se o sentimento de abandono, quando César comentou que o início da carreira foi uma época difícil, pois além de não estar preparado, considerava que deveria somente se basear nas apostilas que o Estado mandava. E, dessa forma, não conseguia nada, pois a apostila apresentava conteúdos muito além daquilo que os alunos sabiam. Ele ficava desesperado, pensava em abandonar a carreira, mas aos poucos, percebeu que essa era uma fase passageira.

Em consonância com o depoimento de César, Mizukami (2004) menciona que a base de conhecimentos oferecida ao docente nos processos de formação inicial é limitada, tornando-se mais aprofundada e diversificada pautada na experiência profissional, ou seja, é no exercício da docência que se aprende, em parte, a ser professor.

O professor Reginaldo afirmou que o primeiro dia de trabalho foi repleto de curiosidades, ansiedades e desafios.

> *Não senti medo, mas ansiedade. Pensava na indisciplina, na forma de explicar a matéria, enfim pensei que tudo fosse dar errado, mas não foi bem assim. Eu me lembrei de uma professora do estágio que disse que eu não*

> *poderia mostrar os dentes. Então, eu cheguei com cara de bravo e fui impondo as regras. Ninguém falou nada, gostei e tive a sensação de que dominaria a sala. Mas, isto durou pouco, pois algumas semanas depois, alguns alunos passaram a não fazer os deveres de casa e copiar as respostas da lousa. Enquanto os outros ficavam quietos prestando a atenção naquilo que eu falava, os três indisciplinados copiavam as respostas pensando que eu não estivesse vendo. Eles não ficavam bagunçando, mas me irritavam porque não faziam a lição de casa. E, pra mim, isto é um tipo de indisciplina.* (Reginaldo)

Este depoimento mostra que o professor iniciante, sem saber o que fazer diante da sala de aula, resolveu adotar o mesmo método da professora que observou durante o estágio que fez quando era estudante da graduação. Entretanto, apesar do sentimento de segurança e autoridade, logo percebeu que o método não deu certo com seus alunos, pois conforme ele, a "indisciplina" começou a ser gerada em sala de aula. Indisciplina esta que o irritava.

Ao se considerar a situação descrita pelo docente, acredita-se que, para alguns professores, enviar lição para casa é ao mesmo tempo uma forma de reforçar o que o aluno aprendeu em sala de aula e também uma oportunidade para que ele seja um aprendiz mais independente. Entretanto, o professor deve explicar ao estudante o objetivo da lição de casa para que o aluno entenda o porquê deve realizar a atividade solicitada.

A indisciplina causada pelos alunos de Reginaldo não pode ser vista como uma causa da dificuldade para lecionar, pois, provavelmente, seja resultado da falta de adequação no processo de ensino.

Considerando a situação, Aquino (2003, p. 51) enfatiza que "a indisciplina traduzir-se-ia numa espécie de efeito de inconformidade, por parte do alunado, aos anacrônicos padrões de comportamento nos quais as escolas ainda parecem inspirar-se". Em seu entender, enquanto houver docentes impondo o melhor modo de comportar-se, haverá alunos protestando e fugindo às regras que lhes parecem arbitrárias. Será inevitável a manifestação dos discentes diante de normas impositivas.

Pode-se inferir que o professor Reginaldo, em seu aparente domínio da classe, parece demonstrar insegurança ao colocar sua autoridade à prova. Assim, cabe-nos perguntar: Haveria algo a fazer que pudesse romper essa estratégia de não "bater de frente" com os alunos? Despertar a curiosidade dos alunos pela Matemática talvez fosse o caminho para a aprendizagem?

Diante do ocorrido, o professor deveria mostrar a seus alunos questões interessantes da Matemática que poderiam despertar interesse pelas atividades propostas para casa. Isso nos leva a pensar que o docente pode fazer uso do impasse ocorrido com os alunos para um trabalho a favor da aprendizagem do grupo. Entretanto, em outro momento da entrevista, Reginaldo comentou:

> *Eles não querem aprender nada. Tento explicar os conteúdos, mas eles só conversam, brincam e atormentam quem quer aprender. É muito difícil, mas eu me esforço. Faço um tipo de "chantagem" com eles. Digo que serão reprovados, que vou convocar os pais e todos os dias olho a lição. Quem não faz leva bilhete para a família. É tudo tão desgastante que eu fico muito*

estressado, mas aguento e tenho certeza de que um dia vão se lembrar de mim. (Reginaldo)

Constata-se que, no momento do impasse, o professor lança mão da ocorrência escolar, o que lhe pode proporcionar garantias, ainda que mínimas, mas superficiais para manter o controle e o poder na sala de aula. Será que lançar mão dessa garantia é uma tentativa de fazer valer sua autoridade em sala de aula? É essencial que os docentes reflitam sobre as particularidades dos alunos, quando se deparam com as “dificuldades” que apresentam tanto dentro como fora de sala de aula. Tais reflexões devem servir de indicações de tratamento dos conflitos causados nas práticas pedagógicas. Mas, os docentes precisam dar nomes às estratégias que criam, compartilhar essas experiências com seus pares e interagir com outros saberes gerando, assim, possibilidades de novas aprendizagens e melhor convívio com os estudantes

3. O que os estudos revelam sobre a formação inicial

Não é recente a afirmação de que a qualidade da Educação implica a formação de professores. De acordo com o grupo de pesquisas Prapem da Faculdade de Educação da Unicamp, os programas de formação de professores, bem como os estudos sobre o ensino e suas aplicações têm acompanhado historicamente as concepções teóricas e sociopolíticas de cada época.

Pesquisas internacionais revelam que, até o final da década de 1960, a formação de professores consistia em programas emergenciais voltados para a solução de problemas com o número necessário de professores.

Até finais de 1970, em muitos países, o tipo de pesquisa educacional predominante era composto por estudos experimentais quantitativos sobre a eficácia de diferentes métodos para treinar professores em tarefas específicas. A preocupação era modelar o comportamento do professor e examinar os efeitos de algumas estratégias de ensino, visando a identificar estudos sobre o que é um ensino eficiente.

A partir da segunda metade de 1980, ocorreram algumas mudanças educacionais. De um lado, uma visão do ensino como uma arte, algo que não poderia ser ensinado fora das escolas, pois o desenvolvimento das habilidades só seria possível por meio da prática. Por outro lado, coexistia uma visão de ensinar como uma profissão. Isso envolvia “além do treinamento, a internalização das várias teorias referentes a ensinar ler, escrever, discutir, pesquisar etc.”(Hoyle e John 1998, p. 71).

No Brasil, até meados de 1980 havia poucas pesquisas sobre a formação de professores e menos ainda sobre docentes de Matemática. No entanto, Fiorentini (1994) analisou 204 teses e dissertações focalizando as tendências temáticas e teórico-metodológicas, as indagações que foram objeto de investigação, os pesquisadores e orientadores dos estudos, e os programas em que foram produzidos. Ele verificou que as pesquisas tinham como preocupação os cursos e programas que contribuíam para a melhoria da formação do professor e, em última instância, do ensino de Matemática. Em sua maioria, as pesquisas apresentaram resultados genéricos que enfatizavam o desempenho dos sujeitos diante dos instrumentos em termos de aumento de competências.

Na década de 1990, partindo de uma perspectiva mais global e sistêmica, os pesquisadores analisaram os processos de mudança e inovação baseados nas dimensões organizacionais, curriculares, didáticas e profissionais, visando a identificar os modelos de desenvolvimento profissional e as diferentes fases desse processo. Nessa década, no Brasil começam a serem discutidos novos programas educacionais com propostas de novas perspectivas. Mas, percebe-se um descontentamento com a forma e a estrutura atual dos cursos de licenciatura, pois os futuros professores, geralmente, têm um acompanhamento muito superficial durante o processo formativo, o que representa uma contraposição à perspectiva vigente, na qual os docentes deveriam beneficiar-se dos conhecimentos produzidos pelas universidades para poder aplicá-los no cotidiano.

No entanto, apesar de tantas incongruências, ainda hoje, a formação dos professores é um processo resultante da inter-relação de teorias, modelos, princípios extraídos de investigações experimentais e regras procedentes da prática que possibilitam o desenvolvimento profissional do docente.

É preciso compreender que o docente está sempre aprendendo. Mas esse processo depende do tempo, das experiências vividas, das oportunidades e do apoio que recebe dos colegas e familiares.

Atualmente, os jovens não vêm interessando-se em cursar algum tipo de licenciatura para se tornar professor. Assim, a falta de docentes bem formados e a insuficiência de profissionais para algumas áreas disciplinares dos últimos anos do ensino fundamental e médio é discutida, tanto em artigos acadêmicos como na mídia. Do mesmo modo, divulga-se não só a tendência de queda na demanda pelas licenciaturas e no número de formandos, mas também a mudança de perfil do público que busca a docência.

O Relatório da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico OCDE (2006), que reúne um conjunto de dados de realidades de diferentes países, explicita que a preocupação não é só de atrair os professores para a carreira docente, mas manter os professores qualificados em termos de conhecimentos e habilidades na profissão. Entretanto, a ausência de professores nas áreas de ciências exatas é muito grande, sobretudo, no Brasil.

Dados do Censo Escolar da Educação Básica de 2012 indicam que 25% dos professores das redes municipais e pouco mais de 30% dos docentes das redes estaduais brasileiras possuem contratos temporários de trabalho. Estes dados apontam para a necessidade de que sejam realizados concursos públicos em diversas redes, de modo a cumprir a legislação nacional sobre o tema e dotar as escolas com profissionais capazes de atuar em sala de aula com condições adequadas de trabalho.

No Brasil, a forma de ingresso dos docentes nas redes públicas de ensino está regulamentada na Constituição Federal. Consta no artigo 206 que um dos princípios do ensino é a: “V- valorização dos profissionais da educação escolar, garantidos, na forma da lei, planos de carreira, com ingresso exclusivamente por concurso público de provas e títulos, aos das redes públicas" (Redação dada pela Emenda Constitucional nº 53, de 2006).

Gatti e Barreto (2009, p. 252), ao analisarem algumas pesquisas referentes à valorização do magistério brasileiro, mencionam que um dos fatores enfatizados como valor é a existência de concurso para ingresso na carreira "sendo esse considerado fator primeiro de detecção da qualificação dos candidatos à docência". Outro fator como ressaltam as autoras, que poderia acrescentar valor à carreira docente, seria a regulamentação da avaliação de desempenho no estágio probatório. Elas explicitam que "o estágio probatório, quando bem conduzido, cria uma aura de responsabilidade e uma imagem pública de serenidade, na ideia de garantia para os pais de competência profissional". (Gatti; Barreto, 2009, p. 253).

Da mesma forma, Peterson (1990), afirma que, apesar de alguns professores terem uma boa formação inicial, geralmente apresentam necessidades distintas e previsíveis de assistência profissional se comparados a professores mais experientes. O pesquisador destaca que, além de apresentar familiaridade restrita em relação aos alunos e recursos com os quais irão trabalhar, os iniciantes tenderiam a ter atitudes irrealistas sobre o trabalho, como por exemplo, a utilização de metodologias de ensino muito limitadas, a necessidade em relação à socialização com o grupo de colegas e outras expectativas relacionadas ao trabalho.

Considerando os desafios e dificuldades que os docentes enfrentam, Fanfani (2007) menciona que a sociedade espera mais do que a escola pode produzir, ou seja, existe uma distância entre a imagem ideal da função docente e a realidade relacional e temporal de sua prática. No cotidiano da escola, o professor para desenvolver sua atividade de ensinar, precisa lidar com os problemas de indisciplina e violência, com a falta de interesse dos alunos, com a necessidade de trabalhar com um número maior de alunos e desenvolver sua tarefa educativa na e para a diversidade. E mais, a introdução das tecnologias de ensino no trabalho docente produzem mudanças na relação com o conhecimento, gerando sensação de obsolescência em muitos profissionais da educação.

Em estudo sobre o abandono da carreira docente, Lopes e Bueno (2003, p. 76) mostram que, no grupo de professores estudados, nenhum queria realmente ser professor: "Ser professor era a escolha possível no começo da vida profissional. Tornar-se professor aparece como a alternativa passível e possível de sonhar em ser médico, advogado, veterinário ou qualquer outra profissão." Aparentemente, o que se observa é que a atividade docente apresenta alguma possibilidade de oferta de trabalho com base em um curso de formação considerado acessível, o que faz com que alguns alunos ingressem em cursos superiores de Pedagogia ou licenciatura sem o real interesse em atuar como professor.

Em uma pesquisa com uma amostra de estudantes do ensino médio, Gatti et al. (2009) constataram que apenas 2% dos entrevistados declararam ter a Pedagogia ou algum tipo de licenciatura como primeira opção no vestibular. E mais, há evidências de que quanto menor a nota do aluno no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), menor a escolaridade dos pais e menor a renda familiar. Isso justifica a maior probabilidade de o estudante querer tornar-se professor de educação básica.

Assim, é importante que as discussões sobre a atratividade da carreira docente considerem as fortes contradições evidenciadas pelas pesquisas relativas ao "estar professor", que oscilam entre satisfações e frustrações, entre opção e necessidade. Os sentimentos de desconforto profissional construídos pelos professores em exercício são consubstanciados em representações que extravasam comentários e atitudes e impactam os jovens no convívio cotidiano com os professores, bem como extravasam em outros ambientes sociais.

4. Dificuldades e dilemas enfrentados pelos professores em início de carreira

O início da carreira, conforme Tardif (2002) é um período muito importante da história profissional do professor, uma vez que determina seu futuro e sua relação com o trabalho. Também, nessa época, de acordo com Huberman (1999), o docente vive um dos piores momentos da profissão.

Marcelo (1999, p. 113), menciona que, essa fase inicial de inserção na docência, é a passagem de estudante a professor, que teve início nas atividades de estágio e prática de ensino. Ele enfatiza que “os primeiros anos de ensino são especialmente importantes porque os professores devem fazer a transição de estudantes para docentes e, por isso, surgem dúvidas, tensões […]”.

Trata-se de um período importante e difícil, pois quando o docente ingressa na carreira traz informações, crenças, atitudes e modelos construídos ao longo da vida estudantil. Dessa forma, ao se tornar professor vive novas experiências e depara-se com a organização das atividades em sala de aula, o relacionamento com os estudantes, com os próprios colegas professores, gestores e familiares. E, a partir daí, começam a surgir as dificuldades, pois as imagens que o iniciante traz foram institucionalizadas durante a escolarização básica e, em alguns casos, constituíram fator determinante na escolha da profissão docente.

Uma das dificuldades que o docente enfrenta é a entrada na escola. Esse momento significa a demarcação do seu espaço no âmbito social, porque nesse processo há o incentivo de uma autonomia econômica e a perspectiva de realização de um projeto de vida.

Considerando as dificuldades da carreira docente, é no contexto da realidade cotidiana que o professor encontra situações problemáticas que desestabilizam as experiências pessoais e profissionais. Mas, tais situações provavelmente só terão chances de serem resolvidas diante de uma cultura reflexiva, em que suas experiências permeadas por crenças, valores e ideologias deverão transgredir uma dimensão na qual a autonomia sobre a própria experiência permita uma reflexão crítica, capaz de desenvolver novas formas de compreensão entre os valores educativos e a prática, aproximando aluno, professor, conceitos e realidade.

Desse modo, D’Ambrosio (1993) enfatiza que os professores iniciantes devem buscar compreensão do processo de construção do conhecimento dos alunos para que um ambiente propício à aprendizagem da Matemática seja atingido. Franco (2000) ressalta que as dificuldades do professor iniciante são ocasionadas pela exigência de atuação no que se refere à condução do processo de ensino e de aprendizagem, considerando as etapas de desenvolvimento de seus alunos e o conteúdo desenvolvido, como também os problemas relacionados com a disciplina dos alunos e organização da sala de aula.

Da mesma forma, Gonçalves (1992), Cavaco (1995) e Huberman (1999) destacam que, no início da carreira, além da insegurança, também acontece o sentimento de descoberta. Assim, ocorre um paralelismo entre a sobrevivência ou o choque com o real e a descoberta, sendo a última motivadora para suportar a primeira.

