REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XII – Número 47 – Septiembre 2016 http://www.revistaunion.org

ÍNDICE

PROPUESTAS PARA AULA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Páginas 1

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre, 2016
Página 02-07

EDITORIAL

Estimados colegas y amigos:

La revista Unión continua con fuerza por la gran cantidad de artículos que ha recibido, lo que permite la selección de artículos interesantes, para cada número. Esto es lo que hemos pretendido en el número 47, en el que sus artículos reflejan la diversidad de los temas tratados en Educación Matemática. Esperamos así cumplir con los intereses de nuestros lectores. Este número está compuesto por once artículos, la sección de problemas y la reseña de un libro, y por supuesto el artículo especial escrito por reconocidos investigadores que compone la sección "Firma Invitada".

Ana Lúcia Manrique y Douglas Tinti son nuestros invitados y nos proporcionan el artículo **"***Análise de aprendizagens de professores de Matemática evidenciadas no estágio potencial de uma Comunidade de Prática*"**,** sobre proyectos vinculados al Programa Observatorio de la Educación (OBEDUC) en Brasil, que ha favorecido la creación de espacios de formación, como Comunidades de Práctica (CoP) en el que investigan el aprendizaje docente en su primera etapa de desarrollo teniendo en cuenta la perspectiva de la Teoría de Aprendizaje Social.

A continuación, presentamos de forma breve, el resto de artículos que componen este número 47.

El primero de los artículos es *"Modos de compreender a Soma de Riemann e suas aplicações ao estar em um ambiente informatizado de aprendizagem", escrito por* Leal Junior y Lopes Pinheiro. El artículo trata sobre el establecimiento del concepto de una suma de Riemann para estudiantes graduados en Educación Matemática en una universidad brasileña.

"Disponibilidad léxica matemática en estudiantes de Ingeniería y Ciencias", es el título del artículo de Mirabal, Ponce-Castañeda y Palomares-Sánchez. En este artículo los autores presentan un estudio de disponibilidad léxica de los conceptos matemáticos de los estudiantes pertenecientes a las carreras de Ingeniería y Ciencias.

Lucena y Barbosa en el *“Aprendizagens de Professores de Matemática em um Grupo Colaborativo”* comparten um resumen de una tesis, cuyo objetivo era comprender el aprendizaje de los profesores de matemáticas en un grupo de colaboración, a través de sus informes.

El conocimiento del juego como estrategia de enseñanza en clases de matemáticas, los tiempos cuando se utiliza y los tipos de tareas, son los temas tratados en el artículo de Cardón y Sgreccia en *"El lugar que asume el juego como estrategia didáctica en el aprendizaje de las nociones matemáticas al inicio de la escolaridad primaria".* El estudio se realizó en tres escuelas primarias en un pequeño pueblo en la provincia de Santa Fe (Argentina).

"Algunos elementos conceptuales de la didáctica de las matemáticas" es el título del artículo de Fuentes, Piedra y Hernández. Este artículo es el resultado de un estudio de las características principales de algunos enfoques de la enseñanza de las matemáticas.

Athias y Pires publican los resultados de una investigación cuyo objetivo era conseguir las semejanzas y diferencias en las leyes y los cambios que rigen la Educación Básica Regular de dos países, en el artículo *“Estudo comparado do currículo prescrito na educação básica regular Peru e Brasil: um olhar nas etapas Primaria e Fundamental no tocante à Matemática”.*

"Análisis de la resolución de problemas aritméticos elementales verbales aditivos de una etapa a través de los registros de representación semiótica" es el título del artículo de Díaz. Es un análisis de los diferentes registros de representación semiótica que un grupo de estudiantes de 4 º grado (entre 9 y 12 años de edad) utilizan para resolver una serie de actividades elementales de problemas aritméticos.

Un estudio desarrollado por alumnos de 7º año de la Escuela Primaria, tratando de entender la orientación como escenario de investigación para el trabajo de los professores y estudiantes es el tema del artículo de Hartmann, Neves y Ruviaro, de título: *“O desporto orientação como cenário de investigação para o ensino da matemática”*

“La comprensión matemática de las funciones en interdisciplinariedad con la Física a través de problemas de la vida práctica” es el artículo de Rivero, Valdés y González. El artículo presenta una investigación que tiene el objetivo de aplicar una propuesta de ejercicios interdisciplinarios que potencien la comprensión matemática

de las funciones, pasando por un proceso de transferencia entre representaciones y con un vínculo estrecho con la vida práctica.

Con el artículo de Mendieta, Suárez y Gómez terminamos la presentación de los artículos de este número. El artículo *"Un ejemplo de integración de la historia de las matemáticas en el conocimiento didáctico de profesores de Matemáticas"* presenta los resultados de un proyecto sobre el conocimiento histórico en la creación de una visión sobre la naturaleza de la aritmética y el álgebra en profesores de matemáticas en formación.

En la propuesta de aula denominada "*La enseñanza de la geometría en el caleidoscopio*", Millán delinea el concepto, la historia y la explicación científica del caleidoscopio, y como puede utilizarse como recurso educativo y recreativo en la enseñanza de geometría.

En la sección de resolución de problemas, Uldarico Malaspina Jurado nos trae reflexiones sobre "*Funciones discontinuas en situaciones cotidianas*".

Luis Balbuena Castellano ha preparado una reseña sobre el libro "RELATEMÁTICOS", escrito por Margarita Marín Rodríguez de la Editorial: Verbum, con ISBN: 978-84-9074-307-2. En esta reseña Castellano dice, entre otras cosas, en *su afán por crear materiales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, Margarita Marín nos ofrece un libro "de amplio espectro".*

Para terminar, quisiéramos agradecer la labor de los revisores y de otros colaboradores que han hecho posible este número.

¡Buena lectura!

EDITORAS

Celina Abar

Sonia Igliori

Editorial

Estimados colegas e amigos:

A Revista Unión mostra seu vigor na grande quantidade de artigos que ela tem recebido, o que possibilita a seleção de bons artigos, para cada número. É nessa condição que chegamos ao número 47 no qual é apresentado artigos que refletem a diversidade de temas tratado na Educação Matemática. Esperamos assim atender as especialidades de seus leitores. Neste número há onze artigos, a seção de problemas e a resenha de um livro, além é claro do artigo especial, sempre de autoria de pesquisador renomado, o qual compõe a seção "Firma Invitada".

Ana Lúcia Manrique e Douglas Tinti são nossos convidados e apresentam o artigo denominado **"***Análise de aprendizagens de professores de Matemática evidenciadas no estágio potencial de uma Comunidade de Prática*", sobre projetos vinculados ao Programa Observatório da Educação (OBEDUC) no Brasil e que tem favorecido a constituição de espaços formativos, como Comunidades de Prática (CoP) na qual investigam as aprendizagens docentes, em seu primeiro estágio de desenvolvimento, considerando a perspectiva da Teoria Social da Aprendizagem.

No que segue apresentamos, de forma sucinta, os demais trabalhos que compõem este número 47.

O primeiro dos artigos intitula-se *"Modos de compreender a Soma de Riemann e suas aplicações ao estar em um ambiente informatizado de aprendizagem".* Seus autores são Leal Junior e Lopes Pinheiro. O artigo trata da constituição do conceito de Soma de Riemann por estudantes da pós-graduação em Educação Matemática de uma universidade brasileira.

"Disponibilidad Léxica Matemática en estudiantes de Ingeniería y Ciencias", é o título do artigo de Mirabal, Ponce-Castañeda e Palomares-Sánchez. Nesse trabalho os autores apresentam um estudo da disponibilidade lexical dos conceitos matemáticos aos estudantes das carreiras pertencentes à área da engenharia e da ciência.

Lucena e Barbosa em *"Aprendizagens de Professores de Matemática em um Grupo Colaborativo*" trazem um recorte de uma dissertação, que objetivou compreender as aprendizagens de professores de Matemática em um grupo colaborativo, por meio de seus relatos.

O conhecimento do lugar do jogo como estratégia didática nas aulas de Matemática, os momentos em que ele é usado e os tipos de tarefas associadas, são os temas tratados no artigo de Cardón e Sgreccia em *"El lugar que asume el juego como estrategia didáctica en el aprendizaje de las nociones matemáticas al início de la escolaridad primaria".* O estudo realizou-se em três escolas primárias, na segunda série, em uma pequena cidade na província de Santa Fé (Argentina).

"*Algunos Elementos Conceptuales de la Didáctica de las Matemáticas"* é o título do artigo de Fuentes, Piedra e Hernández**.** Nesse artigo está o resultado de um estudo das principais características de alguns enfoques da Educação Matemática.

Athias e Pires trazem resultados de um recorte de uma pesquisa mais ampla cujo objetivo foi buscar semelhanças e diferenças existentes nas leis e alterações que regem a Educação Básica Regular de dois países, no artigo *"Estudo comparado do currículo prescrito na educação básica regular Peru e Brasil: um olhar nas etapas Primaria e Fundamental no tocante à Matemática".*

"Análisis de la Resolución de Problemas Aritméticos Elementales Verbales Aditivos de una etapa a través de los Registros de Representación Semiótica" é o título do artigo de Díaz. Nele é apresentada uma análise exploratória dos diferentes Registros de Representação Semiótica que um grupo de alunos de 4ª série (entre 9 e 12 anos de idade) utilizam para resolver uma série de atividades elementares de problemas aritméticos.

Um estudo desenvolvido, junto a estudantes do 7º Ano do Ensino Fundamental, buscando compreender a orientação como cenário de investigação para o trabalho discente e docente em Matemática é a temática do artigo de Hartmann, Neves e Ruviaro, de título: *"O desporto orientação como cenário de investigação para o ensino da matemática"*

"La comprensión matemática de las funciones en interdisciplinariedad con la Física a través de problemas de la vida práctica" é o artigo de Rivero, Valdés e González. A investigação tem o objetivo de aplicar uma proposta de exercícios interdisciplinares que possibilitem a compreensão matemática das funções, passando por um processo de transferência entre representações e com um vínculo estreito com a vida prática

Com o artigo de Mendieta, Suárez e Gómez finalizamos a apresentação de grupo de artigos. O artigo de título *“Un ejemplo de integración de la Historia de las Matemáticas en el conocimiento didáctico de profesores de Matemáticas”* apresentou resultados de um projeto sobre o conhecimento histórico na criação de uma visão sobre a natureza da Aritmética e Álgebra em professores de Matemática em formação.

Em uma Proposta Áulica denominada *“El caleidoscopio en la enseñanza de la geometria”* Millán delineia conceito, história a explicação científica do caleidoscópio e como ele pode ser usado como recurso educacional e recreativo no ensino de Geometria.

Na seção de Resolução de Problemas Uldarico Malaspina Jurado nos traz reflexões sobre *“Funciones discontinuas en situaciones cotidianas”*

Castellano elaborou a resenha do livro: “RELATEMÁTICOS” de autoria de. Margarita Marín Rodríguez da Editorial: Verbum, com ISBN: 978-84-9074-307-2. Nessa resenha Castellano diz, entre outras coisas, que *en su afán por crear materiales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, Margarita Marín nos ofrece un libro “de amplio espectro”.*

Boa leitura!

Celina Abar

Sonia Igliori

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre, 2016
Página 08

FIRMAS INVITADAS

Manrique, Ana Lúcia: Doutora em Educação: Psicologia da Educação pela PUC/SP e Professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Atualmente, é professora Produtividade em Pesquisa 2 no CNPq (2016-2018). Os interesses de pesquisa centram-se na formação de professores que ensinam matemática, na educação matemática inclusiva e na utilização de mapas conceituais.
analuciamanrique@gmail.com.

Tinti, Douglas da Silva: Doutor em Educação Matemática pela PUC/SP. Coordenador e professor do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Cidade de São Paulo. Os interesses de pesquisa centram-se na formação de professores que ensinam matemática.
douglastinti@uol.com.br

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 09-22

FIRMA INVITADA

Análise de aprendizagens de professores de Matemática evidenciadas no estágio potencial de uma Comunidade de Prática

Douglas da Silva Tinti e Ana Lúcia Manrique

Resumen	En Brasil, proyectos vinculados al Programa Observatorio de la Educación (OBEDUC) ha favorecido la creación de espacios de formación, como Comunidades de Práctica (CoP), en la que maestros asumen el rol de sus formaciones. En esto trabajo, investigamos el aprendizaje docente situado en una CoP, en su primera etapa de desarrollo teniendo en cuenta la perspectiva de la Teoría de Aprendizaje Social. El análisis nos señala que en la etapa potencial, fueron movilizadas aprendizaje docentes, como: la escrita y reflexión sobre la propia práctica; la construcción de mapas conceptuales y el reconocimiento de estrategias para la enseñanza de las matemáticas. **Palabras clave**: Formación de profesores; Comunidades de Práctica; Teoría del Aprendizaje Social; Aprendizaje docente.
Abstract	In Brazil, the implementation of projects linked to the Education Observatory Program (OBEDUC) has favored the establishment of training spaces, as Communities of Practice (CoP), where teachers assume the role of their training. As a result, we chose to investigate learning teachers situated in a CoP, in its first stage of development, considering the perspective of Social Learning Theory. The analysis of this stage shows us that were mobilized learning teachers, such as: writing and reflection on own practice; the construction of conceptual maps and recognition strategies to teach math. **Keywords**: Teacher Education; Communities of Practice; Social Learning Theory; Learning Teacher
Resumo	No Brasil, a implementação de projetos vinculados ao Programa Observatório da Educação (OBEDUC) tem favorecido a constituição de espaços formativos, como Comunidades de Prática (CoP), em que os professores que ensinam Matemática assumem o protagonismo de suas formações. Neste trabalho, optamos por investigar aprendizagens docentes situadas em uma CoP, em seu primeiro estágio de desenvolvimento, considerando a perspectiva da Teoria Social da Aprendizagem. A análise desse estágio nos aponta que foram mobilizadas aprendizagens docentes, tais como: a escrita e a reflexão sobre a própria prática; a construção de mapas conceituais e o reconhecimento de estratégias para ensinar matemática. **Palavras-chave:** Formação de Professores; Comunidades de Prática; Teoria Social da Aprendizagem; Aprendizagem Docente.

1. Introdução

No cenário brasileiro, temos observado que o Programa Observatório da Educação (OBEDUC), entendido por nós como sendo uma Parceria Oficial (Foerste, 2005), tem possibilitado o desenvolvimento de projetos que podem favorecer o estabelecimento de pontes entre universidade e escola. Tais projetos são compostos por pesquisadores da universidade, estudantes de graduação e pós-graduação e, também, por professores da Educação Básica.

Analisando alguns estudos (Beline, 2012; Nagy, 2014; Oliveira, 2015; Ramos, Manrique, 2015), que investigaram ações formativas desenvolvidas e desencadeadas em projetos no âmbito do OBEDUC, identificamos que, além de proporcionarem uma aproximação entre universidade e escola, o OBEDUC tem favorecido a constituição de espaços formativos em que os professores assumem o protagonismo de suas formações e, consequentemente, de suas aprendizagens.

Voltando-nos às pesquisas analisadas, fica evidente que, no cenário nacional, o OBEDUC tem se constituído como lugar de formação para professores e futuros professores, sobretudo por fomentar e favorecer a consubstanciação de parcerias entre universidade e escola e, com isso, propiciar múltiplas e diversificadas experiências formativas considerando as necessidades dos envolvidos.

Além disso, tais pesquisas apontam que os grupos constituídos em projetos vinculados ao OBEDUC têm contribuído para a constituição de Comunidades de Prática (CoP).

Ao abordar o conceito de Comunidade, Wenger (1998) cria uma associação com o conceito de Prática, gerando o conceito unitário de Comunidade de Prática (CoP). Para o autor, os termos comunidade e prática não devem ser tratados de forma isolada; por conseguinte, a junção dos dois termos na expressão Comunidade de Prática deve ser vista como uma unidade.

Em função disso, Wenger caracteriza uma CoP mediante a existência de um domínio, de uma comunidade e de uma prática, que são entendidos como:

> Domínio: a área de conhecimento que reúne a comunidade, dá a ela sua identidade e define as questões-chave que os membros precisam abordar.
> Comunidade: um grupo de pessoas para quem o domínio, a qualidade das relações entre os membros e a definição de fronteira entre o interior e o exterior são relevantes.
> Prática: o corpo de conhecimentos, métodos, ferramentas, histórias, casos, documentos que os membros compartilham e desenvolvem em conjunto. (Wenger, 2004, p. 3)

Esse autor concebe que a aprendizagem se apoia, simultaneamente, no processo e no lugar e que, nesse contexto, as práticas em comunidades oferecem um contexto ideal para o desenvolvimento de novas compreensões, uma vez que tais comunidades assumem processos de mudança como parte da identidade de participação.

Considerando esse cenário e nossa inserção no projeto *"Rede Colaborativa de práticas na formação de professores que ensinam Matemática: múltiplos olhares, diálogos e contextos"*, projeto em rede entre a UFSCar, PUC/SP e UFABC, desenvolvido no âmbito do OBEDUC, optamos por investigar aprendizagens docentes situadas em uma CoP, constituída na PUC-SP, em seu primeiro estágio de desenvolvimento. A CoP denomina-se CoP OBEDUC PUC-SP e é composta por um grupo heterogêneo, com professores que ensinam Matemática em diferentes momentos da carreira e com diferentes formações.

Em relação ao processo de análise das aprendizagens, dentre as pesquisas analisadas, a de Baldini (2014) buscou relacionar as aprendizagens identificadas com algumas categorias, relacionando as aprendizagens com os conhecimentos: do conteúdo; pedagógicos; tecnológicos; tecnológicos do conteúdo; pedagógicos do conteúdo e pedagógico da tecnologia.

E os estudos de Ramos e Manrique (2015) e Tinti *et al* (2016) apontam que, em contextos como o constituído por uma CoP vinculada a projeto no âmbito do OBEDUC, é possível desenvolver estudos teórico-metodológicos, elaborar recursos didáticos, refletir sobre estratégias de ensino, produzir narrativas, problematizar o processo formativo e refletir sobre a prática no sentido de aprimorá-la e melhorá-la.

2. Algumas considerações sobre Aprendizagem

Com base nos estudos realizados por Jean Lave e por Ettienne Wenger (Lave, Wenger, 1991), objetivando a formulação de uma teoria de aprendizagem, enquanto dimensão da prática social, Wenger (1998) apresenta a Teoria Social da Aprendizagem, cuja centralidade alicerça-se no pressuposto da aprendizagem como participação social.

> [...] a participação não somente se refere aos eventos locais de compromisso com determinadas atividades e com determinadas pessoas, é também um processo de amplo alcance que consiste em participar de uma forma ativa nas *práticas* das comunidades sociais e em construir *identidades* em relação a estas comunidades. [...] Esta participação não se refere somente a forma como fazemos, mas sim conforme quem somos e como interpretamos o que fazemos. (Wenger, 2011, p. 22)

Partindo das premissas enunciadas, Wenger apresenta quatro componentes que caracterizam a participação social como um processo de aprendizagem e conhecimento. São eles:

> 1) Significado: uma forma de falar de nossa capacidade (de mudar) – individualmente ou coletivamente – de experimentar nossa vida e o mundo como algo significativo;
> 2) Prática: uma forma de falar de recursos históricos e sociais compartilhados, sistemas e perspectivas que possam sustentar o engajamento/compromisso mútuo na ação;
> 3) Comunidade: uma forma de falar sobre as configurações sociais em que nossos empreendimentos se definem como buscas valiosas e nossa participação é reconhecida como competência;
> 4) Identidade: uma forma de falar sobre como a aprendizagem muda quem nós somos e cria histórias pessoais de transformação no contexto de nossas comunidades. (Wenger, 1998, p.5)

Ao abordar os componentes prática e comunidade, Wenger (1998) enfatiza que estão inter-relacionados e devem ser considerados como uma unidade, o que implica em olhá-los como CoP. E pontua as CoP como lugares privilegiados para a aquisição e criação de conhecimento.

O conceito de Significado, como destacado por Wenger (1998), está situado num processo denominado Negociação de Significado, e esse processo de negociar significado supõe, ao mesmo tempo, interpretação e ação.

Em linhas gerais, Wenger (2011) aponta que a Negociação de Significados é o nível do discurso em que se deve compreender o conceito de prática. Nesse sentido, a Negociação de Significado supõe a interação dual de dois processos constitutivos denominados de participação e reificação. Ou seja, a participação e reificação são processos indissociáveis.

A participação sugere, indistintamente, ação e conexão, ou seja, tomando como exemplo uma pessoa e um processo formativo qualquer, a participação refere-se tanto à inserção da pessoa no processo, quanto às relações que são estabelecidas entre tal pessoa e os demais participantes desse processo formativo.

O conceito de reificação, de maneira geral, refere-se "ao processo de dar forma a nossas experiências produzindo objetos que transformem essa experiência em uma coisa". (Wenger, 2011, p. 84). Para Wenger (1998), trata-se de um conceito muito útil para descrever nosso compromisso no mundo enquanto produtores de significados e é empregado para transmitir a ideia de que o que se concretizou em um objeto material (concreto) não é simplesmente um objeto material (concreto) é, também, um processo de comunicação fundamental para toda prática. Ou seja, ao considerarmos para um objeto reificado de uma comunidade, por exemplo, devemos vislumbrar as negociações de significado que o constituíram enquanto reificado.

Desde essa perspectiva, o conceito de reificação ocupa grande parte de nossa energia coletiva e abarca, como aponta Wenger (1998, p. 59), "processos que incluem fazer, projetar, representar, nomear, codificar e descrever bem como perceber, interpretar, utilizar, reutilizar, decodificar e reestruturar".

Além disso, o autor afirma que o tempo de vida de uma CoP é relativo, pois está atrelado a diferentes fatores, como: interesse, dinâmica e orientação; e que uma CoP pode passar por diferentes estágios de desenvolvimento. Considerando tais aspectos, Wenger *et al.* (2002) propõem um modelo que ilustra os diferentes estágios do ciclo de vida de uma CoP, bem como o seu comportamento ao longo do tempo. É importante destacar que, em cada um desses estágios, pode-se perceber diferentes níveis de participação, uma vez que o domínio, a prática e a própria comunidade adquirem novas dimensões e novos significados cada vez que a CoP se aproxima de um estado de evolução, dentro desse modelo proposto.

Como ilustrado na Figura 1, são considerados cinco estágios consecutivos no tempo de vida de uma comunidade de prática, a saber: potencial; expansão;

maturidade; sustentabilidade e transformação. Contudo, é importante ressaltar que os referidos estágios não possuem um tempo de duração definido *a priori*.

Figura 1: Estágios de desenvolvimento de uma Comunidade de Prática
Fonte: Adaptado de Wenger et al. (2002, p. 69)

No estágio potencial evidencia-se um agrupamento de pessoas com inquietações e demandas próximas com o desejo de compartilhá-las. Constitui-se, então, uma CoP e se busca obter conhecimentos tanto pelos seus próprios meios, quanto por meio de outras comunidades que compartilham o mesmo tema de interesse.

No estágio de expansão, o domínio da CoP centra-se em estabelecer o valor do compartilhamento de conhecimentos acerca do domínio entre os membros. No estágio de maturidade, a CoP assume a responsabilidade por sua prática e se expande. No estágio de sustentabilidade, pode-se evidenciar que a CoP desenvolve um sentido de autoria para o conhecimento construído e se engaja na divulgação do conhecimento. No estágio de transformação, a CoP decidirá se irá evoluir para outros domínios ou deixar que encontre naturalmente seu fim.

3. Percurso Metodológico

O presente artigo tem por objetivo identificar e descrever aprendizagens docentes evidenciadas no estágio potencial da CoP OBEDUC PUC-SP, considerando o estudo realizado por Tinti (2016). Considerando esse objetivo, optamos pela abordagem da pesquisa qualitativa (Bogdan; Biklen, 1994) do tipo pesquisa participante.

Optamos pela pesquisa participante pelo fato de ser uma tipologia em que o investigador é, simultaneamente, pesquisador e pesquisado. Essa perspectiva vem ao encontro dos papéis que assumimos na CoP OBEDUC PUC-SP: membros e/ou pesquisadores. Além disso, como sinaliza Gil (2002), trata-se de um tipo de pesquisa que não privilegia ações planejadas e, por isso, compromete-se com a minimização de relações hierarquizadas, características que foram consideradas no processo de constituição da CoP por nós analisada.

Como já apontado anteriormente, a PUC-SP compõe um dos núcleos do Projeto em rede intitulado: "*Rede Colaborativa de práticas na formação de professores que ensinam Matemática: múltiplos olhares, diálogos e contextos*" aprovado no Edital 049/2012/CAPES/INEP. Esse edital prevê a existência, para cada um dos núcleos, de: uma bolsa para o docente coordenador; um bolsa para um doutorando; três bolsas para mestrandos; seis bolsas para professores em exercício na Educação Básica pública e seis bolsas para alunos de graduação. Esse projeto teve início em junho de 2013 e seu término está previsto para o ano de 2017.

A CoP OBEDUC PUC-SP é composta por um grupo heterogêneo, conforme pode ser verifica na Figura 2; e é importante pontuar que:

- a coordenação, os doutorandos e mestrandos estão vinculados à PUC-SP;
- os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental atuam em duas Escolas Municipais de Ensino Fundamental;
- dois dos professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental atuam em duas Escolas Estaduais;
- os licenciandos (Matemática e Pedagogia) estão vinculados a três Instituições de Ensino Superior distintas.

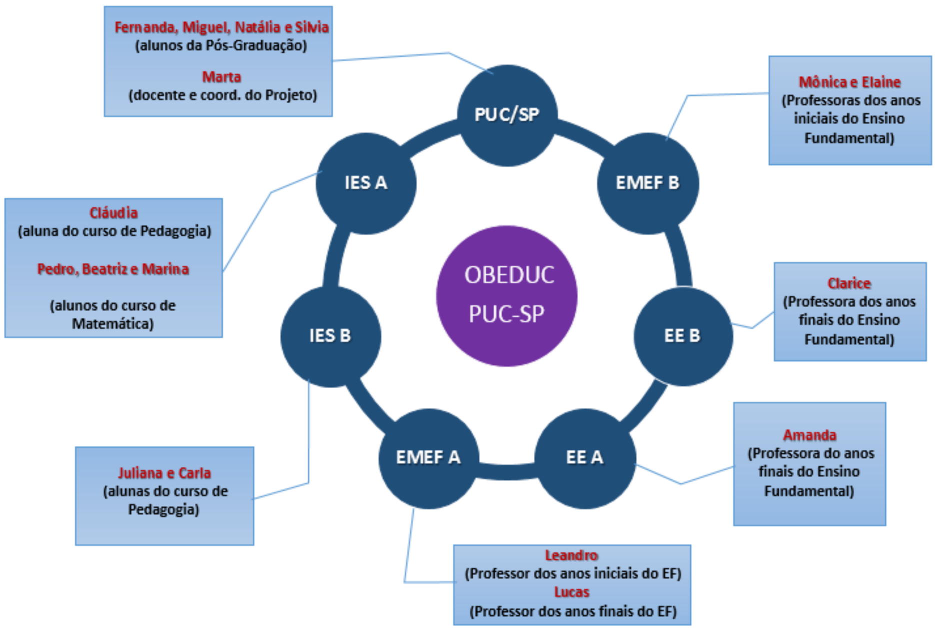


Figura 2: Constituição da CoP OBEDUC PUC-SP no Estágio Potencial.
Fonte: elaboração própria.

A presente pesquisa se volta à análise de aprendizagens docentes evidenciadas no contexto da CoP OBEDUC PUC-SP. Assim, serão considerados como sujeitos da pesquisa todos os membros desse grupo. Para preservar o anonimato dos sujeitos utilizaremos nomes fictícios para cada um deles.

Para coleta de dados, optamos pela realização de um recorte temporal e, portanto, consideramos o período de junho de 2013 a agosto de 2013, totalizando seis encontros. Tais encontros ocorreram, quinzenalmente, aos sábados pela manhã, com duração média de aproximadamente três horas cada.

No Quadro 1, apresentamos a organização da CoP considerando seus membros, seu domínio e sua prática.

Membros da CoP	Domínio	Prática
Estudantes de Licenciatura em Matemática; estudantes de Pedagogia; professores que ensinam Matemática na Educação Básica; estudantes de Pós-Graduação e pesquisadores.	A formação de professores que ensinam Matemática situada nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática e na reflexão sobre a prática docente.	Produção de mapas conceituais e narrativas; leitura, reflexão e debate de textos acadêmicos sobre o ensino de Matemática e sobre a profissão docente; a negociação do trabalho colaborativo, de uma formação horizontal e de um domínio para a constituição da CoP.

Quadro 1: Organização da CoP OBEDUC PUC-SP no estágio potencial
Fonte: elaboração própria.

Apresentamos, no Quadro 2, as datas e os conteúdos dos encontros da CoP OBEDUC PUC-SP que, segundo nossa análise, compõem o estágio potencial da CoP.

Encontros da CoP OBEDUC PUC-SP		
08/06/13	Elaboração de um Mapa Conceitual: "Ensino de Matemática"	Potencial
15/06/13	Socialização da escrita de um Memorial de Formação.	
22/06/13	Socialização da escrita de uma narrativa "Eu e minha prática".	
29/06/13	Socialização da leitura do texto da Beatriz D'Ambrósio - "Ensino de Matemática".	
03/08/13	Socialização da leitura do texto de Bernad Charlot - "Professor na atualidade".	
17/08/13	Discussão sobre Resolução de Problemas (RP) + Reunião de Planejamento.	

Quadro 2: Relação dos encontros da CoP OBEDUC PUC-SP que compõem o estágio potencial
Fonte: elaboração própria.

No Quadro 2, é possível perceber que os membros do grupo produziram narrativas, mapas conceituais, memoriais de formação, bem como discussão de textos lidos, que são entendidos por Wenger (2011) como materiais reificadores, os quais podem ajudar a entender a negociação de significados e a dualidade entre a participação e a reificação, além de comporem o repertório compartilhado da CoP OBEDUC PUC-SP. Desse modo, foram analisados os áudios dos encontros e a produção dos membros da CoP com o objetivo de evidenciar aprendizagens docentes mobilizadas no estágio potencial da CoP.

4. Apresentação e análise de dados

Inicialmente, é importante destacar que entendemos as aprendizagens segundo a perspectiva da Teoria da Aprendizagem Situada (Lave; Wenger, 1991), a qual indica que toda atividade (incluindo a aprendizagem) é situada nas relações entre pessoas, contextos e práticas.

Analisando os primeiros encontros da CoP identificamos que houve um engajamento em relação à apresentação do projeto vinculado ao OBEDUC e que se buscou promover ações que favorecessem o estabelecimento de confiança e aproximação entre os participantes.

> Marta: “Nós estamos nessa fase de estabelecer vínculos, de aquecimento. Nós não vamos fazer isso o ano todo. Lembrem-se disso sempre. [..] vamos discutir e investigar o ensino da Matemática [...] essa etapa é importante porque nós queremos chegar lá juntos.” (Encontro realizado em 15/06/13)

Nesse contexto foram promovidos diferentes momentos de reflexão e socialização. Dentre as múltiplas reflexões em que o grupo se engajou, destacamos a reflexão sobre os cursos de formação de professores e observamos que essa reflexão contribuiu para a constituição da identidade desse novo espaço formativo, ou seja, de um espaço horizontal de formação (Bernstein, 2000).

> Leandro: “É muita contradição, desde os cursos superiores [...] eu faço muitos cursos de formação continuada e, nesses cursos, se fala muito de como trabalhar a questão didática. Mas, o curso é do mesmo jeito. Você senta lá [...]”
> Mônica: “É sempre o mesmo formato.”
> Leandro: “[...] é sempre expositivo. [..] a fala dele (formador) é para se fazer diferente, mas ele está fazendo a mesma coisa. Tudo cai numa contradição. [...] me parece um construtivista meio fingido, que você se diz ...”
> Mônica: “Isso me encantou no texto.” Leandro: “[...] é
> para não se sentir mal, mas a maioria das suas aulas vai ser tradicional.”
> Mônica: “Esta parte me encantou, gente. Parece um diário e que fui eu quem escrevi”.
> [...] Marina: “Na verdade, todos somos tradicionais e construtivistas.” [...]
> Leandro: “[...] eu acho que nós estamos acorrentados. [...] do modo como a gente aprendeu no ensino fundamental, o modo como a gente aprendeu, não o que aprendeu, mas o modo como a gente aprendeu na universidade e o modo como a gente aprende nos cursos (de formação continuada).

> Então, tudo é do mesmo jeito, a fala é diferente ... a fala muda, o conteúdo muda [..] e quer que na sala de aula quer que a gente faça o quê? [...] lá, na sala de aula, você vai ser o artista.”
> Marina: “Fala-se de inovação o tempo todo, mas na prática é sempre o mesmo.”
> Leandro: “Mas, todo resto é igual, a escola em si e o jeito da escola não muda.”
> Marta: “[...] você falou uma coisa assim, o discurso até está mudando, a palavrinha inovação está aparecendo o tempo todo. Agora, quem é que vai começar a fazer essas mudanças? [...] eu fico pensando o que que nos amarra mais. Você elencou um monte de coisas [...] são nossas amarras que temos de formação. [...] e quem vai dar esse salto? Porque se ele for de cima para baixo, ele vai continuar igual.”
> Mônica: “Eu acho que tem que ser horizontal gente, tem que começar pelo professor.”
> Lucas: “Horizontal.” [...]
> Elaine: “Na nossa escola, está tendo esse movimento [...] mas, tem que deixar bem claro: isso começou com os professores [...] quem faz somos nós.”
> Mônica: “Porque não adianta verticalizar, tem que ser horizontal.” (Encontro realizado em 03/08/13)

É perceptível que as negociações de significado desencadeadas vão ao encontro do que nos aponta Imbernón (2010), de que o professor deve ser entendido enquanto um profissional que participa ativa e criticamente no processo de inovação e mudança a partir de e em seu próprio contexto. Nesse sentido, observamos que tal dinâmica de colaboração, estabelecidas pela CoP OBEDUC PUC-SP, caminha no sentido do que nos aponta Fiorentini, de que,

> Na colaboração, todos trabalham conjuntamente (“co-laboram”) e se apoiam mutuamente, visando atingir objetivos comuns negociados pelo coletivo do grupo. Na colaboração, as relações, portanto, tendem a ser não hierárquicas, havendo liderança compartilhada e “co-responsabilidade” pela condução das ações. (Fiorentini, 2013, p. 56)

Essa concepção vai ao encontro do que nos apontam as atuais pesquisas no campo da Educação Matemática que se voltam ao estudo da Formação de Professores que ensinam Matemática, ou seja, de que é preciso dar ouvidos aos professores e torná-los protagonistas de sua formação e de seu desenvolvimento profissional (Fiorentini, 2013; Tinti, Manrique, 2016).

Nesse sentido, observamos que a CoP OBEDUC PUC-SP negociou a necessidade de constituição de um espaço horizontal de formação e que se engajou para concretizar esse desejo. Nessa perspectiva horizontal, entendemos que eles, os professores, muito podem contribuir com sua experiência e seus saberes para o desenvolvimento de estudos sobre a prática docente por apresentarem e compartilharem diferentes olhares e experiências acerca dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Assim como nos aponta Wenger *et al* (2002), no estágio potencial da CoP, evidenciamos que a definição de um domínio como uma questão latente, que foi sendo negociado, gradativamente, à medida que a CoP se engajava nos empreendimentos e buscava estabelecer uma trajetória de aprendizagem.

Além disso, analisando a participação e as negociações de significado que emergiram no estágio potencial da CoP OBECUC PUC-SP, foi possível identificar, também, o movimento de reificação. O Quadro 3 tem por objetivo apresentar algumas dessas reificações, por nós identificadas, bem como frases que evidenciaram tais reificações, uma vez que para Wenger (1998), o processo de comunicação também é uma reificação.

O que foi reificado?	
Mapa Conceitual – O Ensino de Matemática	Síntese do movimento de construção do mapa conceitual proposto.
Frases que evidenciaram as reificações	
“[...] para poder entender o quanto esse ensino da Matemática tinha relação com as palavras que nós elencamos ou com outras coisas, foi esse movimento que nós fizemos. ” (Miguel – 15/06/13)	“A partir desse mapa conceitual [...] nós conversamos, para pensarmos no que nós iremos fazer. ” (Miguel – 15/06/13)

Autonomia do professor	Qual a autonomia do professor?
Frases que evidenciaram as reificações	
“A gente trabalha de acordo com a intenção do governo (sistema de ensino) [...] não temos autonomia. ” (Elaine, 03/08/13)	“[...] imaginamos que temos autonomia, mas temos uma brecha de autonomia, quando você fecha a porta da sua sala, que é o trabalho didático [...]. ” (Marta, 03/08/13)

A colaboração profissional		Possíveis condições para que ocorra colaboração profissional na escola.
Frases que evidenciaram as reificações		
“A burocracia afasta o outro. ” (Marta, 15/06/13)	“Não é obrigação, não vem de cima para baixo, não é uma imposição [...] eu já vejo que é de cada um, da personalidade do professor. ” (Leandro, 15/06/13)	“A colaboração tem que acontecer, também, na escola [...], mas, isso só ocorre quando criamos vínculos. ” (Miguel, 15/06/13)

Formato dos cursos de Formação de Professores		Como deveriam estar organizados os cursos de Formação de Professores?
Frases que evidenciaram as reificações		
“Fala-se de inovação o tempo todo, mas, na	“Eu acho que tem que ser horizontal gente, tem que	“Se ele for de cima para baixo ele vai continuar

prática, é sempre o mesmo. ” (Marina, 03/08/13)	começar pelo professor. ” (Mônica, 03/08/13)	igual. ” (Marta, 03/08/13)

Ensino da Matemática nos anos iniciais	Havia uma suposição incutida em alguns membros de que não se ensinava “Matemática” nos anos iniciais do Ensino Fundamental
Frases que evidenciaram as reificações	
“Nós temos uma rotina semanal e essa rotina tem que contemplar Matemática, Língua Portuguesa [...]. ” (Elaine, 03/08/13)	“[...] a gente trabalhou muito o construtivismo na alfabetização e não na Matemática. Ficou no conteudismo e na técnica [...]” (Mônica, 03/08/13)

Quadro 3: Frases que evidenciam algumas reificações durante processos de negociação de significados da CoP OBEDUC PUC-SP relativas aos empreendimentos do estágio potencial. Fonte: Transcrições dos encontros da CoP OBEDUC PUC-SP.

Diante do exposto, entendemos que os encontros que constituem o estágio potencial foi um período de “aquecimento”, visto que a prática da CoP se alicerçava na integração, diálogo, compartilhamento e na criação de vínculos mais estreitos entre os participantes.

Há de se considerar, também, que, embora o estágio potencial se refira ao movimento inicial de constituição da CoP e não sejam explicitadas, de maneira direta, as aprendizagens mobilizadas, entendemos esse estágio como a preparação de um terreno fértil para o desenvolvimento de aprendizados.

Além disso, observamos que os empreendimentos propostos desencadearam, dentre outras coisas, engajamento dos membros na CoP e que é possível perceber o desenvolvimento de alguns aprendizados, tais como:

- a construção de mapas conceituais;
- a escrita e reflexão sobre a própria prática;
- a colaboração profissional;
- a reflexão sobre o papel do professor na sociedade, os desafios da profissão, bem como a necessidade de formação contínua para a superação desses desafios;
- o reconhecimento de estratégias para ensinar Matemática;
- lidar com a diversidade de perfis e trajetórias dentro da CoP.

É importante enfatizar que a trajetória de aprendizagem percorrida pela CoP OBEDUC PUC-SP não foi estabelecida de antemão, mas foi definida a partir das expectativas, das necessidades dos membros nos empreendimentos propostos.

Dessa forma, a análise dos encontros selecionados referentes ao estágio potencial evidencia, tal como apontam Wenger *et al.* (2002), o movimento de constituição da CoP, bem como a negociação de diferentes acordos entre os membros como, por exemplo, a forma de compartilhar a produção individual e coletiva, que foram incorporados e subsidiaram a prática da CoP.

5. Considerações Finais

A análise do estágio potencial da CoP OBEDUC PUC-SP corrobora com as reflexões sobre a importância de a Formação de Professores considerar novas configurações para os espaços formativos, que privilegiem discursos horizontais (Bernstein, 2000), para que tal formação contribua para a superação dos modelos pautados na racionalidade técnica (Contreras, 2002).

Se considerarmos os empreendimentos propostos no estágio potencial, podemos dizer que eles desencadearam engajamento na CoP e contribuíram para a mobilização de aprendizagens docentes, tais como: a escrita e a reflexão sobre a própria prática; a construção de mapas conceituais e o reconhecimento de estratégias para ensinar matemática.

Há de se considerar que tais aprendizagens foram mobilizadas pelo engajamento dos membros da CoP durante a realização dos empreendimentos propostos. É importante destacar, também, que no estágio potencial, a CoP se engajou na escrita de memoriais de formação e de narrativas. Compreendemos, então, que este engajamento mobilizou diferentes "conhecimentos da prática" (Cochran-Smith; Lytle, 2009).

Contudo, para Wenger (1998), em uma CoP em que se evidencia uma história de engajamento em torno de empreendimentos, visando a que tal conhecimento adquirido avance constantemente, constitui-se, também, num lugar privilegiado para a criação de novos conhecimentos.

Bibliografía

Baldini, L. A. F. (2014). *Elementos de uma Comunidade de Prática que permitem o Desenvolvimento Profissional de professores e futuros professores de matemática na utilização do software GeoGebra*. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Beline, W. (2012). *Formação de Professores de Matemática em Comunidades de Prática: um estudo sobre identidades*. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identify: theory, research, critique*. Lanham: Rowman & Littlefield.

Bogdan, R.; Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Tradução de M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Ed. Porto.

Contreras, J. (2002). *A autonomia de professores*. São Paulo: Cortez.

Cochran-Smith, M.; Lytle, S. L. (2009). *Inquiry as stance: practitioner research for nextgeneration.* New York: Teacher College Press.

Fiorentini, D. (2013). *A Investigação em Educação Matemática desde a perspectiva acadêmica e profissional: desafios e possibilidades de aproximação. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 61-82.

Foerste, E. (2005). *Parceria na formação de professores*. São Paulo: Cortez.

Gil, A. C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas.

Imbernón, F. (2010). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza*. Trad. LEITE, Silvana C. 8 ed. São Paulo: Cortez.

Lave, J.; Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Nagy, M. C. (2014). *Trajetórias de Aprendizagem de professoras que ensinam matemática em uma Comunidade de Prática*. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Oliveira, A. M. P. (2016). *Desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática: colaboração e materiais curriculares (educativos). Zetetiké,* 24(45), 157-171.

Ramos, W. R.; Manrique, A. L. (2015). *Comunidade de Prática de Professores que Ensinam Matemática como Espaço de Negociações de Significados sobre a Resolução de Problemas. Bolema*, 29(53), 979-997.

Tinti, D. S. (2016). *Aprendizagens docentes situadas em uma Comunidade de Prática constituída a partir do OBEDUC*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Tinti, D. S.; Manrique, A. L. (2016). *Teoria e Prática na Formação de Professores que ensinam Matemática: que caminhos apontam experiências com o PIBID e OBEDUC?. Educação Matemática em Revista* (São Paulo), 49B, 98-106.

Tinti, D. S. et al. (2016). *OBEDUC: análise de aprendizagens docentes num contexto formativo sobre resolução de problemas. Zetetiké*. 24(45), 29-41.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, meaning, and identity*. New York: Cambridge University Press.

_______. (2004). *Knowledge management as a doughnut: Shaping tours knowledge strategy through communities of practice. Ivey Business Journal*, January/February. London: Copyright, p. 1-8.

_______. (2011). *Comunidades de Práctica: Aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona: Paidós Editora.

Wenger, E.; Mcdermott, R.; Snyder, W. M. (2002). *Cultivating communities of practice.* Boston: Harvard Business School Press.

Autores:

Tinti, Douglas da Silva: Doutor em Educação Matemática pela PUC/SP. Coordenador e professor do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Cidade de São Paulo. Os interesses de pesquisa centram-se na formação de professores que ensinam matemática.
douglastinti@uol.com.br

Manrique, Ana Lúcia: Doutora em Educação: Psicologia da Educação pela PUC/SP e Professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Atualmente, é professora Produtividade em Pesquisa 2 no CNPq (2016-2018). Os interesses de pesquisa centram-se na formação de professores que ensinam matemática, na educação matemática inclusiva e na utilização de mapas conceituais.
analuciamanrique@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 23-43

Modos de compreender a Soma de Riemann e suas aplicações ao estar em um ambiente informatizado de aprendizagem

Luiz Carlos Leal Junior, José Milton Lopes Pinheiro

Fecha de recepción: 03/12/2015
Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	Este artículo objetiva comprender *como ocurre la constitución del concepto de Suma de Riemann mientras los alumnos estén realizando Actividades Exploratorias en un entorno informatizado de aprendizaje*. Para esto, se invitaron a desarrollar actividades junto a cosujetos de aprendizaje y a recursos tecnológicos, estudiantes de postgrado en Educación Matemática de la Universidade Estadual Paulista. Bajo perspectiva de la interrogación de esta investigación, se describieron y se analizaron las articulaciones de los sujetos en el tratamiento de las actividades. El movimiento de análisis ha permitido comprender la importancia de los recursos de la exploración junto a la informáticas para la constitución de los conceptos en Matemáticas. **Palabras-clave:** Suma de Riemann; actividades exploratorias; entorno informatizado de aprendizaje; educación matemática.
Abstract	This article aims to *understand how is the constitution of the concept of Riemann's Sum being students performing Exploratory Activities in a computerized learning environment.* To do so, they were invited to develop activities with cosubjects learning and technological resources, graduate students in Mathematics Education from the Universidade Estadual Paulista. In view of the question of this research were described and analyzed the joints of the subjects in the treatment of activities. The motion analysis allows us to understand the significance of the resources of the holding by the computer for the formation of concepts in mathematics. **Keywords**: Riemann's Sum. Exploration Activities. Computerized Learning Environment. Computing. Mathematics education.
Resumo	Este artigo tem por objetivo compreender *como se dá a constituição do conceito de Soma de Riemann estando os alunos realizando Atividades Exploratórias em um ambiente informatizado de aprendizagem*. Para tanto, foram convidados a desenvolver atividades, junto a cossujeitos de aprendizagem e a recursos tecnológicos, alunos da Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista. Sob a perspectiva da interrogação desta pesquisa, foram descritas e analisadas as articulações dos sujeitos no tratamento das atividades. O movimento de análise permitiu compreender a relevância dos recursos da exploração junto à informática, para constituição de conceitos em Matemática. **Palavras-chave:** Soma de Riemann. Atividades Exploratórias. Ambiente Informatizado de Aprendizagem. Educação Matemática.

1. Introdução

Pesquisas realizadas no âmbito do uso da Informática na Educação Matemática, como as de Powell e Alqahtani (2015) e Silva e Penteado (2009), desdobram articulações em torno do conhecimento matemático, mostrando que o avanço da presença dos recursos tecnológicos levanta seguidas interrogações sobre as possibilidades didáticas e pedagógicas das tecnologias informáticas levadas à escola. Essas questões interrogam as práticas junto às tecnologias informáticas, o conhecimento matemático constituído em ambientes informatizados, a geração de alunos em contato constante com novas tecnologias, o aprender e o ensinar valendo-se de aparatos tecnológicos, entre outros temas de estudo.

Imbricados em um contexto em que a tecnologia informática é presente, os autores deste artigo, constantemente interrogam esses temas a partir da perspectiva de suas práticas, o que faz surgir inquietações que se voltem às implicações que se desdobram nas possibilidades do uso da tecnologia informatizada nas escolas. Ir ao encontro dessas inquietações tornou-se uma tarefa constante na vida acadêmica e profissional dos pesquisadores.

Corroborou a busca de uma reflexão mais aprofundada no domínio dessas inquietações, o ingresso dos pesquisadores no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", no qual cursaram a disciplina intitulada A Utilização de Informática na Educação Matemática – no 2º semestre de 2015. O estudo aqui apresentado é fruto dessa disciplina e do trabalho solicitado pelo professor, que solicitara o desenvolvimento de uma proposta de ensino de um tema matemático junto a ferramentas computacionais.

A aplicação deste trabalho foi realizada com os alunos dessa disciplina. Foi escolhido, para o desenvolvimento do mesmo, o tema Soma de Riemann e, como apoio dado pela tecnologia, optou-se por trabalhá-lo propondo atividades na interface do *software* Geogebra, acoplado a um *blog* de autoria dos pesquisadores, disponível em: http://integracaoriemann.blogspot.com.br (LEAL JUNIOR; PINHEIRO, 2015).

Essa proposta foi aplicada aos 20 alunos da disciplina, estando os mesmos divididos em dez duplas, além do professor da disciplina, que realizou as atividades individualmente. Vale ressaltar que a maior parte dos alunos são professores de Matemática, todos participam do referido Programa de Pós-Graduação.

Há diversas pesquisas em Educação Matemática que têm indicado dificuldades com relação ao ensino e à aprendizagem do Cálculo, tanto Diferencial quanto Integral, bem como seus desdobramentos, os quais podem ser encontrados em Silva (2011), Trindade e Wanghon (2011), Silva et al. (2014), entre outros autores.

Almejando entender como se dá a introdução à noção de integral nos cursos superiores de Ciências Exatas, primeiramente busca-se neste estudo compreender como ela é feita em livros didáticos. Foi possível constatar que há muitas formas de introduzir o conceito de área, como uma proposta de introdução à noção de integral definida. As obras analisadas fazem essa introdução pelo conceito de Soma de Riemann. A essa análise, mais adiante é dedicada uma seção deste texto.

Todavia, as abordagens são variadas, podendo ser descritivas, breves, prescritivas, exemplificadoras, construtivistas ou formais. Mas a maioria o faz de maneira lacônica, não sendo permitido aos estudantes inferirem e conectarem as ideias, além de não conseguirem trabalhar os problemas geradores de um novo conceito. A Soma de Riemann é posta à percepção como um conteúdo heurístico, ou um conteúdo que não possibilita a conexão com a utilidade das ferramentas usuais para se calcular a área abaixo de uma curva/função.

Vê-se nas tecnologias informatizadas oportunidade para oferecer um tratamento que favorece a compreensão da Soma de Riemann que os livros didáticos não têm dado; uma compreensão que se dá no envolvimento do aluno com o tema junto a um *software* e, no caso proposto, um *software* de Geometria Dinâmica - GD. Para isso, questionam-se o dinamismo dos *softwares*, o movimento de objetos geométricos e suas relações passíveis de visualização. Borba e Penteado (2010) dizem que atividades em *softwares* gráficos favorecem a visualização e a experimentação, ao trazer essas possibilidades para o centro da aprendizagem matemática. “As novas mídias, como os computadores com *softwares* gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia e física” (p. 37).

Passa-se, então, a pensar nas atividades e nos objetivos das mesmas, de forma a melhor tratar os conceitos pretendidos. Veem-se com potencial significativo ao objetivo desta pesquisa as Atividades Exploratórias, que, conforme propõe Ponte (2003), apresentam uma estrutura prévia que deve ser explorada. Estrutura esta que sugere caminhos, mas os deixa abertos para que os alunos possam fazer conjecturas e buscar meios para validá-las. Ao interrogar sobre as Atividades Exploratórias a serem desenvolvidas, ficou evidente que a elaboração não seria uma tarefa simples. Junto à elaboração foi necessário antever objetivos, bem como os meios para alcançá-los, os quais seriam questões levantadas *a priori*, de forma a motivar uma busca que se iniciasse no desafio intelectual de compreendê-las, já articulando primeiras compreensões em torno do conceito. O encaminhamento deveria ser cuidadosamente apresentado, de forma a orientar os alunos à concepção dos conceitos pretendidos.

A introdução à integração, as contribuições da tecnologia para essa introdução e o tratamento exploratório de atividades para constituição do conceito de Soma de Riemann se mostraram temas relevantes a este estudo, especialmente por permitirem interrogar a construção do conceito por meio de Atividades Exploratórias expressas em ambientes tecnológicos. Essa interrogação, analisada com colegas de curso, com professores e autores de livros didáticos foi clareando-se, de modo a poder ser assim expressa: *Como se dá a constituição do conceito de Soma de Riemann estando os alunos realizando Atividades Exploratórias em um ambiente informatizado de aprendizagem*?

2. O que a questão interroga e a torna relevante

Para compreender o que é intencionado neste estudo, é importante buscar e evidenciar o que esta questão proposta interroga. Ela interroga, sobretudo, o *conceito de Soma de Riemann.* Junto a ele estão suas aplicações, seja em situações teóricas do Cálculo I ou em situações que envolvam aplicações do cotidiano, especialmente as relacionadas à formação acadêmica e profissional do estudante. Com isso, torna-se significativo buscar em livros didáticos, bem como em pesquisas acadêmicas, como se dá a introdução à integração, se há um tratamento da Soma de Riemann e como este tratamento é dado.

Interroga também pela *Atividade Exploratória*, no âmbito da investigação matemática, por sua elaboração e objetivos. Atividades de cunho exploratório abrem possibilidade à aprendizagem por descoberta, visto que os conceitos pretendidos pelo professor não são previamente dados, e o estudante deve buscar respostas para as questões levantadas. Questões essas que devem ser bem elaboradas e delineadoras de um pensar que possibilite ao aluno a percepção e a compreensão do conceito.

Questiona ainda pelo *ambiente informatizado de aprendizagem*, que pudesse satisfazer ao objetivo de apresentar as atividades, ofertar meios e ferramentas para melhor tratá-las, bem como possibilitar o registro dos dados que seriam necessários às considerações possíveis a este estudo. A tarefa de pensar em um ambiente informatizado que potencialize o aprendizado perpassa o pensar em acessibilidade, em potenciais de ferramentas, em questões estéticas que possibilitam um ambiente mais convidativo e, em outros fatores, que fazem dessa tarefa algo complexo. Tal complexidade sugere estudos mais fundantes em torno desse tema, e sobre como efetuar/compor experimentos junto a ferramentas computacionais, buscando otimizar o ambiente de aprendizagem.

Realizando o exercício de interrogar a questão que foi se constituindo, e aqui é expressa, é possível entender o que ela busca e, também, evidenciar outras questões que se desdobram, que, ao serem tratadas, contribuirão para compreensões relevantes a este estudo.

3. Formalização dos conceitos das Somas de Riemann

Há na literatura corrente sobre o tema cinco tipos de Somas de Riemann, os quais serão apresentados abaixo, cujas definições são interpretações de Leal Junior e Pinheiro (2015) das obras estudadas, com um olhar diferenciado, às quais foi conferida uma abordagem menos restritiva e mais completa do que aquelas apresentadas pela maior parte dos livros-textos analisados.

Primeiro, sobre a *Soma ao Ponto Médio - SPM*. Esse é o tipo mais comum de Soma de Riemann destacada nos livros. Autores, os quais serão apresentados na próxima seção, recorrem a ele em algum momento de suas teorizações matemáticas. Tal modelo consiste em: dada uma função contínua *f* definida no intervalo $[a, b]$, o qual será subdividido em n subintervalos, de onde se configurará a seguinte partição: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$. Assim, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ será o comprimento relativo ao subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, de onde, recorrendo-se ao Teorema do valor médio[1], existirá um elemento t_i qualquer, o qual se denomina aqui de ponto amostral, de modo que a cada $i = 0,1,2,\dots,n,$ se possa construir um retângulo de base Δx_i e altura $f(t_i)$.

Então, ao somar a área dos n retângulos, obtém-se uma aproximação da área sob o gráfico da função $f(x)$, que será dada por $A \simeq \sum_{i=1}^{n} f\,(t_i)\Delta x_i$, e definirá a Soma de Riemann, quando se recorre ao ponto médio. Sobretudo, a área da região, nessas condições, será dada exatamente quando se aplica o limite, ou seja, fazendo n tender ao infinito: $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(t_i)\Delta x_i$.

Aliás, devido à regularidade da partição, pode-se inferir que todos os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ terão a mesma medida, isto é, todos os Δx_i terão medidas iguais a $\Delta x = (b-a)/n$.

A *Soma à Direita – SD* constitui-se de um raciocínio bastante similar ao anterior. Entretanto, ela pode ser analisada de um ponto de vista bem geral, pois vale para qualquer tipo de função contínua e, principalmente, que a maioria dos livros didáticos prefere omitir-se, trabalhando apenas com as funções crescentes e/ou decrescentes.

Isso porque, dado o subintervalo $[x_{i-1}, x_i], i = 0,1,2,\dots,n,$ a altura do retângulo será calculada no extremo superior (supremo), ou máximo, desse intervalo, $f(x_i)$. Logo, a Soma de Riemann, para um dado n inteiro positivo, em que a base de todos os retângulos terá a mesma medida, será $A \simeq \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x$, e, quando se toma seu limite, tem-se a área $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x$.

A *Soma à Esquerda – SE* é obtida de maneira análoga à SD. Todavia, o que as diferencia é que, dessa vez, a altura do retângulo será dada pela aplicação da função no extremo inferior (ínfimo), ou mínimo do intervalo, $f(x_{i-1})$. Logo, a Soma de Riemann, para um dado n inteiro positivo, será $A \simeq \sum_{i=1}^{n} f\,(x_{i-1})\Delta x$, e, ao aplicar o limite, tem-se a área $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_{i-1})\Delta x$.

Assim como na SD e na SE, na *Soma Superior – SS*, haverá a determinação da função e do intervalo para o cálculo da área de retângulos de bases cada vez menores. Proceder-se-á com a partição do intervalo em n subintervalos da forma $[x_{i-1}, x_i], i = 0,1,2,\dots,n,$ e em cada novo subintervalo toma-se o elemento $f(M_i)$, que será o máximo valor que *f* assume no i-ésimo subintervalo.

Sendo assim, como não haverá nesse subintervalo maior valor para a função em questão e, consequentemente, retângulo mais alto dentro do subintervalo em questão, tem-se, na soma total das áreas dos retângulos dessa partição, uma área

[1] O Teorema do Valor Médio: Se f é uma função contínua em [a,b] e derivável em]a,b[, então existe c pertencente a]a,b[, tal que a reta tangente ao gráfico de f traçada pelo ponto (c,f(c)) é paralela à reta que passa por (a,f(a)) e (b,f(b)), isto é, $f(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. (BARUFI et al., 2002).

maior que a área da função original, o que lhe garante o nome de soma superior, e que permite uma abordagem diferenciada, e até mesmo diferente, daquela usual, que geralmente é feita pela análise do comportamento da função, sendo ela crescente ou decrescente.

Logo, a Soma de Riemann - SS, para um dado n inteiro positivo, em que a base de todos os retângulos terá a mesma medida, será $A \simeq \sum_{i=1}^{n} f\,(M_i)\Delta x$, e, quando da aplicação do limite, tem-se a área $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(M_i)\Delta x$.

De modo análogo à SS, define-se a *Soma Inferior - SI*. Não obstante, a diferenciação dos conceitos reside no fato de tomar o elemento $f(m_i)$, que será o valor mínimo de *f* no i-ésimo subintervalo. Sendo assim, como não haverá, nesse intervalo, menor valor para a função em questão e, consequentemente, retângulo menor dentro do subintervalo, tem-se, na soma total das áreas dos retângulos dessa partição, uma área menor que a área da função original, o que lhe garante o nome de soma inferior.

Então, a soma de Riemann - SI, para um dado n inteiro positivo, será $A \simeq \sum_{i=1}^{n} f\,(m_i)\Delta x$. Quando tomar o limite nessa aproximação, tem-se a área $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(m_i)\Delta x$.

É possível perceber, de acordo com as formulações apresentadas, que são trabalhadas em alguns livros didáticos, como Stewart (2013) e Thomas, Weir e Hass (2012), que os cinco tipos de Somas de Riemann são equivalentes. Para isso, basta perceber que, dadas as devidas partições, os pontos amostrais[2], o somatório e o limite dependerão, de uma maneira exclusiva, do parâmetro n. Quando o mesmo tende ao infinito, teremos a área, numa composição de retângulo de base cada vez menor (tendendo a zero) e alturas limitadas sobre a curva, desde que a função seja contínua e limitada ao intervalo [a,b].

4. Uma breve análise da abordagem dos livros didáticos analisados

Em prol dos objetivos desta pesquisa, fez-se necessário o estudo de como é abordada a Soma de Riemann em livros didáticos[3], e suas diferenciações conceituais e metodológicas. Com isso, é dedicada uma seção deste estudo a esses instrumentos tão significativos à temática em questão.

[2] Sejam eles aqueles determinados pelo teorema do valor médio, pelos extremos dos subintervalos e pelos pontos que maximizam ou minimizam os valores da função em questão. Também são os pontos a quem recorreremos para os respectivos cálculos das áreas dos sub-retângulos, os quais serão arbitrários na SPM, SS e SI e fixos na SD e SE.

[3] Os livros analisados, para elaboração deste trabalho, foram os que tiveram maior destaque em ementas de cursos de Cálculo I e Funções de uma variável. Isso para cursos da área de ciências exatas (matemática, física, química, engenharias e superiores de tecnologia) de centros universitários como Universidade de São Paulo-USP, Universidade Estadual de Campinas-Unicamp, Universidade Estadual Paulista-Unesp, Instituto Federal de São Paulo-IFSP, Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC, Universidade Federal de São Carlos-UFSCar, em uma pesquisa feita nos sites dessas instituições no período de 01/10/2015 a 10/10/2015.

Ao analisar os livros: Flemming e Gonçalves (2006), Iezzi, Murakami e Machado (2013), Guidorizzi (2008), Stewart (2013), Thomas, Weir e Hass (2012), Larson, Hosteler e Edwards (2006), percebe-se que poucos trazem uma abordagem da Soma de Riemann que seja agenciadora e significativa, ou que permita ao leitor e ao estudante uma formação sólida desse conceito. Uma abordagem superficial da Soma de Riemann pode causar dificuldades à sua apreensão, dado que um construto mal fundamentado, que não tenha sido potencializado e abordado de uma maneira efetiva, não possibilita ao estudante entender, compreender e relacionar-se com as propriedades que subjazem a esse conceito.

Na esteira dessas considerações, é feita aqui uma análise do tratamento da Soma de Riemann nas três primeiras obras acima, as quais a abordam de modo semelhante, sendo ela obtida por um procedimento bastante parecido com o proposto na Soma ao Ponto Médio. No entanto, os autores apresentam uma restrição sobre a função *f*, que deve ser contínua e não negativa, sem nenhuma explicação sobre a última restrição, que é feita para conferir melhor visibilidade e evitar o problema de área "negativa". Também não é justificada a existência do ponto amostral para o cálculo das alturas dos retângulos em cada subintervalo.

Quando do cálculo do limite para a definição de área, não é fornecida explicação sobre os termos que compõem a fórmula, tem-se a possibilidade de pensar que os subintervalos podem não ter a mesma medida, e de questionar a existência dos limites. A percepção dos conceitos de infinitésimos e diferenciais que definem a integral definida não se trata de uma tarefa simples, portanto, a não evidenciação desses conceitos pode prejudicar o aprendizado de Integral e consequentemente de outros conceitos que se utilizam da mesma. Os autores estudados não detalham nem exploram, em suas obras, os conceitos de infinitésimos e diferenciais, não apresentam exemplos, e os exercícios relacionados são primários. Todavia, a parte operacional da integração definida, já como ente matemático constituído, é bastante forte e coerente.

Por outro lado, as três últimas obras acima citadas são similares e completas na abordagem da Soma de Riemann. Os autores iniciam uma explanação sobre somas finitas e áreas de polígonos, para que se tenha ideia do porquê de se utilizar retângulos para trabalhar essa definição, além de, em seguida, relacionar os tipos de Soma de Riemann, que aqui foram abordados. Esses trabalhos possibilitaram uma visão geral dos conceitos envolvidos e, não menos importante, deram uma visibilidade maior à problemática do cálculo de área. Com relação às SD, SE, SS e SI, trabalharam de modo intuitivo e por meio de exemplos. Já a formalização matemática da Soma de Riemann propriamente dita, fizeram-na pela SPM, apresentando seus modos construtivos de trabalho.

Os autores não restringem a função, exigindo que a mesma seja não-negativa, o que lhes confere uma generalidade maior, e maior abrangência para sua construção. Destacam que a área da função será exatamente igual ao limite da soma, e que todos os tipos de soma, que foram mencionadas acima, são equivalentes, quando se toma seu limite. Estes trabalhos didáticos trazem muitos exemplos diretos de suas definições, são bastantes coloridos e visuais, haja vista a abordagem de problemas sobre distância e deslocamento que seguem a integral definida, os quais são apresentados com muitos detalhes, e são trabalhados em meio a exercícios práticos e contextualizados.

.

5. Ideias que se mostram importantes para o estudo almejado

Ao interrogar a questão de pesquisa, mostrou-se significativo adentrar reflexivamente em temas que se apresentam, especialmente em o que se entende por Soma de Riemann, procurando expor um tratamento mais geral possível, sem perda de generalidade, ou apelando às restrições que os autores dos livros didáticos supracitados usam/usaram para ilustrar seus trabalhos.

Decorrente do estudo dessas obras, vislumbra-se a importância de se valorizar a constituição do conceito de Soma de Riemann por parte do sujeito, por meio de Atividades Exploratórias. Para Leal Junior e Onuchic (2015), trabalhar nessa perspectiva não limita os estudantes a trabalharem apenas com a definição, mas permite-lhes recorrer e visualizar outros conceitos relacionados, como limites, áreas de polígonos, questões de cinemática, funções e volumes.

Entende-se que se mostra significativo à constituição do conhecimento o tratamento de Atividades Exploratórias. Ponte (2003, p. 27) aponta que, ao trabalharem com Atividades Exploratórias, os alunos desenvolvem habilidades e capacidades “que envolvem conhecimentos de factos específicos, domínio de processos, mas também capacidades de raciocínio e de uso desses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas”, por meio da criticidade e reflexão sobre ideias e aplicabilidade das mesmas ao “lidar com situações das mais diversas”. Explorar em sala de aula permite aos alunos, conforme Silva et al. (1999, p. 72), formar conjecturas, avaliar sua plausibilidade, permite “a escolha dos testes adequados para sua validação ou rejeição. Permitem ainda, procurar argumentos que demonstrem as conjecturas que resistiram a sucessíveis testes e levantar novas questões para investigar”.

Uma Atividade Exploratória possui estrutura aberta (PONTE, 2003), pois ela sugere aos alunos algumas atitudes, cujas implicações podem balizar conjecturas, reflexões e a concepção de conceitos matemáticos não esperados pelo professor. Apresenta-se aos alunos um modelo pronto, que deve ser explorado, compreendido e analisado. Sobre isso, Gravina e Santarosa (1999, p. 81) dizem que não são as ideias dos alunos que são representadas na atividade, há um desafio de compreendê-las. “A própria compreensão do modelo, o entendimento dos princípios de construção, já são, por si só, estímulo ao raciocínio, que favorecem a construção de relações e conceitos”.

A proposta de trabalhar Atividades Exploratórias pode ser tratada também junto às Tecnologias da Informação e Comunicação - TIC, visto que a informática fornece ferramentas e meios que otimizam a busca e a exploração. Sobretudo, muito além das tarefas/atividades, importa considerar, também, a forma como são trabalhadas em sala de aula e no ambiente informatizado de aprendizagem. Segundo afirmam Ponte et al. (1998),

> Não basta quando se oferece aos alunos experiências matemáticas mais interessantes. Na verdade, ao pretender que os alunos desenvolvam a capacidade de formular problemas, de explorar, de conjecturar e de raciocinar matematicamente, que desenvolvam seu espírito crítico e a flexibilidade intelectual é-se levado a um outro modo de conceber o ensino e a criar um outro ambiente de aprendizagem. (Ibidem, p. 11).

Este estudo recorre às TIC como mecanismo/recurso de ensino e de aprendizagem, em que residem tecnologias informáticas, como um mediador que, de acordo com Oliveira (2005), corrobora o desenvolvimento de ferramentas que trazem benefícios e descobertas ao trabalho do professor, e melhor clareza sobre como trabalhar o conhecimento no âmbito de um conceito matemático, a exemplo de construção de gráficos e mobilização de várias representações matemáticas.

Para Simões (2000), o professor, de posse de seu material intelectual, o que inclui os livros didáticos, não é o único detentor do conhecimento e, atualmente, as informações são veiculadas de formas distintas e diversas, a exemplo das TIC. E, com o crescente aumento dos meios e formas de informações, os estudantes vêm à escola imbuídos de novas linguagens e ferramentas, como *softwares*, ambientes de aprendizagens e materiais didáticos diferenciados.

Borba e Penteado (2010, p. 64) dizem que o lançar mão do uso de TIC "não significa necessariamente abandonar outras tecnologias. É preciso avaliar o que queremos enfatizar e qual a mídia mais adequada para atender nosso propósito" (Ibidem, p. 64). Entretanto, quando se situa num cenário de inserção de tecnologia informática no ambiente escolar, pode-se perceber que a mesma tem sido vista "como um potencializador das ideias de se quebrar a hegemonia das disciplinas e impulsionar a interdisciplinaridade" (Ibidem, p. 65).

Informação não é conhecimento, ela deve ser trabalhada de modo a tornar-se um conhecimento (GLEICK, 2013). Por esse motivo, traz-se neste trabalho um local de informações, bem como um meio de trabalhá-las, um instrumento de mediação que amplia a capacidade dos estudantes, de modo a torná-las conhecimento a respeito do tema Soma de Riemann, como uma abordagem introdutória ao cálculo de áreas. Para Pierce (1975), um trabalho nesses moldes visa a atuação no meio em que se vive, além da percepção do signo/elemento criado pelo homem, e que se constitui como um objeto, forma ou fenômeno representando algo diferente de si mesmo.

A potencialidade das TIC, focada junto ao ensino e à aprendizagem de Matemática, foi solo sobre o qual foi constituída a proposta de introdução à integração por meio de Soma de Riemann, utilizando o s*oftware* Geogebra, no qual a questão da visualidade, que tem se mostrado como uma dificuldade em muitas situações pode ser melhor tratada, visto que o mesmo fornece ferramentas que facilitam a construção de gráficos que são muitas vezes inviáveis sem o auxílio do computador.

O ambiente de GD se mostra aberto à elaboração e realização de Atividades Exploratórias. Explorar implica em ações de testar, observar e conjecturar. A opção de "arrastar" dos *softwares* de GD oferta essa mobilidade aos alunos, permitindo-lhes transformar continuamente, e em tempo real, um objeto ou construção. "Sem dúvida, a principal característica de um *software* GD é a possibilidade do arrastar. [...] essa característica permite que estudantes explorem situações problema e façam conjecturas sobre o conteúdo que estão estudando" (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 1070).

Segundo Pinheiro (2013), "o modo arrastar possibilita ao aluno estabelecer alguns pensamentos, e aplicá-los, no intuito de verificar a sensatez ou veracidade dos mesmos". O dinamismo proporcionado pelo *software* durante a exploração permite a visualização de objetos que se movem conforme a intenção do aluno. Junto à percepção do que se move, pode-se manifestar o que é invariante nesse movimento, e que determina as propriedades constituintes do objeto. A percepção de invariantes é fortemente destacada em trabalhos como os de Pinheiro (2013) e Powell e Alqahtani (2015), que dizem da relevância do aprendizado pela percepção do que não é *a priori*, mas que é descoberto pelos alunos no ato de mover. Com isso, uma propriedade pode ir constituindo-se à medida que o aluno vai movendo-percebendo-compreendendo.

Nessa perspectiva, as Atividades Exploratórias em ambientes GD devem convidar os alunos a explorar propriedades e teoremas dados, mas, também, a explorar objetos que, postos em determinada situação de movimentar, abrem possibilidades de percepção de propriedades imanentes aos mesmos.

6. Metodologia e procedimentos de investigação

Adere-se aqui a um modo de investigar no qual é preciso uma atentividade ao que é possível ver a partir de uma percepção imediata do vivido, que leva os procedimentos metodológicos desta pesquisa a adentrar as nuanças da investigação qualitativa. Sob a perspectiva desse modo de pensar, percebe-se, entre tantos outros aspectos, o que é partir para uma pesquisa com abertura para novas categorizações e para o entendimento do que é olhar e buscar compreender diretamente as coisas onde elas se manifestam originalmente, sem filtros teóricos que digam, de antemão, o que elas são.

Para esta pesquisa, foi criado um *site*, na modalidade *blog*, onde foi aberta a possibilidade de vivenciar a temática da introdução à integração pela Soma de Riemann. Nele foram postas algumas reflexões e problemas que se mostraram interessantes para a abordagem desse conceito.

Foram propostas as Atividades Exploratórias no *blog*, conforme especificado mais adiante, de modo a permitir ao estudante, com o auxílio dos pesquisadores, enquanto mediadores, tratar as informações expressas nas mesmas, de tal forma que, desse tratamento possam se constituir saberes matemáticos diversos, mesmo tendo as atividades o fundo propiciado pela Soma de Riemann.

Após a realização das atividades, os sujeitos foram convidados a visualizar duas postagens no *blog*. A primeira dizia da visão dos pesquisadores a respeito da problemática que envolve o conceito de Soma de Riemann. A segunda apresentava referências de alguns materiais didáticos, disponíveis na rede, dentre os quais dois ambientes do Geogebra Tube[4], em que os alunos poderiam interagir com a

4 Disponível em: *blog*: https://tube.geogebra.org/?lang=tr. Acessado em 15/11/2015.

ferramenta, e perceber como se comporta a Soma em três perspectivas: SS, SI e SPM. Além disso, eles poderiam alterar as funções, os intervalos de definição das mesmas e o número de retângulos para estimar o cálculo da área.

Nas três postagens, as quais foram denominadas Matemáticas, foi proposta, em cada uma, uma atividade. Foi disponibilizada uma interface do *blog* com o Geogebra, em que o aluno recebia algumas questões que permeariam sua atividade de maneira descritiva, reflexiva, prescritiva, visual e analítica. Os estudantes buscariam, por meio das orientações, adentrar a formalização dos conceitos e intuir onde poderiam chegar em termos do cálculo de áreas. Foi criado um ambiente, por meio do Google Drive, para que os alunos, ao final de cada questão, pudessem escrever suas respostas, e em seguida enviá-las aos professores, em tempo real, de forma síncrona. Isso além do espaço, para comentários, disponível no próprio *blog*, em que os estudantes poderiam emitir suas opiniões sobre o material e a dinâmica daquela proposta de aula.

As atividades foram trabalhadas em duplas, dado o objetivo de um aprendizado que se dá também na percepção do outro, enquanto cossujeitos de aprendizagem, em um envolvimento em que o aprender e o aprendido são compartilhados.

7. Construção e análise dos dados

Aqui são apresentadas as atividades junto ao tratamento dado pelos sujeitos no envolvimento com as mesmas, ao mesmo passo em que são articuladas compreensões dos pesquisadores sobre a percepção e construção de conceitos que foram se mostrando aos sujeitos na vivência com as atividades. Entende-se ser suficiente, para a análise, trazer apenas algumas respostas dadas, mas que expressaram o mesmo sentido das demais respostas.

Intencionando manter a credibilidade da análise, foi recortado da planilha do Google Drive, para a qual os alunos reportaram suas articulações, um conjunto de respostas, sem mudar suas ordens prévias, nem mesmo inserir outras respostas neste conjunto, ou retirá-las. Com isso, visa-se não conduzir a análise, trazendo a ela respostas que, por julgamento, são ditas mais elaboradas e favoráveis.

Na primeira atividade proposta no *blog*, foram delineadas questões que, ao serem tratadas, pudessem permitir aos alunos chegarem ao conceito de Soma de Riemann, experimentando as possibilidades dinâmicas e visuais dadas na interface do *software* Geogebra. A atividade foi assim posta:

Use retângulos para estimar a área sob a curva y = e^x no intervalo [0, 1], atendendo os passos que seguem:

***Item 1* -** Marque a opção Mostrar Soma Inferior. Observe a área determinada por esta soma.
***Item 2* -** Marque a opção Mostrar Soma Superior. Observe a área determinada por esta soma.

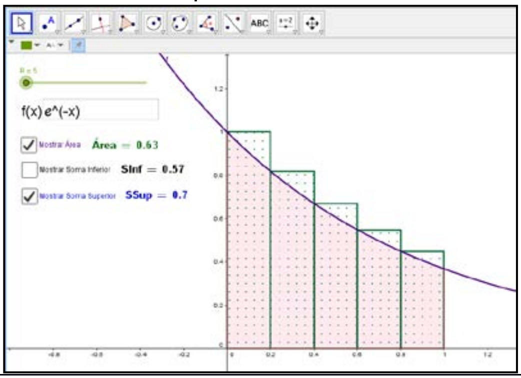


Figura 1: Atividade Exploratória 1.
Fonte: Os autores.

Para esta atividade, algumas questões e situações foram propostas. Elas são apresentadas aqui junto a algumas das respostas dadas pelos alunos.

QUESTÃO 1 - *O que pode ser dito sobre a área sob a curva quando olhada a soma do item 1? O que pode ser dito quando olhado o item 2? E o que pode ser dito sobre a área sob a curva quando olhados simultaneamente os itens 1 e 2?*
R1 - A soma inferior resulta numa área menor que a área real; e a soma superior dá uma área maior. Quando olhado simultaneamente, uma soma compensa a outra.
R2 - Utilizando a soma inferior (item 1), quanto mais retângulos, a área da figura aumenta e aproxima da área igual a 0,63. Utilizando a soma superior (item 2), quanto mais retângulos, a área da figura diminui e se aproxima da área igual a 0,63. Observados os itens 1 e 2 simultaneamente, vemos que os retângulos que faltam na soma inferior e o que ultrapassa pela soma superior se complementam.
R3 - A soma 1 chega ao valor mais próximo do exato de forma crescente, já a segunda de forma decrescente. E a área da curva é a integral.
QUESTÃO 2 - *Diga sobre a área sob a curva, agora estudando a Soma Inferior e Superior quando o intervalo é dividido em 8 partes, ou seja, considerando as áreas de 8 retângulos.*
R1 - Aumentando-se o número de retângulos, a soma de suas áreas aproxima-se mais da área real sob a curva.
R2 - A soma inferior é igual a 0,59. A soma superior é igual a 0,67. Percebemos que falta 0,04 na soma inferior e que sobra 0,04 na soma superior em relação à área de 0,63. Ou seja, uma se aproxima de 0,63 crescendo e a outra decrescendo.
R3 - O valor superior é aproximado para menos e o valor inferior aproximado para mais.
QUESTÃO 3 - *Aumentando gradativamente o número de retângulos no intervalo de 0 a 1, o que acontece com as somas Inferior e Superior ao serem comparadas com a área sob a curva?*
R1 - A soma superior e inferior vão se aproximando da área real.

R2 - Aumentando-se, gradativamente, a soma de suas áreas aproxima-se cada vez mais da área real sob a curva, ou seja, diminui-se a diferença entre a área sob a curva e a área determinada pelas somas superior e inferior.
R3 - As somas se aproximam a área da curva que é de 0,63.
QUESTÃO 4 - *Se pensarmos em um número n de retângulos, que tende ao infinito, o que pode ser dito sobre as áreas em questão?*
R1 - Elas são iguais.
R2 - Poderemos dizer que a área sob a curva é igual ao limite da soma das áreas dos n retângulos, quando n tende ao infinito.
R3 - Os retângulos cada vez ficarão próximos um ao outro e chega um momento em que a soma superior e inferior manterão o mesmo valor da área, independente de acrescentar outros retângulos.

