UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
AÑO X - NÚMERO 39 – SEPTIEMBRE DE 2014

ÍNDICE

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 3-4

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Alicia Bruno
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García González
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés del Carmen Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio

Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo

Colaboran

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

OEI

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 5-6

Editorial

"Las Matemáticas no son un recorrido prudente
por una autopista despejada,
sino un viaje a un terreno salvaje y extraño,
en el cual los exploradores se pierden a menudo"
W.S. ANGLIN.

Estimados colegas y amigos*:*

A través de este nuevo número de UNION nos volvemos a encontrar con ustedes, deseando que se cumplan los objetivos de esta revista se cumplan, dar a conocer distintas experiencias y reflexiones teóricas de investigadores y profesores de matemática de todos los niveles educativos, promover la investigación en educación matemática y fortalecer el intercambio de información sobre las actividades de todas las sociedades que son miembro de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática.

En este volumen tenemos el enorme honor de contar como firma invitada con el creador de GeoGebra, software libre que produjo un cambio en muchísimas prácticas docentes, el Dr. Markus Hohenwarter, quién ha escrito el interesante artículo *Multiple representations and GeoGebra-based learning environments.* Le agradecemos enormemente su colaboración con esta revista y queremos comentar que el mismo ha sido publicado en el idioma inglés, que es en el cuál lo ha escrito su autor.

Como es habitual en esta revista se presentan artículos de muy variadas temáticas y correspondientes a distintos niveles educativos. Se abarcan, entre otros, los siguientes temas, estadística, recursos informáticos, investigaciones en didáctica, ideas para llevar al aula, reseñas de páginas web y de libros, en este último caso un libro de quien fuera nuestra Firma Invitada del Volumen 30, el escritor Guillermo Martínez.

Nos despedimos hasta el próximo volumen, el último de nuestro segundo período como directoras de la revista, agradeciendo a todos aquellos que nos acompañan y que hacen posible esta nueva edición, que prácticamente está culminando su décimo año ininterrumpido.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

Editorial

"As Matemáticas não são um percurso prudente por uma autopista desocupada, senão uma viagem a um terreno selvagem e estranho, no qual os navegadores se perdem com frequência"
W.S. ANGLIN.

Estimados colegas e amigos*:*

Através deste novo número de UNION voltamos-nos a encontrar com vocês, desejando que se cumpram os objectivos desta revista se cumpram, dar a conhecer diferentes experiências e reflexões teóricas de pesquisadores e professores de matemática de todos os níveis educativos, promover a investigação em educação matemática e fortalecer o intercâmbio de informação sobre as actividades de todas as sociedades que são membro da Federação Iberoamericana de Sociedades de Educação Matemática.

Neste volume temos a enorme honra de contar como assina convidada com o criador de GeoGebra, software livre que produziu uma mudança em muitíssimas práticas docentes, o Dr. Markus Hohenwarter, quem tem escrito o interessante artigo *Multiple representations and GeoGebra-based learning environments.* Agradecemos-lhe enormemente sua colaboração com esta revista e queremos comentar que o mesmo tem sido publicado no idioma inglês, que é no qual o escreveu seu autor.

Como é habitual nesta revista se apresentam artigos de muito variadas temáticas e correspondentes a diferentes níveis educativos. Abarcam-se, entre outros, os seguintes temas, estatística, recursos informáticos, investigações em didáctica, ideias para levar ao sala, reseñas de páginas site e de livros, neste último caso um livro de quem fosse nossa Assinatura Convidada do Volume 30, o escritor Guillermo Martínez.

Despedimos-nos até o próximo volume, o último de nosso segundo período como directoras da revista, agradecendo a todos aqueles que nos acompanham e que fazem possível esta nova edição, que praticamente está a culminar seu décimo ano ininterrumpido.

Um abraço fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
página 7-9

Firma Invitada: Markus Hohenwarter

Breve Reseña

Títulos

Noviembre de 2013. Doctor Honorario de la Universidad Nacional del Chaco Austral, Argentina.