Cavaco (1995) afirma que a sobrevivência é um aspecto caracterizado pela

> [...] confrontação inicial com a complexidade da situação profissional: o tactear constante, a preocupação consigo próprio ("Estou-me a me aguentar"), a distância entre os ideais e a realidade cotidiana de sala de aula, a fragmentação do trabalho, a dificuldade em fazer face, simultaneamente, a relação pedagógica e a transmissão de conhecimentos, a oscilação entre relações intimas e demasiado distantes, dificuldades com alunos que criam problemas [...] (Cavaco, 1995, p. 39).

E a descoberta,

> É um aspecto que se traduz no entusiasmo na vontade de descobrir [...] a experimentação, a exaltação por estar finalmente, em situação de responsabilidade (ter a sua sala de aula, seus alunos, o seu problema, o seu programa) por se sentir colega num determinado corpo profissional [...] (Cavaco, 1995, p. 39).

Considerando ambos os aspectos enfatizados pelo autor, nota-se que a sobrevivência é caracterizada pela vivência cotidiana da docência e pelas discrepâncias entre o que foi idealizado na formação inicial e a realidade da sala de aula que o professor iniciante enfrenta. Já, a descoberta está relacionada ao sentimento de realização do iniciante, de ter sua própria classe e ser um profissional na área da educação.

Desse modo acredita-se que a sobrevivência e a descoberta estejam juntas no início da carreira, embora possam ser sentidas de maneiras distintas. Para alguns docentes, o começo gera ansiedade e expectativa de mudança que contribui para fortalecer seus ideais; entretanto, para outros essa fase é tão difícil que se torna um período de muitas dúvidas e desafios.

Outro pesquisador que tem sido referência para estudos referentes a professores em início de carreira é Veenman (1988, apud Mariano, 2006). Ele destaca que a indisciplina é uma das dificuldades mais sentidas pelos professores iniciantes. Outras dificuldades apontadas pelo autor estão relacionadas às diferenças individuais, ao relacionamento com os colegas e à motivação dos alunos.

Em consonância com esse assunto, Cavaco (1995) ainda menciona que, na profissão docente, não há acolhida aos novos professores. Quando eles chegam à escola, precisam aprender a trabalhar e a resolver seus problemas sozinhos. Dessa forma, novos questionamentos podem ser levantados pelos iniciantes quando vão atuar pela primeira vez na sala de aula: O que fazer diante da sala de aula com número excessivo de alunos? Onde esses iniciantes encontrarão apoio para enfrentar os desafios cotidianos? Será que essa situação não é provocadora de desistência dos iniciantes?

Dados internacionais levantados por Gold (1996 apud Tardif, Raymond, 2000) explicitam que 33% dos iniciantes, durante as fases iniciais da docência, abandonam a profissão ou questionam-se sobre sua escolha profissional e continuidade na carreira.

No Brasil, em 2014, de acordo com os dados fornecidos pela Secretaria Estadual de Educação, a rede estadual possuía 232.000 professores, sendo 120.800 concursados, 63.000 contratados com estabilidade e 49.000 temporários. Entretanto, a cada dia, oito professores concursados desistem de lecionar e demitem-se. Entre 2008 e 2012, a média de pedidos de exoneração foi de 3.000 por ano. Salários baixos, pouca perspectiva e más condições de trabalho estão entre os motivos para o abandono de carreira. (Secretaria da Educação Estadual/2013). Considerando essa situação, alguns professores, diante das condições de seu fazer docente, dos resultados obtidos e, sobretudo, do modo como é visto seu trabalho pelas autoridades gestoras do sistema educacional, acabam buscando novos caminhos, com o objetivo de melhorar a qualidade de seu trabalho ou também desistem da profissão por considerar que não são capazes de atuar em sala de aula.

Os estudos de Corsi (2006 apud Lima F., 2006) apontam que o comportamento agressivo e o desinteresse dos alunos também despertam no professor o desejo de desistir da profissão, causando cansaço, solidão e outros sentimentos. Entretanto, o amor pela profissão faz com que o docente enfrente essas dificuldades, dando continuidade a sua carreira. Outros desistem por não suportar as dificuldades cotidianas.

Não por acaso, a valorização do professor é uma das principais metas do novo Plano Nacional de Educação. Esta valorização é destacada por Gatti (2009) quando menciona que entre as décadas de 1930 e 1950, a figura do professor passou a ter um valor social maior. Tal perspectiva, porém, modificou-se novamente com base na expansão do sistema de ensino no Brasil, que deixou de atender apenas à elite e passou a buscar uma universalização da educação. A expansão foi desordenada, acabou aligeirando a formação do professor e recrutando muitos docentes leigos com salários muito baixos.

De acordo com o Ministério da Educação e Cultura (MEC), há carência de 270 mil professores de Matemática, Química, Física e Biologia nas escolas brasileiras. Partindo desse pressuposto, Patinha (1999) investigou professores que atuam na escola pública estadual e identificou suas áreas de formação e as disciplinas que lecionam no Ensino Fundamental e Médio. Os dados confirmaram a ideia de que não é possível um trabalho de qualidade, quando são ainda admitidos professores sem habilitação requerida para exercer a profissão.

A falta de professores habilitados, oriundos da Academia, permitiu o alto índice de professores não habilitados, muitos dos quais estudantes de outras áreas ou profissionais formados em áreas não relacionadas com as disciplinas que ministravam e que buscavam a docência como alternativa, enquanto não encontravam melhores cargos em suas profissões. Tais profissionais lecionam com autorizações da diretoria de ensino.

Um estudo mais recente de Aranha (2007) sobre professores eventuais que atuam nas escolas públicas no interior de São Paulo revela que essa figura de substituto ou eventual está aumentando nas escolas públicas. A investigação aponta para a fragilização e desprofissionalização do trabalho docente e indica que as atividades do eventual, da forma como vêm acontecendo, materializam a descaracterização do trabalho docente.

Ao estudar professores iniciantes, Guarnieri (1996) realizou entrevistas com docentes e verificou que as dificuldades mais citadas estão relacionadas às condições de trabalho seguidas das exigências burocráticas das escolas; a interferência da equipe gestora e dos colegas de trabalho. Também indicou a dificuldade em lidar com os conteúdos escolares no sentido de organizá-los e identificar o momento ideal para prosseguir com a matéria sem que haja prejuízo aos alunos; a escolha das estratégias para que os alunos aprendam o conteúdo; a forma de trabalhar com diferentes níveis de aprendizagem e as dificuldades para elaborar a avaliação de um modo que corresponda às expectativas desejadas.

A pesquisadora supracitada também mencionou que os professores iniciantes têm muitas dificuldades para encontrar estratégias de ensino para que os alunos entendam os conteúdos. Alguns trabalham com tentativa e erro por não saberem se os alunos estão aprendendo ou não. E, assim, aos poucos vão se identificando com a sala de aula. Mas, será que esses professores têm consciência de suas dificuldades? As dificuldades podem aparecer com muita frequência no início da carreira e nem sempre são solucionadas rapidamente. Muitas vezes, a solução adotada acaba gerando outras dificuldades, levando os docentes a viver em conflito consigo mesmos. Por isso, Lourencetti e Mizukami (2002, p. 194) apontam “a necessidade de se adotar uma imagem do ensino que leve em consideração a possibilidade de que o próprio professor é um recurso na gestão dos problemas da prática educacional”.

Sacristán (1992, apud Lourencetti e Mizukami, 2002) menciona que o docente é um administrador de problemas. A pesquisadora lembra que o termo foi usado com base nos estudos de Lampert (1985 apud Lourencetti e Mizukami, 2002) que destaca a posição de Sacristán sobre a atuação do professor em situações problemáticas:

> [...] A atuação do professor não consiste em solucionar problemas como se fossem nós cegos, que, uma vez solucionados, desaparecem. Pode ser o caso de conflitos pontuais, mas não é o da prática “normal”. Esta consiste em tomar decisões num processo que se vai moldando e adquire identidade enquanto ocorre, no decurso do qual se apresentam opções alternativas, face às quais é necessário tomar decisões (Sacristan, 1992, apud Lourencetti; Mizukami, 2002, p. 87).

Outro aspecto a ser destacado refere-se aos dilemas vividos pelos professores e, em especial, pelos iniciantes. Zabalza (1994) e Tardif (2002) 68 lembram que os dilemas são situações nas quais os professores precisam fazer escolhas que dependem diretamente das experiências de cada um, como também de conhecimentos, crenças, cultura, compromissos profissionais, saberes adquiridos e respeito para com os alunos.

Zabalza cita em seus estudos, o seguinte conceito para dilema:

> [...] todo conjunto de situações bipolares ou multipolares que se apresentam ao professor no desenrolar da sua atividade profissional... Em cada uma destas situações problemáticas (que podem ser pontuais ou gerais) o

> professor tem de optar, e fá-lo, de fato, num sentido ou noutro (na direção de um ou outro dos polos do dilema) (Zabalza, 1994, p. 61).

Em relação aos dilemas de professores, eles trabalham com seres humanos e o objetivo de seu trabalho é, por meio de relações sociais, gerir essas relações com os próprios alunos. Isso explica a existência de dilemas na atividade pedagógica (Tardif, 2002).

Lourencetti e Mizukami (2002) analisaram os dilemas da docência de dois professores que lecionam na quinta série. Elas mencionaram que as dificuldades e dilemas estão relacionados ao comportamento inadequado dos alunos com relação às regras escolares que envolvem não só a indisciplina, mas também os deveres não feitos, as inúmeras ausências, os trabalhos que os estudantes não entregam e as avaliações entregues em branco. Será que esse comportamento gerado pelos alunos é mais comum quando se trata do trabalho de um professor iniciante?

O segundo dilema mencionado por Lourencetti e Mizukami (2002) parece constituir-se um dilema, tanto do professor como do aluno, pois a quinta série é marcada pela passagem do ciclo I para o ciclo II, motivo de muitas situações complicadas, resultantes das dificuldades de adaptação dos professores.

No que se refere ao desenvolvimento do conteúdo, geralmente os professores iniciantes são preocupados com a quantidade e a qualidade. Muitos ficam indecisos sobre o que é mais importante e, por sua vez, não sabem que atitude devem ter.

O quarto dilema refere-se ao não domínio do conteúdo específico. Os professores questionam-se: “Como fazer diante da pergunta de um aluno, se eu não souber responder?” Há conteúdos não aprendidos na faculdade e, consequentemente, os professores não podem apreciá-lo. Como agirá o professor iniciante diante dessa situação?

Embora “a indisciplina” tenha sido o último dilema apontado, foi considerada por um professor como o mais difícil. Ele cita que os alunos conversam o tempo todo e, na maioria das vezes, ele não sabe como agir diante da situação.

As pesquisadoras enfatizam que, exceto o segundo dilema apresentado, a passagem de um ciclo para outro, que é específico da série, todas as demais situações podem ser vivenciadas por algum professor em qualquer fase da carreira.

Lampert (1985, p. 93 apud Lourencetti e Mizukami, 2002), em seu trabalho, refere-se ao professor como um *dilemma manager*, ou seja, um profissional com a capacidade de intermediar interesses, desenvolvendo um trabalho que implica situações de diferentes naturezas. Ao explicar o termo *manager*, a autora chama a atenção para a capacidade de improvisação, que é uma função do gestor de dilemas. Explica que o gestor é um profissional capaz de encontrar soluções e ações unificadas ao processo de gestão. Conclui que este é o papel que cabe ao professor, cujos enfrentamentos os estudiosos descrevem com clareza.

> De acordo com Nono e Mizukami o início da carreira docente é particular a cada professor, pois ele ‘sobrevive’ às maiores dificuldades, passando a aceitar a ansiedade e os conflitos como característicos da docência e como fontes de aprendizagem profissional, desenvolvendo maior segurança e domínio sobre as situações cotidianas que enfrenta e que mobiliza

> conhecimentos para o exercício de sua prática pedagógica. (Nono; Mizukami, 2006, p. 09).

Portanto, considerando os dilemas e dificuldades enfrentados pelos professores em início de carreira, pode-se argumentar que os docentes não lidam com problemas, mas deparam-se com dilemas em diversas situações em sala de aula e na escola, em geral. E, ao se deparar com conflitos, precisam de apoio dos colegas e da equipe gestora que, muitas vezes, não oferecem a mínima atenção ao iniciante, dificultando a transição entre estudante e a vida profissional.

5. Bibliografia

Aquino, Júlio G. (2003). *Indisciplina: o contraponto das escolas democráticas.* São Paulo: Moderna.
Aranha, Wellington L. A. *Professores eventuais nas escolas estaduais paulista: ajudantes de serviço geral da educação.* Araraquara: Unesp, 2007. (Mimeo).
Bertoni, Nilza. (1995). Formação do professor: concepção, tendências verificadas e pontos de reflexão. *TEMAS E DEBATES*, Blumenau, v. 8, n. 7, p. 8-14.
Bleach, k. (1999). *The Induction and Mentoring of Newly Qualified Teachers: A New Deal for Teachers.* London: David Fulton Publishers.
Brasil. *Emenda Constitucional* nº 53, de 2006.
_____________. *Lei Complementar* nº 1.093/2009.
_____________. *Lei n° 9.394. Lei de Diretrizes e Bases da Educação* Nacional de 26 de dezembro de 1996.
_____________. (1996). Ministério de Educação e Cultura. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática***.** Brasília: MEC.
_____________. (1999). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: MEC/SEMT.
_____________. *Parecer CNE/CES 1.302/2001*, publicado no Diário Oficial da União de 5/3/2002, Seção 1, p. 15.
____________. *Resolução CNE 02/97.*
Cavaco, M. H. (1993). *Ofício do professor: o tempo e as mudanças.* In: NÓVOA, António (Org.). *Vidas de professores.* Porto: Porto Editora, p. 155-191.
_____________. (1995). *O ofício do professor: o tempo e as mudanças*. In: NÓVOA, A (org.) *Profissão professor*. Lisboa: Porto, p. 155-177.
Cole, A. L. (1992). Teacher development in the work place: Rethinking the appropriation of professional relationships. *TEACHERS COLLEGE RECORD*, 94(2), 365-381.
Cooney, T. J. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. JOURNAL FOR *RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION*, 16(5), 324-336.
Costa. Váldina Gonçalves da. *A formação dos formadores de professores de Matemática e a ludicidad*e – PUC/SP – UNIUBE/MG
D'Ambrosio, Beatriz S. (1993). Formação de professores e matemática para o século XXI: o grande desafio. *PROPOSIÇÕES,* volume 4, nº 1, p. 35-41, março.
Fanfani, Emilio Tenti. (2000). *Culturas jovens e cultura escolar*. Documento apresentado no Seminário "Escola Jovem: um novo olhar sobre o ensino médio".

_____________. (2007). *Culturas jovens e cultura escolar.* Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Coordenação-Geral de Ensino Médio, 2007.

Ferreira, A. C. (2003). *Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática*. In: Fiorentini, D. (Org.). *Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares.* Campinas, SP: Mercado de Letras,.

Fiorentini, D. (1994). *Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

_____________; Nacarato, A. M; Ferreira, A. C. Lopes, C. S.; Freitas, M. T. M.; Miskulin, R. G. S. (2002). Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. *EDUCAÇÃO EM REVISTA.* Faculdade de Educação da UFMG, Belo Horizonte – MG, pp. 137-160.

_____________; Castro, Franciana C.(2000). de. *Tornando-se professor de Matemática: O caso de Allan em Prática de Ensino e Estágio Supervisionado.* In: FRANCO, F. C. O coordenador pedagógico e o professor iniciante. In: Almeida, L. R. BRUNO, E. B. C; Christov, L. H. da S. *O coordenador pedagógico e a formação docente.* São Paulo: Loyola, pp.33-36.

García Blanco, M. M. (2003). *A formação inicial de professores de matemática: fundamentos para a definição de um curriculum*. In: FiorentinI, D. (Org.). *Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*. Campinas, SP: Mercado de Letras.