Tabela 1: Atividade Exploratória n. 1.
FONTE: Material dos autores.

Dispôs-se um percurso a ser tomado pelos alunos para conduzi-los ao trabalho com determinado número de retângulos em um intervalo e, em seguida, ao propor o aumento gradativo da quantidade de retângulos, abriu-se a possibilidade da percepção de um invariante, a aproximação da área sob a curva através de SS e SI. Uma vez compreendido isso, aleijou-se uma generalização ao pedir aos alunos que trabalhassem com um número de retângulos significativamente alto.

Este percurso permitiu aos alunos diferenciar a área das somas finitas e, a partir delas, trabalhar as noções de limite e infinito, ao estudarem as somas em diferentes intervalos e números de retângulos. Tais noções são complexas, mas, nessa atividade, mostraram-se mais acessíveis, dadas as possibilidades dinâmicas/visuais do *software,* postas à disposição junto a esta atividade.

Na esteira dessas considerações, entende-se que as questões levantadas e as possibilidades do *software* deram conta de ofertar aos alunos uma percepção da singularidade das áreas pautadas, bem como das relações entre as mesmas. Mesmo sendo um conhecimento prévio da maior parte dos alunos, o conceito de Soma de Riemann, tal qual proposto na atividade, mostrou-se desafiador, visto que eles se embrenharam numa busca e, ao final, articularam suas compreensões, muitas delas desprendidas da formalidade posta nos livros. A motivação expressa pelos alunos no envolvimento com essa atividade, e o êxito dos mesmos ao argumentarem coerentemente sobre áreas e noção intuitiva de Soma de Riemann, conduzem esta pesquisa ao entendimento de que há potencial de aprendizado em atividades cuja proposta é o aprender explorando.

Sem falar de Integral, os alunos conseguiram perceber e expor que a soma das áreas dos retângulos, quando o número deles tende ao infinito, é igual à área sob a curva. Entende-se que essa percepção dá abertura ao tratamento de Integral. Abertura essa que se deu na intenção do aluno em estar com a atividade e a buscar as respostas que a mesma lhe solicitava.

A segunda atividade diz da aplicação de integral à cinemática, mais especificamente na questão da relação entre velocidade e deslocamento. Motivou esta questão a percepção da dificuldade de muitos alunos em relacionar a curva e a área limitada pela mesma em determinado intervalo e, até mesmo, em trabalhar com essa relação. Então, a atividade foi proposta para possibilitar, aos sujeitos da pesquisa, a percepção do que diz a curva em relação à área e do que diz a área em relação à curva, mais especificamente ao olhar para a "curva velocidade" e para o deslocamento dado pela área sob a mesma, em um intervalo definido, estando os sujeitos novamente explorando junto ao ambiente de GD.

Fica evidente que não apenas cada atividade possui uma estrutura que propõe um movimento aos alunos rumo a um conceito, mas as atividades, tomadas como um todo, também delineiam um roteiro ao se completarem, no sentido de que o apreendido com uma pode contribuir para o tratamento da outra. A Atividade Exploratória 2 foi assim posta:

Encontrar o deslocamento de um objeto durante um certo período de tempo, sendo que a velocidade do objeto é conhecida em todos os instantes, é uma tarefa simples, visto que problemas como este podem ser modelados pela fórmula: d = v . t (deslocamento = velocidade x tempo). Mas, e se a velocidade variar? Vamos investigar o problema no suposto caso a seguir:

Tempo (s)	0	0,25	0,5	0,75
Velocidade (km/h)	4	2,81	1,75	0,81

Os pares ordenados (tempo, velocidade) estão representados no eixo cartesiano que segue, bem como a curva f(x) que os contém:

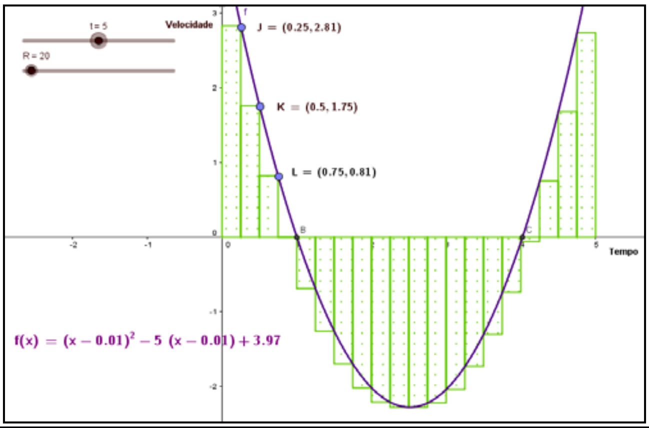


Figura 2: Atividade Exploratória 2.
Fonte: Os autores.

Foram levantadas as seguintes questões aos alunos:

QUESTÃO 1 - *O que representa a área de cada retângulo? O que representa a soma destas áreas?*
R1 - Representa o deslocamento naquele espaço de tempo. A soma representa o deslocamento total.
R2 - O produto representa a posição naquele instante e a Soma é o deslocamento naquele intervalo de tempo.

R3 - A área do retângulo representa o Deslocamento e a soma das áreas a distância.
QUESTÃO 2 - *O que pode ser dito sobre a curva f(x)?*
R1 - Representa a velocidade em relação ao tempo.
R2 - É uma parábola com duas raízes.
R3 - A curva gera o deslocamento expresso pela função.
QUESTÃO 3 - *O que pode ser dito sobre a área sob esta curva f(x)?*
R1 - Deslocamento do objeto.
R2 - A área representa o deslocamento no intervalo de tempo.
R3 - Representa a distância percorrida.
QUESTÃO 4 - *Se tomados outros tempos no intervalo [1, 4], e aumentado o número de retângulos, o que pode ser dito sobre a soma das áreas dos retângulos contidos neste intervalo?*
R1 - Esta área é negativa, pois está abaixo do eixo x.
R2 - A área dos retângulos se aproxima da curva, representando a distância percorrida no momento em que o deslocamento está sendo oposto ao da origem.
R3 - Quanto maior o número de retângulos, mais preciso será o valor da área.
QUESTÃO 5 - *Tomando o intervalo [0, 6], o que pode ser dito sobre a soma das áreas dos retângulos neste intervalo?*
R1 - Nos intervalos de 0 a 1 e de 4 a 6, a soma das áreas dos retângulos é positiva, pois está acima do eixo x; já nos intervalos de 1 a 4, a soma das áreas dos retângulos é negativa.
R2 - De zero a 6 tem três áreas, a soma delas vai dar negativo, pois a área da curva inferior ao eixo x é maior que as áreas que são superiores ao eixo x.
R3 - Quanto mais retângulos, mais se aproxima da área sob a curva (que é o deslocamento).

Tabela 2: Atividade exploratória n. 2.
FONTE: Material dos autores.

A percepção primeira, de que a área de um retângulo representa o deslocamento, possibilitou que os alunos concebessem o conhecimento de que a área sob uma curva, dada por uma "função velocidade", considerando um intervalo, determina o deslocamento de um objeto. Este tratamento *a priori* trata-se de uma das maneiras de oportunizar a percepção de que a integral da "função velocidade", em determinado intervalo, fornece o deslocamento. Muitas vezes, apenas é dito "a integral da velocidade é igual ao deslocamento", informação essa que vem a ser abstrata quanto à formação dos conceitos envolvidos e, com isso, passa a ser decorada pelos alunos, e não entendida.

Uma vez compreendido o deslocamento enquanto área sob a curva de uma “função velocidade” em um intervalo definido, que foi objetivo das questões 1, 2 e 3, abriu-se com as questões 4 e 5 a possibilidade de atentar-se aos sinais das áreas, determinados pelo posicionamento das mesmas em relação ao eixo OY, o que é omitido por uma grande parcela dos livros didáticos, dentre os quais os aqui analisados. Calculando as áreas nos intervalos pedidos, com o auxílio da ferramenta “Soma de Riemann de ponto a ponto”, os alunos encontraram resultados positivos para as áreas superiores ao eixo OX, e negativos para as áreas inferiores ao mesmo eixo. Essa percepção foi exposta, no entanto, nessa atividade, não se avançou para aplicações desse conhecimento, visto que um tratamento foi dado na terceira atividade.

Os objetivos da segunda atividade foram alcançados pela maior parte das duplas. No entanto, encontraram-se nas respostas de outras duplas compreensões coerentes, porém, não alinhadas com os objetivos pretendidos pelos pesquisadores. Isso se deu pela abertura dada nas questões; preocupava-se em não se apresentar questões que viessem a direcionar as respostas, por isso perguntava-se “o que pode ser dito em relação a”, dessa forma direcionando-se o olhar, mas não as respostas. Esse é um risco que se corre ao se trabalhar com atividades exploratórias: obter respostas inesperadas. Mas esse fato é algo benéfico e significativo à aprendizagem, visto que novos olhares, distintos dos comuns, podem potencializar o movimento de aprender.

Como mencionado, o tratamento da Atividade Exploratória 3 se vale dos conhecimentos apreendidos nas atividades 1 e 2. Nela, intencionou-se a distinção entre deslocamento e distância. É relevante tratar essa diferenciação, dada a dificuldade de muitos alunos com a mesma, que os leva ao recorrente erro conceitual de colocar distância e deslocamento como iguais. Então, foi apresentada, aos sujeitos, a atividade conforme abaixo:

A função que possibilita a verificação da velocidade (em m/s) de uma determinada partícula é dada por f(x) = $8x^3 - 31x^2 + 27x$, onde x é o instante medido em segundos.

A imagem abaixo traz a curva que descreve a velocidade atingida pela partícula e também informações relativas à distância e descolamento da partícula com o passar do tempo. Pretende-se analisar especificamente o deslocamento e a distância percorrida pela partícula após 2,5 segundos.

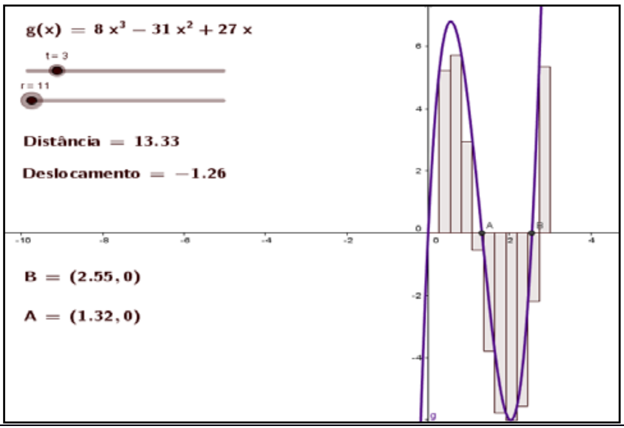


Figura 3: Atividade Exploratória 3.
Fonte: Os autores.

Como visto na figura, foram apresentados valores para distância e para deslocamento. O primeiro objetivo da atividade era perceber que, mesmo variando o tempo, o deslocamento é sempre menor ou igual à distância. O desafio que se põe na atividade é dizer do porquê dessa invariância e, com isso, diferenciar e definir matematicamente estes conceitos.

Expõem-se aqui as questões postas junto às articulações de parte dos alunos.

QUESTÃO 1 - *Com as indicações na tela do Geogebra e as possibilidades de movimento no mesmo, argumente sobre como o cálculo do deslocamento da partícula é feito.*
R1 - Se aumentarmos o número de retângulos, nos aproximamos do deslocamento da partícula.
R2 - O cálculo é feito através da soma das áreas dos retângulos nos intervalos, considerando a área dos retângulos abaixo do eixo x negativa.
R3 - O deslocamento da partícula é relacionado pelo tempo e a distância.
QUESTÃO 2 - *Como é feito o cálculo da distância percorrida pela partícula?*
R1 - É a soma em módulo do deslocamento.
R2 - É a soma do módulo das áreas de 0 a 1,32, de 1,32 a 2,5 e de 2,5 até outro tempo determinado.
R3 - A velocidade é definida pela função matemática, aplicando a integral à função (encontrar a área) para encontrar a distância percorrida pelo objeto.
QUESTÃO 3 - *Com liberdade de manipular o tempo a partir de 2,5 segundos, explique o comportamento do movimento da partícula e a relação entre a distância percorrida e o deslocamento da mesma.*
R1 - O tempo, a distância e o deslocamento aumentam juntos, mas o deslocamento nunca ultrapassa a distância.
R2 - Achamos que a distância é maior porque ela soma a área negativa, enquanto no deslocamento se subtrai a área negativa. É como se a área negativa fosse um percurso contrário ao primeiro percurso tomado.
R3 - A distância é sempre maior que o deslocamento.

Tabela 3: Atividade exploratória n. 3.
FONTE: Material dos autores.

O conhecimento referente aos sinais da área, trabalhado na segunda atividade, mostrou-se significativo para o desenvolvimento das duplas nessa atividade. Uma maioria logo percebeu que a distância seria maior que o deslocamento devido à área negativa, ou “deslocamento contrário”, como articulou uma das duplas.

O passo seguinte tomado pelas duplas foi o de validar essa intuição. Passaram, assim, a olhar para os intervalos e para as áreas/deslocamentos referentes aos mesmos. Com isso, conseguiram verificar que o valor na tela, que representava o deslocamento, referia-se à soma das áreas considerando seus sinais, duas áreas positivas e uma negativa. Por sua vez, o valor correspondente à distância considerava em módulo a área negativa e, com isso, tinha-se a soma de três “áreas positivas”. Essa percepção lhes possibilitou o entendimento da distinção entre o deslocamento e a distância, bem como entenderam o porquê de suas medidas também serem distintas.

As três atividades supracitadas foram pensadas, situando-as em um cenário de exploração, cujo objetivo foi propor situações de estar com conceitos relativos à Soma de Riemann e, por consequência, à Integral, cuja definição pode ser trabalhada em um momento posterior ao desenvolvido em campo nesta pesquisa. Essas atividades possibilitaram aos sujeitos um outro modo de estar com alguns conceitos, distintos dos modos como esses lhes foram apresentados na graduação.

A pesquisa levou à percepção de que os conceitos trabalhados, que já eram familiares aos sujeitos, da forma como lhes foram (pro)postos, trouxeram desafios, especialmente o de pensar suas práticas propondo a seus alunos situações nas quais eles devem envolver-se efusivamente para conquistar o que lhes é de direito, o conhecimento.

8. Algumas considerações pertinentes ao estudo

Pretende-se aqui expressar compreensões visando corroborar o já discutido nos tópicos anteriores. Faz-se isso trazendo algumas falas dos sujeitos quando interrogados sobre o potencial das atividades trabalhadas, essas falas são as que aparecem aqui entre aspas. O processo delineado até então possibilitou compreensões que transcenderam as primeiras intuições, o que permite indagar sobre o que se entende ser fruto da imersão nesta/desta pesquisa.

Entende-se que foi proposto um meio de estar com o conceito de Soma de Riemann que se mostra significativo à aprendizagem. No entanto, entende-se também que a abordagem aqui apresentada é uma dentre as muitas possibilidades de estar com esse conceito. Algumas foram relatadas pelos sujeitos, ao apontarem que, na graduação, estudaram a Soma de Riemann por meio da abordagem “tradicional” e enciclopédica, que para alguns foi suficiente, mas para a maioria foi frágil e pouco significativa, no sentido de que “a aprendizagem foi mecânica, visando apenas guardar informações para melhor desempenho na prova”.

Objetiva-se com esta proposta um aprendizado em que os alunos se doem à atividade, e esta se doe aos alunos em compreensões junto às possibilidades do *software*. Com isso, o aprender vai fazendo-se, constituindo-se de forma que cada passo deste fazimento seja significativo à aprendizagem, o que sugere a relevância do olhar para o processo, e não apenas para o fim do mesmo, o resultado. Dessa forma, a Soma de Riemann pôde ser compreendida e não adquirida ou decorada segundo a perspectiva de um aprendizado mecanicista.

As características aqui enunciadas, no que concerne às Atividades Exploratórias, justificam o tratamento delas nesta pesquisa. Além de oportunizar abertura para o pensamento crítico e reflexivo aos sujeitos no processo junto às mesmas, permitiram-lhes também voltarem seus olhares ao potencial dessas atividades para o ensino e a aprendizagem de matemática, visto que são professores e futuros professores, e a abordagem dada pela exploração lhes interessara como importante ferramenta metodológica. Os sujeitos relataram a relevância das atividades trabalhadas não apenas para a aprendizagem dos alunos, mas também "para o desenvolvimento de um novo olhar para a sala de aula, para os alunos, que podem ser pensados como exploradores do contexto expresso pelo professor". Essa percepção sugere, também, o repensar das práticas educativas, da postura do professor em sala de aula, de forma a somar perspectivas outras ao seu repertório docente, expandindo e potencializando as oportunidades de aprendizagem.

Para explorar são necessárias ferramentas, e o *software* aqui empregado mostrou-se suficiente dentro da proposta das atividades. Afirma-se isso ao olhar tanto para o desenvolvimento dos sujeitos quanto para os resultados expressos pelos mesmos. Entende-se que o *software* possibilitou conjecturas mediante as primeiras intuições provenientes da percepção de algumas singularidades, possibilitou também a validação das conjecturas quando o potencial dinâmico e visual do *software* se doou à percepção de invariantes, ao permitir extrapolar as singularidades, culminando em generalizações possíveis. Com isso, os sujeitos apontaram que "as ferramentas que possibilitam ampliar drasticamente as quantidades, arrastando objetos, permitiram perceber que o que era válido para uma ampliação gradativa do número de retângulos valia também para uma ampliação acelerada de retângulos".

Uma possibilidade que se abre junto ao proposto aqui é a do tratamento de atividades em ambientes não presenciais, visto que o trabalho se deu em um *blog* no qual, para o desenvolvimento das atividades, os sujeitos poderiam estar em qualquer ambiente que não a sala de aula. Não foi assim feito devido à proposta do professor da disciplina, que consistia em uma apresentação em sala seguida da discussão com a turma a respeito da mesma. A experiência vivenciada sugere propor esta possibilidade, visto que constantemente discute-se sobre o perfil dessa geração de alunos, que é natural de uma comunidade informatizada, de um sistema educacional que se abre às possibilidades da Educação a Distância.

Há sempre o incentivo dado aos alunos para que sejam mais independentes, mais ativos no processo de aprendizagem. Essa possibilidade de aprender sem estar em sala de aula é um desafio aos alunos, que, quando encarado, pode desencadear o desenvolvimento das habilidades que os professores desejam que os mesmos tenham, tal qual a de serem mais ativos, uma vez que, para participar de atividades *online*, o aluno deve organizar-se, focar na atividade, ações que se tornam complexas, dados todos os atrativos possibilitados por estar fora da escola.

Não só a Soma de Riemann, mas muitos tópicos do Cálculo podem ser trabalhados na perspectiva que trouxe este estudo. O retorno positivo dado pelos sujeitos permitiu e motivou pensar em outras possibilidades de pesquisas, dentre as quais o tratamento de outros problemas que inquietam nossas práticas com o ensino de Cálculo. Isso levou a mudar o título desta seção, que previamente era "considerações finais". Essas considerações são tomadas, aqui, como pontos de partida para novos estudos, que possam vir a contribuir para o ensino e a aprendizagem de Cálculo, uma vez que esta pesquisa expressa o potencial que subjaz ao tratamento de conceitos matemáticos junto às tecnologias informáticas.

Bibliografia

BARUFI, et al. *Cálculo Diferencial e Integral.* Universidade de São Paulo. 2002. Disponível em <http://ecalculo.if.usp.br/>. Acessado em 14/11/2015.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa qualitativa olhada para além de seus procedimentos. In: BICUDO, M. A. (Org.). *Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica.* São Paulo: Cortez, 2011.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 104 f. 2010.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: funções, limite, derivação e integração.* 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2006.

GLEICK, J. *The Information: A history, a theory, a flood*. São Paulo: Ed. Schwarcs S.A., 2013.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. *Revista Brasileira de Informática na Educação*, PGIE-UFRGS, v. 2, n. 1, p. 73-88, maio 1999.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. Vol. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC. 380 p. 2008.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. *Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, derivadas e noções de integral.* Vol. 8. 7. ed. São Paulo: Ed. Atual. 2013.

LARSON, R.; HOSTELER, R. P.; EDWARDS, B. H. *Cálculo.* Vol. 1. 8. ed. Tradução: CASTRO, H. M. A.; FIGUEIREDO, L. M. V.; BROLEZZI, JURIAANS, O. S.; HUMES, A. F. P. C.; TOLOSA, T. A. G. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

LEAL JR., L. C.; ONUCHIC, L. R. *Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sociointeracionista*. Bolema. UNESP. Rio Claro. 2015 (No prelo).

LEAL JR., L. C.; PINHEIRO; J. M. L*. Introdução à Integração*. Rio Claro. 2015. Disponível em <http://integracaoriemann.blogspot.com.br/>. Acesso em 30/09/2015.

OLIVEIRA, G. P. *Fluência tecnológica, comportamento e complexidades: um laboratório de informática, o tempo, as pessoas e outras coisas*. Ensaio. Avaliação e Políticas Públicas em Educação. Rio de Janeiro. v. 13, n. 48. pp. 307-332. 2005.

PIERCE, C. S. *Trechos de Charles Sanders Pierce.* Trad. HARTSHORNE; WEISS. São Paulo: Ed. Cultrix e Edusp. v. 1-6. 164 f. 1975.

PINHEIRO, J. M. L. *A Aprendizagem Significativa em ambientes colaborativo-investigativos de aprendizagem:* um estudo de conceitos de Geometria Analítica Plana. 2013. 202p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. (1998). O *trabalho* do *professor numa aula de investigação matemática.* Quadrante, v. 7, n. 2, p. 41-70.

POWELL, A. B.; ALQAHTANI, M. M. *Tasks and meta-tasks to promote productive mathematical discourse in collaborative digital environments.* In: International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology, 2015, Antalya. *Anais...* Antalya: ICEMST: 2015. p. 84-94.

SILVA, A.; VELOSO, E.; PORFÍRIO, J. ABRANTES, P. *O currículo de matemática e as actividades de investigação.* In: P. Abrantes, et al. (Ed.), Investigações matemáticas na aula e no currículo. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999. p. 69-85.

SILVA, A. P. da; PEREIRA, R. S. G.; DAMIN, W.; YONEZAWA, W. M. *Soma de Riemann e cálculo de área sob uma curva por integrais com auxílio do software Geogebra.* Revista Espacios. Caracas. v. 35, n. 4. 2014.

SILVA, G. H. G.; PENTEADO, M. G. *O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa.* In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Curitiba. *Anais...* Curitiba: UTFPR, 2009. p. 1066-1079.

SILVA, B. A. da. *Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo*. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 13, n. 3, pp. 393-413, 2011.

SIMÕES, M. D. N. *As TIC na Sala de Aula.* 2000. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/dulces/introdu%C3%A7%C3%A3o.htm>. Acesso em 01/11/2015.

STEWART, J. *Cálculo.* Vol. 1. 7. ed. Tradução: EZ2Translate; GARIBALDI, E. São Paulo: Cengage Learning. 2013.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo.* Vol. 1. 12. ed. Tradução: PEDROSO, K. R.; MACEDO, R. C. S.; ASANO, C. H. São Paulo: Pearson Education do Brasil. 2012.

TRINDADE, E. A. D; WANGHON, E. T. D. O Uso do Software Geogebra em Cálculo Análise Gráfica de Derivada e Integral. In: Anais *VIII Encontro Paraense de Educação Matemática.* Belém. p. 1-11. 2011.

Luiz Carlos Leal Junior: Doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP. Professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. Tem experiência nas áreas da Educação Matemática e Análise, focando-as sob a perspectiva da filosofia e teoria da aproximação. E-mail: **jhcleal@gmail.com.**

José Milton Lope Pinheiro: Doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP, com pesquisa na linha Filosofia e Epistemologia na Educação Matemática. Atua também junto a linha Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática. Trabalha com formação de professores e engenheiros. E-mail: **jmilton.ufjf@gmail.com.**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 44-61

Disponibilidad Léxica Matemática en estudiantes de Ingeniería y Ciencias

Antonio Pacheco Mirabal, Selina Ponce-Castañeda, Salvador A. Palomares-Sánchez

Fecha de recepción: 08/12/2015
Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	Se realizó un estudio de la disponibilidad léxica de los conceptos matemáticos a los estudiantes de las carreras pertenecientes al área de la ingeniería y la ciencia. Los grupos están divididos por niveles: Cálculo del grupo II y el de ecuaciones diferenciales ordinarias son similares al grupo de Matemáticas II y Matemáticas IV, respectivamente, del área de ingeniería. La motivación original viene de saber cómo los estudiantes relacionan y comprenden conceptos matemáticos y también evalúan el crecimiento y la madurez conceptual que el estudiante está tomando, ya que está estudiando las asignaturas que conforman el plan de estudios de su carrera. **Palabras clave**: Léxico, Matemáticas, Cálculo, Ingeniería, Ciencias
Abstract	A lexical availability study of mathematical concepts to students of careers belonging to the area of engineering and science was performed. The groups are divided by levels: Calculus II group and that of Ordinary differential equations are similar to the group of Mathematics II and Mathematics IV, respectively, of the engineering area. The original motivation comes from knowing how students relate and understand mathematical concepts and also assess the growth and conceptual maturity that the student is taking as it is studying the subjects that make up the curriculum of his career. **Keywords**: Vocabulary , Mathematics , Calculus, Engineering, Science
Resumo	Realizou-se um estudo da disponibilidade lexical dos conceitos matemáticos dos estudantes das carreiras pertencentes à área da engenharia e a ciência. Os grupos foram divididos por níveis: Cálculo do grupo II e o de equações diferenciais ordinárias são similares ao grupo de Matemática II e de Matemática IV, respectivamente, da área de engenharia. A motivação original vem de saber como os estudantes se relacionam e compreendem conceitos matemáticos e também avaliam o crescimento e a maturidade conceitual que o estudante tem, uma vez que está estudando as disciplinas que compõem o plano de estudos de sua carreira. **Palavras-chave:** Léxico, Matemática, Cálculo, Engenharia, Ciência.

1.- Antecedentes

Los estudios de disponibilidad léxica se han extendido hacia otras áreas, logrando convertirse también en una herramienta útil en la exploración de los procesos educativos, de tal forma que el léxico base ha pasado a llamarse léxico fundamental que, a su vez, está formado por el léxico básico, que es aquel vocabulario de uso familiar y cotidiano, más el léxico disponible, que está formado por aquella serie de vocablos que surgen únicamente en temas específicos o concretos.

Los estudios sobre disponibilidad léxica tienen su origen en los trabajos de (Michéa, 1953, pp. 338-344.). La motivación original de este estudio estaba relacionada con el objetivo de facilitar y agilizar la enseñanza del idioma francés, como lengua extranjera (Michéa, Rivenc, 1956, p.p. 2). La disponibilidad léxica se refiere al campo de investigación que, en la Lingüística, tiene como objetivo conocer cuánto y cuál es el léxico disponible de una determinada comunidad; esto es, un léxico conformado por términos de carácter cotidiano y que resultan esenciales en el vocabulario de una lengua (López, 1995, p.p. 245-259).

Las aplicaciones que ofrece el estudio de disponibilidad léxica, se han extendido hacia centros específicos, en donde los sujetos requieren de un conjunto de palabras de contenido semántico definido para contextos determinados. Tal es el caso del estudio de disponibilidad léxica matemática (Ferreira, Salcedo, del Valle, 2014, p.p. 69-84), (Urzúa, Sáez, Echeverría, 2006. p.p. 59-76), (Salcedo, del Valle, 2013, p.p. 1-16).

La forma cómo se llevan a cabo estos estudios se produce mediante encuestas en las que se asignan ciertos estímulos previamente elegidos llamados centros de interés, en donde el encuestado responde escribiendo tantos términos como pueda asociar a dicho centro de interés en un determinado tiempo, tomando en cuenta el hecho de que los términos que vengan primero a la memoria del encuestado se les confiere mayor valor numérico dentro del análisis estadístico.

El presente trabajo tiene como finalidad conocer la disponibilidad léxica matemática de cuatro grupos de estudiantes que se encuentran realizando estudios universitarios, dos orientados hacia el área de las ciencias exactas y dos hacia la ingeniería. La motivación surge del hecho de que, actualmente no existen estudios de disponibilidad léxica en matemáticas en nivel superior que permitan evaluar y comparar el crecimiento y las diferencias conceptuales, si es que existen, del léxico disponible en el área de las matemáticas. Se esperaría que, derivado de los resultados de este estudio, aparezcan palabras que son comunes entre los estudiantes que inician sus estudios profesionales donde se imparten cursos de Matemáticas, aparte de las que forman el léxico fundamental. Interesa saber si existe un crecimiento en el promedio de la extensión de los significados académico y/o científico de palabras a medida que aumentan sus años de estudio, e igualmente, si existe, en principio, alguna diferencia en la forma en cómo entienden los diversos conceptos relacionados con su campo de estudio.

Para la prueba se utilizaron seis centros específicos, llamados centros de interés, todos ellos relacionados con las matemáticas, que sirvieran como estímulo para extraer el léxico disponible de los alumnos en esta área. Para los cuatro grupos encuestados, las matemáticas son el núcleo central de sus carreras, y es por demás interesante conocer de qué forma los estudiantes la entienden y la asimilan y, si en principio, existe alguna diferencia del léxico de un estudiante que se encuentra al inicio de su carrera con uno que se encuentra en una etapa más avanzada de sus estudios.

Para el cálculo de la disponibilidad léxica se utilizó la fórmula matemática de (López, Strassburger, 2000, p.p. 227-251).

$$D(P_j) = \sum_{i=1}^{n} e^{-c\left[\left(\frac{i-1}{n-1}\right)\right]} \frac{f_{ji}}{I_1}$$

Donde $D(P_j)$ es la disponibilidad de la *j-ésima* palabra, *n es el t*otal de posiciones alcanzadas por centro de interés, *j* es el índice de la *i-ésima* palabra e *i* es el número de posición. f_{ji} es la frecuencia absoluta de la *j-ésima* palabra en la posición *i*, *I* es el número de informantes que participan en la encuesta, *c* es el coeficiente de dispersión (= 2.3) y $\frac{f_{ji}}{I_1}$ es la frecuencia relativa.

Esta fórmula se utilizó a través del programa Dispolex (Dispolex, 2015). Además del índice de disponibilidad léxica, se calculó la Frecuencia Relativa, que arroja información sobre el número de veces que aparece una palabra entre el total de informantes; el porcentaje de aparición que indica el porcentaje de informantes que ha escrito cierta palabra y la frecuencia acumulada que va sumando todas las frecuencias relativas de acuerdo al orden de aparición de cada palabra, desde la primera hasta la última de la lista. Por otro lado, se calculó, para cada centro de interés, índices tales como el número de palabras diferentes en cada centro de interés, el promedio de palabras por informante, que muestra el promedio de respuestas dadas por el total de informantes que componen la muestra para cada centro de interés, y el índice de cohesión, que indica el grado de coincidencia en las respuestas de los informantes.

2.- Metodología

Se realizó la prueba de disponibilidad léxica matemática a cuatro grupos de estudiantes de las Universidades Autónoma y Politécnica de San Luis Potosí, todos ellos pertenecientes a carreras de las áreas de Ingeniería y/o Ciencias Físico-Matemáticas. Los grupos se dividen por niveles: El grupo de Calculo II del área de Ciencias es el equivalente al grupo de Matemáticas II del área de Ingeniería; ellos conforman el Nivel I. Asimismo, el grupo de Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) del área de Ciencias es el equivalente al grupo de Matemáticas IV del área de Ingeniería; ellos conforman el Nivel II.

Se utilizaron seis centros específicos, llamados centros de interés, relacionados con las matemáticas, que sirvieran como estímulo para extraer el léxico disponible de los alumnos. Los datos se obtuvieron luego de aplicar encuestas diseñadas con ciertos centros de interés y posteriormente fueron analizados. Se calcularon los índices tales como promedio de palabras por informante, número de palabras diferentes e índice de cohesión; también se obtuvo el Índice de Disponibilidad Léxica (IDL). Posteriormente, se compararon los resultados obtenidos entre los grupos pertenecientes a la misma universidad, así como entre los grupos del mismo nivel.

La muestra estuvo integrada por un total de 90 estudiantes distribuidos en cuatro grupos, que se dividieron de la siguiente manera:

Área de Ciencias:
Carreras: Ingeniería Electrónica, Lic. Física, Lic. Matemáticas.
Grupo 1: Cálculo II. Segundo semestre. Número de estudiantes: 10
Grupo 2: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Cuarto semestre. Número de estudiantes: 22
Área de Ingeniería:
Carreras: Ingeniería en Sistemas y Tecnologías Industriales, Ingeniería en Telemática, Ingeniería en Tecnologías de Manufactura.
Grupo 3: Matemáticas II. Segundo semestre. Número de estudiantes: 30
Grupo 4: Matemáticas IV. Cuarto semestre. Número de estudiantes: 28

3.- Hipótesis

Las hipótesis se hicieron tomando en cuenta los grupos seleccionados para el estudio, ya que, lo que se pretende es observar el crecimiento conceptual entre grupos de distinto nivel, y, además, ver principalmente las diferencias de léxico disponible que pudieran existir entre grupos del mismo nivel, pero de diferente universidad.

Las hipótesis consideradas en este estudio son las siguientes. A medida que el estudiante cursa las materias que forman su plan de estudios, éste va incrementando la cantidad de palabras (términos) asociadas a un tema en concreto del área de las Matemáticas; es decir, existe un aumento en el promedio del léxico disponible. Por tanto, se presenta como primera hipótesis que los grupos del Nivel II poseen un mayor promedio de número de palabras que los grupos del Nivel I. La segunda hipótesis va dirigida hacia el léxico disponible que tienen en común todos los grupos para cada centro de interés. Si bien, el promedio del número de palabras no es el mismo para todos, existe un conjunto de términos que comparten tanto los grupos de menor nivel, como los más avanzados, partiendo de la premisa de que a medida que los estudiantes avanzan en su carrera, aumentará el léxico disponible que comparten con los estudiantes que están a punto de egresar.

4.- La Prueba

La prueba estuvo formada por dos partes. La primera parte consta de un formulario de identificación del estudiante. La otra parte estaba diseñada con seis centros de interés ordenados como sigue: *función, gráfica, serie, ecuación, espacio,* *matriz*, que se utilizan regularmente en los cursos de Matemáticas del nivel de licenciatura. En esta parte de la prueba, se disponía de un tiempo de dos minutos, por cada centro de interés, para escribir tantos términos como le fuera posible asociar y numerar en forma de lista. Se realizó un análisis de los datos calculando, para cada centro de interés, el Promedio de palabras por informante, que muestra el promedio de palabras (respuestas) dadas por el total de informantes que componen la muestra para cada centro de interés.

5.- Resultados

De acuerdo a los resultados obtenidos para cada uno de los cuatro grupos, se procederá a mostrar los resultados del Promedio de palabras (respuestas) por informante.

5.1.- Promedio de palabras (respuestas) por informante.

La Tabla I muestra el promedio de palabras, por informante, de los Grupos 1 y 2.

Centro de Interés	Promedio de palabras por informante (Grupo 1)	Promedio de palabras por informante (Grupo 2)
función	9.90	10.77
gráfica	9.10	8.64
serie	6.50	9.64
ecuación	7.70	9.09
espacio	6.90	7.86
matriz	9.30	11.23

Tabla I. Grupo 1: Cálculo II y Grupo 2: Ecuaciones diferenciales ordinarias.

En casi todos los centros de interés, salvo en el centro de interés *gráfica*, se observa un mayor promedio de palabras por informante en el Grupo 2 de EDO, lo que permite corroborar la hipótesis que hace referencia al aumento en el promedio del léxico disponible de los estudiantes a medida que se avanza en el desarrollo de la carrera.

La Tabla II muestra el promedio de palabras, por informante, de los Grupos 3 y 4.

Centro de Interés	Promedio de palabras por informante (Grupo 3)	Promedio de palabras por informante (Grupo 4)
función	10.73	9.89
gráfica	11.67	10.57
serie	6.63	6.18
ecuación	12.77	9.39
espacio	8.43	5.36

matriz	10.23	8.00

Tabla II. Grupo 3: Matemáticas II y Grupo 4: Matemáticas IV.

En este caso, los resultados no concuerdan con la hipótesis planteada al inicio, pues el Grupo 3, de Matemáticas II, muestra un mayor promedio de palabras por informante en todos los centros de interés. Donde se obtiene la mayor diferencia entre los grupos es en el centro de interés *ecuación*; esto es, un promedio para el Grupo 3 de casi cuatro puntos por encima del promedio del Grupo 4.

En la Figura 1 se muestran la gráfica de los resultados de las tablas. Al comparar el promedio de palabras entre los cuatro grupos salta a la vista un hecho importante: El Grupo 3 (Matemáticas II) obtuvo el promedio general más alto de palabras (10.07), seguido por el Grupos 2, de EDO (9.53), el Grupo 4, de Matemáticas IV (8.20) y, en último lugar, el Grupo 1, de Calculo II (5.80). La hipótesis respecto de que se esperaría encontrar un mayor promedio de palabras conforme los estudiantes avanzan en su carrera únicamente se cumplió para los grupos de Ciencias. El caso contrario ocurre con los grupos de Ingeniería, en donde se observa un retroceso, pues del Grupo 3 al Grupo 4 se aprecia una disminución del promedio general de palabras.

Por otra parte, el promedio de palabras dadas por el total de informantes de los cuatro grupos (90 informantes en total) por cada centro de interés, es el siguiente: el centro de interés *función*, con 10.32, muy parejo con el centro de interés *gráfica* (10.00) y con *ecuación* (9.73), *serie* (7.23) y, finalmente, *espacio* (7.13). Considerando el promedio total de palabras, que fue de 9.16, se puede ver que el promedio más alto, que fue para *función*, con 10.32, se encuentra 1.16 puntos por encima del promedio total; mientras que, el promedio más bajo, fue para e*spacio*, con 7.13; éste se encuentra dos puntos por debajo del promedio total.

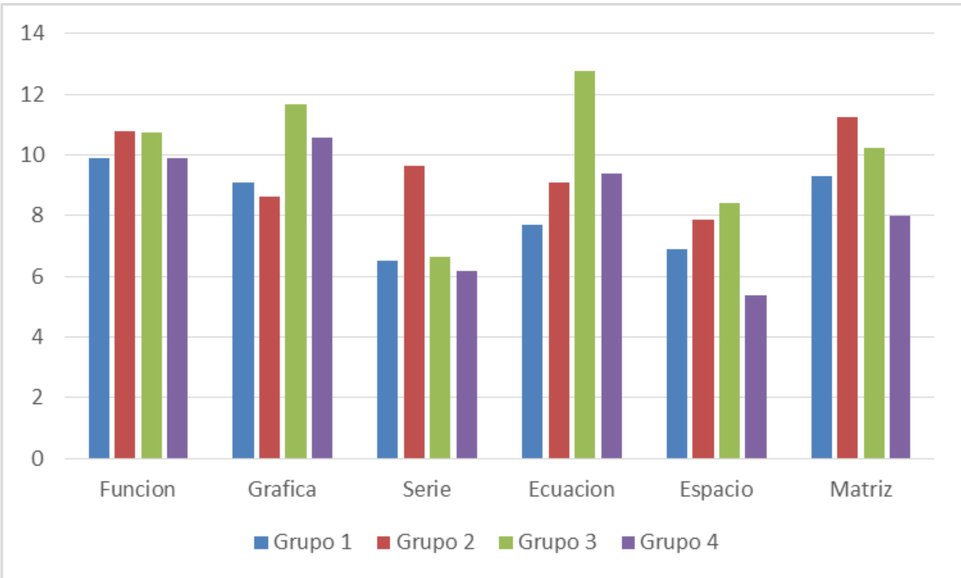


Figura 1. Gráfica comparativa del promedio de palabras en los seis centros de interés de los cuatro grupos.

5.2.- Número de palabras diferentes.

Para el número de palabras diferentes, se esperaba comprobar la hipótesis respecto a la cual la variación, o riqueza del léxico disponible, era mayor a medida que el estudiante va progresando en su carrera, pero se debe tener en consideración que no todos los grupos tienen el mismo número de informantes, por lo que, existe una mayor probabilidad de que los grupos conformados por más informantes obtengan un mayor número de palabras diferentes. Los Grupos 3 y 4 presentan una mayor cantidad de palabras diferentes, siendo éstos los formados por un número mayor de informantes. Con respecto a los Grupos 1 y 2, a pesar de que el tamaño de informantes del Grupo 2 es de casi tres veces el tamaño de informantes del Grupo 1, el número de palabras diferentes que se obtiene para ambos grupos es muy cercano, en todos los centros de interés.

5.3.- Índice de cohesión.

El índice de cohesión refleja el grado de coincidencias en las respuestas. Cabe mencionar que el índice de cohesión está ligado al número de palabras diferentes, por lo que es de esperarse que aquellos grupos que tuvieron un número alto de palabras diferentes obtengan un índice de cohesión bajo y, en contraparte, aquellos grupos cuyo número de palabras diferentes es bajo, obtengan un índice de cohesión alto. La Figura 2 muestra la gráfica del índice de cohesión de todos los grupos para todos los centros de interés. Como era de esperarse, se observa que los Grupos 3 y 4 son los que tienen índices de cohesión más bajos, puesto que son los de mayor tamaño de informantes; aunque, por otro lado, el Grupo 2, que tiene 28 informantes, muestra índices de cohesión más altos en casi todos los centros de interés en comparación con el Grupo 1, que sólo tiene 10 informantes.

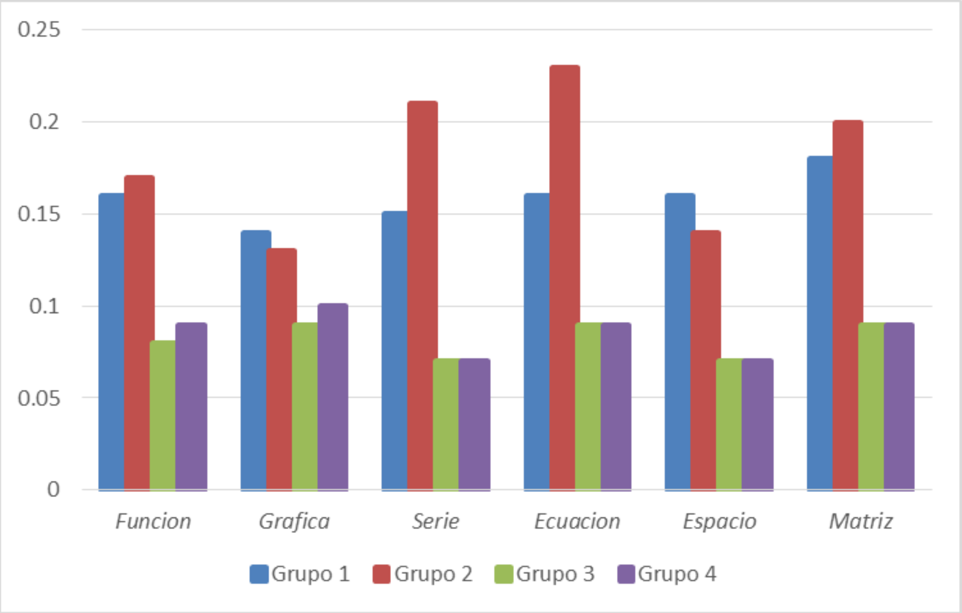


Figura 2. Gráfica del índice de cohesión de los cuatro grupos de los seis centros de interés.

Con respecto a la Disponibilidad, el Porcentaje de Aparición y la Frecuencia Relativa, se obtuvieron los resultados que se discuten a continuación. Se muestra sólo los resultados de Disponibilidad y, si es necesario hacer una observación con respecto al porcentaje de Aparición o Frecuencia Relativa, se indicará en el texto. Los resultados se presentan, para cada uno de los Grupos, con las siete primeras palabras dadas por los informantes para cada centro de interés.

Para los grupos de Ciencias, Cálculo II y EDO, se obtuvieron los siguientes resultados, de acuerdo a cada centro de interés.

1. Centro de interés *función*

°	Palabra	Disponibilidad (Grupo 1)	Palabra	Disponibilidad (Grupo 2)
	dependencia	0.31292	*relación*	0.42859
	gráfica	0.27045	*variable*	0.35789
	variable	0.23732	*inyectiva*	0.33436
	logarítmica	0.23249	*biyectiva*	0.32552
	trigonométrica	0.22883	*par*	0.30656
	sinusoidal	0.20000	*exponencial*	0.29513
	exponencial	0.18236	*derivada*	0.26973

Tabla III. Grupo 1: Calculo II (Nivel I) y Grupo 2: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Nivel II).

Para este centro de interés, palabras como *variable* y *exponencial* aparecen en ambos grupos, con la diferencia de que, para el Grupo 2, estas palabras ocupan mejores posiciones y poseen mejores coeficientes de disponibilidad. Es en este mismo grupo donde aparece la palabra *derivada,* con un índice de disponibilidad de 0.26973, lo que indica que los estudiantes pertenecientes a este grupo tienen ya la noción que relaciona el incremento en las variables de las funciones con el concepto de derivada, como resultado de que el estudiante en este punto de la carrera ha pasado ya por diferentes cursos de Cálculo.

Las palabras que ocupan el primer lugar en los Grupos 1 y 2 son, respectivamente: *dependencia,* que tiene un IDL de 0.31292, y *relación* con 0.42859. En general, el Grupo 2, de EDO, es el que obtiene mejores índices de disponibilidad, lo que indica que a medida que los alumnos van progresando en su carrera, éstos van coincidiendo más en su léxico disponible.

2. Centro de interés *gráfica*

Palabra	Disponibilidad (Grupo 1)	Palabra	Disponibilidad (Grupo 2)
dominio	0.23079	curva	0.29520
sinusoidal	0.21036	parábola	0.28599
eje	0.20868	máximo	0.26899

pendiente	0.20507	recta	0.26062
rango	0.19582	barras	0.23286
plano-Cartesiano	0.17200	plano	0.22492
hipérbola	0.16475	dato	0.22193

Tabla IV. Grupo 1: Calculo II (Nivel I) y Grupo 2: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Nivel II).

Para el centro de interés *gráfica* resulta evidente la diferencia en el léxico mostrado por cada grupo pues, según se ve en los resultados, no hay un solo término en el que coincidan ambos. Para el Grupo 1, las tres primeras palabras son, con su respectivo índice de disponibilidad: *dominio (*0.23079*), sinusoidal (*0.21036*)* y *eje (*0.20868*)*. Estos resultados indican que los alumnos coinciden poco en su vocabulario, pero, por otra parte, la complejidad de los términos arrojados en la lista está de acuerdo a lo esperado en un alumno de este nivel. Para el Grupo 2, los términos *curva*, (0.29590) y *parábola* (0.28599), que ocupan el primero y el segundo puesto respectivamente, dan cuenta de la estructura mental que tienen los estudiantes al relacionar este centro de interés con la Geometría. Por otro lado, la palabra *máximo* (0.26899) y que figura en la tercera posición, denota la conexión que el estudiante hace entre el Cálculo y el concepto de gráfica.

Los bajos índices de disponibilidad léxica que se obtuvieron para el Grupo 2 contradicen la hipótesis planteada al principio, pues se esperaría que los estudiantes, a medida que van cursando las materias que componen su plan de estudios, tuvieran cada vez más una mayor compatibilidad en el léxico utilizado, lo que se traduce en mayores índices de disponibilidad léxica.

3. Centro de interés *serie*

Palabra	Disponibilidad (Grupo 1)	Palabra	Disponibilidad (Grupo 2)
Fourier	0.39462	Taylor	0.61134
sucesión	0.38686	convergencia	0.39121
Taylor	0.27945	Fourier	0.37179
Riemann	0.19274	sucesión	0.35795
conjunto	0.16313	Maclaurin	0.32462
convergencia	0.15314	infinita	0.28907
sumatoria	0.15016	Fibonacci	0.25577

Tabla V. Grupo 1: Calculo II (Nivel I) y Grupo 2: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Nivel II).

Para el centro de interés *serie,* cuatro son los términos que aparecen en ambos grupos: *Taylor, convergencia, Fourier* y *sucesión*. Los estudiantes del Grupo 2 obtuvieron coeficientes de disponibilidad más altos; por ejemplo, la palabra *Taylor,* que fue la más disponible para el Grupo 2, con un valor de 0.61134*,* en tanto que para el Grupo 1, *Taylor* ocupa la tercera posición, con un valor de 0.27945*.* La diferencia entre los coeficientes de disponibilidad es notable, de alrededor de 0.33189. Estas diferencias tan grandes se dan también con el término *convergencia,* cuyos índices de disponibilidad son de 0.15314 y 0.39121 para los grupos 1 y 2 respectivamente, en tanto que para los términos *Fourier* y *sucesión* la diferencia no es tan significativa, pues entre los dos grupos se obtienen diferencias de apenas 0.02283 y 0.02891 puntos, respectivamente.

Estos resultados permiten concluir que entre los estudiantes del Grupo 2 existe una mayor concordancia en el léxico disponible que utilizan al referirse al centro de interés *serie*, dado que, aunque los dos grupos comparten cuatro palabras dentro de las siete primeras posiciones, son los estudiantes del Grupo 2 los que las mencionan en los primeros lugares y con mayor frecuencia.

4. Centro de interés *ecuación*

N°	Palabra	Disponibilidad (Grupo 1)	Palabra	Disponibilidad (Grupo 2)
1	*variable*	0.52465	*diferencial*	0.73269
2	*diferencial*	0.44399	*variable*	0.40962
3	*despeje*	0.26051	*lineal*	0.39649
4	*igualdad*	0.26049	*homogénea*	0.37566
5	*recta*	0.21793	*grado*	0.33117
6	*grado*	0.20703	*cuadrática*	0.27267
7	*función*	0.20000	*orden*	0.24914

Tabla VI. Grupo 1: Calculo II (Nivel 1) y Grupo 2: Ecuaciones diferenciales ordinarias (Nivel II).

En este caso, se vuelve a presentarse el hecho de que los informantes del Grupo 2 obtienen mayores puntuaciones en los índices de disponibilidad en casi todos los términos de la lista. Tomando la palabra que aparece en la primera posición en cada grupo se encuentra que, para el Grupo 2, dicha palabra es *diferencial* (0.73269) y para el Grupo 1 la palabra es *variable* (0.52465). De nuevo se ve mayor grado de coincidencia en el vocabulario entre los estudiantes más avanzados. Por otro lado, en el Grupo 2, la palabra *homogénea* (0.37566) revela el grado de conocimiento que se espera que tenga un estudiante que está en un curso de EDO. *diferencial, variable y grado* son las palabras que comparten los dos grupos. El Grupo 2 obtiene mejores puntuaciones en *diferencial y grado,* en donde las diferencias son de 0.20804 y 0.12414 puntos, respectivamente, mientras que, en *variable*, el Grupo 1 supera al Grupo 2 por una diferencia de 0.11503 puntos.

5. Centro de interés *espacio*

N°	Palabra	Disponibilidad (Grupo 1)	Palabra	Disponibilidad (Grupo 2)
1	*vectorial*	0.45016	*dimensión*	0.45493
2	*dimensión*	0.21273	*vectorial*	0.42814
3	*lugar*	0.20000	*Hilbert*	0.40177
4	*área*	0.18312	*conjunto*	0.29794
5	*infinito*	0.16313	*real*	0.26958
6	*volumen*	0.15097	*tiempo*	0.26456
7	*euclidiano*	0.14283	*campo*	0.24571

Tabla VII. Grupo 1: Calculo II (Nivel I) y Grupo 2: Ecuaciones diferenciales ordinarias (Nivel II).

Para el centro de interés *espacio,* los términos *vectorial* y *dimensión* son los que figuran en las listas de ambos grupos. Empezando con el término *vectorial,* se encuentra con que existe una estrecha cercanía en los índices de disponibilidad obtenidos por cada grupo, siendo que en el Grupo 1 es la palabra más disponible con un IDL de 0.45016*,* en tanto que para el Grupo 2, el término ocupa la segunda posición, con un valor de 0.42814; es decir, apenas existe una diferencia de 0.02202 puntos; *dimensión*, por su parte, obtuvo valores de 0.21273 en el Grupo 1 y 0.45493 en el Grupo 2, ocupando la segunda y la primera posición respectivamente. Siguiendo con los demás términos, en el Grupo 1, *lugar, área e infinito,* que tienen IDL de 0.20000, 0.18312 y 0.16313 respectivamente, señalan que lo que entienden los estudiantes por la palabra *espacio,* es como algo ligado a la posición y al tamaño. En el Grupo 2 aparecen en los primeros lugares los términos *dimensión* (IDL de 0.45493*), vectorial* (IDL de 0.42814) *y Hilbert* (IDL de 0.40177)*,* con valores más altos con respecto al Grupo 1. Estos mejores índices de disponibilidad léxica aluden a que estos conceptos se encuentran ampliamente disponibles en los estudiantes más avanzados, pues los mencionan en los primeros lugares de la lista y con mayor frecuencia. En contraparte, los estudiantes menos avanzados, a pesar de presentar cierto léxico complejo, éste no se encuentra presente de manera uniforme. Le siguen en la lista del Grupo 2, con sus respectivos IDL, los términos *conjunto* (0.29794), *real* (0.26958), *tiempo* (0.26456*)* y *campo* (0.24571).

6. Centro de interés *matriz*

N°	Palabra	Disponibilidad (Grupo 1)	Palabra	Disponibilidad (Grupo 2)
1	*inversa*	0.48261	*inversa*	0.52589
2	*determina nte*	0.29103	*identidad*	0.50199
3	*transpuest a*	0.26563	*determinante*	0.43682
4	*ecuación*	0.24129	*transpuesta*	0.41251
5	*identidad*	0.22514	*columna*	0.27192
6	*variable*	0.20000	*vector*	0.24894
7	*vector*	0.18723	*renglón*	0.21235

Tabla VIII. Grupo 1: Calculo II (Nivel I) y Grupo 2: Ecuaciones diferenciales ordinarias (Nivel II).

Para el centro de interés *matriz,* dentro de las siete primeras posiciones, los dos grupos comparten cinco palabras: *inversa, identidad, determinante, transpuesta* y *vector*. Aunado a lo anterior, se ve que la palabra *inversa* figura en ambos casos en la primera posición, con un índice de disponibilidad de 0.48261 para el Grupo 1 y 0.52589 para el Grupo 2. El hecho de que los dos grupos compartan cinco palabras en las primeras posiciones indica que, en general, el léxico tanto de estudiantes del Grupo 1 como del Grupo 2 se encuentra bastante estandarizado. Otro aspecto a destacar es el tipo de léxico que comparten los dos grupos, pues, contrario a lo que se esperaba, ambos grupos manejan un lenguaje complejo y especializado que únicamente se esperaría encontrar en los alumnos más avanzados.

Para los grupos de Ingeniería, Grupo 3 y Grupo 4, que corresponden a las materias de Matemáticas II y Matemáticas IV, se obtuvieron los siguientes resultados, de acuerdo a cada centro de interés.

1. Centro de interés *función*

N°	Palabra	Disponibilidad (Grupo 3)	Palabra	Disponibilidad (Grupo 4)
1	*cuadrática*	0.48962	*exponencial*	0.48245
2	*exponencial*	0.38104	*variable*	0.36315
3	*lineal*	0.30004	*cuadrática*	0.31405
4	*trigonométrica*	0.29849	*lineal*	0.28830
5	*ecuación*	0.24377	*trigonométrica*	0.21924
6	*logarítmica*	0.20361	*ecuación*	0.21764
7	*integral*	0.19462	*gráfica*	0.21345

Tabla IX. Grupo 3: Matemáticas II (Nivel I) y Grupo 4: Matemáticas IV (Nivel II).

Para este centro de interés, se observa que las palabras más disponibles para el Grupo 3 también aparecen en el Grupo 4, a excepción de los términos *integral* y *logarítmica*. Aunado al hecho de que los dos grupos comparten la mayoría de las palabras, casi todas ellas presentan mismos valores de IDL, exceptuando el término *cuadrático*, *exponencial* y *variable*. Para el Grupo 3, la palabra más disponible fue *cuadrática* (0.48962), mientras que para el Grupo 4, la palabra más disponible fue *exponencial* (0.48245). En general, se cumple en esta ocasión la hipótesis que va dirigida hacia el vocabulario que tienen en común todos los grupos en un determinado centro de interés. Estos resultados indican que entre los alumnos menos avanzados existe una mayor correspondencia en los términos mencionados en las siete primeras posiciones, lo que contradice también una de las hipótesis planteadas al comienzo de la investigación.

2. Centro de interés *gráfica*

N°	Palabra	Disponibilidad (Grupo 3)	Palabra	Disponibilidad (Grupo 4)
1	*parábola*	0.36392	*eje*	0.36552
2	*lineal*	0.35027	*lineal*	0.34604
3	*eje*	0.32701	*cuadrante*	0.26456
4	*función*	0.32449	*exponencial*	0.25850
5	*cuadrática*	0.22378	*cuadrática*	0.22221
6	*cuadrante*	0.20188	*función*	0.21530
7	*coordenada*	0.20009	*parábola*	0.20045

Tabla X. Grupo 3: Matemáticas II (Nivel I) y Grupo 4: Matemáticas IV (Nivel II).

En el centro de interés *gráfica,* el léxico mostrado por cada grupo es prácticamente el mismo, puesto que únicamente difieren en un solo término. Existe una fuerte cercanía en los índices de disponibilidad léxica obtenidos por cada grupo en las palabras *eje, lineal* y *cuadrática*. Por otra parte, las diferencias significativas se dan en los términos *cuadrante, función y parábola.* Asimismo, es importante mencionar también que, en ninguno de los dos grupos se obtuvieron puntuaciones por arriba o cercanas a 0.40000, ya que las palabras con valores más altos de IDL para los grupos Matemáticas II y Matemáticas IV fueron, respectivamente, *parábola* (0.36392) y *eje* (0.36552).

3. Centro de interés *serie*

N°	Palabra	Disponibilidad (Grupo 3)	Palabra	Disponibilidad (Grupo 4)
1	*secuencia*	0.27545	*Taylor*	0.81398
2	*numero*	0.26962	*Maclaurin*	0.25216
3	*numérica*	0.23333	*número*	0.23814
4	*orden*	0.15171	*numérica*	0.18627
5	*patrón*	0.12905	*continua*	0.14573
6	*continuidad*	0.12500	*infinito*	0.10943
7	*sucesión*	0.12252	*exponencial*	0.08734

Tabla XI. Grupo 3: Matemáticas II (Nivel I) y Grupo 4: Matemáticas IV (Nivel II)

Se observa, en el Grupo 4, un léxico mucho más específico y complejo, a diferencia del léxico básico y menos especializado que ofrecen los estudiantes del Grupo 3, de Matemáticas II. Los términos más representativos para el Grupo 4 son *Taylor y Maclaurin,* mientras que para el Grupo 3, estos son: *secuencia y número*. Los únicos términos que comparten ambos grupos son *número y numérica,* aunque las posiciones que ocupan éstos en las listas son diferentes; para los del Grupo 3, dichas palabras ocupan los lugares 2 y 3 respectivamente, mientras que en el Grupo 4, las palabras se encuentran en la 3° y 4° posición de la lista. Entre los términos que figuran en la primera posición para los dos grupos, existe una diferencia significativa en los valores de IDL. *Taylor* (0.81398), en el Grupo 4, fue mencionada por la mayoría de los informantes y en las primeras posiciones. Por otro lado, *secuencia* (0.27545) ocupa el primer lugar en el Grupo 3. Para los demás términos, si bien la diferencia entre los valores de IDL no es tan significativa entre uno y otro grupo, el Grupo 4 obtiene valores mayores para la mayoría de los términos.

4. Centro de interés *ecuación*

N°	Palabra	Disponibilidad (Grupo 3)	Palabra	Disponibilidad (Grupo 4)
1	*cuadrática*	0.47839	*variable*	0.41173
2	*lineal*	0.37569	*cuadrática*	0.33024
3	*variable*	0.32660	*lineal*	0.32265
4	*exponenci*	0.23834	*despeje*	0.31150

	al			
5	*cubica*	0.19948	*exponencial*	0.25903
6	*despeje*	0.19749	*diferencial*	0.18014
7	*función*	0.16941	*función*	0.17867

Tabla XII. Grupo 3: Matemáticas II (Nivel I) y Grupo 4: Matemáticas IV (Nivel II).

Para *ecuación,* seis son los términos que aparecen en ambos grupos: *variable, cuadrática, lineal*, *despeje, exponencial* y *función*. Sin embargo, se tiene que los valores de disponibilidad entre los dos grupos son muy diferentes, logrando mejores puntuaciones el Grupo 3 en dos términos: *cuadrática* y *lineal*, con una diferencia de 0.14815 y 0.05304, respectivamente, con respecto al Grupo 4. Por su parte, el Grupo 4 supera numéricamente al Grupo 3 en cuatro términos: *variable, despeje, exponencial* y *función*, con una diferencia de 0.08513, 0.11401, 0.02069 y 0.00926 respectivamente. Se puede concluir que el léxico disponible compartido por ambos grupos es básico y está relacionado con la resolución y las características de una ecuación. El término *diferencial* (0.18014) aparece únicamente en el Grupo 4, que, aunque resulta ser bajo, es el único término que refleja el léxico que, al menos, se espera que tenga un alumno que conoce o empieza a introducirse en la materia de Ecuaciones diferenciales ordinarias. En este caso, si bien se cumple la hipótesis de que existen términos comunes entre grupos, no existe, por otro lado, una evolución apreciable en el léxico disponible utilizado por el estudiante a medida que éste va progresando en su carrera. Se puede afirmar finalmente que no existe una superioridad marcada de ninguno de los grupos con respecto a los valores de disponibilidad.

5. Centro de interés *espacio*

N°	Palabra	Disponibilidad (Grupo 3)	Palabra	Disponibilidad (Grupo 4)
1	*área*	0.30146	*vectorial*	0.19571
2	*vacío*	0.25701	*gráfica*	0.16823
3	*lugar*	0.23344	*intervalo*	0.12024
4	*tiempo*	0.19645	*imaginario*	0.11818
5	*volume n*	0.17968	*dimensión*	0.11330
6	*infinito*	0.16213	*magnitud*	0.11140
7	*grafica*	0.14896	*lugar*	0.11109

Tabla XIII. Grupo 3: Matemáticas II (Nivel I) y Grupo 4: Matemáticas IV (Nivel II).

De los resultados mostrados anteriormente, se aprecia una clara diferencia en los términos desplegados por cada grupo. g*ráfica (*0.14896 y 0.16823*)* y *lugar (*0.23344 y 0.11109*)* son las únicas palabras que comparten ambos grupos. En el Grupo 3, palabras como *área, vacío* y *lugar* sugieren un entendimiento básico que generalmente el estudiante desarrolla en la educación primaria y secundaria. Para el Grupo 4, términos como *vectorial, imaginario y dimensión* tienen asociación con cursos de Algebra Lineal y Cálculo Vectorial. El hecho de que se tengan índices de disponibilidad tan bajos en este grupo, por ejemplo, la palabra que figura en la primera posición es *vectorial,* con un índice de disponibilidad de 0.19571, seguida de *gráfica,* con 0.16823, e *intervalo,* con 0.12024, dice que, aunque los estudiantes poseen cierta terminología específica, ésta no se da de manera uniforme en todo el grupo.

En resumen, contrario a lo que se esperaría, los estudiantes del Grupo 3 son los que obtienen mayores coeficientes de disponibilidad, aunque la terminología utilizada sea menos específica que la de los estudiantes más avanzados.

6. Centro de interés *matriz*

N°	Palabra	Disponibilidad (Grupo 3)	Palabra	Disponibilidad (Grupo 4)
1	*inversa*	0.31624	*Gauss-Jordan*	0.41702
2	*número*	0.30932	*inversa*	0.30603
3	*determinante*	0.24660	*ecuación*	0.30378
4	*ecuación*	0.24592	*Cramer*	0.28126
5	*multiplicación*	0.20760	*determinante*	0.19219
6	*Gauss-Jordan*	0.16450	*identidad*	0.16651
7	*suma*	0.15488	*suma*	0.16081

Tabla XIV. Grupo 3: Matemáticas II (Nivel I) y Grupo 4: Matemáticas IV (Nivel II).

Para este centro de interés existen varios términos que comparten los dos grupos. Es interesante notar que el termino *Gauss-Jordan,* que aparece en ambos grupos, muestra, sin embargo, diferentes índices de disponibilidad. Para el Grupo 3, su valor es de 0.1645 y aparece en la sexta posición y, para el Grupo 4, ésta aparece en el primer lugar con un valor de 0.41702. Se pudiera explicar esta variación en el hecho de que, mientras los estudiantes del Grupo 3 empiezan a introducirse en el Algebra Lineal, los estudiantes del Grupo 4 poseen, por el contrario, un mayor grado de madurez conceptual en el tema, pues el Algebra Lineal es una materia clave y cuyo uso y aplicación se da en el transcurso de toda la carrera. Los términos *inversa, ecuación, suma y determinante* también figuran en ambos grupos, pero con índices de disponibilidad diferentes. Finalmente, se concluye que, en esta ocasión, los estudiantes del Grupo 4 presentaron, en promedio, mejores índices de disponibilidad léxica con respecto a los estudiantes menos avanzados.

6.- Discusión y Conclusiones

El presente trabajo tuvo como propósito el conocer cuánto y cuál es el tipo de léxico utilizado en el área de las matemáticas, en estudiantes cuyas carreras están ligadas al ámbito científico, sirviéndose para ello de ciertos estímulos, llamados centros de interés, relacionados directamente con el área en cuestión.

La hipótesis que hace referencia al aumento en el promedio del léxico disponible de los alumnos a medida que éstos van progresando en su carrera se cumplió únicamente para los Grupos 1 y 2 del área de Ciencias, pues de los seis centros de interés que conformaron la encuesta, en cinco de ellos los alumnos más avanzados (Grupo 2) mostraron un mayor promedio de palabras por informante. En los Grupos 3 y 4, del área de Ingeniería, no se observó la misma tendencia que en los otros grupos, ya que en todos los centros de interés se obtuvieron mejores promedios de palabras por informante en los alumnos menos avanzados (Grupo 3). También es preciso destacar que el Grupo 3 fue el que obtuvo el promedio general más alto de palabras por informante, seguido de los grupos 2, 4 y 1.

Considerando el número de palabras diferentes, se tuvo que los centros de interés con mayor riqueza léxica, ordenados de mayor a menor número de vocablos, fue de la siguiente manera: *gráfica* (368 palabras), *función* (367 palabras), *ecuación* (333 palabras), *espacio* (308 palabras), *serie* (270 palabras).

Uno de los hechos extraídos de los resultados de este trabajo fue que, para los grupos representativos del área de Ingeniería, en cuatro de los seis centros de interés, los términos más disponibles eran en su mayoría los mismos, aunque con diferentes coeficientes de disponibilidad. Los estudiantes del Grupo 3 mostraron, para estas palabras, mejores puntuaciones en los índices de disponibilidad. Esto quiere decir que los estudiantes menos avanzados suelen referir de manera más frecuente los mismos términos que los estudiantes más avanzados y, además, lo hacen en los primeros lugares, como consecuencia de que entre ellos existe una mayor uniformidad en su manera de pensar. Lo anterior entra en desacuerdo con una de las hipótesis planteadas al comienzo de esta investigación, pues por alguna razón, y contrario a lo que se esperaría, aquellos estudiantes que un principio no poseían estos conceptos, no logran obtenerlos; o si es que ya los tenían, conforme van avanzando en su carrera, éstos continúan mencionándose con poca frecuencia y, además, en las últimas posiciones. El otro hecho que se presentó entre los estudiantes del área de Ingeniería fue en aquellos centros de interés (*espacio* y *serie)* en los cuales las listas de términos más disponibles de cada grupo eran muy diferentes entre sí. Los estudiantes del Grupo 4, aunque mostraron un léxico mucho más específico que los del Grupo 3, sus puntaciones en los índices de disponibilidad resultaron ser bajas, lo que refiere que este tipo de terminología no se encuentra presente en la mayoría de los alumnos más avanzados.

Los resultados obtenidos por los Grupos 1 y 2 del área de Ciencias señalan también, por un lado, que éstos comparten parte de su léxico disponible. Esta situación se presentó en los centros de interés *serie, ecuación* y *matriz*. En ellos, se tuvo que ambos grupos coincidieron en al menos tres términos, presentándose el número más alto en el centro de interés *matriz,* con cinco. Los valores más altos de disponibilidad los obtuvieron siempre los estudiantes más avanzados, lo cual viene a indicar que el conocimiento y tipo de pensamiento que se espera que posean los estudiantes luego de finalizar su carrera, se va uniformando a medida que éstos van aumentando su nivel educativo. Por otro lado, el estudio también revelo que para los centros de interés *función, gráfica* y *espacio,* las palabras más disponibles de cada grupo eran muy diferentes entre sí. El léxico representativo de los estudiantes menos avanzados resulto ser básico y poco especializado, quizás aludiendo a la idea de que los estudiantes que recién comienzan su carrera poseen, con respecto a su área, una idea menos técnica y compleja de estos centros de interés más, sin embargo, indicaría que este tipo de pensamiento se irá desarrollando progresivamente en el estudiante.

Del análisis comparativo entre los grupos pertenecientes a un mismo nivel, para los grupos del Nivel I, se encontró que, en al menos cuatro centros de interés (*ecuación, espacio, matriz, función)*, los términos más disponibles de ambos grupos fueron casi en su totalidad los mismos. El otro resultado apunta hacia la diferencia en los términos más disponibles de cada grupo para determinados centros de interés (*grafica, serie*). De los dos resultados obtenidos, el léxico presente en los grupos del Nivel I es, en general, bastante simple, y con la característica de que en ningún centro de interés se obtuvieron términos que alcanzaran puntuaciones mayores que 0.60000. Esto sería consecuencia de que el estudiante, en este punto de su carrera, aún tiene una idea poco especializada sobre estos centros de interés.

Luego de comparar los resultados obtenidos por los grupos del Nivel II (Matemáticas IV y EDO), podemos establecer que, en líneas generales, son los estudiantes del Grupo 2 los que obtienen mejores índices de disponibilidad léxica en todos los centros de interés. Asimismo, el tipo de léxico empleado en ambos grupos es mucho más específico, en contraparte con el léxico mostrado por los alumnos del Nivel I. Si bien, en algunos centros de interés se encontraron palabras con puntuaciones cercanas o mayores que 0.70000, los resultados demuestran, sin embargo, que este fenómeno ocurrió con poca frecuencia, por lo que sería de bastante utilidad realizar un estudio comparativo con aquellos estudiantes que se encuentran a punto de terminar su carrera, para detectar si el modelo de enseñanza-aprendizaje establecido, según los lineamientos de su universidad, cumple con su propósito de hacer que los estudiantes comprendan los diversos conceptos relacionados con su campo de estudio, de manera que el tipo de pensamiento científico-especializado que se espera que los alumnos desarrollen, se vaya estandarizando, traduciéndose esto en mejores índices de disponibilidad en las pruebas.

Finalmente, si se colocan los resultados dentro de un contexto amplio, hay que considerar que, a pesar de que los cursos de cada nivel son similares, los estudiantes del área de Ciencias, cursan, en el primer semestre las materias de Cálculo I, Algebra I y Taller de Física y Matemáticas; en el segundo semestre, Cálculo II y Algebra II; en el tercer semestre, Cálculo III y Algebra lineal; en el cuarto semestre, Métodos numéricos, Cálculo vectorial y Ecuaciones diferenciales ordinarias; mientras que, los estudiantes de Ingeniería cursan sólo las materias de Matemáticas I, que es equivalente a la de Cálculo I de Ciencias, Matemáticas II, equivalente a Cálculo II, Matemáticas III, equivalente a Algebra lineal y Matemáticas IV equivalente a Ecuaciones diferenciales ordinarias del área de Ciencias, lo que permitiría replantear, y posiblemente de manera más profunda, porqué se obtienen los resultados anteriores, donde sólo se analiza la disponibilidad léxica de grupos de estudiantes que cursan materias equivalentes.

Referencias

Dispolex (2015). *Proyecto Prehispánico de Léxico Disponible* (http://www.dispolex.com). Enero de 2015.

Ferreira, A., Salcedo, P., del Valle, M. (2014). *Estudio de disponibilidad léxica en el ámbito de las matemáticas*. Estudios Filológicos 54, 69–84.

López, H. (1995). *Los estudios de disponibilidad léxica. Pasado y presente*. Boletín de Filología de la Universidad de Chile, 35, 245-259.

López, J., Strassburger, C. (2000). *El diseño de una fórmula matemática para obtener un índice de disponibilidad léxica confiable*. Anuario de Letras. Lingüística y Filología, 38, 227-251.

Michéa, R. (1953) *Mots fréquents et mots disponibles. Un aspect nouveau de la statistique du langage*. Les langues modernes, *47*, pp. 338-344.

Michéa, R., Rivenc, P., Sauvageot, A. *L'Élaboration du français élémentaire. Etude sur l'établissement d'un vocabulaire et d'une grammaire de base*, Paris 1956, 2.

Salcedo, P., del Valle, M. (2013). *Disponibilidad léxica matemática en estudiantes de enseñanza media en Concepción, Chile*. Atenas 4, 1-16.

Primer autor: Antonio Pacheco Mirabal
Correo electrónico: pami23_3@hotmail.com
Domicilio:, Acultzingo 233 Col. Cumbres. San Luis Potosí, S.L.P.
Celular. 5214448003789
Nacimiento:,23´07´1990
Títulos: Licenciado en Física
Centro de trabajo: Instituto Potosino de Ciencia y Tecnología (IPICyT)
Lugar de residencia: San Luis Potosí

Segundo autor: Selina Rebeca del Carmen Ponce Castañeda
Correo electrónico: selina.ponce@upslp.edu.mx
Domicilio: Circuito Roble 72 Garita de Jalisco, San Luis Potosí, México
Teléfono.(444) 123 3009
Nacimiento: 09´03´1962
Títulos: Físico Teórico, Maestro en Física, Doctor en Ciencia de Materiales
Centro de trabajo: Universidad Politécnica de San Luis Potosí
Lugar de residencia: San Luis Potosí, México

Tercer autor: Salvador Antonio Palomares Sánchez
Correo electrónico: dicimpalomars@gmail.com
Domicilio: Circuito Roble 72 Garita de Jalisco, San Luis Potosí, México
Teléfono. (444)8342544
Nacimiento: 25´09´1957
Títulos: Físico Teórico, Maestro en Física, Doctor en Ciencia de Materiales
Centro de trabajo: Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Lugar de residencia: San Luis Potosí, México

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 62-80

Aprendizagens de professores de matemática em um grupo colaborativo

Thiago Viana de Lucena, Jonei Cerqueira Barbosa

Fecha de recepción: 22/06/2015
Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	Este artículo se refiere a un fragmento de una tesis. La investigación cualitativa estuvo dirigida a comprender el aprendizaje de profesores de matemáticas en un grupo de colaboración, a través de sus informes. Este entendimiento se llevó a cabo desde la perspectiva del aprendizaje situado, presentado por Etienne Wenger. En general, entre los resultados obtenidos, podemos destacar que los aprendizajes docentes se relacionan con: el discurso utilizado en las reuniones de grupo; la puesta en común del repertorio de la práctica realizada; el papel activo del profesor antes de tomar la decisión en relación con sus acciones en la práctica desarrollada por el grupo de colaboración. **Palabras clave:** Participación; Grupos de colaboración; Aprendizaje del profesor; Perspectiva situada.
Abstract	This article refers to a fragment of a dissertation. The qualitative study aimed to understand the learning of mathematics teachers in a collaborative group, through its reports. This understanding was conducted from the perspective of Situated Learning Perspective, as presented by Etienne Wenger. In general, among the results achieved, we emphasize that the teachers learning relate to: the discourse used in group meetings; the sharing of the repertoire on the practice undertaken; the active role of the teacher before the decision making in relation to their actions in practice developed by the collaborative group. **Keywords:** Participation; Collaborative Groups; Teacher's Learning; Situated Perspective.
Resumo	Este artigo refere-se a um recorte de uma dissertação. A pesquisa qualitativa objetivou compreender as aprendizagens de professores de Matemática em um grupo colaborativo, por meio de seus relatos. Essa compreensão foi realizada sob a ótica da Perspectiva Situada da Aprendizagem, conforme apresentada por Etienne Wenger. De modo geral, dentre os resultados alcançados, destacamos que as aprendizagens docentes relacionam-se: ao discurso utilizado nas reuniões do grupo; ao compartilhamento do repertório referente à prática empreendida; ao papel ativo do professor perante as tomadas de decisões em relação às suas ações na prática desenvolvida pelo grupo colaborativo. **Palavras-chave:** Participação; Grupos Colaborativos; Aprendizagem Docente; Perspectiva Situada.

1. Introdução

Uma das compreensões que se tem acerca da formação continuada de um professor de Matemática refere-se a um "processo formativo formal ou estruturado que pode assumir modalidades diversificadas, configurando-se, assim, como um dos modos de promover o desenvolvimento do professor" (Dias y Vieira, 2012, p. 71). A isto acrescentamos que é um processo que ocorre quando o professor já está atuando em sala de aula e, em geral, está associado a alguma instituição formadora.

Costa (2011) aponta que há na literatura duas compreensões teóricas acerca da formação continuada de professores. Há um paradigma mais tradicional que aponta esse tipo de formação como uma atualização de informações, através de cursos de aperfeiçoamento, cuja compreensão está associada a uma espécie de treinamento instantâneo que busca resolver problemas emergenciais.

Em oposição a este, em que o professor é visto como mero reprodutor de saberes, há um paradigma que apresenta discussões acerca da escolha realizada por professores em relação à própria formação. Ou seja, o professor passa a assumir um papel mais seletivo ao fazer escolhas do que será agregado à própria formação a partir das suas necessidades (Costa, 2011).

Estudos que abordam a formação continuada de professores de Matemática estão cada vez mais frequentes na literatura, em especial quando essa abordagem refere-se a grupos colaborativos (Almeida et. al., 2011; Costa, 2011; Lucena, 2011; Dias y Vieira, 2012; Maciel y Lopes, 2012; Bonotto et. al., 2013; Fernandes et. al. 2013).

Dessa forma, buscamos apresentar uma discussão acerca da participação de professores de Matemática em grupos colaborativos que lhes propiciem oportunidades de aprendizagens num viés participacionista, conforme discutiremos adiante.

2. A participação de professores de matemática em grupos colaborativos

Em decorrência da demasiada utilização do termo "grupos colaborativos", há uma variedade de conceitos expostos na literatura baseados nas características desses grupos. De modo a evitar repetições que, por vezes, podem tornar o conceito demasiadamente genérico, apresentaremos uma definição própria com base nos expostos por Fiorentini (2004) e Ferreira e Miorim (2011) por compreendermos que esses autores mantêm ideias convergentes que auxiliam a delinear um conceito coeso para grupos colaborativos.

Dessa forma, um grupo colaborativo será considerado aqui como um grupo no qual seus membros participam de maneira voluntária e engajam-se mutuamente em prol de um objetivo comum. Além disso, as relações pessoais no grupo propiciam o compartilhamento de respeito e significados relacionados à prática empreendida pelo grupo.

Cabe salientar que compreendemos que prática é o conjunto de ações empreendidas para atingir um objetivo comum, cujos significados são compartilhados num grupo social. Segundo Wenger (1998), prática refere-se a um fazer num contexto histórico e social que estrutura e imprime significado ao que fazemos. Para tal, prática inclui linguagens, documentos, instrumentos, símbolos, regras bem definidas e procedimentos que são compartilhados socialmente e que foram explicitados por outras práticas com propósitos variados.