Febrero de 2006. Doctor en Educación Matemática de la Universidad de Salzburg, Austria. Tesis: Educación, materiales y aplicaciones en la enseñanza de la matemática con GeoGebra. Director: Dr. Karl-Josef Fuchs.

Mayo de 2003. Acreditación como Docente para la Enseñanza de la Ciencia de Computación en las Escuelas Secundarias, Universidad en Educación, Salzburg, Austria.

Junio de 2002. Magister en Ciencias Aplicadas de la Computación, recibiendo summa cum laude, Salzburg, Austria.

Marzo de 2002 Magister en Educación Matemática, summa cum laude, Salzburg, Austria.

Cargos docentes

Desde el año 2002 hasta la actualidad trabaja en la Enseñanza de Matemática en la Universidad de Salzburg, Austria. Ha sido profesor en el Departamento de Ciencias Matemáticas, en Florida Atlantic University, Boca Raton, Estados Unidos. Ha realizado pasantías y trabajado como profesor visitante en muchas universidades del mundo.

En la actualidad y desde el año 2010 es el Director de Departamento de Educación Matemática de la Universidad Johannnes Keppler en Linz, Austria.

Proyectos

Registra cuarenta trabajos de investigación en diferentes Universidades de Austria, República Checa, Alemania, España, Estados Unidos y Reino Unido. Estos proyectos se ocupan de la Enseñanza de la Matemática utilizando GeoGebra en los distintos niveles de enseñanza.

Estos proyectos han sido financiados por distintas instituciones como el Ministerio de Educación de Austria, la Fundación Nacional para la Ciencia, Departamento de Enseñanza de la Matemática; entre otros

Publicaciones - Conferencias

Tiene una extensa y profusa producción en artículos publicados en Revistas y Journals con referato, tal como el Journal para la Tecnología en Educación Matemática, en el New England Journal, Journal para la Computación en Matemática y la Ciencia.

Ha participado en la producción de ocho libros compartiendo la autoría con otros investigadores y es autor de los dos libros: Introducción al GeoGebra y Ayudas para el GeoGebra.

En su actividad de docencia e investigación ha dictado conferencias referidas a la Enseñanza de la Matemática en diversas universidades e institutos de: Italia, Alemania, Austria, Malasia, República Checa, Francia, Tailandia, Canadá, Estados Unidos, Hungría e Inglatarerra.

Materiales

Presenta diferentes link en los cuales se presenta el material on line de la Enseñanza del GeoGebra a través de una plataforma educacional utilizando técnicas y estrategias educacionales a través de las nuevas tecnologías.

Los sitios en los que se encuentra su producción son:

http://www.geogebratube.org;

http://www.geogebra.org/wiki;

http://www.austromath.at/medienvielfalt;

http://www.lehrer-online.de/url/geogebra;http://aufbaukurs.intel-lehren.de.

Premios

En el año 2013 recibió el Premio Merlot, distinción otorgada por su trabajo en recursos para el aprendizaje en línea para GeoGebra, distinción otorgada por el Recurso Educativo Multimedia para el Aprendizaje y Enseñanza en línea, Las Vegas. USA.

Ha recibido otras distinciones tales como el: Premio a la educación tecnológica, en el año 2012 otorgado por la Escuela de GeoGebra en Bethesa Maryland, USA.

En el año 2010 recibió el premio Nacional del Liderazgo en Tecnología otorgado por el Instituto GeoGebra, Washington DC, USA.

El premio a la Enseñanza en el año 2009, laureado en la categoría de Educación con GeoGebra otorgado por el Museo de la Enseñanza en San José California. En ese mismo año recibió los premios Eurele - como finalista con GeoGebra en la enseñanza a través de Intenet, CeBIT, Hannover Alemania - y por la misma categoría el premio Bett, en Londres Reino Unido.

Los anteriores premios mencionados son los últimos recibidos., pero desde el año 2002 ha recibido distinciones de distintos países y escuela por su producción y tarea realizada en la enseñanza y aprendizaje con GeoGebra.

Ha recibido becas provenientes de diversas fundaciones e instituciones para realizar sus estudios, y concretar el doctorado.