Garcia, Marcelo C.(1998). Pesquisa sobre a formação de professores: o conhecimento sobre aprender a ensinar. *REVISTA BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO:* ANPED, n. 9, p. 51-75.

_____________. (1999). *Formação de professores: para uma mudança educativa.* Porto, Portugal: Porto Editora.

Gatti, Bernadete A. (2009). Professores do Brasil: impasses e desafios. Brasília, Unesco.

Gatti, Bernadete A. NUNES Marina Muniz R. (orgs.) (2009). *Formação de professores para o ensino fundamental: estudo de currículos das licenciaturas em pedagogia, língua portuguesa, matemática e ciências biológicas*. São Paulo: FCC/DPE.

Gonçalves, J. A. (1992). *A carreira das professoras do ensino primário*. In Nóvoa, A. (ed.). Vidas de Professores. Porto: Porto Editora.

_____________. (1995). *A carreira das professoras do ensino primário.* In: Nóvoa, A. (org.*) Vidas de professores.* Lisboa: Porto, p. 141-169.

Gordon, S. (2000). *Como ajudar os professores principiantes a ter sucesso*. Porto: Edições ASA.

Guarnieri, Maria Regina (1996). *Tornando-se professor: o início na carreira docente e a consolidação da profissão.* Tese de Doutorado. São Carlos/SP: Universidade Federal de São Carlos,

Hoyle, E. e John, P. (1998). "Teacher education: The prime suspect". *OXFORD REVIEW OF EDUCATION, vol. 24, nº 1. pp. 69-82.*

Huberman, Michael (1995). *O ciclo de vida profissional dos professores.* In: Nóvoa, António. (Org.). *Vida de professores*. 2. Ed. Porto: Porto Editora,

Lima, Emilia Freitas de. (Org.) (2006). *Sobrevivências no início de carreira*. Brasília: Líber Livro Editora.

Lima, Maria Emilia (2005). *Sentidos do trabalho: a educação continuada de professores*. Belo Horizonte: Autêntica,

Lopes, C. A. E. (2003). *Matemática em projetos: uma possibilidade!* Campinas, SP: Graf. FE/UNICAMP; CEMPEM.

Lorenzato, S. (2008). *Para aprender matemática.* 2. Ed. Campinas: Autores Associados.

Lourencetti, Gisela do Carmo; MizukamI, Maria da Graça Nicoletti (2002). *Dilemas de professoras em práticas cotidianas*. In: Mizukami, Maria da Graça Nicoletti; Reali, A.M.M.R. Aprendizagem profissional da docência: saberes, contextos e práticas. São Carlos: Editora da UFSCAR.

Lüdke, Menga; André, Marli E. D. A (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas.* São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda.

_____________. (1996) *Sobre a socialização profissional dos professores.* CADERNO DE PESQUISA, nº 99, p. 5-15, Nov.

_____________. (2013) *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. 2ª ed. Rio de Janeiro: E.P.U.

Marcelo, C. (1999). *Formação de professores para uma mudança educativa*. Porto: Porto Editora.

Marcelo Garcia, Carlos (1998). Pesquisa *sobre a formação de professores: o conhecimento sobre aprender a ensinar. REVISTA BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO*. ANPED, n. 9, Set/Out/Nov./Dez.,

Mariano, André Luiz Sena. (2006). *A construção do início da docência: um olhar a partir das produções da ANPED e do ENDIPE*. Dissertação de Mestrado (total de paginas?). São Carlos: Universidade Federal de São Carlos.

_____________ (1999). *Aprendendo a ser professor no início da carreira: um olhar a partir da ANPED*. Disponível em: www.anped.org.br/28/textos/gt08/ gt0872int.rtf. Acesso em 29 junho de 2014.

Mizukami, M. G. N. (2004). *Relações universidade-escola e aprendizagem da docência: Algumas lições colaborativas.* In: Barbosa, R. L. L. *Trajetórias e perspectivas de formação de educadores.* São Paulo: EDUNESP, pp. 285-314.

Mussolini, Ana Flávia. (2004). *Reflexões de futuros professores de Matemática sobre uma prática educativa utilizando planilhas eletrônicas.* Dissertação de Mestrado. Rio Claro – SP. UNESP.

Nunes, João Batista Carvalho (2002). *Aprendendo a ensinar: um estudo desde a perspectiva da socialização docente.* In: 25ª Reunião Anual da ANPEd – Educação: manifestos, lutas e utopias (CD-ROM). Rio de Janeiro: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2002. pp. 1-13. em: http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.jsp?Id=N423839.

OCDE. Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (2006). *Professores são importantes: atraindo, desenvolvendo e retendo professores eficazes*. São Paulo: Moderna.

Patinha, V. A. (1999). *Professor não- habilitado: um sinal da crise na educação.* Tese (Doutorado em Educação: História e Filosofia da Educação) 212 fls. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Peterson, K. (1990). "*Assistence and assessment for beginning teachers".* In: Darling, L. & Millman, J. (Ed.). *The new handbook of teacher evaluation: assessing elemenatary and secondary school teachers*. Newburry Park, Sage Publications.

Rey, F. G. (1995). Comunicación, Personalidad y Desarrollo. Havana: Pueblo Educación.

Tardif, M., Lessard, C. e Lahaye, L. (1991). *Os professores face ao saber: esboço de uma problemática do saber docente. TEORIA ET EDUCAÇÃO.* Dossiê: Interpretando o trabalho docente. N° 4. Porto Alegre: Pannonica Editora, pp. 215-233.

Zabalza, Miguel A.*(1994) Diário de aula: contributo para o estudo dos dilemas práticos dos professores.* Porto – Portugal: Editora Porto.

Autores:

Seriani, Raquel. Graduada em Matemática e Pedagogia. Possui Mestrado em Educação (Psicologia da Educação) pela PUCSP. Atualmente é Doutoranda no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUCSP. Leciona nos níveis básico e superior. E-mail: *raquel.seriani@hotmail.com*

Rosa, Cibele Aparecida Santos. Pedagoga. Mestra em Educação (Psicologia da Educação) pela PUCSP. Doutoranda no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUCSP. E-mail: *cibelle@bol.com.br*

Silva, Dilma Antunes. Pedagoga. Mestra e Doutoranda em Educação (Psicologia da Educação) pela PUCSP. Atualmente é Docente (EBTT) na Universidade Federal de São Paulo- UNIFESP. E-mail: dilmasilva7@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 200-216

Dictados matemáticos: una herramienta para trabajar la competencia oral y escrita en el aula de matemáticas de Educación Infantil

Ainhoa Berciano Alcaraz, María Luisa Novo Martín, Ángel Alsina

Fecha de recepción: 2017-02-13
Fecha de aceptación: 2017-03-08

Resumen	En la enseñanza de las matemáticas se han ido incorporando progresivamente herramientas docentes para fomentar un aprendizaje eficaz. En algunos casos, la repercusión del uso de estas herramientas ha sido claramente delimitada y estudiada, pero todavía quedan diferentes aspectos didácticos por analizar, como es el caso de los dictados. En este trabajo, pues, nos centramos en explorar las posibilidades del dictado para la enseñanza-aprendizaje de la matemática en el aula de Educación Infantil y los errores que realizan los niños. Haciendo uso de una metodología cuantitativa, los resultados derivados de un estudio realizado con 47 niños y niñas de 2º curso de Educación Infantil nos llevan a concluir que: a) los dictados matemáticos conforman una práctica docente eficaz para trabajar la competencia oral y matemática, favoreciendo la representación simbólica; b) el tipo de error más habitual se debe principalmente a las dificultades en la distinción de formas y tamaños relativos. **Palabras clave**: representaciones simbólicas, dictados matemáticos, educación infantil, errores, competencia matemática
Abstract	Mathematics teaching has progressively incorporated teaching tools to foster effective learning. In some cases, the impact of the use of these tools has been clearly determined and studied, but there are still different didactic aspects to be analyzed, such as dictations. In this work, therefore, we focus on exploring the possibilities of dictation for the teaching-learning of mathematics in the classroom of Early Childhood Educations and the mistakes made by children. Using a quantitative methodology, the results derived from a study of 47 boys and girls from the 2nd year of Early Childhood Education lead us to conclude that: a) mathematical dictations form an effective teaching practice for working oral and mathematical competence, favoring symbolic representation; b) the most common type of error is mainly due to difficulties in distinguishing relative shapes and sizes. **Keywords**: Symbolic representations, mathematical dictations, Childhood Education, errors, mathematical competence
Resumo	No ensino de matemática têm sido progressivamente incorporando ferramentas educacionais para promover a aprendizagem eficaz. Em alguns casos, o impacto da utilização dessas ferramentas tem sido claramente definida e estudada, mas ainda existem diferentes aspectos didácticos para ser analisados, como é o caso de os ditados. Neste artigo, portanto, nos concentramos em explorar as possibilidades de ditado para o ensino e aprendizagem da matemática na sala de aula de Educação Infantil e erros cometidos por crianças. Usando uma metodologia quantitativa, os resultados de um estudo com 47 crianças no 2º ano da educação infantil nos levam a

	concluir que: a) os ditados matemáticos formar uma prática docente efectiva ao trabalho de alfabetização oral e matemática, favorecendo a representação simbólica; b) o tipo de erro mais comum ocorre, debido principalmente às dificuldades de formas distintas e tamanhos relativos. **Palavras-chave:** representações simbólicas, ditados matemáticos, educação infantil, erros, a competência matemática

1. Introducción

Cada vez somos más conscientes de la necesidad de una buena educación matemática y de las repercusiones que ésta tiene en la sociedad. A este respecto, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) ya apunta que una enseñanza-aprendizaje desde edades tempranas ayuda a mejorar nuestra competencia matemática (OCDE, 2011), y, por ende, plantea la necesidad de crear mejores currículos que sean capaces de plantear retos matemáticos a niños y niñas de corta edad con el fin de trabajar el pensamiento matemático adecuado a esta etapa educativa.

Como no podía ser de otro modo, este planteamiento no debe hacerse de manera especializada, sino desde la pluralidad que plantea una educación matemática en estas primeras edades (3-6 años), en el que se trabajen todas las áreas de conocimiento: personal, entorno y lenguajes, comunicación y representación (Decreto 122/2007, 2008).

En este artículo planteamos la necesidad de trabajar las matemáticas en Educación Infantil vinculadas a la competencia comunicativa, trabajando la representación oral, la representación simbólica y la representación gráfica a través del dictado como herramienta didáctica. En concreto, describimos las posibilidades de esta herramienta para la enseñanza-aprendizaje de diversos contenidos matemáticos y analizamos los errores que realiza una muestra de 47 alumnos de 4 años de edad.

2. Marco teórico

Uno de los objetivos principales de la investigación en educación matemática infantil es el dar respuesta al problema de cómo abordar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en esta etapa educativa, al igual que determinar las trayectorias de aprendizajes de los alumnos. En este sentido, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2003) propone trabajar los contenidos matemáticos teniendo en cuenta cinco procesos matemáticos (comunes a todas las etapas educativas): resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representaciones. Según Alsina (2012, p.3), estas representaciones deben usarse para organizar, registrar o comunicar ideas matemáticas o modelizar, entre otras.

Ahora bien, para que una representación sea un fiel reflejo del mundo representado, siguiendo a Palmer (1977, citado en Kaput, 1987), ésta debe dar respuesta a las siguientes preguntas: 1) ¿cuál es el mundo representado?; 2) ¿cómo definir la representación del mundo?; 3) ¿qué aspectos del mundo representado están siendo representados?; 4) ¿qué aspectos de la representación del mundo están haciendo la representación?; 5) ¿cómo se define la correspondencia entre los dos mundos?

Por otro lado, Duval (2012) determina que las representaciones semióticas han de satisfacer tres requisitos para llegar a conocer los objetos: 1) la discriminación del contenido por el cual una representación representa un objeto, 2) la existencia de una multiplicidad de representaciones posibles para un mismo objeto, y 3) la necesidad de no confundirlas con lo que ellas representan. Igualmente, Bruner (1984) afirma que se pueden realizar 3 tipos de representación asociadas al pensamiento humano: 1) representación enactiva, a través de la acción; 2) representación icónica, por medio del dibujo; y 3) representación simbólica, utilizando formas simbólicas como el lenguaje.

Este último tipo de representación, la simbólica, puede venir determinada de muy diversos modos. En este sentido, diversos autores han realizado estudios para entender y determinar qué tipo de representaciones son capaces de realizar los niños. Malaguzzi (2011), por ejemplo, destaca la importancia del uso del símbolo en la infancia debido a que éste se transforma en lo que representa y utiliza para desarrollar, madurar y divulgar los conceptos. Este aprendizaje se refiere no solo a la lectoescritura, al número o a la geometría, sino también a otras áreas como la música. Para este autor, la expresión gráfica a través del dibujo permite esclarecer y representar la información. Elia, Gagatsis, Michael, Georgiu y Van den Heuvel-Panhuizen (2011) estudian qué tipo de gestos utilizan los infantes de 5 años de edad para explicar diferentes conceptos acerca de las relaciones espaciales entre objetos. El estudio muestra que los gestos son parte fundamental del proceso de aprendizaje de las matemáticas en edades tempranas. Por otro lado, Deloache (1991) afirma que las representaciones visuales son muy importantes en matemáticas; y, Carruthers y Worthington (2005) analizan qué tipo de marcas hacen los infantes en distintos contextos de aprendizaje.

Si nos ceñimos en el estudio de representaciones de superficies u objetos bidimensionales en edades tempranas, esto es, en el análisis de dibujos realizados por niños y niñas, Sarama y Clements (2009, p.220) afirman que:

> Acorde con la teoría de Piaget, un dibujo es un acto de representación, no de percepción, así que éste ilustra el entendimiento que el niño tiene de las ideas.[…]. Piaget e Inhelder (1967) proporcionan muchos ejemplos donde la habilidad motora del niño no explica que éste sea capaz de dibujar un pino con ramas con ángulos rectos, pero no sea capaz de dibujar un cuadrado.

De este modo, diversas investigaciones han determinado qué tipo de dibujos pueden realizar los niños dependiendo de la edad:

> Los niños de 1 o 2 años pueden reproducir diferentes tipos de garabatos y, tras coordinar inicialmente el movimiento centrado en garabatos, pueden representar un círculo y una línea al final de este período. Para la edad de 3 o 4 años, los niños pueden dibujar círculos mejor formados, círculos disjuntos y el signo más. Igualmente, pueden separar figuras en el espacio y dibujar segmentos en direcciones recíprocas. Con 4 años, los niños pueden dibujar cuadrados, líneas oblicuas y círculos que se intersecan. Con 5 o 6 años, pueden además dibujar líneas oblicuas y curvas que incluyen cambios de dirección.

Por otro lado, en el currículo de Educación Infantil encontramos diversos apartados de los bloques de contenidos que nos revelan la importancia de establecer relaciones entre el lenguaje oral y el pensamiento lógico-matemático a través de las representaciones. Para el caso de la matemática, es fundamental que los niños sean capaces de ver y trabajar diferentes “relaciones que se pueden establecer entre los objetos en función de sus características: comparación, clasificación, gradación” (Decreto 122/2007, p.12); mientras que en el caso del área de la lengua, el niño debe ser capaz de utilizar “la lengua escrita como medio de comunicación, información y disfrute. Interpretar y etiquetar con sus símbolos y nombres fotos, imágenes, etc. Percibiendo diferencias y semejanzas. Interés por adquirir nuevos códigos, recoger datos, analizarlos, organizarlos y utilizarlos” (Decreto 122/2007, p.15).

En este sentido, Castro-Rodríguez y Castro (2016, p. 100) afirman que “las actividades de designación o representación ocupan un lugar importante en los primeros aprendizajes escolares” y, como herramienta didáctica de nexo de unión entre ambos contenidos, en este artículo centraremos nuestra atención en los dictados matemáticos.