A participação de professores em grupos colaborativos vem sendo apontada por autores como Martins, Tortella e Grando (2010) como um dos aspectos mais importantes para a reflexão e investigação do professor sobre a prática empreendida em sala de aula. No caso deste artigo, as aprendizagens a serem compreendidas decorrem da participação dos professores na prática empreendida pelo grupo colaborativo.

Participação não se refere apenas a ocorrências pontuais de engajamento em certas atividades, mas a estar envolvido nas práticas sociais de modo que haja a possibilidade de reconhecimento mútuo (Wenger, 1998). Cabe salientar que o engajamento dos membros do grupo propicia um compartilhamento do seu repertório. Ainda segundo Wenger, um repertório compartilhado

> inclui rotinas, palavras, ferramentas, modos de fazer as coisas, histórias, gestos, símbolos, gêneros, ações ou conceitos que a comunidade tem produzido ou adotado no curso de sua existência, e que se torna parte de sua prática. (Wenger, 1998, p. 83)

Nesse sentido, cabe ao grupo criar subsídios para que qualquer membro, inclusive os professores, possa compartilhar o repertório utilizado na sua prática, de modo a não cercear a participação de nenhum docente.

Portanto, essa discussão em torno da dinâmica de trabalho de grupos colaborativos busca evidenciar práticas colaborativas que podem favorecer a criação de oportunidades de aprendizagens aos professores que delas participam. Dessa forma, a próxima seção destina-se a apresentar a natureza dessas aprendizagens docentes.

3. Aprendizagens docentes: do que se trata?

Nessa seção, buscamos conceptualizar as aprendizagens docentes já descritas na literatura de modo a circunstanciar as suas naturezas. Com isso, aproximaremos a discussão ao contexto específico deste artigo, que será descrito em seções posteriores.

Alguns autores inseridos na Perspectiva Situada da Aprendizagem, conceptualizam aprendizagem como mudanças na participação em atividades socialmente organizadas (Lave y Wenger, 1991; Greeno, 2003). Contudo, argumentamos que, para que essas mudanças sejam consideradas aprendizagens, não basta que a forma de participação mude, é preciso que os padrões de participação também sejam alterados. Um padrão de participação é compreendido aqui como um modelo estável na maneira como a participação ocorre em determinada prática.

De modo a ilustrar nosso ponto de vista, propomos pensar num professor que participa das reuniões de determinado grupo, sempre ouvindo as discussões acerca da prática empreendida. Num determinado dia, esse mesmo professor continua ouvindo as discussões e passa a contribuir verbalmente, mobilizando repertórios de outros grupos nos quais tenha participado anteriormente. Esse dia específico não caracteriza que houve aprendizagem, pois é um episódio isolado na forma de participação deste professor, que pode, nas próximas reuniões, voltar a apenas ouvir as discussões.

Propomos que se pense agora que a forma de participação do referido professor no tal episódio isolado continue sendo observada nas reuniões seguintes. Isso sugere que o padrão inicial de participação, isto é, ouvir as discussões, mudou para um padrão de interação verbal a partir da mobilização de trajetórias anteriores. O novo padrão de participação desse professor sugere que houve uma aprendizagem, uma vez que houve uma mudança no seu padrão participativo.

Tendo em vista que se consideram as aprendizagens como mudanças nos padrões de participação de determinado membro em relação à prática empreendida num grupo, é preciso compreender as aprendizagens docentes nesses termos. Nesse sentido, o plural *aprendizagens* deve-se à variedade de mudanças nos padrões de participação de um professor na prática empreendida em um grupo. Cada mudança pode sugerir uma aprendizagem específica. Como pode ocorrer mais de uma mudança, pode ocorrer mais de uma aprendizagem.

Não apenas a concepção de aprendizagem tem mudado, Gama e Fiorentini (2009) apontam que a concepção de aprendizagem docente tem se alterado ao longo do tempo, não consistindo apenas em acúmulo de conhecimentos, mas também em um papel ativo do professor ao gerir o que é aprendido a partir das necessidades inerentes às práticas das quais ele participa. Com base nesses autores, argumentamos que as aprendizagens docentes não se relacionam apenas a uma prática inerente ao ensino, tornando possível falar em aprendizagens docentes num grupo colaborativo. No entanto, é considerado que essas aprendizagens num grupo colaborativo podem repercutir na sala de aula na qual o professor atua, por exemplo.

Após essa discussão, apresentamos que o objetivo deste artigo é compreender as aprendizagens de professores de Matemática em um grupo colaborativo. Cabe salientar que essa compreensão será realizada por meio dos relatos dos professores, uma vez que o tempo necessário para observar as aprendizagens torna-se incompatível com o tempo disponível ao longo do mestrado.

O termo relato é utilizado nesta pesquisa como uma explicação realizada de forma oral sobre uma situação ou acontecimento. Ou seja, os professores participantes verbalizaram aspectos acerca da participação no grupo colaborativo e, a partir daí, os relatos foram analisados a fim de que fossem compreendidas as aprendizagens no grupo colaborativo. Na seção destinada aos processos metodológicos desta pesquisa, será apresentado como os relatos dos professores foram obtidos e registrados.

A próxima seção destina-se a apresentar os participantes dessa pesquisa e a descrever a dinâmica do grupo colaborativo no qual os professores participam, para que as análises dos relatos sejam compreendidas a partir desse contexto.

4. Contextualizando a pesquisa e descrevendo os participantes

O grupo colaborativo que serve como contexto para a produção de dados desta pesquisa é o Observatório da Educação Matemática da Bahia (OEM), fruto de uma parceria entre a Universidade Federal da Bahia (UFBA) e a Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), coordenado institucionalmente pelo segundo autor deste artigo.

Esse projeto faz parte de um programa de âmbito nacional – Observatório da Educação (OBEDUC) – financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) em parceria com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP).

A equipe do OEM, à qual nos referimos como grupão, é formada por pesquisadores[1], estudantes de pós-graduação (mestrandos e doutorandos), graduandos e professores de Matemática da Educação Básica. Cabe salientar que o primeiro autor deste artigo iniciou a participação neste grupo na condição de professor, mas após ingressar no mestrado, mudou sua condição de participação para mestrando.

De modo a otimizar o processo operacional, a equipe foi dividida em subgrupos que contêm pelo menos um pós-graduando, um graduando e um professor. Esses subgrupos ficam responsáveis por desenvolver ações que subsidiam as reuniões do grupão. Por exemplo, os subgrupos elaboram tarefas para apresentar ao grupão, que, por sua vez, reage a essa produção. Após a intervenção do grupão, os subgrupos voltam a se reunir para refinar a tarefa a partir das considerações do grupão. Ou seja, a prática do OEM consiste num movimento cíclico entre os subgrupos e o grupão.

O OEM visa desenvolver materiais curriculares educativos que potencializem as aprendizagens de professores de Matemática que atuam nos anos finais da Educação Fundamental. Segundo Davis e Krajcik (2005), um material curricular educativo (MCE) constitui-se como um instrumento que apoia as aprendizagens de professores tanto quanto apoia as aprendizagens de estudantes. Um MCE é constituído por alguns elementos específicos. No caso do OEM, estes materiais são compostos por: planejamento da tarefa; versões da tarefa para estudantes e para professores; uma solução comentada da tarefa; uma narrativa do professor vinculado ao OEM, detalhando aspectos importantes da implementação da tarefa; análises de registros das respostas dos estudantes e de trechos da aula de implementação, ilustradas com recortes de vídeos.

Inicialmente, há o planejamento da tarefa, onde são apresentadas desde a quantidade de aulas necessárias à implementação da mesma até sugestões de etapas para o seu desenvolvimento. Após apresentar como a tarefa foi planejada, disponibilizamos duas versões dela: uma sem respostas, direcionada ao estudante; e a outra com respostas comentadas e direcionadas ao professor.

Essas respostas comentadas também estão presentes na solução da tarefa e têm por objetivo orientar o professor, que terá acesso a este material, quanto ao que é esperado em cada questão da tarefa. Assim, o professor poderá estar atento às respostas dos seus estudantes, podendo fazer as intervenções que julgar necessárias.

Na tentativa de apoiar os professores externos ao projeto a se inspirarem em relação à aula de implementação da tarefa, o MCE traz uma narrativa da aula. Essa narrativa é elaborada pelo professor do OEM que participou do processo de elaboração, implementação e análise da mesma. Entretanto, uma vez elaborada a narrativa, o subgrupo e o grupão opinam e sugerem mudanças quando necessário.

[1] Os pesquisadores considerados aqui são os coordenadores do OEM: o professor Dr. Jonei Cerqueira Barbosa e a professora Drª. Andréia Maria Pereira de Oliveira.

Além desses elementos, o MCE traz análises de registros das respostas dos estudantes às tarefas. Por meio dessas análises, buscamos compreender como os estudantes interpretam as questões propostas pela tarefa, de modo a se reafirmá-las, caso seja percebida essa necessidade. De modo geral, as respostas dos estudantes têm auxiliado na compreensão de como eles interpretam as ideias matemáticas e como as utilizam para subsidiar seus pontos de vista.

Por outro lado, as análises de trechos das aulas de implementação da tarefa permitem que os professores externos ao OEM visualizem eventos críticos que podem ocorrer numa aula dessa natureza. Por eventos críticos, são entendidas situações que merecem destaque numa aula de Matemática, desde a interação entre o professor e os estudantes até as estratégias que o professor utiliza para criar oportunidades de aprendizagem para seus estudantes.

Como já mencionado, o subgrupo é composto por pessoas que desempenham diferentes papéis no grupo. Inicialmente, o subgrupo escolheu um descritor vinculado às matrizes de referências da Prova Brasil[2] (Brasil, 2008) no eixo relacionado a Espaço e Forma, para poder revisar a literatura sobre este descritor. Cabe salientar que o grupo escolheu focar sobre o eixo Espaço e Forma por considerar que há lacunas na literatura que o circunscreva.

Uma vez tendo escolhido o descritor a ser trabalhado, cada subgrupo ficou responsável por elaborar tarefas que, de alguma forma, sejam inéditas na literatura. Com a tarefa elaborada pelos subgrupos, cabe ao grupão refiná-la. Ou seja, propor mudanças de modo a chegar à versão final da tarefa conforme será aplicada em sala de aula.

A partir daí, o subgrupo implementa essa tarefa com um grupo de estudantes do professor vinculado ao OEM, para refiná-la a partir das observações realizadas nessa implementação denominada de experimento. Em seguida, essa última versão da tarefa é apresentada ao grupão para que possa ser analisado o potencial da mesma em relação à exploração de conceitos matemáticos. Com o aval do grupão, o subgrupo volta à sala de aula para implementar a tarefa com toda a turma de estudantes. É nesse momento que os elementos do MCE são elaborados para serem apresentados novamente ao grupão até chegar à sua versão final.

Concomitantemente a esse trabalho dos subgrupos, os grupos dos estudantes de graduação, de pós-graduação e os professores reúnem-se entre si para realizar estudos de textos acadêmico-científicos[3] que subsidiam a prática empreendida no OEM. Cada um desses grupos dedica-se ao estudo de textos que apoiam a prática empreendida por eles, a partir do papel desempenhado pelos seus membros.

Os professores da Educação Básica, por exemplo, estudam textos que abordam a gestão da sala de aula e a escrita de narrativas, pois a tarefa é implementada por eles nas salas de aula nas quais atuam e, posteriormente a essa implementação, eles narram a aula a outros professores.

Como os mestrandos e doutorandos lidam com aspectos metodológicos e com análises de dados em suas próprias pesquisas, foi estabelecido um acordo tácito de que eles se dedicariam a estudos nessa área. A partir daí, coube aos graduandos

[2] http://provabrasil.inep.gov.br/matrizes-de-referencia-professor

[3] Um texto acadêmico-científico é considerado aqui como um artigo publicado num periódico ou em eventos de notoriedade na área científica.

registrar as aulas de implementação por meio de filmagens e editar os episódios escolhidos pelo subgrupo.

No entanto, outras necessidades foram surgindo no decorrer do trabalho, o que demandou estudos de outra natureza. Por exemplo, no grupo dos graduandos foram inseridos estudos acerca da Educação Matemática como campo profissional e científico (Fiorentini y Lorenzato, 2006), uma vez que alguns dos graduandos sinalizaram essa necessidade afirmando haver uma lacuna referente a esses aspectos na formação inicial.

Como o objetivo deste artigo relaciona-se aos professores, a próxima seção destina-se a apresentá-los.

4.1. Um foco sobre os participantes da pesquisa

Os professores que participam da prática empreendida no grupo colaborativo foram, em sua maioria, convidados pelo professor Dr. Jonei Cerqueira Barbosa e/ou pela professora Drª. Andréia Maria Pereira de Oliveira. A ressalva deve-se ao ingresso de professores que foram convidados por outros membros do OEM ou que conheceram o projeto e manifestaram interesse em participar dele. No entanto, todos estão participando em caráter voluntário, sem nenhuma exigência institucional.

Consideramos que o caráter voluntário está assegurado, pois não há obrigatoriedade da participação de nenhum de seus membros. Este fato pode ser evidenciado pela saída de alguns membros por razões pessoais. De modo geral, os professores participantes desta pesquisa atuam em escolas estaduais e/ou municipais. Além de escolas na capital baiana, há professores que lecionam em escolas do município de Feira de Santana, que está localizado a 107 km de Salvador.

Esses professores possuem perfis diferenciados em quesitos desde o tempo de carreira até à própria formação inicial. Para melhor caracterizá-los, ver quadro 1.

NOME DO(A) PROFESSOR(A)	FORMAÇÃO INICIAL	TEMPO DE DOCÊNCIA
Cecília	Licenciada em Ciências e Matemática.	21 anos
Lúcia	Licenciatura em Matemática.	23 anos
Mércia	Bacharel em Ciências Contábeis e Licenciada em Matemática.	22 anos

Rivaldo	Licenciado em Matemática.	9 anos
Vanildo	Bacharel em Ciências Contábeis com Complementação em Matemática.	20 anos

Quadro 1: Perfil dos professores participantes

Cabe salientar que apenas a professora Giovanna e o professor Rivaldo não participam do grupo desde o início de suas atividades. No momento da entrevista com esses professores, Giovanna tinha 1 ano e 2 meses de participação; e Rivaldo, 4 meses. Os nomes dos professores foram mantidos em sua forma original, pois mesmo tendo a possibilidade de utilizar pseudônimos, os participantes sinalizaram não haver necessidade de sigilo. Consideramos que por fazermos parte do grupo e termos um bom relacionamento pessoal com estes professores seja um dos motivos para eles não terem apontado a necessidade da adoção de um nome fictício.

Para elucidar melhor quanto às questões metodológicas inerentes a esta pesquisa, apresentaremos na próxima seção os procedimentos de produção de dados, justificando cada escolha adotada.

5. Procedimentos metodológicos

Este artigo visa compreender as aprendizagens de professores de Matemática em um grupo colaborativo. Como este objetivo alinha-se com o exposto por Johnson e Christensen (2012), será utilizado o método qualitativo com um caráter empírico, por se tratar de uma compreensão de fenômenos experienciados por vários indivíduos.

Para a produção dos dados, foram realizadas entrevistas com os participantes. Este procedimento foi utilizado por permitir desenvolver um diálogo por meio de perguntas elaboradas pelo pesquisador (Lichtman, 2010). Por meio deste diálogo, os dados foram produzidos de modo a possibilitar a compreensão de possíveis mudanças nos padrões de participação dos professores no grupo colaborativo.

As entrevistas realizadas tiveram um caráter semiestruturado por ser possível variar as perguntas dirigidas aos participantes de acordo com as suas próprias respostas ao longo da entrevista (Lichtman, 2010). Dessa forma, o roteiro de perguntas elaborado previamente assumiu o papel de um guia ao diálogo, sem estruturar demasiadamente a interação entre o pesquisador e o participante.

A ideia inicial era realizar as entrevistas em duas etapas. A primeira etapa no segundo semestre de 2012, para obter dados da participação dos professores no OEM relativos ao período correspondente ao início do grupo em 2011. Enquanto que a segunda etapa seria realizada no primeiro semestre de 2013, para capturar dados referentes ao período compreendido entre a primeira rodada de entrevistas e o momento da segunda etapa.

No entanto, após iniciar a segunda rodada de entrevistas com o professor Vanildo, foi notado que os dados não apontavam novidades para a pesquisa. Com isso, no período planejado para realizar a segunda etapa de entrevistas, apenas foram entrevistados o professor Rivaldo e a professora Giovanna, uma vez que eles ainda não participavam do OEM quando a primeira etapa foi realizada com os demais professores. Dessa forma, o tempo que seria investido na segunda etapa de entrevistas foi destinado à escrita de outros capítulos desta dissertação.

Para analisar os dados produzidos com a entrevista, foram utilizados alguns dos procedimentos analíticos propostos por Johnson e Christensen (2012). Dessa forma, transformamos o conteúdo das entrevistas dos professores em textos para facilitar uma possível análise transversal dos mesmos. Esse procedimento permitiu que se identificasse e separasse dos textos os elementos que seriam mais significativos à pesquisa. Portanto, a análise dos dados produzidos pelos procedimentos mencionados permitiu compreender as aprendizagens relatadas por professores de Matemática a partir da participação em um grupo colaborativo.

Após alcançar esta compreensão, foi possível confrontar os resultados obtidos com a literatura para gerar compreensões teóricas e/ou confirmar/revisar aquelas já existentes.

6. Apresentação descritiva dos dados

Para sistematizar a apresentação dos dados facilitando a compreensão do que será exposto, houve uma separação dos mesmos por categorias. Essas categorias foram organizadas levando-se em consideração as ações que compõem a prática empreendida pelo grupo, de modo a relacioná-las com as aprendizagens conforme são mencionadas nas entrevistas. Essa organização tende a permitir uma melhor transversalidade dos dados que, por sua vez, propiciará uma melhor compreensão da natureza das aprendizagens. A análise transversal configura-se como uma forma de comparar os dados a fim de encontrar convergências e divergências entre eles (Johnson y Christensen, 2012).

6.1. Ações desenvolvidas nos subgrupos

Nessa primeira categoria, serão apresentados dados em que os professores mencionam mudanças nas suas participações a partir das ações desenvolvidas nos subgrupos.

A apresentação dos dados será iniciada com um trecho da entrevista do professor Vanildo que aponta uma das ações desenvolvidas pelo subgrupo: a escrita da narrativa da aula de implementação das tarefas. Cabe salientar que a narrativa é escrita pelo professor e, posteriormente, todo o subgrupo contribui colaborativamente de modo a obter uma versão a ser apresentada ao grupão.

> [...] Pra mim, o Observatório foi um divisor de águas, né? Eu posso dizer que as minhas produções textuais já não são as mesmas, né? Hoje, eu

> escrevo algo, por exemplo, e já percebo que tô sempre pedindo uma revisão. Hoje, eu sei o que é uma produção científica, né? Sei fazer uma diferença de uma produção científica pra uma produção pragmática, né? E isso veio da minha interação com os estudantes de pós-graduação dos subgrupos que já participei.
>
> Professor Vanildo

Há duas situações a serem mencionadas a partir deste relato: uma que está relacionada à elaboração da narrativa e outra atrelada à valoração desta escrita. Pelo que é relatado, o professor sugere que já havia produzido textos anteriormente, mas aponta que antes de participar do OEM não havia uma revisão de suas escritas, algo que agora parece ser comum.

Por outro lado, ao iniciar sua participação no grupo colaborativo, o professor indica que já consegue distinguir a natureza das suas produções escritas. Ou seja, quando é uma produção de cunho pragmático e quando possui um caráter científico.

A professora Cecília nos relata suas compreensões das participações dos outros membros.

> [...] Antes, a questão era que eu pensava que como Rachel tá fazendo doutorado, acho que ela sabe mais do que eu. Eu ficava esperando ouvir a opinião dela. Depois eu percebi e ela mesma fez isso. “Não Cecília, você é a professora. É você quem tá em sala de aula. Eu quero ouvir a sua opinião”. Ela dizia assim né? [...] Então aí que eu fui me localizar. Então, agora que eu já entendo o projeto, eu escuto a opinião de todos, e aí eu pondero, dou a minha opinião.
>
> Professora Cecília

Neste relato, a professora Cecília aponta que inicialmente ficava receosa quanto à sua participação discursiva no subgrupo, indicando que esse receio perpassava pelas posições ocupadas pelos membros. No entanto, uma observação feita pela doutoranda do subgrupo, permitiu que ela mudasse seu padrão de participação. Ou seja, ela passou a interagir mais verbalmente e ponderar as opiniões alheias.

O professor Vanildo também relata acerca da sua participação discursiva.

> [...] No início, minha contribuição foi quase que nenhuma no sentido de contribuir verbalmente, que eu tava ainda conhecendo, eu via que algumas pessoas, por exemplo, já falavam com muita propriedade. Agora assim, quando eu tinha dúvida eu perguntava. [...] Bem, aí à medida que o subgrupo foi fazendo a revisão de literatura e das necessidades que iam aparecendo, aí eu disse: “Peraí, agora eu sei mais ou menos o que é o Observatório. Então, a minha contribuição foi dada à medida que eu fui compreendendo, né? Então assim, no primeiro momento, sempre com dúvida, sempre na reticência, né? Com questionamento. No segundo, já contribuindo, falando, observando, enfim.
>
> Professor Vanildo

Neste relato, o professor Vanildo apresenta que as reuniões do subgrupo o auxiliaram a mudar a maneira como ele contribuía verbalmente, ou seja, o seu discurso. Essa mudança foi ocorrendo à medida que ele foi conhecendo mais sobre o Projeto e compreendendo os objetivos e a prática do grupo. No entanto, ele enfatiza que sempre buscou sanar suas dúvidas. Com isso, a partir de um padrão participativo inicial caracterizado por perguntas, ele empreende mudanças em decorrência de reuniões do subgrupo e passa a participar mais discursivamente.

Nessa primeira categoria, os dados referiram-se a mudanças oriundas de ações desenvolvidas nos subgrupos. Os dados organizados nessa primeira categoria não apresentam uma uniformidade de resultados, pois as ações desenvolvidas nas reuniões dos subgrupos contribuíram para mudanças de diferentes naturezas.

No entanto, é possível estabelecer relações entre as aprendizagens relatadas pelos professores. Consideramos que as aprendizagens relacionadas à compreensão do repertório compartilhado pelo grupo e à sua participação discursiva estão num âmbito mais relacionado ao "professor-no-contexto". Para apresentar os dados referentes a outros momentos do grupo colaborativo, organizamos os mesmos numa segunda categoria que será apresentada a seguir.

6.2. Ações desenvolvidas no grupão

Os dados apresentados nessa segunda categoria referem-se a ações desenvolvidas no grupão, relatadas pelos professores e que, de certa forma, propiciaram mudanças nos padrões participativos dos professores participantes desta pesquisa.

Há relatos referentes a mudanças no padrão participativo relacionado à comunicação verbal dos professores. Nesse sentido, denominamos por padrão participativo discursivo a uniformidade nas formas de participação por meio da fala dos professores. Com isso, os dados aqui apresentados reportar-se-ão a mudanças no padrão participativo do discurso dos professores, indicando as ações que contribuíram para essas mudanças.

O primeiro relato a ser apresentado nesta categoria será da professora Mércia que apresenta, em determinada parte de sua entrevista, mudanças relacionadas à sua participação discursiva.

> [...] Antes eu era assim mais retraída, eu achava que os outros sabiam mais, aquela questão de que fulano é doutorando, fulano é mestrando e a gente que é professor da escola básica, não tem a competência? Não, a gente também tem. [...] Logo no início, eu era introspecta, assim de falar e tal, de ir à frente apresentar uma atividade, esse tabu eu achei que quebrou mais, entendeu? E eu me sinto hoje mais assim como todo mundo, entendeu? Então, você tem sua visão teórica, mas você não tá na prática. Então assim, um contribui com o outro, mas assim eu me sinto hoje mais tranquila, mais envolvida, eu dou mais minha contribuição, eu participo mais. [...] O que eu era antes e o que eu sou hoje, eu nem comparo, né? Acho que o que contribuiu para acabar o tabu é que o coordenador tem aquela humildade de ouvir todo mundo pra depois ele se colocar. Eu acho

> que isso deixou a gente bem mais à vontade, valoriza o que a gente faz, entendeu?
>
> Professora Mércia

Este relato da professora Mércia evidencia que seu padrão de participação inicial no grupão era caracterizado pela timidez oriunda da sua condição de professora. Pois, para ela, a contribuição dos estudantes de pós-graduação, por exemplo, era mais valiosa. No entanto, ela aponta que o respeito do coordenador do grupo às falas de outros membros a auxiliou a empreender mudanças no seu padrão participativo, uma vez que ela passou a compreender que a sua contribuição discursiva era valorizada.

O professor Wagner também relata sobre seu padrão participativo discursivo e, em convergência com a professora Mércia, cita que a participação do coordenador contribuiu para que seu padrão de participação passasse por mudanças.

> [...] No início, era muito tenso pra mim em relação ao grupão porque primeiro eu tive que reconhecer o que eu poderia falar, né? [...] Aí, eu sentia que, principalmente, o coordenador ouvia muito quando os professores da Educação Básica falavam. Acho que ele tem essa noção assim realmente da importância de um professor nesse projeto do Observatório, mas eu me sentia meio acuado, meio tímido, né? Com medo de errar ou de ser criticado. Não que as pessoas me deixassem assim, era uma questão minha. [...] E aí no decorrer das reuniões, eu comecei já a falar mais, entendeu? A ficar com menos receio de mostrar minha opinião e perceber que o meu local de fala ali era enquanto professor, eu não tinha que falar ali baseado em teórico não, eu tinha que falar do meu local de fala. [...] Perceber que no grupão ali, não adiantava só o pesquisador trazer teórico A, B ou C, era a opinião do professor que tinha que tá ali também, professor era o carro chefe do projeto também, né?
>
> Professor Wagner

De um padrão de participação discursivo mais tímido, o professor Wagner parece passar para um padrão de participação mais desinibido. Como fator que possibilitou essa mudança, ele cita a valorização dada pelo coordenador às falas dos professores. Com isso, ele indica que não era preciso falar baseado em teorias científicas, pois a contribuição verbal do professor precisava estar relacionada mesmo às práticas empreendidas em sala de aula.

A professora Sofia nos relata um padrão participativo convergente com os outros professores.

> [...] No início das reuniões do grupão, eu ficava olhando assim “Meu Deus, como este povo fala, e eu não tô falando nada”. Eu precisava ficar na minha pra sondar o ambiente, mas eu vi que todos eram legais. E eu acho que todos aqui somos aprendizes; por isso, que hoje eu falo tudo sem me preocupar com o que os outros vão pensar. Não tem como falar nada errado. No dia que eu fui fazer a primeira apresentação eu pensei que meu coração ia sair pela boca. Aqueles olhos todos na minha direção. Vou ser crivada de perguntas. Mas até que não foi assim, né?

Professora Sofia

No caso dessa professora, o padrão inicial de participação discursiva também era caracterizado pela sondagem do ambiente. No entanto, o que parece ter contribuído para a mudança nesse padrão participativo relaciona-se ao fato dessa professora considerar que todos os membros do grupo são aprendizes. Ou seja, para ela todos estão num mesmo nível de participação.

Além dessas mudanças referentes ao padrão participativo discursivo, há os dados que evidenciam mudanças no padrão participativo dos professores no grupo colaborativo relacionados a aspectos de natureza diversa. Ou seja, as mudanças não referentes ao discurso do professor.

Por exemplo, o professor Vanildo nos relata que:

> [...] De forma direta ou indireta, as discussões que são trazidas por Jamille, por exemplo, que já tem uma caminhada, são muito proveitosas. Então, você fica atento às discussões do grupão e percebe que, no meu caso, me estimula a estudar, né? Tenho um interesse grande em fazer o Mestrado e agora eu vejo que há possibilidade sim de fazer. Então assim, o observatório me deu essa perspectiva de futuro em todos os sentidos.
>
> Professor Vanildo

Por meio deste relato, o professor Vanildo indica que as discussões realizadas no grupão contribuíram para uma perspectiva de futuro que ele sugere não ter surgido antes de participar do grupo colaborativo. Com isso, seu padrão de participação inicial no grupo estava caracterizado por uma acomodação profissional, isto é, a condição de professor já era suficiente para ele. No entanto, ao participar do grupo, ele passa a almejar ingressar num programa de Mestrado.

Cabe salientar que o termo acomodação não está sendo utilizado para imprimir um julgamento valorativo à condição do professor, mas para caracterizar que ser professor já era bastante para satisfazer às suas necessidades profissionais.

A professora Lúcia, por sua vez, relata a oportunidade que encontrou no grupo colaborativo para saber diferenciar dois tipos de materiais didáticos.

> [...] Quando eu entrei no observatório, eu não sabia a diferença do que era um material didático e do que era um material curricular educativo. E eu achava que era um pouco parecido isso aí. Então, eu não tinha essa diferença, eu não tinha essa nitidez. E depois do projeto, com o passar das reuniões do grupão, eu comecei a identificar o que era uma coisa, bem nitidamente, e o que é outra. Que um é trabalho voltado para o professor, que é o material curricular educativo. E no material didático, o trabalho é voltado para o aluno.
>
> Professora Lúcia

Neste relato, a professora Lúcia sinaliza que desconhecia a diferença entre um material didático e um material curricular educativo, apontando que as reuniões do grupão foram necessárias para que ela obtivesse tal esclarecimento. Com isso, o padrão inicial de participação dela é caracterizado pela falta de esclarecimento quanto à natureza de um material curricular educativo. Ao passo que, com o decorrer das reuniões do grupo, ela parece mudar para um padrão participativo mais elucidado.

O professor Rivaldo, que iniciou sua participação no grupo após dois anos do início deste, relata mudanças na sua compreensão quanto ao papel do professor no projeto.

> [...] Minha participação no Observatório mudou porque, a princípio, eu pensava que minha atribuição no subgrupo era só aplicar a tarefa, né? E agora não, agora eu já tô preocupado também na elaboração dessas tarefas. Não é só chegar e aplicar, já estou preocupado em como você vai elaborar a tarefa, nos seus objetivos, no seu planejamento, tudo. E isso mudou a partir da convivência, da experiência, da maturidade no grupão.
>
> Professor Rivaldo

O padrão participativo inicial do professor Rivaldo caracterizava-se pela sua compreensão de que ao professor cabia apenas aplicar a tarefa. No entanto, o referido professor relata que, a partir da experiência adquirida por meio das reuniões do grupo, ele passou a se engajar em outras atividades e compreender que o professor participava de todas as ações que compunham a prática empreendida pelo grupo.

A apresentação descritiva dos dados desta segunda categoria foi realizada de forma subdividida levando-se em consideração a natureza das aprendizagens. No entanto, sintetizaremos esses dados sem a subdivisão, por considerarmos que tal separação pode inviabilizar a compreensão da transversalidade.

De certa forma, a vasta quantidade de dados relacionados à participação discursiva dos professores no grupão pode estar atrelada à dinâmica de trabalho desenvolvido nesse grupo. De modo geral, as reuniões do grupão destinam-se a apresentações dos subgrupos com posterior refinamento das tarefas por meio de comentários dos membros de toda a equipe do projeto. Essa pode ser uma razão para tal fato.

Embora a categoria esteja organizada a partir do grupo no qual ocorreram mudanças nos padrões participativos dos professores, as razões para tais mudanças podem estar em diversos aspectos. Por exemplo, os professores passam a participar mais discursivamente quando começam a compreender que a sua participação é tão legítima quanto a de qualquer outro membro.

Há dados que se reportam à mudança do padrão participativo discursivo, mas que diferem do aspecto da valorização dos professores. Em um deles, o padrão participativo muda quando o professor passa a compartilhar o repertório do grupo. Nesse caso, o relato parece sugerir que, à medida que o professor participa do processo de socialização no grupo, ele vai compreendendo mais sobre a dinâmica da prática empreendida pelo grupo e ganhando confiança; o que parece contribuir para que haja mudanças em seu padrão discursivo de participação.

Por outro lado, há um relato divergente nesse sentido, pois, ao invés de falar mais, a professora Cecília passa a falar de modo seletivo, isto é, o seu discurso passa a ser direcionado ao que está sendo empreendido na prática naquele momento. Segundo ela, isso ocorre devido às intervenções de outros membros em suas contribuições. No entanto, essas intervenções não impedem a participação da referida professora, uma vez que ela muda seu padrão participativo para outro mais direcionado às discussões realizadas pelo grupo.

As mudanças não relacionadas ao discurso dos professores também merecem destaque, uma vez que sinalizam aprendizagens de outras naturezas. Por exemplo: almejar assumir a condição de pesquisador; compreender do que se trata um material curricular educativo; ter segurança nas próprias intervenções; estabelecer laços de amizade com outros membros do grupo e compreender qual o seu papel no grupo são aprendizagens que podem contribuir para outras mudanças nos padrões participativos dos professores num grupo colaborativo. Para ilustrar, podemos citar o caso do professor Vanildo que passa a almejar assumir a condição de pesquisador. Ao estabelecer esse objetivo, ele pode mudar seu padrão de participação nas ações relacionadas à análise dos episódios das aulas de implementação, por exemplo.

De acordo com a transversalidade dos dados, consideramos que as mudanças relacionam-se ao discurso do professor num grupo colaborativo, contribuindo para aprendizagens de diversas naturezas. Na próxima seção, serão apresentadas análises destes dados à luz de alguns constructos teóricos de Wenger (1998) sob a ótica da Perspectiva Situada da Aprendizagem.

7. Resultados

O objetivo deste artigo foi compreender as aprendizagens relatadas por professores de Matemática a partir da participação em um grupo colaborativo.

Apoiados em Wenger (1998), consideramos a aprendizagem como uma mudança nos padrões de participação, estando atrelada a rotinas estabelecidas na prática de determinado grupo. Nesse caso, rotina não está relacionada ao caráter estático da prática, mas à dinâmica das ações que compõem a prática empreendida pelo grupo.

A apresentação dos dados foi organizada levando-se em consideração o surgimento de novos padrões de participação dos professores no grupo colaborativo a partir de ações específicas empreendidas neste. Com isso, as mudanças dos padrões participativos dos professores evidenciam as aprendizagens docentes no grupo colaborativo.

Nesse caso, os relatos sugerem que as reuniões dos subgrupos e do grupão apresentam um maior potencial às aprendizagens dos professores. Ou seja, ações referentes à elaboração e implementação de tarefas e seu posterior refinamento, despontam-se como as que mais criam oportunidades de aprendizagens a professores.

Para Fiorentini (2004), compartilhar do repertório do grupo é condição necessária para que este assuma a condição de colaborativo. Com isso, todos os termos, ações, conceitos, instrumentos e outros aspectos pertinentes às atividades do grupo precisam assumir um caráter público para que todos os membros tenham acesso.

Nesse sentido, e em convergência com Wenger (1998) quanto ao acesso e à transparência no grupo, os professores assumem a condição de aprendizes ao terem acesso ao repertório e ao compreenderem que todas as etapas do trabalho desenvolvido pelo grupo são transparentes.

A transversalidade dos dados permitiu que compreendêssemos que as aprendizagens relatadas por professores de Matemática, a partir da participação em um grupo colaborativo, referem-se à: *aprendizagem discursiva*, *aprendizagem interativa* e *aprendizagem experiencial*.

A *aprendizagem discursiva* relaciona-se ao modo como o professor participa dos discursos do grupo colaborativo. A relação entre os dados permitiu a compreensão de que essa aprendizagem docente decorre: da compreensão dos objetivos comuns do grupo que são compartilhados pelos seus membros, da legitimação dada ao discurso docente por parte de outros membros do grupo, da segurança alcançada para intervir nos discursos de outrem e do fato de que os professores assumem um papel ativo nas decisões tomadas pelo grupo.

A compreensão dos objetivos comuns parece caracterizar o compartilhamento do repertório próprio do grupo. Isso advém da participação docente na prática empreendida, que permite que os professores tenham acesso às ações constitutivas dessa prática e que participem da negociação de significados de tais ações.

A legitimação que é dada ao discurso realizado pelos professores parece contribuir para que estes sintam-se aptos a fazer intervenções na prática do grupo e nos discursos de outros membros. Além disso, os dados sugerem que essa legitimação permite que o professor passe a assumir um papel ativo nas decisões que são tomadas pelo grupo.

De modo convergente com este estudo, Borko et. al. (2008) desenvolveram um estudo para investigar a natureza de diálogos empreendidos por professores após assistirem a trechos de suas aulas. Além disso, exploraram o grau de mudanças nesses diálogos ao longo de dois anos de um programa de desenvolvimento profissional. Os resultados desse estudo sugerem que os professores falaram com certa profundidade analítica sobre questões específicas relacionadas com o ensino e a aprendizagem de problemas matemáticos selecionados.

Esses autores apontam que mudanças nos discursos de professores podem estar pautadas em aspectos como o estabelecimento de normas de discurso e uma vontade de aprender por meio da análise e partilha de ideias sobre o vídeo em sala de aula. Ou seja, o estabelecimento de normas de discurso aproxima-se da negociação de significados (Wenger, 1998) empreendida na prática do OEM. À medida que os professores negociam significados no OEM, as normas dos discursos a serem legitimados vão sendo estabelecidas.

Além disso, há uma convergência, citada por Borko et. al. (2008), acerca da partilha de experiências; uma vez que no OEM os professores buscam compartilhar experiências relacionadas às implementações de tarefas em sala de aula. Nesse sentido, destacamos a *aprendizagem interativa* que é caracterizada pela forma como os professores interagem com a prática do grupo, com outros membros e consigo mesmos. A interação que os professores realizam com a prática distingue-se pela compreensão das especificidades de um material curricular educativo. Nesse caso, o repertório que esse grupo colaborativo compartilha na prática é permeado de aspectos inerentes à natureza de um MCE.

Por outro lado, a forma como os professores interagem com outros membros do grupo colaborativo permite que eles: compreendam seu papel na prática do grupo e criem laços afetivos com os outros membros. Os dados sugerem que, à medida que ocorre a legitimação da participação docente, os professores compreendem o papel deles na prática do grupo. Além disso, as interações com os outros membros favorecem à criação de laços de amizade, permitindo que as relações pessoais e profissionais assumam um caráter mais afetivo.

As interações que os professores realizam consigo mesmos, parecem permitir que ocorram mudanças no seu papel no grupo. Nesse caso, os professores começam a almejar migrar da posição de professor para a posição de pesquisador. Essa mudança poderá conduzi-los a novos padrões de participação que, por sua vez, poderão contribuir para novas aprendizagens.

Outra aprendizagem compreendida neste artigo é a *aprendizagem experiencial,* que está relacionada às ações que os professores desenvolvem ao elaborar materiais curriculares educativos. Em geral, essas ações ocorrem nos subgrupos e permitem a participação docente em todas as suas nuances. Com isso, essa aprendizagem docente decorre das experiências atreladas à elaboração de tarefas.

8. Considerações finais

A partir dos relatos apresentados, foi possível alcançar o objetivo deste artigo: compreender as aprendizagens relatadas por professores de Matemática a partir da participação em um grupo colaborativo.

Esta pesquisa buscou contribuir com o campo acadêmico evidenciando as aprendizagens docentes que decorrem da participação em grupos colaborativos. Essas aprendizagens vinculam-se: ao discurso de professores ao longo das reuniões realizadas pelo grupo; às interações que professores estabelecem com outros membros, com a prática empreendida pelo grupo e consigo mesmos e às ações que os professores desenvolvem no grupo colaborativo. De modo a abordar essas aprendizagens a partir de similaridades nas suas naturezas, elas são denominadas de aprendizagem: *discursiva, interativa* e *experiencial,* respectivamente.

Reconhecemos que essas compreensões estão intrinsecamente relacionadas à participação destes professores num grupo colaborativo específico. No entanto, em convergência com estudos presentes na literatura (Borko et. al., 2008; Martins, Tortella y Grando, 2010; Vaz, Lopes y Silva, 2012; Curi, 2013), consideramos que os resultados aqui obtidos podem sinalizar a potencialidade de grupos colaborativos inerentes às oportunidades de aprendizagens de professores, de modo que possa suscitar a criação de grupos que, ao longo da sua prática, possam se tornar colaborativos.

Referências

Almeida, P. C. A.; Silva, A. N. F; Davis, C. L. F; Souza, J. C de. (2011) *Secretarias de Educação e as Práticas de Formação Continuada de Professores.* Anais da 34º Reunião da Anped. Natal, Rio Grande do Norte.

Bonotto, D. L.; Basei, A. M.; Gioveli, I.; Ferreira, S. M. (2013) *Formação continuada de professores de matemática*: a constituição de um grupo colaborativo. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba: SBEM.

Borko, H.; Jacobs, J.; Eiteljorg, E.; Pittman, M. E. (2008) *Video as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development*. Teaching and Teacher Education, nº 24, pp. 417–436.

Brasil. Ministério da Educação. (2008) *PDE*: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, INEP.

Costa, M. L. C. (2011) Colaboração e grupo de estudos: perspectivas para o desenvolvimento profissional de professores de matemática no uso de tecnologia. *Dissertação* (Mestrado Profissional Ensino de Ciências e Matemática). Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Campina Grande, PB, 201p.

Curi, E. (2013) *Grupos colaborativos e desenvolvimento profissional de professores:* possibilidades e desafios. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba: SBEM.

Davis, E. A.; Krajcik, J. S. (2005) *Designing educative curriculum materials to promote teacher learning*. Educational Researcher, Reston, v. 34, n. 3, p. 3-14.

Dias, A.; Vieira, C. T. (2012) *A Supervisão na Formação Contínua de Professores de Matemática e o Desenvolvimento Profissional*. Bolema. Rio Claro, São Paulo, v. 26, n. 42a, pp. 65-86.

Fernandes, L. C. K.; Diedrich, T. C.; Althaus, N.; Müller, A. P. K.; Schossler, D. C.; Furlanetto, V. (2013) *O trabalho de professores de matemática em um grupo colaborativo.* Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba – Paraná.

Ferreira, A. C.; Miorim, M. A. (2011) Collaborative work and the professional development of mathematics teachers: analysis of a brazilian experience. In: Bednarz, N; Fiorentini, D.; Huang, R. (Orgs.). *International approaches to professional development of mathematics teachers.* University of Ottawa Press.

Fiorentini, D. (2004) Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: Borba, M. C.; Araújo, J. L. (Org.). *Pesquisa qualitativa em educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, pp. 47-76.

Fiorentini, D.; Lorenzato, S. (2006) *Investigação em educação matemática*: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados.

Gama, R. P.; Fiorentini, D. (2009) *Formação continuada em grupos colaborativos:* professores de matemática iniciantes e as aprendizagens da prática profissional. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 11, n. 2, pp.441-461.

Greeno, J. G. (2003) Situative research relevant to standards for school mathematics. In: J. Kilpatrick, W. G. Martin, and D. Schifter (Eds.). *A research companion to principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 304-332.

Johnson, B.; Christensen, L. (2012) *Educational research:* quantitative, qualitative, and mixed approaches. Thousand Oaks: Sage. Cap. 4.

Lave, J.; Wenger, E. (1991) *Situated learning:* Legitimate peripheral participation. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lichtman, M. (2010) *Qualitative research in education:* a user's guide. Thousand Oaks: Sage, pp. 138-161.

Lucena, T. V. (2011) *Os grupos de estudos como alternativa de formação continuada para os professores de matemática das séries iniciais*. Anais do XIV Encontro Baiano de Educação Matemática.

Maciel, M. C. C.; Lopes, C. E. (2012) *A formação contínua de professores de matemática*: o processo de leituras e escritas de um grupo de trabalho colaborativo. Anais do Encontro de Produção Discente PUC-SP/Cruzeiro do Sul. São Paulo. pp. 1-11.

Martins, E. R. A.; Tortella, J.; Grando, R. C. (2010) *Aprendizagem docente:* o papel do grupo de trabalho colaborativo no ensino de Matemática na Educação Infantil. Horizontes, v. 28, nº 1, pp.121-133.

Vaz, H. G. B.; Lopes, A. R. L. V.; Silva, D. S. G. (2012) *A dimensão colaborativa no movimento de ensinar, aprender e formar-se professor que ensina Matemática*. Roteiro, Joaçaba, v. 37, n. 1, pp. 127-146.

Wenger, E. (1998) *Communities of Pratices Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge.

Lucena, Thiago Viana. Licenciado em Matemática – UFBA. Pós-graduado em Educação Matemática – UCSAL. Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências (PPGEFHC) – UFBA/UEFS. Atualmente é Professor de Matemática na Rede Estadual da Bahia e na Rede Municipal de Salvador.

Barbosa, Jonei Cerqueira. Doutor em Educação Matemática – UNESP. Atualmente é Professor em programas de pós-graduação na UFBA.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 81-105

Lugar que asume el juego como estrategia didáctica en clases de Matemática al inicio de la escolaridad primaria

Virginia Cardón , Natalia Fátima Sgreccia

Fecha de recepción: 05/02/2015
Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	Esta investigación se realiza en las tres escuelas primarias, en segundo grado, de una localidad pequeña de la provincia de Santa Fe (Argentina). Mediante un estudio cualitativo, pretendemos conocer el lugar del juego como estrategia didáctica en las clases de Matemática, los momentos en que se emplea así como los tipos de tareas asociadas. Las maestras con las que se trabajó destacan aspectos favorables con relación al juego; sin embargo en sus clases prácticamente no se emplea como estrategia didáctica. En su lugar suelen remitirse a actividades más bien tradicionales con empleo de recursos o acciones no convencionales. Esto podría tener correspondencia con la escasa formación académica que han recibido. **Palabras clave**: juego; primaria; clases.
Abstract	This research was conducted in the three primary schools, at the second grade, in a small town in the province of Santa Fe (Argentina). Through a qualitative study, we intend to see the place of the game as a teaching strategy in math classes, moments when used and the associated types of tasks. The teachers with whom we worked highlight positive aspects regarding the game; however in their classes it is practically not used as a teaching strategy. Instead they often refer to traditional activities with the use of unconventional resources or actions. This could have correspondence with little formal education they have received. **Keywords**: game; primary; classes.
Resumo	Esta pesquisa é realizadaem três escolas primárias, na segunda série, em uma pequena cidade na província de Santa Fe (Argentina). Mediante um estudo qualitativo, tem-se por objetivo conhecer o lugar do jogo como estratégia didática nas aulas de Matemática, os momentos em que ele é usado e os tipos de tarefas associadas. As professoras com as quais se trabalhou destacam aspectos favoráveis a respeito do jogo; no entanto, em suas aulas praticamente não se utiliza como estratégia didática. Em vez disso, muitas vezes elas se referem a atividades mais tradicionais com o uso de recursos ou ações não convencionais. Isso poderia ter correspondência com a pouca formação acadêmica que receberam. **Palavras-chave**: jogo; primária; classes.

1. Introducción

Generalmente los primeros años de escolaridad primaria se caracterizan por un cambio muy importante en las estrategias empleadas por los docentes de este nivel con respecto a los de nivel inicial. En jardín la enseñanza se caracteriza por un aprender jugando, a través del cuerpo y la creatividad, mientras que en el nivel primario, los niños suelen estar sentados toda la hora escolar, demandando una atención sostenida por parte de los docentes.

Es el docente quien decide cómo enseñar y qué estrategias incluir en el aula, esto en tanto agente constructor de sus propias prácticas, portador de supuestos, valores y conocimientos personales, implícitos y explícitos, que orientan sus intervenciones. Estos conocimientos y creencias son construidos en el marco de su experiencia como alumno y luego como docente, y operan a modo de “teorías prácticas” en su hacer cotidiano (Gimeno, 1994).

Consideramos al juego como una actividad esencial para que el niño se desarrolle física, psíquica y socialmente. El niño necesita jugar no solo para tener placer y entretenerse sino, también, para aprender y comprender el mundo. El juego es una importante estrategia didáctica para el aprendizaje de nociones matemáticas, ya que estimula la creatividad, desarrolla el pensamiento lógico, favorece la operación de matematizar e introduce los temas de manera contextualizada.

Pero a pesar de las posibilidades que brinda el juego, la actividad con elementos lúdicos no siempre es valorada por los adultos (docentes, padres) como una estrategia de enseñanza. Muchas veces representa un simple pasatiempo sin percatarse de la función que ejerce en el niño; por ello suele considerarse solo como una forma de entretenimiento, usada en los tiempos libres.

La Convención sobre los Derechos del Niño, ratificada por la Asamblea General de las Naciones Unidas el 20 de noviembre de 1989, constituye una expresión firme del compromiso de los Estados por garantizar las mejores condiciones para el crecimiento y desarrollo de todos los niños, entre ellas el derecho al juego y al esparcimiento. Esto particularmente se ve plasmado en Argentina en la ley vigente, donde se concibe al juego como actividad necesaria para el desarrollo cognitivo, afectivo, ético, estético, motor y social (Ministerio de Educación de la Nación, 2006b).

En este trabajo se pretende reflexionar sobre la necesidad de ofrecer prácticas de enseñanza en esta sintonía al inicio de la escolaridad primaria, en particular en Matemática como caso paradigmático, teniendo en cuenta la incorporación del juego como estrategia didáctica. Esto se basa en que se considera que lo lúdico tiene grandes chances de habilitar prácticas pedagógicas alternativas a aquellas que hoy reconocemos como tradicionales.

Es así que, ubicándonos al inicio del ciclo lectivo de segundo año (involucrando así a alumnos que ya hayan transitado el primer año de la escolaridad primaria, que tienen 7 años de edad) de las tres escuelas primarias de Fray Luis Beltrán (localidad de residencia de una de las autoras), con respecto al juego como estrategia didáctica en clases de Matemática interesa:

- ¿Qué tipos de juegos se utilizan?
- ¿En qué momentos y para qué tareas se emplean?

En efecto, para conocer el lugar que ocupa el juego como estrategia didáctica en esas clases de Matemática, procuraremos describir los tipos de juegos que se utilizan así como caracterizar los momentos y tareas en que se emplean.

2. Encuadre teórico

Existe una amplia gama de conceptos, perspectivas y posturas sobre el juego y su importancia, y todas ellas han tenido incidencia en las prácticas docentes.

Desde una perspectiva psicoanalítica, el juego es una experiencia siempre creadora que se produce en el continuo espacio-tiempo, como una forma básica de vida. El niño al jugar dice algo, da a conocer su mundo interno, constituyéndose en base para la adquisición de nuevos aprendizajes (Winnicott, 1972). Es constitutivo del sujeto en todas las etapas de su vida, puede ser reconocido como posibilidad de elaboración de situaciones conflictivas, de expresión de la fantasía, como lenguaje, como posibilidad de sublimación de los instintos, como lugar de dominio y transformación de la realidad, como espacio de creación. Implica una puesta en acción, un “hacer”, un lugar de articulación del pensamiento, el organismo, el cuerpo y el mundo simbólico. El jugar posibilita el despliegue de las significaciones del aprender, pues el niño se expresa a través del lenguaje lúdico (Rodulfo, 2004).

Siguiendo la corriente del constructivismo, tenemos entre los representantes a Piaget e Inhelder (1981), Vigotsky (1988) y Bruner (1984).

Piaget e Inhelder (1981) consideran a la actividad lúdica como una instancia importante en el desarrollo general del sujeto, una expresión del pensamiento infantil e interacción con el medio, construida espontáneamente por el niño para enfrentar una realidad que por momentos lo supera y a la cual debe adaptarse. Cumple un papel fundamental en el desarrollo de la inteligencia, ya que promueve la generación de nuevas formas mentales. Aluden a tres tipos de juego:

- *juego motor*: comprende las primeras formas lúdicas infantiles en la que se prolonga la ejecución de alguna acción por el puro placer funcional. Consiste en chupar, sostener, lanzar, sin rectificar necesariamente las características de los objetos que utiliza;
- *juego simbólico*: entre los dos y siete años de edad, el niño transforma la realidad en función de sus necesidades para disminuir las tensiones que encuentra en el contexto de las interacciones. Supone la asimilación y la imitación; es decir, la utilización de símbolos que permiten “hacer como si”;
- *juego de reglas*: implica una representación simultánea y compartida de los objetos y acciones por parte de todos los participantes de un juego colectivo. Las reglas suponen una regularidad impuesta por el grupo y cuya trasgresión merece sanción (con el correr del tiempo los niños van anticipando que las reglas pueden modificarse siempre que haya un común acuerdo, evidenciando un progreso cognitivo).

En esta misma línea Vigotsky (1988) considera que el juego infantil evoluciona asumiendo nuevos formatos que evidencian, inicialmente, el predominio de lo imaginario con ciertas reglas ocultas y que son reemplazados progresivamente por otros con reglas explícitas y posiblemente convencionales en los cuales la situación imaginaria pasa a un segundo plano. También distingue tres etapas: *juego con distintos objetos*, *juegos constructivos* y *juegos reglados.*

Bruner (1984) concibe al juego como un escenario de aprendizaje que promueve el lenguaje y el pensamiento en niños pequeños. El niño no solo aprende el lenguaje sino a usarlo como instrumento de pensamiento y acción.

En cuanto a la relación juego-enseñanza, cabe destacar que el juego en las aulas ha estado relativamente presente a través de los tiempos, pero el reconocimiento de su valor educativo todavía tiene mucho camino por recorrer. Si observamos la historia de la educación, comprobaremos que ha servido para fomentar el trabajo en equipo, favorecer la sociabilidad del estudiante, y desarrollar la capacidad creativa, crítica y comunicativa del individuo.

Malojovich (2000) sostiene que el juego es privilegiado en la infancia, además de ser uno de los derechos inalienables. Es una necesidad que la escuela no solo tiene que respetar sino que alentar promoviendo espacios en los cuales se lleven a cabo situaciones con elementos lúdicos. Pero en ocasiones las instancias lúdicas y de tareas escolares tienden a diferenciarse más que a complementarse, planteándose una distinción entre los momentos “de trabajar” y “de jugar”. Los momentos de juego, además de ser escasos, se practican comúnmente en los recreos, o son metodizados y estructurados (Cañeque, 1991). Incluso la actividad con elementos lúdicos es entendida muchas veces como un momento de descarga frente a las tensiones que provocan las jornadas de mucho trabajo.

De hecho la actividad lúdica cobra significados y funciones diversas en relación con el contexto en el que se inscribe. Detrás de un juego, en el ámbito escolar, deben existir objetivos didácticos claros (Labrador y Morote, 2008). El juego en el aula debe adaptarse a un nuevo espacio que le reserva significados y funciones diferentes a los que tiene en otros escenarios culturales e infantiles, dado que se convierte en una estrategia didáctica para la apropiación de objetivos curriculares.

En particular, las propuestas didácticas con elementos lúdicos se presentan, por lo general, a través de juegos reglados. Kamii y DeVries (1985) dan características para que un juego colectivo sea educativamente útil: proponer algo interesante y estimulante para que los alumnos piensen cómo hacerlo, posibilitar que los propios niños evalúen su éxito y permitir que todos los jugadores participen activamente durante todo el juego.

Es así que se involucran desde lo corporal, lo afectivo, lo cognitivo, lo cultural y lo social. La inclusión del juego en las clases de Matemática posibilita recuperar, redefinir y fortalecer conjuntos valiosos de saberes y habilidades que despliegan los niños al jugar (González y Weinstein, 2006), ya los niños a partir del juego se expresan, aprenden, se comunican consigo mismos y con los otros, crean e interactúan con el medio.

Específicamente desde el Ministerio de Educación de la Nación (2006a) se advierte que cuando se dice que los niños aprenden jugando, se está pensando en el juego a disposición del aprendizaje de determinados contenidos y no en la mera acción lúdica. La intencionalidad del docente diferencia el uso didáctico del juego de su uso puramente social. En el momento de jugar, el propósito del alumno es siempre ganar, tanto dentro como fuera de la escuela. El propósito del docente es que el alumno aprenda el contenido que está involucrado en el juego. Ese contenido se irá afianzando a medida que se juegue otras veces o que se ponga en situación en otros contextos.

Con respecto a los materiales escolares, su utilidad radica en su adecuación a una finalidad pedagógica y a un proyecto didáctico; es decir, que sean significativos en cierta situación concreta de enseñanza y aprendizaje (Gimeno, 2001), abarcando desde el propio cuerpo hasta la tecnología más sofisticada. Al optar un docente por un cierto material didáctico, al inclinarse por una estrategia didáctica y descartar otras, al diseñar las actividades que llevará a cabo, pone en juego sus propios conceptos sobre la disciplina. Siempre que un docente elige materiales didácticos y adopta estrategias didácticas para utilizarlos, se pregunta con qué y cómo enseñar un cierto contenido. Analizar las estrategias y materiales didácticos que se utilizan en la enseñanza de la Matemática no solo lleva a reflexionar acerca de los saberes previos de los alumnos, sino también, indefectiblemente, muestra los propios saberes de los docentes (Ministerio de Educación de la Nación, 1997).

En particular, Parra y Saiz (1996) adhieren a un enfoque donde los conocimientos matemáticos cobran significado, toman sentido, en los problemas que permiten resolver eficazmente. Se hacen aparecer las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas, lo que permite a los alumnos construir sentido. Recién después estas herramientas son estudiadas por sí mismas. Los números no se presentan uno tras otro, sino que se plantean problemas que los alumnos enfrentan con los recursos que disponen, empleando sus conocimientos numéricos como herramientas. Cuando los alumnos tienen cierto dominio sobre las situaciones, pueden producir soluciones utilizando distintos procedimientos y ahí están dadas las condiciones para enfrentar el aprendizaje de las reglas de escritura. Entienden que resulta en vano definir, componer y simbolizar los números fuera de un contexto de utilización. Es a través del uso que haga del dominio que se construya que el alumno elaborará sus propias concepciones del número, completadas o cuestionadas con la extensión del campo numérico que conoce, con el descubrimiento de nuevas posibilidades de utilización, con el avance en las capacidades de calcular, con el descubrimiento de otras clases de números.

Entre los investigadores de habla hispana que han analizado el tema en la última década encontramos consideraciones generales en torno a los beneficios del empleo del juego al estudiar Matemática, tales como:

Muñiz-Rodríguez, Alonso y Rodríguez-Muñiz (2014) resaltan que los matemáticos de todos los tiempos han disfrutado del juego, evidenciando así una relación fructífera entre juego y Matemática.

Para la enseñanza de la Matemática, Villabrille (2005) considera que los juegos constituyen un aporte importante, ya que motivan al alumno con situaciones atractivas y recreativas, desarrollan habilidades y destrezas, rompen con la rutina de los ejercicios mecánicos, revén algunos procedimientos matemáticos y disponen de ellos en otras situaciones, estimulan cualidades individuales (confianza, autoestima, autovaloración) y favorecen el reconocimiento de los logros de los compañeros.

Sin embargo, Campos, Chacc y Gálvez (2006) han comprobado que si bien el juego suele utilizarse en algunos establecimientos escolares chilenos, no se lo emplea como estrategia didáctica sino que se lo usa en los tiempos libres como un entretenimiento. Observan que aún existe una brecha entre la escuela y el entorno, ya que en el ámbito escolar por lo general no se consideran del todo los intereses ni las necesidades de los educandos. Concluyen que el juego permite establecer relaciones cercanas y confiables, lograr aprendizajes significativos y contextualizados, enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ello recomiendan que los docentes le otorguen al juego la importancia que merece.

También cabe mencionar algunos relatos de experiencias en ámbito escolares que emplean juegos con niños en una franja etaria similar a la que aquí interesa. Entre ellos destacamos seis:

Edo y Deuloufé (2006) implementan dos juegos de mesa (“Te pido un…” y “Memori a 12”) de aritmética básica en el primer ciclo de la escolaridad primaria española. Observan que hubo un aumento en la capacidad de los alumnos para ayudarse en sus procesos de aprendizaje. Frente a errores, dudas y dificultades con contenidos matemáticos, se van produciendo gradualmente diálogos más largos y complejos para llegar a soluciones efectivas y compartidas.

Slavin (2010) propone al rompecabezas (Fig. 1) como juego en el aprendizaje de la Matemática en diversos niveles educativos (desde inicial hasta secundario). Sostiene que el juego sirve para promover el desarrollo de habilidades específicas (pensamiento visual, representación gráfica, anticipación de transformaciones, superación de obstáculos), favorecer el aprendizaje de contenidos (cubrimiento del plano, movimientos en el plano, área, perímetro, relación parte-todo) y promover la socialización de los alumnos (intercambio con otros, comunidad de práctica). Rescata lo lúdico para idear modos creativos y novedosos de resolver problemas, llenar de significaciones los conceptos y abrir espacios para construir procedimientos con sentido.

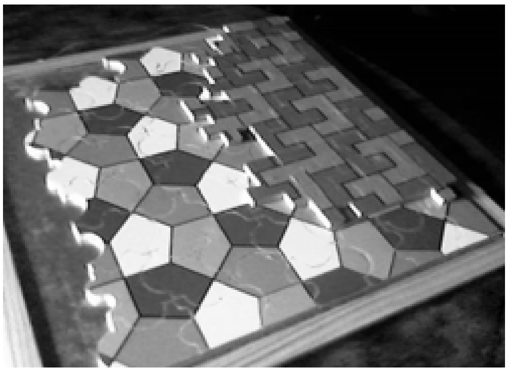


Figura 1. Rompecabezas

Rojas (2010) utiliza juegos lógicos (“Red de productos” (Fig. 2) y “Anulando dígitos” (Fig. 3)) como estrategia didáctica para trabajar operaciones aritméticas elementales e introducir ecuaciones con alumnos peruanos de cuarto grado de primaria. Se emplean los signos de las operaciones según diversos niveles de complejidad, reproducción, conexión y reflexión. Estos juegos han favorecido el logro de procesos cognitivos desarrollando habilidades de pensamiento lógico (identificar, analizar, relacionar, planificar, ejecutar y evaluar).

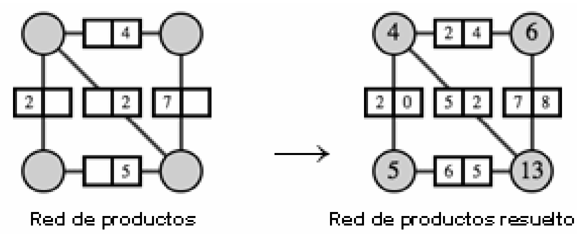


Figura 2. Red de productos

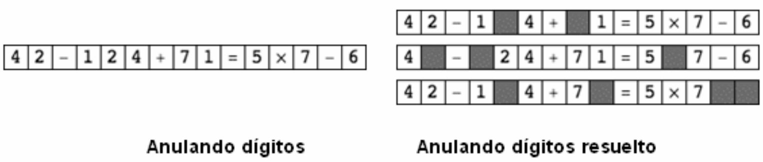


Figura 3. Anulando dígitos

González (2012) lleva a cabo un juego denominado “el fondo del mar”, que procura favorecer la orientación espacial al inicio de la escolaridad primaria. Consiste en que un grupo ubique animales marinos en una imagen dada (del fondo del mar) a partir de las consignas brindadas por otro grupo. Esto les permitió aplicar los conocimientos que ya poseen y, al mismo tiempo, desarrollar esos conocimientos, cuestionarlos y elaborar nuevos, para lograr una adecuada comunicación e interpretación en la ubicación de objetos en un espacio concreto.

Espona (2013) elabora una propuesta para el jardín con niños de 3 a 4 años, para favorecer el aprendizaje en Matemática a través de un juego de construcciones geométricas. Propende a la experimentación, observación y manipulación de los cuerpos geométricos elementales materializados en diversos soportes. Concluye que el juego es una estrategia didáctica que favorece el aprendizaje en sus múltiples facetas, facilitando el conocimiento del entorno, las capacidades de aprendizaje y las relaciones sociales. Ayuda a que cada alumno pueda crear y manipular según sus intereses, capacidades, habilidades y conocimientos previos. También aprende a interrelacionarse, cooperar, interaccionar, conversar.

Alsina (2014) realiza una experiencia (“construir una montaña”, Fig. 4) con alumnos de 5 años mediante la cual se produce una conexión de suma importancia en los primeros aprendizajes matemáticos: entre una Matemática intuitiva -que los niños aprenden a través de sus experiencias, en el contexto de prácticas informales- y una Matemática más formal -que se aprende en la escuela-. Advierte que en este proceso los materiales y recursos didácticos no son ninguna garantía de “éxito” por sí mismos, sino que deben ir acompañados de actividades intencionadas por parte del docente que promuevan el aprendizaje. Destaca la instancia de puesta en común para realizar una síntesis e institucionalización de los conocimientos utilizados durante la “construcción de montañas” con el objeto de que los niños sean capaces de reconocerlos como contenidos matemáticos que han aprendido en la escuela.

Figura 4. Alumnos trabajando en la actividad “construir una montaña”

3. Método

El estudio se encuadra en un enfoque cualitativo, de alcance descriptivo, de campo empírico, no experimental y de tipo transversal (Bravin y Pievi, 2008; Hernández, 2008). Los sujetos de la investigación son tres maestras (D1, D2 y D3), una de cada escuela primaria de la ciudad de Fray Luis Beltrán[1] (Esc1, Esc2 y Esc3), todas de gestión pública estatal, que en el año 2014 se estaban desempeñando en segundo año. También participan los alumnos de estas docentes en el desarrollo de las actividades por ellas propuestas. Una breve descripción de las docentes así como de las de las escuelas se presenta en la Tabla 1.

	Docente	Escuela
1	Se recibió en el año 1993, empezó haciendo reemplazos cortos en	Está ubicada en la zona sur. Los alumnos provienen de diferentes sectores de la ciudad, de clase media y media

[1] Se abarca la totalidad de escuelas primarias de esta localidad santafesina de aproximadamente 15.000 habitantes.

	otras escuelas y luego comenzó a trabajar en la Esc1. Fue docente de segundo grado cuatro veces aproximadamente. No realiza otros trabajos.	baja. El año anterior los estudiantes estaban divididos en los cursos según sus capacidades, mientras que este año se volvió a organizar las divisiones sin tener en cuenta las posibilidades y dificultades de los niños. Tiene cinco segundos años, tres divisiones en turno tarde y dos en turno mañana, estando a cargo una docente por división. Las observaciones se llevaron a cabo en un segundo de turno tarde, que tiene 21 alumnos. Se emplea el libro de texto “Bicilibro 1” de Editorial Puerto de Palos.
2	Se recibió entre el año 2003 y 2004. Comenzó haciendo reemplazos de larga duración en otras instituciones y, una vez que titularizó, empezó a trabajar en la Esc2. Fue docente de segundo año varias veces. No realiza otro tipo de trabajo y en algunas ocasiones realiza reemplazos en el turno tarde.	Está ubicada en la zona norte. Los niños que asisten están atravesados por situaciones sociales complejas, como ser pobreza -privación de necesidades básicas- y contextos violentos. Esta institución cuenta con un Programa No Graduado (PNG)[2] de promoción. Tiene cuatro segundos años, dos divisiones por turno, estando a cargo una docente por división. Las observaciones se llevaron a cabo en un segundo de turno mañana, que consta de 30 alumnos. No se emplean manuales escolares.
3	Se recibió en el año 1994. Hace 17 años que trabaja en la Esc3. Desde que se recibió realiza doble turno, en dos instituciones diferentes, una de gestión estatal (Esc3) y la otra de gestión privada (de otra localidad). Siempre ha trabajado en el primer ciclo.	Está situada en la zona céntrica de la ciudad. Los alumnos que asisten son de clase media y media alta. Tiene cuatro segundos años, dos divisiones por turno, estando a cargo una docente por división. Las observaciones se llevaron a cabo en un segundo de turno mañana, que cuenta con 23 alumnos. Se emplea el libro de texto “Pim Pam Pum 1” de Editorial Mandioca

Tabla 1. Características de las maestras y de las escuelas involucradas en la investigación

Acerca de la formación de las docentes con respecto al juego como estrategia didáctica, en sus propias palabras:

> *Yo realmente no recibí formación del juego, pero sí siempre tuve muy en cuenta que el juego es muy importante para los chicos y para que ellos tengan una muy buena motivación, entonces medianamente cada vez que tengo que empezar una actividad la inicio con algún juego o algo novedoso que a ellos les guste para trabajar después. En mi formación siempre nos decían de trabajar con material concreto dentro del aula (…) No he hecho seminarios en cuanto al juego, pero sí leo libros que hablan del juego como por ejemplo Piaget* (D1).

> *No he recibido, mirá cuando yo estudié ni siquiera un registro me enseñaron a hacer, todo lo aprendí en la escuela. Todo lo que sé lo fui haciendo en la práctica, porque realmente como formación docente no tuve una buena formación (…) He hecho algunos seminarios pero no con relación al juego, como te dije antes aprendí mucho en la práctica* (D2).

> *Yo recibí muy poca formación con relación al juego, estudié en el Normal 1, y en la parte de Matemática sí recibí algo de formación en cuanto al juego, con mucho material concreto, muy poco de juego. Yo hace como tres años que no hago capacitaciones ni nada, desde la Dirección no se nos exige, pasa por cuenta de cada uno (…) He hecho de Matemática pero no en relación con el juego. Este año tenemos el Programa de Formación Nacional, nos están capacitando a todos, pero es muy en general, no es muy específico* (D3).

El trabajo de campo comprendió dos fases, de acuerdo a las técnicas de recolección empleadas:

[2] El programa guarda una idea inclusiva de lo que debe ser la escuela y aspira a que los alumnos puedan graduarse, pero en un tiempo que no es cronológico.

Fase 1. Observaciones no participantes de clases en los cursos[3] involucrados. Se orientó a recabar datos relativos a las siguientes cuatro categorías de análisis, con el propósito de orientar las respuestas a los interrogantes planteados (apartado 1):

- Utilización del espacio físico: disposición y ubicación para el trabajo áulico.
- Contenidos desarrollados: conceptos y procedimientos promovidos.
- Desempeño de los alumnos: participación, comportamiento y trabajo en clase.
- Labor docente: tipos de actividades, materiales didácticos, vínculos con la cotidianidad, representaciones matemáticas promovidas y valoraciones de las producciones de los alumnos.

Se observó un total de 19 clases: seis en la Esc1, codificadas mediante C1-1 a C1-6, otras seis en la Esc2 (C2-1 a C2-6) y las restantes siete en la Esc3 (C3-1 a C3-7). La duración de cada clase fue de dos horas reloj y el tramo de observación correspondió al período inicial del ciclo lectivo (a un mes del comienzo).

Fase 2. Entrevistas semi estructuradas a las maestras. Las entrevistas se realizaron con posterioridad a las observaciones de clases y sirvieron para complementar lo observado así como realizar devoluciones a las docentes, las cuales fueron muy bien recibidas. Los ejes de indagación giraron en torno a los siguientes cinco puntos:

- Planificación didáctica: decisión relativa a la incorporación de ciertas estrategias y recursos en sus clases.
  Se preguntó: *¿Por qué te pareció acertado trabajar con…*[4] *con tus alumnos?*
- Características del juego: calificativos del juego así como de estrategias que no propician el juego.
  Se preguntó: *¿Cuáles tres palabras asociarías con la idea de "juego"? ¿Qué características tiene, para vos, una estrategia didáctica "anti-juego"?*
- Aprendizajes promovidos: sentidos de apropiación de la Matemática escolar con el empleo del juego como estrategia didáctica.
  Se preguntó: *¿En qué sentido el empleo del juego como estrategia didáctica en Matemática favorece la apropiación de los aprendizajes de los alumnos?*
- Estrategias en la enseñanza de contenidos matemáticos: contenidos que se enseñan a través del juego y contenidos que se enseñan mediante otras estrategias didácticas.
  Se preguntó: *¿En la enseñanza de qué contenidos matemáticos creés que es más oportuno emplear esta estrategia? ¿Qué otras estrategias didácticas implementás para la enseñanza de la Matemática?*
- El juego como estrategia didáctica: ventajas y desventajas de su uso en cursos específicos.

---

[3] La elección de los cursos se debió a la disponibilidad horaria de las investigadoras.

[4] Se especificó para cada docente de acuerdo a lo que se había observado en sus clases. Así, para D1 incluyó: globos, ábaco, afiche, bingo; para D2: equipo de canje, recorte de revistas, figuras geométricas en maderas; para D3: equipo de canje, juego con los dados, resolución de problemas.

Se preguntó: *¿Qué ventajas y desventajas ves en cuanto al uso del juego como estrategia didáctica en el curso en que te desempeñás?*

En este reporte se procura realizar la descripción a través de lo que se hace en el aula complementado con la voz propiamente dicha (el discurso) de las docentes.

4. Resultados

Con respecto a la *utilización del espacio físico*, las tres escuelas disponen de lugares individuales para sus alumnos, los "bancos" (mesa y silla), y los estudiantes tienen lugares fijos asignados, determinados al inicio del ciclo lectivo. Se ubica un niño y una niña por cada fila, compuesta por dos bancos, habiendo dos niños (o dos niñas) cuando la cantidad de niños (o de niñas) es mayor. Hay tres hileras de filas y cada hilera tiene aproximadamente cuatro filas. Se ilustra esta disposición en la Fig. 5.

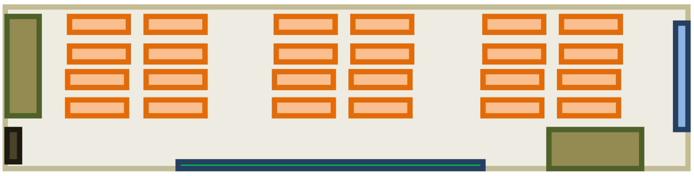


Figura 5. Disposición por defecto de los bancos

En general el espacio físico en los salones es suficiente, los tres salones tienen la misma cantidad de m^2, resultando más justo el espacio para el curso de la Esc2, por tener más alumnos.

En 11 de las 19 clases observadas, los bancos se mantuvieron en su posición inicial (Fig. 5). Cabe advertir que siete de estas clases corresponden a la totalidad de las observadas en la Esc3, donde los alumnos permanecen sentados de a dos, trabajan individualmente o con el compañero de fila. Las otras cuatro son una (C1-1) de la Esc1 y tres (C2-3, C2-5 y C2-6) de la Esc2.

Es usual en las clases de D1 (C1-3 a C1-6) y D2 (C2-1, C2-2 y C2-4) el trabajo en grupos de cuatro integrantes (Fig. 6). Para ello los alumnos se ubican con los que están sentados cerca -al lado, al frente o atrás-, produciéndose una rotación de algunos de los bancos para estar todos ellos cara a cara. En una sola oportunidad (C1-2) se dispusieron los bancos en forma de semicírculo (Fig. 7), para favorecer que los alumnos se vean entre sí.

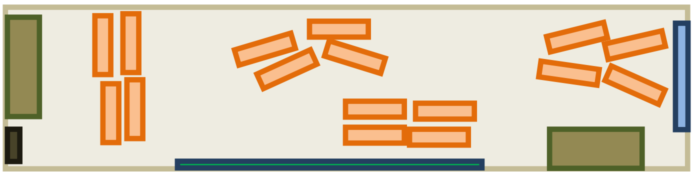


Figura 6. Disposición en pequeños grupos

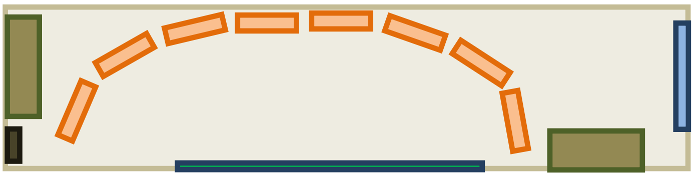


Figura 7. Disposición semicircular de los bancos

Los *contenidos desarrollados* durante las clases observadas se resumen en la Tabla 2.

Clase	Escuela		
	1	2	3
1	Los números del 40 al 59, anterior y posterior.	Representación de números del 0 al 39 a través del equipo de canje, orden entre números, anterior y posterior.	Docena y decena.

2	Representación en el ábaco de los números del 40 al 59.	Reconocimiento de las decenas y unidades de los números del 0 al 39, operaciones de suma y resta.	Docena y decena.
3	Los números del 0 al 99, anterior y posterior.	Los números del 30 al 39, descomposición de dichos números, escritura literal.	Los números del 70 al 79.
4	Operaciones de suma y resta con los números del 0 al 99.	Reconocimiento, manipulación y dibujo de figuras geométricas planas.	Sumas con dificultad.
5	Operaciones de suma y resta con los números del 0 al 99.	Los números del 40 al 49, descomposición de dichos números, escritura literal.	Sumas con dificultad y el número 80.
6	Los números del 0 al 90, reconocimiento de sus decenas, operaciones de suma.	Operaciones de suma y resta con los números del 0 al 49.	Los números del 80 al 89.
7	-	-	Decenas, unidades, los números del 80 al 89.

Tabla 2. Contenidos desarrollados en las clases observadas

Para enseñar dichos contenidos, las maestras emplean diferentes actividades, materiales y estrategias. Particularmente en las tres escuelas utilizan "la casa de los números" -consistente en una representación gráfica que simula ser una casa donde en un sector se alojan las decenas y en otro las unidades de los números (Fig. 8)-, pero la Esc2 tiene una grande de cartulina que de cada lado posee una tira con los dígitos (0 al 9), la cual se sube y se baja por detrás de la casa de manera tal que en sus ventanas se lean las decenas y las unidades del número que se desee representar.

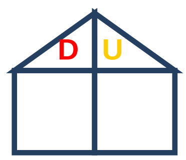


Figura 8. La casa de los números

(C1-4) *La docente le sigue dictando "a comprar chorizos me salió $24 y un pollo que salió $33. ¿Y qué quiero saber?, si compro pollo y chorizos'". "Cuánto gasté" dicen todos juntos. La docente coloca un cartel en el pizarrón con la "casa de las decenas y las unidades" y pregunta "¿Se acuerdan cómo se sumaba la casita de los números?". "Sí, las decenas" responden varios. "¿Seguros?". "Las unidades" dice una nena. "Muy bien, primero sumo la casita amarilla (unidades) y después la casita roja (decenas)". En el pizarrón están ubicados dentro de la casita de los números, el 24 y el 33. Pasa un alumno suma las unidades (4+3) y luego otro suma las decenas (3+2). La señorita pregunta "¿Cuánto gasté en total?". "57" dicen todos.*

Por su parte, entre los materiales utilizados por D1 se destacan:

- Globos en el patio para repasar los números del 40 al 59.

(C1-1) *Al comenzar la clase, la docente hace salir a los alumnos del salón para realizar un juego con globos. Se reparte un globo para cada uno, los mismos eran de color rosa y naranja, los alumnos tienen que formar dos grupos con relación al color que habían recibido. La regla consiste en formar dos filas, cuando el adulto da la orden, un integrante de cada equipo tiene que salir corriendo hasta una línea indicada en el piso, sentarse arriba del globo, hacerlo explotar, agarrar el cartel que hay adentro del mismo, regresar corriendo y tocarle la mano al compañero para que repita la situación, así hasta que todos los integrantes del grupo hagan lo mismo. Luego la docente pregunta "¿Qué hay en los carteles?". "Números" responden todos. "¿Qué números?" vuelve a preguntar la maestra. Levantan la mano y dicen los números correspondientes, todos lo hacen correctamente. Luego la docente indica que armen una fila ordenándose del número más chico al más grande. Se les dificulta organizarse, así que la maestra interviene preguntando cuál es el número más chico, la nena que tiene el número más chico (40), se da cuenta que es ella, entonces se pone primera, la docente pregunta cuál es el que sigue, y así sucesivamente. Los alumnos se ayudan entre ellos y responden a las* *intervenciones de la maestra. Cuando terminaron de armar la fila, la docente pregunta qué número era el más chico, todos respondieron correctamente. Luego elige a una alumna al azar, tenía el número 43, pregunta qué número está antes y cuál es el posterior, responden todos juntos, diciendo correctamente la respuesta. Después ingresan al salón y van pasando de a uno al pizarrón pegando los números del más chico al más grande, luego los cuentan todos juntos en voz alta.*

- Actividades extraídas del libro de texto (ubicación en una cuadrícula de los números del 0 al 99, anterior y posterior, reconocimiento de números, cálculos mentales).