Membresías

BSRLM, Sociedad Británica de Investigación en el aprendizaje de la Matemática del Reino Unido.

NCTM, Consejo Nacional de Docentes de Matemática en Estados Unidos.

GI, Sociedad de Didáctica e informática de Alemania.

GDM, Sociedad de Educación Matemática de Alemania.

ÖMG, Sociedad de Educación Matemática de Austria.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 11-18

Firma Invitada:

Multiple representations and GeoGebra-based learning environments

Markus Hohenwarter

Resumen	El software de matemáticas Dinámica GeoGebra ofrece la posibilidad de generar applets interactivos para su uso en entornos de aprendizaje. Sus gráficos, álgebra, vistas de álgebra y planilla de cálculo combinan múltiples representaciones matemáticas de uno con el otro de una manera interactiva y conectada. Por un lado, el software facilita la visualización de los datos y conceptos matemáticos. Por otro lado, GeoGebra es compatible con la interacción de diferentes formas de representación de objetos matemáticos. En esta presentación, el uso deapplets de GeoGebra está dirigido particularmente para tablets, que se están volviendo cada vez más importantes y se distinguen por su operación intuitiva con los dedos. Matemáticas abstractas están ahora disponibles al alcance de los estudiantes permitiendo una forma muy directa de interacción con objetos y conceptos matemáticos. Una forma de implementar tales ambientes de aprendizaje son colecciones de applets interactivos en el llamado "GeoGebraBooks" que se presenta en este artículo.
Abstract	The dynamic mathematics software GeoGebra offers the possibility of generating interactive applets for use in learning environments. Its graphics, algebra, computer algebra and spreadsheet views combine multiple mathematical representations with each other in an interactive and connected way. On the one hand, the software facilitates the visualization of mathematical concepts and facts. On the other hand, GeoGebra supports the interaction of different forms of representation of mathematical objects. In this paper, the use of GeoGebra applets is particularly addressed concerning tablet computers, which are becoming increasingly important and are distinguished by their intuitive operation with fingers. Abstract mathematics now becomes available at students' fingertips allowing a very direct form of interaction with mathematical concepts and objects. One way to implement such learning environments are collections of interactive applets in so called "GeoGebraBooks" which are presented in this paper.
Resumo	O software de matemática dinâmico GeoGebra oferece a possibilidade de gerar interactivo applets para uso em aprender meiosSeus gráficos, álgebra, álgebra de computador e spreadsheet as vistas combinam representações matemáticas múltiplas com a cada outro em uma maneira interactiva e conectada. Por um lado, o software facilita a visualização de fatos e conceitos matemáticos. Por outro lado, GeoGebra apoia a interação de formas diferentes de representação de objetos matemáticos. Neste papel, o uso de GeoGebra applets é particularmente dirigiu preocupar-se computadores de pastilla, os quais estão devindo a cada vez mais importantes e está distinguido por sua operação intuitiva com dedos. A matemática abstrata agora devém disponível em estudantes' fingertips deixando uma forma muito direta de interação com objetos e conceitos matemáticos. Uma maneira para implementar tais meios de aprendizagem são coleções de interactivos applets em tão chamados "GeoGebraBooks" quais estão apresentados neste papel

Images in mathematics education - iconic representations and visualization

How can images support mathematical understanding and in what way can the use of technology be useful in this context? To answer this question, let us first consider some theoretical aspects concerning the educational use of mathematical images. In particular, let us have a closer look at the terms "iconic" and "visualization". Both are often used in mathematics education in the context of visual representations and the principle of interaction of multiple representations (Wittmann 1981, p.91) which states that mathematical knowledge is retained more easily if it was acquired using multiple representation. The word "iconic" is especially important in Bruner's (1971) theory where he distinguishes between the following three forms of representations allowing to represent and apply knowledge:

- enactive (action-related),
- iconic (visual),
- symbolic.

Let us illustrate these three types of representations with a simple example. The task "2 + 3 = ?" can not only be represented and solved in a symbolic way by writing down numbers, but it also done enactively by using manipulatives: first a child could count two and then three beads in her hand and place them on a table where she can then count the total number of beads by physically touching and counting them. In addition, the task can also be supported by an iconic (visual) representation such as in figure 1.