Entre los recursos didácticos que se pueden usar en el aula, es frecuente encontrar referencias al dictado, entendido éste como la acción de decir algo con las pausas necesarias o convenientes para que otra persona lo vaya escribiendo (RAE, 2016). Aun así, este recurso normalmente aparece citado en estudios relativos a la enseñanza-aprendizaje de la lengua. Así, Cassany (2004) destaca que “el dictado debe entenderse como un recurso metodológico variado, rico y sugerente, que debe adaptarse a cada situación de aprendizaje”. Según Moya y García (1988) se ha avanzado mucho en lo que a dictados se refiere, los “dictados tradicionales” estaban íntimamente relacionados con la corrección ortográfica, pero actualmente se pretende impulsar el conocimiento auditivo, recuperar los conocimientos previos, estimular la discriminación comprensiva, etc.; siendo éstos trabajos que fomentan la comunicación. Según dichos autores para que un dictado esté bien definido se han de dar, entre otras, las siguientes condiciones:

- Colaboración de la persona que “dicta” y del estudiante (receptor).
- Segmentación del enunciado difundido para que las personas receptoras sean capaces de retener la información poco a poco, para posteriormente evocar el contenido global.

De este modo, hay una serie de habilidades que se fortalecen al trabajar los dictados, principalmente, la escucha, la comprensión y la representación; además, participan varios elementos a la vez, no solamente hay que comprender lo que se oye sino que es necesario representarlo, y para ello es necesario recuperar los conocimientos previos y discurrir sobre ellos de forma casi inmediata.

En cada tipo de dictado varía el enunciado y la finalidad del mismo. Así, por ejemplo, en los dictados musicales los niños y las niñas han de ser capaces de repetir ritmos o fragmentos musicales (González, Castro y de León Barranco, 2014), mientras que en los dictados matemáticos deberán ser capaces de representar distintos objetos matemáticos que satisfagan ciertas propiedades en un orden de dificultad creciente, con base en una determinada trayectoria de aprendizaje. Desde este prisma, se asume que las trayectorias de aprendizaje "[...] describen las metas del aprendizaje, los procesos de pensamiento y aprendizaje de los niños en diferentes niveles, y las actividades de aprendizaje en las que ellos podrían participar" (Clements y Sarama, 2015, p. 12).

Con base en estos planteamientos, en este estudio exploramos las posibilidades del dictado para la enseñanza-aprendizaje de la matemática y los errores que realizan 47 niños y niñas de segundo curso de Educación Infantil.

3. Metodología

Desde un paradigma de investigación positivista, el objetivo principal de nuestra investigación, como se ha indicado, es analizar qué tipo de dificultades tienen los niños y niñas de 4 años cuando el contexto de aprendizaje es un dictado matemático de elementos geométricos bidimensionales conocidos. Acorde a este objetivo, se ha llevado a cabo un estudio cuantitativo, en el que nos hemos centrado en analizar cuáles son los errores más típicos cometidos en las representaciones simbólicas que realizan dependiendo del bloque de contenidos.

El estudio de campo se ha realizado en el Colegio Público "Federico García Lorca" de Valladolid y se han seleccionado dos aulas de segundo de Educación Infantil con 21 niñas y 26 niños de 4 años de edad (una muestra de 47 personas en total).

3.1. Diseño del dictado para segundo de Educación Infantil y procedimiento

En el diseño de los dictados se ha tenido en cuenta: a) que los dictados sean adecuados al nivel de desarrollo de los niños y niñas; b) que la instrucción sea clara (de modo que la maestra encargada de realizar los dictados pueda comunicar claramente qué deben hacer los alumnos y asegurarse de que entiendan lo que se debe representar, repitiéndolo varias veces si fuera necesario); y c) que los distintos apartados del dictado planteen un incremento en la dificultad de la realización de los mismos.

Desde esta perspectiva, basándonos en: 1) los trayectorias de aprendizaje (Sarama y Clements, 2009, 2015), 2) los estándares de aprendizaje de la NCTM y 3) el currículo de infantil, se ha diseñado un dictado matemático para cada edad escolar comprendida entre los 3 y los 6 años, aunque en este artículo analizaremos exclusivamente el dictado diseñado para la edad de 4 años.

Este dictado consta de 4 partes diferenciadas (casillas) para que cada parte se pueda recordar mejor sin depender de las demás (segunda condición de la definición de dictado) y en la que los niños y las niñas deben dibujar las representaciones descritas por la maestra. Con respecto al formato, el conjunto de casillas se ha imprimido en hojas Din A-4, con un tamaño total de 24cm de ancho por 10.5 cm de alto; donde el espacio destinado a representar cada instrucción es de 6 cm de ancho por 9,5 cm de alto. El símbolo que aparece en la parte superior de la hoja es una guía para realizar el "dictado", indicando que hay que escribir de izquierda a derecha y debajo de cada casilla aparecen escritas las representaciones que han de realizar los niños (ver figura 1). En este caso, los conceptos trabajados se corresponden con:

- Formas geométricas (cuadrados, círculos, triángulos).
- Cualidades (colores: rojo y amarillo, azul).
- Cantidades (1, 2, 3, 4).
- Medidas (pequeño).
- Combinación de las anteriores.

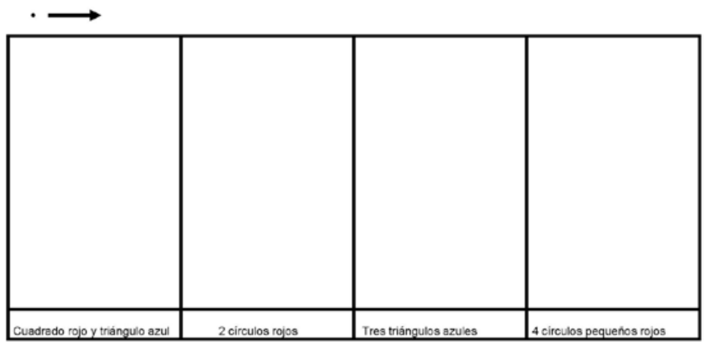


Figura 1. Plantilla de dictado matemático para cuatro años

Como puede apreciarse en la figura 1, los contenidos matemáticos concretos que se pretenden trabajar en cada casilla son los siguientes:

- Casilla 1: cantidades de elementos (1), formas geométricas (cuadrado y triángulo) y cualidades sensoriales (colores rojo y azul).
- Casilla 2: cantidades de elementos (2); formas geométricas (círculo); y cualidades sensoriales (color rojo).
- Casilla 3: cantidades de elementos (3); formas geométricas (triángulo); y cualidades sensoriales (color azul).
- Casilla 4: cantidades de elementos (4); formas geométricas (círculo); medida (tamaño pequeño) y cualidades sensoriales (color rojo).

3.2. Contexto y desarrollo de la actividad de los dictados

La secuenciación docente de la actividad de los dictados sigue el siguiente esquema (figura 2):

Figura 2. Secuenciación de la actividad de aula de los dictados

En nuestro caso, los “dictados” fueron realizados por la maestra de apoyo para Educación Infantil. En pequeños grupos (rincones), se procedió a sentar a todos los niños en sus correspondientes mesas, en las que cada uno tenía una hoja y rotuladores de distintos colores y, como los niños de cuatro años no tienen todavía habilidades suficientes para comprender las consignas escritas, la profesora indicó oralmente lo que tenían que representar en cada casilla.

3.3. Herramienta de análisis

Para ver el tipo de error que cometen los niños y niñas en la realización de los dictados, hemos diseñado una herramienta que tiene en cuenta los errores cometidos según los distintos bloques de contenido de las matemáticas que intervienen en los propios dictados que hemos creado: cualidades, números y operaciones, formas geométricas y medidas. De este modo, para cada estudiante hemos construido una matriz compuesta por 1s y 0s que determine los errores cometidos en cada parte del dictado:

$$m = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{41} & \cdots & m_{44} \end{pmatrix}$$

Así pues, cada matriz consta de 16 parámetros (4 tipos de contenido x 4 casillas), en el que m_{ij} toma un valor binario (ó 1 ó 0) dependiendo de si el error se comete o no y su posición relativa dentro de la matriz nos determina a qué casilla y a qué contenido se corresponde; esto es, $m_{ij}=1$ nos determina un error en la casilla i (i=1,2,3,4) y contenido j (j=1: cualidades, 2=cantidad, 3=formas, 4=tamaño).

4. Resultados

En primer lugar mostramos una colección de dictados realizados por distintos niños, para posteriormente hacer un estudio cuantitativo del tipo de errores que realizan según bloques de contenido matemático.

4.1. Dictados realizados por niños de 4 años

El primer aspecto que cabe destacar es que los niños, al seguir las pautas de la maestra, en las casillas 2 y 4 respectivamente dibujan circunferencias y no dibujan círculos (figuras 3 a 6). Según el principio de la constructividad de Dienes (1990), una posible interpretación de este error es que los niños estructuran los conceptos de forma general, sin tener conciencia de todas las posibles relaciones. En este nivel educativo se realizan muchos juegos con los bloques lógicos de Dienes, como los que aparecen en Kothe (1985). Pensemos que, cuando se trabaja con este material, por ejemplo, aunque se usa el término genérico “círculo”, sabemos que en realidad son cilindros en los que la altura comparada con el radio de la base es muy pequeña. Incluso para los adultos una hoja de papel Din A-4 se ve como un rectángulo aunque, en realidad, es un prisma con una “altura despreciable”.

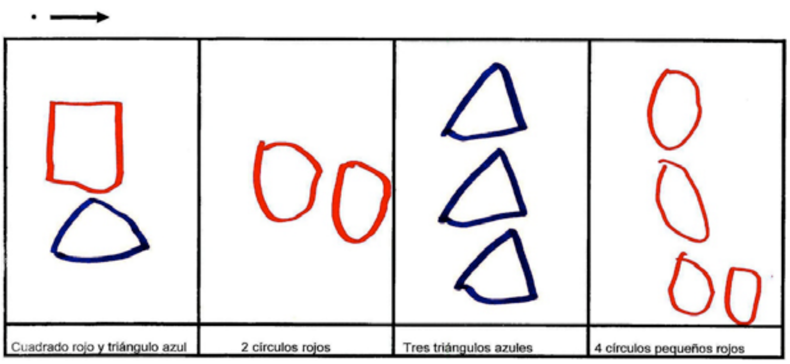


Figura 3. Ejemplo de dictado realizado por infante de 4 años

En la Figura 3 se aprecia, además, que el trazado de las figuras es impreciso. Destacamos que en este caso se ve que los conceptos están asimilados porque para poder hacer una representación sobre papel antes tiene que existir la imagen mental. En la última celdilla los cuatro círculos no parecen pequeños, pero tampoco se comparan con otros…

En la Figura 4 se observa que falta el triángulo en la primera casilla, pero se piensa que o bien no le dio tiempo a dibujarlo o no escuchó bien, ya que en la tercera casilla sí hay triángulos. En la segunda casilla coloca los “círculos concéntricos” y en la última no son todos pequeños como se pide…

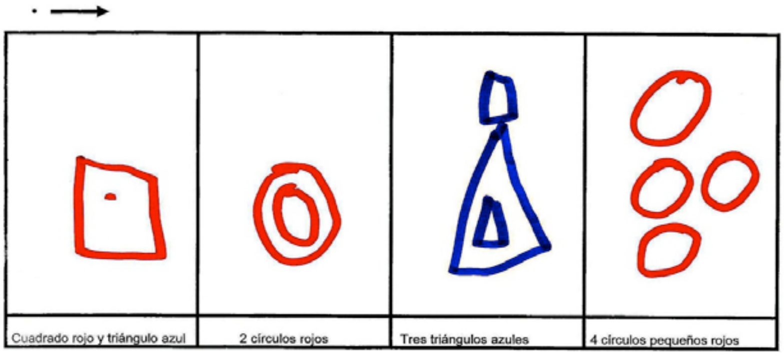


Figura 4. Ejemplo de dictado realizado por infante de 4 años

En la Figura 5 el cuadrado está sin terminar y no ha dibujado el triángulo, las producciones del resto de casillas son correctas (salvo la confusión entre círculo y circunferencia), por lo que los contenidos están asimilados.

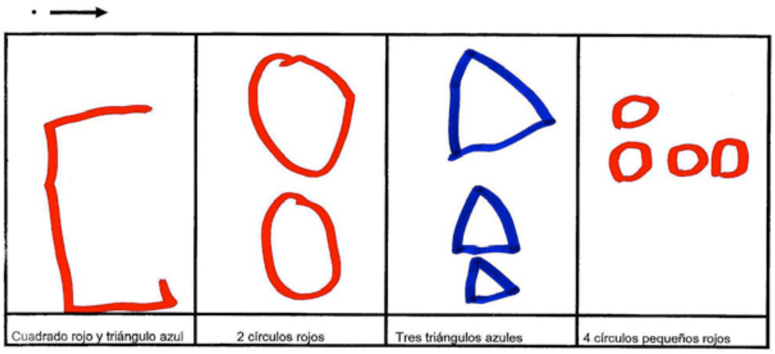


Figura 5. Ejemplo de dictado realizado por infante de 4 años

En la Figura 6 hay una omisión en la primera casilla ya que no dibuja el triángulo azul, probablemente por falta de concentración, puesto que las producciones del resto de casillas son correctas.

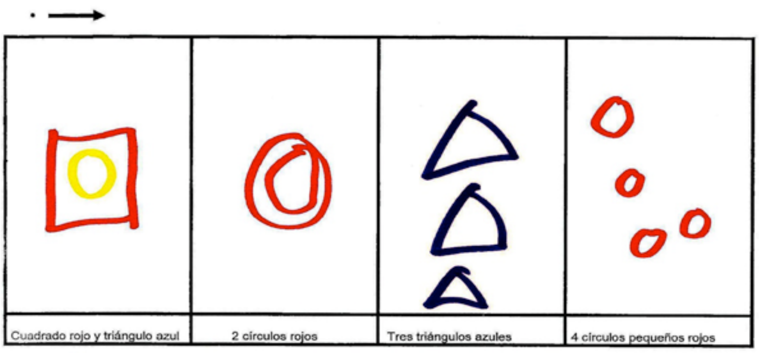


Figura 6. Ejemplo de dictado realizado por infante de 4 años

4.2. Análisis de los errores cometidos por niños y niñas de 4 años

A continuación, se presenta el análisis de las producciones de los alumnos en cada casilla según el género y el tipo de error. Dado que el número de niñas y niños participantes en los dictados es distinto, se muestran los datos obtenidos con base a las dos sub-muestras.

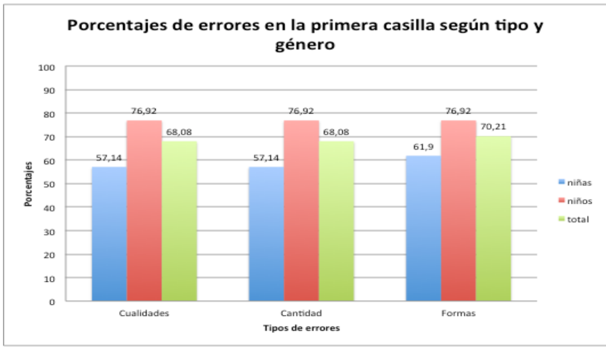
4.2.1. Primera casilla

En el primer ejercicio podemos observar que el número de niñas y niños que cometen errores en cualquiera de las categorías es muy alto si tenemos en cuenta que el total de la muestra es de 47 infantes (ver tabla 1).

	Errores		
	Cualidades	Cantidad	Formas
Niñas	12	12	13
Niños	20	20	20
Total	32	32	33

Tabla 1. Frecuencias absolutas de errores según categoría y género

Si pormenorizamos este estudio y analizamos los porcentajes de error relativos al género, estos datos implican que el porcentaje de errores cometidos por los niños es muy superior al porcentaje de errores que cometen las niñas con respecto a las tres categorías. Los niños cometen errores relativos a la identificación del color de los elementos, de las cantidades solicitadas e incluso en la identificación de las formas de los elementos, dibujando erróneamente o el cuadrado o el triángulo o ambos. En ambas tres categorías se observa que la diferencia porcentual relativa al género es cercana al 20% (Gráfica 1).