(C1-3) *El libro tiene dibujadas unas llaves con sus respectivos llaveros, los mismos tienen diferentes números, más abajo una cuadrícula de 10 por 10, en la primera hilera horizontal corresponden los números del 0 al 9, en la segunda del 10 al 19 y así sucesivamente. No están escritos todos los números, solo algunos. La consigna dice: "Los niños de primero tienen que guardar sus mochilas en los casilleros y colgar sus llaves". "Escribo los números de los llaveros en el cuadrado".*

(C1-5) *Colocan de título "trabajamos en el libro". La actividad se denomina "Cálculos coloridos". "Indico con verde los cálculos que dan un resultado mayor que 50 y con rojo los resultados que dan menos que 50". $\boxed{36+11}$, $\boxed{70+12}$, $\boxed{25+30}$, $\boxed{81-80}$, $\boxed{40+15}$, $\boxed{18+39}$, $\boxed{30-3}$, $\boxed{42+12}$*

- Afiches para realizar sumas y restas con los números del 0 al 99.

(C1-4) *"Ahora a cada grupo le voy a dar un sobre que tiene número y un signo, también les voy a dar un afiche grande. Tienen que inventar un problemita como hicimos recién, lo escriben en el afiche y después pegan la casita y hacen la cuenta que les tocó. Trabajan todos los del grupo y se ponen de acuerdo para hacer un poco cada uno".*

- Situaciones vinculadas con la realidad (por ejemplo compras en comercios).

(C1-2) *La docente les explica que es igual que el dinero, le da un ejemplo diciéndoles que un billete de $10 es lo mismo que tener 10 monedas de $1, se tiene más cantidad de monedas pero el valor es lo mismo, ambas cosas equivalen a $10.*

(C1-4) *La docente designa a un alumno para que pase al frente, le da un sobre, le pide que lo abra y saque lo que hay adentro del mismo. Saca dos carteles. "¿Qué son?" pregunta la docente. "Números" responden todos. "¿Cuál es el que tiene en la mano derecha?". "El 33". "¿Y el otro?". "El 24". "Adentro del sobre hay otra cosa, fíjate bien" dice la señorita. El alumno saca de adentro del sobre otro cartel. "Un signo más" dicen todos. "¿Qué quiere decir el signo +?" pregunta la docente. "Para poner más cosas". "Para sumar". "Agregar". "¿Esto qué es?" pregunta la maestra señalando la cuenta. "Una suma". "¿Y para qué se usa la suma?". "Para sumar". "Para contar la plata". "¿Y para qué sirve sumar, por qué la seño se las enseña? ¿Quién suma?". Algunos responden: "La maestra". "Yo". "La presidenta". "Los papás". "¿Y qué suman los papás?". "Plata" responden todos. "¿Y para qué suman plata?" les pregunta la docente. "Para ahorrar y comprar comida". "¿Y en el supermercado qué suma la cajera?". "Lo que tenemos que pagar" responden algunos. "¿Y qué se puede comprar en el supermercado?". Los alumnos van respondiendo: "Harina". "Arroz". "Fideos". "Carne". "Bueno ahora vamos a inventar una situación problemática con estos números que sacamos del sobre. ¿A dónde podemos ir a comprar?" dice la señorita. "A la carnicería" dice una alumna. "Bueno pasá Danisa y escribí… Fui a la carnicería ¿a qué?". "A comprar chorizo" dice un nene. La docente le sigue dictando "a comprar chorizos me salió $24 y un pollo que salió $33. ¿Y qué quiero saber?, si compro pollo y chorizos". "Cuánto gasté" dicen todos juntos.*

- Ábaco para representar números (decenas y unidades).

(C1-2) *Cada alumno tiene un ábaco, con fichas rojas y amarillas. La docente pasa por los bancos dándole un cartel con un número a cada uno (del 40 al 59). Las fichas amarillas corresponden a las unidades y las rojas a las decenas. La señorita pregunta "¿Una ficha roja a cuántas amarillas equivale?". "A 10" responden todos. "Vamos a trabajar con las fichas rojas por ahora, vamos a contarlas". Cuentan en voz alta la cantidad de fichas rojas que hay, cuentan de diez en diez hasta llegar al 100. La docente dice: "llegamos al 100 contando ¿cómo?". "De diez en diez" responden todos. "¿Cuántas amarillas necesito para llegar al 100?"*

pregunta la docente. "100" responden algunos alumnos. La docente agarra algunas fichas amarillas de sus alumnos para contar entre todos hasta llegar al 100 y comprobar que se necesitan 100 amarillas para llegar a 100. Toma 10 fichas amarillas por cada alumno, considerando 10 chicos, así que cuentan de 10 en 10. "¿Son poquitas o muchas las amarillas?" pregunta la docente. "Muchas" responden los alumnos. "¿Y las rojas?". "Poquitas". "Porque tienen más valor las rojas" responde un alumno.

- Juego del bingo (con los números del 1 al 90).

(C1-6) *La docente les cuenta que van a jugar al bingo. Les reparte un cartón para cada uno. Ella pregunta si ya han jugado alguna vez y todos dicen que sí. Le solicita a una nena que explique las reglas del juego. La señorita dice que necesita dos personas, una para sacar los números de la bolsa y otra para que los anote en el pizarrón. Pasan dos nenas. Cuando se presenta alguna dificultad con la composición de un número se ayudan entre todos los integrantes del grupo. Se confunden las escrituras del 60 y del 70. Después de un rato de juego levanta la mano un alumno que hizo bingo. Controlan entre todos que coincidan los números del cartón con los números que tenían anotados en el pizarrón. Está todo correcto. Una vez terminado el juego, la docente les hace escribir en sus cuadernos "Jugamos al bingo" como título. Pegan el cartón y les da algunas actividades. "Escribir los números del bingo que pertenecen a estas familias. 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90". La docente explica la consigna y va preguntando oralmente a diferentes alumnos qué números aparecen en sus bingos en relación con las diferentes familias. Les explica que la primera columna que aparece en el cartón pertenece a la familia de los números que son menores que 10, la segunda columna a la familia del 10, la tercera a la del 20, y así sucesivamente.*

Por su parte, D2 en sus clases empleó:

- Equipo de canje para la representación de números.

(C2-1) *"Ahora por grupo van a formar con el equipo de canje los números que yo les voy a decir. El grupo 1 (señalándolo) va a formar el 28 y el 34, el equipo 2 el 15 y el 6 y el equipo 3 el 10 y el 30". A algunos alumnos se les dificulta más que a otros la representación. El trabajo que realizan es individual, es decir, no trabajan en grupo. Luego pasan al pizarrón a dibujar la representación de esos números, las decenas con un rectángulo largo azul y las unidades con un cuadrado chico de color rojo (correspondiéndose esta asignación de formas y colores con la que tiene el equipo de canje).*

(C2-5) *La docente les dice a los alumnos que saquen el equipo de canje y que formen el número 39. "¿Cuántas decenas y cuántas unidades tiene el 39?" pregunta. "3 decenas y 9 unidades" responden todos. "¿Las decenas de qué color son?". "Azules". "¿Y las unidades?". "Rojas". Luego la maestra dibuja la representación del 39 con el equipo de canje en el pizarrón y pregunta: "¿Qué pasa si le agrego una fichita roja?... ¿Qué número obtengo?". "El 40" responden algunos. "30" responden otros. "Agreguen una ustedes. ¿Qué hago con las rojas, las sigo teniendo o las canjeo?". "Las canjeo por una decena" dice una alumna. La docente dibuja en el pizarrón un cuadrado rojo (unidades) y pone que tres tiritas azules (tres decenas) y 10 cuadrados rojos (unidades) es igual a cuatro tiras azules (cuatro decenas). La profesora pregunta quién quiere pasar a escribir la palabra cuarenta, pasa una alumna al pizarrón y la escribe. Luego la señorita le reparte una hoja blanca a cada uno, les dice que formen la familia del 40 con el equipo de canje y que luego vayan dibujando las representaciones en la hoja.*

- Fotocopias con tablas para la descomposición de números.

(C2-3) *Luego la maestra les reparte una fotocopia, para que completen.*

Número	*Descomponemos*			*Lo escribo en letras*
30	*30 + 0*			*TREINTA*
31				
32				
33				
34				
35				
36				
37				
38				

39				

- Revistas para extraer números.

(C2-3) *La docente reparte una revista a cada uno. "Van a recortar la familia del 30… ¿cuál es la familia del 30?". "El 3 y el 1" dice un alumno. "¿Y cuál es el 3 y el 1?". "El 31" responden todos. "¿Y después cuáles siguen?". "31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39". "Muy bien, después los vamos a pegar en una recta numérica que les voy a dar". Los alumnos van recortando los diferentes números y pegándolos. Aquellos que no encuentran los pueden formar con algún 3 en la decena y otro dígito como unidad.*

- Tapitas de gaseosa para operaciones aritméticas (sumas y restas).

(C2-2) *"Muy bien, ahora lo suman. El que necesita tapitas me dice y les doy para que sumen y resten".*

(C2-6) *La docente escribe en el pizarrón: "Sumamos:" 20+20=; 17+21=; 22+24=; 26+13=. La maestra dice que hagan la casa de los números, que ubiquen los números y los sumen. Luego les reparte tapitas para que las utilicen para contar.*

- Formas de madera para el reconocimiento de figuras geométricas planas.

(C2-4) *La docente reparte por grupo diferentes figuras geométricas de madera (un triángulo, un rectángulo, un cuadrado y un círculo). "Vamos a recordar de qué se tratan estas figuras" dice la profesora. Va mostrando las diferentes figuras y los alumnos las nombran. Ahora les voy a dar un papel glasé a cada uno, y cada integrante del grupo va a realizar una figura geométrica diferente. Después lo recorta y lo vamos a pegar en una hoja blanca que les voy a dar". La docente les indica que utilicen el papel glasé del lado blanco, que agarren una figura, la remarquen con lápiz y después la recorten. Una vez terminado, les dice que por grupo las peguen en la hoja que ella reparte y escriban el nombre de cada figura. La docente registra en el pizarrón el nombre de las cuatro figuras. Una vez que todos los grupos finalizan, pegan las hojas de cada grupo en una pared del salón. Luego les reparte más figuras geométricas del mismo tipo y de diferentes tamaños a cada alumno. Les pide que en sus bancos armen una nueva figura, usando como piezas las dadas. Por último les dice que dibujen en sus cuadernos la figura construida.*

D3 usa:

- Equipo de canje para la representación de los números así como ciertos agrupamientos de los mismos (docena, decena) y su descomposición en unidades y decenas.

(C3-1) *La docente escribe en el pizarrón "Matemática. Jugamos con el equipo de canje". La docente pregunta: "¿Cómo se llaman las tiritas azules?". "Decenas" responden los alumnos. "¿Y las rojas?". "Unidades". "Voy a ir diciendo qué es lo que tienen que formar… Primero una decena". Un alumno muestra un cuadrado rojo y otro muestra un rectángulo azul. "¿Por qué se llama decena?" pregunta la docente. "Porque son diez cuadraditos rojos" responden algunos alumnos. "¿Y un cuadradito rojo qué es?". "Uno". "¿Y se puede representar una decena con cuadrados rojos?". Algunos responden que sí, otros que no. Un alumno levanta la mano y dice: "Sí se puede, con diez cuadraditos rojos". "Muy bien, de las dos maneras es diez. Ahora quiero que formen una docena" dice la señorita. La docente toma del banco de un alumno lo que él había representado: dos rectángulos azules. La docente pregunta al grupo-clase si está bien y algunos responden que no, que esos dos rectángulos equivalen a 20. Otra alumna muestra la representación correcta (un rectángulo azul y dos cuadrados rojos). "¿Hay otra forma de representar la docena?" pregunta la señorita. "Sí, con las unidades". Proceden a representar una docena solamente con unidades y se lo muestran a la docente.*

(C3-7) *"Hay varios leones, cada uno tiene un cartel con un número descompuesto en unidades y decenas. Ustedes tienen que poner el número que corresponde. Primero represéntenlo con el equipo de canje. Vamos a hacer un ejemplo: 2 decenas y 3 unidades, ¿qué número es?". "23" dicen todos. "Muy bien, les voy a dar una más difícil 5 decenas, 10 unidades. Pónganse de acuerdo, uno representa las decenas y otro las unidades, luego lo juntan y lo suman". Algunos dicen: "70". "60". "15". "La otra vez aprendimos que podemos canjear 10 unidades por algo que valga igual. ¿Por qué lo podemos canjear?" interroga la maestra. "Por una decena"* *responden todos. "Acá tengo 10 (señalando 10 cuadrados rojos), ¿y acá? (mostrando la decena)". "10" dicen todos. "¿Tenemos igual, o uno tiene más que otro?". "Igual".*

- Objetos de la realidad para realizar operaciones aritméticas (sumas y restas).

(C3-2) *"Mi mamá me mandó a comprar dos docenas de huevos, ¿cuánto es?".*

(C3-5) *"La mamá de Aldana plantó 17 rosas y 9 margaritas. ¿Cuántas flores plantó?".*

- Actividades del libro de texto para efectuar cálculos mentales ("la familia" del 70 y el número 80).

(C3-3) *La docente escribe en el pizarrón "La familia del 70. Trabajamos en el libro páginas 182 y 183". En el libro hay una cuadrícula de 10x10 cuadrados que tienen los números del 0 al 90, algunos de ellos faltan. "Resuelvan mentalmente las siguientes operaciones y luego ubiquen en el cuadro el resultado:" 70+9=; 70+2=; 70+5=; 70+4=; 70+1=; 70+8=.*

- Juego con dados para introducir la suma con dificultad.

(C3-4) *La docente coloca en el pizarrón la fecha y de título "Jugamos en pareja". La profesora les dice a los alumnos que saquen un lápiz, una goma y el equipo de canje. Luego les reparte una fotocopia a cada uno y un dado por pareja. Juegan de a dos, como están sentados.*

Nombre	*1er tiro*	*2do tiro*	*3er tiro*	*4to tiro*	*5to tiro*	*6to tiro*	*Total*

Cada participante tiene que colocar en su fotocopia su nombre y debajo el de su contrincante. Tiran el dado, uno por vez, y para cada tiro deben dibujar la cara que sale. Luego de realizar seis tiradas cada uno, tienen que sumar los números obtenidos por cada jugador en todas las tiradas y el que obtiene el número más alto es el ganador. La docente les dice que sumen utilizando lápices, puntitos, palitos, con los dedos, etc. La mayoría va contando los puntitos de la cara del dado dibujados en la fotocopia. Luego la maestra les dice: "Ahora quiero saber quién es la pareja que obtuvo mayor puntaje, ¿cómo hago? Por ejemplo si quiero saber la pareja de Azul y Martín". "Yo pongo 21 y Martín pone 20" dice Azul. "¿Y qué cuenta tengo que hacer?" pregunta la señorita. "Se suma" responden los dos. La docente dibuja en el pizarrón 10 casas de los números para que cada pareja pase y sume sus puntajes. Deja para lo último a las parejas cuya suma de unidades es mayor que 10 (sumas con dificultad). Pasan dos alumnos, colocan sus puntajes para sumar (26 y 25) y la docente pregunta al grupo-clase: "¿Cuánto es 6+5?". "11" dicen todos. "¿Qué número ponen en la casita de las unidades?". "1". "¿Pero el 11 cómo se forma?". "Con dos 1". "Armen el 11 con el equipo de canje". La docente dibuja en el pizarrón la casa de los números y coloca los dígitos que componen al 11 en sus respectivos lugares. "En la casita de las unidades entra solo un número, se acuerdan que les había dicho antes". Luego les pregunta: "¿Se puede canjear el 11? Si yo le doy a Leo 10 unidades, ¿él qué me puede dar?". "Una decena" responden todos. "¿Y el 11 cómo se forma?". "Una decena y una unidad". "Cuando tengo números que se pasan de 10, pongo la unidad en la casita de las unidades, le pregunto a la decena si puedo poner en su casita la decena de ese número, la escribo arriba, entonces tengo dos más dos más una decena que me llevé (haciendo referencia a 25+26). ¿Cuánto es?". "5" dicen todos.

- Juego de la rayuela para trabajar "la familia" del 80.

(C3-6) *"¿Conocen el juego de la rayuela?" les pregunta la docente a los chicos. "Sí" dicen varios. La maestra le pide a una nena que explique cómo se juega, ya que hay varios alumnos que no conocen el juego, y la estudiante procede. "En el libro en la página 208, hay una rayuela, pero es diferente a la que conocen ustedes, a la que hay en el patio… ¿Qué tiene de diferente esa rayuela?" les pregunta la señorita. "Son números más altos" responden algunos. "¿Esta rayuela a partir de qué número está?". "Del 80 al 89" responden todos. "Tienen que adivinar el número y pintar del color que dice la consigna". La docente designa a un alumno que lea el primer ítem del enunciado. "1+83 de color celeste". "¿Cuánto es?" pregunta la profesora. "84" dicen todos. "Muy bien, píntenlo de color celeste". "Uno menos que 89 de color rojo". "88" dicen varios. "Muy bien, pinten de color rojo al 88". "Mayor que 82 y menor que 84, de color verde". "Esta es más difícil" comenta la docente. (…) "¿Quedaron números sin pintar?" pregunta la docente. "Sí". "¿Cuáles?". "81, 85, 86, 87" responden todos. "¿Se les ocurre a ustedes alguna pista para dar?". (…) "Bueno vamos a ir a jugar a la rayuela al patio ahora"* *indica la maestra. Luego la docente los lleva al patio para que jueguen a la rayuela. Los alumnos escriben los números del 80 al 89 en la rayuela que está pintada en el piso del patio de la escuela. Dibujan otra al lado, también con los números del 80 al 89, y se dividen en dos grupos. El que comienza lanza una goma hacia el 80 (primera casilla). Van pasando de a uno y cuando terminan de pasar todos, tiran la goma al número siguiente, así hasta llegar al 89.*

En cuanto a las vinculaciones con la realidad, por un lado ha sido posible advertir que cuando se nombran objetos reales (comidas, animales) los mismos podrían ser fácilmente intercambiables con otros objetos sin alterar la situación; es decir, esos objetos no son puestos en una situación específica a resolver. Por otro lado, cuando aparecen acciones en dichas vinculaciones, estas suelen quedar restringidas al dinero para efectuar compras en comercios (por ejemplo supermercado); sin aprovechar eventuales ámbitos propuestos espontáneamente por los alumnos (por ejemplo aparatos tecnológicos).

(C1-1) *"¿Dónde puedo encontrar a estos números?", pregunta la docente. Levantan la mano y van diciendo: "En el control remoto, para cambiar la tele", "en la compu, en el teclado", "en el salón (señalando una cartulina donde había una grilla con números del 0 al 99"), "en el celular, para marcar un número y llamar por teléfono", "en el libro para saber las páginas". La señorita añade que esos números se pueden encontrar en los precios del supermercado o en el dinero.*

En las tres escuelas predomina una enseñanza clásica de la Matemática, donde los números se presentan uno tras otro y al estudiar cada número se precisan las reglas de escritura, las descomposiciones posibles y los resultados relativos a las operaciones. En efecto, en las dos primeras clases observadas de D1 (C1-1 y C1-2), se procura reconocer los números del 40 al 59 y se realiza su descomposición empleando el ábaco. En las demás clases se va avanzando con la enseñanza de los números que le siguen, de acuerdo a un orden matemático. D2 en las clases C2-3 y C2-5 solicita mediante una fotocopia enumerar la familia del 30 y del 40, respectivamente. Los alumnos tienen que descomponer los números, escribirlos literalmente y representarlos con el equipo de canje, sin un uso social de los mismos. Análogamente, D3 en la C3-3 enseña la familia del 70 y en la C3-6 la del 80. Entrega a los estudiantes una fotocopia para que decoren el número 80 y lo escriban literalmente.

Acerca del *desempeño estudiantil*, en las tres escuelas la participación y el diálogo docente-alumnos se produce de manera constante. La participación se promueve a través de distintas preguntas frente a las consignas. Cuando el docente propone una actividad, primero se desarrolla un ejemplo involucrando al grupo-clase y luego los alumnos trabajan de manera autónoma. La corrección de las actividades también se realiza de manera conjunta, procurando promover la participación de cada estudiante. Algunas veces se trata que los alumnos se den cuenta del error y se corrijan entre ellos.

Por ejemplo, en C1-2, D1 propone como actividad la representación en el ábaco de los números del 40 al 59. Antes de presentar la consigna de trabajo la docente comienza a indagar sobre los saberes previos preguntándoles a cuánto equivale una ficha roja (decena), a cuántas amarillas (unidades) equivale una roja, cuántas fichas rojas y amarillas se necesitan para llegar al 100. Luego cada uno representa en su ábaco un número designado y por último corrigen entre todos la actividad. Pasan de a uno al frente, corroboran dicha representación y son los mismos alumnos los que van identificando el error, guiados por la maestra.

Con respecto al *intercambio alumnos-alumnos*, es posible observar que no se fomenta demasiado el diálogo entre ellos con relación a los aprendizajes; a pesar de que en las Esc1 y Esc2 la mayoría de las veces los alumnos están agrupados, en cuanto a su disposición en el salón. A pesar de la importancia del trabajo en grupo, en niños con estas edades las acciones de cooperar, dialogar y debatir necesitan de un otro (adulto) que acompañe este proceso. En un primer momento se podría hablar de agrupamiento (solo dispuestos así físicamente) para luego devenir en grupo (en cuanto construcción compartida).

Por lo general las actividades observadas demandan resolver ejercicios o tareas puntuales, que pueden prescindir de un intercambio grupal. Solo en una ocasión, en la Esc1 en la C1-4, cuando trabajaron con afiches, los alumnos tenían que inventar un problema entre todos los miembros del grupo.

En las tres escuelas, la mayoría de las veces los niños pasan las horas sentados en sus sillas, manteniendo un orden propuesto por la docente. Sin embargo, el hecho de estar parados moviéndose (por ejemplo cuando jugaron a la rayuela en C3-7 o cuando jugaron con globos en C1-1) no necesariamente garantiza que se esté produciendo una actividad no tradicional o lúdica.

Por su parte, D1 comenta que va cambiando la planificación de las actividades, dependiendo del curso escolar, del grupo de alumnos y de los resultados que va obteniendo.

> *Con globos era la primera vez que trabajaba… Lo pensé para introducir un repaso del año pasado que eran los números del 40 al 59… Ábaco siempre usé, me parece que es más fácil dentro de la extracción que luego ellos van a tener que ir haciendo, tenemos también el equipo de canje pero me gusta más el canje con dinero que con las fichas. Y capaz que con el ábaco sí soy más tradicional, pero me parece que lo entienden bien que 10 fichas amarillas equivalen a una decena, una ficha roja es 10 amarillas. El juego del bingo me gustó, porque es un juego divertido, entretenido para los chicos y además podés trabajar con los números, y justo nosotros estábamos dando esos números.*

Se reconocen cuatro partes en su respuesta, donde todas incluyen recursos y acciones:

a) globos para repasar, diciendo que esta fue la primera oportunidad que los empleó;

b) ábaco para entender, connotado por la docente como más tradicional que los otros;

c) equipo de canje, que no usa en este período pues prefiere asociar al canje con el dinero;

d) bingo para entretener y trabajar con los números, siendo este el único connotado como juego propiamente dicho.

Con relación a D2, en su discurso se refleja que la planificación didáctica es siempre la misma, utiliza el equipo de canje, revistas y figuras geométricas.

> *Al equipo de canje lo utilizo porque siempre vamos a lo concreto y después vamos a lo que es el papel, si no lo hacen concretamente les va ser difícil buscarlo en un escrito. Con revistas siempre trabajo, me gusta que ellos recorten y busquen cosas en las revistas, en este caso para que también sepan que en las revistas se pueden encontrar diferentes números. Y con relación a las figuras geométricas, es un material que tenemos en el aula, las fichas de madera y me pareció bueno que ellos conozcan las diferentes figuras y que también puedan armar cosas con esas figuras.*

Se vislumbra en sus decires la utilización de tres elementos con su justificación:

a) equipo de canje, para ir a lo concreto y luego pasar al papel;

b) revistas, para conocer que allí se pueden encontrar números;

c) formas de madera, para reconocer y armar figuras geométricas.

Con relación a la utilización de las revistas, la actividad consiste solamente en cortar y pegar números en una recta numérica; es decir, no se hace un análisis del uso social de los números: dónde se pueden encontrar, a qué situaciones aluden, qué están pretendiendo informar en la revista, para qué sirven.

Por último, D3 enfatiza que ella realiza una planificación basándose en los alumnos, que busca diferentes alternativas y piensa la manera de desarrollar cada tema para que ellos lo entiendan mejor.

> *Yo estoy todo el día pensando de qué manera puedo dar tal tema, buscar la manera y la forma de que lo puedan entender, siempre estoy buscándoles cosas, que sean diferentes. Una manera que me pareció de dar las sumas con dificultad, donde hay situaciones que sí o sí tienen que implementar la suma con dificultad, me pareció acorde introducirlo con un juego. El equipo de canje lo uso mucho, es un material concreto que sirve mucho en los primeros años. Y bueno, estamos dando problemas, entonces a veces les doy para que ellos también piensen si hay que sumar, restar.*

Se distinguen tres partes en su respuesta:

a) juego con dados, para introducir el tema nuevo de suma con dificultad;

b) equipo de canje, porque es un material concreto útil en los primeros años;

c) problemas, para que los alumnos piensen qué operación aplicar.

En los relatos de D1 y D3 se puede apreciar que hacen mención a la planificación previa del material y el contenido a desarrollar dependiendo de las características de los alumnos; en cambio en D2 se percibe en su discurso que utiliza determinados materiales, como por ejemplo las figuras geométricas de madera, porque las tiene en el aula y las revistas porque siempre las usa al igual que el equipo de canje; es decir, como materiales preestablecidos de antemano, sin necesariamente tener en cuenta las características de los alumnos. Todas destacan que utilizan tanto el equipo de canje como el ábaco debido a que les permite a sus alumnos trabajar con números a partir de un material concreto.

5. Discusión

Se acuerda con Villella (1998) en que propiciar una enseñanza significativa de la Matemática, que resulte no arbitraria para los estudiantes, conlleva establecer relaciones con sus aprendizajes previos, resignificar los errores que cometen y contextualizar la Matemática a la institución de la que forman parte. Los hallazgos de esta investigación parecen indicar que en las prácticas docentes observadas hay intentos en esta línea, aunque resta todavía transitar en este sentido.

Cada estrategia que utiliza el profesor permite advertir el modo de presentar los contenidos, el estilo de enseñanza, las consignas con las que acompaña los contenidos, los objetivos y la intencionalidad educativa, la relación que establece entre los materiales y las actividades, la representación que posee acerca de la funcionalidad de los aprendizajes que promueve (Grzona, 2011); es así que las estrategias didácticas no son neutrales.

En particular resulta necesario no ignorar que los docentes al iniciar su formación tienen una historia personal con respecto al juego y una valoración del mismo en la enseñanza y el aprendizaje, relacionadas con las experiencias que han vivido como alumnos, y a partir de las cuales le otorgarán cierto sentido al juego como estrategia didáctica (Biscay, 2007). La formación sistemática tiene que poder resignificar las vivencias personales y favorecer el desarrollo de la capacidad lúdica de los profesores. En este caso, en la relación formación académica - estrategias didácticas en la enseñanza de la Matemática, se puede vislumbrar la falta de una sólida formación lúdica. Las concepciones de los docentes guardan una historia de construcción y encierran un sentido con el que significan sus prácticas, producto de la cultura educativa en la que se han formado. Esto en ocasiones genera dificultades en los docentes para diseñar, implementar e incluso valorar propuestas lúdicas, trayendo como consecuencia la paulatina desaparición del juego.

D2 en un primer momento privilegia la actividad lúdica para favorecer los aprendizajes, pero en otra parte de su discurso deja entrever que el juego puede conllevar una pérdida de tiempo, que juego y estudio van por caminos separados.

No siempre se juega, porque yo considero que hay un tiempo de juego, un tiempo de estudio, porque no toda la vida es un juego, yo voy viendo en qué momentos aplicarlo.

Para esta docente las instancias lúdicas y los momentos de trabajo tienden a oponerse más que a complementarse. La escuela se presenta como un contexto que exige formas de actividad y dominio de instrumentos específicos. ¿Acaso el juego solo representa una distracción y no se le reconoce un papel importante en la construcción de conocimiento? Aquí resulta atinado introducir el término de Foucault (2002) “cuerpos dóciles”, suponiendo que los chicos aprenden más si están quietos y callados. El juego ocupa un lugar pequeño en las prácticas educacionales y un espacio considerable en la idea sobre estas prácticas. Incluso, a medida que aumenta la edad en los niños, los tiempos dedicados a jugar disminuyen (Sarle y Rodríguez, 2001). Construir este espacio lúdico en la escuela no es tarea fácil, pues muchos juegos suponen movimientos, ruidos y modificación en el espacio.

Por su parte, D3 realiza una interpretación un tanto sesgada del juego como estrategia didáctica y lo asume.

Y yo le mando juego a todo jaja, no creo que en un contenido en especial es más oportuno. Yo en todo voy buscando algo que los motive, aparte si los motiva, los marca y después se acuerdan, lo apropian de otro modo. Para trabajar con la centena exacta estoy pensando trabajar con carteles con los números, y después otros carteles con la escritura de esos nombres, salir al patio, que los ordenen de menor a mayor, después de mayor a menor, que lo hagan corresponder con la escritura. A lo mejor no es juego específico, pero son actividades que se pueden hacer al aire libre y sacarlos del salón. Son estrategias diferentes a las tradicionales, tratar de que los motive, no estar siempre sentado, copiando.

Esta maestra menciona que utiliza el juego permanentemente en sus clases pero en las observaciones efectuados se pudo constatar que esto no es del todo así; si bien en algunas ocasiones propone actividades participativas. Así, por ejemplo, en la C3-1 la docente escribe en el pizarrón como título: “Jugamos con el equipo de canje”, donde el objetivo era representar diferentes números con dicho equipo; es decir, la actividad no tenía características de juego. Algo similar sucedió en la C3-7, al realizar el “juego de la rayuela”. Los alumnos fueron al patio escolar, donde había una rayuela dibujada en el piso. Cambiaron los números que estaban escritos (del 1 al 10) por los números del 80 al 89 (porque estaban estudiando la familia del 80). Los niños se dispusieron en fila e iban saltando por los números dibujados, sin pisar aquel que estaba marcado por una goma. Una vez que pasaban todos (22 alumnos), se tiraba la goma al número siguiente (del 80 al 89) y todos volvían a pasar. Al igual que la actividad de los globos (C1-1) no logra percibirse la intencionalidad lúdica y/o didáctica de esta actividad de la rayuela.

Los dichos de D1 y D3 se asemejan con lo que plantea Malajovich (2000), donde los docentes plantean situaciones de no juego que a veces se corresponden con actividades estructuradas que tienen la intención de enseñar determinados contenidos y que, si bien no presentan componentes lúdicos, los niños sienten placer al realizarlas. Como por ejemplo cuando D3, al aludir a otras estrategias didácticas que utiliza, menciona cálculos orales y situaciones problemáticas para pensar, considerándolas juegos. Al respecto, Aizencang (2005) sostiene que muchas veces la actividad pedagógica incluye algunos rasgos lúdicos con la intención de hacer de las situaciones de aprendizaje escenas similares a las situaciones de juego. Introduce el concepto de *disfraz lúdico* para denominar a estos tipos de actividades, donde el disfraz instala un escenario imaginario, haciendo un "como si", que permite transformar la realidad y a su vez ocultar parte de ella. Cuando la actividad escolar viste un disfraz lúdico, se transforman algunas de las condiciones que suelen caracterizarla, pero se plantean demandas similares a otras instancias de trabajo que no están relacionadas con el juego. Los docentes consideran que emplean el juego como estrategia didáctica, pero en realidad se trata de actividades relativamente convencionales que se disfrazan como tales. Se puede decir, entonces, que en la actividad de los globos (C1-1) y de la rayuela (C3-7) se estuvo en presencia de un disfraz lúdico.

Las docentes ven muchas ventajas en el juego como estrategia didáctica para los primeros años de la escolaridad. Por ejemplo, D1 considera que los alumnos están motivados y de esta manera ellos se apropian de otro modo (vs. tradicional) de los contenidos. Además menciona que se establece una relación distinta con los compañeros, se fomenta el diálogo, se aprenden las reglas del juego y las normas de convivencia. No considera que el juego tenga desventajas que le afecten en su labor docente, aunque advierte acerca de la "indisciplina".

> *Es según la persona que va a hacer el juego, a mí la indisciplina a veces cuando están jugando no me pone nerviosa, no es que los quiero tener quietos, entonces no creo que tenga desventajas el juego trabajando con chicos chiquitos, siempre va a tener ventajas, podría ser la indisciplina pero a mí no me afecta. Y las ventajas que ellos están motivados, y al estar motivados el contenido que vos querés dar me parece que entra mucho mejor a los chicos que dándoles una clase tradicional parada enfrente del salón, también la relación entre ellos, el diálogo, también aprenden así y bueno también aprenden otras cosas en el juego, las normas, respetarse los turnos.*

D2 le atribuye como ventajas que se aprende a respetar turnos, a dialogar y reconoce que hay una valoración distinta por parte de los alumnos acerca del material con el que se va a trabajar. Como desventaja también menciona el alboroto y el desorden.

> *En este grado el juego es importante, porque se motivan, se esmeran, por aprenderlo para competir con otro. Eso es una ventaja. Y desventaja, que se produce una desorganización nada más, pero no lo veo como algo que no se pueda hacer, me parece que sí se puede hacer y bueno aguantarse el lío, pero pasa con todo, cuando trabajo con diarios y revistas también se desorganizan.*

Con respecto a D3, la ventaja que le establece al juego es que los alumnos se motivan y se esmeran para competir con el otro. En cuanto a las desventajas, coincide con sus colegas acerca de la desorganización.

Como ventajas todas, se aprende a respetar turnos, a dialogar con el otro, valoran lo que vos le traés, y después ves los resultados cuando lo aprendieron. Desventajas no le vi. Me ha pasado en grupos que no he podido implementar ciertos juegos porque se alborotan mucho, a lo mejor pasa con los primeros juegos, pero después se acostumbran, ven como es el mecanismo, hay veces que te tocan grupos terribles, pero con este no me pasó, a lo mejor de todos los juegos que te gustaría hacer no hacés todos.

Las docentes resaltan en sus discursos la importancia de la utilización del juego como estrategia didáctica justificando que permite la generación de hábitos de trabajo, la promoción de mayor motivación para el aprendizaje escolar, la cooperación y el diálogo. Siguiendo a Brinnitzer, Fernández y Gallego (2010), el juego en las clases de Matemática favorece el desarrollo de diferentes habilidades personales y sociales, tales como: afirmación, confianza, cooperación, comunicación, interacción con los demás, trabajo en equipo y planeamiento.

La relación juego-educación suele ser compleja: por una parte se acepta, dadas las virtudes que el juego aporta al desarrollo integral de los educandos pero a la vez se rechaza, pues para algunos se torna en una amenaza que puede destruir los cánones escolares a los que tradicionalmente se está acostumbrado. Y a pesar que las docentes parecen valorar las actividades lúdicas desde lo que dicen, a medida que el alumno avanza en el sistema educativo se ofrecen menos posibilidades para jugar, mostrando una inconsistencia en cuanto al valor que se le da al juego desde el discurso y las prácticas docentes. Frente a las exigencias de cumplir con los programas escolares, parece optarse por otras actividades, no lúdicas, consideradas más económicas en el uso del tiempo y en principio más acordes con la forma en que se organiza la rutina escolar. En estas condiciones el uso del juego como estrategia didáctica difícilmente encuentre intersticios para existir.

¿Acaso habrá que re-visitar las concepciones docentes con relación al juego como estrategia didáctica? ¿Habrá que re-significar el lugar del juego desde los modelos docentes vividos por las maestras? ¿Tendrían que tener, ellas mismas, más instancias para experimentar el juego en primera persona? ¿Debería analizarse cuánto se parece el "hacer Matemática" con el "jugar"?... son algunas de las tantas inquietudes que fueron emergiendo.

En las clases observadas fue posible advertir un predominio de situaciones de trabajo que se presentan a modo de juego, pero en realidad no reúnen las características de una situación lúdica. Lo que las docentes connotan como juegos en realidad son actividades para la construcción de aprendizajes que se diferencian de otras "tradicionales". Se acompañan con ciertos tonos, elementos o modalidad diferentes a lo tradicional, como por ejemplo: que los alumnos estén parados, fuera del salón, trabajando con elementos distintos al cuaderno, no solo copiando del pizarrón, divirtiéndose, resolviendo ciertos desafíos o ejercicios vinculados con la realidad. Parecería que las relaciones que se establecen entre juego y aprendizaje en las aulas, intentando recuperar modalidades e intereses infantiles, tienen el propósito de aliviar el proceso, alterar lo rutinario y tedioso que por momentos plantea la tarea escolar con modalidad tradicional.

6. Conclusiones

Luego de haber transitado las aulas y haber dialogado con las maestras, fue posible advertir varios intentos de cambio con respecto a la clase tradicional. Sin embargo, en lo que respecta al juego propiamente dicho, fueron escasas las ocasiones en que las actividades tuvieron características que las connotaran como lúdicas. En efecto, concluimos que esto se produjo solo en dos de las 19 clases: juego del bingo (C1-6) y juego con dados (C3-4).

Por otro lado, si bien la etapa madurativa de los alumnos posiblemente dificulte genuinos intercambios grupales, no se pudieron ver construcciones de conocimiento desde lo grupal. Por ejemplo, al finalizar tales instancias lúdicas podría haberse potenciado la elaboración de conclusiones con todo el grupo-clase.

Desde lo matemático, en las dos instancias reconocidas como lúdicas, el abordaje podría haberse potenciado al analizar la distribución de los números en los cartones (juego del bingo) así como el valor mínimo/máximo posible de obtener al realizar las sumas (juego con dados).

El Ministerio de Educación de la Nación (2004) ofrece diferentes materiales para los docentes sobre las distintas áreas, entre ellas Matemática. El mismo en particular cuenta con propuestas lúdicas, para que los maestros desarrollen en sus clases. Una de ellas es la lotería, que se comparte a continuación.

> <u>*Lotería con cálculos mentales*</u>*: se utilizan los cartones de la lotería común. Se organiza el juego de modo que el docente saque un número y, en lugar de nombrarlo, diga un cálculo que tenga a ese número como resultado. Los cálculos a efectuar permiten focalizar la atención en una operación o propiedad, cuyo razonamiento también es explicitado. El propósito es proponer situaciones en las que los alumnos tengan que realizar cálculos mentales, explicar los procedimientos utilizados, compararlos y analizarlos para hacer evolucionar sus estrategias de cálculo mental*.
>
> <u>*Lotería con dados*</u>*: se cuenta con un cartón de lotería con los números del 2 al 12 para cada alumno y dos dados. Se les presenta la consigna a los estudiantes: por turno, cada jugador tira los dados, registra lo que sale en cada dado, suma los valores y dice el resultado de la suma, número que se anota en el cartón. Se les pregunta a los estudiantes, entonces, por qué los cartones tienen los números del 2 al 12 (rango de valores posibles de la suma que se efectúa). Aquí se pueden encontrar diferentes formas de proceder por parte de los alumnos para efectivizar los cálculos.*
>
> *En el momento de reflexión posterior al juego se pegan o copian en el pizarrón los registros realizados y se pregunta a los alumnos cuáles fueron los cálculos cuyo resultado ya conocían (los memorizados) y cuáles tuvieron que pensar. Si al realizar los registros algunos alumnos dibujan los dados y cuentan los puntos para obtener la suma, habría que plantear como regla la necesidad de usar números para registrar. Si aún así hay muchos alumnos que mantienen estrategias de conteo, se sugiere trabajar con otras actividades antes de pensar en comparar distintas formas de efectuar los cálculos.*
>
> *Se puede hacer una lista con los resultados conocidos para poner en un panel como repertorio conocido por el grupo y seleccionar otros cálculos para discutir cómo los pensaron. Para disponer de estrategias didácticas que le den sentido a la Matemática Escolar resulta imprescindible explicitar los procedimientos utilizados, analizarlos y compararlos para enriquecerlos.*

El objetivo de estas propuestas lúdicas es que en el aula se ofrezcan situaciones en las que los alumnos hagan Matemática; es decir, elaboren estrategias propias, utilicen las representaciones que consideren adecuadas, discutan con sus pares, expliquen sus ideas, den razones de sus procedimientos y resultados, confronten sus producciones con las de otros, acepten críticas y otros puntos de vista.

Resulta importante tener en cuenta que todos los integrantes del grupo deben participar activamente del juego, desde el punto de vista cognitivo, pudiendo incluso abarcar más de un rol. Luego resulta muy formativo plantearse un momento de reflexión sobre el desarrollo del juego: qué estrategias utilizó cada uno, si todos jugaron de la misma manera, si se detectó alguna estrategia más eficiente que otras dentro de las utilizadas, etc. Incluso es deseable que se planteen, según la intencionalidad original del docente, algunas preguntas que lleven a los alumnos a reflexionar sobre el contenido particular que se ha querido trabajar con el juego planteado. Además, resulta vital que el docente pueda hacer un cierre sobre los contenidos trabajados. Esta última etapa de cierre está íntimamente ligada a la intencionalidad didáctica de la actividad planteada, a los contenidos que se han querido trabajar y al alcance logrado por la producción de los diferentes grupos respecto de este contenido. El cierre permite al docente presentar las denominaciones, representaciones y relaciones con otros conocimientos considerados válidos en Matemática de los conocimientos utilizados durante el juego. A su vez, permite que los alumnos tomen conciencia de que han logrado un nuevo aprendizaje y reconozcan en forma explícita las relaciones de lo nuevo con lo conocido.

A modo de cierre, se remarca que juego, educación y aprendizaje están entrelazados, en un constante movimiento y fluir. Desde esta mirada no sería el juego una instancia de:

- *relleno*, cuando sobra tiempo;
- *premio*, con relación al comportamiento que tuvieron los alumnos frente al trabajo en clases;
- *relajación*, cuyo fuerte no es la promoción de aprendizajes.

La actividad lúdica es considerada como generadora del desarrollo cognitivo y social del sujeto. Constituye un rasgo esencial olvidado, o poco promovido, en la escuela. Pero construir espacios lúdicos en la enseñanza no es tarea fácil, porque hay diferentes concepciones y representaciones ya formadas e instaladas con relación al juego por parte de todos los actores institucionales. Es por esto que se abren diferentes interrogantes con respecto al tema: ¿qué está sucediendo hoy en la formación inicial de maestros al respecto?, ¿sigue siendo la tradicionalmente instalada?, ¿se le da lugar al juego como estrategia de enseñanza de la Matemática?, ¿qué piensan los directivos sobre el juego en ámbitos escolares?, ¿qué piensan los niños?, ¿qué piensan los padres?...

Se procura realizar un trabajo conjunto con toda la institución educativa. Se invita a habilitar otros espacios, pensar y repensar esta problemática, para la búsqueda de cambios. Poder intervenir, de manera que la dinámica institucional favorezca los procesos de aprendizaje, propiciando modalidades que potencien las posibilidades. Mantener una perspectiva abierta e integradora que permita desarrollar estrategias de juego en los primeros años de la escolaridad para la enseñanza de la Matemática. Tener en cuenta al cuerpo como mediador de los aprendizajes, que piensa, siente, se transforma, aprende. Es en este jugar que el cuerpo se pone en movimiento, la creatividad resurge, el aprendizaje se torna placentero y los contenidos se aprehenden.

Bibliografía

Aizencang, N. (2005). *Jugar, aprender y enseñar. Relaciones que potencian los aprendizajes escolares*. Buenos Aires: Manantial.

Alsina, A. (2014). Procesos matemáticos en educación infantil: 50 ideas clave. *Revista de Didáctica de las Matemáticas Números, 86*, 5-28. [Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/86/Articulos_01.pdf]

Biscay, M. (2007). *La formación docente en juego: Un análisis de la formación lúdica del profesor de Educación Inicial desde los lineamientos curriculares*. Tesis de Maestría en Educación con Orientación en Gestión Educativa. Buenos Aires: Universidad de San Andrés. [Recuperado de http://www.udesa.edu.ar/sites/default/files/resumenbiscay.pdf]

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Brinnitzer, E., Fernández, G. y Gallego, M. (2010). Matemática en clave de juego. *Revista Novedades Educativas, 22*(238), 71-74.

Bruner, J. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje*. Madrid: Alianza.

Campos, M., Chacc, I. y Gálvez, P. (2006). *El juego como estrategia pedagógica: una situación de interacción educativa*. Trabajo Final del Seminario en Educación de Párvulos y Escolares Iniciales. Santiago: Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad de Chile. [Recuperado de http://repositorio.uchile.cl/tesis/uchile/2006/campos_m/sources/campos_m.pdf]

Cañeque, H. (1991). *Juego y vida*. Buenos Aires: El Ateneo.

Edo, M. y Deuloufé, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 24*(2), 257-268. [Recuperado de http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v24n2/02124521v24n2p257.pdf]

Espona, M. (2013). El juego con materiales manipulativos para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil: Una propuesta para niños y niñas de 3 a 4 años. *Revista Educación Matemática en la Infancia, 2*(2), 63-93. [Recuperado de http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/37/49]

Fernández, A. (1987). *La inteligencia atrapada*. Buenos Aires: Nueva Visión.

Foucault, M. (2002). *Vigilar y castigar*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Gimeno, J. (1994). *El currículum: una reflexión desde la práctica.* Barcelona: Morata.

González, A. (2012). Juego y aprendizaje de nociones espaciales. Secuencia didáctica El fondo del mar. *Revista Novedades Educativas, 24*(261), 72-76.

González, A. y Weinstein, E. (2006). *La enseñanza de la Matemática en jardín de infantes a través de secuencias didácticas*. Rosario: Homo Sapiens.

Grzona, M. (2011). Una mirada sobre las estrategias didácticas. *Revista Novedades Educativas*, *23*(249), 14-17.

Hernández, R. (2008). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill.

Kamii, C. y DeVries, R. (1988). *Juegos colectivos en la primera enseñanza. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor.

Labrador, J. y Morote, P. (2008). El juego en la enseñanza de ELE. *Revista Electrónica Internacional de Didáctica de las Lenguas y sus Culturas Glosas Didácticas*, (17), 71-84. [Recuperado de http://www.um.es/glosasdidacticas/numeros/GD17/07.pdf]

Malajovich, A. (2000). *Recorridos didácticos en la Educación Inicial.* Buenos Aires: Paidós.

Ministerio de Educación de la Nación (1997). *La selección y el uso de materiales para el aprendizaje de los CBC. Orientaciones para la Educación General Básica.* Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Ministerio de Educación de la Nación (2004). *Juegos en Matemática EGB 1. El juego como recurso para aprender. Material para docentes*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Ministerio de Educación de la Nación. (2006a). *Cuadernos para el aula Matemática. Primer ciclo EGB nivel primario.* Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Ministerio de Educación de la Nación. (2006b). *Ley de Educación Nacional Nº 26206*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P. y Rodríguez-Muñiz, L. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática Unión,* (39), 19-33. [Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/39/archivo6.pdf]

Parra, C. y Saiz, I. (1996). *Los niños, los maestros y los números*. Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1981). *Psicología del niño*. Madrid: Morata.

Rodulfo, R. (2004). *El niño y el significante*. Buenos Aires: Paidós.

Rojas, I. (2010). Juegos lógicos como recurso didáctico en el logro de competencias matemáticas. *Revista Premisa, 12*(44), 36-43. [Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/44%20Rojas%20Marticorena.pdf]

Sarle, P. y Rodríguez, I. (2001). *Formación docente. Aportes para el debate curricular.* Buenos Aires: Gobierno de Buenos Aires.

Slavin, A. (2010). ¿Jugamos?... Mmm… ¡Sí!.... ¡Pensemos! *Revista Premisa, 12*(46), 28-38. [Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/46%20Slavin.pdf]

Vigotsky, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. México: Grijalbo.

Villabrille, B. (2005). El juego en la enseñanza de la matemática. *Revista Premisa, 7*(24), 16-22.

Villella, J. (1998). *Piedra libre para la Matemática*. Buenos Aires: Aique.

Winnicott, D. (1972). *Realidad y juego.* Buenos Aires: Gedisa.

Virginia Cardón es Psicopedagoga y Licenciada en esa especialidad. Se desempeña a nivel clínico en el diagnóstico y tratamiento psicopedagógico de niños así como en talleres de integración escolar y juegos, en la ciudad de Fray Luis Beltrán y alrededores (Argentina). Contacto: cardon.virginia@gmail.com, 0054 341 3404400, Santa María de Oro 256 (Fray Luis Beltrán - CP 2156).

Natalia Fátima Sgreccia es Profesora en Matemática, Magíster en Didácticas Específicas y Doctora en Ciencias de la Educación. Se desempeña como docente-investigadora en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina). Contacto: nataliasgreccia@gmail.com, 0054 3471 563529, Entre Ríos 1325 (Roldán - CP 2134).

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 106-114

Algunos Elementos Conceptuales de la Didáctica de las Matemáticas

Christian Camilo Fuentes Leal, Erika Liseth Hernández Hernández, Diana Paola Piedra Moreno

Fecha de recepción: 09/03/2016
Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	La didáctica de las matemáticas ha tenido diferentes definiciones, acepciones e interpretaciones, en el presente documento se mostrarán las principales características que presentan los algunos enfoques en educación matemática, inicialmente se definirá la didáctica como un arte, posteriormente se mencionarán los aportes hechos por la didáctica fundamental, la teoría de situaciones didácticas y los posteriores aportes del enfoque sociocultural y la educación matemática crítica. **Palabras clave:** Definiciones; acepciones e interpretaciones; enfoques da Didáctica da Matemática
Abstract	The didactics of mathematics has had different definitions, meanings and interpretations in this document will show the principal characteristics shown by some approaches in mathematics education, the didactic initially be defined as an art, then mentioned the contributions made by the didactics fundamental, the theory of didactic situations and subsequent contributions of sociocultural approach and critical mathematics education. **KeyWords**: Definitions; Meanings and Interpretations; approaches in Mathematics education
Resumo	A didática da matemática tem apresentado diferentes definições, significados e interpretações, neste presente documento serão mostradas as principais características apresentadas por alguns enfoques em Educação Matemática. Inicialmente se definirá didática como uma arte, posteriormente se mencionarão as contribuições feitas pela didática fundamental, a teoria das situações didáticas e contribuições posteriores de enfoque sociocultural e da educação matemática crítica. **Palavras Chave:** Definições; Significados e Interpretações; Enfoques da Didática da Matemática.

Introducción

En el presente documento se muestran tres interpretaciones que ha tenido la didáctica de las matemáticas, para esto como metodología se implementó una revisión y análisis bibliográfico de textos en educación matemática en diferentes periodos históricos, esta reflexión busca presentar las diferentes características de cada una de estas interpretaciones y cómo éstas se relacionaron con las prácticas pedagógicas en cada momento.

Se considera que este espacio de reflexión puede aportar en la concientización de los docentes en sus prácticas pedagógicas, de cómo estas concepciones de didáctica de las matemáticas pueden repercutir positiva o negativamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje, además de identificar las fortalezas, debilidades y relaciones entre de cada una de las interpretaciones.

Didáctica de las matemáticas, algunas concepciones iniciales

La didáctica de las matemáticas entendida inicialmente como el arte de enseñar matemáticas, ha sufrido transformaciones que han permitido tanto su evolución, como la generación de una concepción compleja de los procesos de aula, que van más allá del estudio del alumno (*individuo*[1] que aprende) y del profesor (quien enseña). El presente documento busca hacer una recopilación de dichas transformaciones como forma de establecer algunos elementos conceptuales de la didáctica de las matemáticas. Para ello es necesario un análisis desde cómo se ha entendido esta disciplina, partiendo de su interpretación como el arte de enseñar, pasando por la preocupación de la enseñanza y el aprendizaje del individuo hasta llegar a una visión compleja en la cual se involucra la cultura y la función social. Dicho análisis permite ver cómo la didáctica de las matemáticas adquirió un carácter científico.

La didáctica, el arte de enseñar

Gascón (1998) plantea que el concepto de didáctica de las matemáticas, tiene su inicio en una acepción como arte o técnica, cuya principal preocupación se remite a ¿cómo enseñar mejor?, en la fundamentación de la psicología evolutiva y de las maneras de interpretar el aprendizaje. Posteriormente, Ferrández (1981) en relación con esta caracterización, menciona que el objeto formal de la didáctica pasó de un plano centrado únicamente en la enseñanza, a un proceso que también contempla el aprendizaje (proceso de enseñanza-aprendizaje). Éste se da cuando están en relación un docente y un discente, en la que el docente selecciona y utiliza diversos procedimientos, métodos o estrategias para ayudar a conseguir el aprendizaje del discente. Esta manera de significarla denota un carácter meramente técnico de la didáctica, pues implica un hacer y un aplicar, más no una comprensión y significación de los fenómenos educativos.

Este tipo de proposiciones fueron revisadas por autores como Ausubel (1968), quien propone el aprendizaje significativo. Con base en estas revisiones se formuló la vista clásica de la didáctica de las matemáticas, esta visión o enfoque se caracteriza por la recolección, reformulación y sistematización de las problemáticas del docente, centrado en dos elementos, el aprendizaje del estudiante y el pensamiento del profesor.

Los saberes que se utilizan en la visión clásica no son problemáticos en sí mismos y tampoco forman parte de la problemática didáctica. De acuerdo al autor estas características tienen varias limitaciones, entre ellas, centrarse en el alumno

[1] Centrado en la concepción del aprendizaje basado en la construcción de estructuras cognitivas del ser.

ya que se focaliza en un fenómeno psicológico y deja de lado los fenómenos didácticos en matemáticas. Al interpretar el saber didáctico como un saber técnico no se quiere construir la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, puesto que la vista clásica de la didáctica de las matemáticas no incluye entre sus objetos de estudio las nociones de "enseñar matemáticas" ni de "aprender matemáticas", solo las usa como cuestiones transparentes y no cuestionables.

Con el fin de superar estas limitaciones surge la necesidad histórica de cambiar los parámetros y ampliar las problemáticas en didáctica de las matemáticas, el autor menciona que para tratar científicamente estas cuestiones es necesario disponer de un modelo explícito de actividad matemática escolar, de igual forma es necesario implementar un modelo del proceso escolar de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, éste debe estar caracterizado por tener rutinas matemáticas, actividades matemáticas recreativas, resolución de problemas y enseñanza escolar de las matemáticas; al determinar esta necesidad surgen fenómenos como la transposición didáctica y el concepto de didáctica fundamental[2] entendidos desde la didáctica de las matemáticas como epistemología experimental.

La didáctica fundamental

De igual forma surge la necesidad de usar un modelo propio de la actividad matemática escolar, ya que los modelos clásicos o usuales no han respondido a los problemas planteados por la didáctica. Para ello Brousseau (1986) propone la Teoría de Situaciones Didácticas, en la cual se define el conocimiento matemático mediante una situación fundamental, la cual debe tener un conjunto de situaciones adidácticas, esto se relaciona con lo mencionado por Galvéz (1998), pues el autor señala que el objetivo principal de la didáctica de las matemáticas es averiguar cómo funcionan las situaciones didácticas, es decir cuáles son las características de éstas que resultan determinantes para la evolución de los alumnos y sus conocimientos.

En este sentido la evolución del concepto de la didáctica de las matemáticas desde la didáctica fundamental o Teoría de Situaciones Didácticas amplia el estudio de la epistemología de las matemáticas, proponiendo la actividad matemática como objeto primario de estudio, presentando así un fuerte cambio de paradigma, mostrando a la epistemología experimental como el origen a la didáctica de las matemáticas, trasladando la propuesta de enseñar y aprender matemáticas a un segundo plano, generando una nueva propuesta, más compleja y profunda de las didácticas de las matemáticas.

Esta nueva propuesta está mediada a partir del enfoque antropológico como desarrollo de la didáctica de las matemáticas. El autor menciona que no es posible interpretar la matemática escolar y la actividad matemática escolar sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la reconstrucción escolar de las matemáticas, de igual forma se menciona que la transposición didáctica[3] o

[2]Gascon (1998) define la didáctica fundamental como un programa de investigación en didáctica de las matemáticas.
[3] Para Brousseau (1986) la transposición didáctica es la operación de transformar el conocimiento erudito desde la historia de los saberes a uno adaptado al contexto escolar, en ella se encuentra el trabajo del matemático (producir y lograr que otros se convenzan de la validez de la elaboración), el del alumno (ocuparse de problemas matemáticos) y el del profesor (simular una micro-sociedad y otorgar los medios necesarios)

transformación del saber sabio (erudito) al saber a enseñar (matemática en el contexto escolar) y al enseñado (apropiación del saber por parte del estudiante), aporta a la teoría de situaciones didácticas, pues los fenómenos relativos a la enseñanza las matemática sólo pueden abordarse científicamente si se tiene en cuenta el proceso de transformación del saber.

Esta perspectiva pretende integrar diferentes elementos como el enfoque piagetiano o psicológico y el social (del cual se hablará posteriormente), estableciendo que la actividad matemática debe ser interpretada como una actividad humana, a partir de la modelación de situaciones de la matemática escolar y de la obra matemática, donde ésta es un resultado final de la actividad matemática; el autor propone un proceso de estudio de la obra matemática, para ello el autor usa el enfoque antropológico, pues desde ésta mirada dicho proceso no es homogéneo, sino que está estructurado en diferentes momentos[4], cada uno con una propia característica que aportan en el proceso de resolución de una situación. Este enfoque propone las prácticas escolares como el centro de investigación, desde el estudio del hombre haciendo matemáticas y la antropología de las matemáticas, reconociendo al hombre no sólo como un hombre cognitivo o epistémico, sino desde la complejidad del sujeto didáctico.

De esta manera se llega a que la Teoría de Situaciones Didácticas es la fundamentación y origen de la didáctica de las matemáticas como disciplina, por tratarse de la primera vez que se estructura un conjunto de ideas aplicables que buscan estudiar y comprender las interacciones profesor, alumno, saber, a la vez que se buscan las condiciones para la génesis del conocimiento (Panizza, s.f).

Esto implica, en palabras de Gascón (1998) dejar de pensar en el aprendizaje y la enseñanza como únicos objetos de estudio (algo que pasaba en el enfoque clásico), que se investigan de forma aislada, pasando a concebir la actividad matemática escolar como objeto primario de estudio (concepción desarrollada en la didáctica fundamental) y postulando que los fenómenos relativos a la enseñanza de las matemáticas solo pueden abordarse científicamente si se tiene en cuenta simultáneamente los fenómenos de transposición didáctica inseparables de la producción de obras matemáticas desarrollados precisamente en la Teoría de Situaciones Didácticas y en la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Además Gascón (1998) presenta la didáctica como una ciencia de estudio[5], de igual forma en enfoque antropológico. A diferencia del enfoque clásico de didáctica de las matemáticas aumenta el poder heurístico de los sujetos, permite reformular nociones del de didáctica fundamental, como por ejemplo, la transposición didáctica, describe y estudia fenómenos que antiguamente no eran visibles (como el diseño curricular), proporciona instrumentos de análisis didáctico, además pretende integrar diferentes análisis teniendo en cuenta las prácticas matemáticas escolares en el centro, finalmente el autor hace una definición del concepto de didáctica de las matemáticas como una ciencia de los fenómenos a los procesos didácticos, con la

---

4Estos son: primer encuentro, momento exploratorio, trabajo con la técnica y momento de institucionalización y evaluación.
5 Cuyo objetivo es llegar a descubrir, caracterizar y explicar los procesos de estudio de las comunidades que se ven llevadas a estudiar las matemáticas institucionales.

condición de que "didáctico" como lo relativo al estudio de las matemáticas, lo cual enriquece, amplia y complejiza totalmente, la definición de este concepto. Este texto al igual que el de D´amore (2006) muestra las transformaciones que ha tenido este concepto de didáctica de las matemáticas, como inició siendo tomada como un arte o una técnica y se transformo como una disciplina científica a partir de la identificación de diferentes necesidades en el ámbito didáctico, escolar, epistemológico e investigativo.

La didáctica, visión compleja en la cual se involucra la cultura y la función social

En los últimos años como respuesta a la implementación de enfoques clásicos en el aula de matemáticas, surgió el enfoque socio-cultural en educación matemática, esta se caracteriza por tener en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje, elementos sociales y culturales (escolares y extraescolares) en ambientes sociales, políticos[6] y multiculturales; la Educación Matemática Crítica (EMC) como enfoque en educación matemática es un ejemplo de este tipo de propuestas, ésta se caracteriza por la estimulación de la competencia democrática en el aula a través del uso de las matemáticas escolares y sus reflexiones en el aula, de los actuales problemas sociales, económicos, típicos de un mundo globalizado y neoliberal, como se puede apreciar en Skovsmose (1999, 2000), Valero (2002, 2005, 2006,2007) y Mora (2005).

> La escuela tiene la ineludible obligación de formar ciudadanos críticos, reflexivos, y competentes socialmente, para que ellos conozcan su realidad, se integren a la misma e intensifiquen su capacidad para mejorarla es decir, la realidad y sus constructos sociales deben estar constantemente en la escuela, para que ésta no se convierta en una "burbuja" donde los aprendizajes son totalmente vacios y sinsentido Rojas. Mora (2005) p. 403.

Este tipo de enfoques denuncia la desarticulación entre prácticas sociales y las prácticas escolares y presenta la escuela como una institución que puede mediar entre estos dos cuerpos de conocimientos, diciendo que uno es el "importante", el "formal" y el otro es un cuerpo de conocimiento meramente anecdótico. A partir de ello se postula como primordial establecer diálogos entre las diferentes comunidades académicas y no académicas, que procuren la comprensión de otras formas de objetivación del conocimiento matemático, respetando los distintos saberes constituidos por los diversos grupos al interior de los mismos, pues el conocimiento matemático debe representar las experiencias de personas que interactúan en entornos, culturas y períodos históricos particulares, permitiendo que la construcción de los conceptos matemáticos sea consecuencia de la elaboración de significados simbólicos compartidos.

Dichas consideraciones se encuentran relacionadas con los objetivos de la EMC ya que éstos se encuentran relacionados con la democratización de la educación, la formación del estudiante no sólo en espacios matemáticos formales o

[6] El hecho reivindicar ciertas conocimientos y prácticas sociales de comunidades, es un acto no neutral y político.

cognitivos, sino también como un ciudadano propositivo, crítico, reflexivo y transformador de su propia realidad.

Autores como Guerrero (2008) menciona que la EMC asume la práctica pedagógica del profesor de matemática con varios paradigmas, como por ejemplo, la educación como un proceso dialógico y problematizador, la reflexión y acción, la emancipación, la competencia democrática, el conocimiento reflexivo matemático, la relación cultura y matemática, la matemática como construcción humana y social, y el docente y el estudiante como sujetos políticos y no sólo cognitivos.

Otro elemento significativo es la relación de la EMC con el constructivismo social, pues autores como Ernest (s.f) mencionan que este enfoque propone que el conocimiento además de formarse a partir de las relaciones ambiente-yo, factor entorno social toma gran importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje, elemento que resulta de vital importancia, pues muestra posibilidades conjuntas de trabajo con la EMC y otros enfoques investigativos en educación matemática.

Las características anteriormente mencionadas, son dimensiones que intervienen en el aula de clase que amplían, complejizan y enriquecen la concepción de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, sin embargo es necesario presentar casos específicos o experiencias de aula en las cuales se hagan prácticos la propuesta hecha por la EMC, para de esta forma crear conciencia en los docentes que proyectos en cierto sentido utópicos pueden ser llevados al aula de forma exitosa.

La EMC plantea la posibilidad de una nueva clase de matemáticas por ello la puesta en escena en el aula es un tanto compleja, ya que se busca una clase que potencie la comunicación y que aporte también a los ideales de construcción de un País democrático. Para Valero & Skovsmose (2012), la democracia es una realidad no lograda, un ideal a alcanzar, una acción política abierta, todo individuo o colectivo es responsable de ella y constituye el propósito de la clase de matemáticas.

Esta acción política abierta tiene como propósito la transformación (cambio mediado por la toma de decisiones críticas), la deliberación (proceso comunicativo considera razones o la falta de ellas) y la coflexión (proceso de pensamiento consiente de un colectivo).

Pensando en la puesta en escena de la EMC, se puede decir que ésta puede llevarse a cabo de muchas formas, una de ellas es a partir de los aprendizajes dialógicos en la investigación colaborativa, en los cuales son los actos dialógicos los que potencian el aprendizaje.

En esencia los actos dialógicos según Alro & Skovsmose (2012) se dan cuando se entra en contacto con el otro, bajo un interrogante que lo posibilita la disposición con el pretexto de las matemáticas. Luego del contacto se localiza (hallar algo nuevo o algo de lo cual uno no era consciente), se identifica (comenzar a cristalizar una idea matemática particular), se defiende (Hallar apoyo en “buenas razones”, ya sea para argumentar a favor de las ideas propias o de otros), se piensa en voz alta (expresar matemáticamente u de otra forma los pensamientos, las ideas y las emociones inmersos en los procesos de indagación) y se evalúa (retroalimentar el proceso).

La nueva clase de matemáticas, es al igual que la democracia, un ideal a alcanzar pero es un cambio necesario que desde el diálogo cuyo objetivo es la obtención de nuevas comprensiones (he allí su vínculo con el aprendizaje) pueda potenciar la comunicación y por ende el aprendizaje y los ideales políticos de la sociedad.

Este enfoque concibe el conocimiento matemático como una actividad social y que, como toda tarea social, debe ofrecer respuestas a una multiplicidad de opciones e intereses de los sujetos que la aprenden y de las comunidades en que están inmersos esos sujetos, de esto último surge la etnomatemática, pues como propuesta de carácter filosófico que viene siendo discutida desde la década del ochenta por D'Ambrosio (1998, 2001), Knijnik (1996), Monteiro, Orey y Domite (2004), Monteiro (2005), entre otros, pone en discusión, la producción, la validación y la legitimación del conocimiento matemático en diferentes prácticas sociales, además ésta caracteriza a éste como un conocimiento cuyo valor principal está en que organiza y da sentido a una serie de prácticas sociales, conocimiento resultado de una evolución histórica y de un proceso cultural.

Adicionalmente se creería que es importante tener en cuenta que el abordar la educación matemática desde una perspectiva sociocultural, el investigarla y el preparar las actividades de enseñanza, es un evento de suma complejidad, pues existen diferentes tensiones, generadas por la dicotomía a la que nos enfrentamos los investigadores y los maestros, estas dicotomías son resultantes de la inmersión del modelo neoliberal en los procesos educativos, que deben atender, por un lado, a la diversidad cultural de los alumnos, pero, por otro, a los procesos homogeneizadores internos y externos a las instituciones escolares.

A modo de reflexión

Como una forma de cerrar los argumentos presentados en este documento, se puede decir que se ha logrado mostrar la evolución de la didáctica de las matemáticas desde la concepción clásica, pasando por su surgimiento como disciplina ante los portes de la Teoría de Situaciones Didácticas y la Teoría Antropológica de lo Didáctico, hasta su vinculación con preocupaciones sociales, culturales y políticas.

Con base las características observadas se puede mencionar que cada una de estas concepciones son producto del contexto social e histórico, además que éstas son coexistentes y tienen puntos de relación, dando pie a construir nuevas interpretaciones que relacionen las tres propuestas anteriormente mencionadas.

Bibliografía

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2012) Aprendizaje dialógico en la investigación colaborativa. En P. Valero, & O. Skovsmose, *Educación Matemática Crítica.*

Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. pp. 129 - 171. Bogotá: CIFE

Ausubel D.P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*, Holt, Rinehart and Winston: New York.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, 33-115.

D´amore B. (2006) *Didáctica de las Matemáticas.* Magisterio: Bogotá

Ferrández, A. (1981) *La Didáctica, ciencia normativa*. Anuario de Ciencias de la Educación, n. 1, pp. 62-82.

Galvéz, G. (1998) *Didáctica de las matemáticas*, En PARRA C. & SAIZ I. (comp.) Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones. pp. 39-50, Paidos: Buenos Aires.

Gascón, J. (1998) La evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 18/1, nº 52, pp. 7-33

D'Ambrosio, U. (1998) Etnomatemática, 4.a ed., São Paulo, Ática.

D'Ambrosio, U. (2001) Etnomatemática: Elo entre las tradições e a modernidad, Belo Horizonte, Autêntica.

Ernest, P. (s.f.) Social constructivism as a philosophyofmathematics: radical constructivismrehabilitated?. University of Exeter Rescatado el 6 de Abril de 2012 de http://people.exeter.ac.uk/PErnest/soccon.htm

Guerrero, O. (2008) Educación Matemática Crítica: Influencias teóricas y aportes. Revista Evaluación e Investigación. Núm. 1. Año 3. Rescatado el 6 de Abril de 2012 de http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/27791/1/articulo4.pdf

Knijnik, G. (1996) Exclusao e reistência – Educação Matemática e Legitimação Cultural, Porto Alegre, Artes Médicas.

Monteiro, A. (2005) Currículo de Matemáticas: reflexões numa perspectiva etnomatemática, 7.° Encuentro de Educación Matemática, Asocolme, Tunja.

Monteiro, A.; Orey, D. & Domite, M. (2004) Etnomatemática: Papel, valor e significado [Ethnomathematics: Role, value, and meaning]. In J. P. M. Ribeiro, M. C. S. Domite, R. Ferreira (Eds.), Etnomatemática: Papel, valor e significado [Ethnomathematics: Role, value, and meaning] pp. 13-37. São Paulo, SP, Brazil: ZOUK

Mora, D. (2005) Didáctica critica de las matemáticas y etnomatemáticas: perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina. La Paz. Campo Iris.

Panizza, M. (sf). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas.*

Rojas, A. (2005) Hacia una educación matemática realista: el hombre que no calculaba. En Mora, D. (Coordinador). *Didáctica crítica, Educación Crítica de las Matemáticas y Etnomatemática; Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina* pp. 371-411. La paz: Campo Iris.

Skovsmose, O. (1999) Hacia una filosofía de la educación matemática crítica. Bogotá: Universidad de los Andes

Skovsmose, O. (2000) Escenarios de investigación. Revista EMA (6) 1 p. 3-26. Rescatado el 6 de Abril de 2012 de http://funes.uniandes.edu.co/1122/1/70_Skovsmose2000Escenarios_RevEMA.pdf

Valero, P. (2002) Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia, Quadrante, Vol. 11, Nº 1 Rescatado el 6 de Abril de 2012 de http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/otros/politica/Consideraciones%20sobre%20el%20contexto%20y%20la%20educaci%C3%B3n%20matem%C3%A1tica%20para%20la%20democracia*Valero,%20Paola*Valero,%20P.%20Consideraciones%20sobre%20el%20contexto%20y%20la%20...2002.pdf

Valero, P. (2006) ¿De carne y hueso? La vida social y política de la competencia matemática; Foro Educativo Nacional. Rescatado el 6 de Abril de 2012 de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113423_archivo.pdf

Valero, P. (2005) In between the global and the local: The politics of mathematics education reform in a globalized society. Rescatado el 6 de Abril de 2012 de http://vbn.aau.dk/files/786890/wp1_2005_8791543002.pdf

Valero, P. (2007) Investigación socio-política en educación matemática: Raíces, tendencias y perspectivas. Rescatado el 6 de Abril de 2012 de http://vbn.aau.dk/files/57368988/Granada_notas.pdf

Valero, P., & Skovsmose, O. (2012). Rompimiento de la neutralidad política: El compromiso crítico de la educación matemática con la democracia. En P. Valero, & O. Skovsmose, *Educación matemática crítica, una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* pp. 1-23. Bogotá: Universidad de los A ndes.

Christian Camilo Fuentes Leal: Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia), Magíster en Educación (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia). cristianfuentes558@hotmail.com

Erika Liseth Hernández Hernández: Licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia). erika-col@hotmail.com

Diana Paola Piedra Moreno: Licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia). diath_93@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 115-136

Estudo comparado do currículo prescrito na educação básica regular Peru e Brasil: um olhar nas etapas Primaria e Fundamental no tocante à Matemática

Miguel Fortunato Athias, Celia Maria Carolino Pires

Fecha de recepción: 27/0/2015
Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	Este artículo es un extracto de mi tesis doctoral defendida en 2015 y tiene como objetivo buscar similitudes y diferencias en las leyes y los cambios que rigen la educación básica regular destinadas a la enseñanza primaria en el Perú y la educación básica en Brasil, así como el plan de estudios de matemáticas en la educación básica regular y cuáles implicaciones de las ideas de educación matemática pueden influir en el diseño de estos documentos y leyes. Para ello utilicé el estudio comparativo, así como los conceptos de nuestro marco teórico y las directrices de las leyes y documentos que se utilizan como programas de estudio prescritos. Algunos resultados encontrados son que tanto Brasil como Perú buscan la formación de los ciudadanos y las matemáticas son fundamental para tal fin. **Palabras clave:** Estudio comparativo, Matemáticas Curriculum y Formación del Profesorado.
Abstract	This article is an excerpt from my doctoral thesis defended in 2015 and aims to seek similarities and differences in laws and changes governing the regular basic education aimed at primary education in Peru and education based in Brazil, as well as the mathematics curriculum the regular basic education and what the implications of Mathematics education ideas may influence the design of these documents and laws, as amended, for that we use the comparative study as well, to do so in would support the concepts of our theoretical framework, the guidelines of the laws and documents which are used as prescribed curricula. Some results are: that both Brazil and Peru seek the training of citizens and mathematics is fundamental for such. ***Keywords:*** Comparative Study, Mathematics Curriculum and Teacher Training.
Resumo	Este artigo é um recorte de minha tese de doutorado defendida em 2015 e tem por objetivo buscar semelhanças e diferenças nas leis e alterações que regem a educação básica regular com vistas na educação primaria no Peru e Ensino Fundamental no Brasil, assim como os currículos de Matemática da educação básica regular e quais implicações das ideias da Educação Matemática poderão influenciar a concepção destes documentos e leis e suas alterações. Para tal utilizaremos o estudo comparado como também, nos apoiaríamos das concepções de nosso quadro teórico, nas diretrizes das leis e documentos que são utilizados como currículos prescritos. Alguns resultados encontrados são: que tanto Brasil quanto Peru buscam a formação do cidadão e a Matemática é peça fundamental para tal. **Palavras-chave:** Estudo Comparado, Currículo de Matemática e Formação de Professor.

Apresentação

A importância deste artigo é observar como as ideias da Educação Matemática exercem influência no desenvolvimento dos currículos do Peru e do Brasil, nas etapas Primaria e Fundamental e a contribuição com mudanças nas práticas docentes. Para que possamos realizar uma comparação adequada entre os países é necessário que observemos as características que cada um possui, para que não ocorram comparações descabidas ou comparar o incomparável.

Entendemos que para realizar uma pesquisa em currículo, precisamos, antes de tudo, entender o contexto em que este será aplicado, para que serve e qual será sua real utilidade no sistema escolar, se meramente um roteiro de conteúdos, uma solicitação de interesses além da escola ou para um propósito maior, a inserção em um contexto social.

A escolha da pesquisa comparada tem por objetivo mostrar que o trabalho não será um simples levantamento de dados sobre a qualidade dos países e sim quais as peculiaridades de cada um, bem como suas conquistas e insucessos.

De acordo com Carvalho (2009) existe maior validade de se realizar uma pesquisa entre países de um mesmo continente e com uma história semelhante, devido a seus aspectos sociopolítico e cultural comuns.

Pires (2013), em artigo intitulado "Pesquisas comparativas sobre organização e desenvolvimento curricular na área de Educação Matemática, em países da América Latina", apresenta resultados de um projeto de pesquisa (em andamento) que teve como justificativa a carência de pesquisas sobre comparações relativas a currículos de Matemática no Brasil e em outros países, particularmente nos países latino-americanos, considerando-se as possíveis similaridades entre eles. Ressaltamos que o presente artigo trata de um dos estudos comparativos realizados no âmbito do supramencionado projeto de pesquisa de doutorado.

Pires destaca:

> Conhecíamos o intercâmbio existente entre pesquisadores em Educação Matemática de países ibero-americanos por temos participado da criação da Federação Ibero-americana de Sociedades de Educação Matemática - FISEM, em 2003, que congrega diversas sociedades. A FISEM mantém uma revista de divulgação científica, a Unión e é responsável pela organização do CIBEM. Outros eventos também mobilizam a comunidade, entre eles a CIAEM, a Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul e a Reunião Latino-Americana de Matemática Educativa (RELME). Desse modo, tínhamos como hipótese inicial que as propostas para o ensino de Matemática nos períodos correspondentes à educação básica nesses países tivessem similaridades decorrentes do significativo intercâmbio entre pesquisadores (PIRES, 2013, p. 513).

Essa autora ressalta que a opção por estudar países da América Latina apoiou-se ainda em outros fatos. Um deles referenciado na Constituição Federal Brasileira de 1988, que no seu parágrafo único do art. 4º, destaca a importância da integração econômica, política, social e cultural dos povos da América Latina, visando à formação de uma comunidade latino-americana de nações. É um dos objetivos e desejos dos que conceberam tal documento, que a educação de alunos dos anos iniciais seja feita de forma adequada para que possa minimizar a repetência e o abandono que é comum nesses países (PIRES, 2013, p.514).

Pires (2013) pondera que, por outro lado, os documentos também assinalam que na década de 1990, os sistemas educacionais na América Latina abriram um leque mais amplo de atores, tais como as organizações não governamentais (ONG), as associações de pais e as da sociedade civil, com base em um consenso comum de que a educação é uma prioridade nacional e regional. Mesmo assim, o financiamento da Educação cresce muito devagar e dispõe de fundos insuficientes e mal gerenciados. Diz que:

> A distribuição dos serviços educacionais, em termos de eficiência e qualidade é ainda injusta. Além disso, há uma ausência de mecanismos eficazes para que a sociedade civil venha a contribuir para a formulação de políticas na área da educação, bem como a insuficiente disponibilidade e utilização das tecnologias de informação e comunicação (PIRES, 2013, p. 516).

A autora comenta que apesar dos problemas, a América Latina manteve o ritmo da tendência global do crescente acesso à Educação Básica e Superior, na última década[1]. E que, em meio a avanços e desafios, considera importante para a comunidade de Educação Matemática desses países, investigar as contribuições que possam ser oferecidas.

Pires (2013) considerou que, há muitas décadas, a questão da implementação de inovações curriculares bem como a da participação de professores nesse processo vem sendo discutidas, internacionalmente. Em seu texto, Keitel e Kilpatrick (1999) evidenciam um ponto bastante importante sobre a participação dos professores, quando fazem referência a "currículos planejados" e "currículos implementados", destacando que uma tentativa para lidar com a complexidade curricular foi a de distinguir entre o currículo planejado e o currículo implementado.