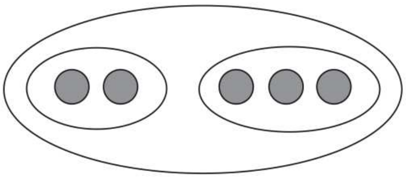


Figure 1: Iconic (visual) representation of 2 + 3

"Visualization" can be seen as a way to discover and understand mathematics through images (Peter 1999). It should be viewed as a tool to facilitate the gaining of mathematical insights. We can distinguish external and internal visual representations. External iconic representations occur in a variety of ways in the classroom: in school textbooks, drawn in notebooks, sketches on boards at a wall or created on a computer screen. Internal iconic representations, i.e. mental images, also play an important role in the process of understanding mathematical concepts. Thus, we are using the following definition for visualization in this paper which includes both external and internal visual representations:

> "Mathematical visualization is the process of forming images (mentally, or with pencil and paper, or with the aid of technology) and using such images effectively for mathematical discovery and understanding." (Zimmermann und Cunningham 1991, p.3)

Here, understanding means to generate internal representations based on external representations and also includes the ability to externalize internal representations again. In this case, internal and external representations influence each other which does not always need to be a one-to-one mapping (Schnotz 2002).

The definition above also mentions explicitly the role of technology for visualizations. With a laptop or tablet computer we can create so called *dynamic visualizations*, for example in the graphics view of the software GeoGebra, where iconic representations can be changed interactively by moving points or sliders with a mouse or finger. These dynamic representations are fundamentally different from static images that can only represent a fixed situation (Danckwerts & Vogel 2003, p.21). This way, characteristic features of a mathematical object can be investigated and more easily distinguished from those features that result from the random snapshot of a certain situation in a static image (Elschenbroich 2005, p.77). In this way, technology allows a variety of possibilities to manipulate and transform iconic representations, so that students can investigate which properties remain invariant in all positions and therefore are characteristic of a mathematical concept (Dörfler 1991).

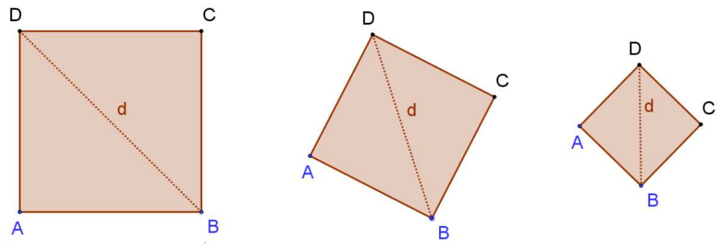


Figure 2: Changing the iconic representation of a square by dynamically moving A and B

By dynamically changing the prototype image of a square like in Figure 2, students can find invariant properties, i.e. that the four sides of the quadrilateral always have the same length and that its interior angles always remain 90 degrees. Such visual manipulations and transformations with dynamic mathematics software like GeoGebra can support the development of student's own internal images. With the help of technology, learners can build such internal images better and more concrete now because of their own actions on the screen (Elschenbroich 2005, p.77).

Interaction of forms of representation with GeoGebra

As mentioned above, enactive, iconic and symbolic representations should be connected according to the principle of interaction of multiple representations which states that knowledge is retained more easily if it was acquired in different representation forms (Wittmann 1981, p.91). The underlying assumption is that student's success in problem solving can be increased when they can switch flexibly between these different forms of representations.

Let us now consider how this interaction of different forms of representations could be achieved using dynamic mathematics software like GeoGebra. We define a dynamic mathematics software (DMS) here as a computer tool that combines features of a spreadsheet software (SSS), a dynamic geometry system (DGS) and a computer algebra system (CAS) in one program.

The dynamic mathematics software GeoGebra is a cognitive tool (Jonassen 1992) allowing to create mathematical models from scratch. Cognitive tools are characterized in that the learners have a lot of freedom in the control of the system, where they are actively working with the system itself and can be creative. Because of their many uses, they are well suited for mathematical modeling and to support discovery learning.