Gráfica 1. Porcentajes de errores en la primera casilla relativos al tipo de error y género

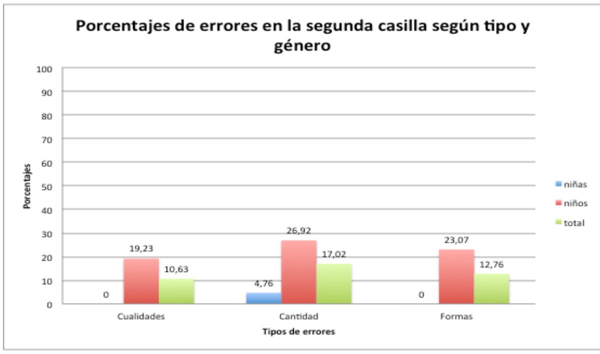
4.2.2. Segunda casilla

Si observamos las frecuencias absolutas de errores cometidos con respecto a las tres categorías que intervienen en el dictado, la diferencia que encontramos con respecto al primer dictado es que el número de errores cometidos por los infantes en las tres categorías disminuye en los dos géneros (ver tabla 2).

Errores			
	Cualidades	Cantidad	Formas
Niñas	0	1	0
Niños	5	7	6
Total	5	8	6

Tabla 2. Frecuencias absolutas de errores según categoría

Aun así, si realizamos el estudio relativo a los dos géneros, las niñas prácticamente no realizan errores de identificación, mientras que los niños se equivocan entorno a un 20% (ver gráfica 2). Este porcentaje se mantiene muy similar al encontrado en el primer dictado. En este caso hay un número de niños que se equivocan en el caso de la cantidad, categoría que se corresponde con el cambio introducido del primer al segundo dictado (se pasa del cardinal 1 al cardinal 2).



Gráfica 2. Porcentajes de errores en la segunda casilla relativos al tipo de error y género

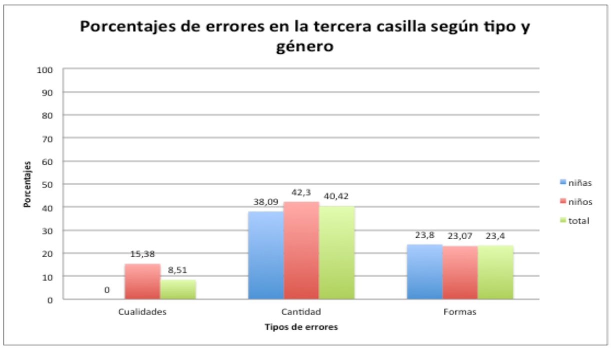
4.2.3 Tercera casilla

En la tercera casilla, de nuevo las frecuencias absolutas nos muestran que los niños se equivocan en mayor número que las niñas y en más tipos de categorías. El cambio del segundo dictado al tercero viene marcado por la introducción del cardinal 3 en lugar del 2 y por un cambio de forma (del cuadrado al triángulo). En este caso la variable cantidad ha sido la que ha causado un mayor número de errores conceptuales, pero se aprecia una disminución en la cantidad de errores cometidos con respecto a la cualidad (ver tabla 3).

Errores			
	Cualidades	Cantidad	Formas
Niñas	0	8	5
Niños	4	11	6
Total	4	19	11

Tabla 3. Frecuencias absolutas de errores según categoría

Si realizamos un estudio relativo a las sub-muestras, vemos que en el caso de las variables cantidad y formas, los porcentajes de error relativos a los géneros muestran resultados muy cercanos, desapareciendo la diferencia del 20% a favor de las niñas existente en los dos ejercicios anteriores (ver gráfica 3).



Gráfica 3. Porcentajes de errores en la tercera casilla relativos al tipo de error y género

4.2.4. Cuarta casilla

En la cuarta y última casilla, se introducen aspectos de los 4 bloques de contenidos, de modo que resulte más complejo para su realización. Como novedad se introduce un concepto relacionado con el tamaño (pequeño) y se cambia el cardinal 3 por el cardinal 4.

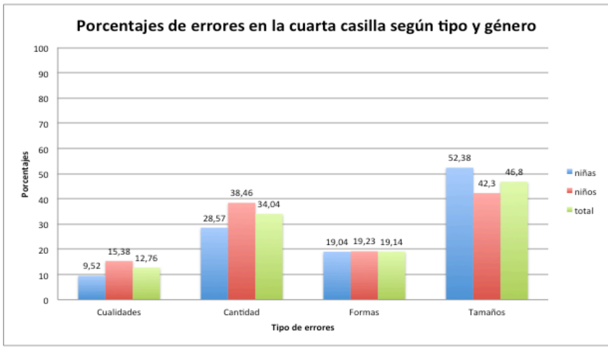
En este caso, para determinar cuándo una representación es errónea respecto al tamaño hemos tenido en cuenta el tamaño de la casilla dada (6cm de ancho x 9.5cm de alto), el porcentaje relativo que ocupa dicha representación con respecto al total del espacio de la casilla y el tamaño de las formas realizadas en las casillas anteriores. Aquellas en las que los círculos ocupan el mismo espacio o más que las figuras de las casillas anteriores, o aquellos círculos que ocupan más de la sexta parte del espacio se han considerado erróneas.

Las frecuencias absolutas nos muestran como la introducción de la variable de medida supone un dilema cognitivo para las y los niños, dando lugar al mayor número de errores registrados. Igualmente, el cambio de la cantidad resulta ser el segundo parámetro que genera más errores en el dictado (ver tabla 4).

	Errores			
	Cualidades	Cantidad	Formas	Tamaños
Niñas	2	6	4	11
Niños	4	10	5	11
Total	6	16	9	22

Tabla 4. Frecuencias absolutas de errores según categoría

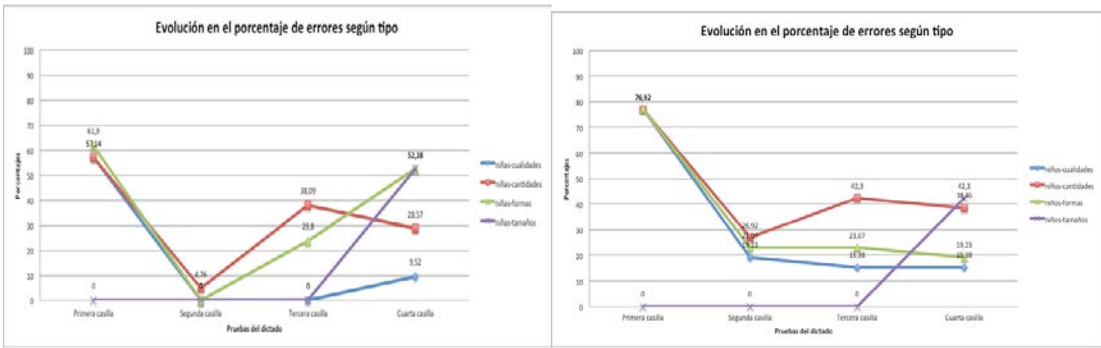
El análisis pormenorizado de los porcentajes de error relativos al género, nos lleva a concluir que los niños y las niñas cometen errores en porcentajes parecidos para el caso de las formas; hay una diferencia de un 7-10% a favor de las niñas en el caso de las cualidades y cantidades (esto es, se equivocan menos niñas que niños), pero en el caso de las formas hay una diferencia de un 10% a favor de los niños (ver gráfica 4).



Gráfica 4. Porcentajes de errores en la cuarta casilla relativos al tipo de error y género

4.2.5. Evolución en el porcentaje del tipo de errores según género

Finalmente, si analizamos los errores realizados por los niños y por las niñas a lo largo del dictado, vemos que con cada cambio los conceptos trabajados en el apartado anterior producen un menor número de errores conceptuales, mientras que los conceptos nuevos introducidos (relativos a algunos de los bloques de contenido) dan lugar a una situación nueva en la que tanto las niñas como los niños se equivocan en mayor número (ver gráfica 5).



Gráfica 5. Evolución en el porcentaje de error relativos al tipo de error y género

5. Consideraciones finales

En este estudio se han explorado las posibilidades de los dictados como herramienta didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades. En concreto, se han analizado los tipos de errores más habituales en un dictado matemático de elementos geométricos bidimensionales conocidos.

Se ha constatado que uno de los errores más usuales de los alumnos de 4 años viene marcado por la dificultad que tienen para distinguir cardinales distintos al número 1. Igualmente se han detectado errores relacionados con propiedades relativas a la medida, como es el caso del concepto “pequeño”. Este tipo de error puede deberse a varias causas: desde la perspectiva de la competencia comunicativa, la falta de atención de algunos alumnos puede haber provocado omisiones en sus producciones; por otro lado, desde la perspectiva de la competencia matemática, probablemente pueden haberse producido algunos errores de razonamiento y de conexiones, al no haber considerado la distinción entre los conceptos “grande” y “pequeño”. En este sentido, debemos reconocer el alcance limitado de este estudio, que se ha caracterizado por la realización de un análisis cuantitativo del tipo de error cometido en las representaciones de los niños; y, por ende, sería conveniente realizar a futuro un estudio más amplio que incorporara un análisis cualitativo pormenorizado de las razones que han llevado a los niños a cometer estos errores, con el fin de determinar en mayor medida el peso relativo de la competencia comunicativa y de la competencia matemática.

Al margen de los errores analizados, otro aspecto relevante de los resultados obtenidos es que podemos constatar que, gracias al diseño usado en los dictados, en cada casilla se repasa un concepto trabajado en la anterior casilla (color, cantidad,..) y se introduce uno (o varios) nuevo(s). Este repaso consigue que los alumnos interioricen con mayor facilidad los conceptos ya trabajados, dándose una gran reducción del número de errores cometidos con respecto al apartado anterior. Por el contrario, el añadir ciertos cambios en el enunciado del dictado, como por ejemplo una nueva forma geométrica, genera cierta sensación de inseguridad aumentando así la complejidad en el aprendizaje; circunstancia que ayuda a los niños y niñas a buscar por sí mismos una respuesta válida a este nuevo reto.

Estas características de los dictados matemáticos hacen que deban ser implementados en procesos dinámicos, vivos, en los que los niños y las niñas estén activos; a la vez que se necesita que el clima del aula sea tranquilo y sosegado por la atención que se precisa. Además de ser una tarea que requiere poco material (se realizan en “papeles en blanco” o con pocas indicaciones); involucra una gran cantidad de habilidades matemáticas (se practica la orientación de izquierda a derecha, formas, cantidades, etc.) para poder trabajar los contenidos de otra forma. De este modo, ejercitando y habituando poco a poco a los alumnos a recoger sobre papel órdenes orales, se facilita el establecimiento de un nexo de unión entre la competencia oral y la competencia escrita; creando el camino correcto para cuando lleguen a Primaria y tengan que realizar dictados tradicionales (Novo, 2015). Por este motivo, concluimos que la actividad de los “dictados matemáticos” bien definida es una buena práctica matemática en el sentido que contemplan (Planas y Alsina, 2009).

A pesar de haber podido determinar algunas bondades de los dictados matemáticos extraídas de esta investigación, en el futuro será necesario llevar a cabo otros estudios que ayuden a clarificar con mayor precisión otros aspectos involucrados en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas usando dictados, como: 1) el tipo de lenguaje usado por los alumnos (representaciones orales); 2) las diferentes representaciones gráficas y simbólicas que realizan en las diferentes edades (3, 4 y 5 años) para poder determinar trayectorias de aprendizaje que se ajusten a sus posibilidades de aplicación; 3) ver si hay algún sesgo de género que caracterice las distintas representaciones, etc. Todo ello, con el propósito que el profesorado disponga de una herramienta eficaz para analizar el grado de adquisición de los conocimientos matemáticos de los alumnos.

Bibliografía

Alsina, À. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia 1*(1), 1-14.

Bruner, J. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje*. Madrid: Alianza.

Carruthers, E. y Worthington, M. (2005). Making sense of mathematical graphics: the development of understanding abstract symbolism. *European Early Childhood Education Research Journal, 13*(1), 57-79.

Cassany, D. (2004). El dictado como tarea comunicativa. *Tabula Rasa, 002*, 229-250.

Castro-Rodríguez, E. y Castro E. (2016). Pensamiento lógico- matemático. En E. Castro Martínez y E. Castro Martínez (Coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (p. 87-108). Madrid: Ediciones Pirámide.

Clements, D., y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Gran Bretaña: Learning Tools LLC.

Decreto 122/2007. (2008). *Currículo del segundo ciclo de la Educación Infantil en la Comunidad de Castilla y León.* Recuperado el 12 de diciembre de 2016 de: http://www.educa.jcyl.es/es/curriculo/curriculo-segundo-ciclo-educacion-infantil.ficheros/110211-curriculo%20infantil%5B1%5D.pdf

DeLoache, J. S. (1991). Symbolic functioning in very young children: understanding of picture and models. *Child Development, 62*(4), 736-752.

Dictado [RAE] (2016). En *Diccionario de la lengua española* [RAE]. Recuperado el 11 de diciembre de 2016 de http://dle.rae.es/?id=Dh6327Y

Dienes, Z. P. (1990). *La construcción de las matemáticas*. Barcelona: Vivens-Vives.

Duval, R. (2012). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales. Lima. Pontificia Universidad Católica del Perú*, 14-17.

Elia, I., Gagatsis, A., Michael, P., Georgiu, A., y Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2011). Kindergartners' use of gestures in the generation and communication of spatial thinking. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.). *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1842-1851). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

González, M. B., Castro, P. L., y de León Barranco, L. P. (2014). Los alumnos ante el dictado musical. Las TIC como aliadas para mejorar las experiencias. *DIM: Didáctica, Innovación y Multimedia, 28,* 1-14.

Kaput, J. (1987). Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics. En C. Javier (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kothe, S. (1985). *Cómo utilizar los bloques lógicos de Z. P. Dienes*. Barcelona: Teide.

Malaguzzi, L. (2011). *La educación infantil en Reggio Emilia*. Barcelona. Octaedro-Rosa Sensat.

Moya, J. A. y García, E. J. (1998). El dictado y la comprensión auditiva: un intento de complementariedad. En Asociación para la Enseñanza del Español como Lengua Extranjera (Ed.), *El Español como lengua extranjera: aspectos generales: edición facsimilar de las actas de las primeras Jornadas Pedagógicas y del Primer Congreso Nacional de ASELE (Asociación para la Enseñanza del Español como Lengua Extranjera)* (pp 204-210). Málaga: Asociación para la Enseñanza del Español como Lengua Extranjera.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Novo, M. L. (2015). *Análisis de la educación matemática infantil desde la perspectiva del conexionismo*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática.

Planas, N., y Alsina, À. (2009). *Educación matemática y buenas prácticas: infantil, primaria, secundaria y educación superior* (coords.). Barcelona. Graó.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE] (2011). *Pisa in Focus 2011/1*. Recuperado el 11 de noviembre de 2016 de http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisainfocus/PiF1_esp_revised.pdf

Sarama, J., y Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. Nueva York, NY: Routledge.