Uma distinção entre o currículo planejado ou prescrito (tal como está representado em documentos oficiais, manuais ou em ambos) e o currículo implementado (normalmente medido por meio de questionários aos professores) foi feita no *Second International Mathematics Study (SIMS)* (TRAVERS, WESTBURY, 1989). A distinção já tinha sido antecipada *no First International Mathematics Study (FIMS)* (HUSÉN, 1967), pela utilização de classificações dos professores das oportunidades de aprendizagem dos conteúdos relativos a cada item testado. Apesar dos termos "planejado" e "implementado" transportarem a infeliz conotação de que as únicas intenções que contam são as oficiais e de que os professores não passam de meros executores que implantam, nas salas de aula, planos de outras pessoas, essa distinção foi útil, na medida em que ajudou a distinguir o planejado do que é executado nas salas de aula.

Assim, o presente artigo busca realizar um estudo comparativo entre os currículos publicados por organismos governamentais de Matemática do Ensino Básico regular obrigatório com um recorte para etapas Primaria e Fundamental de Peru e do Brasil respectivamente. Foram buscadas semelhanças e diferenças e procurou-se alcançar os objetivos que motivaram o artigo.

1Números da UNESCO, apresentados por González (1998), revelam que em todo o mundo, entre 1990 e 1997, a taxa de escolarização bruta cresceu de 99,2 para 101,8 %, no nível da escola primária, de 51,8 para 60,1% no ensino secundário e de 13,8 para 17,4 % no ensino superior. A taxa bruta de matrícula nos três níveis, entretanto, cresceu de 57,5% em 1990 para 63,3% em 1997. A taxa de escolarização bruta é calculada comparando a porcentagem representada por cada grupo etário na população em geral com o número de alunos matriculados em escolas ou centros de ensino superior. A relação pode ser superior a 100%, como no caso do ensino primário, porque inclui alunos matriculados cedo ou mais tarde, em qualquer grau determinado. A taxa bruta de matrícula na América Latina aumentou de 105% em 1990 para 113,6% em 1997, ao nível do ensino fundamental, de 50,9% para 62,2% para o ensino médio, e de 16,8 para 19,4% a nível terciário. A taxa bruta de matrícula nos três níveis foi de 66,1% em 1990 e 72,6% em 1997.

Procedimento metodológico

Para estruturarmos este artigo escolhemos o modelo de Ferrer (2002) para pesquisa comparativa. Contudo precisamos entender qual é o verdadeiro significado da palavra "comparação". Desse modo, um primeiro movimento ocorreu na busca de aproximações com autores que discutem esta temática.

A pesquisa comparada é um tema que durante as últimas décadas vem sofrendo com a falta de bibliografia de qualidade, o que se deve à lacuna formada pela ausência de trabalhos de qualidade teórica. A falta de credibilidade desses estudos caracteriza-se pelo modo como foram dirigidos tais estudos no passado. Contudo, encontramos autores que redefinem metodologicamente a educação comparada, resinificando sua abordagem e que consubstanciam nossa pesquisa (FRANCO, 1992).

Os estudos comparativos ou educação comparada, como denominam alguns autores, têm por histórico várias vertentes de análises e pesquisas. Alguns são baseados em interesses econômicos, políticos ou educacionais, porém o que deve ser respeitado é o olhar para a questão do outro, que consiste no processo de entender e observar as diferenças e semelhanças com o outro (FRANCO, 1992).

Para Franco (1992, p.14), "o princípio da comparação é: a questão do outro, o reconhecimento do outro e de si mesmo pelo outro"; assim, nossa pesquisa não deve possuir um caráter de *ranking* e sim observar o comportamento de cada país perante suas dificuldades e aprender com os erros e os acertos durante o processo. Nesse sentido, Franco (1992) orienta que o estudo dever ser realizado de maneira que possamos reconhecer, em ambos os países, suas relações e também perceber as diferenças que existem.

> Neste sentido a comparação deixou de ser um processo de vitrine de museu de coleção de coisas exóticas, para transformar-se em um espelho onde o próprio observador se vê refletido nos traços comuns e se reconhece nas diferenças (FRANCO, 1992, p.23).

O pensamento de contexto acima permite ao pesquisador situar sua pesquisa, de acordo com o que cada cenário apresenta e entender a cultura de cada país e sua influência na educação, no currículo e, principalmente, na história de cada sujeito de pesquisa, pois cada um tem sua particularidade.

Segundo Lourenço Filho (2004), a ideia da comparação busca criar um paralelo entre as instituições de ensino dos países pesquisados, bem como os contextos sociais apresentados.

> Educação comparada se propõe fazer, partindo das formas institucionalizadas do ensino, é aprofundar a análise desse processo, nas relações que apresente com as circunstâncias da existência de vários grupos sociais, e da integração deles na sociedade nacional (LOURENÇO FILHO, 2004, p.17).

Na perspectiva de Lourenço Filho (2004), observamos uma orientação para os grupos que fazem parte da sociedade juntamente com suas influências dentro de cada cenário.

Segundo Carvalho (2009, p.7), o cuidado para que o estudo não possua caráter de etnocentrismo[2] por parte de quem pesquisa, demanda focar na heterogeneidade

[2]Tendência do homem para menosprezar sociedades ou povos, cujos costumes divergem dos da sua própria sociedade ou povo. Disposição habitual de julgar povos ou grupos estrangeiros pelos padrões e práticas de sua própria cultura ou grupo étnico (Disponível em:

de cada país pesquisado; é preciso ter cautela para observar o momento em que cada país se encontra politicamente e economicamente, para não ocorrer interferência nas análises com experiências próprias do país do pesquisador ou do país de mais relevância.

Já para Gonçalves e Silva (apud CARVALHO, 2009, p.8), o pesquisador deve ter sensibilidade especialmente com os problemas que cada país pesquisado possui e para o momento da pesquisa, já que todos os países têm sua especificidade e não deve ser imposta sua visão ou imposição de país dominante e sim, realizar uma investigação mais sensível para as diferenças apresentadas.

Observamos que existe um consenso entre todos os autores pesquisados sobre a importância de buscar a imparcialidade durante a investigação. Para Kilpatrick (1992), um dos motivos relativos às críticas das pesquisas, na área, situam-se no fato de que as investigações que foram realizadas anteriormente foram conduzidas por institutos de pesquisa patrocinados por determinados países, ou quando suas equipes eram compostas por pesquisadores de várias nacionalidades, com certa tendência a manipular os dados para privilegiar o patrocinador da pesquisa.

Neste sentido, Carvalho (2009) relata que entre as décadas de 1980 e 1990, ocorreram severas críticas aos estudos comparados, uma vez que os modelos empregados tinham suas diretrizes voltadas às organizações internacionais mais pelo interesse econômico do que pelo educativo.

De acordo com Carvalho (2009, p.9), “devemos ter cuidado em não colocar um país ou outro, como referência, pois podemos acabar tendo o sentido de colonização”.

Para a realização de tal estudo comparativo devemos buscar: O porquê? E o para que desta pesquisa? Quais nossos reais objetivos, buscando assim uma maneira de estarmos em comum acordo com nossos teóricos.

Existem dois tipos de abordagem a serem utilizadas: as teorias do consenso e as abordagens descritivas. Segundo Nóvoa (2009), devemos escolher um destes caminhos.

Para Nóvoa (2009, p.39-50), podemos dividir as pesquisas comparativas nas seguintes classificações: perspectiva histórica; perspectivas positivistas; perspectiva da modernização; perspectiva da resolução de problema; perspectiva crítica, perspectiva sócio-histórica.

Durante o processo de elaboração da pesquisa escolhemos Ferrer (2002), para estruturar a pesquisa que foi retirada este artigo, lembrando que o autor consegue suprir as necessidades desta pesquisa comparativa com suas fazes: pré-descritiva, descritiva, interpretativa, justaposição, comparativa e prospectiva.

Aporte teórico

A escolha de nosso aporte teórico é baseada na pesquisa que deu origem ao artigo, utilizaremos as ideias de currículo geral de Sacristán (2000), para o currículo de Matemática utilizaremos Doll Jr. (1997), Rico Romero (1997) e Bishop (1999), os quais tem suas direções voltadas para os currículos prescritos que é o recorte deste artigo.

---

http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=etnocentrismo.Acesso em: 20 jul. 2014).

Para Sacristán (2000), o conceito de currículo adota vários significados porque, além de ser suscetível a enfoques paradigmáticos diferentes, é utilizado para processos ou fases distintas do desenvolvimento curricular. Segundo o autor, o currículo pode ser observado de vários ângulos, como um conjunto de conceitos, como uma visão política, administrativa e de referência à prática, mas todos com um interesse de busca pela qualidade na educação.

> As funções sobre configuração dos currículos, sua concretização, sua modificação, sua vigilância, análises de resultados, etc. também podem estar nas mãos de órgãos do governo, das escolas, associações e sindicatos de professores, pais de alunos, órgãos intermediários e especializados, associações e agentes específicos e culturais etc. Todo currículo se insere num determinado equilíbrio de divisão de poderes de decisão e determinação de seus conteúdos e formas (SACRISTÁN, 2000, pp.23-24).

Ao observamos suas ideias centrais nos aproximamos de seu pensamento quando trata do currículo como um campo prático, por sua vez levando em consideração aspectos como processos intuitivos e a realidade da prática a partir de uma perspectiva de conteúdos.

A prática, para Sacristán (2000), é um ponto dos pontos centrais, pois a partir dela podemos estruturar e elaborar o currículo com uma visão mais contextualizada. Tomando esta ideia para a Matemática podemos aqui observar que para termos uma coerência em nossos currículos precisamos analisar com atenção o contexto em que esta prática se desenvolve, dentro e fora da sala de aula e como as teorias da educação matemática estão sendo utilizadas pelos professores para pôr em prática o que está elaborado no currículo.

As ideias do autor nos levam a concluir que o currículo é um sistema em constante movimento e jamais deve ser entendido como uma "obra pronta e acabada", sempre dependendo de seus componentes para estar em perfeita sintonia: aluno-professor-escola-governos.

Em Sacristán (2000), o currículo se subdivide em cinco níveis: 1) currículo prescrito; 2) currículo apresentado aos professores; 3) currículo moldado pelos professores; 4) currículo em ação; 5) currículo realizado e currículo avaliado.

Para enfocar diretamente o currículo de Matemática utilizaremos Rico Romero (1997), que possui visão do currículo para uma educação crítica, que possa dar direcionamento para que o professor desenvolva seu pensamento crítico e o auxilie na tarefa de ensinar.

Neste sentido, alguns questionamentos afloram em relação ao currículo: para quê e porquê devemos ensinar a Matemática e que ideias da Educação Matemática estão presentes nos currículos do Brasil e do Peru.

Rico Romero (1997) informa o que se deve alcançar com o ensino da Matemática. Esta observação não deve ser restrita, especificamente à escola e sim em uma concepção mais ampla, devendo-se atentar para as indagações a seguir.

> Para que ensinar a Matemática? Que Matemática ensinar em uma sociedade influenciada pelas tecnologias? Que formação necessitam os professores para ensinar a Matemática na atualidade? Como obter um currículo mais flexível, com variedade de opções e que atenda as diversas necessidades dos alunos? Como contemplar a diversidade cultural no currículo de Matemática? (RICO ROMERO, 1997, p. 5).

Segundo o autor a busca por ideias claras na construção do currículo e no que se pretende obter como ele, os pontos fundamentais na Educação Matemática. Sem dúvida é uma preocupação dos elaboradores em atender aos objetivos não só da sociedade como também do próprio currículo.

Rico Romero (1997) nos faz refletir sobre um ponto nevrálgico, principalmente, na elaboração dos currículos que diz respeito à real necessidade de tantos conteúdos de Matemática serem ensinados. Não seria melhor direcionar ou levar em consideração o ambiente em que o aluno está inserido e fazer com que a Matemática se torne mais operacional? Por outro lado, fica a pergunta: Quem pode mensurar a quantidade certa? Não estamos falando de um remédio e sim de conhecimento; tendo em conta que muitos conteúdos que são trabalhados durante o ensino básico regular servem de base para futuros aprofundamentos durante a vida acadêmica do aluno, selecionar ou tentar simplificar a Matemática, em certos momentos pode ser prejudicial.

Nesse caminho, Rico Romero (1997) elabora discussões sobre quando devemos ter certeza em determinar um currículo para todos, de vez que argumentos desse pensamento podem vir a gerar desprezo pelas peculiaridades de cada região, com o princípio de um currículo único. O autor partilha deste ponto de vista, crendo que todos devem ter o direto de possuir um nível de educação, embora não sendo os mesmos conteúdos.

Já para Doll Jr. (1997), a concepção do currículo deve quebrar a visão modernista, tendo, em sua forma, termos mais gerais e participação dos agentes que fazem uso dele, neste caso, alunos e professores. Em sua estrutura deverá permear uma gama de significados, para que possa exaltar e transformar o meio onde está inserido, proporcionando uma maior curiosidade.

> Os professores e alunos precisam ser livres, encorajados e obrigados a desenvolver seu próprio currículo numa interação conjunta uns com os outros. A orientação geral de onde eles partem – livros didáticos, guias de currículo, departamentos de educação estadual, organizações profissionais ou tradição passada – precisa ser exatamente assim: geral, ampla, indeterminada (DOLL JR., 1997, p. 179).

Nesta perspectiva o autor utiliza o que denominaremos de quatro “R” que são os seguintes critério: riqueza, recursão, relação e rigor.

> Este termo [riqueza] se refere à profundidade do currículo, a suas camadas de significado, a suas múltiplas possibilidades ou interpretações. Para que os alunos e professores transformem e sejam transformados, um currículo precisa ter a “quantidade certa” de indeterminância, anomalia, ineficiência, caos, desequilíbrio, dissipação, experiência vivida (DOLL JR., 1997, p. 192).

> Derivada de recorrer, ocorrer novamente, a recursão é normalmente associada à operação Matemática da iteração. Na iteração uma fórmula é “aplicada” repetidamente, com o resultado de uma equação sendo o *input* para a próxima. [...] Nessas iterações, existe tanto estabilidade quanto mudança; a fórmula permanece a mesma, as variáveis mudam (de maneira ordenada, mas muitas vezes imprevisível) (DOLL JR., 1997, p. 194).

> Como professores, não podemos, não devemos transmitir diretamente a informação, em vez disso, desempenhamos o ato de ensinar quando ajudamos os outros a negociar passagens entre seus construtos e os nossos, entre os nossos e os dos outros (DOLL JR., 1997, p. 197).

> “reflexão”: favorece a seleção de assuntos que sirvam ao interesse de determinada comunidade e, sob este aspecto, os conteúdos seriam escolhidos apenas após a escolha ou eleição das problemáticas locais e, por outro aspecto, a “reflexão” significa que o processo de escolha deva ser uma decisão fundamentada em pareceres de diversos

> especialistas de vários campos científicos, como a Matemática, a Educação Matemática, a Psicologia Cognitiva, a Neurociência, entre outros (SILVA, 2009, p. 223).

Para Bishop (1999), a enculturação passa por três pontos: formal, informal e familiar, as duas primeiras já relatadas no parágrafo anterior, esta última é a carga cultural que a família de cada um passa para si.

As ideias de Bishop (1999) para observar como a cultura matemática está inserida no currículo e como ele é levado ao aluno. Para o autor, esta inserção ao aluno é chamada de enculturação informal, que nada mais é que um processo interativo e criativo, ou seja, a cultura vivida que o aluno encontra em seu meio, e a formal que é aquela levada pelos professores baseados na cultura matemática.

O autor divide em cinco princípios o que a cultura deve inserir dentro de um currículo de Matemática para educação básica: 1) representatividade; 2) formalista; 3) acessibilidade; 4) explicativo e 5) concepção ampla e elementar.

Bishop (1999) busca na enculturação quatro linhas de atuação para o currículo da Matemática: acessibilidade, representatividade, poder explicativo e formalismo.

Acessibilidade em Bishop (1999) procura impedir que dois pontos entrem em discussão no currículo: “riqueza exagerada” que na verdade se caracteriza por um inchaço de conteúdos que vão muito além da compreensão e das necessidades dos alunos; o outro ponto é o “simplificador” que significa introduzir conteúdos que acabem não despertando interesse no aluno e pior, não criam desafios.

A representatividade em Bishop (1999) significa que devemos levar os blocos como Álgebra e Geometria sem criar paralelos como as ideias matemáticas no mundo do aluno; utilizar o seu dia a dia; mostrar como podem ser aproveitados seus conhecimentos, sem esquecer a importância que possuem como parte de um todo científico; assim, o currículo deve apresentar a Matemática na perspectiva de valores e na tecnologia simbólica.

Para Bishop (1999) a representatividade possui um laço bem estreito como a riqueza de Doll Jr. (1997), onde a busca por uma profundidade do currículo não pode ficar fora de um caráter significativo.

O poder explicativo em Bishop (1999) deve englobar um sentido para os fenômenos culturais, e o aluno deve utilizar os blocos matemáticos não apenas no universo matemático e sim como auxílio em usa vida. Podemos pensar na Geometria não apenas na utilização das fórmulas e sim pode ser inserida nos problemas cotidianos dos alunos.

Por fim e não menos importante o formalismo. O currículo deve possuir em sua construção um *mix* entre os níveis formal e informal, com a preocupação nas técnicas e nos simbolismos.

Para o autor o currículo enculturador tem uma tendência à aproximação do nível informal, levando em consideração as modelagens matemáticas, e, no formal com as ideias da Matemática pela Matemática, sem que as ideias do formal sejam as dominadoras, já que a característica do currículo de Bishop é o estudo dos processos dinâmicos entre grupos culturais nos quais ocorrem as transmissões de valores e conhecimento.

Em Bishop (1999), para que o currículo seja um enculturador deve abarcar os três componentes: social, cultural e simbólico, sendo os dois primeiros mais difíceis de serem inseridos.

Contexto educacional e currículos prescritos de Peru e Brasil

Iniciaremos abordando os seguintes itens: contexto educacional dos dois países; as reformas curriculares empreendidas; currículo de Matemática proposto para a educação primária do Peru e o ensino fundamental do Brasil.

Os documentos em que nos basearemos, de ambos os países, serão os seguintes: Peru - Lei nº 28.044/2003 para estruturação da Educação Básica Regular (EBR) e Desenho Curricular Nacional (DCN) promulgado em 15 de agosto de 2008 que diz respeito ao currículo e seus componente)es separados por faixas etárias; Brasil - Lei nº 9.394/1996, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), e alterações para estruturação da Educação Básica e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o que dizem respeito ao currículo e seus componentes divididos por faixas etárias.

As informações referentes ao sistema educacional do Peru foram extraídas do DCN, Resolução Ministerial nº 0440 de 15 de dezembro de 2008, que estrutura o sistema educacional (ou de ensino) básico peruano, no qual está regulamentado o currículo das escolas públicas peruanas e da Lei Geral da Educação, Lei nº 28.044/2003 promulgada em 30 de julho de 2003 que regulamenta e fundamenta os pressupostos legais da educação peruana.

Segundo o artigo 1º da Lei n º 28.044/2003, o conceito de educação é um processo que deve ser integral e acompanhar toda vida do aluno, contribuindo para o seu desenvolvimento como cidadão e pessoa durante toda sua caminhada.

> A educação é um processo de aprendizagem e de ensino que se desenvolve ao longo da vida e contribui para o desenvolvimento integral dos indivíduos, o pleno desenvolvimento de seu potencial, para criar a cultura, bem como o desenvolvimento da família e comunidade americana e global nacional, Latina. Tem lugar em instituições de ensino e em diferentes áreas da sociedade.

A educação básica regular compreende a educação básica alternativa, educação básica especial e a educação básica regular, sendo que o foco deste artigo tese está na última, que, por sua vez, se divide em três níveis, a saber: educação inicial, educação primária e educação secundária, compreendendo crianças e jovens de 0 a 16 anos, 17 ou 18 anos, de caráter obrigatório (PERU, 2003)

Segundo o artigo 35 da Lei nº 28044/2003 a EBR possui como característica assegurar a evolução física, afetiva e cognitiva das crianças e jovens desde seu nascimento.

> Educação Básica foi criada para promover o desenvolvimento do aluno, aimplantação de seu potencial e o desenvolvimento de habilidades, conhecimentos, atitudes e valores fundamentais que a pessoa deve possuir para agir de forma adequada e eficaz nas diversas áreas da sociedade.Com uma inclusiva para atender às necessidades de pessoas com necessidades especiais ou dificuldades de aprendizagem.

Neste artigo observaremos a Educação primária que possui duração de seis anos, dividida em três ciclos e seis séries, obrigatória no âmbito escolar atendendo crianças entre seis e onze anos, tendo seu desenvolvimento baseado no ensino das disciplinas curriculares, reforçando a formação do cidadão como sua marca mais forte.

O currículo nacional peruano fundamenta-se nos seguintes princípios: ética, igualdade, inclusão, qualidade, democracia, multiculturalismo, consciência ambiental, criatividade e inovação. É um documento de caráter normativo usado para todo o país e nele está disposto tudo que se espera que os estudantes aprendam e que esteja incluído na sua formação, de acordo com o artigo 8º da Lei nº 28.044/2003 (PERU, 2003).

O DCN caracteriza-se por ser diversificável, aberto e flexível e possui em seus princípios pedagógicos: construção por aprendizagem, necessidade de desenvolvimento e comunicação, significação, organização, integridade e evolução da aprendizagem como marcas.

No Brasil utilizaremos a Lei nº 9.394/1996 - LDB, promulgada em 20 de dezembro de 1996 e suas alterações, que regulamentam e fundamentam a educação básica e os PCN dos anos iniciais e dos anos finais do Ensino Fundamental de 1997.

Os PCN foram concebidos como um ponto de referência para educação em todo o Brasil. O objetivo era criar um norte aos professores, diretores e coordenadores das escolas e uniformidade na estruturação dos conteúdos básicos a serem levados aos alunos, incluindo os que se encontram em regiões mais afastadas das capitais.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1997a), o currículo brasileiro é aberto e maleável, podendo ser trabalhado de acordo com a região que está inserido e sofrer alterações de acordo com o público-alvo, as necessidades que se apresentam durante o decorrer do ano letivo e com as peculiaridades regionais, dado que o Brasil é um país com culturas e peculiaridades diferentes para cada localidade.

Contudo, existem outros documentos que estão sendo discutidos atualmente e que não serão abordados neste artigo visto que ainda não encontram-se aprovados.

Retomando aqui a situação de que no Brasil os PCN não possuem caráter obrigatório, apesar de a LDB sugerir a utilização de um sistema e currículo único, e contendo variações de acordo com as regiões, ressalta-se que com isto surgem documentos que as regiões do Brasil acabam elaborando e adotando. Como nossa pesquisa tem como foco o estado do Pará, existe a utilização de documentos das secretarias municipal, estadual e outras como referência.

A LDB é a lei que regulamenta o sistema educacional brasileiro, tanto da educação básica, quanto da educação superior. No artigo primeiro e seus parágrafos o conceito de educação é bem amplo e envolve toda a vida do aluno, inclusive das instituições.

> **Art. 1º.** A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais.
>
> **§ 1º.** Esta Lei disciplina a educação escolar, que se desenvolve, predominantemente, por meio do ensino, em instituições próprias.
>
> **§ 2º.** A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social.

De acordo com a LDB, o sistema educacional brasileiro está organizado em: educação infantil, ensino fundamental (anos iniciais e finais do Ensino Fundamental), ensino médio, processos seletivos, educação superior.

Na história do Brasil, essa é a terceira vez que a educação conta com uma Lei de Diretrizes e Bases que regulamenta todos os seus níveis. A primeira LDB foi promulgada em 1961 (LDB 4.024/1961).

A LDB, nos artigos 4º e 8º, reafirmam o direito à educação, garantido pela Constituição Federal. Estabelece os princípios da educação e os deveres do Estado em relação à educação escolar pública, definindo as responsabilidades, em regime de colaboração, entre a União, os estados, o Distrito Federal e os municípios.

> **Art. 4º.** O dever do Estado com a educação escolar pública será efetivado mediante a garantia de:
>
> **I -** ensino fundamental, obrigatório e gratuito, inclusive para os que a ele não tiveram acesso na idade própria.
>
> **Art. 8º.** A União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios organizarão, em regime de colaboração, os respectivos sistemas de ensino.

Segundo a LDB a educação brasileira é dividida em dois níveis: educação básica e educação superior, como o foco deste artigo é o ensino fundamental.

Nos anos iniciais, o ensino é obrigatório para a faixa etária de quatro a catorze anos e deve totalizar nove anos divididos em anos iniciais (do 1º ao 5º ano) e anos finais (do 6º ao 9º ano). É obrigatório e gratuito. A LDB estabelece que, gradativamente, os municípios serão os responsáveis por todo o ensino fundamental.

O PCN caracteriza-se por ser aberto e flexível e possui em seus princípios pedagógicos são: autonomia, diversidade, interação e cooperação, disponibilidade para aprendizagem, organização do tempo, organização do espaço e seleção de material.

O DCN caracteriza-se por ser diversificável, aberto e flexível e seus princípios pedagógicos são: construção da própria aprendizagem, necessidade do desenvolvimento da comunicação, significação da aprendizagem, organização da aprendizagem, integralidade da aprendizagem e evolução da aprendizagem.

Neste momento observamos pontos de interseção entre os currículos e quais as expectativas que sua aplicação possa gerar com a sua devida aplicação.

Currículos prescritos da área de Matemática da educação primária no Peru e ensino fundamental I e II no Brasil

Iremos mostrar como a Matemática está inserida nos currículos prescritos de acordo com cada etapa de cada país com o intuito de realizar uma comparação entre os dois currículos, tomando como pressuposto as especificidades de cada país.

De acordo como DCN (PERU, 2008, p.186), o pressuposto da Matemática é “desenvolvimento do pensamento matemático e da cultura científica e tecnológica para compreender e agir no mundo”. Com isto os professores devem trabalhar as especificidades de cada aluno, para que os estudantes estejam preparados para as mudanças do mundo em que vivem geradas por meio da globalização.

A matemática faz parte do pensamento humano e sua estruturação vai desde os primeiros anos de vida de forma gradual e sistemática, por meio de interações cotidianas. As crianças observam e exploram seu ambiente imediato e os objetos que configuram, estabelecendo relações entre eles quando se realiza atividades específicas de diferentes maneiras: usando materiais, participando de diagramas educacionais e familiares, desenho, gráficos, desenhos, entre outros jogos deatividades produtivas (PERU, 2008, p. 186).

A Matemática deve ser explorada de acordo com três processos: raciocínio e demonstração, comunicação matemática e resolução de problemas, os quais serão definidos segundo o que está relatado no documento oficial peruano.

O processo de raciocínio e demonstração: envolve o desenvolvimento de ideias, explorando fenômenos, justificando resultados, formulando e analisando conjecturas matemáticas, expressando conclusões e inter-relações entre as variáveis dos componentes da área e em diferentes contextos (PERU, 2008, p.186-187).

O processo de comunicação matemática: envolve organizar e consolidar o pensamento matemático para interpretar e representar diagramas, gráficos e expressões simbólicas de forma coerente; expressar claramente as relações entre conceitos e variáveis matemáticas; desenvolver argumentos e conhecimentos adquiridos; reconhecer as conexões entre os conceitos matemáticos e aplicar a matemática a situações problemáticas reais (PERU, 2008, p.187).

O processo de resolução de problemas: implica ao aluno manipular objetos matemáticos, ativar sua própria capacidade mental, exercitar sua criatividade, refletir e melhorar o seu processo de pensamento para aplicar e adaptar uma variedade de estratégias matemáticas em diferentes contextos.

A capacidade de colocar e resolver problemas deverá ser orientada pelo professor (PERU, 2008, p.187).

Esse processo permite a interação com outras áreas curriculares que contribuem para o desenvolvimento de capacidades e também permite a conexão de ideias matemáticas e experiências com os interesses dos estudantes.

Observamos no DCN (PERU, 2008) a mesma preocupação que Rico Romero (1997) ressalta em seu trabalho no que tange à maneira pela qual a Matemática deve ser levada ao aluno durante o processo de ensino-aprendizagem.

> Para que ensinar a Matemática? Que Matemática ensinar em uma sociedade influenciada pelas tecnologias? Que formação necessitam os professores para ensinar a Matemática na atualidade? Como obter um currículo mais flexível, com variedade de opções e que atenda as diversas necessidades dos alunos? Como contemplar a diversidade cultural no currículo de Matemática? (RICO ROMERO, 1997, p. 5).

No currículo da educação primária, nas faixas de 6-11 anos, a Matemática está organizada por blocos de conteúdo: Números, relações e operações; Geometria e medidas; Estatística.

A composição curricular por faixas etárias está estruturada em capacidades, conhecimentos e atitudes esperadas que os alunos adquiram durante o decorrer do ano letivo, o que auxilia o professor no direcionamento de seu planejamento e defina o que é relevante.

Os PCN (BRASIL, 1997b) tratam a disciplina como um vasto campo que pode ser inserido na vida dos alunos e um sistema interdisciplinar, e auxiliar o aluno a compreender o meio onde vive e desenvolver o raciocínio lógico. Tal publicação indica uma direção aos professores para trabalhar os pontos específicos dos blocos da Matemática realizando o entendimento da disciplina. A potencialidade do conhecimento matemático deve ser explorada, da forma mais ampla possível, no ensino fundamental.

É importante que a Matemática seja equilibrada e desempenhe papel relevante na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, e no aceleramento do raciocínio dedutivo, na aplicação de problemas com vistas a situações da vida cotidiana e atividades do mundo, auxiliando a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares.

Para os currículos publicados por organismos governamentais, os pressupostos da área da Matemática para o ensino fundamental perpassam pela formação intelectual do aluno, lembrando que esta é a fase da construção dos conceitos científicos e das bases do pensamento. A Matemática possui um papel importante no processo.

O documento de Matemática é um instrumento que pretende estimular a busca coletiva de soluções para o ensino dessa área. Tais soluções precisam transformar-se em ações cotidianas que tornem os conhecimentos matemáticos acessíveis a todos os alunos.

> No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados (BRASIL, 1997b, p.19).

O estudo dos fenômenos relacionados ao ensino e à aprendizagem da Matemática pressupõe a análise de variáveis envolvidas no processo — aluno, professor e saber matemático —, assim como das relações entre elas.

A reflexão sobre o ensino da Matemática é de fundamental importância ao professor, de acordo com os PCN (BRASIL, 1997b, p. 26), visando alcançar os seguintes pontos: identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações; conhecer a história de vida dos alunos, sua vivência de aprendizagens fundamentais, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais; ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções.

De acordo com o que relata os PCN (BRASIL, 1997b), supomos que os professores brasileiros têm uma árdua tarefa pela frente, uma vez que devem elaborar muito bem seus planos de aula e definir estratégias que abarquem o sugerido pelo documento. Há grande preocupação com a relação aluno-professor e como esta relação pode influenciar o ensino da Matemática e o desenvolvimento do professor e do aluno.

Podemos observar que nos PCN (1997b) há uma forte aproximação com a ideia de *riqueza* de Doll Jr. (1997).

> Este termo [riqueza] se refere à profundidade do currículo, a suas camadas de significado, a suas múltiplas possibilidades ou interpretações. Para que os alunos e professores transformem e sejam transformados, um currículo precisa ter a —quantidade certall de

indeterminância, anomalia, ineficiência, caos, desequilíbrio, dissipação, experiência vivida (DOLL JR., 1997, p. 192).

Segundo a LDB, no seu artigo 26, além de trabalhar um currículo comum, os professores e as escolas devem considerar as especificidades de cada região, tornando o sistema educacional mais próximo cada um.

> Art. 26. Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela.

Os PCN (BRASIL, 1997b) sugerem algumas possibilidades para que os professores trabalhem nas salas de aula do ensino fundamental. Dentre elas, destacam-se: Resolução de problemas, História da Matemática, Tecnologia da Informação e Jogos.

Tendo em vista a escolha dos PCN (BRASIL, 1997b), pela resolução de problemas, história da matemática, tecnologia da informação e jogos, observamos uma aproximação nas bases da Educação Matemática sobre o uso da história da Matemática e Bishop (1999) nos princípios do formalismo e da utilização de jogos.

> É importante reiterar o ponto de vista que este currículo deveria objetivar no nível da cultura Matemática, mostrando as conexões com o nível informal e oferecendo também uma introdução ao nível técnico (BISHOP, 1999, p.128).

Nos PCN (BRASIL, 1997b) do ensino fundamental, a Matemática está organizada em blocos de conteúdo: Números e operações; Espaço e forma, Grandezas e medidas e Tratamento da informação.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1997b), os professores devem apresentar os blocos de conhecimentos matemáticos a seus alunos de maneira coerente, bem elaborados, fazendo com que consigam desenvolver e formar o pensamento matemático e o raciocínio matemático.

> O desafio que se apresenta é o de identificar, dentro de cada um desses vastos campos, de um lado, quais conhecimentos, competências, hábitos e valores são socialmente relevantes; de outro, em que medida contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, na construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos (BRASIL, 1997b, p.38).

Observamos que os PCN (BRASIL, 1997b) possuem várias ideias encontradas em nossos teóricos. Podemos facilmente perceber a presença do critério de recursão de Doll Jr. (1997) no que tange à busca pela relação entre o binômio professor-aluno para aquisição do conhecimento; no princípio da acessibilidade de Bishop (1999) onde existe uma preocupação de oferecer uma Matemática de mais tangível.

> Os seguimentos, partes e sequências de um currículo são porções arbitrárias que em vez de serem vistas como unidades isoladas são vistas como oportunidades para a reflexão (DOLL JR., 1997, p.194).

> A ideia fundamental deste princípio é que os conteúdos curriculares não devem estar fora da capacidade intelectual das crianças e que os exemplos as matérias, as situações e os fenômenos a serem explicados não devem fazer parte de um grupo restrito (BISHOP, 1999, p. 128-129).

A ideia da *enculturação* de Bishop (1999) está muito presente nos tópicos descritos anteriormente, já que os componentes simbólicos, contar, localizar, medir, projetar, jogar e explicar são descritos amplamente nos PCN (BRASIL, 1997b).

Observamos também uma preocupação com a riqueza tanto na elaboração dos conteúdos como na sua escolha, conforme o que é plenamente abordado por Doll Jr. (1997), pois para que todos os objetivos sejam alcançados a riqueza como o rigor no trato das informações devem estar em primeiro plano.

Neste momento podemos realizar um paralelo com os objetivos para o ensino da Matemática nos documentos oficiais de ambos os países são: DCN busca o desenvolvimento do pensamento matemático e da cultura científica e capacidade tecnológica para compreender e agir no mundo. O PCN busca analisar informações relevantes do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número de relações entre elas, fazendo uso do conhecimento matemático para interpretá-las e avaliá-las criticamente. Analisar informações relevantes do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número de relações entre elas, fazendo uso do conhecimento matemático para interpretá-las e avaliá-las criticamente.

Tais objetivos são plenamente encontrados nos currículos específicos e em seus princípios pedagógicos, antes mencionados.

Diferenças e Semelhanças

Observamos alguns pontos de interseção entre os dois currículos, assim como algumas diferenças. Lembramos que segundo Nóvoa (2009), Franco (1992) e Carvalho (2009), devemos comparar com muito cuidado e não sobrepor um currículo sobre o outro, ou dar uma conotação de colonizador e até criar um *ranking* de quem é melhor ou pior, mas observar as peculiaridades de cada um tanto pelos sistemas adotados quanto pela formação de cada país.

No Brasil observamos a presença da História da Matemática como um dos pilares do processo de ensino-aprendizagem para o desenvolvimento da Matemática, o que não aparece em momento algum no DCN (PERU, 2008).

Jogos e tecnologia da informação aparecem nos PCN (BRASIL, 1997b; 1998a) como processos no ensino-aprendizagem, já no DCN (PERU, 2008) são colocados como estratégias no contexto a ser empregado.

No DCN (PERU, 2008) os processos raciocínio e demonstração são introduzidos, com o intuito de realizar um dos objetivos do currículo oficial e da Lei nº 28.044/2003, que é o desenvolvimento do pensamento lógico matemático.

A comunicação matemática é uma das atitudes presentes em todo o processo da educação primária, haja vista a exigência de provas orais como composição da nota dos alunos. Segundo o DCN (PERU, 2008), as crianças devem saber se comunicar de maneira simbólica; o documento dispõe que os alunos que se expressam matematicamente conseguem assimilar conhecimentos com mais facilidade, melhorando a aprendizagem.

Observamos que nos PCN (BRASIL, 1997b; 1998a) aparece mais denominações espaço e forma e grandezas e medidas para subdividir a geometria no ensino fundamental; já no Peru há um único bloco geometria e medidas. Podemos observar aqui o motivo pelo qual no Brasil, espaço e forma é destinado para os alunos mais novos, no caso os anos iniciais do ensino fundamental, onde os estudantes estão desenvolvendo os conceitos e aprimorando sua percepção sobre o que lhes cerca; com a entrada nos anos finais do fundamental, observamos o aparecimento da geometria que é um pouco mais abrangente ou mais aprofundada; já no Peru observamos que não ocorre essa divisão de blocos, porém existe, sim, um aumento gradual do escopo da geometria.

No bloco números, relações e operações, observamos homogeneidade em ambos os currículos; contudo, no Brasil existe subdivisão nos sistemas de números naturais, inteiros e reais, tanto em suas operações como no estudo de suas composições; no Peru não observamos essa preocupação em subdividir por itens de blocos, mas graduar entre os níveis e alocar entre as idades. Um ponto que nos chama atenção é que em alguns momentos o DCN (PERU, 2008), de certa forma, possui uma composição rígida, que em suas diretrizes apareça como flexível.

Uma singularidade que observamos entre os currículos é que no Peru, para as faixas etárias de 6-11 anos, a Estatística é tratada como um bloco independente e a inserção do tema no cotidiano é diretamente relacionada à maturidade do aluno. Nos PCN (BRASIL, 1997b; 1998a), em contrapartida, existe o bloco Tratamento da informação que oferece ao aluno condições de utilizar tudo que foi aprendido em situações de contexto matemático ou de sua vida cotidiana, o que oferece ao professor um direcionamento para poder aplicar estratégias de ensino norteadas pelo currículo.

Um ponto em comum muito importante para ambos os países é a utilização da resolução de problemas, não só com estratégia de ensino, mas também como aplicação dos conhecimentos adquiridos durante o processo. Detectamos que esta orientação encontra-se presente no currículo peruano, tendo em vista uma preocupação dos elaboradores em deixar muito claro, em todos os blocos matemáticos, a sua utilização. No Brasil, é um tópico a ser abordado pelo professor entre outras estratégias para o ensino.

Conclusões

Neste artigo tem por objetivo realizar um estudo comparativo entre os currículos publicados por organismos governamentais de Matemática do ensino básico regular obrigatório com um recorte para etapas Primaria e Fundamental de Peru e do Brasil respectivamente, Busquei semelhanças e diferenças e procurei alcançar os objetivos que motivaram o artigo.

Em princípio, constatei que existem mais semelhanças do que diferenças entre os currículos publicados por organismos governamentais do Peru e Brasil, de acordo com a legislação comparada neste artigo, vigente nos dois países.

Ressalvadas as diferenças, encontrei pontos em comum nas leis dos dois países. A Lei nº 28.044/2003 e LDB têm em sua constituição, a estruturação dos sistemas educativos, das diretrizes, das obrigações, dos objetivos da educação, do papel de cada setor envolvido no processo educacional e seus deveres, dando suporte à elaboração e à sustentação dos currículos.

O currículo de matemática peruano tem como característica a densidade dos conteúdos; no entanto, suas diretrizes sugerem “flexibilidade” na aplicação desses conteúdos, deixando a escola e o professor livres para adaptá-lo, de acordo com suas necessidades. O fato foi confirmado por todos os atores escolares, durante as entrevistas realizadas, em todos os níveis da educação básica. No Brasil, não existem currículos legais estabelecidos, apenas parâmetros curriculares. No entanto, os dois países possuem características semelhantes com relação à grande diversificação cultural. Assim, os professores precisam adaptar o currículo prescrito ou os parâmetros curriculares de acordo com a realidade local. Um exemplo é o conteúdo de geometria plana que deve abranger especificidades da região onde for ensinado.

Apesar de prevista em lei a existência de um currículo nacional, ainda em discussão, com base para adequação a todas as regiões, os professores e diretores do Brasil acabam tendo uma gama de documentos, orientações e programas de exames nacionais e regionais em geral descompassados entre si, que promovem dificuldades a profissionais da educação matemática nacional, quando é necessário decidir um caminho a tomar.

Com relação ao DCN e aos PCN de Matemática concluí que tanto Peru quanto o Brasil buscam trabalhar em blocos: álgebra, estatística e probabilidade, geometria, trigonometria.

Na primária e no ensino fundamental, que compreendem as faixas etárias de 6-11 anos e 6-14, respectivamente, concluí que o currículo apresenta os blocos compostos de maneira simples e genérica.

Outro ponto comum é a utilização da Matemática como instrumento de aprendizagem pelas orientações curriculares, uma vez que estas se constituem em um dos componentes principais na construção do conhecimento, por meio da introdução dos temas transversais.

Ressalto que a Matemática aparece como um dos alicerces para a estruturação do pensamento crítico e formação de cada aluno como cidadão ativo e capaz de adentrar no mercado de trabalho a partir dos conhecimentos adquiridos.

A partir de visão política, desponta uma obsessão pela Matemática, em função de que é uma das “joias da coroa” dos currículos dos países em desenvolvimento, mensurada pelos resultados do PISA, ao lado das ciências e das línguas. O programa avalia a educação no país e o trabalho do professor, atestando se as bases curriculares estão de acordo com o que o “mundo” entende ser adequado.

Em meu ponto de vista não é adequado usar o PISA com essa conotação, já que existem grandes diferenças entre os países que são por ele avaliados, de vez que possuem em seus sistemas educacionais, realidades econômicas, geográficas e culturais completamente diferentes do Peru e Brasil.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1997a; 1997b; 1998) para o ensino fundamental existem vários objetivos, sendo que dois deles nos chamam mais atenção: o que trata dos conhecimentos matemáticos como meio de transformação e o que trata dos aspectos quantitativos e qualitativos.

Na educação primária, a Matemática proposta pelo DCN (2008) tem por objetivo fazer com que o pensamento matemático esteja presente na vida dos alunos desde os níveis iniciais, introduzido de maneira gradual, por meio de processos transversais em toda estrutura da área da Matemática.

De acordo com o DCN (2008), os pressupostos da Matemática para as esferas primária residem na preocupação do desenvolvimento do pensamento matemático em sua aplicação no decorrer da vida dos alunos.

Aqui existe uma preocupação relacionada ao entendimento dos conceitos matemáticos pelos alunos e à possibilidade de estabelecer interdisciplinaridade, a fim de que os alunos possam alcançar o seu próprio desenvolvimento. Neste aspecto, a resolução de problemas também é importante no Peru, consistindo em um dos principais pressupostos curriculares.

Nos parâmetros curriculares publicados por organismos governamentais no Brasil, os pressupostos na área da Matemática para o ensino fundamental buscam a formação intelectual do aluno, lembrando que este está em fase de construção dos conceitos científicos e das bases de seu pensamento e, que para tal, a Matemática possui papel relevante.

De acordo com os pressupostos supracitados conclui que Peru e Brasil desejam desenvolver vários aspectos dos alunos durante o processo de formação discente, no qual as grandes preocupações são a construção do conhecimento científico, o desenvolvimento do pensamento matemático e o surgimento de massa crítica que utilize as bases da Matemática.

No estudo comparado encontrei três focos das ideias da Educação Matemática nos currículos, duas em comum, Resolução de Problemas e uso das Tecnologias, e a terceira, História da Matemática, apenas no currículo brasileiro.

O DCN (2008) utiliza a resolução de problemas na educação primária e na secundária, eixo principal da área da Matemática; segundo o próprio documento, a utilização desta estratégia tem por objetivo tornar as crianças e os jovens aptos a encarar a vida e prepara-se melhor para o futuro.

No Brasil, o uso da resolução de problemas aparece nos currículos publicados por organismos governamentais como eixo metodológico sendo bastante utilizado pelos professores, com o intuito de contextualizar a Matemática nos seus vários aspectos e facilitar o binômio ensino-aprendizagem.

Nos currículos publicados por organismos governamentais do Brasil, aparece ao lado da Resolução de Problemas e do uso das Tecnologias a terceira ideia da educação matemática - a História da Matemática - como estratégia para o desenvolvimento do ensino-aprendizagem da disciplina.

Diante do exposto conclui que os dois países buscam propiciar o desenvolvimento dos seus alunos e a Matemática é um dos pilares deste processo, tendo em vista que uma das respostas dadas por todos os professores pesquisados foi que o objetivo do ensino da Matemática em todos os níveis, se constitui o desenvolvimento do raciocínio lógico e de como chegar a este patamar.

Contudo surge mais uma questão para futuras pesquisas: Por que a História da Matemática não é abordada no currículo prescrito do Peru da mesma maneira que no Brasil?

Ao comparar os DCN e PCN consideramos o fato que os documentos se preocupam com a formação do aluno-cidadão e que a Matemática aparece como um dos pilares para tal.

Concluo também que as ideias da educação matemática produziram mudanças nas bases contidas nos documentos oficiais que passaram a oferecer diferentes alternativas aos professores no pensar e desenvolver a disciplina além de impacto transformador na maneira de lidar com o ensino da Matemática, agora não mais como uma ciência solitária e sim integrada ao desenvolvimento do conhecimento humano, mais interessante para o aluno.

Fica explícita que por este artigo ser um recorte de uma pesquisa que foi realizada de maneira qualitativa um número reduzido de documentos, necessitando de mais pesquisas para o avanço dos resultados.

Acredito que este artigo pode contribuir para professores, diretores e elaboradores de currículos, encontrarem caminhos e soluções para problemas com que se deparem na elaboração de currículos prescritos e praticados, já que o objetivo desta pesquisa é realizar um estudo comparativo e encontrar semelhanças e diferenças nos documentos elaborados por organismos governamentais de Matemática, com experiências utilizadas no Peru e Brasil.

Referências

AGUIAR, GLAUCO DA SILVA. **“Estudo comparativo entre Brasil e Portugal sobre diferenças nas ênfases curriculares de Matemática a partir da análise do Funcionamento Diferencial do Item (DIF) do PISA 2003”**, 2008. 197. P Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ATHIAS, M. F. **Currículos da educação básica do Peru e Brasil: prescritos e praticados**. 2015 240. P, (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

ARNOVE, Robert F. Comparative education and world-system analysis. **Comparative Education Review**, v. 24, n. 1, p. 48-62, fev. 1980.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. 5. ed. Lisboa, Portugal: Edições 70, 2008. (1. ed. 1977)

BARRETO, Elba Siqueira de Sá; GATTI, Bernadete Angelina. **Professores do Brasil**: impasses e desafios. Brasília: UNESCO, 2009.

BELINE, Willian; COSTA Nielce Meneguelo Lobo da. **Educação matemática, tecnologia e formação de professores**. Campo Mourão-PR: Editora da FECILCAM, 2010. 272p.

BISHOP, ALAN J. **ENCULTURACIÓN MATEMÁTICA: La Educación Matemática desde una perspectiva cultural.** Barcelona: Paidós, 1999.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BRASIL. **LDB: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**: lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. 5. ed. Brasília: Câmara dos Deputados, Coordenação Edições Câmara, 2010.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática. Brasília, 1998. 148p.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, 1997a. 126p.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1997b.142p.

______. Ministério da Educação. Lei 12.796/2013, altera a lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 a **LDB: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**: Brasília: Casa Civil. 04/04/2013

BRUNER, JEROME. **THE PROCESS OF EDUCATION: Landmark in Education Throry.** 1960, Harvard College.

CARVALHO, E. J. G. **Estudos comparados: repensando sua relevância para a educação**. In: CONGRESO NACIONAL, 3.; ENCUENTRO INTERNACIONAL DE ESTUDIOS COMPARADOS EN EDUCACIÓN, 2. Buenos Aires, 2009.

CERQUEIRA, D. S. **Um estudo comparativo entre Brasil e Chile sobre educação matemática e sua influência nos currículos de Matemática desses países**. 2012. 253.P, Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

DIAS, M. O. **Educação Matemática e sua influência nos currículos prescritos e praticados: um estudo comparativo entre Brasil e Paraguai**. 2012. 316. P (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

DOLL JR., W. E. **Currículo**: uma perspectiva pós-moderna. Tradução: Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

FERRER, Feran. **La Educación Comparada Actual**. Barcelona, Espanha: Editorial Ariel S.A. 2002.

FRANCO, Maria A. Ciavatta. **Estudos comparados e educação na América Latina**. 1 ed. São Paulo: Livros do Tatu; Cortez, 1992. – (Educação hoje e amanhã).

KILPATRICK, J. A history of research in mathematics education. In: GROWS, D. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992.

KILPATRICK, J.; KEITEL, C. Racionalidade e irracionalidade dos estudos comparativos internacionais. **Educação e Pesquisa**, Associação de Professores de Portugal, Lisboa, n. 55, 1999.

LOURENÇO FILHO, Manoel Bergström. **Educação comparada**. 3. ed. Brasília: MEC/Inep, 2004. 250p. (Coleção Lourenço Filho, ISSN 1519-3225; 7)

MALET, Regis. Do Estado-nação ao espaço-mundo: as condições históricas da renovação da educação comparada. **Educ. Soc.**, Campinas, v. 25, n. 89, p. 1301-1332, set./dez. 2004. Disponível em: http://www.cedes.unicamp.br. Acesso em: 10/02/2015.

NÓVOA, António. Modelo de análise de educação comparada: o campo e o mapa. In: SOUZA, Donaldo Bello de; MARTINEZ, Silvia Alicia Martins (Orgs.). **Educação comparada**: rotas de além-mar. São Paulo: Xamã, 2009. pp. 23-62.

OLIVEIRA, E. C. **Impactos da educação matemática nos currículos prescritos e praticados de Argentina e Brasil**. 2012. 253p. (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

PERU. **Ley Nº29062 Ley que modifica la ley del professorado em lo referido a la carrera pública magistral.** Promulgada em 14.11.2011. Lima, 2011.

______. Ministerio de la Educación República del Perú. **Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del Perú**. Promulgada em 15.12.2008. Lima, 2008.

______ Consejo Nacional de Educación. **Proyecto Educativo Nacional al 2021.** Propuesto por el Consejo Nacional de Educación y assumido como desarrollo de la décimo segunda política de Estado por el Foro de Acuerdo Nacional. Aprobado con política de Estado Resolución Suprema n. 001-2007-ED.

______. **Ley General de la Educación Nº28044.** Promulgada em 30.07.2003, Lima, 2003.

PIRES, C. M. C.; TRALDI JR., A.; JANUARIO, G.; SANTANA, K. C. L.; ATHIAS, M. F. Grupo de Pesquisa "Organização, Desenvolvimento Curricular e Formação de Professores em Matemática". **REMATEC**, Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Natal: UFRN, v. 8, p. 87-95, 2011.

PIRES, C. M. C. Pesquisas comparativas sobre organização e desenvolvimento curricular na área de educação matemática, em países da América Latina. **Educação Matemática Pesquisa** (Online), v. 15, p. 513-542, 2013.

______. Formulações basilares e reflexões sobre a inserção da Matemática no currículo, visando a superação do binômio máquina e produtividade. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 6, n. 2, p. 29-61, 2004.

______. **Currículos de Matemática**: da organização linear à ideia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

RICO ROMERO, L. R. **Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria**. Madrid: Editorial Síntesis, 1997.

ROSEMBAUM, L. S. **Estudo comparativo sobre a Educação Matemática presente em currículos: Brasil e Uruguai**. 2014. 403p. (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

SACRISTÁN, J. Gimeno. **O currículo**:uma reflexão sobre a prática. Trad.: Ernani F. da F. Rosa. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SILVA, M. A. **Currículos de Matemática no Ensino Médio**: em busca de critérios para escolha e organização de conteúdos. 2009. 226p.Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

TRAVERS K.; WESTBURY, I. **The IEA Study of Mathematics I**: Analysis of mathematics curricula. New York: Pergamon Press, 1989.

Sites acessados

www.saece.org.ar/docs/congreso3/Goncalves1.doc. Acesso em: 12 mar. 2012

http://www.minedu.gob.pe/buzon/. Acesso em: 11 mar. 2012

http://adide.org/revista/index.php?option=com_content&task=view&id=214&Itemid=49.Acesso em: 11 mar. 2012

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 05 mar. 2012 http://www.pisa.oecd.org. Acesso em: 11 mar. 2012

http://escale.minedu.gob.pe/magnitudesportlet/reporte/cuadro?anio=15&cuadro=197 &forma=U&dpto=&dre= &tipo_ambit = ambito-ubigeo. Acesso em: 14 out. 2013

http://www.fcc.org.br/institucional/2010/09/06/historico. Acesso em: 24 mar. 2013

http://dsi13minionu.files.wordpress.com/2012/08/brasil.pdf Acesso em: 14 abr. 2012

http://www.peru.gob.pe/ Acesso em: 14 abr. 2012

http://www.projetolatinoamerica.com.br/idh-2011-america-latina/. Acesso em: 07 ago. 2012

http://portal.inep.gov.br/web/enem/sobre-o-enem. Acesso em: 27 maio 2014

http://paginas.uepa.br/priseeprosel. Acesso em: 05 out. 2014

http://www.projetolatinoamerica.com.br/idh-2011-america-latina. Acesso em: 30 nov. 2014

http://www.projetolatinoamerica.com.br/category/paises. Acesso em: 30 nov. 2014

http://www.oei.es/quipu/brasil/estructura.pdf. Acesso em: 08 fev. 2015.

Autores

Miguel Fortunato Athias
Drº em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Professor da Universidade da Amazônia
Fone 91 33536830
mfathias@globo.com

Celia Maria Carolino Pires
Drª em Educação - Universidade de São Paulo - USP
Professora da Universidade Cruzeiro do Sul e Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Fone 11 30325167
ccarolinopires@gmail.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 137-161

Análisis de la Resolución de Problemas Aritméticos Elementales Verbales Aditivos de una etapa a través de los Registros de Representación Semiótica

Gladys Masiell Diestra Díaz

Fecha de recepción: 03/12/2015
Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	Este artículo es un análisis exploratorio de las distintas representaciones que hace un grupo de estudiantes de 4° grado de primaria (entre 9 y 12 años de edad) al resolver una serie de actividades propuestas sobre problemas aritméticos elementales verbales, denominados PAEV, específicamente los aditivos de una etapa en la categoría semántica de comparación y/o igualación, con la finalidad de saber si dichas actividades contribuyem al aprendizaje del estudiante. Se empleó la teoría de registros de representaciones semióticas mediante un estudio de casos en el análisis y proceso de datos. Las producciones de los estudiantes mostraron que pudieron coordinar al menos dos registros de representación para la comprensión de los problemas. **Palabras clave**: Aprendizaje, coordinación, representación.
Abstract	This article is an exploratory analysis of the different representations that makes a group of students from 4th grade (between 9 and 12 years old) to solve a series of proposed activities on elementary verbal arithmetic problems, called PAEV specifically additives a step in the semantic comparison category 5 and 6 and/or equalization 3 and 4, in order to know whether these activities contributes to student learning. Was used the theory of semiotic representations records through case studies for analysis and data processing. The productions of the students showed that they could coordinate at least two registers of representation for understanding the problems. **Keywords**: Learning, coordination, representation.
Resumo	Este artigo apresenta uma análise exploratória das distintas representações que um grupo de estudantes de 4º ano do Ensino Fundamental I (de 9 a 12 anos) utilizam para resolver uma série de atividades envolvendo problemas aritméticos elementares verbais, denominados PAEV. Eram especialmente problemas aditivos, em uma etapa da categoria semântica comparar e/ou igualar, com finalidade de saber se essas atividades favoreciam a aprendizagem do estudante. Empregou-se a teoria dos registros de representação semiótica mediante um estudo de caso na análise e processamento de dados. As produções dos estudantes mostraram que eles puderam coordenar ao menos dois registros de representação para a compreensão dos problemas. **Palavras-chave:** aprendizagem, de coordenação, representação.

1. Introducción

Los PAEV, son problemas aritméticos de enunciado verbal entendidos en educación como problemas de la vida real o problemas de contexto real para el estudiante de primaria. Específicamente los PAEV aditivos de una etapa o de un paso en la categoría semántica de comparación y/o igualación, se resuelven con operaciones aritméticas de una operación ya sea de suma o resta y que en el enunciado verbal o texto, denoten la relación de comparar dos cantidades, con las expresiones: "más que" o "menos que", (caso de la categoría semántica de comparación) o equipararlas, con las expresiones: "tantas… como" (caso de la categoría semántica igualación). Ejemplo:

"*Juan tiene 8 canicas. Si Pedro pierde 3, tendrá tantas canicas como Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro? "*

Explica Martínez (1995, p. 170), que los PAEV han sido, tradicionalmente, el lugar natural donde los alumnos se introducían a la aritmética aplicada, que cuando se habla de aritmética aplicada parece que se habla de algo menor, sin repercusiones o trascendencia, sin embargo Martínez afirma que es todo lo contrario porque como lo indica Nesher (1980, p. 41), "la aritmética aplicada es la parcela más significativa del conocimiento para la vida futura y es frecuentemente definida como una de las destrezas más básicas para el ciudadano común" y que de manera similar Castro, Rico y Gil (1992, p. 244) lo dicen: "Los problemas aritméticos verbales se incluyen en el currículo escolar con la finalidad, entre otras, de facilitar al alumno este acercamiento entre aritmética y realidad, entre aritmética y aplicaciones a la vida real, que hacen más significativo y valioso su estudio". También Rodríguez expone, que:

> Hay muchas situaciones de la vida real que conducen a las operaciones de sumar y restar. Estas situaciones son presentadas en la escuela en forma de problemas verbales de suma y resta. Así pues, los problemas verbales más que los algoritmos son el contexto fundamental a través del cual el niño aplica el conocimiento matemático en situaciones cercanas a la vida real. (Rodríguez, 1991, p. 23)

Además los PAEV constituyen una parte fundamental del currículo de educación primaria peruana. Dentro de la estructura del sistema curricular nacional, los mapas de progreso de aprendizaje o estándares de aprendizaje nacionales creados por el Ministerio de Educación y el Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica – IPEBA, describen en el Mapa de Progreso del Aprendizaje Matemático Números y Operaciones, que una de las competencias que se pide tengan los estudiantes de 3° y 4° grado de primaria, es que resuelva y formule situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de agregar, quitar, igualar o comparar dos cantidades, según la clasificación de los PAEV: Comparación e Igualación 3 y 4. De manera similar para los estudiantes de 5° y 6° grado de primaria, según la clasificación de los PAEV: Comparación e igualación 5 y 6.

En este caso nuestro interés va dirigido al estudiante de 4° grado de primaria, ya que para este nivel debe haber logrado resolver problemas de tipo PAEV de categoría igualar 3 y 4, y pensamos que debe estar familiarizado con problemas de tipo PAEV aditivos simples de categoría comparar 5 y 6 para cuando alcance el siguiente grado o nivel educacional.

Para el presente Análisis exploratorio, el marco teórico utilizado es la teoría de los registros de las representaciones semióticas propuesta por Duval, que plantea, que el empleo y la coordinación de diversos registros de representación semiótica en la adquisición de un objeto matemático o concepto matemático, hace posible la comprensión del mismo, y que la comprensión de un objeto matemático reposa en la conversión de al menos dos registros de representación semiótica. En el análisis y procesamiento de datos, la metodología que se empleó es la técnica del estudio de casos, desarrollándose una serie de actividades para evaluar los conocimientos adquiridos por el estudiante antes y después del análisis y de esta forma saber si dichas actividades contribuyen de alguna forma al aprendizaje del estudiante.

2. Marco Teórico

2.1 Teoría de los Registros de Representación Semiótica

La Teoría de los Registros de Representación Semiótica fue desarrollada por el Filósofo y Psicólogo Francés Raymond Duval en 1995. Su principal obra: "Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales" sentó las bases para las investigaciones en la educación matemática, sirviendo como marco teórico a diferentes trabajos sobre problemas de comprensión en las matemáticas.

Duval afirma, que para la comprensión de la matemática se requiere una coordinación entre los diversos sistemas de representación semióticos, si no se desarrolla dicha coordinación, los estudiantes no pueden cruzar el umbral de la conversión de representación. Duval explica también que la habilidad para movilizar diversas representaciones conjuntamente de manera interactiva o en paralelo depende del desarrollo de esta coordinación, y la comprensión conceptual no es la condición de tal coordinación, sino que surge de su desarrollo. En otras palabras, lo importante para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos, porque de esta forma surgirá la comprensión conceptual y al darse cuenta de la forma específica de representar para cada sistema semiótico será la condición cognitiva para la comprensión. (Duval, 2006, pp. 158-159)

Para Duval (2004), el tránsito entre los diferentes Registros de Representación Semiótica tiende a favorecer las actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos, es por ello que los alumnos deben de transitar entre varios tipos de registros, por lo menos dos, a fin de afirmar que se aprendió un determinado concepto matemático, una situación o un proceso. Según Duval, este tránsito entre Registros de Representación Semiótica, debe hacerse en forma natural y espontánea, y se logran cuando los diferentes Registros de Representación Semiótica representan para el alumno el mismo objeto. Entonces Duval explica que cuando se analiza cualquier actividad matemática tenemos que distinguir en primer lugar dos clases de transformación sobre Los Registros de Representación Semiótica: los tratamientos y las conversiones. (Figura 1)

- Los tratamientos son transformaciones de representación dentro de un mismo registro: por ejemplo, efectuar un cálculo estrictamente en un mismo sistema de escritura o de representación de números; resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones; completar una figura según los criterios de conexidad y de simetría.

- Las conversiones son transformaciones de representaciones que consisten en cambiar de registros conservando los mismos objetos, por ejemplo: pasar de escritura algebraica de una ecuación a su representación gráfica.

Entonces Duval pregunta: ¿Cómo hacer que los estudiantes entren en el complejo y amplio funcionamiento de la conversión de representación? Duval responde: “La mayoría de los profesores están de acuerdo en que es importante que los estudiantes usen tanto símbolos como figuras, representen modelos espaciales y numéricos, e identifiquen el mismo patrón en diferentes representaciones y contextos. Pero el tema principal es saber cuáles son los tipos de tareas y actividades para lograr este propósito”. (Duval, 2006, p. 159)

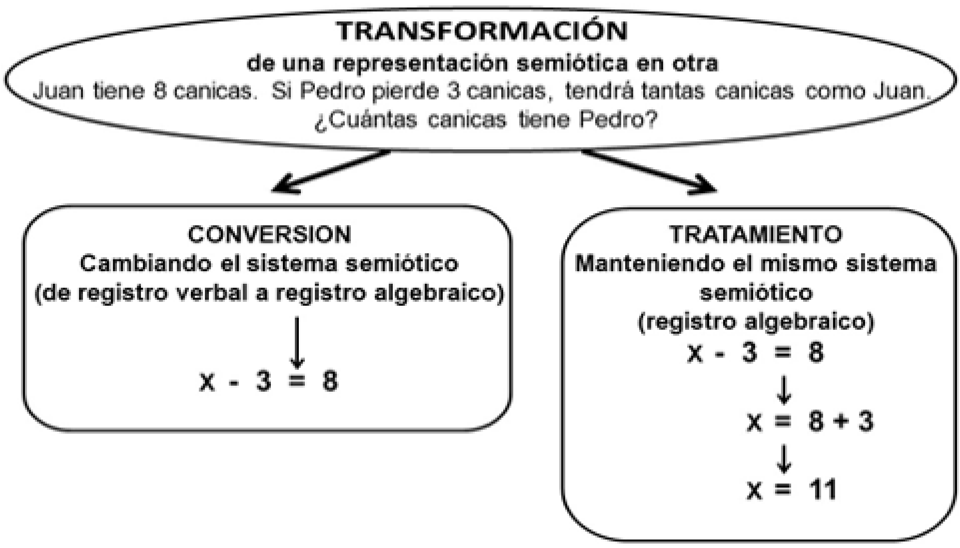


Figura 1

En nuestro caso plantearemos una serie de actividades, donde el estudiante de 4° grado de primaria en la conversión de los PAEV aditivos de una sola etapa en las categorías de comparación e igualación, transite entre varios registros de representación, siendo estas representaciones: algebraica, aritmética y gráfica.

2.2 Registros de representación semiótica y los PAEV

Explica Duval, que los problemas de la vida diaria se subrayan a menudo especialmente en la enseñanza de la educación primaria, porque se piensa que la aplicación de procedimientos y operaciones matemáticas a problemas prácticos da significado al aprendizaje de las matemáticas, pero también hay otra razón más interesante para ese propósito de resolver problemas “de la vida real” y es que los estudiantes utilicen su experiencia física o diaria y sus representaciones mentales. Así se les podrían ahorrar a los estudiantes el problema que suscitan las representaciones semióticas y además podrían comprender los conceptos matemáticos y por tanto dar sentido a las representaciones semióticas empleadas. (Duval, 2006, pp. 162-164)

Duval también menciona, que la ventaja educativa de los problemas de la vida real es que permiten trabajar libremente con aquellas representaciones que parezcan más accesibles que las que se usan en matemáticas como las representaciones auxiliares que pueden ayudar al estudiante a comprender cada etapa del proceso de resolución. Expresa Duval que de cualquier manera, lo que importa no es el averiguar la “buena” representación sino las diversas y adecuadas representaciones para coordinarlas. En el caso del prototipo de ejemplo de los problemas aditivos, al recurrir a representaciones de tipo unidimensional, como el esquema del cálculo relacional de Vergnaud (1990), o a representaciones como la de tipos bidimensionales de Damm (1992). Duval se pregunta:

> ¿Cuál de estos dos tipos de representación puede hacer que los alumnos entiendan un problema aditivo (figura 2)? ¿El unidimensional de la izquierda o el bidimensional de la derecha? Los dos esquemas representan a textos del tipo: Pedro tiene (“ha ganado” o “ha perdido”) 5 canicas. Juega una partida (o “juega una segunda partida”). En total tiene 9 canicas (“ha ganado” o “ha perdido”)”. Se ve enseguida que el esquema de cálculo de relaciones es congruente con una de las tres operaciones posibles para una adición dada (5 + 4 = 9). Sin embargo el esquema bidimensional es congruente con la doble descripción del texto y permite distinguirlas. Lo que llamamos “información pertinente” del texto es la que los alumnos deben “seleccionar” y corresponde a la INTERSECCION DE DOS DETERMINACIONES SEMANTICAS DIFERENTES (marcada en el esquema con dos ejes diferentes). Tomar en cuenta la intersección de las dos determinaciones semánticas distintas ¡permite seleccionar una información y diferenciar directamente la lectura de un texto matemático de un texto ordinario! [...] (Duval, 2006, p. 165)

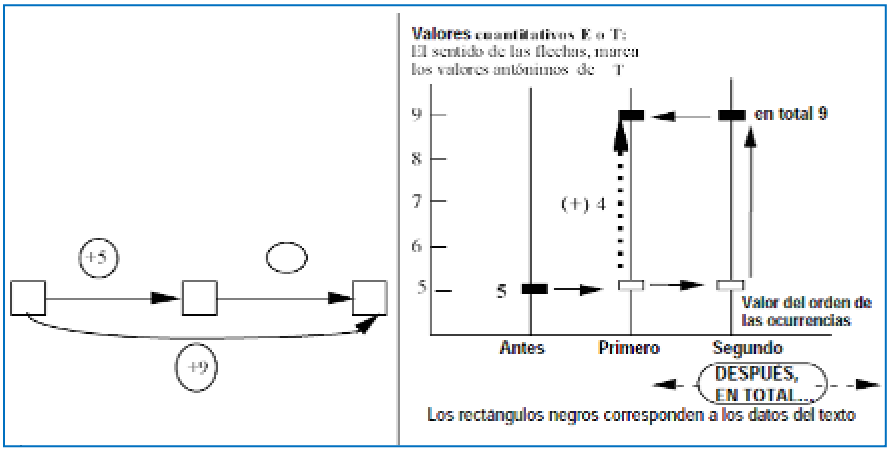


Figura 2

Duval (2006), concluye que las representaciones auxiliares son útiles y no deben ser ignoradas, que algunas veces los profesores en escuelas primarias, no pueden salir del laberinto de representaciones, incluso con problemas aditivos verbales de una sola operación al no usarlas y que de hecho la comprensión conceptual surge de la coordinación de los diversos sistemas semióticos usados, y darse cuenta de la forma específica de representar para cada sistema semiótico es condición cognitiva para la comprensión. Por lo que hemos tomado como referencia la representación bidimensional de Damm como representación gráfica auxiliar haciéndole una pequeña variante para el desarrollo de las actividades propuestas, además de la representación algebraica y aritmética que vamos a utilizar.

3. Metodología

Para el análisis y procesamiento de datos, se empleó la técnica del estudio de casos, desarrollándose una serie de actividades (evaluaciones, sesiones de clase y repaso) para saber los conocimientos adquiridos por el estudiante antes y después del análisis, se escogió esta metodología por ser un esquema experimental basado en realizaciones didácticas en el aula, para analizar los procesos de aprendizaje del estudiante y las dificultades que encuentre al realizar las actividades propuestas. Para validar las secuencias de las actividades, hicimos una comparación entre lo que se esperaba y lo que realmente sucedió durante el desarrollo de la clase (Análisis a priori y a posteriori).

Como parte de las actividades primero se hizo un Análisis preliminar mediante una evaluación de 4 PAEV aditivo de una etapa en categorías comparación e igualación a los estudiantes de 4° grado de primaria, después, se hicieron tres sesiones didácticas en el aula, incluido un repaso sobre el tema de desigualdades y ecuaciones. Para tener un resultado más fiable sobre el comportamiento de los estudiantes respecto al concepto de PAEV aditivo de una etapa en categorías comparación 5 y 6 y/o igualación 3 y 4, se tomó como referencia al libro "Problemas aritméticos escolares" de Puig y Cerdán, para el diseño del contenido de cada sesión de clase. El tiempo que se otorgó para el desarrollo de cada sesión didáctica en el aula, fue de una hora académica (50 minutos), durante tres días intercalados (un día para cada sesión). Se les indicó a los estudiantes, que las actividades a realizar era un repaso sobre el tema de PAEV y que podían responder las preguntas en forma voluntaria.

En las dos primeras sesiones se les capacitó sobre cómo resolver los PAEV aditivos de un paso en la categoría comparación 5 y 6 (primera sesión) e igualación 3 y 4 (segunda sesión); mediante el tránsito entre las representaciones de registro verbal a registro algebraico, de registro algebraico a registro gráfico y por último de registro gráfico a registro aritmético. Seguidamente se les evaluó para analizar sus producciones. En la tercera sesión de clase, se hizo el tránsito entre las representaciones de registros algebraico, gráfico y aritmético a registro verbal con una dinámica en grupo, que también fue evaluada.

Las actividades se desarrollaron con 28 estudiantes de un total de 30 que cursaban el 4° grado de primaria (Los estudiantes fluctúan entre los 9 y 12 años de edad y solo 28 asistían regularmente) de una Institución Educativa Estatal Peruana, ubicada en la ciudad de Lima, distrito de "El Agustino". Si viene cierto no hay un estudio sociocultural de la población del distritito disponible al público, pero si se tiene información sobre su nivel socioeconómico y la mayoría de pobladores pertenece al estrato "C" y "D"; es decir que del 100% de la población, 43% de ellos cuentan con una vivienda básica completa, gozan de seguro social y tienen una

Educación superior universitaria incompleta o una Educación superior no universitaria completa y el 31% cuentan con una vivienda básica, no gozan de seguro social y solo tienen secundaria completa. El 13% del restante son estrato “B”, el 10% estrato E y 3% estrato “A”. (Asociación Peruana de Investigación de Mercados, 2014).

3.1 Análisis Preliminar

3.1.1 Análisis epistemológico

Puig y Cerdán, afirman que los PAEV son los primeros que aparecen en el currículo escolar de matemática y que al ser la primera actividad de resolución de problemas con la que se encuentran los niños en su vida escolar, debe ponerse toda la atención y el cuidado en ella. (Puig y Cerdán, 1988, c. 3, p. 1)

También Puig y Cerdán describen que los PAEV se clasifican en primer lugar en problemas de una etapa y problemas de más de una etapa, en los problemas de una etapa se hace una sola operación. En segundo lugar se clasifican como PAEV aditivos o multiplicativos, es decir aditivos si la operación a realizar es de suma o resta y multiplicativos si la operación es de multiplicación o división. Y que desde el punto de vista semántico, algunos investigadores se han puesto de acuerdo en clasificar los PAEV en cuatro grandes categorías por la gran importancia del significado del texto del problema a la hora de comprender los procesos utilizados por los niños para resolverlos. Siendo las categorías semánticas: cambio, combinación, comparación e igualación. (Puig y Cerdán, 1988, c. 3, pp. 10-15)

A continuación detallaremos las categorías que hemos utilizado en las actividades propuestas según Puig y Cerdán (1988):

Categoría semántica “Comparar”- Se incluyen en esta categoría los problemas que presentan una relación estática de comparación entre dos cantidades. Las cantidades presentes en el problema se denominan cantidad de referencia, cantidad comparada y diferencia; la cantidad comparada aparece a la izquierda de la expresión ‘más que’ o ‘menos que’, y la cantidad de referencia a su derecha. Dado que el sentido de la comparación puede establecerse en más o en menos, y dado que se puede preguntar por cualquiera de las tres cantidades, el número de tipos posibles de problemas de comparación es seis. Comparar3 y comparar6 se resuelven con una suma y los demás, con una resta. (Solo se muestran las que se usaron en la primera sesión de clase)

Comparar5. *Pedro tiene b. Pedro tiene c más que Juan. ¿Cuántos tiene Juan?*

Comparar6. *Pedro tiene b. Pedro tiene c menos que Juan. ¿Cuántos tiene Juan?*

En ambos casos, la letra “b” es la cantidad comparada, la letra “c” es la cantidad diferencia y la cantidad de referencia, es la respuesta a la pregunta.

Categoría semántica “Igualación”- Estos problemas se caracterizan porque hay en ellos una comparación entre las cantidades que aparecen, establecida por medio del comparativo de igualdad ‘tantos como’. Como la estructura básica de este tipo de problemas es la de los problemas de comparación, están presentes aquí también los tres tipos de cantidades: de referencia, comparada y diferencia, y la incógnita puede ser cualquiera de ellas; el sentido del cambio, que puede ser en más o en menos dependiendo de la relación entre las cantidades de referencia y comparada, duplica el número de posibilidades, con lo que de nuevo hay seis tipos de problemas de esta clase. (Solo se muestran las que se usaron en la segunda sesión de clase)

Igualar3. *Juan tiene a. Si Pedro gana c, tendrá tantos como Juan. ¿Cuántos tiene Pedro?*

Igualar4. *Juan tiene a. Si Pedro pierde c, tendrá tantos como Juan. ¿Cuántos tiene Pedro?*

En ambos casos, la letra “a” es la cantidad de referencia, la letra “c” es la cantidad diferencia y cantidad comparada, es la respuesta a la pregunta.

3.1.2 Análisis cognitivo

Se procedió a evaluar a los 28 estudiantes del 4° grado de primaria mediante cuatro problemas del tipo PAEV aditivos de un paso en la categoría comparación 5 y 6 e igualación 3 y 4. La evaluación de los conocimientos previos, es para saber si los estudiantes tienen conocimientos necesarios para desarrollar las actividades antes descritas, ya que teóricamente deberían contar con los siguientes:

- Las operaciones aritméticas básicas como la adición y la sustracción.
- La desigualdad de números naturales de dos o más cifras.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado.
- Comparación y establecimiento de equivalencias entre números naturales mediante la adición y sustracción.
- Expresar en forma aritmética o en forma algebraica un enunciado verbal.

A continuación presentamos la siguiente tabla con los resultados generales obtenidos de la evaluación de los conocimientos previos de los estudiantes de 4° grado de primaria. (Tabla 1)

Respuestas	CUESTIONARIO, PAEV Categoria Semántica:			
	Comparar 5 Pregunta N° 1	Comparar 6 Pregunta N° 2	Igualar 4 Pregunta N° 3	Igualar 3 Pregunta N° 4
Correctas	7 25%	8 29%	4 14%	4 14%
Incorrectas	20 71%	19 68%	24 86%	21 75%
En blanco	1 4%	1 4%	0 0%	3 11%

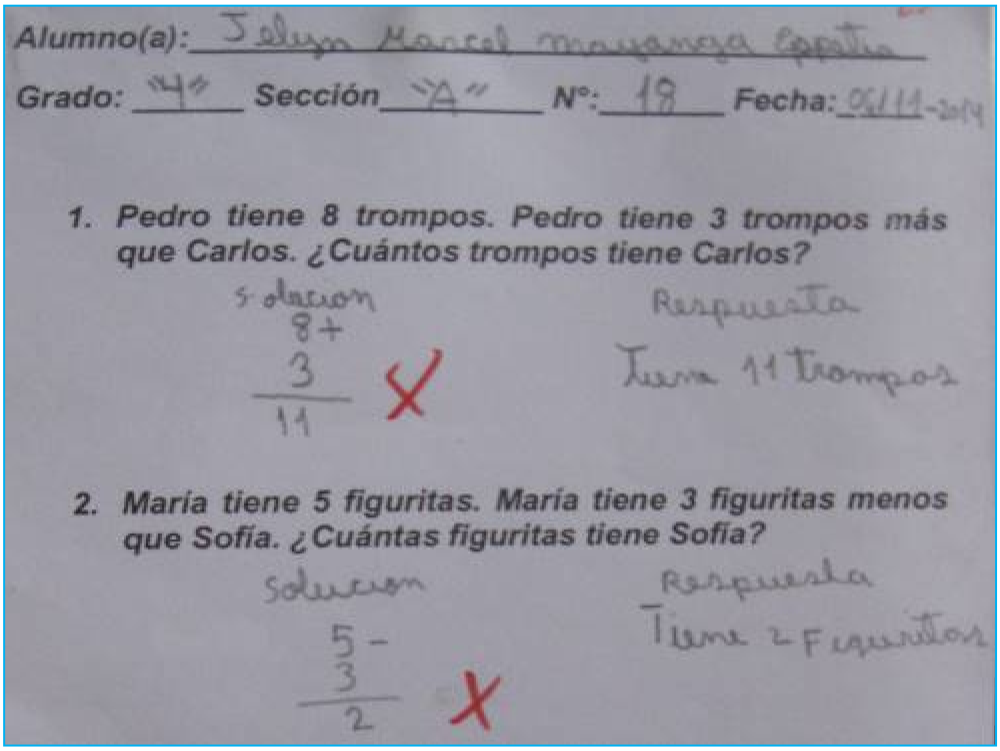
Tabla 1

De la Tabla 1, podemos observar, que el 86% y 75% de los estudiantes de 4° grado de primaria que participaron en el estudio no hicieron correctamente la representación de los PAEV aditivos de un paso en las categorías igualar 3 y 4 que son los tipos de PAEV que exige el currículo de educación primaria peruana para este nivel de estudios.