Duval (1999) assumes that mathematical objects are not directly accessible, but only through semiotic representations:

> "There is no true understanding in mathematics for students who do not incorporate into their cognitive architecture the various registers of semiotic representations used to do mathematics." (Duval, 1999)

In this sense, GeoGebra offers two different registers of representations with its graphics and algebra views on the same abstract mathematical object. As a dynamic mathematics software, GeoGebra provides the symbolic and iconic representations of mathematical objects in two connected views side by side in order to support visualization and the principle of interaction of representations. Let's consider the possibilities of the combination of iconic and symbolic representations with the example of a circle's equation. GeoGebra offers the following options:

- A circle can be constructed geometrically like in a dynamic geometry system (iconic) and then show its equation (symbolic).
- A circle can be entered like in a computer algebra system using its equation (symbolic) and then be shown as an image in the graphics view (iconic).
- In addition, the circle entered through its equation (symbolic) can also be dynamically moved and changed with the mouse or finger (interactive/enactive).

The last point distinguishes dynamic mathematics software from traditional computer algebra systems where it allows direct interaction with the iconic representation of a mathematical object entered in symbolic form. Thus, a dynamic mathematics software like GeoGebra allows the bidirectional change between the iconic and symbolic representation of a circle (Hohenwarter 2006b, p.25)

GeoGebraBooks on Tablets

Until recently, the software GeoGebra could only be used on traditional laptop or desktop computers. Since the 2013, it is now possible to also use GeoGebra on tablet computers (Windows 8+, Android and iPad). With a new user interface allowing students to create and manipulate mathematical models not only with their mouse but also with their fingers (Hohenwarter & Kimeswenger 2013, p.355). Such touch interfaces allow for a very direct way of interaction with mathematical objects and are an interesting way how technological tools can also help to support the enactive representation form. Some schools decide now to use tablets in mathematics education (see Figure 3), since they are easy to use, require little space and have long battery life.

Figure 3: Students using GeoGebra on tablets

The GeoGebra application itself is a cognitive tool in the sense that it can only be used effectively in the classroom when learners and teachers have at least some knowledge of the handling of the software such as the use of the geometrical tools available. By using prepared materials such as interactive applets in online environments, much less knowledge about the operation of the software itself is need in contrast (Preiner 2008).

In 2011, the material sharing platform GeoGebraTube (www.geogebratube.org) has been launched which now offers more than 100,000 freely available interactive worksheets created and shared by teachers and students on various topics from mathematics and the natural sciences. From the beginning, there had been the possibility to combine several worksheets into private collections, allowing the creation of very simple learning units. Recently, the desire arose to also allow the possibility of more flexible and better structured units.

This idea has been implemented and is available since January 2014 as a new feature on GeoGebraTube in so-called "GeoGebraBooks" which consist of interactive GeoGebra worksheets organized in chapters. Each chapter can be selected from a menu at the left showing an overview of its dynamic worksheets (see figure 4). Registered users can create their own GeoGebraBooks using all materials of the sharing platform. Both their own worksheets as well as those created by other users can be easily organized into chapters. The resulting GeoGebraBooks can either be shared via unique web addresses with others or downloaded as offline packages. They work on traditional computers as well as tablets and smartphones, the only requirement being an HTML5 ready web browser