Autores:

Berciano, Ainhoa: Profesora del Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea. Sus líneas de investigación se centran en la enseñanza-aprendizaje de la matemática en Educación infantil y primaria y en la formación de profesorado. Email: ainhoa.berciano@ehu.eus

Novo, María Luisa: Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Valladolid. Su interés mayor es la investigación en Educación Matemática Infantil y en la formación del profesorado en este nivel educativo y en Educación Primaria. Email: marialuisa.novo@uva.es

Alsina, Ángel: Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina. Email: angel.alsina@udg.edu

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 217-230

Mandala: Otra forma de abordar conceptos geométricos

Marisa Reid, Rosana Botta Gioda, Fabio Prieto

Fecha de recepción: 2016-12-26
Fecha de aceptación: 2017-03-01

Resumen	Se presenta una experiencia en el marco del proyecto "Enseñanza de la Geometría con utilización de distintos softwares" desarrollada en dos instituciones educativas de Santa Rosa, La Pampa, Argentina. Esta propuesta pedagógica que permite a los estudiantes interactuar con el software GeoGebra, favorece el desarrollo de conceptos matemáticos, permitiendo a través de visualizaciones y experimentaciones, descubrir regularidades y comprobar propiedades. Uno de los objetivos de la propuesta es recuperar el trazado de mandalas, como una importante actividad de enseñanza, no sólo desde el punto de vista geométrico, sino también de desarrollo de la creatividad. **Palabras clave**: Geometría – GeoGebra - Mandala
Abstract	An experience is presented in the framework of the project "Teaching Geometry using different softwares" developed in two educational institutions of Santa Rosa, La Pampa, Argentina. This pedagogical proposal that allows students to interact with the software GeoGebra, favors the development of mathematical concepts, allowing through visualizations and experimentations, to discover regularities and to verify properties.One of the aims of the proposal is to recover the tracing of mandalas, as an important teaching activity, not only from the geometric point of view, but also the development of creativity. **Keywords**: Geometry – GeoGebra – Mandala
Resumo	Apresenta-se neste artigo uma experiência no âmbito do projeto "Ensino da Geometria com uso de distintos softwares" a qual foi desenvolvida em duas instituições de ensino em Santa Rosa, La Pampa, Argentina. Esta abordagem pedagógica que permite aos estudantes interagirem com o software GeoGebra, favorece o desenvolvimento de conceitos matemáticos, permitindo por meio de visualizações e experimentações, descobrirem regularidades e comprovarem propriedades. Um dos objectivos da proposta é recuperar o desenho de mandalas, como uma atividade de ensino importante, não só do ponto de vista geométrico, mas também de desenvolvimento da criatividade. **Palavras-chave:** Geometria - GeoGebra – Mandala

1. Introducción

> "Enseñar y aprender Matemáticas puede y debe ser una experiencia feliz. Curiosamente casi nunca se cita a la felicidad dentro de los objetivos educativos pero es bastante evidente que sólo podremos hablar de una labor docente bien hecha cuando todos alcancemos un grado de felicidad satisfactorio." (Claudi Alsina,1991)

Entre los años 2000 y 2010 es notable el proceso de renovación temática y pedagógica en las orientaciones curriculares y los marcos regulatorios de carácter nacional en el que se enmarcan las políticas de enseñanza vigentes para el sistema educativo argentino. La matemática, al igual que otras disciplinas escolares no es ajena a esta transformación.

En el marco del desarrollo de políticas específicas para la escuela secundaria en la Argentina, la matemática, al igual que otras disciplinas escolares, se ve interpelada en la necesidad de repensar sobre sus fundamentos teórico-prácticos más adecuados para atender al propósito de democratización e inclusión escolar presentes en la Ley de Educación Nacional 26.206.

Nos interesa resaltar que las regulaciones estatales, habilitan orientaciones innovadoras para la organización pedagógica con la idea de modificar la estructura escolar rígida. Puntualmente en la Res. N° 93/09 del CFE (Consejo Federal de Educación) se expresa que, todas las escuelas secundarias se abocarán a la tarea de construir propuestas escolares que sostengan la presencia de distintos rasgos organizativos. Se ofrecerán propuestas de enseñanza variadas, en las que el aprendizaje se produzca en distintos espacios y tiempos, con diversos temas y abordajes donde los estudiantes participen de la experiencia escolar con nuevos sentidos, con otras formas, con esfuerzo y creatividad.

La experiencia que presentamos, teniendo como base los lineamientos descriptos, surge a partir del proyecto "Enseñanza de la Geometría con utilización de distintos softwares" y fue desarrollada con alumnos de entre 12 y 14 años aproximadamente que en ese momento cursaban 2º año del colegio secundario "9 de julio" y 1° año del colegio secundario "Domingo Savio". En la propuesta también participaron los docentes responsables de los cursos mencionados, ambos pertenecientes a instituciones educativas localizadas en la ciudad de Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

Uno de los objetivos de la propuesta es recuperar el trazado de mándalas, como una importante actividad de enseñanza, no sólo desde el punto de vista geométrico, sino también en el desarrollo de la percepción y creatividad.

Se incorporan las nuevas tecnologías al proceso de enseñanza de modo que resulten en una aproximación innovadora, rica y contemporánea en relación al conocimiento, y no un mero cambio de soporte de contenidos y formas tradicionales de enseñanza.

La disponibilidad de computadoras en los colegios secundarios, a través del Programa Conectar Igualdad[1], brinda la posibilidad de dotar de sentido a los conocimientos proponiendo nuevas prácticas de enseñanza. Si bien los alumnos pueden tener cierto manejo de la tecnología, el contenido, la planificación y la organización crítica del contenido es tarea del docente.

Producto de reflexiones y acciones sobre la práctica misma de la enseñanza de la Geometría en los primeros años de la escuela secundaria se motivó a los futuros docentes que cursan la asignatura Práctica Educativa II del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam, para iniciarlos en la planificación, diseño y producción, de actividades con uso de tecnología y así apoyar el acto didáctico en relación a contenidos geométricos. Para ello los alumnos de profesorado trabajaron conjuntamente con los docentes responsables de los cursos de los colegios en donde se realizaría la experiencia.

2. Acerca del diseño de las actividades

Cuando realizamos una planificación, pueden venir a nuestra mente una serie de términos relacionados: proyectos, programas, planes, contenidos, cronogramas, actividades y evaluaciones. Debemos tomar decisiones sobre estas cuestiones para organizar la propuesta a partir de los fundamentos, los objetivos, la metodología, los materiales y la evaluación. Podemos agregarles a estas decisiones el incluir o no las TIC. Incorporar las TIC en los procesos educativos implica pensar previamente el para qué incluirlas. Es decir, que respondan al propósito por el cual las estamos incluyendo; que sean realmente relevantes y que sumen valor a la propuesta pedagógica (que sean un “medio para” y no un fin en sí mismas). En el caso de la asignatura matemática, estamos convencidos de que la incorporación de la tecnología contribuye en la formación de habilidades como la de observar, conjeturar, experimentar, favorecen la formación del pensamiento crítico y la resolución de problemas.

Los contenidos matemáticos a desarrollar a través de la propuesta se encuentran en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP) en el eje “EN RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA Y LA MEDIDA” de 1°/2° año y son:

El análisis y construcción de figuras, argumentando en base a propiedades, en situaciones problemáticas que requieran:

-determinar puntos que cumplan condiciones referidas a distancias y construir circunferencias, círculos, mediatrices y bisectrices como lugares geométricos;

-explorar diferentes construcciones de triángulos y argumentar sobre condiciones necesarias y suficientes para su congruencia;

-construir polígonos utilizando regla no graduada y compás a partir de diferentes informaciones, y justificar los procedimientos utilizados en base a los datos y/o a las propiedades de las figuras;

---

[1] El Programa Conectar Igualdad, en Argentina desde el 2010, surge como una política destinada a favorecer la inclusión social y educativa a partir de acciones que aseguren el acceso y promuevan el uso de las TIC (Tecnologías de la información y la comunicación) en las escuelas.

-analizar afirmaciones acerca de propiedades de las figuras y argumentar sobre su validez, reconociendo los límites de las pruebas empíricas;

Distintas experiencias de aula nos han hecho reflexionar profundamente sobre uno de los múltiples roles que cumplimos los docentes en el transitar de nuestras vidas profesionales. Sabemos que la motivación es un proceso cognitivo interno a cada individuo, pero cuando el docente estimula, motiva, impulsa al estudiante; dándole inspiración, seguridad y confianza ellos dejan aflorar todas sus potencialidades, destrezas y habilidades.

De acuerdo con Alencar (2007), todavía la educación privilegia, la enseñanza direccionada a la memorización y reproducción del conocimiento, descuidando el pensamiento crítico, flexible y original. El espacio reservado para preguntas que posibilitan múltiples respuestas, para la exploración de nuevos abordajes en el proceso de resolución de problemas y para el uso de otras formas de abordar el contenido programático, es muy reducido, si no inexistente en la gran mayoría de las escuelas.

Alencar y Fleith (2003) señalan que para crear un clima favorable para el desarrollo de la creatividad en el aula, es necesario adoptar varias estrategias que permiten a los estudiantes fortalecer rasgos de la personalidad, tales como confianza en sí mismo, curiosidad, persistencia, pensamiento independiente, valor para explorar situaciones nuevas y tratar con lo desconocido. También es importante ayudar a los estudiantes a deshacerse de los bloqueos emocionales, como el miedo al fracaso, miedo a ser criticado, sentimientos de inferioridad e inseguridad; implementando actividades que ofrecen retos y oportunidades de actuaciones creativas.

Según Breda, Serrazina, Menezes, Sousa, y Oliveira, (2011), "la tecnología amplía y enriquece la calidad de las actividades de investigación, cuando se proporcionan medios para visualizar nociones geométricas en diferentes perspectivas" (p.21). El uso de la tecnología, en particular computadoras y ambientes de Geometría Dinámica promueven el aprendizaje activo y significativo, proporcionando espacios de enseñanza y aprendizaje motivadores e innovadores en la medida que posibilitan la construcción y manipulación dinámica de los objetos. Esto significa abordar la enseñanza de la geometría de una manera completamente diferente, en un "ambiente de aprendizaje que favorece el desarrollo de otros tipos de razonamiento, porque hay una oportunidad de trabajar en Geometría de una manera dinámica que permite nuevos enfoques para nuevos problemas (Ponte et al., 2007).

El propósito principal es que los estudiantes desarrollen una habilidad matemática creciente que les permita resolver los diferentes problemas que se enfrentan dentro y fuera de la escuela. La innovación y la creatividad juegan un papel importante, siendo una característica dinámica que los estudiantes deben desarrollar. La creatividad comienza con la curiosidad y compromete a los estudiantes en tareas de exploración y experimentación en las que puedan poner en juego su imaginación y originalidad (Barbeau y Taylor, 2005).

Siendo las acciones que realiza el docente de vital importancia, no se puede desconocer que son el punto de partida para avanzar en formas más significativas que lleven al aprendizaje de la geometría a visualizar y representar las figuras desde diferentes perspectivas y anticipar cambios en ellas.

Por todo lo expuesto anteriormente y con el propósito de continuar con la propuesta de mejora hacia la Enseñanza-Aprendizaje de la Geometría en la Educación Secundaria, donde se detectan dificultades y limitaciones para su abordaje, se realizó esta experiencia.

3. Nuestra experiencia

Un año antes de iniciada la experiencia con mandalas que nos proponemos abordar, se presentó y desarrolló una propuesta de mejora, que también estuvo dirigida hacia la enseñanza de la Geometría, como refuerzo y motivación de la enseñanza en el aula con la integración de tecnología como recurso en el desarrollo de actividades para la enseñanza de la Geometría, en los dos cursos de los colegios secundarios.

Se inició a los docentes en la realización de actividades apoyados con el software GeoGebra, para abordar particularmente nociones elementales de Geometría, que permitió motivar y/o reforzar los aprendizajes trabajados en el aula, a la vez que se trabajó en forma colaborativa entre docente de aula y futuros docentes para la elaboración y aplicación de los materiales producidos.

Entre las diferentes actividades que trabajamos, en esta instancia, podemos señalar:

1. Manejo del software GeoGebra: se desarrolló a partir de un tutorial sobre el uso del GeoGebra, el objetivo era que los estudiantes conocieran y exploraran los comandos y herramientas básicas del programa, como apoyo en el aprendizaje de la Geometría.
2. Uso de Rompecabezas: en esta etapa se implementó el uso del software para promover el desarrollo de la visualización y el razonamiento en las construcciones geométricas. Se propuso una secuencia de actividades con rompecabezas de dos, tres y siete piezas que permitían a los estudiantes explorar y manipular directamente a los objetos matemáticos.

Se puso énfasis en la importancia de hacer inicialmente un acercamiento a formas de exploración que permitan establecer de donde surgen las figuras que lo componen, para posteriormente proponer diferentes formas que se pueden crear a partir del uso de las mismas.

A parte de ser un entretenimiento, el *Tangram* (rompecabezas que consta de siete piezas) es un recurso muy útil para introducir conceptos de geometría plana, y para fomentar el desarrollo de capacidades psicomotrices e intelectuales de los estudiantes, ya que permite asociar de forma lúdica la manipulación concreta de materiales con la formación de ideas abstractas.

Con el *Tangram* se trabajan las traslaciones y rotaciones, las formas y la orientación en el espacio.

En este ambiente lúdico los alumnos lograron dibujar, identificar, relacionar, comparar, construir y analizar figuras y cuerpos geométricos a la vez que se relacionaban estos conceptos con otros contenidos: del área de matemática (operaciones básicas).

Nos propusimos fomentar un espacio cultural e interdisciplinar, dinámico y atractivo; un espacio de reflexión adecuado que conduzca a una mejora de la convivencia escolar a través de la cultura, el arte y las relaciones interpersonales.

Planteamos la incorporación de las tecnologías al proceso de enseñanza de modo que resulte una aproximación innovadora, rica y contemporánea en relación al conocimiento de la geometría, y no un mero cambio de soporte de contenidos y formas tradicionales de enseñanza. En este marco, un ejemplo de las actividades diseñadas fue:

Actividad: Juan, un fabricante de collares para mascotas quiere incluir adornos geométricos a los mismos. Dispone de tres triángulos uno de piel sintética, otro de vinílico y otro de tejido peruano. Realiza con el GeoGebra los tres triángulos que dispone Juan, como se muestra en la Figura 1.

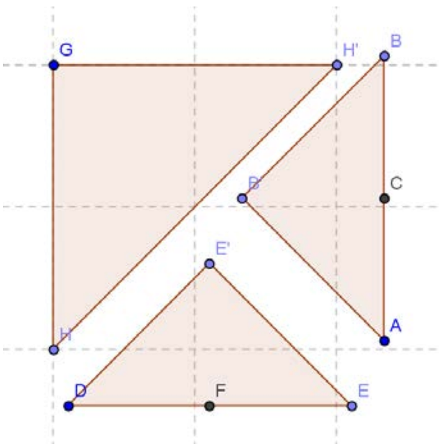


Figura 1. Construcción con GeoGebra de los tres triángulos propuestos por Juan

a) Intenta en GeoGebra distintas formas de ubicar los elementos decorativos elegidos (triángulos) para obtener distintos diseños (evitando superposiciones y en lo posible que resulten formas geométricas).

b) Si deseas pegar en todo el contorno de tu diseño un cordón rojo, ¿cómo calcularías la cantidad que necesitas?

c) Calcula el precio de tu collar, sabiendo que el metro cuadrado de cada uno de los materiales es $43.50, y el metro de cordón es $ 5.60.

3.1. El trabajo con mandalas

Desde el espacio concedido a la matemática y para continuar con la propuesta trabajada el año anterior, nos focalizamos en el trabajo con mandalas haciendo uso de las TIC.

La palabra mandala es de origen hindú y significa "círculo mágico". El diseño es una estructura geométrica que divide el espacio en porciones simétricas, constituida básicamente por círculos, triángulos, cuadrados que se inscriben unos en otros o se entrelazan formando un gran círculo que contiene varias imágenes. (Fioravanti, 2003).

En Geometría, las transformaciones geométricas merecen un papel central que también aboga por un enfoque diferente que implica una nueva comprensión sobre isometrías.

El estudio de las transformaciones isométricas es fundamental para el tratamiento de la matemática, dado que “las isometrías se pueden emplear como elemento unificador, debido a que la geometría euclídea plana consiste en el estudio de las figuras del plano, que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones que se genera por las traslaciones y rotaciones en el plano (Boyer, 1996)”.

El aspecto dinámico de las isometrías propicia el uso de tecnologías permitiendo crear instancias donde los estudiantes puedan observar, interactuar y manipular dicho dinamismo.

Los mandalas, generalmente son círculos concéntricos y polígonos regulares en cuyas intersecciones se forman hermosas figuras calidoscópicas. Son imágenes para contemplar.