Seguidamente mostramos los cuatro problemas del tipo PAEV aditivos de un paso en la categoría comparación 5 y 6 e igualación 3 y 4 de la evaluación de conocimientos previos, comentarios del resultado general de la Tabla 1 y algunas imágenes que muestran las producciones de algunos de los estudiantes

1. ***Carlos tiene 8 trompos. Carlos tiene 3 trompos más que Pedro. ¿Cuántos trompos tiene Pedro?*** Respuesta: 8 – 3 = 5.

Análisis: Sólo el 25% de los estudiantes, hizo bien la representación aritmética. Mostramos el caso del estudiante Luis que hizo correctamente la representación solo en los dos primeros problemas de la evaluación (Imagen 1). Al 71% restante de los estudiantes, en vez de restar las cantidades de comparación y diferencia para hallar la cantidad de referencia, las sumaron. Mostramos el caso del estudiante Marcel que no representó correctamente los problemas (Imagen 2) y también mostramos la evaluación de la estudiante Camila que dio respuesta a los problemas sin hacer representación alguna (Imagen 3).


Alumno(a): Jelyn Marcel Mayanga Españia

Grado: 4° Sección "A" N°: 18 Fecha: 05/11-2014

1. Pedro tiene 8 trompos. Pedro tiene 3 trompos más que Carlos. ¿Cuántos trompos tiene Carlos?

Solucion

$8 + 3 = 11$

Respuesta

Tiene 11 trompos

2. María tiene 5 figuritas. María tiene 3 figuritas menos que Sofía. ¿Cuántas figuritas tiene Sofía?

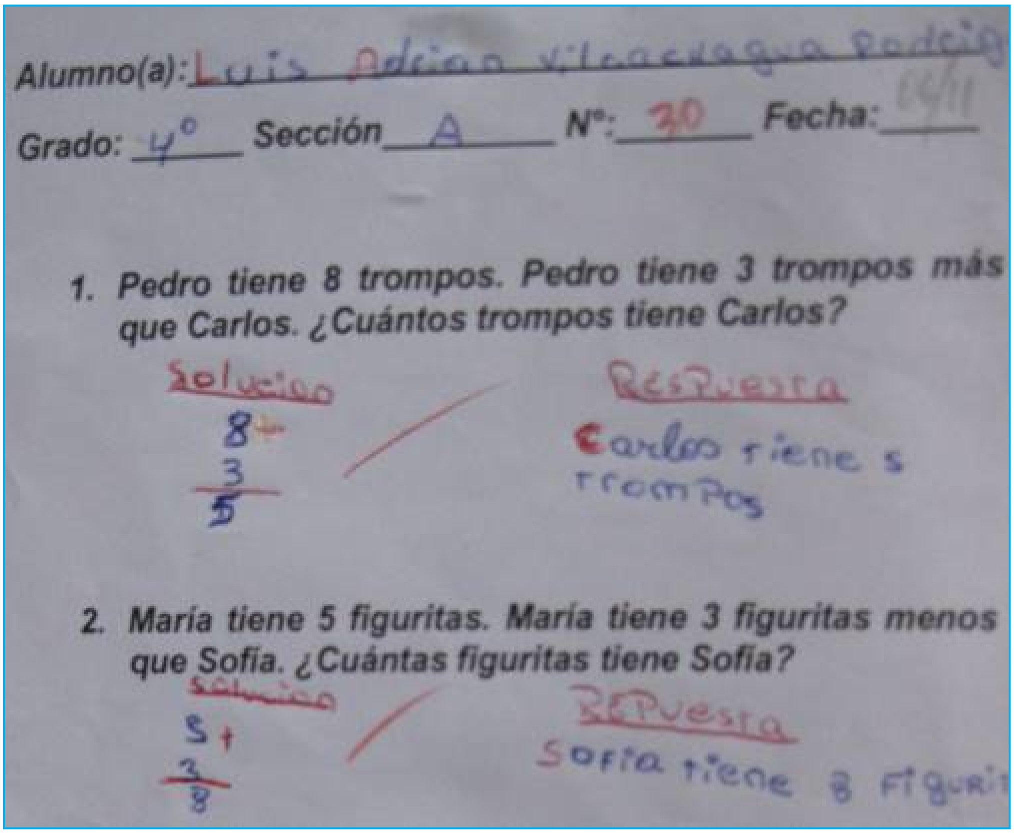
Solucion

$5 - 3 = 2$

Respuesta

Tiene 2 Figuritas

Imagen 2


Alumno(a): Luis Adrian Vilcachagua Rodcig

Grado: 4° Sección A N°: 30 Fecha: 05/11

1. Pedro tiene 8 trompos. Pedro tiene 3 trompos más que Carlos. ¿Cuántos trompos tiene Carlos?

Solucion

$8 - 3 = 5$

Respuesta

Carlos tiene 5 trompos

2. María tiene 5 figuritas. María tiene 3 figuritas menos que Sofía. ¿Cuántas figuritas tiene Sofía?

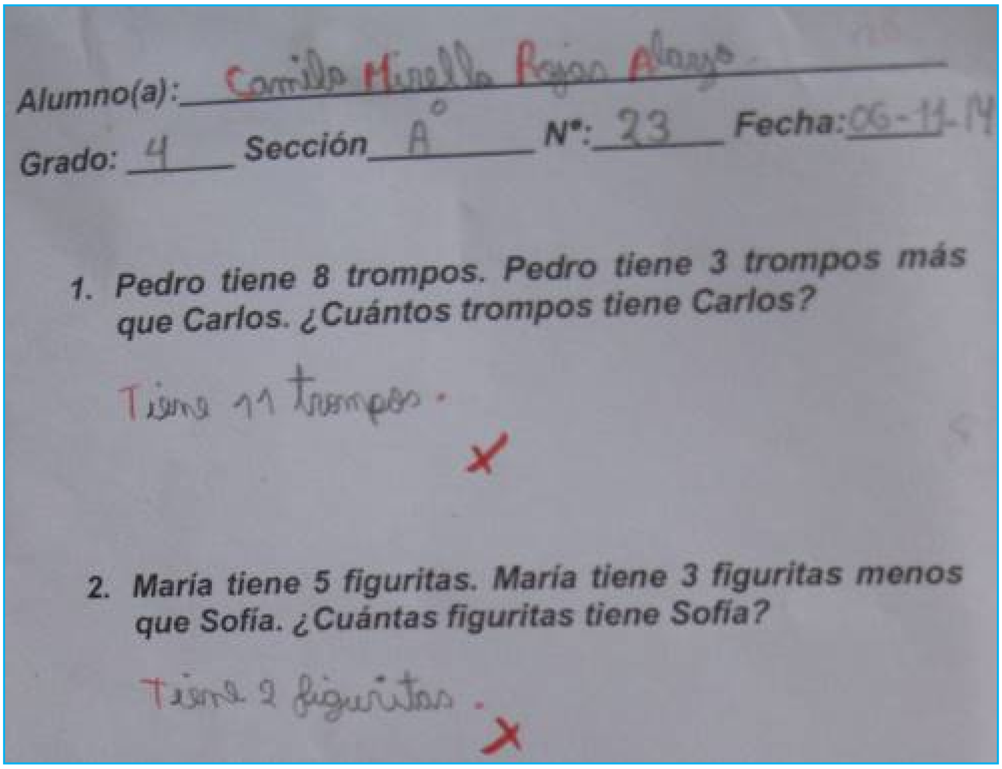
Solucion

$5 + 3 = 8$

REPuesta

Sofia tiene 8 Figuri

Imagen 1


Alumno(a): Camila Mirella Rojas Alarzo
Grado: 4 Sección: A N°: 23 Fecha: 06-11-14

1. Pedro tiene 8 trompos. Pedro tiene 3 trompos más que Carlos. ¿Cuántos trompos tiene Carlos?

Tiene 11 trompos.

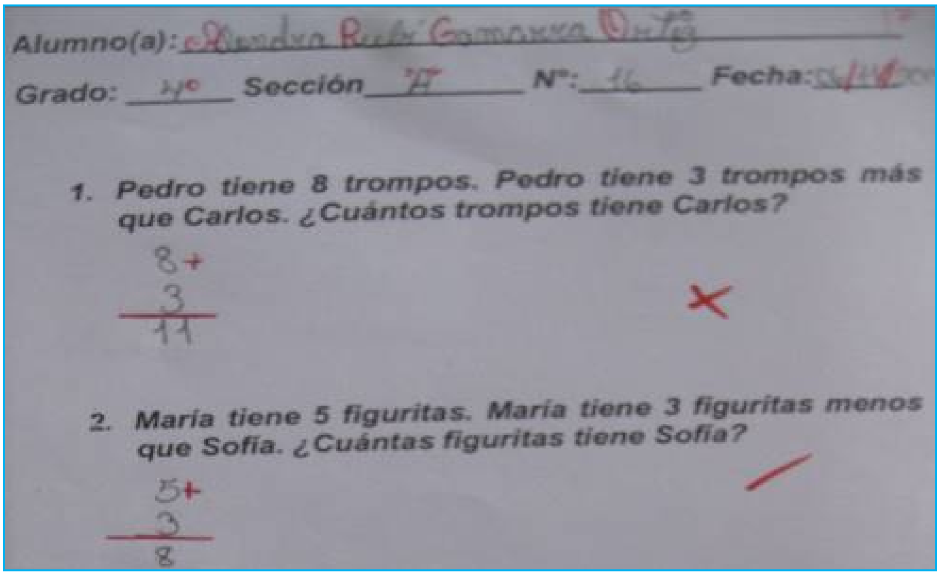
2. María tiene 5 figuritas. María tiene 3 figuritas menos que Sofía. ¿Cuántas figuritas tiene Sofía?

Tiene 2 figuritas.

Imagen 3

2. ***María tiene 5 figuritas. María tiene 3 figuritas menos que Sofía. ¿Cuántas figuritas tiene Sofía?*** Respuesta: 5 + 3 = 8.

Análisis: En este caso el 29% de los estudiantes hizo bien la representación aritmética, como podemos apreciar el caso de la estudiante Rubí (Imagen 4). El otro 68% de ellos, en vez de sumar las cantidades del enunciado para hallar la cantidad de referencia, las restaron. En este caso representado por el estudiante Jean (Imagen 5).


Alumno(a):
Grado: 4° Sección: "A" N°: 16 Fecha:

1. Pedro tiene 8 trompos. Pedro tiene 3 trompos más que Carlos. ¿Cuántos trompos tiene Carlos?

$$\begin{array}{r} 8+ \\ 3 \\ \hline 11 \end{array}$$

2. María tiene 5 figuritas. María tiene 3 figuritas menos que Sofía. ¿Cuántas figuritas tiene Sofía?

$$\begin{array}{r} 5+ \\ 3 \\ \hline 8 \end{array}$$

Imagen 4

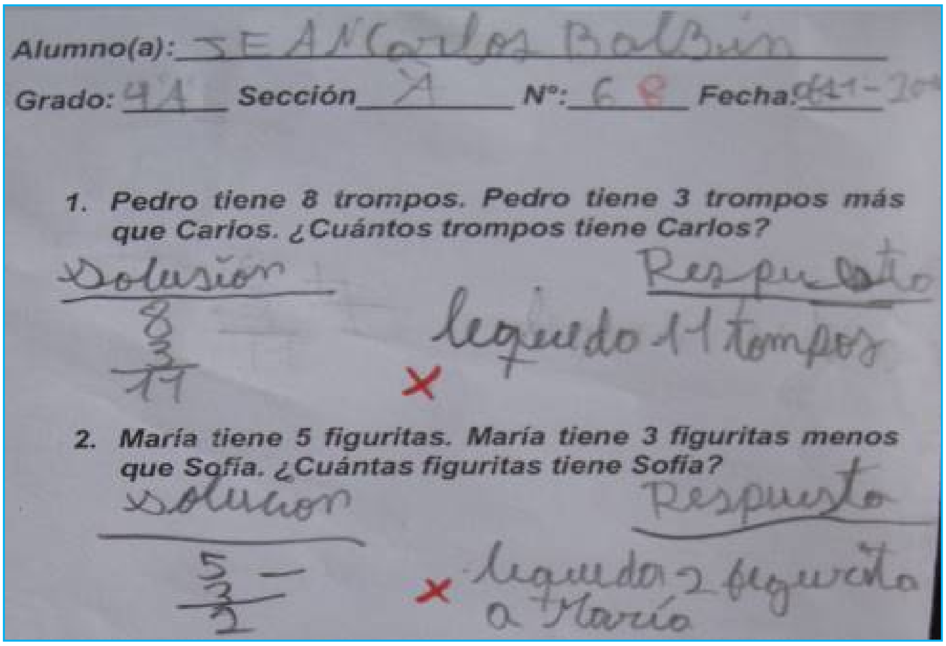

Alumno(a): JEAN Carlos Balbin
Grado: 4A Sección A Nº: 6 Fecha:
1. Pedro tiene 8 trompos. Pedro tiene 3 trompos más que Carlos. ¿Cuántos trompos tiene Carlos?
Solución Respuesta
8
3
11
le quedo 11 trompos
2. María tiene 5 figuritas. María tiene 3 figuritas menos que Sofía. ¿Cuántas figuritas tiene Sofía?
Solución Respuesta
5 −
3
2
le quedo 2 figuritas a María

Imagen 5

3. ***Juan tiene 8 canicas. Si Pedro pierde 3 canicas, tendrá tantas canicas como Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?*** Respuesta: 8 + 3 = 11.

Análisis: Solo el 14% de los estudiantes hizo bien la representación aritmética, representado por el estudiante Jean (Imagen 6), el otro 86% de ellos en vez de sumar las cantidades de referencia y diferencia para hallar la cantidad comparada, las restaron, que es el caso del estudiante Luis (Imagen 7).

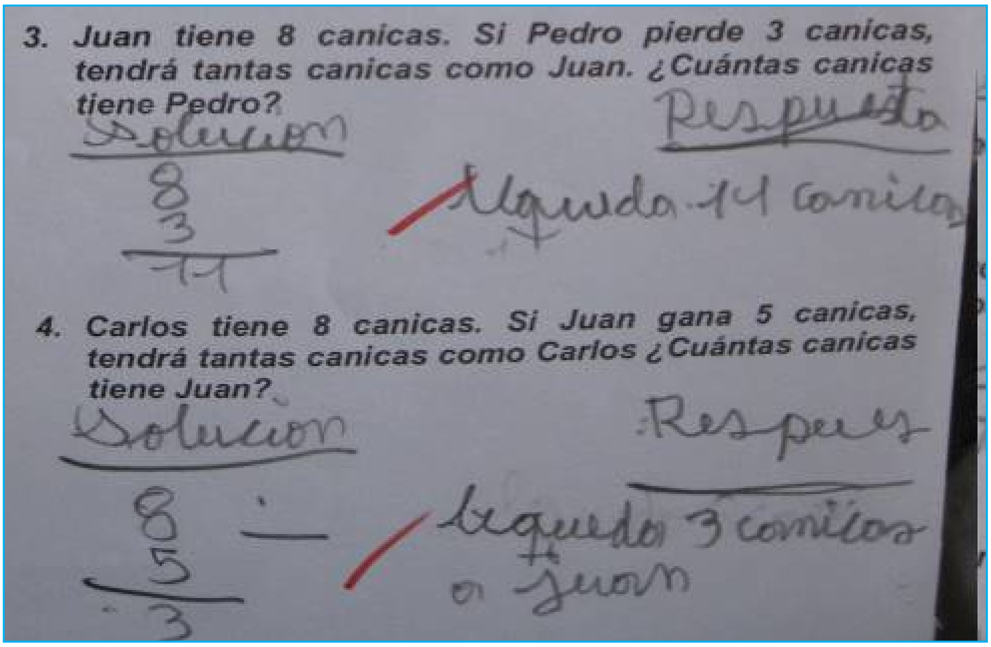
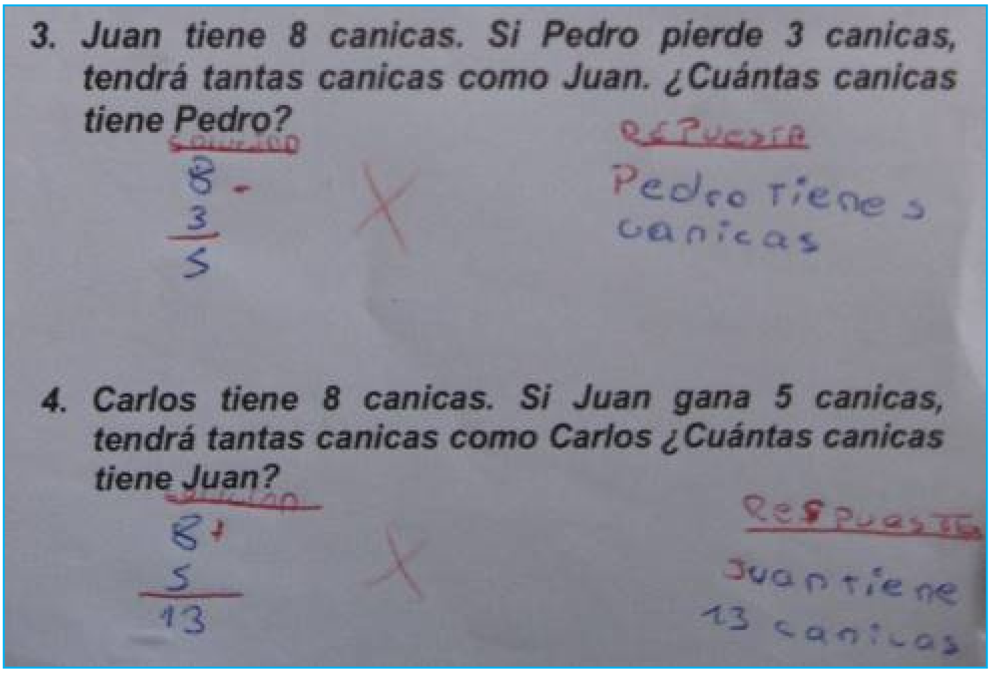

3. Juan tiene 8 canicas. Si Pedro pierde 3 canicas, tendrá tantas canicas como Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
Solución Respuesta
8
3
11
le queda 11 canicas
4. Carlos tiene 8 canicas. Si Juan gana 5 canicas, tendrá tantas canicas como Carlos ¿Cuántas canicas tiene Juan?
Solución Respues
8 −
5
3
le quedo 3 canicas a Juan

Imagen 6


3. Juan tiene 8 canicas. Si Pedro pierde 3 canicas, tendrá tantas canicas como Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?

Solución
8 -
3
5

Repuesta
Pedro Tiene 5 canicas

4. Carlos tiene 8 canicas. Si Juan gana 5 canicas, tendrá tantas canicas como Carlos ¿Cuántas canicas tiene Juan?

Solución
8 +
5
13

Respuesta
Juan tiene 13 canicas

Imagen 7

4. ***Carlos tiene 8 canicas. Si Juan gana 5 canicas, tendrá tantas canicas como Carlos ¿Cuántas canicas tiene Juan?*** Respuesta: 8 - 3 = 5.

Análisis: El 14% de los estudiantes hizo bien la representación aritmética, representado por el estudiante Jean (Imagen 5). El otro 75% de ellos, para hallar la cantidad comparada en vez de restar, sumaron, representado por el estudiante Luis (Imagen 6). Quedando un 11% de estudiantes que no resolvieron el problema.

Del análisis antes hecho en las producciones de los estudiantes, observamos, que las dificultades que tienen la mayoría de estudiantes de 4° grado de primaria a quienes se les propuso los cuatro problemas del tipo PAEV aditivos de un paso en la categoría comparación 5 y 6 e igualación 3 y 4, no están relacionadas con operaciones de cálculo, es decir no son errores de ejecución, sino son errores de representación. Según Bermejo y Rodríguez, detallan que los errores suelen presentarse de dos tipos, uno de ejecución y otro de representación. Los primeros se originan cuando el niño elige correctamente la operación aritmética correspondiente pero fracasa a la hora de ejecutarla. Los segundos surgen a causa de una representación inapropiada del problema a partir del texto verbal (Bermejo y Rodríguez, 1991, p. 38). En el resultado de la evaluación previa de conocimientos a los estudiantes de 4° grado de primaria, la mayoría son casos que corresponden a una representación inapropiada del problema.

También hemos observado que los estudiantes hicieron un solo tipo de representación, la representación aritmética. Señala García, que cuando la enseñanza ha estado centrada en la formación y el tratamiento de representaciones pertenecientes a un único registro semiótico o ha privilegiado un registro semiótico frente a otros, los conocimientos aprendidos quedan limitados a un único registro y se generan problemas para la producción de aprendizajes conceptuales (García, 2005, p. 37). En este caso se ha privilegiado la representación aritmética y es la única que se halla en las producciones de los estudiantes de 4° grado de primaria.

3.2 Análisis A Priori

A continuación describimos los comportamientos matemáticos que se esperaban de cada estudiante por cada Sesión didáctica.

En la **Sesión N° 1**, se hizo un repaso sobre desigualdades de números naturales de dos o más cifras y sobre ecuaciones e inecuaciones de primer grado. Se enseñó PAEV aditivos de un paso categorías comparación 5 y comparación 6, mediante tres tipos de representaciones: Algebraica, Aritmética y Gráfica, por último se hizo una evaluación, se esperaba:

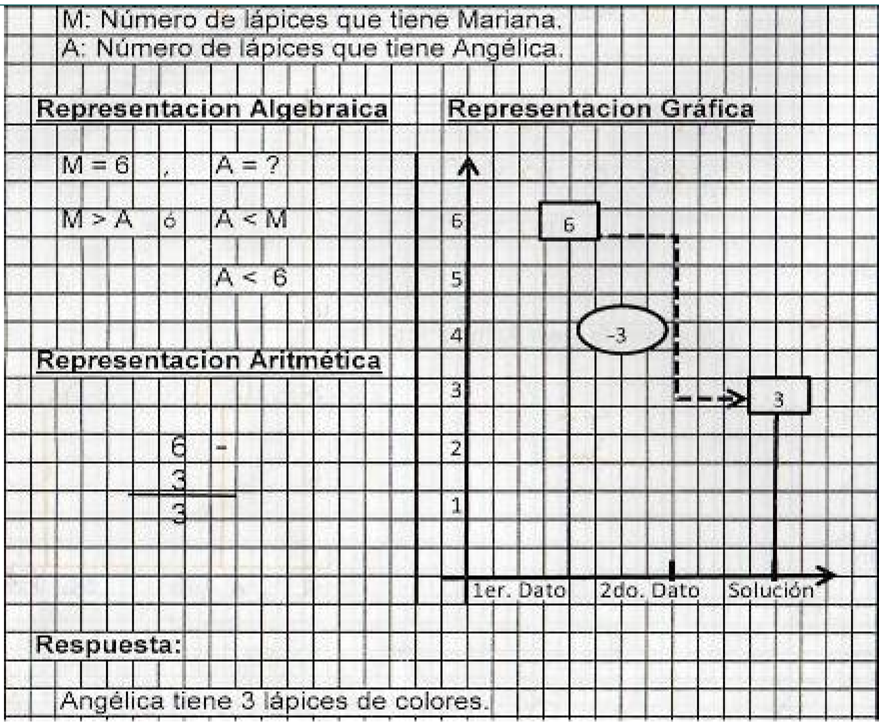
- Que los estudiantes reconozcan y asignen una letra que represente la cantidad comparada, que se encuentra en la primera oración del problema y la cantidad a hallar que es la cantidad de referencia (la incógnita) en forma verbal y luego numérica para la letra que se conozca su valor.

- Que puedan hacer la representación algebraica cambiando el sistema semiótico de registro verbal a registro algebraico, estableciendo las desigualdades entre las letras asignadas, (la cantidad comparada y la cantidad de referencia), luego que hagan el tratamiento correspondiente a la inecuación, reemplazando el valor numérico de la cantidad comparada, para que tengan una idea del rango de valores que puede tomar la variable cantidad de referencia que aún es una incógnita.

- Teniendo idea del rango de valores de la variable cantidad de referencia, que hagan la representación gráfica (conversión del sistema semiótico de registro algebraico y registro verbal a registro gráfico) mediante la construcción de ejes coordenados, la gráfica correspondiente al primer dato (que es la cantidad comparada), el reconocimiento y gráfica del segundo dato (que es la cantidad diferencia), identificando que operación (suma o resta) van a realizar para hallar la cantidad de referencia y por último graficarla como solución del problema.

- Que hagan la representación aritmética, es decir la conversión del sistema semiótico de registro grafico a registro numérico, confirmando la respuesta a la pregunta del problema encontrada en la representación gráfica.

Ejemplo: Mariana tiene 6 lapiceros de colores. Mariana tiene 3 lápices de colores más que Angélica. ¿Cuántos lápices de colores tiene Angélica?
Solución:



En la **Sesión N° 2**, se hizo un repaso sobre comparación y establecimiento de equivalencias entre números naturales mediante la adición y sustracción. Se enseñó PAEV aditivos de un paso categorías igualación 3 e igualación 4, mediante tres tipos de representaciones: Algebraica, Aritmética y Gráfica, por último se hizo una evaluación, se esperaba:

- Que los estudiantes identifiquen la cantidad de referencia que se encuentra en la primera oración del problema, la cantidad de diferencia que se encuentra en la segunda oración del problema y la cantidad a hallar que es la cantidad comparada (la incógnita), también asignen letras que las representan (menos a la cantidad de diferencia), en forma verbal y luego numérica para la letra asignada que se conoce su valor.

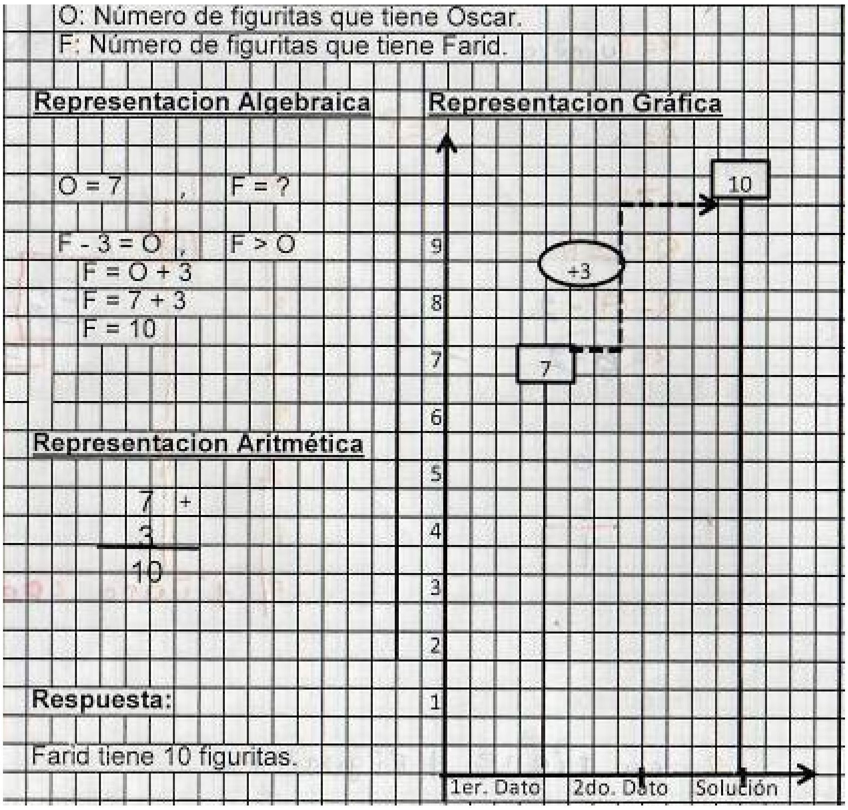
- Que puedan hacer la representación algebraica cambiando el sistema semiótico de registro verbal a registro algebraico, estableciendo correctamente la ecuación donde está la igualdad de la cantidad comparada con respecto a la letra asignada de la cantidad de referencia más la cantidad de diferencia, continuando con el tratamiento de la misma, hallando la cantidad comparada que es la incógnita del problema.

- Luego que hagan la representación gráfica mediante la construcción de ejes coordenado (conversión del sistema semiótico de registro algebraico a registro gráfico), la gráfica correspondiente al primer dato que es la cantidad de referencia, la gráfica del segundo dato que es la cantidad diferencia, y gráfica de la cantidad comparada que es la solución del problema.

- Que hagan la representación aritmética, es decir la conversión del sistema semiótico de registro grafico a registro numérico, confirmando la respuesta a la pregunta del problema encontrada en la representación gráfica y algebraica.

Ejemplo: Oscar tiene 7 figuritas. Si Farid regala 3 figuritas, tendrá tantas como Oscar. ¿Cuántas figuritas tiene Farid?

Solución:



En la **Sesión N° 3**, se propuso hacer entre los estudiantes cuatro grupos y a cada grupo se les entregó cuatro cartillas, en cada cartilla se encuentra el enunciado verbal de las preguntas planteadas en la sesión didáctica 1 y 2. También se les entregó cuatro papelógrafos donde están las representaciones de cada uno de los enunciados, se esperaba:

- Que los estudiantes, a partir de la representación algebraica, gráfica o aritmética que están en los papelógrafos, puedan reconocer la representación verbal; es decir los enunciados que les corresponde ubicados en las cartillas de colores.

3.3 Análisis A Posteriori

El reporte se emitirá por cada sesión didáctica con imágenes representativas de las producciones de los estudiantes antes mencionados, tales como Luis, Marcel, Camila, Rubí y Joan.

3.3.1 Resultados de evaluación de la Sesión N° 1

A continuación presentamos la siguiente tabla con los resultados generales obtenidos de la primera sesión (Tabla 2).

CUESTIONARIO, PAEV Categoria Semántica:		
Respuestas	Comparar 5 Pregunta N° 1	Comparar 6 Pregunta N° 2
Correctas	17 61%	9 32%
Incorrectas	6 21%	12 43%
En blanco	5 18%	7 25%

Tabla 2

Específicamente en la pregunta número uno que corresponde a PAEV aditivo de un paso categoría comparar 5, el 61% de los estudiantes lograron transitar por lo menos en dos representaciones diferentes, pudieron expresar en forma aritmética, algebraica y gráfica el enunciado verbal, es decir, que identificaron la operación a ejecutar y encontraron la cantidad de referencia.

Análisis por cada representación: El 89% de los estudiantes asignaron letras que representan la cantidad comparada, que se encuentra en la primera oración del problema y la cantidad a hallar que es la cantidad de referencia. El 79% de los estudiantes pudieron hacer la representación algebraica cambiando el sistema semiótico de registro verbal a registro algebraico, establecieron las desigualdades entre las letras asignadas a la cantidad comparada y la cantidad de referencia. El 61% hicieron la representación gráfica mediante la construcción de ejes coordenados, graficaron el valor correspondiente al primer dato (la cantidad comparada), la gráfica del segundo dato (la cantidad diferencia) y la gráfica de la solución del problema (la cantidad de referencia). Además, también hicieron la representación aritmética. (Tabla 3)

	Comparar 5			
Respuesta	Asignación de letras	Representación Algebraica	Representación Gráfica	Representación Aritmética
Correctas	25 89%	22 79%	17 61%	17 61%
Incorrectas	2 7%	5 18%	6 21%	6 21%
En blanco	1 4%	1 4%	5 18%	5 18%

Tabla 3

En la pregunta número dos, que corresponde a PAEV aditivo de un paso categoría comparar 6, solo el 32% de los estudiantes lograron transitar por lo menos en dos representaciones diferentes.

Análisis por cada representación: El 86% de los estudiantes asignaron las letras que representan la cantidad comparada y la cantidad de referencia. Pero en este caso sólo 46% de ellos pudieron hacer el cambio del sistema semiótico de registro verbal a registro algebraico, quedando un 54% de estudiantes que no establecieron las desigualdades entre la cantidad comparada y la cantidad de referencia. Sólo el 32% hicieron la conversión del sistema semiótico de registro algebraico a registro gráfico mediante la construcción de ejes coordenados, graficando: el valor correspondiente al primer dato, el segundo dato y la solución del problema. Y de ellos el 29% lograron hacer la conversión del sistema semiótico de registro grafico a registro numérico o representación aritmética. (Tabla 4)

Respuesta	Comparar 6			
	Asignación de letras	Representación Algebraica	Representación Gráfica	Representación Aritmética
Correctas	24 86%	13 46%	9 32%	8 29%
Incorrectas	1 4%	10 36%	11 39%	13 46%
En blanco	3 11%	5 18%	8 29%	7 25%

Tabla 4

En seguida presentamos el caso de los estudiantes: Marcel (Imagen 8 - 9) y Camila (Imagen 10 - 11), que son los casos más resaltantes.

1. Bryan tiene 9 canicas. Bryan tiene 4 canicas más que Cesar. ¿Cuántas canicas tiene Cesar?

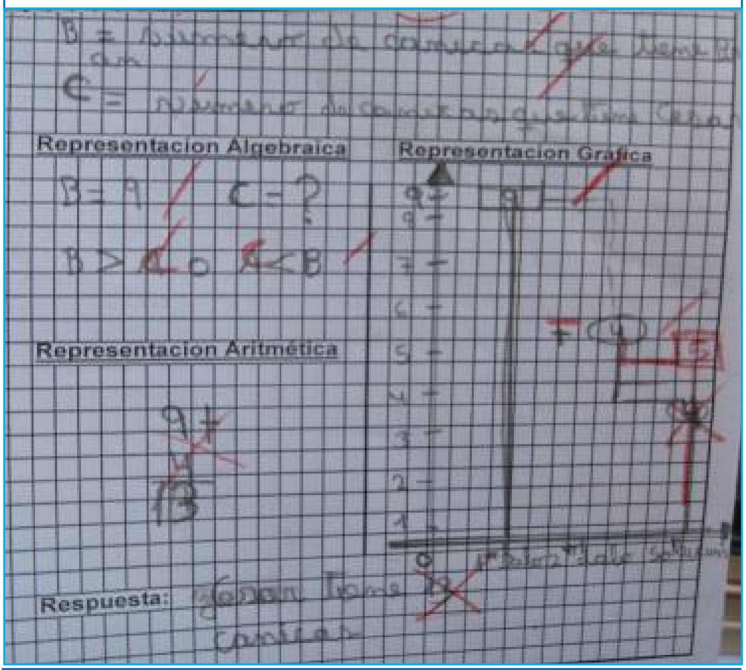


Imagen 8

Recordemos que en la evaluación de conocimientos previos, el estudiante Marcel no representó correctamente los dos primeros problemas (Imagen 2) y después de la sesión didáctica N°1 tampoco logró hacerlo. Como podemos observar en la imagen 8, el estudiante para dar respuesta a la pregunta, en la representación tanto aritmética como gráfica, en vez de restar las cantidades dadas en el enunciado del problema, las suma. Lo mismo pasó con el estudiante Joan.

En la imagen 9 podemos apreciar que el estudiante Marcel para hallar respuesta a la pregunta, en vez de sumar, resta. En la entrevista hecha a los estudiantes Joan, y Marcel, ambos expresaron tener dificultades en la representación algebraica, al relacionar las palabras “menos que “ y “más que” con los signos “< ” y “ > ”. En el caso de los estudiantes: Luis, Rubí y Camila, no tuvieron dificultad alguna para representar correctamente los problemas propuestos.

2. Víctor tiene 9 canicas. Víctor tiene 3 canicas menos que David. ¿Cuántas canicas tiene David?

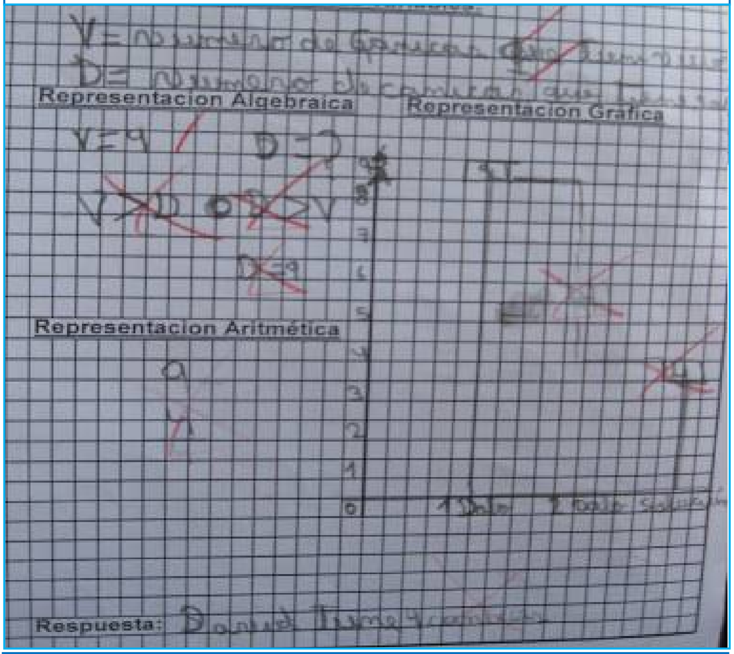


Imagen 9

El caso de la estudiante Camila nos llamó la atención, ya que en la evaluación previa ella no hizo representación alguna y las cuatro respuestas dadas por la estudiante eran incorrectas (Imagen 3). En la imagen 10 e imagen 11, observamos que la estudiante para dar respuesta a la pregunta, identifica y asigna correctamente las cantidades dadas en el enunciado mediante letras y luego transita por cada representación correctamente.

1. Bryan tiene 9 canicas. Bryan tiene 4 canicas más que Cesar. ¿Cuántas canicas tiene Cesar?

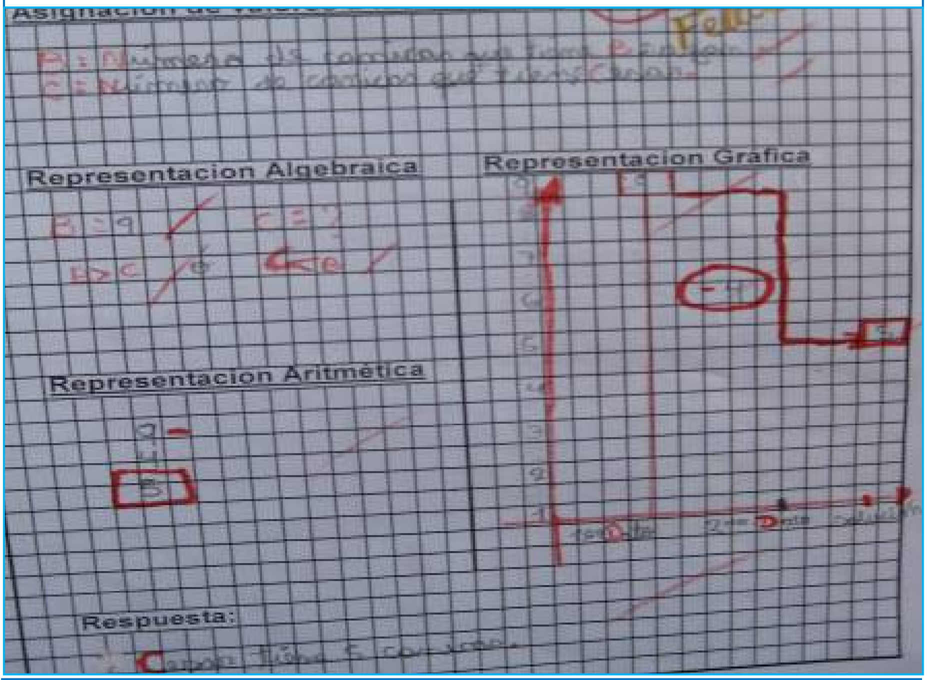


Imagen 10

2. Víctor tiene 9 canicas. Víctor tiene 3 canicas menos que David. ¿Cuántas canicas tiene David?

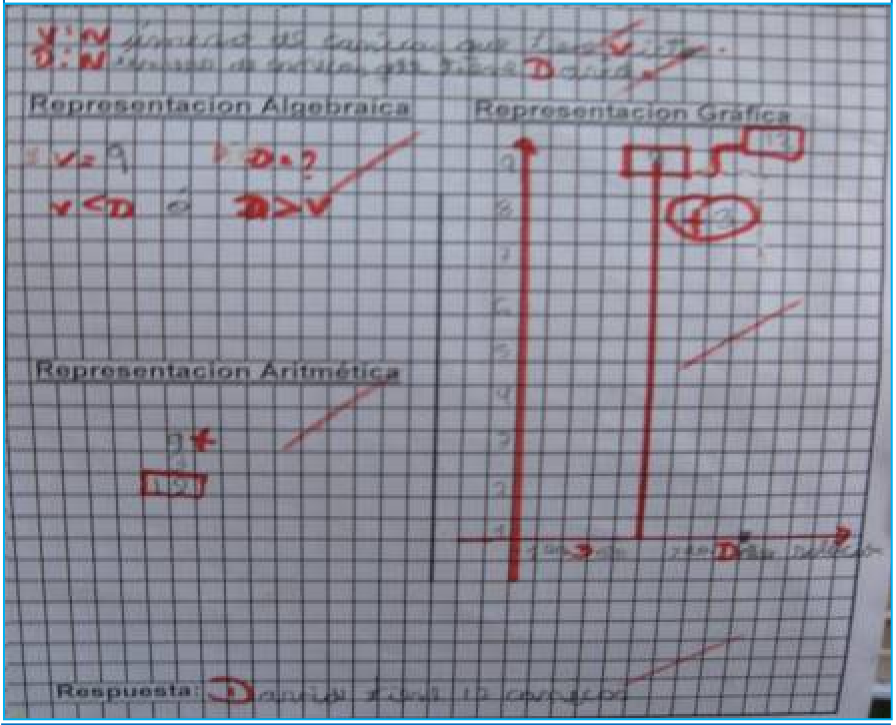


Imagen 11

3.3.2 Resultados de evaluación de la Sesión N° 2

A continuación presentamos la siguiente tabla con los resultados generales obtenidos de la segunda sesión (Tabla 5).

CUESTIONARIO, PAEV Categoria Semántica:		
Respuestas	Igualar 4 Pregunta N° 3	Igualar 3 Pregunta N° 4
Correctas	26 93%	25 89%
Incorrectas	2 7%	2 7%
En blanco	0 0%	1 4%

Tabla 5

En la pregunta número tres, que pertenece a PAEV aditivo de un paso categoría igualar 4, el 93% de los estudiantes lograron transitar por lo menos en dos representaciones diferentes.

Análisis por cada representación: en este caso el 96% de los estudiantes asignaron las letras que representan la cantidad de referencia, que se encuentra como dato en la primera oración del problema y la cantidad comparada que es la incógnita del problema. Luego el 93% de ellos pudieron hacer el cambio del sistema semiótico de registro verbal a registro algebraico, estableciendo la igualdad de la cantidad comparada con respecto a la variable de la cantidad de referencia más la cantidad de diferencia, continuando con el tratamiento de la ecuación encontrada y hallando la cantidad comparada que es la solución al problema. También hicieron la conversión del sistema semiótico de registro algebraico a registro gráfico mediante la construcción de ejes coordenados, graficando: el valor correspondiente al primer dato, el segundo dato y la solución. Para la representación aritmética solo el 89% hicieron la conversión del sistema semiótico de registro grafico a registro numérico. (Tabla 6)

Respuesta	Igualar 4			
	Asignación de letras	Representación Algebraica	Representación Gráfica	Representación Aritmética
Correctas	27 96%	26 93%	27 96%	25 89%
Incorrectas	1 4%	0 0%	1 4%	3 11%
En blanco	0 0%	2 7%	0 0%	0 0%

Tabla 6

En la pregunta número cuatro, que pertenece a PAEV aditivo de un paso categoría igualar 3, el 89% de los estudiantes lograron transitar por lo menos en dos representaciones diferentes, pudieron expresar en forma aritmética y gráfica el enunciado verbal, también lo lograron en forma algebraica en un 86%.

Análisis por cada representación: en este caso al igual que el caso anterior el 96% de los estudiantes asignaron las letras que representan la cantidad de referencia, y la cantidad comparada. Luego el 86% de ellos pudieron hacer el cambio del sistema semiótico de registro verbal a registro algebraico, hallando la cantidad comparada. A pesar que algunos estudiantes no encontraron la solución pedida del problema en la representación algebraica, el 96% de los estudiantes hicieron la conversión del sistema semiótico de registro verbal a registro gráfico mediante la construcción de ejes coordenados, haciendo las gráficas correspondientes. Y de la representación aritmética el 93% de los estudiantes lo desarrollaron correctamente. (Tabla 7)

Respuesta	Igualar 3			
	Asignación de letras	Representación Algebraica	Representación Gráfica	Representación Aritmética
Correctas	27 96%	24 86%	25 89%	26 93%
Incorrectas	1 4%	2 7%	2 7%	1 4%
En blanco	0 0%	2 7%	1 4%	1 4%

Tabla 7

A continuación se presentan uno de los casos más frecuentes que se describieron en el análisis, el caso de la estudiante Rubí. (Imagen 12)

3. María tiene 6 peluches. Si Laura regala 4 peluches, tendrá tantos como María. ¿Cuántos peluches tiene Laura?

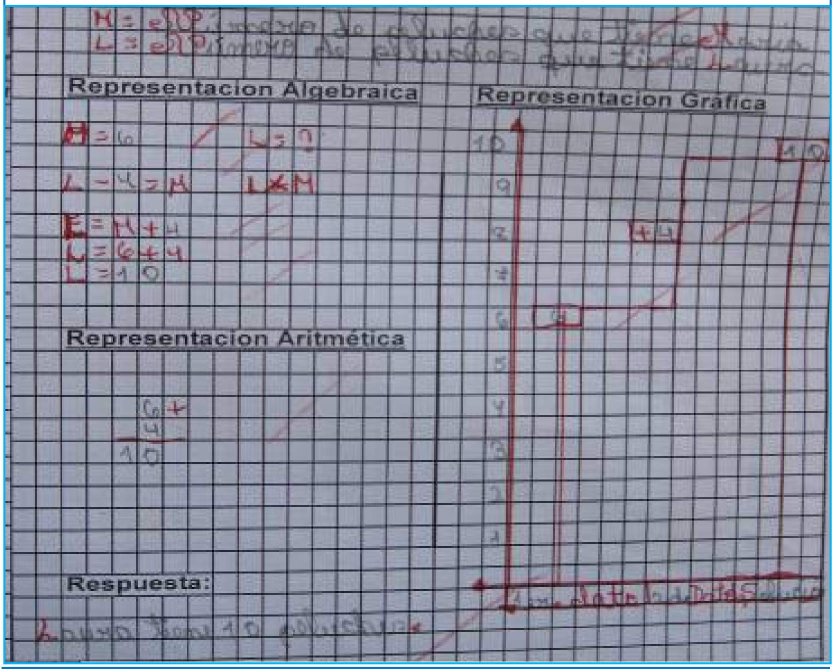


Imagen 12

Tengamos en cuenta que en la evaluación de conocimientos previos, en los casos de los estudiantes Luis, Marcel, Camila, Rubí y Joan, solo el estudiante Joan representó correctamente los problemas 3 y 4 (Imagen 6). Después de la sesión didáctica N° 2, el que presentó pequeñas dificultades en la representación algebraica fue el estudiante Marcel. (Imagen 13 - 14).

3. María tiene 6 peluches. Si Laura regala 4 peluches, tendrá tantos como María. ¿Cuántos peluches tiene Laura?

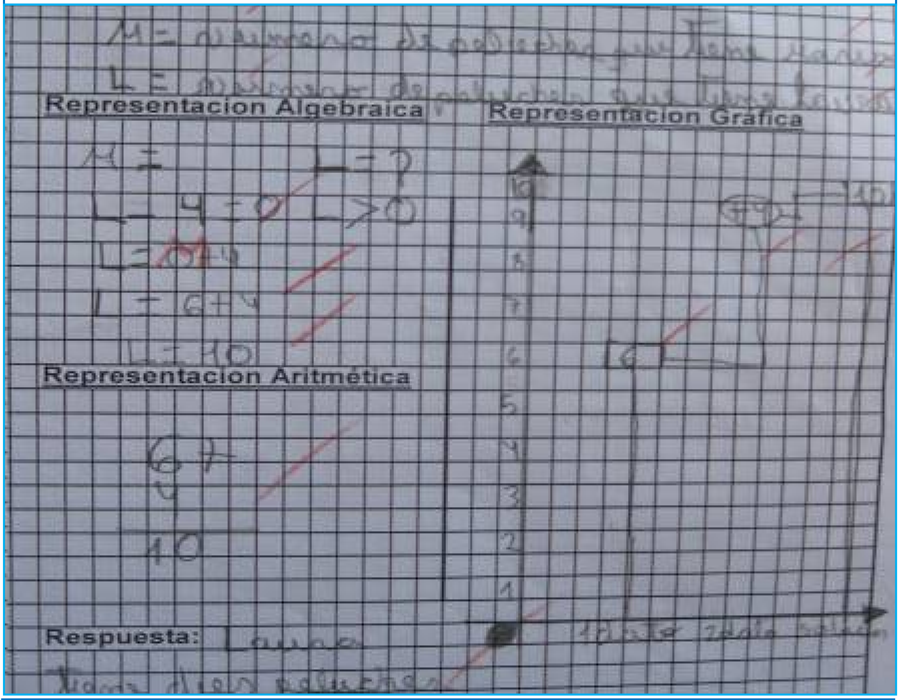


Imagen 13

4. Ana tiene 6 figuritas. Si Rosa gana 2 figuritas, tendrá tantas como Ana. ¿Cuántos peluches tiene Rosa?

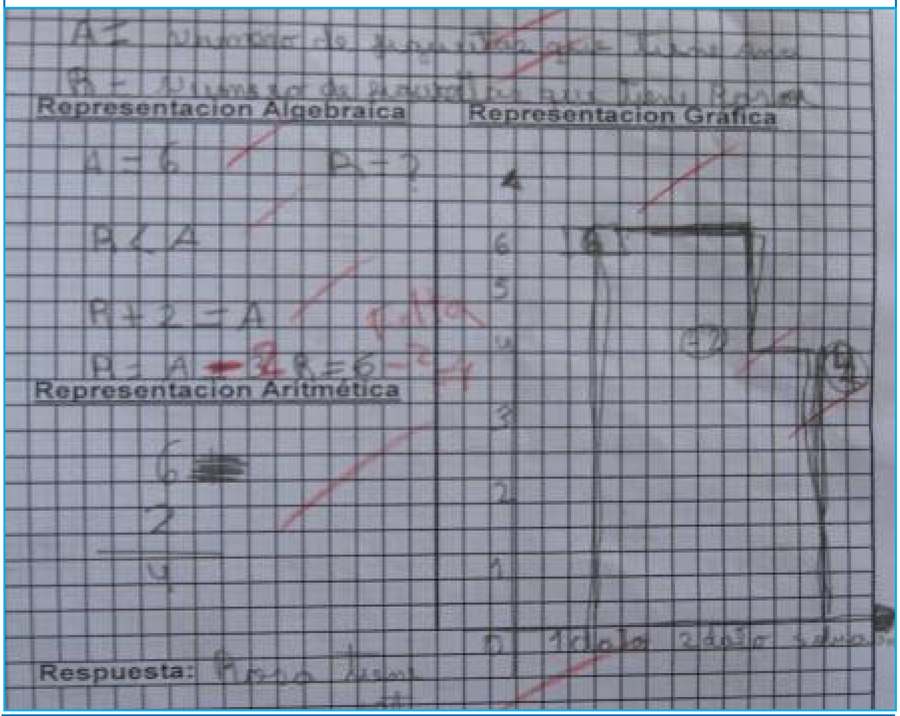


Imagen 14

4. Conclusiones

A pesar que hubo un porcentaje bastante considerable de estudiantes de 4° grado de primaria que no lograron resolver el problema de tipo PAEV aditivo de un paso categoría comparar 6, podemos decir que los estudiantes han mostrado que son capaces de transitar y coordinar varias representaciones logrando aprehender el concepto PAEV aditivo de un paso específicamente en la categoría igualar 3 y 4, que es una de las competencias que exige el currículo de educación peruana a los estudiantes de este grado o nivel educativo.

Los resultados revelan que los estudiantes son capaces de coordinar los registros algebraicos a partir de un registro verbal, y los registros gráficos a partir de un registro verbal y algebraico, en este caso en particular de los PAEV, la mayoría de los estudiantes sostienen que para ellos fue de gran ayuda el registro algebraico en la conversión de registro verbal a registro gráfico, ya que necesitaban el rango de valores de la cantidad a hallar para poder hacer los ejes coordenados y entender con claridad la operación a ejecutar (suma o resta), para hallar la solución y graficarla.

La complejidad en la representación algebraica específicamente en el tratamiento para PAEV aditivo de un paso en las categorías comparar 5 y 6, se debió a la falta de ejercitación en el tema de desigualdades por parte de los estudiantes, en el análisis podemos observar que la dificultad del estudiante estaba relacionada exactamente con la palabra “menos que” y también con la falta de capacitación en resolver inecuaciones. Es cierto que no se exige aún resolver este tipo de problema en el currículo de educación peruana para este grado o nivel, pero en el futuro con un poco más de capacitación en el tema de desigualdades e inecuaciones será resuelto.

Con respecto a PAEV aditivo de un paso en las categorías igualar 3 y 4 también hubo un grado de complejidad en el tratamiento de la representación algebraica, mucho menor y más sencilla de resolver mediante un repaso sobre el tema de ecuaciones en la sesión propuesta. Al final los estudiantes pudieron hacer la conversión y el tratamiento.

En el caso de la representación gráfica muchos de los estudiantes la entendieron fácilmente porque anteriormente ya habían recibido clases sobre cómo hacer ejes coordenados. La conversión de registro algebraico y verbal al registro gráfico les fue de gran ayuda para entender si la operación a realizar era de suma o de resta para resolver el problema, sin embargo notamos que para transitar de registro gráfico a verbal no les era muy sencillo como lo hicieron de registro algebraico a verbal, sólo el 53% de estudiantes lo logró.

En general observamos que las dificultades que presentan los estudiantes es, por que no se promueve la conversión entre registros de representación y se privilegia la enseñanza tradicional (representación aritmética), claro que ello implica tener bien capacitados a los niños en temas de desigualdades, inecuaciones, ecuaciones, construcción de ejes coordenados y gráficas.

Bibliografía

Apeim - Asociación Peruana de Investigación de Mercados (2014). *NIVELES SOCIOECONÓMICOS 2014.* Recuperado el 21 de Agosto de 2016, de http://www.apeim.com.pe/wp-content/themes/apeim/docs/nse/APEIM-NSE-2014.pdf

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1991). *La operación de sumar: el caso de los problemas verbales. SUMA,* 8, 35 - 39.

Castro, E., Rico, L. y Gil, F. (1992). *Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. Enseñanza de las Ciencias,* 10(3), 243 - 253.

Consejo Nacional de Seguridad Ciudadana (2014). *FICHA INFORMATIVA SOBRE SEGURIDAD CIUDADANA DEL DISTRITO DE EL AGUSTINO.* Recuperado el 21 de Agosto de 2016, de http://conasec.mininter.gob.pe/obnasec/pdfs/Nro.01-DistritoelAgustino.pdf

Damm, W. (1991). *Compréhension d'un énoncé de problème: le choix de la donnée de référence. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 4, 197 - 225.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Editorial del Instituto de Educación y Pedagogía de Universidad del Valle, Colombia.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. *LA GACETA DE LA RSME*, 9(1), 143 -168.

Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica – IPEBA (2013). *Mapas de progreso del aprendizaje Matemática: Números y operaciones.* Recuperado el 16 de Octubre de 2014, de http://www.ipeba.gob.pe/estandares/MapasProgresoMatematicaNumerosOperaciones.pdf

García, J (2005). *La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales, sus características y el uso que se hace de ellas en el aula*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada. España.

Ministerio de Educación del Perú (2009). *Diseño Curricular Nacional de EBR*. Recuperado el 13 de Octubre de 2014, de http://ebr.minedu.gob.pe/pdfs/dcn2009final.pdf

Martínez, J. (1995). *Importancia de los PAEV de una etapa. Indicaciones para su tratamiento en el aula*. *Tavira*, 12, 169 - 183.

Municipalidad de El Agustino (2016). *Historia del Distrito*. Recuperado el 21 de Agosto de 2016, de http://mdea.gob.pe/index.php/el-agustino/historia-del-distrito

Nesher, P. (1980). *The Stereotyped Nature of School Word Problems. For the Learning of Mathematics*, 1, 41- 48.

Rodríguez, P. (1991). *Análisis de los procesos cognitivos que conducen a la adquisición y desarrollo de la propiedad conmutativa* (Tesis doctoral). Universidad Complutense, Madrid. España.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Editorial Síntesis, Madrid. España.

Vergnaud, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels, Recherches en didactique des mathématiques,* 10, 133 -170.

Gladys Masiell Diestra Díaz: Licenciada en Investigación Operativa por La Universidad Nacional Mayor de San Marcos (2007). Egresada de La Maestría en Educación Matemática de La Universidad Nacional Mayor de San Marcos (2013). Ha trabajado y apoyado como profesora de matemáticas de primaria en instituciones privadas y estatales. Se desarrolló el presente artículo como proyecto de tesis para optar el grado de Magister en Educación

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 162-175

O desporto orientação como cenário de investigação para o ensino da matemática

Adriana Hartmann, Regina da Silva Pina Neves, Ricardo Ruviaro

Fecha de recepción: 05/05/2015
Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	La Orientación es una actividad deportiva que trabaja con el razonamiento y desafíos, haciendo la integración de varias asignaturas escolares, especialmente las matemáticas y la geografía. Aquí se presenta un estudio desarrollado con estudiantes de séptimo año de la escuela primaria (12 años) de una escuela pública federal (DF, Brasil), con el propósito de comprender la orientación como un escenario de investigación (Skovsmose, 2000) para el trabajo de los estudiantes y la enseñanza de las matemáticas. Fueron realizadas actividades de diagnóstico, de intervención y la evaluación. Los resultados muestran la importancia que tiene la introducción de la Orientación para la creación y desarrollo del aprendizaje para los estudiantes y para el profesor. **Palabras clave**: Orientación, escenario de investigación, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Abstract	Orienteering is a sport that works with reasoning and challenges by integrating several school subjects, especially mathematics and geography. Thus, we report a study conducted with students from 7th year of elementary school (12 years) of a federal public school (DF , Brazil), with the aim of understand the orientation as a research setting (Skovsmose , 2000) for the development of the student and the mathematics teaching. Activities of diagnostic, intervention and later evaluation were carried out. The results show the orientation as a key in and for the creation of learning for both the students and the teacher. **Keywords**: Orientation, Research Setting, Mathematics Teaching and Learning.
Resumo	A orientação é uma atividade esportiva que trabalha com raciocínio e desafios, integrando várias disciplinas escolares, em especial, Matemática e geografia. Assim, relatamos um estudo desenvolvido junto a estudantes do 7º Ano do Ensino Fundamental (12 anos) de um colégio público federal (DF, Brasil), com o objetivo de compreender a orientação enquanto cenário de investigação (Skovsmose, 2000) para o trabalho discente e docente em matemática. Foram realizadas atividades de diagnóstico, de intervenção e, posteriormente, de avaliação. Os resultados apontam a Orientação como fundamental na e para a constituição de aprendizagens tanto para os alunos quanto para o professor. **Palavras-chave:** Orientação, Cenário de Investigação, Ensino e aprendizagem em matemática.

1. Introdução

Temos acompanhado, nos dias atuais, inúmeros questionamentos de professores e alunos acerca da aula de Matemática e seus rituais. De um lado, os alunos argumentam que esta acontece, em sua maioria, em salas de aula no modelo clássico, com carteiras enfileiradas; que o trabalho discente é quase sempre individual, com pouco espaço para o diálogo entre colegas, ou entre alunos e professores; eles relatam, também, que o professor ainda se restringe a usar o quadro, ousando pouco em termos de materiais e novos espaços para a prática docente, dentre muitas outras. Por outro lado, os professores descrevem os alunos como: pouco motivados, com baixa competência conceitual relacionada aos conteúdos dos anos anteriores, com baixa capacidade para resolver problemas, indisciplinados, dentre outras.

Estudos específicos sobre ensino e aprendizagem têm explicitado tudo isso por meio de dois grandes entraves. Inicialmente, persistem as inúmeras situações de fracasso vividas por alunos da Educação Básica e Ensino Superior, expressas no acesso diferenciado ao saber matemático, na dificuldade de aprendizagem (Carvalho, 2003; Ramos, 2004; Angelucci *et al*, 2004), nos casos de repetência (Gonçalez, 2000; Ponte, 2004; Almeida, 2006), na evasão escolar (Ferreira, 1998; Cristovão, 2007), no baixo rendimento dos alunos nas avaliações nacionais em larga escala, como a Prova Brasil, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (Enade), entre outros (Dalto, 2007; Perego & Buriasco, 2008; Curi, 2010); e internacionais, como o Programme for International Student Assessment (Pisa) (OECD, 2005; Celeste, 2008). De outro lado, ampliam-se os dilemas relacionados à formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática[1] diante da falta de perspectivas para a carreira docente, de baixos salários, de más condições de trabalho, da redução da carga horária dos cursos de formação, do baixo número de formadores de professores aptos a atuarem na licenciatura, tendo em vista a clássica dicotomia teoria e prática, imposta pelos paradigmas da racionalidade técnica e prática, entre muitos outros (Nóvoa, 1995; Fiorentini *et al*, 2002; Fiorentini, 2003; Curi, 2004).

Assim, é diante desse contexto que buscamos possibilidades para (re)criar a aula de Matemática e, consequentemente, o fazer discente e docente de modo a ampliar a conceituação Matemática junto aos alunos. Nesse bojo, temos observado discussões teórico-metodológicas em torno dos "cenários para investigação", entendidos como:

> Aquele que convida os alunos a formular questões e a procurar explicações. O convite é simbolizado por seus "Sim, o que acontece se...?". Dessa forma os alunos se envolvem no processo de exploração e explicação. O "Por que isto?" do professor representa um desafio, e os "Sim, por que isto...?" dos alunos indica que eles estão encarando o desafio e estão em busca de explicações. Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário de investigação passa a constituir um novo ambiente

1 Entendemos, neste projeto, a expressão "Professores que ensinam Matemática" assim como usado por Fiorentini (2003), em referência aos licenciados em Matemática e pedagogia.

> de aprendizagem. No cenário de investigação, os alunos são responsáveis pelo processo. (Swovsmose, 2000, p.21)

Para Swovsmose (2000) o cenário de investigação se contrapõe ao paradigma do exercício, uma vez que a aprendizagem deverá ocorrer em um ambiente que ofereça recursos para a investigação, em que os alunos possam descobrir várias respostas para o mesmo problema e, por meio da socialização e de trabalhos em grupo, concluir o que realmente está correto.

Tal proposta nos provoca a pensar sobre as diversas formas que o ensino de Matemática pode ser conduzido na escola. Defendemos que o aluno não pode ficar preso em modelos previamente ensinados pelos livros ou, até mesmo, pelos professores. Deve sim, buscar investigar, através do diálogo e da troca de experiências.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN's, (1998) já preconizavam tal defesa ao destacar a importância de a Matemática ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação. D'Ambrósio (1990, citado por Gonçalves, 2012, p.5), por sua vez, defende a Matemática como um instrumento útil para a vida, pois é parte integrante de nossas raízes culturais e porque ajuda não só a pensar com clareza, como também a raciocinar melhor; além de ser importante devido a sua universalidade.

De modo geral, todas essas defesas comungam o entendimento de que a Matemática é algo que pode transformar o modo de viver, o modo como enxergamos o mundo e nos relacionamos com ele. A depender do modo como utilizamos a matemática, seus conceitos e suas aplicações, podemos nos tornar seres mais críticos e desenvolver nossas habilidades de raciocínio lógico, de decisão, de criação de métodos para resolver situações-problema.

Os alunos precisam saber para que vão utilizar determinados conteúdos em suas vidas ou em seu futuro. De acordo com D'Ambrósio (2012, p.30) “O grande desafio é desenvolver um programa apresentando a ciência de hoje relacionada a problemas de hoje e ao interesse dos alunos.”.

Em busca de cenários, assim como descreve Swovsmose (2000), buscamos no Desporto Orientação outros espaços para a prática docente e discente. Como sabemos, o Desporto Orientação é uma modalidade esportiva que usa a própria natureza como campo de jogo. É um esporte individual que tem como objetivo percorrer uma determinada distância em terreno variado e desconhecido, obrigando o atleta a passar por determinados pontos nesse terreno, no menor tempo possível. O praticante é auxiliado por um mapa e por uma bússola, distribuídos no início da prova. O tempo gasto para percorrer o trajeto depende da capacidade física dos orientistas, da habilidade de ler o mapa e da rapidez de se orientarem utilizando técnicas estabelecidas, assim como, das suas capacidades de adaptação ao terreno e da escolha correta dos itinerários.

As características do terreno são bem diversificadas: areia, relevos mais ou menos acidentados, florestas mais ou menos densas, parques e, até mesmo, áreas urbanas. Os percursos também são variados e o grau de dificuldade varia de acordo com a categoria dos atletas, desde iniciante até elite, e conforme sua idade, geralmente entre 10 e 80 anos.

Na partida, cada praticante recebe um mapa onde estão marcados pequenos círculos que correspondem a pontos de controle, que são de passagem obrigatórias. Esses pontos são materializados no terreno por balizas prismáticas nas cores laranja e branca. Em cada um deles existe um picotador ou uma base eletrônica no qual o atleta irá perfurar o seu cartão de controle ou inserir seu chipe (no caso de controle eletrônico), comprovando sua passagem pelo ponto. O concorrente é livre para escolher o seu próprio itinerário, porém deve obrigatoriamente visitar os pontos de controle pela ordem correta que se encontra expressa no mapa.

Em relação à Matemática, o esporte está associado a vários tópicos do conteúdo programático da Educação Básica, tais como: distâncias, para saber quanto andar de um ponto de controle até outro; escala, para saber quantos centímetros no mapa correspondem à realidade; ângulos, para determinar a direção correta a seguir; dentre outros. Todavia, não só a Matemática é contemplada com esse esporte, muitas outras áreas são relacionadas e isso faz do esporte uma oportunidade ímpar para se discutir ciências sociais, naturais e exatas de modo integral.

Assim, propusemos aliar a Matemática ao desporto Orientação com o objetivo de compreender o impacto desse cenário na organização do trabalho pedagógico do professor e na conceituação Matemática dos alunos. Para tanto, foram realizadas atividades de cunho diagnóstico, atividades interventivas e, posteriormente, atividades de avaliação.

2. Método

O estudo foi realizado em uma Escola Pública de Brasília, Distrito Federal. Participaram desse estudo 30 alunos do 7º Ano (12 anos) do Ensino Fundamental, selecionados dentre um universo de 74 voluntários. A escolha desses participantes foi feita por meio de um sorteio, ou seja, de uma amostragem probabilística Mattar (2012). Foi desenvolvido no 3º Bimestre letivo do ano de 2013, no período de 26 de agosto a 02 de outubro. Ocorreu durante as aulas de Educação Física, para que não houvesse prejuízo nos conteúdos previstos nem no planejamento dos professores de Matemática para a sala de aula. Por esse motivo, as atividades eram desenvolvidas duas vezes por semana, segundas e quartas-feiras, com duração de 90 minutos cada. Ressaltamos que, os conteúdos abordados no projeto, são previstos para serem trabalhados no 4º bimestre do ano letivo, ou seja, durante o andamento do projeto, os alunos ainda não tinham estudado os conteúdos nas aulas de Matemática.

3. O Desporto Orientação como cenário de investigação docente e discente

O estudo foi desenvolvido por meio de 14 atividades, dentre as quais duas foram avaliações, uma foi aula teórica para iniciação no desporto Orientação, uma foi pesquisa de opinião e 10 atividades práticas de natureza interventiva.

A primeira avaliação foi aplicada no início do estudo com o intuito de fazer um levantamento dos conhecimentos prévios dos participantes, por meio de um questionário, contendo questões objetivas e discursivas, abrangendo os quatro objetos do conhecimento da Matemática envolvidos no processo: ângulos, regra de três simples, escala e média aritmética. Após as atividades práticas, foi aplicada uma segunda avaliação, semelhante à primeira, com o objetivo de, por meio de uma comparação com a anterior, verificar o nível de conhecimento adquirido ao longo do tempo. A pesquisa de opinião teve por objetivo verificar a satisfação e aceitação do projeto pelos participantes. As atividades práticas interventivas ocorreram no período entre as duas avaliações e foram divididas em 10 fases:

1ª) A primeira atividade teve por objetivo desenvolver o conceito de média aritmética por meio de passos duplos. Na Orientação, o passo duplo consiste em saber quantas vezes, em uma distância de 100 metros, o seu pé direito (ou esquerdo) toca o chão. Os alunos percorreram quatro vezes essa distância, contando a quantidade de passos duplos, registrando os resultados em uma tabela. Para determinar um padrão de passos, foi necessário realizar a média aritmética das quatro contagens. O desafio, ao término dessa atividade, foi determinar a distância entre dois pontos pré-estabelecidos.

2ª) Essa atividade consistiu no cálculo de várias distâncias utilizando o passo duplo. Os seguintes questionamentos foram feitos para que os alunos pudessem descobrir o que deveria ser feito para calcular determinada distância: Sabendo que 100 metros correspondem a x passos duplos (cada aluno deveria completar com o seu), quantos passos duplos você deverá dar para percorrer 200 metros? E se fosse 50 metros? Dessa forma, os alunos verificaram a utilização da Regra de Três Simples e puderam concluir a tarefa.

3ª) O objetivo dessa atividade foi desenvolver o conceito de escala. Para isso, utilizando o mapa do colégio, os alunos foram instigados a pensar se existia alguma relação entre o desenho e a realidade. Após um tempo de discussões, os alunos, em duplas, receberam dois problemas para que tentassem resolver utilizando as ideias construídas. Para finalizar, foi feita uma socialização de resultados e solidificado o conceito de escala.

4ª) Para o desenvolvimento dessa atividade, os alunos receberam um mapa branco de Orientação (aquele que contém apenas o percurso, sem os detalhes do terreno), uma régua e um lápis. A ordem era medir a distância no mapa com a régua. Em seguida, utilizando a escala, determinar a distância real e, finalmente, determinar quantos passos-duplos devem ser dados para percorrer essa distância no terreno. Para finalizar, o percurso estava demarcado, por prismas, no terreno. Dessa forma, os próprios alunos puderam corrigir, no terreno, sua atividade.

5ª) O objetivo dessa atividade era de que os alunos se familiarizassem com os pontos cardeais, colaterais e subcolaterais, integrando o trabalho com a disciplina de Geografia. Para isso, os alunos, orientados pela professora, reproduziram a Rosa dos Ventos no chão, localizando os pontos cardeais, através de pontos referenciais do próprio Colégio. Na atividade prática, divididos em duplas, os alunos receberam duas sequências de distâncias e direções a serem seguidas. Cada elemento da dupla partia para um lado e deveria mostrar para a professora o ponto de chegada. O fato interessante e desconhecido pelos alunos é que, se corretamente percorrido, ambos chegariam ao mesmo destino final, pois as direções e distâncias percorridas eram opostas. Tal fato foi comprovado pelos próprios alunos quando, posteriormente, a professora pediu para que desenhassem o percurso percorrido, retomando com isso o conceito de Escala.

6ª) Nessa atividade buscou-se descobrir a medida de ângulos, por meio do uso de um transferidor gigante construído no chão. Os alunos foram dispostos ao redor do transferidor e, com o auxílio de barbantes, vários ângulos entre eles foram formados e medidos. Na sequência, como atividade, os alunos foram divididos em duplas, onde cada dupla recebeu uma folha com três percursos de Orientação e o comando foi descobrir a medida dos ângulos entre os pontos de controle.

7ª) O objetivo dessa atividade era de que os alunos tivessem o primeiro contato com a bússola. Inicialmente foi feita uma introdução através do histórico do uso da bússola, aliando essa prática com a disciplina de História. Na sequência, cada aluno recebeu uma bússola para manuseio. O objetivo era descobrir a semelhança entre ela e o transferidor utilizado na aula passada, ou seja, verificar que ambos apresentam 360º. Para finalizar a atividade, a professora ensinou o azimute, que é o ângulo formado pelo norte magnético, apontado pela bússola, e o objeto de referência. Para a prática, a professora ditava os azimutes e os alunos deveriam virar o corpo e apontar o local correto, aplicando o conceito de ângulos e suas medidas.

8ª) Uma vez que os alunos já sabiam designar direções e medir distâncias, torna-se possível realizar deslocamentos orientados. Dessa forma, essa atividade foi feita como um jogo “caça ao tesouro”, onde o mapa para encontrar o tesouro era guiado por vários azimutes e distâncias a serem percorridas. Ganhava quem chegava mais próximo do “tesouro”, ou seja, quem conseguisse percorrer as distâncias e os azimutes com a maior precisão possível.

9ª) Após o término da atividade anterior, com a realização de uma sequência de deslocamentos orientados, os alunos já estavam aptos a realizarem uma pista de Orientação, tendo a oportunidade de colocar em prática todos os conhecimentos adquiridos ao longo das atividades. Dessa forma foi planejado um pequeno percurso pelas dependências do Colégio. Para promover maior discussão dos assuntos, estimular a interação e dirimir as dúvidas, foi permitido que os alunos fizessem o percurso em duplas.

10ª) Para finalizar essa série de atividades e promover a integração dos alunos, foi feita uma competição de Orientação, nos moldes dos campeonatos. O percurso foi individual, utilizando grande área do Colégio, e dividido nas categorias masculino e feminino. Para o encerramento e incentivo à prática desse esporte, os vencedores de cada categoria receberam bússolas como prêmio.

Várias estratégias foram utilizadas para avaliar o estudo. Como já citado anteriormente, foram realizadas duas avaliações, diagnóstica e complementar, com o objetivo de compreender a conceituação matemática dos participantes, tendo como parâmetro o início e o fim do estudo. Também foi feita, pela professora, a observação de cada atividade realizada pelos alunos, com o objetivo de verificar a evolução da aprendizagem, bem como a motivação e interesse dos alunos. Finalmente, por meio de uma pesquisa de opinião, foi feito o levantamento do grau de satisfação dos participantes com relação ao projeto.

A Avaliação Diagnóstica foi realizada por intermédio de um questionário composto por 21 questões. As perguntas foram divididas por conteúdos matemáticos com cerca de cinco questões por assunto. Os questionamentos iniciais objetivaram verificar a opinião do aluno sobre conhecimento do assunto e resolução de problemas. Os demais questionamentos tinham por objetivo medir o conhecimento acerca daquele assunto específico. De forma análoga, com a finalidade de verificar a evolução ou não dos conteúdos, foi aplicada a Avaliação Complementar. Para efeitos de comparação, cabe ressaltar que essa avaliação foi semelhante à primeira, abordando os mesmos conteúdos, com mesmo nível de dificuldade, porém com questões distintas.

Acerca do assunto Ângulos, foi verificado que, na Avaliação Diagnóstica, a maioria sabe o que é ângulo, porém menos da metade sabe medi-los usando o transferidor. Destaca-se, desta maneira, a enorme diferença entre saber o que é e saber medir. Já na Avaliação Complementar, a totalidade julga saber o que é ângulo e uma pequena parcela diz não saber usar o transferidor. Nas questões objetivas e discursivas envolvendo tal assunto, verifica-se um aumento de 41% para 65% na quantidade de acertos, comparando-se a Diagnóstica com a Complementar. Ainda há uma diminuição de 36% para 11% nos alunos que não souberam responder.

Já quanto ao assunto Escalas, verifica-se um fato interessante na Diagnóstica: metade sabe o que é Escala e a outra metade não sabe. Já quando o assunto é resolução de problemas, uma parcela bem menor julga saber resolver. Esse fato demonstra o quanto a resolução de problemas precisa ser trabalhada e desmistificada com os alunos. Já na Avaliação Complementar, verifica-se que a totalidade dos alunos acredita saber o que é Escala, bem como resolver problemas envolvendo esse assunto. Nas questões objetivas e discursivas, mais uma vez, houve um aumento no número de acertos, de 16% para 70%, comparando-se a Diagnóstica com a Complementar.

No que tange ao assunto Regra de Três, na Avaliação Diagnóstica a maioria admite não saber o que é Regra de Três Simples, nem resolver problemas. Já na Complementar, ocorre um fato interessante: todos os alunos responderam que sabiam tanto o que é, quanto resolver problemas, o que demonstra a confiança que adquiriram no conteúdo. Nas questões objetivas e discursivas verifica-se um aumento no número de acertos, de 46% para 74%.

Já quando o assunto foi Média Aritmética, na Avaliação Diagnóstica a maioria não sabia o que era Média Aritmética, tampouco resolver problemas. Já na Complementar, a realidade inverte-se e a maioria diz saber o que é, bem como resolver problemas. Nas questões objetivas e discursivas obteve-se um aumento no número de acertos de 25% para 84%, bem como uma diminuição no número de alunos que não sabia responder, de 70% para 8%.

Verifica-se, portanto, pela análise e comparação das avaliações Diagnóstica e Complementar que, em todos os conteúdos, o número de alunos que acertaram as questões aumentou consideravelmente, demonstrando evolução positiva nos conteúdos. Observa-se também uma diminuição nos participantes que não sabiam responder. Esse fato destaca a confiança que os alunos adquiriram nos conteúdos, ao longo do tempo.

Além das avaliações objetivas supracitadas, houve por bem registrar as impressões acerca de alguns aspectos relevantes dentro de cada atividade realizada:

1ª) Os alunos realizaram a aferição do passo duplo com bastante entusiasmo e afinco. No momento do cálculo da Média Aritmética, observou-se um fato que não foi previsto quando da elaboração da atividade: os alunos estavam com dificuldades na divisão com números decimais, conteúdo já visto em séries anteriores. Esse fato levou a professora a fazer uma breve retomada do conteúdo. Quando foi lançado o desafio de calcular uma determinada distância, duas duplas acertaram exatamente o resultado, e a dupla que ficou mais distante errou por 11 metros. Ressalta-se que, por ser a primeira atividade, esse erro pode ser considerado pequeno.