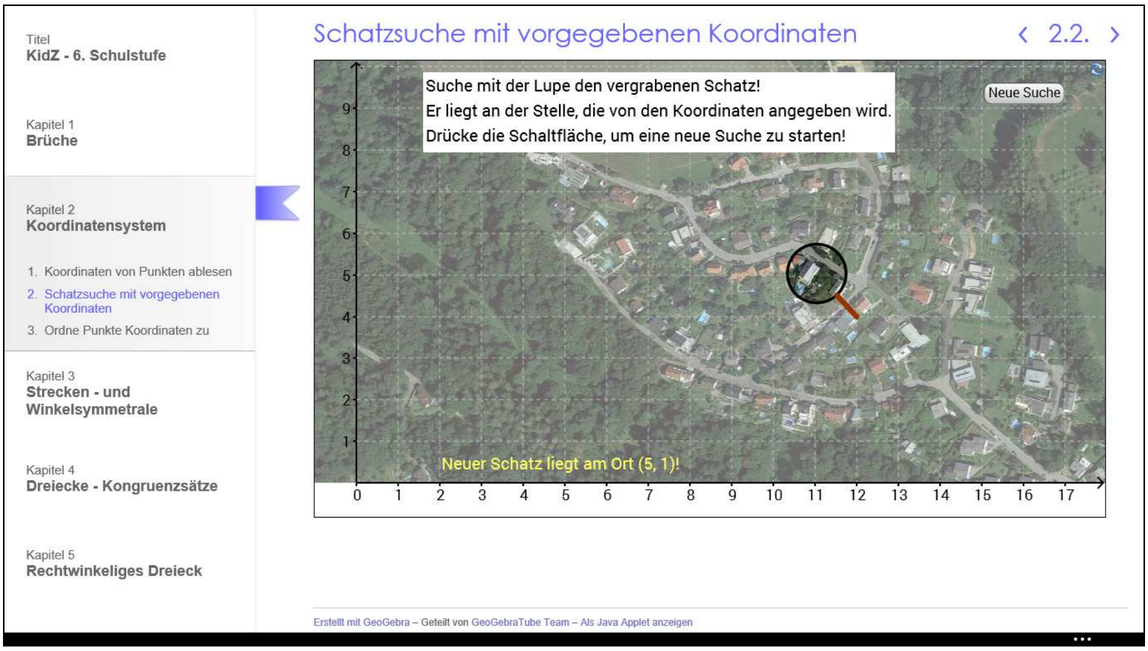


Figure 4: Example of a GeoGebraBook (see http://www.geogebra.org/book/at/st6/)

In a project at JKU we have recently investigated the question how such GeoGebraBooks and their interactive worksheets could be optimized for use on tablets. For example, the screen size and way to operate these devices differs significantly from working with a mouse on a large computer screen. The use of tablets does not only bring technical challenges for software development, but also requires changes in the design of interactive worksheets. For instance, control elements like sliders or input fields should be positioned at the bottom of a worksheet to avoid that your hand covers the rest of the worksheet when you move a slider with your finger (Hohenwarter & Kimeswenger 2013, pp.354).

Based on these considerations and first experiences with tablets in the classroom two prototypical GeoGebraBooks were created with materials for the 11 to 12 year old students. Their design was adapted to the use on tablets concerning screen size and to make it easy to operate all elements with fingers including the size and positioning of the mathematical elements. For example, the worksheet about addition of fractions shown in figure 5 allows students to get immediate feedback on how well they have worked a specific task (Hohenwarter 2006a, p.5). To allow easier handling on tablet computers with onscreen keyboards flying in resp. out from the bottom of the screen, it was important to place the input boxes for the fractions at the bottom of the worksheet.

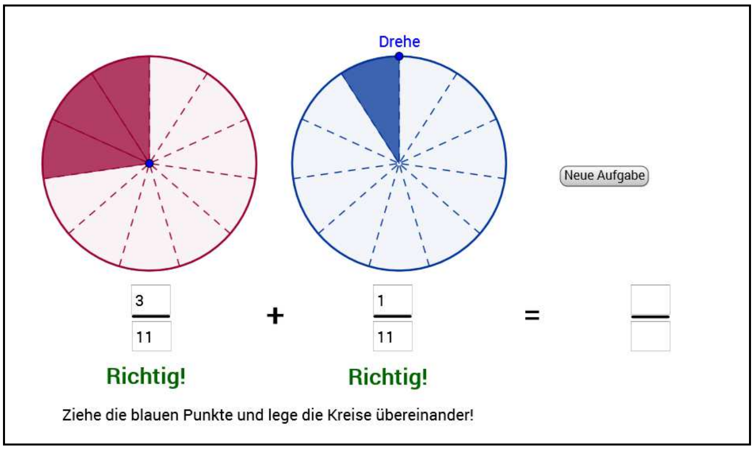


Figure 5: Interactive dynamic exercise for addition of fractions (Meier 2014)