El aprendizaje de la geometría con GeoGebra, es muy diferente del aprendizaje sólo a través de los instrumentos tradicionales en entornos de "papel y lápiz". El software libera a los estudiantes de tareas mecánicas y rutinarias, como los procedimientos de medición, cálculo y construcción, dejando espacio para un trabajo más activo y fructífero en Geometría, sin perder la rigurosidad matemática que subyace en cada secuencia de comandos.

La historia nos muestra que los mandalas, de un modo u otro, siempre estuvieron presentes en las producciones humanas. Esto en sí mismo debería asegurar su espacio en la educación. Nuestra propuesta, desde la matemática, es utilizar la base geométrica subyacente en la construcción de tales formas.

Hoy buscamos nuevas miradas y nuevas lecturas a las estructuras geométricas clásicas, que siguen siendo las mismas, pero se busca dar énfasis en los principios fundamentales que organizan la forma, como las simetrías, y no en el trazado en sí, porque las tecnologías facilitan en gran medida este proceso.

La propuesta se centró entonces, en las estrechas relaciones que la Geometría mantiene con el campo de la cultura artística, la gran diversidad y complejidad de problemas en las que una y otro se atraviesan, y que favorecen la construcción del sentido de los conocimientos geométricos.

Desde este punto de vista, el problema se torna interdisciplinario, siendo las proporciones y las isometrías temas matemáticos que ingresan al campo del Arte y del Diseño. La comprensión de tópicos interdisciplinarios, esto es, atravesados por más de una disciplina, supone un abordaje intencional e integrado, a partir de las herramientas propias de cada una de ellas (Gardner, 2000). En este caso en particular, el problema se abordó desde la Geometría y desde el Diseño.

Los objetivos de la propuesta fueron:

1. Desarrollar aptitudes creativas que favorezcan la concentración y el autocontrol.
2. Respetar y valorar las opiniones de otros.
3. Proporcionar un continuo apoyo al programa de enseñanza- aprendizaje e impulsar la innovación educativa.
4. Implicar al alumnado en la creación de sus propios materiales de trabajo.
5. Utilizar las TIC, en este caso el programa GeoGebra, en la enseñanza de temas de Geometría.
6. Incorporar el mandala como herramienta para la enseñanza.
7. Favorecer en los estudiantes distintas formas de pensamiento matemático.

A continuación detallamos las actividades más representativas que se llevaron a cabo:

- ✓ Los estudiantes presentaron a sus compañeros las producciones realizadas, es decir, mostraron a través de imágenes el diseño de mandalas. Describieron y reconocieron las transformaciones isométricas utilizadas en la construcción de los mismos.
- ✓ Eligieron tres mandalas para pintarlos en la pared del patio del colegio o del aula.

3.1.1. Actividades propuestas para trabajar en el aula

Actividad 1: Te proponemos que observes el siguiente mandala y analices qué figuras geométricas lo forman? ¿hay ejes de simetría en la Figura 2?

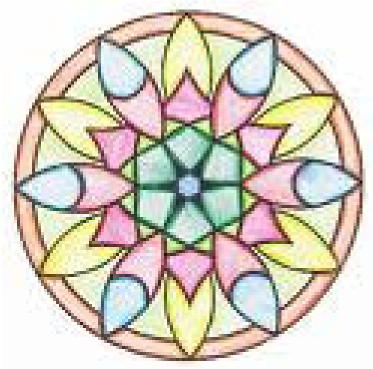


Figura 2. Mandala

Como docentes de Matemática tenemos la responsabilidad de proponer a nuestros estudiantes situaciones de aprendizaje centradas en el análisis de propiedades y en la deducción de las mismas. En estas situaciones los estudiantes tienen la oportunidad de descubrir las propiedades geométricas y de evidenciar su validez en contextos extra-matemáticos e intra-matemáticos.

Animar a los estudiantes a compartir su observación del proceso creativo. Guiarlos a utilizar términos matemáticos, como el círculo, formas, polígonos, y la simetría.

Actividad 2: Reproducir el siguiente mandala mostrado en la Figura 3:

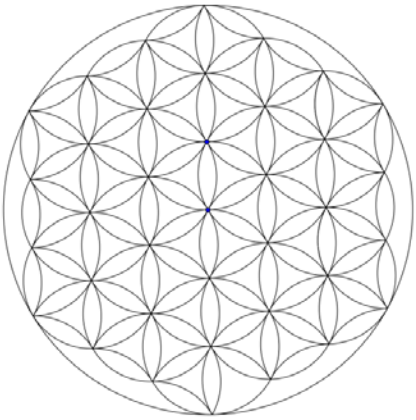


Figura 3. Mandala para construir con GeoGebra

Actividad Final

Diseñar un mandala con el software GeoGebra. Escribir un informe donde se detallen los conceptos de transformaciones isométricas utilizados en su construcción.

Se planteó a los alumnos esta actividad desde la Matemática y Educación Artística – Artes Visuales con el fin de que transitaran por experiencias orientadas desde las artes visuales, específicamente pintando murales con los mandalas realizados en las clases de Matemática bajo una dinámica de trabajo en donde se conjugaran aspectos de la convivencia, el arte y las relaciones con la comunidad.

Desde el punto de vista artístico, la expresión artística en las instituciones educativas muchas veces es la más difícil de valorar como un conocimiento más a ser aprehendido y ejercitado, y este se convierte en un desafío. Cada estudiante se conecta con sus posibilidades creativas y con las necesidades del grupo, evitando la copia de modelos, estereotipos y trabajando con ideas propias. Se busca que el producto armonice con su contexto. Así, se transforma el espacio por medio del color y el diseño con criterio estético y funcional.

En las fotos de la Figura 4 puede apreciarse uno de los mandalas construido en la clase de matemática y pintado en el espacio de artística en una de las aulas de uno de los colegios.

Figura 4. Mandala realizado por un grupo de alumnos

La realización de actividades relacionadas con mandalas además de proporcionar una rica experiencia estética, puede ser una oportunidad para discutir y trabajar con una serie de conceptos geométricos.

Tratándose de una organización regular de elementos geométricos en función de la circunferencia y su centro, un concepto básico que se puede señalar es la rotación. Sin embargo, la simetría rotacional se caracteriza por una transformación geométrica en la que una figura se mueve alrededor de un punto según un ángulo definido. La repetición continua de la transformada según el mismo ángulo va estableciendo una organización espacial de tipo radial que conduce inevitablemente al concepto del ángulo central.

Este abordaje diferente a través de GeoGebra les ayuda a comprender que lo que importa es que el tamaño y la forma de los objetos son idénticos, lo que cambia es la orientación.

Algunas de las dificultades que tuvieron ciertos grupos de estudiantes en este trabajo con mandalas fueron:

- imaginarse como quedaría la figura cuando la línea de reflexión no era vertical u horizontal.
- al trabajar con rotaciones, tenían problemas para determinar el ángulo de rotación, es decir, elegir la amplitud para el ángulo de rotación de modo que gire hasta llegar de nuevo a superponerse con la figura que tenían en un principio.
- identificar la orientación o la posición de la forma después de que se ha reflejado o girado.

Estas actividades de exploración libre fueron pensadas para ayudar a los estudiantes a construir habilidades de visualización.

El profesor debe animar a sus alumnos a reflexionar sobre sus experiencias, ellos necesitan ser estimulados para predecir primero y luego comprobar sus predicciones.

El uso del software permite múltiples enfoques y soluciones. La retroalimentación visual dada por la computadora ayudó a los estudiantes a conjeturar, probar y generalizar propiedades de las rotaciones, traslaciones y simetrías.

La tecnología propició la interacción entre los estudiantes, logrando promover el intercambio y la colaboración entre los diferentes grupos.

Todos los estudiantes manifestaron que este tipo de actividades alentaba el trabajo en equipo y ayudó a que la geometría sea menos compleja y más divertida.

Al comenzar el trabajo en el aula, pedían ayuda en cuanto a lo que tenían que hacer, pero a medida que progresaron en las actividades, pudo observarse que disminuyeron los pedidos, logrando cierta autonomía; además el vocabulario de los alumnos se vuelve más sofisticado, incorporando terminología matemática específica.

Podemos decir que una de las dificultades con las que se encontró el docente fue el uso del tiempo. Debido a que los alumnos no están habituados a realizar este tipo de actividades, ocurrió en algunos casos que cuando se terminaban de disponer a trabajar, y entendían las consignas, se les terminaba el horario de clase.

En esta experiencia desempeña un papel decisivo la construcción de un ambiente áulico que permitió actividades verdaderamente exploratorias con tareas abiertas y donde los estudiantes se sentían "seguros" de hacer las cosas de una manera diferente. Apoyando esta idea, varios estudiantes manifestaron que "perdieron su miedo de cometer errores", dándose cuenta de que las estrategias de ensayo y error eran parte del proceso.

Los estudiantes activamente compartieron sus conocimientos y hallazgos. Los momentos de debate parecían de motivación y, en consecuencia, nuevas estrategias y diseños surgieron.

En general, todos los grupos fueron muy receptivos a las sugerencias de sus compañeros y el profesor y con frecuencia cambiaban sus procesos y estrategias, mostrando flexibilidad y en consecuencia, más "construcciones" originales surgieron progresivamente.

Uno de los grupos expresó que observar el trabajo de sus pares los motivó a ser más creativos y comprometerse para mejorar su trabajo.

Observar y analizar el proceso de interacción del estudiante con las actividades planificadas, nos proporciona argumentos para identificar que las mismas permiten una mayor comprensión de los conceptos matemáticos.

Compartir este tipo de experiencias con otros docentes e intercambiar opiniones nos permite reflexionar para reformular las propuestas y continuar en la búsqueda de distintas alternativas para plantear cambios en la enseñanza de la matemática.

4. Comentarios Finales

En el ámbito escolar el uso de dispositivos tales como lápiz, cuaderno, pizarrón, regla, compás, transportador, escuadra, etc. produce transformaciones en la actividad escolar y en el tipo de actividades que se proponen. En el análisis de la propuesta realizada se ha puesto en evidencia que la incorporación de la tecnología permite potenciar el abordaje pedagógico de las transformaciones geométricas.

Acordamos con Coelho, A., & Cabrita, I. (2015) en que la creatividad se reconoce hoy en día como una habilidad básica, transversal a todas las áreas del conocimiento, requeridas para este siglo. Sin embargo, el sistema educativo falla en promover su desarrollo. Por otro lado, un creciente reconocimiento de la importancia de la enseñanza de la geometría, requiere nuevos enfoques basados en tareas matemáticamente significativas.

El propiciar condiciones para el desarrollo de habilidades creativas ha sido destacado por profesionales y organizaciones de distintas áreas como un camino necesario para atender a las demandas de una sociedad altamente competitiva y en permanente transformación. Se considera que el conocimiento, aliado a la capacidad de crear, ayudan a los individuos a identificar problemas apropiados y a solucionarlos de manera adecuada, pudiendo favorecer la identificación de oportunidades que pueden pasar desapercibidas a personas desprovistas de una base sólida de conocimiento.

El pensamiento creativo es una de las habilidades básicas, transversales a todas las áreas del conocimiento, necesario para este siglo. La naturaleza desafiante de las tareas, basadas en la formulación y resolución de problemas, la exploración y la investigación, puede promover el pensamiento creativo (Vale et al., 2012). Para ello el docente debe promover un ambiente que permita actividades verdaderamente exploratorias con tareas abiertas.

Es relevante entender a la clase como un ambiente especial en donde intervienen un conjunto de varios factores que determinan las relaciones que en estos espacios se establecen. El clima de la clase, las percepciones y expectativas mutuas, las emociones y los sentimientos, cuestiones a veces olvidadas en las aulas parecen ser también determinantes a la hora de expresarse, participar y exponer ideas, pensamientos y producciones alternativas.

Los alumnos, de profesorado, manifiestan que las clases centradas en la repetición de contenidos, en una única fuente de información y en la exposición del docente no favorecen el despliegue de la creatividad. En esta oportunidad, las interacciones entre compañeros, el trabajo con mandalas y la discusión sobre las distintas transformaciones utilizadas para su construcción son factores que promueven la creatividad en el contexto áulico.

Cabe destacar que en el desarrollo de la experiencia prevaleció la actividad del estudiante sobre las explicaciones docentes. Si bien éstas aparecen, cobra protagonismo la actividad individual, de grupo y de debate o presentación de resultados

Uno de los cambios más significativos es el relacionado con la introducción temprana de transformaciones isométricas, con un enfoque especial en el concepto de simetría. En este enfoque de la geometría las tareas proporcionan oportunidades para observar, analizar, relacionar y construir figuras geométricas y trabajar con ellos.

Bibliografía

Alencar, E. M. L. S. (2007). *O papel da escola na estimulação do talento criativo*. En D. S. Fleith & E. M. L. S. Alencar (Eds.), Desenvolvimento de talentos e altas habilidades: orientação a pais e professores (pp. 151-162). Porto Alegre, RS: ArtMed.

Alencar, E. M. L. S., Fleith, D. S. (2003). *Criatividade: múltiplas perspectivas*. Brasilia, DF: Editora da Universidade de Brasília.

Alsina, C. (1991). *Los 90 son nuestros. Ideas didácticas para una matemática feliz*. Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Paris: Unesco.

Barbeau, E.,Taylor, P.J. (2009). *The 16th ICMI Study. Challenging Mathematics in and Beyond the Classroom.* Springer.

Boyer, C. B. (1996). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, L., Oliveira P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico*. Lisboa. Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Coelho, A., Cabrita, I. (2015). *A Creative Approach to Isometries Integrating Geogebra and Italc with 'Paper And Pencil' Environments.* Journal Of The European Teacher Education Network, 10, 71-85. Recuperado de http://62.28.241.73/index.php/jeten/article/view/68

Fioravanti, C. (2003). *Mandalas: Como usar a energia dos desenhos sagrados*. Editora Pensamento, São Paulo Brasil.

Gardner, H. (2000). *La Educación de la mente y el conocimiento de las disciplinas*. Paidós: Barcelona.

Ministerio de Educación de la Nación (2006). Ley de Educación Nacional Nº 26206. Disponible en: ttp://www.lapampa.edu.ar:4040/repositorio/index.php/normativa/nacional/leyes/item/ley-26206

Ministerio de Educación de la Nación (2009). Resolución CFE Nº 93/ 09: "Orientaciones para la Organización Pedagógica e Institucional de la Educación Secundaria Obligatoria". Disponible en: http://www.lapampa.edu.ar:4040/repositorio/index.php/normativa/item/cfe-resolucion- 2009-0093

Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP): 3º Ciclo EGB/Nivel Medio. (2006). Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de La Nación. Disponible en: http://www.me.gov.ar/curriform/publica/nap/nap3matem.pdf

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, G., Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Vale, I., Pimentel, T., Cabrita, I., Barbosa, A. (2012). *Pattern problem solving tasks as a mean to foster creativity in mathematics.* In 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4 (pp. 171-178). Taipei, Taiwan: PME.

Autores:

Reid, Marisa. Nació en Sansinena (Provincia de Buenos. Aires, 1966). Es Licenciada en Matemática, Universidad Nacional de La Pampa. Es docente en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). Desde 1997 es integrante de proyectos de investigación en el área de Educación Matemática.
Dirección Postal: José Luro 1359 Santa Rosa, (6300), La Pampa, Argentina.
mareid@exactas.unlpam.edu.ar

Botta Gioda, Rosana G. Nació en Rafaela (Provincia de Santa Fe, Argentina, 1975). Es Profesora en Matemática y Computación, Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). Es docente en nivel Secundario y en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). Desde 2001 es integrante de proyectos de investigación en el área de Educación Matemática.
Dirección Postal: Pio XII 1504 Santa Rosa, (6300), La Pampa, Argentina.
rosanabotta@exactas.unlpam.edu.ar

Prieto, Fabio R. Nació en General Pico (Provincia de La Pampa, 1967). Es Profesor en Matemática y Computación y Licenciado en Matemática, Universidad Nacional de La Pampa. Es docente en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam (Argentina). Desde 2000 es integrante de proyectos de investigación en el área de Educación Matemática.
Dirección Postal: Río Negro 815 Santa Rosa, (6300), La Pampa, Argentina.
prieto.fabio@gmail.com.ar

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 231-237

Funciones afines en contextos extra-matemáticos, con variables discretas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

En una bodega se vende botellas de un litro de jugo a 6 soles cada una; sin embargo, tiene una oferta cuando se compra más de una botella: pagas por dos botellas y te llevas tres.