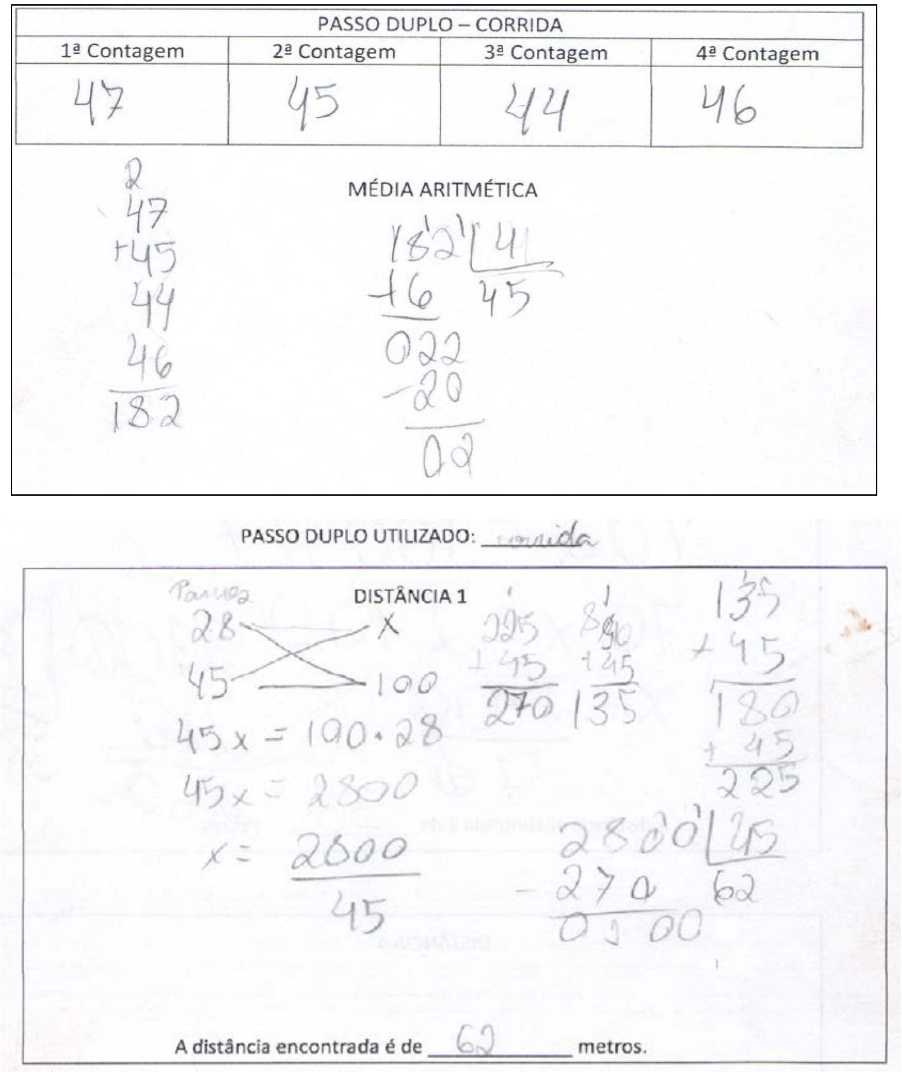


Fig. 1. Notação produzida por alunos durante a primeira fase.
Fonte: relatório da pesquisa

2ª) Já no início da atividade, constatou-se a motivação dos alunos. “Desta vez eu vou acertar, professora! Até estudei divisão com vírgula em casa. O que precisamos medir?” – foi a fala de um deles. Após uma breve retomada da atividade passada, foram propostas várias distâncias a serem medidas. Fato notório e importante foi que todos conseguiram encontrar os resultados dentro da margem de erro considerada aceitável.

3ª) Quando do início da atividade, com as perguntas da professora sobre o mapa, os alunos mostraram-se bastante agitados. Todos queriam responder ao mesmo tempo. No momento de responder às perguntas sobre o conteúdo, percebeu-se que as dificuldades encontradas nas atividades passadas estavam diminuindo, porém, nova dificuldade apareceu: a conversão de unidades de medidas, conteúdo que também fora trabalhado em série anterior. Após uma breve retomada, os alunos conseguiram concluir a tarefa, desenvolvendo o conceito de Escala.

1. Em um mapa com escala 1:5000, dois objetos distam 4 cm entre si. Determine a distância real entre eles.

$$\begin{matrix} 1 & 5000 \\ 4 & x \end{matrix}$$

$$x = 5000 \cdot 4$$

$$\boxed{x = 20000}$$

$$5000 = 50$$
$$20000 = 50 \times 4$$
$$20000 = 200$$

200 m

Fig. 1. Notação produzida por alunos durante a terceira fase.
Fonte: relatório da pesquisa.

4ª) Ao chegar no local da atividade, os alunos ficaram animados quando viram um percurso montado. “Professora, hoje nós vamos correr isso tudo?” – perguntou uma aluna. Juntaram-se em duplas e iniciaram a atividade. Observou-se que, o atendimento individualizado aos alunos é extremamente importante, pois a cada linha que preenchiam, queriam conferir se estava certo. O fato mais interessante foi o momento de conferir se o número encontrado conferia com a realidade: “Professora, dá certo mesmo!”

74	Distância no mapa	Distância real	Número de passos duplos
Partida – Ponto 1	6 cm	18 m	13
Ponto 1 – Ponto 2	10 cm	30 m	20
Ponto 2 – Ponto 3	7 cm	21 m	15
Ponto 3 – Ponto 4	4 cm	12 m	8
Ponto 4 – Ponto 5	5 cm	20 m	14
Ponto 5 – Ponto 6	9 cm	27 m	19
Ponto 6 – Chegada	3 cm	9 m	6

Fig. 2. Notação produzida por alunos durante a quarta fase.
Fonte: relatório da pesquisa

5ª) Os alunos foram bastante participativos no momento da discussão dos pontos cardeais. Já no percurso, quando a ordem foi de que cada elemento da dupla deveria ir para um lado, houve a pergunta: “Então eu terei que fazer sozinho?” O que nos auxiliou a perceber a importância do trabalho em duplas, pois um transmite confiança ao outro. O fato mais interessante da atividade ocorreu no momento do desenho. Todos desenharam corretamente e, à medida que terminavam, percebia-se a indignação de que o local de chegada era o mesmo do ponto de partida. “Professora, por que a senhora não avisou logo?” E, dessa forma, eles mesmos concluíram qual foi a dupla vencedora.

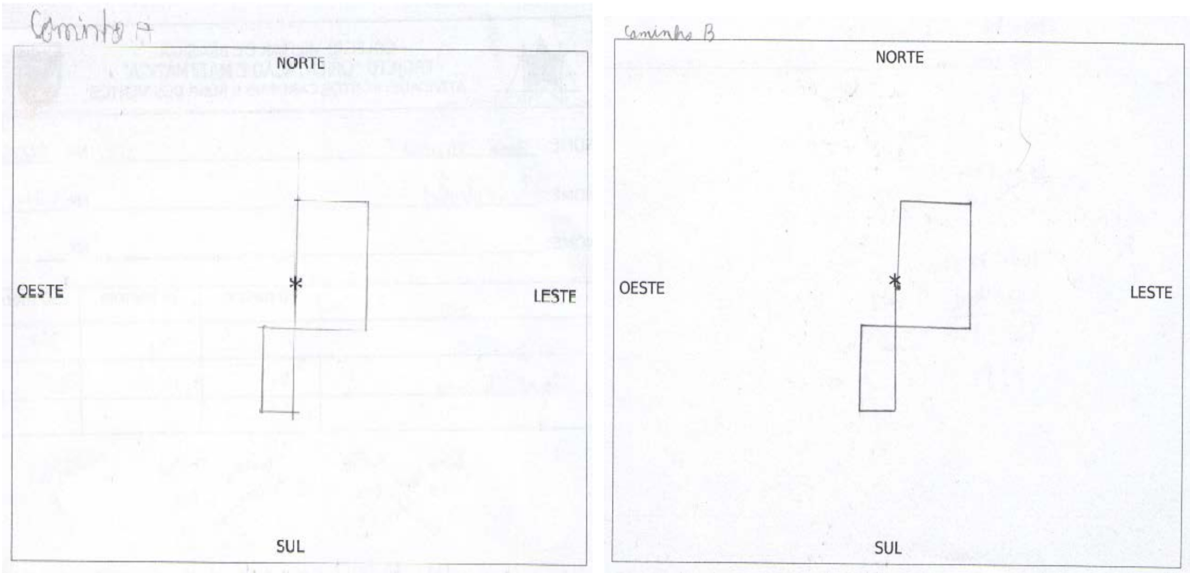


Fig. 3. Notação produzida por alunos durante a quinta fase.
Fonte: relatório da pesquisa.

6ª) A primeira pergunta que os alunos fizeram ao ver o transferidor no chão foi: “Professora, pra que serve isso?” No momento da necessidade de voluntários para servirem de referência para as medições, a maioria queria participar. No momento de realizar o exercício no papel, utilizando o transferidor, novamente o atendimento individualizado mostrou-se importante.

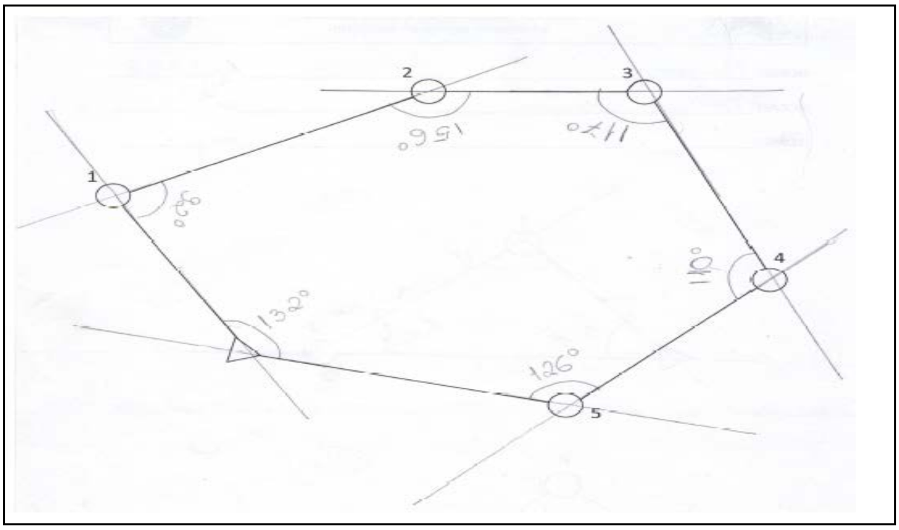


Fig. 5. Notação produzida por alunos durante a sexta fase.
Fonte: relatório da pesquisa.

7ª) Os alunos estavam ansiosos para manusear a bússola. Foram muito participativos nas discussões sobre semelhanças entre a bússola e o transferidor e, na última tarefa, na qual deveriam virar o corpo para o azimute indicado, a maioria foi bem.

8ª) Após a explicação da atividade, os alunos ficaram motivados: "Professora, existe um tesouro mesmo?" As primeiras duplas tentavam fazer rapidamente, porém foram orientadas de que o objetivo, neste momento, não era a velocidade e sim a precisão. Nenhuma dupla acertou exatamente, mas todas chegaram muito próximas do resultado correto.

9ª) A atividade foi muito interessante, os alunos ficaram bastante motivados com o esporte e todos conseguiram concluir com êxito o percurso, tendo, inclusive, solicitado para que fosse feito mais vezes.

10ª) A atividade ocorreu sem nenhuma alteração e todos conseguiram, mais uma vez, completar o percurso, demonstrando que a aprendizagem foi efetiva. Pediram para que o projeto não terminasse: "Professora, está muito legal, não podemos continuar?" E, assim, encerraram-se as atividades de campo.

Com a realização de todas as atividades práticas, observou-se a grande motivação dos alunos em participar e o afinco com que faziam os cálculos. Havia, também, um interesse em retirar as dúvidas que surgiam, para poder concluir as tarefas de forma correta.

O último critério avaliativo foi uma pesquisa de opinião, respondida pelos alunos do projeto. Cabe ressaltar que esse estudo foi aplicado um mês após o término da última atividade, pois o objetivo era aguardar que os alunos estudassem o conteúdo visto no projeto em sala de aula, no currículo escolar ordinário do 7º Ano, para depois responderem, com maior propriedade, a esse estudo. Indagou-se os seguintes tópicos: conhecimento do esporte, impacto do projeto no aprendizado dos conteúdos, facilidade no entendimento dos novos assuntos, interesse em continuar e divulgar o projeto e opinião de satisfação do projeto.

Quanto ao conhecimento do esporte, pouco mais da metade dos participantes sabia o que era Orientação, mas apenas 30% já havia praticado o esporte. Quanto ao impacto no aprendizado, verificou-se que todos os alunos julgam muito interessante trabalhar com a Matemática em um ambiente fora da sala de aula. Verificou-se, também, que a maioria acredita que o projeto auxiliou na aprendizagem em sala de aula.

Em outra questão, percebeu-se que a maioria sentiu-se "muito motivada" a participar das atividades, alguns "pouco motivados" e uma pequena parcela diz "não ter se sentido motivada". Na sequência, mais da metade dos participantes dizem ter desenvolvido um maior interesse em aprender a matéria pelo fato de estarem utilizando-a em um esporte. Na sequência, as próximas perguntas tinham por objetivo verificar quais conteúdos os alunos aprenderam com maior facilidade ou dificuldade. Aqui, um fato interessante: as opiniões são muito divididas, o que prova que não existe um conteúdo que seja mais difícil. Fato que corrobora a importância do ensino individualizado. Quando o tópico sobre a continuidade da prática do esporte, a maioria pretende continuar praticando Orientação e todos, mesmo os que não pretendem continuar, indicariam o projeto para um colega.

Finalmente, no espaço destinado a observações, seguem alguns resultados: "Eu achei legal porque é uma forma diferente de aprender Matemática"; "Aprendi Matemática e foi legal"; "Apresentou um meio mais interessante de aprender

Matemática"; "Aulas de Matemática mais interessantes e um esporte legal"; "Eu realmente achei muito legal"; "Aprendizagem de Matemática de maneira mais divertida"; "Todos deveriam poder participar desse projeto".

4. Considerações finais

O mundo de hoje está completamente interligado. Nesse contexto, buscar novos métodos educacionais é imprescindível para acompanhar a evolução do ensino e para superar os desafios que esta nova realidade nos apresenta como docentes.

Partindo desta premissa, o desporto Orientação constitui uma ferramenta eficaz para o ensino da Matemática, pois cria um cenário de investigação que permite ao aluno pesquisar, investigar, descobrir e evoluir, não só intelectualmente, mas como ser humano. Alia-se a isso o desenvolvimento das relações interpessoais em ambiente diferente da sala de aula e também o senso de proteção do meio ambiente, pois as atividades são desenvolvidas por meio de um contato direto com a natureza.

A utilização do desporto Orientação para o ensino da Matemática permite, além de criar aulas diferenciadas, uma interação maior entre professor e aluno e destes com o meio ambiente, fato que torna possível a construção de conceitos matemáticos de uma maneira informal, fazendo do educando um sujeito ativo no processo de ensino-aprendizagem. Além disso, proporciona um maior entendimento de como os conteúdos estudados serão aplicados no cotidiano, dando sentido amplo ao conhecimento.

A Orientação desenvolve no atleta a autoconfiança, a determinação e a coragem para interpretar o mapa, analisar as informações, escolher a melhor rota a seguir. Ao encontrar o prisma branco e laranja dos pontos de controle, transforma a tensão de procurar no prazer de encontrar. Da mesma forma deve ocorrer com a Matemática. Após o exaustivo trabalho de entender e achar o caminho, calcular, transformando o que era dúvida em certeza com a solução precisa do problema.

Através da realização deste trabalho, verificou-se uma grande aceitação e satisfação dos alunos com atividades diferenciadas, tipicamente extraclasse. O aluno de hoje quer aprender, é sedento pelo conhecimento, mas não tem paciência de assistir aulas monótonas, sem atrativos. Quer ser autônomo e ter capacidade de agir por si só, contando, obviamente, com a orientação do professor, que também tem papel fundamental como facilitador do processo.

Esses fatos foram comprovados não só pelo desempenho e motivação dos alunos no desenvolvimento das atividades, mas também nas avaliações diagnóstica e complementar. Estas evidenciaram o grande ganho de conhecimento por parte dos alunos.

Finalmente, corroborou com a ideia, a pesquisa de opinião, que quantificou o entusiasmo dos alunos em aprender Matemática de uma forma diferenciada, em ambiente diverso da sala de aula. Também mostrou o aumento do interesse em aprender a disciplina ao constatar sua real aplicação no cotidiano.

Experiências como essa, sem dúvida, se mostram desafiadoras, tanto para os professores, quanto para os alunos. Desse modo, podemos concluir que experiências inovadoras, quando bem preparadas e aplicadas com oportunidade e riqueza de propósito, podem desencadear novas e eficazes metodologias, consolidando uma proposta de aprendizado cada vez mais significativo.

Bibliografia

Brasil, Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.* Brasília: MEC / SEF.

Confederação Brasileira de Orientação. (2014). *O que é orientação.* Acessado em 04 março de 2014, em: http://www.cbo.org.br/site/orientação

D'ambrósio, U. (2012). *Educação Matemática: da teoria à prática***.** 23. ed. Campinas, SP: Papirus.

Dornelles, J. O. F. (2013). *Histórico do Esporte Orientação nos Currículos Escolares***.** Acessado em 24 abril de 2013, em: www.cbo.org.br

Dornelles, J. O. F. (2013). *Projeto Escola Natureza.* Acessado em 24 de abril de 2013, em: www.cbo.org.br

Douglas, W., & Zara, C. (2008). *Como usar o cérebro para passar em provas e concursos.* Rio de Janeiro: Elsevier.

Fazenda, I. (1993). *A Interdisciplinaridade: um projeto em parceria.* São Paulo: Loyola.

Fino, C. N. (2001). Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): três implicações pedagógicas. *Revista Portuguesa de Educação*, *14*(2), p.273-291.

Freire, P. (2011). *Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa***.** 43. ed. São Paulo: Paz e Terra.

Gonçalves, H. A. (2011). *O conceito de letramento matemático: algumas aproximações.* Acessado em: 15 de março de 2014, em: http://educar.sec.ba.gov.br/todospelaescola/wp – content/uploads/2011/06/Letramento_ matematico.pdf. .

Hengemühle, A. (2004). *Gestão de Ensino e Práticas Pedagógicas.* 2. ed. Rio de Janeiro: Vozes.

Jacobi, P. (2003, mar.) Educação Ambiental, Cidadania e Sustentabilidade. São Paulo: *Cadernos de Pesquisa*, *118*, p. 189-205.

Lorenzato, S. (2008). *Para aprender Matemática.* 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados.

Mattar, F. N. (2012). *Pesquisa de Marketing.* 5. ed. Rio de Janeiro: Elsevier.

Morin, E. (2011). *Os Sete Saberes Necessários à Educação do Futuro***.** São Paulo: Cortez.

Oliveira, S. A. (2007, jun.). O lúdico como motivação nas aulas de Matemática. *Jornal Mundo Jovem*, *377*, p.5, Porto Alegre.

Selbach, S. (Org.). (2010). *Matemática e Didática.* Petrópolis, RJ: Vozes.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação**.** *Bolema*, *14*, p. 66-91.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society – The Development os Higher Psychological Processes.* Cambridge MA: Harvard University Press.

Adriana Hartmann. Graduada em Matemática – Licenciatura Plena pela Universidade Federal de Santa Maria (2004) e especialista em Aplicações Complementares às Ciências Militares pela Escola de Administração do Exército (2009). Universidade de Brasília (UnB). Colégio Militar de Porto Alegre (CMPA), Porto Alegre, Brasil. E-mail: tenadriana@yahoo.com.br

Endereço para correspondência: Departamento de Matemática. Universidade de Brasília. Campus Universitário Darcy Ribeiro. Brasília, DF. CEP: 70910-900, Brasil.

Regina da Silva Pina Neves. Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG), mestre em Educação e doutora em Psicologia pela Universidade de Brasília (UnB). É professora Adjunta no Departamento de Matemática da UnB, coordenadora da Comissão de Extensão e Diretora da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional/ DF. Departamento de Matemática/Universidade de Brasília, Brasil. E-mail: reginapina@gmail.com

Endereço para correspondência: Departamento de Matemática. Universidade de Brasília. Campus Universitário Darcy Ribeiro. Brasília, DF. CEP: 70910-900, Brasil.

Ricardo Ruviaro. Graduado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (2004), mestrado em Matemática pela Universidade de Brasília (2007) na área de Geometria e Doutorado em Matemática pela Universidade de Brasília (2011) na área de Análise. Seu estudo é focalizado principalmente na área de Análise com ênfase em Equações Diferenciais Parciais. É professor no Departamento de Matemática/Universidade de Brasília, Brasil. E-mail: ricardoruviaro@gmail.com

Endereço para correspondência: Departamento de Matemática. Universidade de Brasília. Campus Universitário Darcy Ribeiro. Brasília, DF. CEP: 70910-900, Brasil.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 176-191

La comprensión matemática de las funciones en interdisciplinariedad con la Física a través de problemas de la vida práctica

Lissette Rodríguez Rivero, Yudelkys Ponce Valdés, Andel Pérez González

Fecha de recepción: 14/03/2015
Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	La presente investigación tiene el objetivo de aplicar una propuesta de ejercicios interdisciplinarios que potencien la comprensión matemática de las funciones, pasando por un proceso de transferencia entre representaciones y con un vínculo estrecho con la vida práctica. Para su realización se emplearon métodos de investigación como: el inductivo – deductivo, el analítico – sintético y la observación pedagógica, que favorecieron la fundamentación y conformación de la propuesta; así como la elaboración de los ejercicios. Después de aplicada la misma se comprobó un mayor desempeño por parte de los estudiantes en la manipulación y comunicación de resultados relacionados con el concepto de función. **Palabras clave:** Funciones, interdisciplinariedad, Física.
Abstract	The objective of this investigation is to apply a proposal of interdisciplinary exercises that potentiate the mathematical comprehension of functions, through a process of transference between representations and with a close link to practical life. The methods used were the inductive-deductive, the analytic-synthetic and the pedagogical observation, which favored the foundation and conformation of the proposal, and the elaboration of the exercises. After having applied this proposal, a better performance on the part of the students in the manipulation and communication of results related with the concept of function was proven. **Keywords**: Functions, interdisciplinary, Physics.
Resumo	A investigação presente tem o objetivo de aplicar uma proposta de exercícios interdisciplinares que possibilitem a compreensão matemática das funções, passando por um processo de transferência entre representações e com um laço estreito com a vida prática. Para a realização destes, se utilizaram métodos de investigação como: o indutivo - dedutivo, o analítico - sintético e a observação pedagógica que favoreceram a fundamentação e conformação da proposta; como também a elaboração dos exercícios. Depois de ter aplicado a mesma, se verificou um maior desempenho por parte dos estudantes na manipulação e comunicação de resultados relacionados com o conceito de função. **Palavras-chave**:Função, interdisciplinaridade, Física.

1. Introducción

En la escuela cubana la línea directriz "Patrones y funciones" es la que rige el aprendizaje de las funciones desde la secundaria hasta el nivel Medio Superior, y es posteriormente en los estudios universitarios que disciplinas como Análisis Matemático, continúan profundizando esos estudios.

Estos contenidos han tenido dificultades históricamente. Durante la experiencia en las prácticas laborales, primero en la secundaria y posteriormente en la enseñanza media superior, se detectó un trabajo deficitario con respecto a los mismos. En la enseñanza media superior se corrobora que las funciones son las que más dificultades presentan en el momento de comprobar el aprendizaje de la Matemática y los estudiantes las identifican como un obstáculo difícil de vencer.

Aunque las causas que ocasionan estos problemas son diversas y tienen carácter multifactorial, en el centro de ellas y de forma relevante se manifiesta, a criterio de los autores, la falta de un accionar didáctico que conduzca de forma planificada y coherente hacia el desarrollo de la comprensión matemática, como objetivo básico en el proceso de enseñanza - aprendizaje de este contenido.

Según Batanero "la comprensión es un proceso continuo y creciente por el cual el alumno construye y relaciona progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto" (Batanero, 2005, p.257). Otros autores expresan: "diremos que un alumno comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas, es decir, la capacidad se traduce en la realización de prácticas que son evaluables públicamente" (Contreras y Ordóñez, 2006, p.69). El criterio que se asume es en función de que se tenga en cuenta ambas direcciones, porque desde la comprensión, el alumno debe ser capaz de integrar los elementos que forman un concepto, de seccionarlos para su análisis y de relacionar el concepto con situaciones intra - matemáticas, con otras ciencias y con la vida práctica. Dentro del proceso de comprensión de un determinado objeto matemático el estudiante debe ser capaz de manipularlo en toda su extensión. Y de qué manera se puede valorar el nivel de comprensión que posee un estudiante si no es por medio de prácticas evaluables.

Las prácticas que se presentan, a través de la ejecución por el estudiante de ejercicios didácticos, van dirigidas en dos sentidos que se combinan en uno: el trabajo con las diferentes representaciones del concepto de función y la vinculación de las funciones a la Física como modelos de fenómenos que dicha ciencia estudia. Se elaboraron ejercicios para el tratamiento interdisciplinario de este contenido y a través de dichos ejercicios se transfiere entre representaciones hasta llegar al modelo físico, o en sentido contrario. Los mismos son realizados a lápiz y papel, con la ayuda de software matemático (en este caso Derive 5.1) o mediante una combinación de ambos medios.

El objetivo del presente trabajo es aplicar una propuesta de ejercicios interdisciplinarios que potencien la comprensión matemática de los contenidos relacionados con las funciones.

Para su realización se seleccionaron los nueve estudiantes que cursan el segundo año de la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática-Física en la

Universidad de Sancti Spíritus "José Martí Pérez". De ellos 3 son hembras y 6 varones; sus edades están comprendidas entre los 18 y 20 años. Antes de aplicar la propuesta, según los cortes evaluativos trimestrales, cinco estaban evaluados de bien (B), tres de regular (R) y uno de mal (M).

En esta investigación se aplicaron varios métodos como:

- La observación pedagógica en función de detectar las regularidades que afectan el trabajo con funciones, así como determinar posteriormente la influencia que produjo la aplicación de las tareas con carácter interdisciplinario en el aprendizaje de estos contenidos.
- El inductivo – deductivo, que permitió focalizar las principales dificultades y carencias en el accionar didáctico del proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones, lo cual dio la idea inicial de cómo resolver este problema.
- El analítico – sintético, que propició el estudio, a partir una búsqueda bibliográfica actualizada, de temas como la interdisciplinariedad y la transferencia entre representaciones, particularmente de funciones; para posteriormente extraer fundamentos teóricos que sirvieran de base a la propuesta.

Lo novedoso de este trabajo consiste en que crea mejores condiciones para el estudio de las funciones, ofreciendo ejercicios relacionados con fenómenos de la vida práctica. Se apoya en los conocimientos que los estudiantes poseen de la Física, contribuye a la sistematización de esos contenidos y además, desarrolla habilidades de trabajo con el software matemático Derive 5.1. De esta forma se favorecen las formas de manipulación y representación de las funciones. Además, con este nuevo enfoque, los alumnos fijan mucho mejor las propiedades de las funciones y sus diferentes representaciones, y sus aplicaciones sirven de motivación y de incentivo investigativo. Asimismo, se ofrece un correcto enfoque de situaciones relacionadas con la ciencia, la tecnología y el medioambiente.

2. Principales dificultades detectadas en la comprensión del concepto de Función

El análisis del proceso de enseñanza - aprendizaje de las funciones durante varios años, las visitas frecuentes a clases, y la preparación y revisión de exámenes, han permitido confirmar las serias dificultades que históricamente se presentan en la comprensión de esta temática en la:

1. Relación entre el concepto y las representaciones de este, identificando como uno ambos términos.
2. Determinación de las propiedades de las funciones, pues:

- Presentan dificultades al determinar el dominio de la función.
- El intervalo de la imagen en ocasiones no se identifica adecuadamente.
- Presentan dificultades al calcular el cero en algunos tipos de funciones.
- No contextualizan el dominio y la imagen en los problemas de aplicación.

3. Interpretación del gráfico, pues:

- No identifican en ocasiones el intervalo donde el gráfico es positivo o negativo.
- No reconocen la representación del dominio y de la imagen como sub intervalos de los ejes coordenados.
- No identifican la monotonía como tendencia.
- No reconocen el cambio de las propiedades al cambiar algunos parámetros de las funciones.

A partir de estas dificultades detectadas, se propone un trabajo que relaciona la **transferencia entre representaciones**, como ayuda a la **comprensión matemática,** en un **trabajo interdisciplinario** que propicia al estudiante llegar a una aplicación práctica del contenido recibido en las clases de Matemática. Todo ello, materializado a partir de la aplicación de tareas que contengan un balance adecuado de este accionar didáctico, haciendo **uso de la tecnología**.

3. Definición de Función. Representación de una Función

Existen en la literatura innumerables definiciones de función: Barnett (2003); Coret (1990); List (2002); Potápov (1986); Rodríguez (1988); Sánchez (2004); Stewart (2006), punto de partida para el estudio de las funciones en diferentes niveles de enseñanza y tipos de materias dentro de los mismos. En el presente trabajo asumimos la definición de función dada por Mederos y González (2005): Sean *A* y *B* conjuntos cualesquiera, se llama función de *A* en *B*, se escribe $f : A \to B$, a una terna ordenada (*A, B, f*) formada por el conjunto *A* (dominio de la función) el conjunto *B* (codominio de la función) y un conjunto de pares ordenados *f* (grafo de la función) que cumple las propiedades siguientes:

1. Si $(x;y) \in f \Rightarrow x \in A$ y $y \in B$
2. $\forall x \in A\ \exists y \in B : (x;y) \in f$
3. Sí $(x;y_1) \in f$ y $(x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.

<u>Representación de una función:</u> Sea $f : A \to B$. Se considera representación a una terna de representaciones (α,β,γ) en la cual α es la representación del dominio, β es la representación del codominio y γ es la representación del grafo.

Una de las primeras representaciones de una función fue mediante *tablas* que ponen en relación una columna con otra(s); una(s) de valores independientes y otra de valores que son calculados a partir de los anteriores mediante una fórmula u observados con respecto a los primeros valores por una determinada relación.

Álvarez (2008, p.108) y Ministerio de Educación (2007, p.127), por ejemplo, han representado funciones mediante diagramas de *Venn*, donde a los conjuntos de partida y llegada se les ilustra con algunos elementos que pertenecen a ellos y mediante una flecha se establece la correspondencia entre ambos, indicando salida y llegada, dominio y codominio, respectivamente, con el uso de la saeta.

Otra representación muy conocida es la *analítica* o ecuación que describe a la función. En este caso tendremos una expresión que involucre mediante operaciones o relaciones matemáticas la variable independiente (frecuentemente denominada x) y la variable dependiente (denominada $y = f(x)$).

La representación cartesiana o *gráfico* de la función corresponde a la ubicación en las coordenadas cartesianas de los puntos representados por los pares ordenados que pertenecen a la función y que tienen la forma $(x;f(x))$. Esta representación constituye la principal forma de mostrar la función a los estudiantes, sobre todo con la ayuda de los asistentes matemáticos.

4. Comprensión matemática a través de la transferencia entre representaciones hasta llegar a la interdisciplinariedad

La comprensión matemática no se trata sólo de saber en qué medida el estudiante domina ciertos conocimientos o habilidades básicas de acuerdo con las exigencias del programa. Se trata de establecer qué conoce, cómo lo conoce y para qué lo utiliza; de averiguar lo que hace para resolver una tarea y por qué lo hace. En esta dirección se debe mover el pensamiento y la conducta del estudiante de una representación a otra y finalmente a la realidad objetiva.

Según Dreyfus (1991, p.39), criterio que comparten los autores: “Podemos observar, pues, que hay cuatro fases en los procesos de aprendizaje:

- Utilizar una única representación
- Utilizar paralelamente varias representaciones
- Relacionar representaciones paralelas
- Integrar las representaciones y pasar de una a otra con facilidad.”

Al aplicar un concepto a una situación dada, se recurre a las representaciones concretas que en la posición asumida por los autores son situaciones de la Física representadas en fenómenos estudiados sobre esta.

Ocurre a menudo que como los objetos matemáticos pueden ser identificados por cualquiera de sus representaciones, al principio los estudiantes son incapaces de discriminar el contenido de la representación y el objeto representado. Es decir, para ellos los objetos cambian cuando cambia la representación, entonces ¿cómo puede un estudiante aprender a reconocer un objeto matemático a través de sus posibles representaciones?

Según algunos autores, entre los que destaca Duval (2000), la respuesta está en realizar procesamientos dentro de un mismo tipo de representación y realizar conversión o transferencia entre representaciones diferentes, que en este caso llegará hasta la búsqueda de modelos físicos que sean representables por una determinada función. Aquí es donde entra a jugar su papel un enfoque interdisciplinario de la enseñanza de la ciencia, en este caso la interdisciplinariedad innata entre la Matemática y la Física.

Si el proceso de transitar por diferentes representaciones, utilizando la transferencia entre ellas, se acompaña además del uso de varios soportes (lápiz y papel o soporte digital) la comprensión se logra de una manera más completa. Los estudiantes de estos tiempos nacieron con la tecnología y con sólo ofrecerles una introducción de cómo se manipula un determinado software logran ser muy creativos en su uso. En el proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones está presente, desde sus inicios, la habilidad de transferir entre las representaciones analítica y gráfica. Esta habilidad se desarrolla inicialmente en el cuaderno y posteriormente se pasa al uso de asistentes matemáticos.

4.1. Derive 5.1, asistente matemático en el proceso de transferencia entre representaciones

Referido al uso de asistentes matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, el modelo del profesional de la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática-Física declara en sus objetivos:

“Enseñar a formular y resolver problemas (…) donde se manifiesten las relaciones ciencia-tecnología-sociedad-ambiente, utilizando contenidos de la física y la matemática, (…) y el aprovechamiento de las tecnologías de la información y las comunicaciones, que promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de la actividad mental, sentimientos, actitudes y valores acordes con los principios de nuestra sociedad” (CNC, 2015, p. 8).

Es por ello que es tarea permanente desde las disciplinas del currículo dar cumplimiento a ese objetivo, y el presente trabajo es una muestra de ello. En el caso de la propuesta se utilizó Derive 5.1 por ser un software relativamente pequeño, fácil de manipular y con el lenguaje propio de la matemática muy cercano al trabajo con funciones. Además, de cursos introductorios los estudiantes estaban familiarizados con el entorno del mismo. Por ello fue necesario solamente introducirles el trabajo con funciones a través de tutoriales comentados, elaborados en el propio asistente, que ilustran ejercicios similares a los que después ellos ejecutarían en clases.

El Derive 5.1 en algunos casos se utiliza a modo de comprobación, como por ejemplo, en la resolución de ecuaciones o en ejercicios de realizar transferencia entre representaciones a lápiz y papel en los cuadernos. En otros, se utiliza como una herramienta rápida para transferir de la representación analítica a la gráfica, cuando se presenta esta habilidad en ejercicios de aplicación, donde el objetivo a desarrollar o evaluar no es la transferencia entre representaciones.

5. Interdisciplinariedad

En este trabajo se asume el concepto de Álvarez (2001, 2004), es decir que la interdisciplinariedad se entiende como un atributo del método que permite dirigir el proceso de resolución de problemas complejos de la realidad a partir de formas de pensar y actitudes sui generis asociadas a la necesidad de comunicarse, cotejar y evaluar aportaciones, integrar datos, plantear interrogantes, determinar lo necesario de lo superfluo, buscar marcos integradores, interactuar con hechos, validar supuestos y extraer conclusiones.

Como consecuencia, la visión interdisciplinaria se vuelve un factor fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que lo enriquece con múltiples beneficios que apuntan a la formación en el saber, hacer y ser de los estudiantes.

En otras palabras, la enseñanza y la investigación interdisciplinar implican un proceso de identificación, evaluación, resolución, creación, construcción y generación. Es decir, *identificar* el problema sobre el cual trabajar, *evaluar* las suposiciones y terminología del contexto del problema, *resolver* los conflictos entre disciplinas, *crear* un campo teórico - práctico común, *construir* una nueva comprensión del problema, *generar* un modelo de esta nueva perspectiva, y, por último, ponerlo en *práctica* para ver si soluciona problemas (Newell, 2001).

La interdisciplinariedad eleva el aprendizaje significativo en los estudiantes, ya que permite abordar los conocimientos científicos de una manera más global, permitiéndole entenderlos de una manera más amplia y completa. Entre las ventajas de la aplicación del enfoque interdisciplinario en el aula se destacan:

- Considerar y valorar puntos de vistas diferentes de un mismo contenido, lo que contribuyen a la formación de valores como la colaboración, comprensión, empatía y respeto.
- Tomar consciencia de los límites conceptuales y epistemológicos de las diferentes disciplinas, alimentando el espíritu crítico y aumentando la sensibilidad ante las posiciones que de otra forma no se habrían considerado.
- Minimizar la repetición de contenidos.
- Entender el rol de la ciencia y del conocimiento científico en la solución de problemas básicos de la humanidad y la sociedad (Grisolía, 2008).

Martínez, Perera y Álvarez (2011, p.17) expresan que “Existe un consenso en destacar un conjunto de problemas que a nuestro juicio requieren tener como respuesta la interdisciplinariedad”. Entre varios problemas que se señalan al respecto se aprecian:

- Presentación del contenido por estancos, de manera fragmentada y en muchos casos descontextualizado de la realidad en que vive el alumno.
- Dificultades en el alumnado para transferir lo aprendido de un contexto a otro.

En este caso ¿qué importancia tendrá para el estudiante llegar a comprender las funciones si no tienen ningún vínculo con la realidad que le rodea?; ¿para qué sirve un conocimiento vacío?, ya sea por el desconocimiento o por la no vinculación con otras ciencias. Es la realidad representada en un problema físico la representación más cercana de función a la realidad, al mundo que rodea a ese estudiante.

6. Tratamiento al problema. Propuesta de ejercicios

La resolución de problemas, se convierte en una oportunidad para construir, generar y transferir conocimientos científicos, yendo mucho más allá de un ejercicio en el cual solo se aplican formalizaciones matemáticas (Concari y Giorgi, 2000). Así la resolución de problemas es una estrategia de enseñanza-aprendizaje, que beneficia el aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal de los estudiantes, y permite establecer un puente entre la cotidianidad y lo visto en el aula. En el mismo sentido, estimula la capacidad de crear, inventar, razonar y analizar situaciones para luego resolverlas. Por otra parte, es una estrategia globalizadora en sí misma, ya que puede ser trabajada en todas las asignaturas, y además el tópico que se plantea en cada problema puede referirse a cualquier contenido o disciplina. (Pérez y Ramírez, 2011).

Es por ello que para obtener buenos resultados, relacionados con la comprensión, al aplicar problemas que contemplen funciones los docentes deben planificar ejercicios que logren un adecuado accionar didáctico en el tratamiento de las mismas (Rodríguez, 2011). En la actualidad no se concibe un proceso de enseñanza-aprendizaje sin la presencia de las tecnologías de la información y las comunicaciones. Esto pasó de ser una novedad a ser una necesidad en la formación de un profesional a la altura de los tiempos futuros. El uso de asistentes matemáticos, Derive 5.1 en el caso de esta propuesta, no sólo contribuye a hacer atractivo el problema propuesto, motivando a los estudiantes que casi siempre se sienten atraídos por la tecnología, sino contribuye además a obtener resultados fiables y de fácil manipulación a la hora de rendir una respuesta.

Partiendo de los presupuestos teóricos analizados, sólo resta proponer un conjunto de ejercicios que abordan una posible solución al problema planteado y que han sido diseñados para mejorar la comprensión del concepto función. Se potencia la transferencia entre representaciones y el uso de las funciones como modelos matemáticos de fenómenos físicos; imprimen la necesaria interdisciplinariedad que ilustra una de las posibles aplicaciones de las funciones en general; y contribuye a elevar el dominio que los estudiantes poseen en el uso de las tecnologías utilizándola en función de un aprendizaje completo y novedoso.

Entonces, se pueden mostrar algunos ejemplos de ejercicios que se aplicaron a los estudiantes de segundo año de la carrera Matemática-Física, donde se imparten los contenidos que aparecen reflejados en los ejercicios.

Ejercicios:

Ejercicio 1. (Modificado a partir del original en Barnett (2003, p.164).). La ley de Hooke establece que la relación entre el alargamiento de un resorte y el peso *w* que causa el alargamiento es lineal. Un cuerpo de 5 kg estira un resorte 0,025 m mientras que cuando no hay peso el alargamiento es cero.

a) Encuentra una función lineal f: $s = f(w) = mw + b$ que represente esta relación.

b) Calcula el alargamiento para pesos de 7 kg y 15 kg, respectivamente.

c) ¿Qué tipo de función describe ese problema físico? ¿Cuál es la pendiente de *f*? ¿Qué tipo de proporcionalidad existe entre *s* y *w*?

d) Representa gráficamente *f* para 0 kg ≤ *w* ≤ 40 kg. Ten en cuenta para el eje "y" una escala adecuada. Utiliza Derive 5.1.

e) Elabora una función, a partir de la función anterior, que describa la dependencia del peso con respecto al alargamiento del resorte.

f) ¿Qué relación tendrá la gráfica de la función del inciso anterior con la gráfica de la función *s*?

Análisis de las respuestas de los estudiantes: En el ejercicio, los incisos a y b fueron realizados por la totalidad de los estudiantes. Hubo dificultades en el inciso c porque no identificaron correctamente la pendiente (tres estudiantes), incluso el estudiante con mayores dificultades desconocía su relación con la inclinación de la recta con respecto a la dirección positiva del eje "x". Los que presentaron mayor habilidad en el trabajo con el asistente Derive 5.1 (cinco estudiantes) obtuvieron la gráfica correcta (Fig.1), otros (cuatro estudiantes) realizaban los comandos correctamente pero la visualización requería el trabajo indicado con la escala del eje "y" y no comprendieron la implicación de dicha sugerencia.

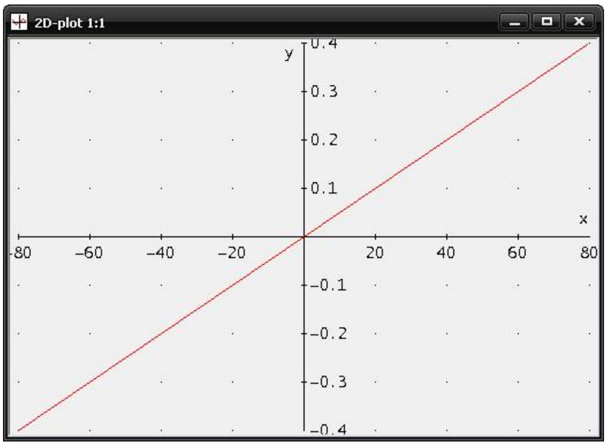


Figura 1. Respuesta Ejercicio 1, inciso d.

Fuente: Derive 5.1.

Ejercicio 2. Para altitudes de hasta 10 000 m la densidad de la atmósfera terrestre, en kg/m^3, es aproximadamente estimada por $D(h) = 1{,}225 - (1{,}12 \cdot 10^{-4})h + (3{,}24 \cdot 10^{-9})h^2$

a) ¿Cuál es el dominio de definición de la función expresada por la ecuación anterior? ¿Cuál es el dominio que impone el análisis del significado de la variable independiente?

b) ¿Cuál será la altura de un paracaidista en el momento que mide la densidad del aire y reporta 0,74 kg/m^3?

c) ¿Qué diferencia hay entre la densidad del aire a 1 000 m y a 10 000 m?

d) Representa gráficamente este comportamiento de la densidad del aire en dependencia de la altura. Utiliza Derive 5.1.

<u>Análisis de las respuestas de los estudiantes:</u> En el caso del presente ejercicio, sólo tres estudiantes lograron diferenciar que el dominio de la función matemática es el conjunto de los números Reales y de la misma función describiendo el problema físico es $D = \{h \in R / 0m \leq h \leq 10000m\}$. Como consecuencia de ello, en el inciso b estos mismos estudiantes no lograron descartar la respuesta que está fuera del dominio de definición de la función. El resto de los incisos, c y d, fueron respondidos correctamente por la totalidad de los estudiantes, siete de los estudiantes lograron realizar un trabajo adecuado con Derive 5.1 para obtener la gráfica correcta y además adecuada (Fig. 2).

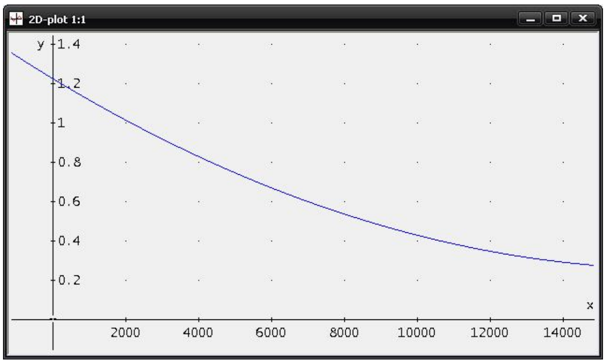


Figura 2. Respuesta Ejercicio 2, inciso d.

Fuente: Derive 5.1.

Ejercicio 3. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con masa inicial m_0 y una velocidad v se modela según la expresión: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, donde $c = 3 \cdot 10^5 m/s$.

a) De la expresión anterior, correspondiente a una función irracional, realiza un análisis de los valores admisibles para *v*.

b) Si fijamos la función para un objeto de masa 10 000 kg, ¿cómo queda la función $M(v)$?

c) Realiza un esbozo de la función anterior para $v \geq 0$. Compruebe el mismo utilizando Derive 5.1.

d) Discute con tu profesor de Física la opinión que puedas extraer del análisis del comportamiento de la función para valores cercanos a $c = 3 \cdot 10^5 m/s$.

<u>Análisis de las respuestas de los estudiantes:</u> En el caso del presente ejercicio, cuatro estudiantes llegaron a la respuesta correcta del inciso a, $-c < v < c$; resultado de analizar el argumento de la raíz. Prevaleció en los demás errores relacionados con la solución de inecuaciones fraccionarias y no con identificar el análisis pertinente al dominio de la función. Los incisos b y c (Fig.3) fueron respondidos satisfactoriamente por ocho estudiantes. Es importante destacar que para responder el inciso d todos fueron a consultar con su profesor de Física y un

estudiante aportó además materiales interesantes consultados en internet, circulados al resto del grupo para su lectura.

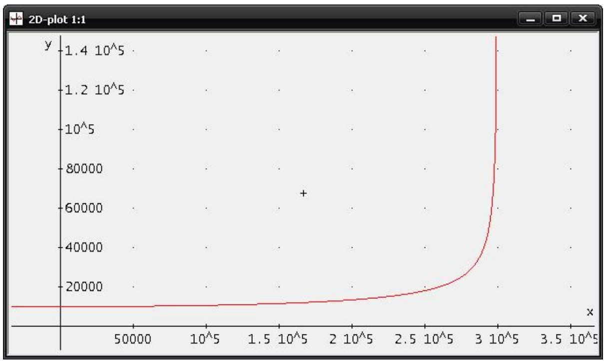


Figura 3. Respuesta Ejercicio 3, inciso c.

Fuente: Derive 5.1.

Ejercicio 4. (Modificado a partir del original en Stewart (2006, p.74).). Cuando se dispara el flash de una cámara, de inmediato las pilas empiezan a recargar el capacitor del flash, en el cual se almacena la carga eléctrica dada por: $Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)$. La capacidad máxima de carga es Q_o y t se mide en segundos.

a) ¿Qué capacidad tendrá, en relación a su capacidad máxima, a los 2seg de haber disparado el flash?

b) ¿Cuánto tarda en recargarse el capacitor hasta 90% de su capacidad?

c) Representa gráficamente el modelo para $0seg \leq t \leq 7seg$ y $Q_0 = 3V$. Utilice Derive 5.1.

d) Encuentra la inversa de esta función y explica su significado.

Análisis de las respuestas de los estudiantes: En este caso, teniendo en cuenta que ya los estudiantes comenzaron a apropiarse de herramientas de trabajo con funciones adquiridas en ejercicios anteriores, el desempeño de los mismos fue evaluado de excelente en el caso de seis estudiantes y tres de bien. El inciso que más dificultades presentó fue el d, no en el aspecto de formular la función inversa sino en encontrar el significado que para el problema físico poseía la misma.

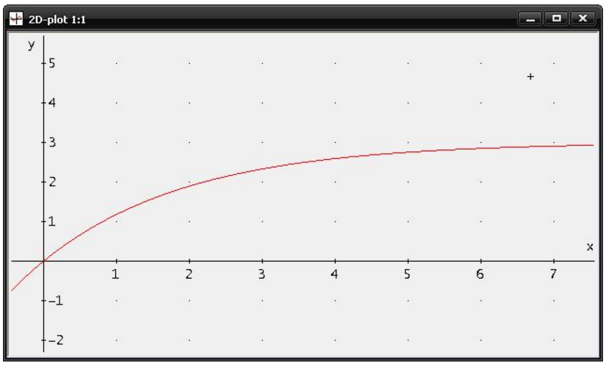


Figura 4. Respuesta Ejercicio 4, inciso c.

Fuente: Derive 5.1.

Ejercicio 5. (Modificado a partir del original en Palacio (2003, p.64).). A veces en investigaciones recurren a la fórmula $f(t) = Asen(bt + c) + d$ para simular las variaciones de temperatura durante el día, donde el tiempo *t* está expresado en horas, la temperatura *f*(*t*) en ºC y *t* = 0 corresponde a las 12 am. Supóngase que *f*(*t*) es decreciente a medianoche.

5.1. Calcula los valores a, b, c y d que se ajustan a la información y trace la gráfica de *f* para 0 ≤ *t* ≤ 24.

a) Cuando la temperatura máxima es de 10 ºC y la mínima 10 ºC, esta última a las 4 am.

b) Cuando la temperatura varía entre 10 ºC y 30 ºC y la temperatura media de 20 ºC se da por primera vez a las 9 am.

5.2. Analiza la función que modela dicho fenómeno en el inciso a) y diga en qué momento del día se alcanza la temperatura máxima. Investiga en qué latitudes y para qué época del año pudiera encontrarse este comportamiento de las temperaturas.

5.3. Analiza la función que modela dicho fenómeno en el inciso b) y diga a qué hora alcanza la temperatura mínima y a qué hora su temperatura máxima.

5.4. ¿Qué diferencia existe entre las imágenes de la función del inciso a) y del inciso b)? ¿Cómo es el dominio de ambas funciones?

<u>Análisis de las respuestas de los estudiantes:</u> En el ejercicio hubo que proporcionar niveles de ayuda para el inciso a, pero después de logrado el esbozo de ambas funciones, los análisis restantes fueron realizados con soltura por todos los estudiantes. Es interesante destacar que siete de los estudiantes recurrieron al uso de Derive 5.1 a modo de comprobación de los resultados.

Ejercicio 6. (Modificado a partir del original en Palacio (2003, p.71).). Se estima el espesor de la capa atmosférica de ozono con la fórmula siguiente: $\ln I_0 - \ln I = \text{kxsec}\varphi$, en la cual I_0 es la longitud de onda de la luz solar antes de llegar a la atmósfera; *I* es la misma longitud de onda después de pasar a través de la capa de ozono de *x* centímetros de espesor; *k* es la constante de absorción de ozono para la longitud de onda, y *φ* es el ángulo agudo que forma la luz del sol con la vertical.

a) Transforma la expresión anterior como una función que depende de *φ* y de *I.*

b) Supón que la longitud de onda I_0 es de 3 055·10^{-8} cm y *k* = 1,88. Reescribe la expresión anterior de modo que queden sólo como variables independientes *φ* e *I.*

c) Calcula el espesor de la capa de ozono si *I* = 1 776,16·10^{-8} cm y φ= 12^0.

<u>Análisis de las respuestas de los estudiantes:</u> En este último ejercicio, solo dos estudiantes tuvieron dificultades en el inciso a. En el resto de los incisos, la totalidad de los estudiantes respondieron acertadamente. Es de destacar que, igual que en el caso anterior, en su mayoría acudieron a Derive 5.1 como herramienta de comprobación gráfica de los resultados.

7. Análisis de Resultados

Luego de aplicada la propuesta, se comprobó a través de las evaluaciones sistemáticas y parciales que los estudiantes superaron algunas de las dificultades que han sido detectadas históricamente. Se evidenció una mejor comprensión del concepto de función y de las propiedades de las funciones aplicadas a situaciones de la vida práctica, mediante la vinculación con contenidos de la disciplina Física. El uso del Derive 5.1 contribuyó a la motivación de los estudiantes y a una mejor interpretación de la representación gráfica de las funciones.

La Fig. 5 muestra la comparación de los resultados obtenidos en cortes evaluativos realizados por los profesores de las disciplinas Física y Matemática antes y después de realizado el trabajo. Como se puede apreciar, luego de aplicar la propuesta, donde dos estudiantes fueron evaluados de Excelente (E), seis de Bien (B) y uno de Regular (R). Además se pudo observar que los alumnos mostraron mayor disposición e independencia cognoscitiva.

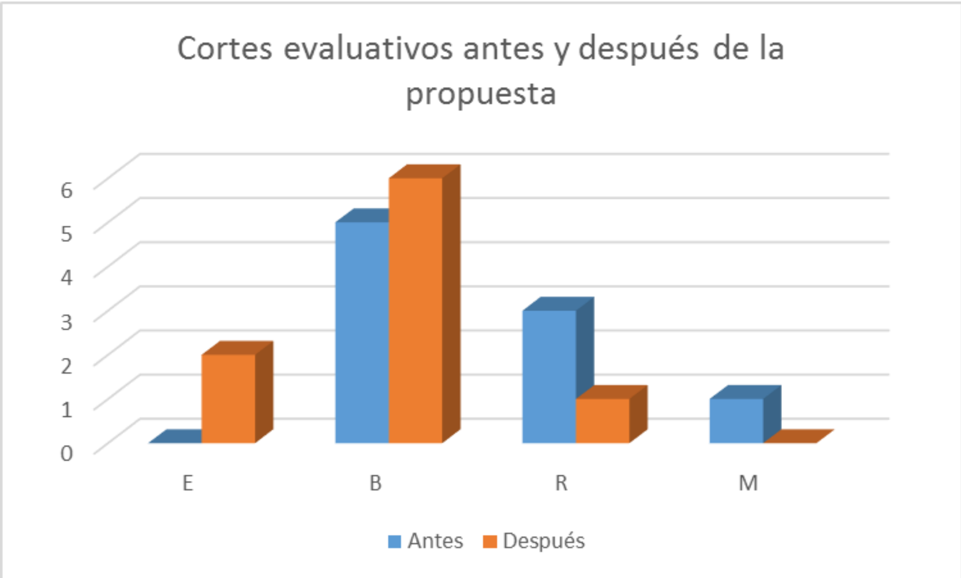


Figura 5. Gráfica comparativa de cortes evaluativos.

Fuente: Microsoft Excel 2013.

8. Conclusiones

Como resultado de una revisión bibliográfica del tema se han propuesto tareas con carácter interdisciplinario que al aplicarse, han dado como resultado que los estudiantes logren discernir, en su mayoría, entre el concepto de función y sus representaciones.

Han sido capaces de manejar con creatividad e independencia las diferentes formas de representar las funciones, manejando con precisión el efecto que produce en su representación gráfica cada uno de los parámetros presentes en ellas; lográndose así una mayor comprensión del concepto.

Han demostrado habilidades en el manejo de Derive 5.1 en el proceso de transferencia entre representaciones y en la comprobación de cálculos realizados a lápiz y papel. Se logra además que en las clases de Física estos estudiantes posean una herramienta matemática en la representación gráfica de fenómenos que se sustenten en un modelo matemático que responda a una función conocida y estudiada en las clases de Matemática.

Se han convencido de la utilidad de las funciones como modelos de problemas físicos, logrando un vínculo entre dos ciencias, que, unidas por naturaleza, en ocasiones se encuentran divorciadas en el proceso enseñanza-aprendizaje de ambas.

Estos avances se han evidenciado por haberse obtenido mejores resultados en las evaluaciones escritas posteriores a su aplicación y porque los alumnos se han mostrado más independientes y seguros a la hora de resolver cualquier tipo de tarea sobre el contenido abordado, por lo que aplicarlos ha sido favorable.

Bibliografía

Álvarez, M. (2001). *La interdisciplinariedad en la enseñanza – aprendizaje de las ciencias exactas en la escuela media*. Resúmenes del Congreso Pedagogía 2001, La Habana. Cuba. Recuperado el 29 de abril de 2016, de http://200.10.23.169/educacion/ed_ciencias_interdisciplinariedad.pdf

Álvarez, M. (2004). *Interdisciplinariedad. Una aproximación desde el proceso de enseñanza aprendizaje de las ciencias*. Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Álvarez, M. (2008). *Manual de ejercicios de Matemática para la Educación Media Superior. Primera Parte*. Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Barnett, R. A., et al. (2003). *Precálculo funciones y gráficas. Vol 1. Primera Parte.* Félix Varela, La Habana. Cuba.

Batanero, C. (2005). *Significados de la probabilidad en la educación secundaria*. *RELIME*, Vol.8, N.3, 247-264.

Comisión Nacional de la Carrera Licenciatura en Educación en la especialidad Matemática-Física (CNC). (2015). Modelo del profesional. Plan de Estudio D modificado.

Concari, S. B., y Giorgi, S. M. (2000). Los problemas resueltos en textos universitarios de Física. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(3), 381-390.

Contrera, A., y Ordoñez, L. (2006). *Complejidad ontosemiótica de un texto sobre introducción a la integral definida. RELIME*, Vol.9, N.1, 65-84.

Coret, M., García, D., y Alavez, E. (1990). *Álgebra Moderna 1*. Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Dreyfus, T. (1991).*Advanced mathematical thinking processes, en Tall, D. (ed), Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht/Kluwer, 24-41.

Duval, R. (2000). *Basic issues for research in mathematics education (Plenary Address), Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychologie of Mathematics Education*. Recuperado el 29 de abril de 2016, de http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED452031.pdf

Grisolía, M. (2008). La Interdisciplinariedad en la Enseñanza de las Ciencias. Artículo enviado para su publicación en la revista *Ciência&Educação*. Recuperado el 13 de marzo del 2015 de: http://webdelprofesor.ula.ve/humanidades/marygri/documents/PPD/Interdisciplinariedad.pdf.

List, G., Walter, M., Baginski, M., Löschaw, G., Mertens, A., Schwanits, G.,…Goll, P. (2002). *Lógica Matemática. Teoría de Conjuntos y Dominios Numéricos.* Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Martínez, B., Perera, F., y Álvarez, M. (2011). *La interdisciplinariedad en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las ciencias*. Educación Cubana, Habana. Cuba.

Mederos, O., y González, B. (2005). La modelación en la educación matemática. *Talleres Gráficos de Salvador Impresor SA de CV Saltillo. Coahuila, México*.

Ministerio de Educación. (2007). *Matemática Décimo Grado*. Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Newell, W. H. (2001). A theory of interdisciplinary studies. Issues in Integrative Studies, 19, 1-25. Recuperado el 29 de abril de 2016 enhttps://www.researchgate.net/profile/William_Newell/publication/238490809_A_Theory_of_Interdisciplinary_Studies/links/004635314bfc74acf6000000.pdf

Palacio, J. (2003). *Colección de problemas matemáticos para la vida*. Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Pérez, Y., y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación, 35*(73), 169-194.

Potápov, M. (1986). *Álgebra y análisis de funciones elementales.* Mir, Moscú. URSS.

Rodríguez, L. (2011). *Didáctica de las funciones en la enseñanza Media Superior.II Evento Internacional "La Matemática, la Física y la Informática en el siglo XXI"*. Holguín, Cuba.

Rodríguez, R., Vassallo, J., Gómez, A., y Domínguez, H. (1988). *Cálculo diferencial e integral.* Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Sánchez Fernández, C. (2004). *Análisis Matemático. Tomo 1.* Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Stewart, J. (2006). *Cálculo con trascendentes tempranas.* Parte 1. Félix Varela, La Habana. Cuba.

Autores:

Primer autor: Rodríguez Rivero Lissette**: Máster en Computación Aplicada (UCLV). Profesora Auxiliar del Departamento de Matemática Física en la Universidad de Sancti Spíritus, Cuba. Profesora de Análisis Matemático. Investiga en Análisis Matemático. Ha publicado en revistas como MATCH y SAR QSAR Environm Res, y en memorias de eventos.**

Segundo autor: Ponce Valdés Yudelkys: **Máster en Ciencias de la Educación. Mención Secundaria Básica (UNISS). Profesora Instructora del Departamento de Matemática Física de la Universidad de Sancti Spíritus, Cuba. Profesora de varias asignaturas dentro de la disciplina Física. Investiga la interdisciplinariedad Física-Matemática.**

Tercer autor: Pérez González Andel: **Doctor en Ciencias Pedagógicas (Uniss). Profesor Auxiliar de la Universidad de Sancti Spíritus, Cuba. Profesor de Didáctica de la Matemática. Investiga la formación inicial y didáctica del profesor de matemática. Ha publicado en revistas como Infociencia, Revista IPLAC, y Pedagogía y Sociedad.**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 192-206

Un ejemplo de integración de la Historia de las Matemáticas en el conocimiento didáctico de profesores de Matemáticas

Lyda Constanza Mora Mendieta, Édgar Alberto Guacaneme Suárez
William Alfredo Jiménez Gómez

Fecha de recepción: 08/05/2016
Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	En el marco del proyecto de investigación titulado "El conocimiento histórico en la constitución de una visión sobre la naturaleza de la Aritmética y el Álgebra en maestros de Matemáticas en formación", se describió el lugar que cumple la historia de la Aritmética y el Álgebra en un curso de "Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra" ofrecido para futuros profesores de Matemáticas. Se presentan entonces las descripciones de dicha historia, de la manera como se incorpora esta a la formación del conocimiento didáctico del contenido matemático y se ilustran las tareas propuestas en el curso analizado. **Palabras clave**: Historia del Álgebra y la Aritmética, conocimiento del profesor de Matemáticas, Enseñanza del Álgebra y la Aritmética.
Abstract	The research project entitled "The historical knowledge in the creation of a vision about the nature of arithmetic and algebra in mathematics teachers in training" inform about the place that meets the history of arithmetic and algebra in a course on "Teaching and Learning Arithmetic and Algebra" offered to future teachers of mathematics. Descriptions of this history, the way as the formation of pedagogical content knowledge is incorporated and the proposed tasks are presented. **Keywords**: History of Algebra and Arithmetic, Mathematics teacher knowledge, Teaching algebra and arithmetic.
Resumo	No projeto intitulado "O conhecimento histórico na criação de uma visão sobre a natureza da Aritmética e Álgebra em professores de Matemática em formação", descrevemos o lugar que tem a história da Aritmética e Álgebra em uma disciplina "Ensino e aprendizagem da Aritmética e Álgebra" oferecido para estudantes de Licenciatura em Matemática. Neste artigo apresentamos descrições desta história, de como a história pode ser integrada à formação do conhecimento didático do conteúdo matemático dos futuros professores. As tarefas propostas na disciplina são também apresentadas neste artigo. **Palavras-chave**: História da álgebra e aritmética, Conhecimento dos professores de Matemática, Ensinando álgebra e aritmética.

1. Introducción

La Historia de las Matemáticas [HM] se utiliza como herramienta en el espacio académico "Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra" [EAAA], el cual constituye un curso de la "Licenciatura en Matemáticas"[1]. Esta manera de integración de la HM se constituyó en objeto de análisis para el proyecto de investigación titulado "El conocimiento histórico en la constitución de una visión sobre la naturaleza de la Aritmética y el Álgebra en maestros de Matemáticas en formación", financiado por el Centro de Investigaciones de la misma Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) en los años 2013 y 2014.

El curso en mención hace parte de la "Línea de Pedagogía y Didáctica específica" de la Licenciatura y está ubicado en el sexto semestre de diez a cursar. Dentro de la concepción de este curso se estableció como ruta de navegación:

> (i) La reflexión sobre la naturaleza de los objetos aritméticos y algebraicos, (ii) los aspectos curriculares sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra hasta ahora reconocidos y (iii) el estudio de propuestas de enseñanza o elementos a tener en cuenta en la enseñanza, en donde se incluye la identificación de materiales y recursos para el aula; y procesos propios del aprendizaje de algunos conceptos aritméticos o algebraicos. (Mora, 2009, p. 2)

Es así que desde su inicio (que data de 2010, año en que por primera vez se desarrolló el curso), la HM –y en particular, la historia de la Aritmética y el Álgebra [hAA]– se hizo presente, con la intención de que su estudio aportara a generar reflexiones sobre la naturaleza de los objetos aritméticos y algebraicos, a la vez que brindara información para responder preguntas tales como: ¿qué objetos han sido estudiados por la Aritmética y el Álgebra a lo largo de la historia?, ¿cómo se relacionan estas dos ramas de las Matemáticas?, o ¿son estas ramas independientes?, asuntos que hacían parte de la primera unidad del programa.

Con el pasar de los semestres de implementación del curso, la hAA ha ido ganando mayor presencia en este y se ha logrado integrar a los procesos de constitución de conocimiento didáctico del contenido matemático de los futuros profesores de Matemáticas formados en la Universidad. En este artículo se presentará entonces algunos aspectos de la visión lograda a través del proyecto de investigación sobre cómo aparece la hAA en un curso de Didáctica de la Aritmética y el Álgebra y, específicamente, en qué aporta a la formación de los futuros profesores.

Este artículo pretende entonces sumarse a la más de una treintena de documentos sobre la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática" publicados en la revista Unión (la mayoría de los cuales versan sobre la historia de la educación en Matemáticas) y aportar a lo discutido por Belisario & González (2012), bajo el subtítulo "[Historia de la Matemática (HM) - Educación Matemática (EM)] ↔ HMEM", en lo que corresponde a la formación de profesores, pero en un sentido no exactamente referido allí.

2. La Historia de las Matemáticas que se pone en juego en el curso

Para describir y analizar la participación de la HM –y en particular la hAA– en el curso, se establecieron como unidades de análisis: las fuentes históricas, los

[1] Programa de formación inicial de profesores de Matemáticas, ofrecido por la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. (Colombia).

objetos históricos de referencia, el abordaje de los objetos históricos, los usos de la hAA y los objetos matemáticos.

2.1. Fuentes

Esta unidad de análisis se retoma de la propuesta que Guacaneme (2010) hace al presentar esta como una de diez tipologías de la HM; allí, *grosso modo*, se explicita la existencia de fuentes originales o primarias, de fuentes secundarias y de fuentes didácticas, caracterizándolas como sigue:

> Dentro del tipo fuentes originales se encuentran, entre otros, los manuscritos originales de las obras matemáticas e incluso sus traducciones, la correspondencia entre matemáticos, los discursos de los matemáticos en congresos o eventos académicos, o los instrumentos y máquinas construidas para favorecer la producción matemática; los análisis, comentarios o recapitulaciones sobre estas fuentes originales, constituyen las fuentes secundarias. […] Adicionalmente […] se deberían incorporar las fuentes didácticas como un tercer tipo de fuentes, es decir, […] los productos resultantes de transposiciones didácticas de la Historia con la intención de incorporarla a la enseñanza de las matemáticas. (Guacaneme, 2010, p. 138).

Así, en el curso hay un exiguo uso de fuentes primarias; se emplean traducciones al Español de fragmentos de obras de algunos matemáticos célebres (*v.g.*, Elementos (de Euclides), *Arithmética* (de Diofanto), el Papiro de Rhind (Ahmes)). Respecto de las fuentes secundarias y fuentes de tipo didáctico, las últimas son las de mayor frecuencia.

Algunos de los ejemplos de fuentes secundarias utilizadas se referencian en la Tabla 1.

Documento
Boyé, A. (2003) ¿François Viète, inventor del álgebra? pp. 259-376. Traducción de: Sergio Toledo. Actas Seminario Orotava de Historia de la Ciencia. Fundación Canaria.
Ifrah, G. (2002). *Historia universal de las cifras*. Madrid: Espasa-Calpe.
Devlin, K. (2003). Prólogo. ¿Qué son las matemáticas? En: *El lenguaje de las matemáticas*. Intermedio. Bogotá. pp. 11-24.
Devlin, K. (2003). La importancia de los números. En: *El lenguaje de las matemáticas*. Intermedio. Bogotá. pp. 25-67.

Tabla 1. Fuentes secundarias empleadas en el curso

Algunas de las fuentes didácticas empleadas se reportan en la Tabla 2.

Documento
Cid, E. (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. Pre-publicaciones del seminario matemático García de Galdeano. Universidad de Zaragoza. No. 25
Esquinas, A. (2008). Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica. Memoria para optar al Título de Doctor, Departamento de Didáctica y Organización Escolar, Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España. (Versión electrónica).

Documento
Gallardo, A. & Torres, O. (2005). El álgebra aritmética de George Peacock: Un puente entre la aritmética y el álgebra simbólica. *Memorias del IX Simposio de la SEIEM*. Universidad de Córdoba. España, 243–249
Godino, J., Font, V., Wilelmi, M. y Arreche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es el número? *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 19*, 34-46. (Versión electrónica).
Gálvez, A., Maldonado, A. y Guacaneme, E. (2012). ¿A qué llamamos Historia de la Aritmética? Una respuesta a través de cinco trazas. *Memorias XIII Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. ASOCOLME. Universidad de Medellín, Universidad de Antioquia. pp. 347-352.
Guinness, G. (1999). Alguns aspectos negligenciados na compreensão e ensino de números e sistemas numéricos. *Zetetiké, 7*(11), 9 -27 (versión electrónica)
Macías, M.R. (2010). Evolución histórica del concepto de número. *Revista Autodidacta 1*(1), 28-47. (Versión electrónica).
Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión Histórica. *Revista IRICE, 13*, 105-132.
Medina, I. y Albarracín, A. (2012). *Un estudio de la principal obra de Diofanto de Alejandría: La Aritmética.* Trabajo de grado. Licenciatura en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, D.C.
Mora, L. y Torres, J. (2007). *Concepciones de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre números reales*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. pp. 111-136.
Ochoviet, C. (2007). De la resolución de ecuaciones polinómicas al Álgebra Abstracta: un paseo a través de la Historia. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *8*(1), 1-19 (Versión electrónica).
Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). Inicios del álgebra y clasificación. En: Iniciación al Álgebra (pp. 37-70). Madrid: Editorial Síntesis.
Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22*(1), 9-12. Traducción libre elaborada por Edgar Alberto Guacaneme (pp.1-12).
Triana, J. y Manrique, J. (2013) El papel de la Historia del Álgebra en un curso de didáctica para la formación inicial de profesores de matemáticas. Tesis de Maestría. Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, D.C.

Tabla 2. Fuentes didácticas empleadas en el curso

2.2. Objetos históricos de referencia

Para describir los objetos que se estudian se definieron tres subunidades, a saber: los objetos en sí mismos, los elementos de análisis y el tipo de Matemáticas aludidas.

La primera subunidad, es decir **el objeto histórico en sí mismo**, se incluye para establecer si en el curso hay referencia a: el estudio de biografías de matemáticos o de Escuelas (*v.g.*, La pitagórica o la Escuela árabe), las versiones de las obras matemáticas (si estas son originales o traducciones, si son completas o fragmentos de estas), las cartas o correspondencia que se enviaban los matemáticos, la noción matemática (concepto, proceso, procedimiento) o problema matemático**,** las formas de pensamiento matemático (*v.g.*, razonamiento sintético o analítico, formalismo, estructuralismo), y las teorías Matemáticas o porciones de ellas.

En relación con el objeto histórico en sí mismo, en el curso EAAA se hace referencia desde la perspectiva histórica a nociones matemáticas centradas en tipos de representaciones de ciertos conjuntos numéricos, a objetos que estudia el Álgebra o la Aritmética, y a la evolución de algunos objetos (como las ecuaciones). Y aunque en el curso no se estudia profundamente la biografía de matemáticos, sí se hace referencia a ciertos personajes, culturas o escuelas consideradas cruciales en la historicidad de la Aritmética o el Álgebra, como lo son las culturas babilónicas y egipcias, los pitagóricos, Euclides (sobre todo para tomar postura acerca de la llamada "álgebra geométrica"), Diofanto de Alejandría, los árabes (en particular al-Khowarizmi, Thabit Ibn Qurra y Omar Khyayam) y matemáticos europeos (Stevin, Vieté, Descartes, Gauss, Peacock, Galois, Dedekind, Hilbert, Noether y Cauchy, por ejemplo). Adicionalmente, se presentan algunos apartes de algunas obras representativas, y notaciones empleadas por Bombelli, Vieté y Descartes (para hacer referencia a la forma como eran presentados los problemas aritméticos o algebraicos así como sus soluciones, el tipo de lenguaje utilizado, las representaciones y los intereses); tales apartes son tomados de traducciones de las obras originales o de fuentes secundarias y didácticas. Es de resaltar, como lo han manifestado Gálvez y Maldonado (2012), que además de las fuentes que se utilizan, hay presencia de la interpretación personal de aspectos históricos de parte de la profesora del curso.

La segunda subunidad, es decir los **elementos de análisis**, se estableció para determinar si en el curso se incluye una historia conceptual (es decir una historia que enfatiza en los conceptos o incorpora tratamientos a cómo estos cambian a medida que pasa el tiempo), una historia de los problemas (que incluye la alusión a la evolución de los conceptos o procesos, pero asociados a los problemas que aportaron a su desarrollo) o una historia de las prácticas matemáticas o culturales involucradas en la evolución de los objetos matemáticos.

Sobre los elementos de análisis se reconoció que aunque en el curso EAAA los objetos de la Aritmética y el Álgebra no se profundizan desde su historia, el análisis que se hace de estos mezcla la historia conceptual y la historia de problemas; es decir, se hace referencia a la evolución de algunos de tales objetos en la constitución del desarrollo de las Matemáticas y algunas veces se estudian ciertos problemas relacionados con algunos de los objetos algebraicos o aritméticos.

La tercera subunidad retomada de una de las tipologías de la HM (Guacaneme, 2010), el **tipo de Matemáticas aludidas,** se requirió para determinar si las Matemáticas que hacen parte del estudio histórico pueden corresponder a la historia hegemónica (esto se corresponde con la historia de las Matemáticas occidentales, usualmente eurocéntricas) o a la historia no hegemónica (se refiere a la alusión o estudio de las Matemáticas propias de culturas específicas como comunidades indígenas o matemáticas orientales).

En relación con el tipo de Matemáticas aludidas, sin lugar a dudas, la historia que se estudia en el curso corresponde con las Matemáticas hegemónicas u occidentales, lo cual se relaciona directamente con la información en las fuentes citadas. Así, está poco presente la referencia que se hace a la historia de las Matemáticas no hegemónicas; por ejemplo, hay menciones a las Matemáticas de grupos indígenas a través de la alusión a la yupana o al sistema de numeración maya.

2.3. Abordaje de los objetos históricos

Esta unidad se refiere a dilucidar si los objetos histórico-matemáticos son presentados en el curso EAAA con distinto grado de profundidad, en cierta relación con el contexto sociocultural donde se desarrollaron, haciendo énfasis en los fracasos y en todo el proceso de construcción o presentando solo los productos finales desprovistos de obstáculos y desde diferentes perspectivas; para ello se consideraron varias subunidades, algunas inspiradas en algunas tipologías de la HM propuestas por Guacaneme (2010).

La **profundidad de estudio de los objetos** se refiere a si el tratamiento histórico incorporado se aproxima al relato histórico (o presentación general de hechos o del objeto considerado y de datos cronológicos, anécdotas o biografías), o bien si se hace un análisis histórico en el que se enfatiza en el contenido matemático, en la evolución de los objetos, en los problemas que se dieron.

En lo que corresponde con la profundidad de estudio de los objetos, en el curso se usa prioritariamente el relato histórico (se ubican fechas, épocas, nombres, obras y hasta se mencionan anécdotas); no obstante, en algunos pocos momentos se interpretan algunos hechos históricos (por ejemplo la forma como resolvían ecuaciones los babilónicos, al-Khowarizmi o Thabit Ibn Qurra), pero no alcanza el nivel de análisis histórico.

También se examina la **relación con el contexto sociocultural**, es decir se determina el nivel de atención al contexto social y cultural al presentar la historia de cierto objeto matemático. Específicamente se identifica si la historia que se pone en juego en el curso tiene una tendencia internalista en donde el centro de atención son los conceptos matemáticos en sí mismos y su estructura lógica, sin hacer referencia a los aspectos culturales o sociales alrededor de los objetos, o bien si hay un tendencia externalista en la cual se enfatiza en los asuntos sociales y culturales que incidieron en el desarrollo de los objetos matemáticos. Se incluye una opción intermedia en la cual se intenta un equilibrio incluyendo tanto la referencia a los aspectos sociales y culturales como al desarrollo de los objetos matemáticos.

En lo que corresponde con las relaciones con el contexto sociocultural, a pesar de no hacerse un estudio profundo de la hAA, se intenta que los maestros en formación logren ubicar el contexto sociocultural de ciertas épocas como una variable que interactúa con la producción matemática. Por ejemplo, se menciona el aporte de Simon Stevin a la notación de las expresiones decimales y su interés por hacer unas obras como *De Thiende* –también conocida como *La Disme*– (El decimal) y *Tafelen van Interest* (Tablas de interés), dirigidas principalmente a los mercaderes y comerciantes de la época, para facilitarles los cálculos. También se estudia la emergencia del simbolismo algebraico en el Renacimiento en relación con el cambio de pensamiento que se dio en la época y la invención de la imprenta. Asimismo se estudian las razones por las cuales se plantearon cinco teorías para los números reales en el mismo año (1872), y los intentos fallidos a lo largo de la historia para justificar las reglas para operar números negativos a partir de hechos reales que eran ignorados o considerados absurdos. En este sentido la HM abordada en el espacio EAAA no se puede clasificar en *internalista*, *externalista* o *intermedio*, aunque se puede evidenciar que hay alguna aproximación a la historia externalista.

Los **detalles históricos** constituyen también una subunidad de análisis. En esta, siguiendo las ideas de Grattan-Guinness (2004), se procura establecer si se hace un tratamiento de la HM como historia (tendencia que se refiere a los estudios históricos en los cuales cobran gran interés aspectos como: la presencia de las motivaciones que dieron origen al objeto o noción matemática, las relaciones y diferencias con otros objetos o nociones, la evidencia de las dificultades asociadas al desarrollo de la noción, entre otros detalles) o como herencia (tendencia que alude a la presentación de la historicidad de las nociones matemáticas centradas básicamente en los desarrollos exitosos).

En lo que tiene que ver con los detalles históricos, no se puede establecer si la aproximación a la HM en el espacio académico se puede clasificar como historia o como herencia, pues si bien, la intención de la profesora es que los maestros en formación sean conscientes de las dificultades asociadas a la evolución de ciertos objetos o las motivaciones que se dieron para que uno u otro concepto se desarrollara (historia), en las acciones docentes se evidencia mayor tendencia hacia la herencia.

Una última subunidad incluye la **perspectiva (interpretación) de quien hace la mirada** histórica. Acá se reconocen dos aproximaciones: una desde la visión del autor original o historia cultural en la que se procura que el objeto matemático sea interpretado lo más fiel a como lo pensó el autor (enfatizando en las ideas del autor matemático, respetando las ideas originales y el contexto de la época) y otra desde la visión actual en la cual la presentación de los hechos históricos se hace desde la percepción existente, es decir desde el punto de vista del historiador moderno (por ejemplo empleando la simbolización y significación moderna) aún bajo el riesgo del anacronismo.

Acerca de la perspectiva (interpretación) de quien hace la mirada, se reconoce que en el curso EAAA principalmente se hace referencia a la presentación de hitos históricos o a la alusión a ellos desde la percepción actual, aunque la formadora hace referencia a entender ciertos hechos desde la perspectiva de los autores originales.

2.4. Usos de la hAA

Esta unidad se refiere al para qué de la presencia de la HM o de la alusión a ella; así, siguiendo la idea de Jankvist (2009) se determinan dos subunidades: la historia como herramienta y la historia como fin. La primera tiene que ver con el uso de la HM como un instrumento que busca contribuir al aprendizaje de las Matemáticas o del conocimiento didáctico del contenido matemático o de otro tipo, pero no histórico propiamente dicho. La historia como fin se refiere a que la HM es el fin en sí mismo; aprender HM es el propósito.