Expresar algebraicamente la función p que hace corresponder a la compra de n botellas de jugo, la cantidad p(n) de soles que se debe pagar, haciendo uso de la oferta.

Este problema surgió en un grupo formado por dos alumnos del primer ciclo de profesorado de secundaria en una clase de matemática. La idea brotó ante una situación propuesta a los alumnos con la invitación de proponer (crear) algún problema relacionado con tal situación. Se les hizo dos requerimientos previos: hacer una lista de los conceptos matemáticos que consideraran están relacionados o podrían relacionarlos con la situación descrita; y hacer una lista de preguntas que les suscite la situación.

La situación fue la siguiente:

> Las bodegas A, B y C, cercanas entre sí, venden determinada marca de jugo en botellas de litro, cada una a S/. 6.00; sin embargo, cada bodega brinda ofertas diferentes, cuando se compra más de una botella. Así,
>
> Bodega A: Pagas por 2 botellas y llevas 3
>
> Bodega B: Si llevas 2 botellas, por la segunda pagas S/. 3.00
>
> Bodega C: Pagas por 3 botellas y llevas 4.

Para crear el problema, se les indicó que podían restringir o ampliar la información que encontraran en la situación.

El grupo aludido de alumnos, consideró entre los conceptos el de *función*. De los ocho grupos, solo dos consideraron este concepto entre los relacionados con la situación. Uno de los integrantes del grupo ensayó trabajar con una función afín y a partir de ella describir una oferta, pero no logró concretar la idea. Al comentar sus avances, les sugerí partir de las ofertas ya descritas y considerar como problema el establecer una función tomando solo una de las ofertas. Al presentar el trabajo, no recogieron esta idea y tampoco la del alumno. En conversaciones con los alumnos quedó claro que, para ellos, trabajar con funciones les parecía que era entrar en “una parte complicada de la matemática”

En el grupo encontraron algunos valores de los pagos que se harían por llevar determinado número de botellas (ni una más de las que se desean comprar), usando la oferta de la bodega A, pero no continuaron para llegar a una expresión algebraica. Así, encontraron lo siguiente:

Si llevas 1 botella, pagas 6 soles

Si llevas 2 botellas, pagas 12 soles

Si llevas 3 botellas, pagas 12 soles

Si llevas 4 botellas, pagas 18 soles

Si llevas 5 botellas, pagas 24 soles

Si llevas 6 botellas, pagas 24 soles

…

¿Hay alguna forma de expresar de manera general la cantidad $p(n)$ de soles que se debe pagar para llevar exactamente n botellas, haciendo uso de la oferta de la bodega A?

Una observación hecha por profesores de secundaria – en otro taller con la misma situación – es que si n es múltiplo de 3; digamos $n = 3q$, (q un número natural), entonces se pagará $12q$ soles, pues se forman q grupos de 3 botellas y por cada grupo se paga 12 soles.

¿Cómo se formaliza si n no es múltiplo de 3? Esto no llegaron a hacerlo.

Es importante recordar que si n es entero, al dividirlo entre 3, su residuo puede ser 0, 1 o 2; y en consecuencia, se cumple una de tres posibilidades:

i) n es múltiplo de 3,
ii) n es múltiplo de 3, más 1,
iii) n es múltiplo de 3, más 2.

Para formalizar la función a partir de la situación dada, consideramos n un número entero no negativo; es decir $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Así,

en el caso *(i)*, $n = 3q$, con q un número entero no negativo;

en el caso *(ii)*, $n = 3q + 1$, con q un número entero no negativo; y

en el caso *(iii)*, $n = 3q + 2$, con q un número entero no negativo.

Algunos ejemplos del caso (i) son: $n = 0$; $n = 3$; $n = 6$; $n = 9$; $n = 99$. De acuerdo a la observación antes anotada, los correspondientes valores de $p(n)$ son

$p(0) = p(3x0) = 12 x0 = 0$;

$p(3) = p(3x1) = 12x1 = 12;$

$p(6) = p(3x2) = 12x2 = 24;$

$p(9) = p(3x3) = 12x3 = 36;$

$p(99) = p(3x33) = 12x33 = 396.$

Observamos que $p(3q) = 12q$, para $q \in \mathbb{N}$ (q número natural).

Algunos ejemplos del caso (ii) son: $n = 1$; $n= 4$; $n = 7$; $n = 10$; $n = 100$.

La idea intuitiva para obtener lo que se debe pagar por estas cantidades de botellas es formar la mayor cantidad de grupos de 3 botellas, por cada grupo pagar 12 soles y por la botella restante pagar 6 soles. Así, los correspondientes pagos $p(n)$ son:

$p(1) = p(3x0 + 1) = 12 x0 + 6 = 6;$

$p(4) = p(3x1 +1) = 12x1 + 6 = 18;$

$p(7) = p(3x2 +1) = 12x2 + 6 = 30;$

$p(10) = p(3x3 +1) = 12x3 + 6 = 42;$

$p(100) = p(3x33 +1) = 12x33 + 6 = 396 + 6 = 402$

Observamos que $p(3q + 1) = 12q + 6$, para $q \in \mathbb{N}$.

Análogamente, algunos ejemplos para el caso (iii) son $n = 2$; $n = 5$; $n = 8$; $n = 11$; $n = 101$; y siguiendo la idea intuitiva de formar la mayor cantidad de grupos de 3 botellas y pagar 6 soles por cada una de las botellas restantes, que en este caso son 2, los correspondientes valores de $p(n)$ son:

$p(2) = p(3x0 + 2) = 12x0 + 6x2 = 12;$

$p(5) = p(3x1 +2) = 12x1 + 6x2 = 24;$

$p(8) = p(3x2 +2) = 12x2 + 6x2 = 36;$

$p(11) = p(3x3 +2) = 12x3 + 6x2 = 48;$

$p(101) = p(3x33 +2) = 12x33 + 6x2 = 18 = 396 + 12 = 408$

Observamos que $p(3q + 2) = 12q + 12$, para $q \in \mathbb{N}$.

Con esta información, ¿ya se puede obtener una expresión general para la función p?

Una posibilidad es resumir en una expresión el patrón que se observa para cada uno de los casos y así tener

$$p(n) = \begin{cases} 12\,q & si\ n = 3q,\ \ q \in \mathbb{N} \\ 12q + 6 & si\ n = 3q + 1,\ \ q \in \mathbb{N} \\ 12q + 12 & si\ n = 3q + 2,\ \ q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sin embargo, observamos que la variable no aparece explícitamente en la expresión que da el valor de la función. Aparece la variable *q*. Esto podemos arreglarlo haciendo el cambio de variable correspondiente a cada caso:

$$n = 3q \Rightarrow q = \frac{n}{3} \;\Rightarrow\; p(n) = 12q = 4n$$

$$n = 3q + 1 \Rightarrow q = \frac{n-1}{3} \;\Rightarrow\; p(n) = 12q + 6 = 12\left(\frac{n-1}{3}\right) + 6 = 4n + 2$$

$$n = 3q + 2 \Rightarrow q = \frac{n-2}{3} \;\Rightarrow\; p(n) = 12q + 12 = 12\left(\frac{n-2}{3}\right) + 12 = 4n + 4$$

Así tenemos ahora:

$$p(n) = \begin{cases} 4n & si\ n = 3q,\ \ q \in \mathbb{N} \\ 4n + 2 & si\ n = 3q + 1,\ q \in \mathbb{N} \\ 4n + 4 & si\ n = 3q + 2,\ q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La función pago está definida por tres funciones afines restringidas a números enteros no negativos y, respectivamente, a múltiplos de 3; múltiplos de 3, más 1; y múltiplos de 3, más 2. Obviamente las imágenes correspondientes a los valores de su dominio son números enteros y podemos visualizar esta correspondencia en una representación gráfica. Hemos usado GeoGebra y hemos denominado *f*, *g* y *h* a las funciones que establecen las correspondencias para los múltiplos de 3; múltiplos de 3, más 1; y múltiplos de 3, más 2. Se ve la ubicación de los puntos en las rectas que corresponden a las funciones afines sin las restricciones discretas que este problema impone.

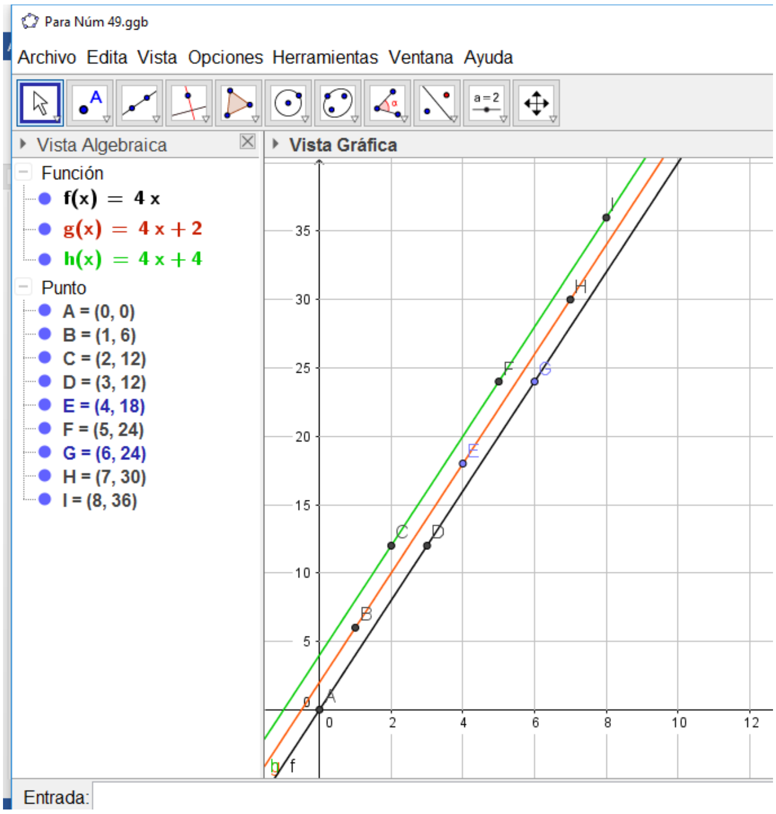


Figura 1

Resulta interesante plantearse el reto de encontrar una función pago que pueda expresarse en una sola línea.

A continuación doy una función pago *k*, usando la función máximo entero, y su gráfico correspondiente en la Figura 2.

$$k(n) = 6\left(n - \left[\!\left[\frac{n}{3}\right]\!\right]\right)\ ;\ n \in \mathbb{N}$$

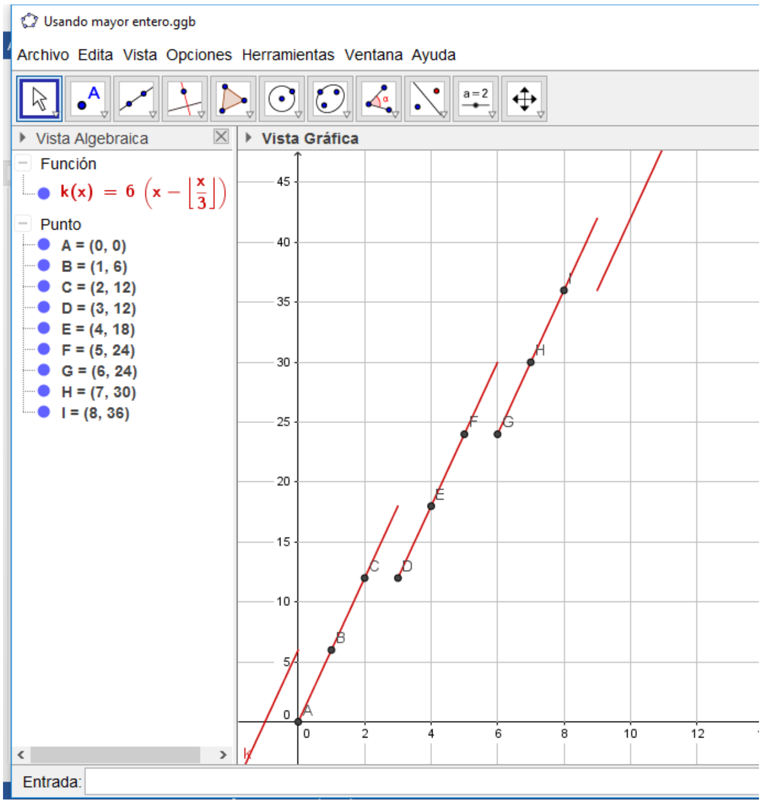


Figura 2

Se ve la coincidencia de las coordenadas de los puntos de A, B, C, D, E, F, G, H e I, con los mostrados en la Figura 1. En cada figura las coordenadas de estos puntos han sido obtenidas usando la(s) función(es) considerada(s) en ella. Queda como ejercicio para el lector encontrar un razonamiento que lleve a la obtención de tal expresión con la función máximo entero.

Comentarios

1. Pocos grupos advirtieron la posibilidad de relacionar el concepto de función con la situación dada y ningún grupo – ni de profesores en formación ni de profesores en ejercicio – propuso un problema usando explícitamente este concepto. Esto revela que en la secundaria y en los cursos de formación de profesores se enfatiza poco la vinculación de las funciones con la realidad. Al tratar el tema funciones, suele ponerse mucho énfasis en la obtención de dominios, rangos y gráficos solo en contextos intra-matemáticos, dejando pasar oportunidades de empleo de las funciones en la observación y análisis de situaciones reales y de estimular la creación de problemas, la modelización y la investigación.

2. Las ideas expuestas pueden servir de base para continuar creando problemas sobre funciones a partir de la misma situación dada. Una posibilidad es construir funciones que expresen el pago por la compra de botellas de jugo, haciendo uso de cada una de las ofertas de las bodegas B y C. También, considerar la posibilidad de combinar ofertas. Otra posibilidad interesante es considerar generalizaciones.

3. Desde el punto de vista del conocimiento matemático de los docentes, resulta interesante evidenciar cómo una situación real lleva a manejar conceptos tanto del conocimiento común, como del conocimiento ampliado, con una mirada que ensancha horizontes y que es fundamental para la formación de los profesores de matemáticas. En este caso particular, la función afín, que es la función real de dominio en R, expresada como $f(x) = ax + b$, con a y b coeficientes también en R, resulta relacionada a otros campos de la matemática por estar restringida a un conjunto discreto (el número n de botellas de jugo que se desea comprar, obviamente varía en $\mathbb{N}$) y de una manera poco habitual, pues está definida en clases de equivalencia del conjunto de números naturales, determinadas por el resto de dividir n entre 3; es decir, entramos al campo de la división entera y la aritmética modular; y en este contexto, a usar la función máximo entero.

4. En los talleres sobre creación de problemas, una manera de iniciar a los participantes en una reflexión de carácter matemático y didáctico, es pedirles, luego de conocer la situación propuesta y antes de crear un problema específico, que hagan:

   a. una lista de conceptos matemáticos que se relacionan con tal situación o que pudieran relacionarse con ella.

   b. una lista de preguntas que les suscite la situación descrita.

   Con suficiente tiempo, en talleres para profesores en formación o en ejercicio, se pueden aplicar las estrategias ERPP (Episodio, Reflexión didáctica, Problema pre, Problema pos) para crear problemas por *variación* de un problema dado, y SPRP (Situación, Problema, Reflexión didáctica, Problema (pre o pos)), para crear problemas por *elaboración*, a partir de una situación dada. Tales estrategias, que usan constructos del EOS, han sido expuestas con detalle en Malaspina (2017).

Referencia

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*
Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html