Sobre los usos de la HM, es claro para la formadora que su objetivo es usar la HM como una herramienta que aporte al conocimiento didáctico del contenido matemático; ella asegura que su objetivo no es que los estudiantes aprendan HM como tal (*v.g.*, épocas o hechos sobresalientes *per se*), sino que si bien es importante que se ubiquen en un contexto histórico, el objetivo es desarrollar algunos de los conocimientos profesionales como futuros profesores de Matemáticas, por ejemplo, reconocer si los objetos aritméticos o algebraicos reconocidos en la HM se corresponden con los propuestos o desarrollados en los currículos colombianos (Colombia – Ministerio de Educación Nacional, 1998, 2006), comprender que los posibles errores de sus estudiantes son similares a los que se dieron en la constitución de un objeto matemático (por ejemplo la aceptación de los números negativos) o que los niveles de aprendizaje que presentan los niños –por ejemplo, al avanzar en el proceso de simbolización– también se dieron en la historia del Álgebra (*v.g.*, lenguaje retórico, sincopado, simbólico algebraico), entre otros elementos. La formadora afirma que la HM es uno de los organizadores curriculares del espacio que orienta (Mora y Guacaneme, 2004); en este sentido se ratifica el uso como herramienta, pero en este caso en el ámbito curricular de la formación de profesores de Matemáticas.

2.5. Objetos matemáticos

Con fines analíticos en esta unidad se establecieron objetos aritméticos y objetos algebraicos.

Para determinar los **objetos aritméticos** se tomó como base el estudio de la Historia de la Aritmética realizado por Gálvez y Maldonado (2012), quienes identificaron trazas de la Aritmética en la HM (llamadas así por los autores). Para la organización de estas unidades de análisis se utilizó este trabajo, asumiendo como objetos de la Aritmética: Los sistemas de numeración o numerales (se refiere a la historia de los símbolos que representan números o numerales, bien sea que representen naturales u otros números); los sistemas numéricos (se considera la formalización de sistemas numéricos específicos, es decir el proceso de objetivación de los sistemas numéricos); la Teoría de números; la logística (se refiere a las estrategias o herramientas para el desarrollo de cálculos numéricos o procedimientos para hacer operaciones; se considera aquí el uso de ábacos o métodos para hacer operaciones); el concepto de número (alude a las diferentes respuestas que a lo largo de la HM se ha dado a la pregunta qué es un número); y la lúdica aritmética (se refiere a la consideración de objetos que aparecen en la HM, relacionados con la Aritmética como lo son, por ejemplo los cuadrados mágicos, y que tienen un tinte lúdico).

Ahora, en lo que concierne a los **objetos algebraicos**, se tomó como base el estudio de la Historia del Álgebra realizado por Manrique y Triana (2013). Allí se identifican algunos objetos (conceptos o procesos) a saber: ecuación, relaciones entre tipos de números, estructuras algebraicas, simbolización algebraica, generalización algebraica, visualización algebraica y establecimiento de heurísticos.

Los **objetos aritméticos y algebraicos** que se mencionan en el curso EAAA son: sistemas de numeración, sistemas numéricos, Teoría de números, la logística, el concepto de número, ecuaciones (como herramienta para resolver problemas, como objetos de estudio en sí mismas), relaciones entre tipos de números, estructuras algebraicas (de sistemas numéricos específicos, como objetos en sí mismas), simbolización algebraica, y generalización algebraica. Se indica que se mencionan, porque no son estudiados a fondo, aunque algunos de estos son abordados con un poco más de profundidad como lo son: los sistemas de numeración (para distintos tipos de números, esto tiene relación con las representaciones), los sistemas numéricos, las ecuaciones y la simbolización.

3. ¿Cómo se incorpora la Historia de las Matemáticas en el curso?

La incorporación de la HM se puede dar en tres perspectivas o modos: como una alusión, como una integración o para determinar la propuesta curricular. La alusión a la HM se refiere al uso de la HM para presentar anécdotas, hechos, fechas, épocas de interés, obras de matemáticos, ejemplos de problemas matemáticos provenientes de la historia o estudio de estrategias utilizadas para resolver ciertos problemas, bien para introducir un tema o para motivar su estudio. Por su parte, la integración de la HM tiene que ver con la enseñanza efectiva de las Matemáticas y de la HM a través de la HM, el análisis eficiente de los procesos cognitivos del aprendizaje y la comprensión, mediado por la Historia y, la enseñanza de las Matemáticas que incluye su Historia como parte consustancial de las Matemáticas. Finalmente la determinación de la enseñanza a partir de la HM corresponde al uso de la HM de una manera profunda, la HM sustenta o fundamenta las acciones didácticas que se realizan en el aula o la organización curricular en general.

En el curso EAAA se halló que aparece de las tres formas.

3.1. La alusión a la HM

En el curso se considera fundamental dotar a los maestros en formación de respuestas a preguntas como: ¿qué es Aritmética o qué es Álgebra?, ¿cuáles son los objetos de estudio de estas ramas de las Matemáticas?, ¿se han transformado tales objetos a lo largo de la historia?, y ¿tiene la Aritmética y el Álgebra objetos relacionados o son estos independientes? La racionalidad de esta consideración es simple: al enseñar se debe tener claro qué se enseña, con el fin de asumir posturas conscientes y críticas frente a propuestas curriculares explícitas, tanto en la política educativa como en los libros de texto que impactan la enseñanza de las Matemáticas.

En relación con esta forma intervención, en el curso EAAA se alude a anécdotas, hechos históricos, obras o problemas famosos constitutivos de la hAA, que permiten un ámbito de evidencias sobre las relaciones entre estas dos ramas de las Matemáticas y con otras (como lo es la Geometría).

3.2. Integración de la HM

La integración de la HM se hace explícita en la identificación de una secuencia curricular para la enseñanza de la Aritmética y el Álgebra. Después de que los maestros en formación han identificado qué objetos son propios de la Aritmética y el Álgebra, estos se organizan en una línea de tiempo desde la HM y se compara con la secuencia curricular propuesta por los Lineamientos (Colombia – Ministerio de Educación Nacional, 1998) y los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas (Colombia – Ministerio de Educación Nacional, 2006), con el ánimo de reconocer si la secuencia de enseñanza de estos objetos se corresponde con su historicidad. En este sentido, por ejemplo, se procura reconocer si la secuencia típica en la enseñanza de los sistemas numéricos en la vida escolar (N, Z, Q, R, C) se corresponde con la secuencia constructiva históricamente, o si la secuencia de enseñanza de las ecuaciones las involucra como herramienta y como objeto de estudio en sí mismas, tal como se dio históricamente.

Asimismo la integración de la HM se hace explícita para el reconocimiento de representaciones de los diferentes tipos de números (naturales, enteros, racionales, irracionales y reales). Está claro que uno de los aspectos que componen el sentido numérico es la comprensión de distintas representaciones de los números; en esta dirección y buscando que los maestros en formación estén dotados de diversas representaciones de los números para disponer de opciones para llevar al aula, y que sean conscientes de ellas, la HM se utiliza como medio para que los maestros en formación reconozcan representaciones relacionadas con distintos sistemas numéricos. Por ejemplo, para los números irracionales históricamente aparecen las representaciones radicales, los segmentos inconmensurables, la representación decimal infinita no periódica, las fracciones continuas infinitas, las series, entre otras. Más allá de reconocer tales representaciones, la idea en el curso EAAA es que se destaquen ventajas y desventajas de estas al ser llevadas al aula de la Educación Básica o Media y que se construyan justificaciones acerca del porqué aparecen o no en los textos escolares.

3.3. La determinación de la enseñanza a partir de la HM

Esta determinación de la enseñanza proveniente de la HM es evidenciada en la configuración del orden temático en parte del curso EAAA a través de la HM. En las más recientes versiones del curso EAAA se ha planteado un orden temático en el abordaje de elementos propios de la enseñanza y el aprendizaje de sistemas numéricos atiende al orden histórico. En este sentido, se estudian las representaciones, los posibles errores cometido por los estudiantes y reportados en investigaciones, así como posibles interpretaciones y modelos de enseñanza, cuando estos existen, de los números naturales, los números racionales, los números enteros y los números reales.

4. Ejemplos de tareas específicas

Algunas de las consignas de las tareas –que incorporan elementos o tratamientos de la hAA– propuestos a los maestros en formación en el curso EAAA se reportan en cada una de las tablas siguientes.

La tarea 1 expuesta en la Tabla 3 se propone con posteridad a un trabajo que se hace inicialmente con los maestros en formación donde se busca que asuman una postura acerca de lo que consideran es Aritmética y Álgebra a partir de sus experiencias como estudiantes y desde el estudio de documentos curriculares (Lineamientos curriculares de Matemáticas, Estándares básicos de competencias matemáticas, Pruebas SABER colombianas, Principios y Estándares propuestos por el National Council of Teacher of Mathematics, Pruebas PISA y libros de texto de circulación nacional); con base en esa primera idea se espera que los maestros en formación se acerquen a la hAA de una manera argumentada eligiendo sucesos que consideren cruciales para la Aritmética y el Álgebra. La elección del hecho incluye la ubicación de un personaje destacado (se les indica a los maestros en formación que para uno de los hitos debe estar como personaje una mujer, esto para modificar un poco la idea de que en la HM solo hay presencia masculina), así como la época (el objetivo con esto es ubicarlos en una línea de tiempo y aportar a la comprensión de que los sucesos matemáticos no se dan al margen del contexto histórico sino que son fruto de diversas situaciones políticas, culturales y sociales, entre otras) y los obstáculos que se dieron al constituirse tal suceso (con el fin de responder a si ese obstáculo podría verse reflejado en la enseñanza o el aprendizaje de la Aritmética o el Álgebra en la vida escolar).

<table>
<tr><th>Tarea 1</th></tr>
<tr><td>Escribir en un párrafo de no más de 10 renglones qué es Aritmética (hombres) o qué es Álgebra (mujeres), con base en la revisión curricular que se ha hecho sobre la Aritmética y el Álgebra desde Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003), Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006).
A partir de la idea anterior, seleccionar tres hitos históricos (sucesos cruciales, hechos importantes) de la Aritmética o del Álgebra, según corresponda.
Para cada hito, presentar; además del hecho:
i. Personaje(s) involucrado(s) (buscar, en lo posible, que alguno de los personajes elegidos, para algún hito, sea una mujer).
ii. Época.
iii. Obstáculo(s) que se dio(dieron) en la constitución de tal hecho histórico e indicar si este(os) puede(n) verse reflejado(s) en la enseñanza o el aprendizaje de la Aritmética o el Álgebra.
Tales hitos deben ser presentados en un octavo de cartulina (papel periódico, kraft,…) aludiendo a los elementos indicados. Y además deben ser presentados, en un texto, posterior al párrafo inicial indicado en el numeral 1, de manera tal que se tenga clara el porqué de la elección. (No olvidar incluir bibliografía).</td></tr>
</table>

Tabla 3. Tarea 1. Historicidad Aritmética y Álgebra

Esta tarea resulta retadora para los maestros en formación, pero también enriquecedora cuando se hace su puesta en común, pues se amplía la visión sobre la Aritmética y el Álgebra, se establecen nuevas relaciones entre objetos matemáticos, aparecen otros objetos que no habían sido considerados como importantes desde la revisión curricular (en particular lo que corresponde a la objetivación), se identifican concepciones, se hace conciencia sobre la importancia del contexto social en la HM y de las posibles relaciones entre obstáculos epistemológicos y obstáculos de aprendizaje.

Después de la discusión de la tarea se hace una línea de tiempo para establecer relaciones y diferencias entre la secuencia curricular en la escuela y la historia de la constitución de los objetos algebraicos y aritméticos en la hAA, con el ánimo de identificar ventajas y desventajas de una u otra secuencia y construir posturas como futuros docentes de Matemáticas en la construcción de currículo escolar.

Figura 1. Foto de los carteles elaborados por maestros en formación resultado de la Tarea 1. Fuente: Archivo de la formadora (2011).

La tarea 2, detallada en la tabla 4 tiene como objetivo principal aportar al conocimiento del maestro en formación inicial en relación con su sentido numérico identificando distintas representaciones para los conjuntos numéricos enseñados usualmente en la escuela, así como cuestionarlos acerca del porqué algunas representaciones no aparecen en los libros de textos consultados y sus ventajas o desventajas al incluirlas de manera tal que en el momento de su práctica pedagógica acudan a tales saberes y reflexiones.

Algunas de las representaciones, por ejemplo, que se reconocen en la historia y no en los libros de texto son las fracciones continuas y las series para los números irracionales, algunas representaciones con radicales o geométricas (como la de Wallis) para los números imaginarios, configuraciones puntuales para los números naturales y algunas representaciones para los números negativos con varillas o sincopadas. En general los maestros en formación consideran que si bien en los libros de texto se utilizan distintas representaciones para ciertos números, casi siempre aparecen las mismas en los libros, también observan que hay presencia de muchas imágenes en los libros de primaria (fotos de objetos reales y ábacos para los números naturales por ejemplo) que usualmente no son combinadas en el aula con los objetos reales en sí de manera que aporten a la manipulación; además, consideran que hace falta enriquecer el abordaje de los conceptos con otras representaciones tanto desde la misma HM como desde la Didáctica de las Matemáticas (regletas de Cuisenaire, bloques de Dienes o tarjetas de Montessori para los números naturales) así como mayor alusión a representaciones utilizando software especializado (v.g. Geogebra), que ayudan a la comprensión de los estudiantes.

Tarea 2
Según el sistema numérico elegido (Números Naturales, Números Enteros [énfasis en los números enteros negativos], Números Racionales positivos, Números Reales [énfasis en los números irracionales], Números Complejos [énfasis en los números imaginarios]): i. Desde documentos de Historia de las Matemáticas [HM], identificar tipos de representaciones (desde los tipos ya estudiados, por ejemplo: Simbólicos, verbales, gráficos y manipulativos) con ejemplos específicos, fechas y culturas o personajes asociados. ii. Elegir libros de texto (en lo posible de una misma serie editorial para el caso en el que se trate el sistema numérico en distintos años escolares) donde se trate el sistema numérico e identificar allí tipos de representaciones con ejemplos específicos. Indicar cuáles representaciones de las identificadas en la HM no aparecen en los textos escolares y viceversa e indicar sus ventajas y desventajas (para la enseñanza o el aprendizaje).

Tabla 4. Tarea 2. Representaciones y Sistemas Numéricos

Desde la experiencia de los maestros en formación, usualmente la introducción al estudio de las ecuaciones se da través de ejercicios de manipulación y posteriormente aparecen los problemas, por lo cual este se constituye en el modelo a seguir. Con la tarea 3 presentada en el Tabla 5 se busca controvertir esta idea desde el estudio de la historia de las ecuaciones reconociendo que estas surgen desde la resolución de problemas, lo cual se logra de manera satisfactoria ya que además de ser evidente en los documentos históricos, varios libros de texto inician con la solución a un problema.

Tarea 3
Elegir un libro de texto donde se introduzca el estudio de las ecuaciones, describir cómo se hace tal introducción y qué modelos de enseñanza de las ecuaciones se privilegian en el texto. Establecer si hay alguna relación en tal introducción con la Historia de las Ecuaciones (por ejemplo desde lo presentado por Katz (2007) o por Triana y Manrique (2013)) y producir algunos comentarios al respecto. Katz, V. (2007). Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 185-201. Triana, J. y Manrique, J. (2013) El papel de la Historia del Álgebra en un curso de didáctica para la formación inicial de profesores de matemáticas. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, D.C. (pp.40-50).

Tabla 5. Tarea 3. Ecuaciones y modelos de su enseñanza

5. Conclusiones

La hAA estudiada en el curso EAAA procede de fuentes documentales que no necesariamente contienen información histórica especializada o profunda; no obstante esta condición es suficiente para los propósitos formativos del espacio académico en relación con el Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático [CDCM]. Tales fuentes contienen aproximaciones variadas a la HM en las que se entrecruza información sobre los matemáticos, los contextos, los objetos matemáticos, fragmentos de obras matemáticas, problemas matemáticos y sus soluciones, aproximaciones de culturas hegemónicas y no hegemónicas, resultados matemáticos exitosos y no trascendentales, formas de pensamiento matemático, procesos algebraicos, etc. Cada una de estas aproximaciones parece incorporarse a través de las tareas propuestas por la profesora del curso, más que como un fin de aprendizaje mismo en herramienta para favorecer aspectos del CDCM de los futuros profesores.

Definitivamente el ambiente académico de la Universidad Pedagógica Nacional y de su Licenciatura en Matemáticas constituye el escenario que propicia que las preocupaciones e intenciones (personales e institucionales) por integrar la HM al conocimiento del profesor de Matemáticas tenga un lugar, adicional a un curso de HM. Desde una perspectiva analítica se puede entonces reconocer que los discursos meta-matemáticos (como el procedente de la Didáctica de las Matemáticas o de la HM) tienen un lugar de encuentro en cursos como el de EAAA y se procuran poner al servicio de la formación de conocimiento y competencias de los futuros profesores de Matemáticas.

Un papel importante asignado a la hAA en el espacio EAAA tiene que ver con la potencialidad adjudicada a la HM de ampliar la visión de la Matemática, de sus disciplinas, de los objetos matemáticos (conceptos, procesos, procedimientos, heurísticas, entre otros), los contextos científicos de surgimiento e intervención de las Matemáticas, las vicisitudes humanas que acompañan la construcción de una obra matemáticas, etc. Este papel supera la visión utilitaria de la HM como una panacea para los problemas educativos de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas o de la consideración de la HM como discurso motivacional o discurso de contexto de los temas de Matemáticas que se estudian en la Educación Básica o Media.

Es preciso destacar que si bien no se reconoce una variedad de apuestas metodológicas para ubicar la HM en el curso EAAA, sí se advierte una constante y es la preocupación de que la hAA se convierta en un conocimiento funcional para el profesor de Matemáticas, por ejemplo constituyéndose en un discurso que permita comparar con aspectos curriculares, con aspectos cognitivos e incluso con aspectos epistémicos.

Aunque pueda parecer una verdad de Perogrullo, está claro que incluir una perspectiva histórica para favorecer el CDCM de los futuros profesores de Matemáticas implica y requiere necesariamente tanto una formación en HM, por parte del formador, como una convicción de que esta puede integrarse en un espacio de formación, en donde el discurso matemático y el didáctico interactúan. Si bien la formación del formador de profesores de Matemáticas no fue objeto de estudio en la investigación, la observación y el análisis de algunos videos tomados lleva a reconocer que la tarea de incorporar la HM al CDCM es altamente exigente y requiere que el formador tenga no solo un conocimiento histórico sobre los asuntos de la Aritmética y el Álgebra, sino que tenga la competencia de hacer diseños curriculares en donde el mismo se ponga en juego a favor del aprendizaje y desarrollo del CDCM de sus estudiantes, futuros profesores de Matemáticas. Tal proceso implica necesariamente disponer de un conocimiento sobre el CDCM y al menos unas intuiciones de cómo favorecerlo.

Bibliografía

Belisario, A., & González, F. E. (2012). Historia de la Matemática, Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, [En línea] 31, 161-182. Recuperado el

16 de marzo de 2014, de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/31/archivo_16_de_volumen_31.pdf

Colombia - Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Bogotá: MEN.

Colombia - Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN.

Gálvez, A., Maldonado, A. (2012). *El papel de la Historia de la Aritmética en un curso de Didáctica para la formación inicial de profesores de matemáticas*. [Tesis de maestría]. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C., Colombia.

Grattan-Guinness, I. (2004). The mathematics of the past: Distinguishing its history from our heritage. *Historia Mathematica, 31*(2), 163–185.

Guacaneme, E. A. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista Virtual Educyt,* [En línea] 2(2), 136-148. Recuperado el 8 de noviembre de 2012 de http://revistalenguaje.univalle.edu.co/index.php/educyt/article/view/1826/1759

Jankvist, U. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235-261.

Mora, L. (2009). *Documento de avance de propuesta para orientar el diseño del espacio académico: Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra*. [Documento interno de trabajo] Bogotá, D.C.: Universidad Pedagógica Nacional.

Mora, L. y Guacaneme, E. (2014). La Historia de las Matemáticas como organizador curricular a favor del Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático. Ponencia presentada en el *XII Coloquio Regional de Matemáticas y II Simposio de Estadística*, San Juan de Pasto (Nariño-Colombia) 21 a 23 de mayo de 2014.

Triana, J., Manrique, J. F. (2013). *El papel de la Historia del Álgebra en un curso de Didáctica para la formación inicial de profesores de matemáticas*. [Tesis de maestría]. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C., Colombia.

Mora Mendieta Lyda Constanza: **Profesora en la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. (Colombia). Licenciada en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Magíster en Docencia de la Matemática de la misma universidad, y Experta Universitaria en Diagnóstico y Educación de Alumnos con Alta Capacidad de la UNED**. lmendieta@pedagogica.edu.co

Guacaneme Suárez Édgar Alberto: **Profesor en la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. (Colombia). Licenciado en Ciencias de la Educación Especialidad Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, y Magíster en Educación con Énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle**. guacaneme@pedagogica.edu.co

Jiménez Gómez William Alfredo: **Profesor en la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. (Colombia). Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Magister en Docencia de la Matemática de la misma universidad.** wjimenez@pedagogica.edu.co

Lyda Constanza Mora Mendieta.
lmendieta@pedagogica.edu.co
Calle 72 11-86 Oficina B-316. Bogotá, D.C. – Colombia
+57 1 5941894 Ext. 254

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 207-219

El caleidoscopio en la enseñanza de la geometría

Ronnys Vicent Millán

Fecha de recepción: 18/06/2014
Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	El artículo describe los beneficios pedagógicos que se generan con el uso de un caleidoscopio en la enseñanza de la geometría. Se reseñan su concepto, historia, explicación científica y al final se detalla su construcción en tres momentos (antes, durante y después) y cómo puede ser utilizado como recurso didáctico y lúdico en la enseñanza de la geometría, enfocando terceros aspectos como la creatividad artística, la motricidad, la física óptica, el dibujo técnico, entre otros. **Palabras clave**: Enseñanza de la Geometría, caleidoscopio, creatividad.
Abstract	This article describes the pedagogical benefits that are generated by the use of a kaleidoscope in the teaching process of geometry. It reviews its definition, history, scientific explanation and at the end its construction is detailed in three stages (before, during and after), and how it can be used as didactic, playful resource in the teaching process of geometry, focusing on third aspects such as: artist creativity, motor, optical physics, the technical drawing, and so on. **Keywords**: Geometry teaching, kaleidoscope, creativity.
Resumo	O artigo descreve os benefícios de ensino que são gerados com a utilização de um caleidoscópio para ensinar geometria. Delineamos o seu conceito, a história, a explicação científica e ao final é detalhada sua construção em três fases (antes, durante e depois) e como ele pode ser usado como recurso educacional e recreativo no ensino de geometria, com foco em outros aspectos como criatividade artística, motora, física óptica, desenho técnico entre outros. **Palavras-chave:** Ensino da Geometria, caleidoscópio, criatividade.

1. Introducción

La formación de las nuevas generaciones va encaminada hacia la consolidación de un ciudadano integral, humanista y con altos estándares éticos y morales, bajo recursos tecnológicos, científicos y culturales que convergen en un hombre al servicio de su comunidad. Es así que la formación del docente debe orientarse a promover recursos y estrategias adecuadas que fortalezcan la educación que requerimos en el siglo XXI. A pesar de todo el esfuerzo que se ha hecho por mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las distintas disciplinas, aún queda mucho por socializar en pro de su mejora, siendo esto un proceso dinámico y por tanto variable.

En Venezuela, las políticas de Estado en educación viene promoviendo alternativas para la formación de un hombre crítico y humanista, sin obviar las competencias tecno-científicas necesarias en su preparación (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2007, p. 11). Ahora bien, en el marco de esta preocupación, mayor ha sido el interés por las llamadas “materias críticas” (matemática, física y química), y esto no sólo por el grado de dificultad de ellas, sino por la deficiencia académica de muchos docentes del área y por el bajo rendimiento de los estudiantes; todo esto sin considerar el hecho de que estas disciplinas constituyen los cimientos para el trabajo científico y tecnológico que mueve un país.

Particularmente en la enseñanza de las matemáticas los docentes deben apoderarse de recursos motivacionales, de actividades lúdicas y de la aplicabilidad que pueda tener ella en la vida de los estudiantes. Creemos que para el logro de esta nueva visión las instituciones formadoras de docentes en matemática deben adherirse a otras formas de enseñanza; desligándola de la clase discursiva y permitiendo que los estudiantes se apropien de los contenidos a través de la manipulación de recursos.

Considerando lo expuesto, en el trabajo se pretendió mostrar al caleidoscopio como un recurso significativo, motivador y lúdico para la revisión de algunos conceptos elementales de la geometría plana y del espacio. En el artículo expondremos las ideas básicas de un caleidoscopio: concepto, historia, construcción y explicación física del fenómeno, luego reconoceremos algunos autores que han recomendado su uso y al final detallamos las bondades pedagógicas para la revisión de algunos conceptos de la geometría y otras áreas del conocimiento.

2. ¿Qué es un caleidoscopio?

El caleidoscopio es un aparato óptico, construido con tres espejos de forma rectangular que se unen para formar un prisma tetraédrico (con la parte reflectante hacia el interior), este es introducido en un tubo de forma cilíndrica circular; por un extremo del tubo se coloca una tapa con un orificio para visualizar las figuras, y por el otro extremo objetos de color (como canutillos), con lo cual podemos observar extrañas y diferentes formas simétricas. La palabra caleidoscopio proviene de tres términos griegos: *kalos*, que quiere decir bello; *eidos*, que significa forma y *scopeo*, que significa observar. Por lo tanto, “*kaleidoscopio*”, significa "instrumento para observar formas bellas", lo cual describe etimológicamente el significado concreto del objeto (Sierra, 2008, p. 8).

3. Historia del caleidoscopio

Considerando lo descrito por la Brewster Society (La Sociedad Brewster) se apunta que la observación de figuras y elementos simétricos dados a través de la reflexión viene desde la misma antigüedad; diferentes investigadores concuerdan en que los egipcios colocaron dos o tres piedras de caliza pulida juntas en diferentes ángulos y observaban las formas expuestas por bailarines humanos, y es quizás ésta una de las primeras formas de presentación de un caleidoscopio (tomado de la página Web “Ave Kaleidoscopio”).

Ahora bien, en 1816 Sir David Brewster descubrió el fenómeno óptico, que cerró en un tubo pequeño. Este prodigio en la construcción de telescopio y polifacético señor fue capaz de abordar temas de investigación científica, así como también de religión, filosofía, educación, óptica, fotografía, escritura, entre otros. Para la época victoriana el caleidoscopio fue estudiado por diferentes curiosos en distintos países, llegando a Norteamérica en el año de 1870. Charles G. Bush (1825-1900) fabricó una variedad de caleidoscopios que hoy día se han convertido en objetos de valor y colección (tomado de la página Web “Ave Kaleidoscopio”).

Cozy Baker fundó la Sociedad Brewster en 1986, ella fue la primera en escribir un libro sobre el tema. Durante 18 años fue Cozy la única persona de La Sociedad Brewster, ella hacía de enlace entre los artistas, comerciantes y coleccionistas, además se encargó de la escritura y publicación de un boletín trimestral, y la planificación de una convención anual en diferentes ciudades. Cozy fue autora de seis libros sobre caleidoscopios, y convirtió su casa de Bethesda en una casa-museo para los miembros de La Sociedad Brewster (tomado de la página Web “Ave Kaleidoscopio”).

4. ¿Cómo se construye un caleidoscopio?

Diferentes formas, tamaños y colores puede tener el caleidoscopio, pero en general para elaborar uno común o casero podemos considerar las siguientes ideas: entre los materiales más comunes para su construcción están CD, DVD o espejos, cartulina o tubo de cartón, láminas de acetatos de distintos colores y cajitas de plástico transparente (canutillos), material translúcido, tijeras, rotulador indeleble, cinta adhesiva, entre otros. Pasos para la elaboración:

1. Tomamos tres espejos cortados en forma rectangular, todos de igual tamaño (recomendamos de 18cm de largo por 3cm de ancho, y si queremos un caleidoscopio más pequeño sugerimos 10cm de largo por 3cm de ancho); colocados con la parte reflectora hacía abajo y sujetamos con cinta adhesiva, como se muestra a continuación en la figura 1:

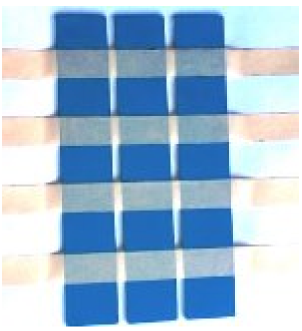


Figura 1. Espejos.

Fuente: Vicent (2013)

2. Formamos un prisma triangular con la parte reflectora de los 3 espejos hacia dentro; sujetamos con cinta adhesiva e introducimos en un tubo de cartón de forma cilíndrico (recomendamos un tubo de cartón de 20cm o más). Ver figura 2:

Figura 2. Prisma triangular de espejos

Fuente: Vicent (2013)

3. En uno de los extremos del cilindro construimos un visor, es decir, una tapa o cartulina cortada de forma circular con un agujero en el centro, este servirá para cubrir la parte superior del tubo por donde realizaremos las observaciones. Como mostramos en la figura 3:

Figura 3. Tapa de visualización

Fuente: Vicent (2013)

4. Para la construcción del caleidoscopio común, en el otro extremo del tubo o cilindro (parte posterior) colocamos primero un plástico (o vidrio) transparente, luego una pequeña cantidad de canutillos (recomendamos no más de tres colores distintos) y encima de ellos colocamos otro material plástico traslúcido (u otro vidrio y un papel no tan oscuro). Cada una de las tapa deben quedar bien pegadas para que no suelte los canutillos. Ver la figura 4:

Figura 4. Proceso final

Fuente: Vicent (2013)

5. A continuación observamos por el mirador las imágenes que se forman con el calidoscopio realizado. Es importante mencionar que el tubo cilíndrico del caleidoscopio es una buena oportunidad para estimular la creatividad artística del estudiante solicitándole que decore el exterior a su gusto, dejándoles libertad artística. Ver un ejemplo de las figuras que se forman en la figura 5:

Figura 5. Ejemplo de figura de un caleidoscopio

Fuente: Vicent (2013)

Estas son algunas orientaciones generales, pero para la construcción podemos utilizar otros materiales tomando en cuenta el tipo de caleidoscopio que queremos construir.

5. Explicación del fenómeno óptico del caleidoscopio

Recordemos que el caleidoscopio básico está formado por tres espejos enfrentados que forman un prisma triangular, quedando la parte de visualización en lo interno del prisma. De acuerdo a la física óptica, la luz viaja en línea recta, cuando uno de los pedacitos de los canutillos (u otro material) se refleja en uno de los espejos, éste rebota y se mostrará en los otros dos espejos, y esto vuelve a ocurrir sucesivamente; formando las figuras que observamos. Es importante considerar el hecho de que este proceso de rebote es continuo, además al hacer girar el caleidoscopio podremos observar otras formas, ya que los canutillos cambiarán de posición generando nuevas imágenes; “irrepetibles pues hay tantos pedacitos de plástico que es prácticamente imposible que todos estén dos veces exactamente en el mismo lugar al mismo tiempo” (García, 2009, pp. 9-12)

6. Antecedentes teóricos del caleidoscopio en la enseñanza de la geometría

La Geometría ha sido medio de sustento para el hombre, en el sentido de que diferentes profesiones hacen uso de ella (como la carpintería, la construcción, la jardinería, el corte y confección, la ingeniería, la topografía, entre otras); por lo que se reconoce su aplicación como una actividad inherente del ser humano, que propicia el trabajo liberador, tal como lo exige la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999) en sus Artículos 87 y 88, donde menciona que toda persona tendrá derecho a un trabajo que le produzca una existencia digna y decorosa; esto concuerda con lo que refleja El Proyecto Nacional Simón Bolívar (2007) sobre el fortalecimiento de las capacidades básicas para el trabajo productivo y vinculado con los intereses plasmados en los Artículos 14 y 15 de la Ley Orgánica de Educación (2009) que expresa que ésta tiene como deber social la formación integral, de calidad, promoviendo el trabajo y la participación activa de todos.

Por lo que es necesario, que a través de la educación, y en específico la enseñanza de la geometría, el estudiante alcance destrezas en esta área para un trabajo que lo dignifique, y que simultáneamente le permita avanzar en el conocimiento, desarrollar el pensamiento lógico-matemático y fomentar una cultura participativa en lo social, académico, y cultural. Partiendo de estas ideas, la construcción del caleidoscopio en la enseñanza de la geometría debe permitir al estudiante formarse para un trabajo para el futuro, de modo que pueda utilizarlo como un mecanismo de ayuda económica, adquiriendo habilidades para divulgar las técnicas aprendidas a aquellos interesados en la construcción del aparato.

Es importante considerar que el uso del caleidoscopio como recurso para la enseñanza de la geometría es un aspecto que ha sido poco explorado, sin embargo, algunos autores han propuesto algunas ideas para su uso. Partiendo de la importancia de la geometría dentro de la matemática y de las metodologías mayormente utilizadas en su enseñanza se describen distintos recursos tales como el geoplano, el tangram, policubos, geotiras y entre ellos se destaca el caleidoscopio como un instrumento viable para la enseñanza de este tópico, ya que será útil para concebir la idea de poliedros y especialmente para ver la simetría presente en distintas figuras del plano y del espacio (Sierra, 2008, p. 8).

Otros Investigadores concuerdan que el uso de los espejos en la enseñanza de la matemática debe tener como finalidad académica abarcar temas como simetría, polígonos regulares y relaciones en el plano; además el docente puede promover la creatividad de los estudiantes a través de plantear situaciones que lo desafíen (Murari, Pérez y Barbosa, 2001). De aquí que el caleidoscopio representa en la geometría un instrumento clave para la revisión de distintos conceptos.

Sin embargo, tal como describimos a inicios del artículo, es poco lo que se ha explorado o escrito en relación del uso del caleidoscopio en la enseñanza de la geometría. Los autores antes mencionados describen el uso de espejos y caleidoscopios pero no profundizan en el asunto, sino que lo recomiendan entre otros recursos, haciendo un paseo superficial del tema.

Ahora bien, desde nuestra perspectiva y en función de las experiencias que hemos tenido con el uso del caleidoscopio en la enseñanza de la geometría y agregado a lo previamente descrito por otros autores, creemos conveniente adelantar que los objetivos principales que debería perseguir la construcción del caleidoscopio en el aula de clase deben abarca los siguientes aspectos:

1. Estudiar algunos conceptos básicos de la geometría, tales como: Formas regulares e irregulares, ángulos, simetría, congruencias, cálculo de área, volumen, perímetro, entre otros.

2. Desafiar el pensamiento lógico-matemático de nuestros estudiantes, a través del cuestionamiento, confrontación de ideas, planteamiento de situaciones-problemas, entre otras técnicas pedagógicas adecuadas al contexto del grupo de estudiantes.

3. Reconocer cómo funciona un caleidoscopio y por qué se forman las imágenes que vemos con él, lo que implica llevar a cabo algunas experiencias de óptica relacionadas con la reflexión (temática estrechamente ligada a la física óptica)

4. Incentivar el estudio del Dibujo Técnico a través de la realización de mosaicos observados en el caleidoscopio.

5. Promover el trabajo individual y cooperativo, que incluya una horizontalidad en la relación docente estudiante, para que éste último se sienta en confianza y muestre una actitud favorable hacia el aprendizaje de la matemática a través del uso del caleidoscopio.

6. Impulsar el trabajo liberador, fomentando espacios para cultivar la motricidad de nuestros estudiantes, y mostrando técnicas geométricas que puedan utilizar luego en un trabajo práctico.

7. Estimular la creatividad y el arte, ideando mecanismos de independencia artísticas, donde cada participante explore su idiosincrasia y genere expresiones artísticas que permitan al docente conocerlo.

8. Propiciar la interdisciplinariedad, a través del impulso de los objetivos previos.

Las actividades con el caleidoscopio deben ser un recurso principalmente motivador, fomentando el intercambio de experiencias entre compañeros, donde éstos sientan la libertad de disfrutar de un buen aprendizaje. A continuación describimos las ideas que han surgido a través de nuestra misma experiencia, donde iremos detallando qué hacer desde la construcción del caleidoscopio para enseñar algunos contenidos de la geometría, paseándose por otras asignaturas o áreas de conocimiento.

7. Enseñanza de la geometría a través del caleidoscopio

7.1. Antes de la construcción

Lo primero será incitar la curiosidad de nuestros estudiantes a la construcción del aparato. En el texto Pedagogía de la Autonomía se pone de manifiesto la necesidad que el docente sea quien incentive la curiosidad ya que a través de ella los actores principales del hecho educativo no sólo enseñan sino que aprenden, de allí que podemos utilizar diferentes técnicas, entre ellas la pregunta, motivando a una respuesta del estudiante (Freire, 2004, p.39). Para estimular al estudiante a la construcción del caleidoscopio lo recomendable será llevar uno y mostrarlo al grupo de alumnos, e inquietarlos a través de algunas preguntas: ¿qué hay dentro del aparato?; ¿qué formas se visualizan?; ¿cómo se dan estas formas?; ¿qué parecidos ves?, entre otras, que abra posibilidades a la discusión.

Durante las observaciones al caleidoscopio podemos hacer mayor énfasis en las figuras geométricas, solicitándole que identifiquen y dibujen formas conocidas por ellos, tales como el triángulo, el cuadrado, la circunferencia, el rombo, el rectángulo y otros. Esto nos permitirá hacer un diagnóstico de los conceptos de figuras en el plano (y quizás en el espacio) que tienen nuestros estudiantes, y dependiendo del nivel escolar del niño cabe la posibilidad de revisar propiedades y otras características de ellas. Con estas observaciones el docente considerará aquellos contenidos que puede abarcar y/o reforzar con el uso del caleidoscopio.

Luego de estas primeras observaciones, procedemos a la construcción del aparato; es importante destacar que aquí detallaremos lo descrito en este artículo bajo el subtítulo *"¿cómo se construye un caleidoscopio?*", con lo cual el interesado podrá adquirir mayor destreza. Lo esencial será que cada participante pueda experimentar a través de cortar, dibujar y medir, para ello es recomendable una buena planificación donde se detallen los pasos, materiales, medidas bien específicas, contenidos matemáticos a resaltar en cada uno de los pasos, entre otros aspectos.

Para la construcción del caleidoscopio recomendamos revisar los materiales desde la perspectiva matemática. Por ejemplo, podemos hacer ver a nuestros estudiantes la forma cilíndrica del tubo de cartón a utilizar, definir cilindro circular recto, ver sus características, revisar la fórmula para volumen de un cilindro circular recto, medir su altura, calcular el área de la base a través de la aproximación del diámetro y con estos resultados calcular el volumen del cilindro; también es posible calcular el radio de la base (quizás usando hilo y la regla o una cinta métrica) usando la longitud del contorno circular, es decir la longitud o perímetro de la base circular.

Otra actividad con el cilindro es aproximar el área de su superficie, para ello podemos sobreponer una cartulina al cilindro y copiar su forma y tamaño, luego extendemos la cartulina obteniendo una forma rectangular, con lo cual será más fácil determinar una fórmula que nos sirva para calcular el área de la superficie de cualquier otro cilindro, además de hacer comparaciones con la fórmula de volumen. Si el docente lo cree conveniente puede considerar diferentes tamaños para el caleidoscopio (quizás dos o tres tamaños) para que los participantes observen que se cumplen las mismas características para cilindros de tamaños distintos.

Las formas rectangulares de los espejos permiten que el docente explore las ideas que tienen los estudiantes sobre el rectángulo: ángulos rectos, vértices, diagonales, lados, y avanzando en conocimiento podemos calcular con ellos el área y perímetro del rectángulo. Con los tres espejos de igual forma y tamaño podemos reconocer el concepto de congruencia entre figuras en el plano. Durante todo el proceso de medición, previo a la construcción del caleidoscopio, el docente puede hablar de las unidades de medidas de longitud, para nuestro caso el sistema métrico y algunos submúltiplos; podemos realizar casos sencillos de transformación de una unidad de medida a otra (aspecto que tiene relación directa con el estudio de la física y con la matemática de 3er año de Educación Media General, que comprende a jóvenes de entre 13 y 15 años de edad). Bajo esta misma idea podemos revisar otras medidas, como las que aparecen en algunos materiales que utilizaremos, por ejemplo, un frasco de pegamento de papel tienen descrito el volumen que contiene, aprovechando de enfatizar la necesidad de estas medidas en el contexto real del estudiante.

7.2. Durante la construcción

El primer paso a realizar con los espejos rectangulares es formar un prisma de base triangular (o prisma tetraédrico). Con ello podemos revisar el concepto de prisma, lo que representa una base en forma triangular (para nuestro caso un triángulo equilátero), reconocer otros prismas de bases distintas, recordar que el volumen de un prisma cualquiera es el área de su base por la altura. Además, el alumno podrá observar el paralelismo en las bases y la congruencia entre ellas; debe quedar en evidencia que las bases no siempre son polígonos regulares y dependiendo del nivel del grupo, plantear problemas que involucren esta forma en específico, tales como calcular el volumen del prisma tetraédrico, caracterizarlo, nombrar sus partes, reconocer las medidas de los ángulos que se forman en la base triangular y estudiar el triángulo equilátero. El docente puede cuestionar al estudiante sobre el cálculo del área de la superficie lateral del prisma tetraédrico y compararlo con la suma de las áreas de los tres espejos rectangulares e intentar que ellos generalicen para otros prismas de bases distintas.

Ahora introducimos el prisma al cilindro circular recto. En este punto el estudiante ha determinado el volumen del cilindro (previo a su construcción) y del prisma de base triangular; con estos valores podemos calcular las diferencias entre ambos volúmenes, y solicitar a los estudiantes que reflexionen sobre dicho asunto, destacando aquí la necesidad de comparar medidas en una misma unidad, es decir, preguntarnos *"¿cuánto de esto cabe aquí?*"; dependiendo del nivel, trabajaremos otros problemas de aplicabilidad, por ejemplo, muchas empresas utilizan cajas para ciertos aparatos como celulares, neveras, cocinas, entre otros, y necesitan de precisión numérica para determinar el gasto en material y comodidad del aparato que transportará la caja de manera que esta no se dañe. En ocasiones, al introducir el prisma de espejos en el cilindro, no queda ajustado, lo recomendable es rellenar con algún material como papel periódico (de reciclaje); éste relleno es aproximadamente la diferencia entre los volúmenes que tratábamos a principio, lo cual es propicio para que el alumno compare medidas.

Al realizar las formas circulares de las tapas (delantera y posterior), podemos trabajar con las medidas recogidas previamente sobre el radio de la base del cilindro circular, considerando ser precisos a través del uso de juegos de geometría (particularmente de regla y compás). Para la tapa delantera podemos utilizar cartón grueso, que debe tener un pequeño orificio circular en el centro, que llamaremos mirador. Con esta tapa podemos observar círculos concéntricos, determinar su área total y el área real (representada por la diferencia del área total menos el área del mirador), su perímetro, compararlas, verificar propiedades de la circunferencia y del círculo, diferenciar los conceptos de circunferencia y círculo.

Intentaremos que el prisma de espejos quede completamente pegado a la tapa delantera, quedando un espacio de unos 5 cm mínimos en la parte posterior, donde colocaremos primero una tapa de material plástico transparente que toque al prisma, luego colocamos unos pocos canutillos (mostacilla u otro material), de no más de tres colores, dejando espacio para que rueden libremente; encima colocamos otro material de plástico translúcido pero no transparente totalmente (de cualquier color, por ejemplo sirven el plástico que se usa para la encuadernación de trabajos) e igualmente sellamos con algún pegamento.

Durante el proceso podemos inquietar a los estudiantes con preguntas como el volumen del espacio de 5cm del cilindro que hemos dejado, la diferencia entre el total del volumen original y este nuevo volumen, cuestionar si será posible aproximar la separación necesaria de los canutillos para que exista el movimiento entre ellos, para que se den las formas deseadas.

Una vez encerrado nuestro caleidoscopio, promoveremos la creatividad y el arte de cada uno de ellos a través de permitirles adornar la parte externa del tubo; aquí es importante mencionar que si un estudiante desea cubrir su caleidoscopio con un papel de adorno que venden en los comercios es posible comprar la cantidad aproximada necesaria, gracias al conocimiento previo del área de la superficie cilíndrica. Hemos de notar que el caleidoscopio no sólo promueve el conocimiento geométrico sino que fomenta la creatividad, el ingenio, la motricidad, y el arte presente en cada uno de nuestros estudiantes.

7.3. Después de la construcción

Ya con el caleidoscopio en nuestras manos concurren diferentes ideas que se consiguen abarcar con las figuras que describe el aparato. Este es el momento adecuado para que nuestros estudiantes investiguen un poco sobre la explicación científica del fenómeno que ocurre en un caleidoscopio y su historia, y con ello abrir la posibilidad a la discusión grupal y el compartir de ideas. Es importante que el docente esté bien preparado en los temas a discutir, dándole posibilidad a aclarar dudas y sugerir nuevas preguntas, para ello quizás sea necesario acompañarnos de un docente especialista en el área de física. En Venezuela, el tema de la Óptica se inicia en la enseñanza de la física en 3er año de Educación Media General (jóvenes de entre 13 y 15 años de edad), con lo cual estamos intentando aproximar la interdisciplinariedad.

Debemos dar tiempo que el estudiante admire su creación, la disfrute y juegue con ella, la comparta y que sea capaz de distinguir formas, figuras, congruencias, simetrías, proporcionalidades, entre otros. Seguido a esto podemos solicitar a los participantes mirar una forma en específico que llame su atención e intentar, con regla y compás, dibujarla en un block o cualquier página en blanco, de manera que pudiera realizar un estudio más exhaustivo del caso, ver congruencias, simetrías, figuras concéntricas, estudiar la idea de ángulos, polígonos, calcular áreas, perímetros, y otros. Con esta actividad buscamos que el estudiante sea creativo, use adecuadamente los implementos geométricos, reconozca otras formas geométricas pocos comunes como ovoides, óvalos, entre otros; es importante destacar que esta actividad está estrechamente ligada al dibujo técnico, que es un área de conocimiento que suele enseñarse en Venezuela en algunas instituciones de 1ero a 3er año (jóvenes entre 11 y 15 años de edad) como parte de una asignatura denominada Educación para el Trabajo y en 4to año de Ciencias (jóvenes entre 15 y 17 años de edad) se enseña como asignatura obligatoria; con ello pretendemos nuevamente aproximar la interdisciplinariedad.

Quizás sea interesante que con los dibujos que han plasmado en el papel (o block) sean coloreados para formar mosaicos que expresen su creatividad artística y sean presentados en la institución a otros alumnos y docentes, enmarcados en madera u otro material para colocarlos como adornos en el hogar, representando esto último un posible trabajo para nuestros aprendices, tal como lo exige nuestra constitución y que hemos descrito a principio del artículo. El docente puede aprovechar los mosaicos para determinar áreas de figuras regulares y no regulares, áreas de las figuras de un determinado color y así ir planteando otras situaciones.

Otros asuntos pueden ser intervenidos con el uso del caleidoscopio, por ejemplo pedir al estudiante que compare las figuras observadas con objetos conocidos por ellos; dentro de nuestra experiencia hemos escuchado distintos aspectos que se relacionan en forma tales como el ADN, Cadenas Carbonadas en química, figuras de puertas, ventanas, anillos y otros. Un caleidoscopio puede inspirar a un herrero, carpintero, albañil, arquitecto, pintor, orfebre y alfarero a reconocer formas admirables que pudiera utilizar como figuras decorativas en su trabajo.

En definitiva el caleidoscopio y su construcción admite el trabajo individual y grupal para el estudio de figuras geométricas con la colaboración del docente, reconociendo el antes, durante y después como un medio que ostenta tópicos de la geometría, además reconoce la interdisciplinariedad a través de su estudio desde la perspectiva del arte, la física óptica y el dibujo técnico (Educación para el Trabajo).

8. Conclusiones

El uso del caleidoscopio como recurso didáctico debe ser una actividad placentera, que despierte la curiosidad de nuestros estudiantes y que sientan libertad en hacer las actividades a ejecutar. Para ello el docente debe situarse en el nivel en que está ubicado el grupo y considerar las actividades a planificar de acuerdo a la edad; es necesario que con la construcción y uso del caleidoscopio en la enseñanza y aprendizaje de la geometría incentivemos las habilidades visuales, de comunicación de ideas, de dibujo y construcción de figuras, de razonamiento y de transferencia o aplicabilidad.

Dentro de los contenidos geométricos que podemos abarcar antes, durante y después de la construcción de un caleidoscopio podemos resaltar los siguientes: figuras poligonales regulares e irregulares, ángulos, perímetro, área, volumen, unidades de medidas de longitud, circunferencia y círculo, figuras en el espacio (particularmente el cilindro y el prisma tetraédrico), simetría, congruencia, proporcionalidad y uso de instrumentos geométricos. Muchos de estos contenidos fueron descritos punto por punto en el artículo, en todo caso lo importante es que el docente sea creativo y explore los contenidos que cree puede abarcar con sus estudiantes.

Durante el proceso de construcción podemos considerar el análisis de otras áreas presentes en el caleidoscopio, por ejemplo en la física óptica a través de la discusión del fenómeno en cuestión; en el dibujo técnico como medio de representación de mosaicos y en el arte y la creatividad que se desprende de la decoración del aparato y de las figuras o mosaicos que se ha plasmado en una hoja de block, que además representa un trabajo a futuro, lo cual está ligado a la idea de profesiones como carpinteros, albañiles, ingenieros y otros.

La idea es que sea el docente quien incentive al estudio de la matemática a través de recursos motivadores y que fomente la interdisciplinariedad; para ello las universidades formadoras de docentes en el área deben promover espacios para ideas innovadoras en la enseñanza de esta disciplina.

Bibliografía

Ave Kaleidoscopio. Historia del Caleidoscopio. [En línea]. Recuperado el 12 de diciembre de 2010, de: http://www.actiweb.es/avecaleidoscopios/historia_.html

Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999). Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela Nº 5453 (Extraordinario), 24 de marzo de 2000.

Freire, P. (2004). Pedagogía de la Autonomía. Sao Paulo: Paz e Terra S.A.

García Sepúlveda, S. (2009). Juguetes en Física. Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas [en Línea], 20. Recuperado el 26 de marzo de 2011, de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_20/SILVIA_GARCIA_%20SEPULVEDA02.pdf

Gobierno Bolivariano de Venezuela (2007). Proyecto Nacional Simón Bolívar. Primer Plan Socialista. Caracas.

Ley Orgánica de Educación (2009). Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela N° 5929 (Extraordinario), 15 de agosto de 2009.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2007). Currículo Nacional Bolivariano. Proyecto: Diseño Curricular del Sistema Educativo Bolivariano. Caracas: CENAMEC

Murari C, Pérez G. y Barbosa R. M. (2001). Caleidoscopios educacionales: coloraciones múltiples. UNO [en Línea], 27. Recuperado el 5 de junio de 2011, de http://uno.grao.com/revistas/uno/027-las-tareas-matematicas/caleidoscopios-educacionales-coloraciones-multiples

Sierra, G. (2008). Didáctica de la Geometría. Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas [en Línea]. Recuperado el 8 de marzo de 2011, de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_11/GUILLERMO_SIERRA_1.pdf

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. NÚMEROS [en línea], 78. Recuperado el 05 de febrero de 2012, de http://www.sinewton.org/numeros

Autor:

Vicent Millán; Ronnys Jesús**: Profesor asistente adscrito al Departamento de Matemática del Instituto Pedagógico de Maturín – Venezuela. Magister en Educación Mención Enseñanza de la Matemática. Publicaciones en temáticas como actitudes hacia la matemática y la geometría en trabajos de oficio en comunidades rurales. Vocal en la Asociación Venezolana de Educación Matemática**

Datos de identificación del autor:

Vicent Millán; Ronnys Jesús; correo electrónico: ronnys85@hotmail.com; teléfono: 04249416164

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 220-226

El rincón de los problemas
Funciones discontinuas en situaciones cotidianas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Use la situación que se muestra a continuación, para ilustrar casos de continuidad y discontinuidad de una función en el intervalo [0; 17].

En la bodega "TODO BUENO" hay un cartel con la siguiente oferta:

Paquete de 6 kilos de arroz por 15 soles.
Precio por kilo: 3 soles

El concepto de función es sumamente importante en la matemática y entre los diversos tipos de funciones, las funciones reales de variable real continuas y las discontinuas, son parte esencial del análisis matemático. En los libros de cálculo diferencial es infaltable mostrar funciones continuas y funciones discontinuas; es usual mostrar las funciones discontinuas a partir de gráficos de funciones que presentan "saltos" o "vacíos", de modo que no pueden trazarse "sin levantar el lápiz del papel"

Es natural encontrar funciones discontinuas en un libro de cálculo diferencial; sin embargo, cabe preguntarse si encontramos funciones discontinuas en "la vida real", en situaciones cotidianas.

Con este pensamiento en el cerebro, advertí que en los lugares de estacionamiento de vehículos – que en Perú reciben el curioso nombre de "playas de estacionamiento" – la manera usual de establecer sus tarifas de cobro por el servicio lleva a funciones discontinuas. Así, considerando la tarifa de pago:

"**4 soles por hora o fracción**",

inicié mi clase sobre funciones continuas, en el curso de Análisis en la recta real, de la maestría en enseñanza de las matemáticas, pidiendo a mis alumnos que grafiquen la función *P* correspondiente al pago de *P*(*t*) soles por *t* horas de estacionamiento. Luego de unos minutos de trabajo personal o con los compañeros vecinos, observé que habían hecho algunas gráficas y para que quede claro para todos, procedimos a hacerla socializando las experiencias.

Construimos una tabla como la siguiente:

Tiempo t (en horas)	Pago $P(t)$ (en Soles)
0	0
0,5	4
0, 75	4
1	4
1, 25	8
1, 5	8
2	8
2,1	12
2,9	12
3	12

Tabla 1

Aclaramos que la variable t está variando en los números reales, como corresponde a la variación continua del tiempo, y que la parte decimal se refiere a décimos o centésimos de hora.

Algunos alumnos habían hecho la tabla considerando minutos, por lo cual, a manera de ilustración, la Tabla 1 también la escribimos poniendo t en minutos, como se muestra en la Tabla 2:

Tiempo t (en minutos)	Pago $P(t)$ (en Soles)
0	0
30	4
45	4
60	4
75	8
90	8
120	8
126	12
174	12
180	12

Tabla 2

Manteniendo la variación continua de t en horas, y teniendo como referencia la Tabla 1, observamos que inmediatamente después de haberse cumplido un número entero de horas de estacionamiento, se produce “un salto” en los valores de la función pago, pues se pasa inmediatamente de 0 a 4, o de 4 a 8; o de 8 a 12. Así, se paga lo mismo por media hora y por una hora de estacionamiento (4 soles), pero no se paga lo mismo por una hora de estacionamiento (4 soles) y por una hora más un cuarto de hora de estacionamiento (8 soles). Estas observaciones las llevamos a la representación gráfica de la función *P*, de “pago por estacionamiento”, que mostramos en la Figura 1.

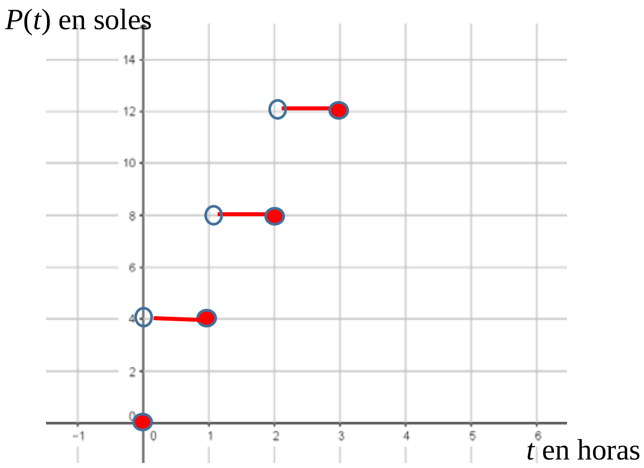


Figura 1

Percibimos que si bien la función *P* está definida para valores enteros de *t*, en esos puntos es que ocurre "el salto", que en términos matemáticos es la discontinuidad.

Entonces formulé la siguiente pregunta:

Si María dice que tuvo su auto estacionado cerca de 2 horas, ¿podemos saber cuánto pagó María por estacionamiento?

Luego de algunas intervenciones, concluimos que no podemos saber si pagó 8 soles o 12 soles, pues no tenemos claridad respecto a la expresión “*cerca de 2 horas*”. Si María tuvo el auto estacionado cerca de dos horas, pero menos de 2 horas, pagó 8 soles; pero si tuvo el auto estacionado cerca de 2 horas, pero un poco más de 2 horas, pagó 12 soles. Los alumnos relacionaron este hecho con el límite por la izquierda y el límite por la derecha de la función *P*, cuando su variable se aproxima a 2 por valores menores que 2 y por valores mayores que 2 respectivamente. Cada límite existe, pero son números diferentes (8 y 12) y en consecuencia el límite cuando la variable *t* se aproxima a 2 no existe.

Observemos que no es indispensable tener una expresión analítica de la función pago *P* para entenderla y para percibir que estamos ante una función real de variable real, cuyo dominio podemos considerar el conjunto de los números reales no negativos y cuyo rango es el de los múltiplos no negativos de 4. Más aún, se percibe gráfica e intuitivamente, que la función *P* tiene puntos de discontinuidad, cuando su variable independiente (tiempo *t*) toma valores enteros, y tiene intervalos de continuidad, que son intervalos abiertos, cuyos extremos son enteros consecutivos no negativos. Los registros tabular y gráfico de la función *P* son bastante ilustrativos. Lo importante es que a partir de una situación real, se construyó una función que permite percibir e intuir sus puntos de discontinuidad y sus intervalos de continuidad. Base fundamental para entender las definiciones formales y ampliar la perspectiva de matemática vinculada a la realidad.

Otra función discontinua

La experiencia anterior fue interesante y me quedé con la curiosidad de encontrar otra función discontinua, que provenga de una situación cotidiana. Cuando vi en una bodega el aviso de la oferta para la venta de arroz – como la que se presenta al inicio de este artículo – recordé haber trabajado funciones afines y lineales en contextos de venta de productos, considerando variaciones continuas y conjeturé que estaba ante la situación cotidiana que buscaba, para obtener otra función discontinua. Luego de examinar el caso a nivel personal, me pareció pertinente proponer el problema a mis alumnos. Lo hice en una evaluación, en la forma que está propuesto al inicio de este artículo y en la Figura 2 muestro parte de la solución de uno de los alumnos. El lector queda invitado a expresar esa función gráfica y analíticamente antes de ver la Figura 2. La mayoría de alumnos mostró una solución similar y es la que yo también había hallado y esperaba que los alumnos la encuentren.

Como el lector puede percibir, en la Figura 2 la función asigna a la cantidad *x* de kilos de arroz que se compra, la cantidad *f*(x) de soles que se paga, teniendo en cuenta la oferta, por cada 6 kilos de arroz. Gráficamente queda claro, por ejemplo, que por la compra de una cantidad de arroz cercana a los 6 kilos el pago es considerablemente diferente si la cantidad es menor o es mayor que 6 kilos. Por ejemplo, por 5,75 kg de arroz se pagará 5,75x3 soles; o sea 17,25 soles; pero por 6,25 kg de arroz se pagará 15 soles (por los 6 kilos, usando la oferta) más 0,25 x 3 soles; o sea 15,75 soles.

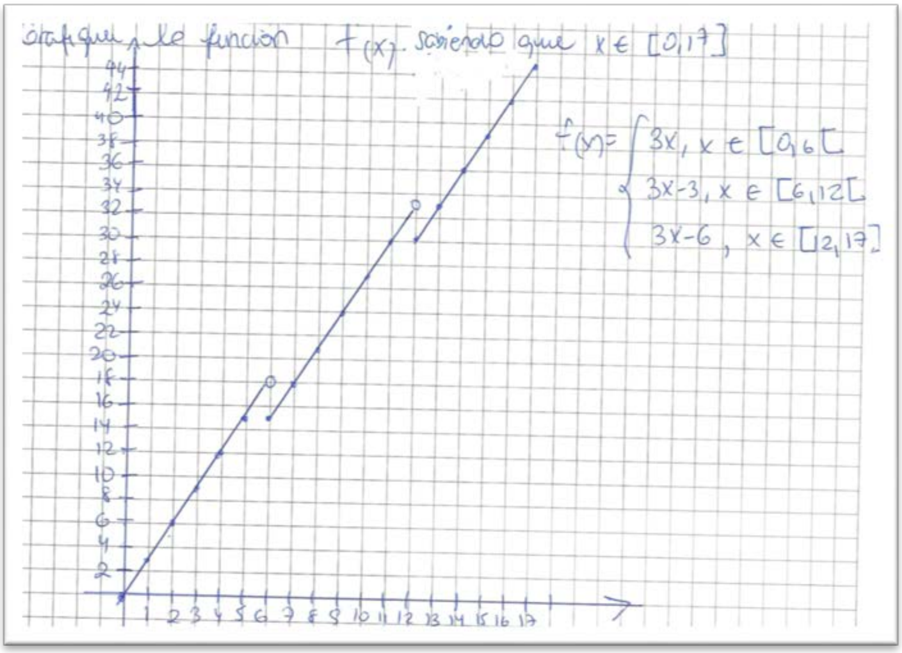


Figura 2

Analíticamente, la expresión $f(x)$ para x en el intervalo [0; 6[es muy sencilla, pues no es posible usar la oferta y en consecuencia solo se paga el precio de 3 soles por kg y se tiene:

$$\text{para } x \in [6; 12[\text{ , } f(x) = 3x$$

Cabe aclarar que se trata de un modelo matemático de la situación y que, por simplicidad, se asume que x toma todos los valores del intervalo [0; 6[, aunque en la realidad será imposible comprar, por ejemplo, $\sqrt{2}$ kg de arroz y pagar por ellos $3\sqrt{2}$ soles.

Si el número x de kilos que se compra es mayor o igual que 6, pero menor que 12; es decir, si $x \in [6; 12[$, lo que se pagará es $3x - 3$ soles, porque resulta de pagar 15 soles por los 6 kilos, más 3 soles por cada kilo o porción de kilo que excede de 6; o sea $15 + 3(x - 6)$. Así,

$$\text{para } x \in [6; 12[\text{ , } f(x) = 15 + 3(x - 6) = 3x - 3.$$

Razonamiento similar se hace para el intervalo [12; 17[:

$$\text{para } x \in [12; 17[\text{ , } f(x) = 30 + 3(x - 12) = 3x - 6.$$

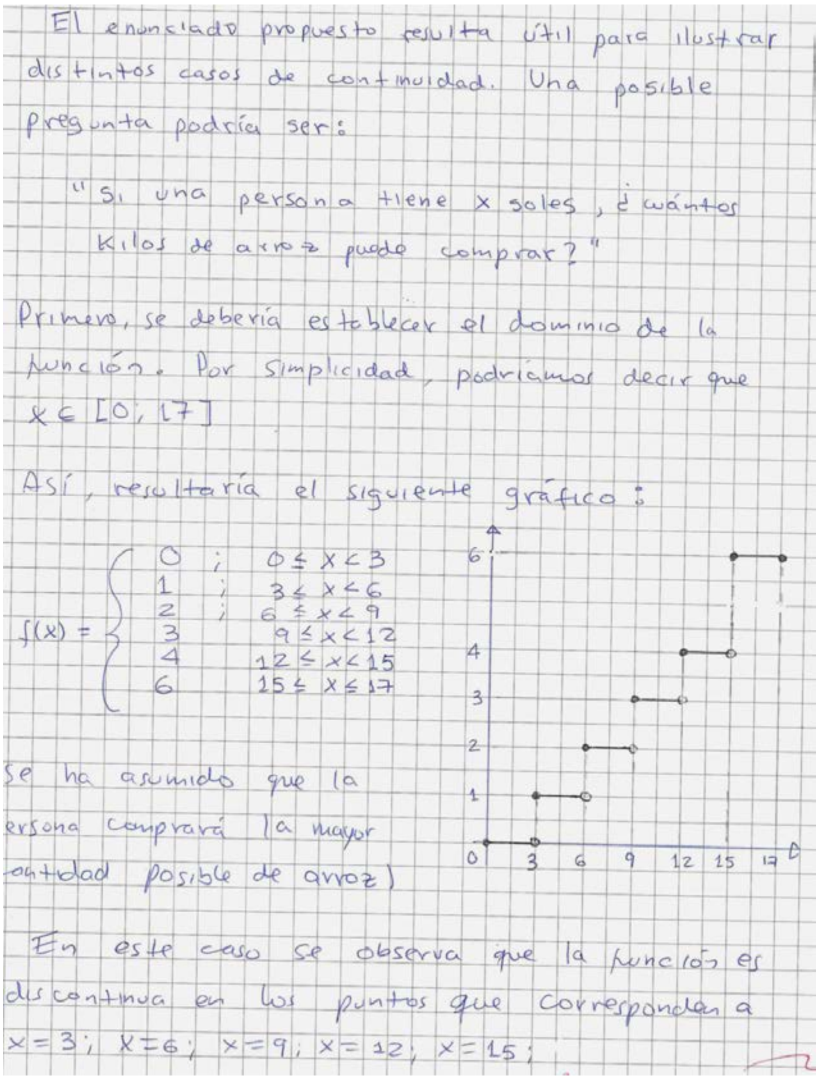
y así se obtienen las expresiones analíticas correspondientes para cada x del dominio [0; 17] de la función f.

Con las expresiones analíticas de $f(x)$ para x en los intervalos [0; 6[y [6; 12[, podemos calcular formalmente los límites por la izquierda y por la derecha, cuando x se aproxima a 6 y verificar que son números diferentes (18 y 15 respectivamente) y que en consecuencia tenemos un caso de discontinuidad para $x = 6$. Razonamiento similar nos lleva a concluir la discontinuidad de f en $x = 12$. Ciertamente, también puede examinarse formalmente las continuidades laterales de f en 0, 6, 12 y 17 y la continuidad de f en los puntos de los intervalos abiertos]0; 6[,]6; 12[y]12; 17[.

Otra función discontinua a partir de la misma situación

Me sorprendió muy gratamente la función que construyó otro alumno y que muestro en la Figura 3. Reconozco que inicialmente me dio la impresión de estar errada. Leyendo con atención, en este caso la función f lo que hace es asignar a la cantidad x de soles, la cantidad máxima de kilos de arroz $f(x)$ que se puede comprar, haciendo uso de la oferta, y considerando que no se puede comprar fracciones de kilo de arroz. Por ejemplo, con 7 soles, se puede comprar a lo más 2 kilos de arroz y es lo mismo que se puede comprar con 8 soles; con 8,90 soles y con x soles, si x es mayor o igual que 6 y menor que 9. Con 9 soles o más, pero menos de 12 soles, se puede comprar a lo más 3 kilos de arroz. Otra vez, para simplificar el modelo, se está asumiendo que x toma todos los valores reales de los subintervalos de [0; 17] considerados.

En este caso, hay discontinuidades evidentes – "saltos" – en los múltiplos positivos de 3, con el salto en 15 mayor que en los otros puntos de discontinuidad, por el uso de la oferta. Además, hay continuidad por la derecha para valores de x que son múltiplos de 3. La función nos recuerda a la función "máximo entero" y con este concepto podría obtenerse otra expresión analítica de la misma función.



El enunciado propuesto resulta útil para ilustrar distintos casos de continuidad. Una posible pregunta podría ser:

"Si una persona tiene x soles, ¿cuántos kilos de arroz puede comprar?"

Primero, se debería establecer el dominio de la función. Por simplicidad, podríamos decir que $x \in [0; 17]$

Así, resultaría el siguiente gráfico:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \le x < 3 \\ 1 & ; \ 3 \le x < 6 \\ 2 & ; \ 6 \le x < 9 \\ 3 & \ \ 9 \le x < 12 \\ 4 & \ \ 12 \le x < 15 \\ 6 & \ \ 15 \le x \le 17 \end{cases}$$

(Se ha asumido que la persona comprará la mayor cantidad posible de arroz)

En este caso se observa que la función es discontinua en los puntos que corresponden a $x = 3$; $x = 6$; $x = 9$; $x = 12$; $x = 15$;

Figura 3

Comentarios

1. Las experiencias mostradas son evidencias de la importancia de la creación de problemas, que ha estado presente al preparar una clase, al proponer una evaluación y al responder a la cuestión planteada en la evaluación. Todo, en el marco de la creación de problemas por elaboración; es decir a partir de situaciones, y teniendo como entorno matemático las funciones discontinuas.
2. Las funciones que hemos usado para ejemplificar funciones discontinuas en puntos de su dominio reflejan situaciones del entorno cotidiano y con ello facilitan la comprensión intuitiva y el aprendizaje de varios casos de continuidad y de discontinuidad de funciones reales de variable real. Cabe mencionar que no hemos ejemplificado casos de discontinuidad "evitable".
3. El lector queda invitado a crear nuevos problemas para ejemplificar funciones con casos de discontinuidad. Como ya lo hemos expuesto en diversas ocasiones, una forma de crearlos es por *variación* y otra por

elaboración. La primera, haciendo modificaciones a problemas dados; por ejemplo, en el caso de la tarifa en la playa de estacionamiento, se podría introducir cambios como “la primera media hora es gratis”; o “por 4 horas o más, hay un descuento del 10% del total”, etc. Análogamente con la oferta de arroz.

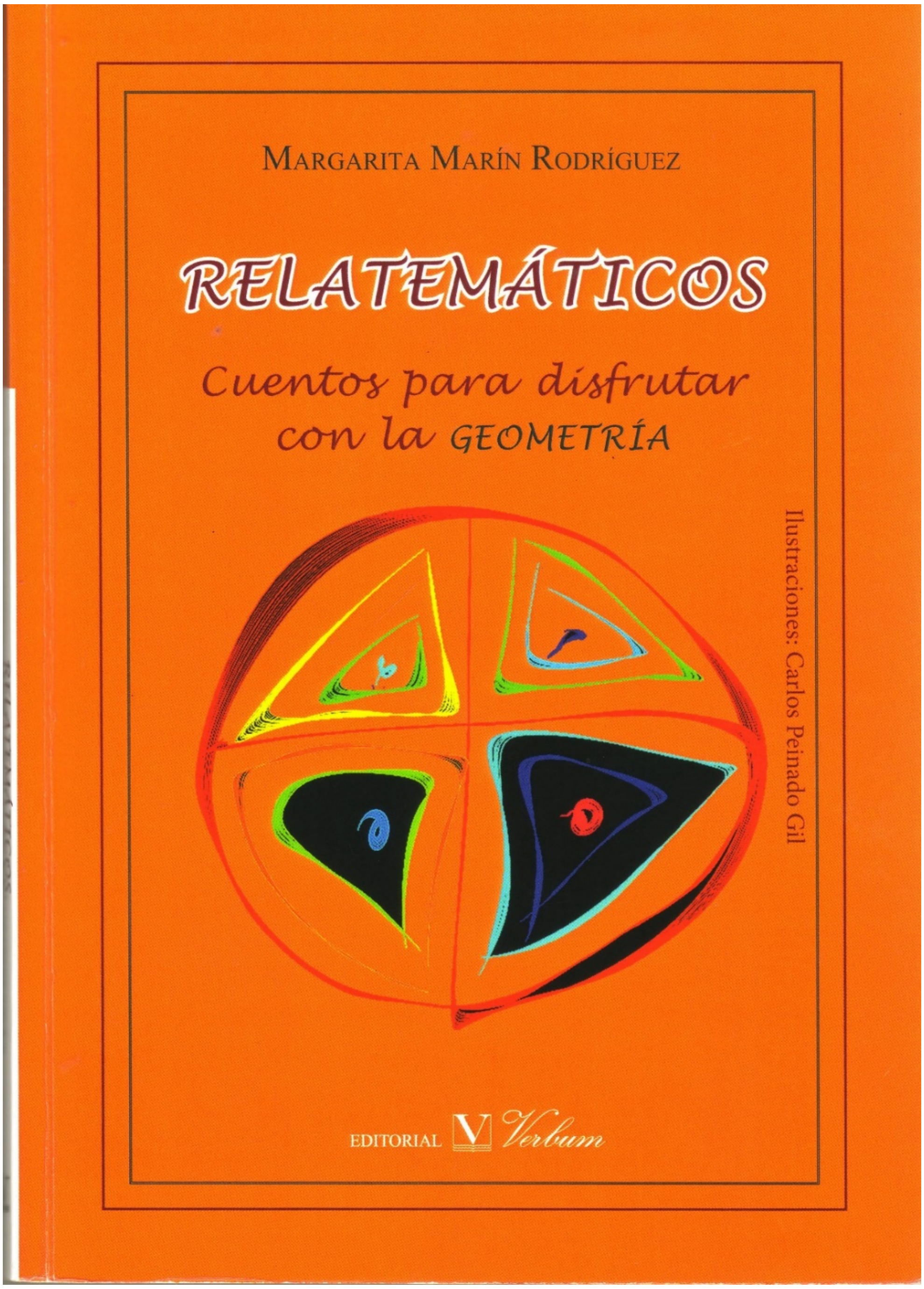
Se obtendrán nuevos problemas por *elaboración,* encontrando otras situaciones que puedan llevar a funciones como las vistas (por ejemplo tarifas por el envío de paquetes, considerando intervalos para el peso y estableciendo un pago mínimo fijo, independientemente del peso). Así se tendrán situaciones interesantes de modelización que permiten definir funciones que se vinculan con la realidad y examinar en ellas sus puntos de continuidad y de discontinuidad.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 227-230

Reseña de lo libro: RELATEMÁTICOS

Luis Balbuena Castellano



Autora: Margarita Marín Rodríguez

Autora: Margarita Marín Rodríguez

Editorial: Verbum

ISBN: 978-84-9074-307-2

Verbum INFANTIL-JUVENIL

Si te gustan los cuentos y eres una persona curiosa que te encanta observar el mundo, este libro está escrito para ti. Los protagonistas son niños y niñas como tú que solucionan los conflictos gracias a sus conocimientos matemáticos, porque en estos relatos las matemáticas tienen un papel muy importante. En estas páginas descubrirás el valor de saber lo que es la escala para comprar una caseta de tamaño adecuado a tu mascota, el significado del prisma y el lío que se organizó cuando Marcos pidió que estas figuras desaparecieran... También reunimos historias de amor y de reinas y princesas muy listas que, gracias a sus habilidades geométricas, consiguen resolver sus problemas.

¡Que lo disfrutes!

Margarita Marín Rodríguez, licenciada en Matemáticas y doctora en Ciencias de la Educación, es una profesora entusiasta de los cuentos y de la magia que transmiten al cautivar y atraer a personas de cualquier edad. Su experiencia de aula le ha servido para escribir estos relatos matemáticos acompañados de actividades, dirigidos a escolares de los últimos cursos de Primaria y a cualquier persona apasionada de las matemáticas.

Carlos Peinado Gil es profesor de Historia en el colegio Adalid Meneses (Talavera de la Reina). Combina su docencia con su pasión por los cómics, guiones e ilustraciones. Es miembro de la Asociación de Autores de Cómic de España y de la Asociación de Escritores Insomnes. Sus trabajos se pueden consultar en carlospeinadogil.com.

978-84-9074-307-2

9 788490 743072

En su afán por crear materiales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, Margarita Marín nos ofrece un libro "de amplio espectro". Lo califico así porque está adaptado a todos los actores de proceso educativo: a los estudiantes, al profesorado, a los padres e incluso para cualquier persona que mantenga despierta su curiosidad. Es lo que dice en las dos cartas que preceden a los diez cuentos que les siguen. A los escolares comprendidos entre cuarto de Primaria (10 años) hasta segundo de la Secundaria Obligatoria (14 años), les empieza diciendo: "Mira, observa y sorpréndete", todo un compendio. A los demás les pone en la pista desde el principio sobre el contenido del libro: "Te parecerá extraño emplear cuentos para enseñar y aprender matemáticas, pero tengo poderosas razones para hacerlo". Y bien que las tiene.

Pero los *Relatemáticos. Cuentos para disfrutar con la geometría* van más allá del cuento porque tras cada uno de los que relata hace interesantes añadidos para sacarles el máximo "jugo" matemático. Su dilatada experiencia como profesional, comprometida desde siempre con la mejora de la Educación, queda bien de manifiesto a lo largo de toda la obra. El docente se va a encontrar con un sinfín de ideas del más variado estilo y profundidad que le permitirán, a su vez, crearlas cuando se presenten otras situaciones semejantes o, lo que sería ideal, si se decide a crear sus propios relatos. Con los medios de los que se dispone actualmente, se puede profundizar en muchas de las informaciones que aporta encargando al alumnado que averigüe datos de los personajes que nombra (Euclides, Descartes, etc.), haciendo indagaciones sobre conceptos tales como la demostración, haciendo fichas de figuras y sus características, etc. Tras cada cuento abre, pues, unos apartados que sólo con el epígrafe ya indican la riqueza que contienen: *Por qué este cuento sobre…* , *observa con ojos matemáticos*, *razona matemáticamente*. El libro se cierra con dos apartados interesantes: la solución de las cuestiones planteadas en los sucesivos relatos y un glosario en el que se explican 133 términos que aparecen entre todos los cuentos. Destacar las ingeniosas ilustraciones del profesor Carlos Peinado Gil que acercan más el carácter de cuento al lector.

Como indica el subtítulo, todos los cuentos se centran en aspectos geométricos. En el primero, el cuadrado toma la palabra para hablarnos de su familia y cómo hacen para diferenciarse unos de otros. En el siguiente presenta al más juguetón de los cuadrados: el tangram chino. Remite a internet para buscar figuras para construirlas con las siete piezas que lo forman.

Gonzalo y su gato Pitufo hacen su "revolución" con las figuras redondas que se pueden generar haciendo girar figuras planas: la esfera, el cono, y el cilindro. "En este relato, dice, te encuentras con un escenario real en tres dimensiones, en el cual los cuerpos geométricos, además de tener área y perímetro, tienen volumen o capacidad".

En *¡Maldito ángulo!*, Ramón y sus compañeros de clase aprenden lo que es el "ángulo de deriva" a través de su entrenador de fútbol mientras que en el siguiente cuento titulado *¡Qué desastre!* es Marcos quien tiene que hacer un esfuerzo para aclarar el lío que le producen los poliedros y cómo clasificarlos. Lo consigue.

La leyenda de Dido y su astucia para fundar Cartago se cuelan y permiten aclarar muchas ideas acerca del perímetro y el área. Propone calcular, cinta métrica en mano, esos dos elementos de figuras cotidianas como la mesa de estudio, el billete de cinco euros o de una foto de carnet.

El apasionante Egipto y sus famosas pirámides de Gizet son los protagonistas matemáticos de *En el corazón de la pirámide* que se acaba con la famosa fórmula de Euler que relaciona las caras, las aristas y los vértices de cualquier poliedro.

La búsqueda de un tesoro a través de un mapa, ponen a Ricardo y a su hermana Elena en contacto con el "antiquísimo" concepto de la simetría. Al final se les propone que clasifiquen las letras mayúsculas en función de sus simetrías.

Las coordenadas y su aplicación en un juego permiten a la autora crear una curiosa trama de relaciones humanas entre los miembros de la pareja que forman la gymkhana que se organiza en la excursión a la sierra. En sus respectivos diarios se relatan cosas interesantes además de las matemáticas.

En el último de los cuentos, una casa para las mascotas, Celia se tropieza con un problema que le obliga a conocer las escalas para poder resolverlo.

En fin, en palabras de la autora dirigida a los estudiantes: "es un libro de cuentos para disfrutar, jugar y divertirte". El estilo directo, ameno, coloquial y cercano ayudan a su lectura y a que nos podamos acercar a las matemáticas sin temor, que es uno de los objetivos que se plantea Margarita.

Luis Balbuena Castellano

balbuenaluisx@gmail.com