The juxtaposition of fractions in their symbolic form, i.e. the numerator and denominator, and an adequate visual form, i.e. circular sectors, is an example for a concrete implementation of the principle of interaction of representations (Meier 2009, pp.96). In addition, the circles can be moved and rotated to get the visual result of fraction addition by putting them on top of each other. Thus, this exercise shows how the three forms of representation can be related:

- Enactive: control with the finger, move and rotate the iconic representations of the fractions
- Iconic: representation of fractions in circular sectors
- Symbolic: numerators and denominators of the fractions

Such interactive worksheets can enrich learning in the classroom and at home, however it should be noted that they should not replace “real” enactive materials such as representing fractions by folding a sheet of paper. As a teacher, it is important to always reflect which combination of media (paper, real models, tablet computers, etc.) should be used and when as all of them have their specific advantages.

Future of GeoGebraBooks

Based on the feedback from users of GeoGebraBooks it is planned to add new features over the coming months. As a first step, the content of GeoGebraBooks should become more flexible by allowing to include texts, interactive applets, images and videos flexibly on each worksheet (see figure 6).

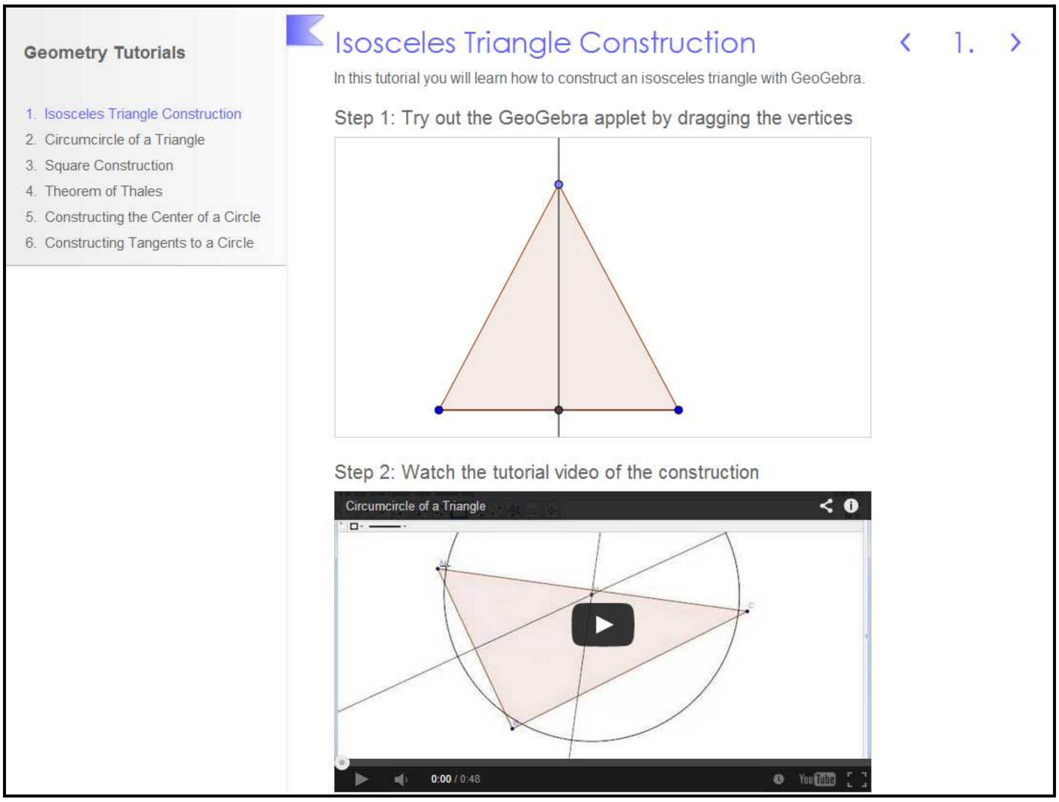


Figure 6: Flexible worksheet in GeoGebraBook combining applets, video and text on one page

In addition, it is planned to allow the creation of groups (e.g. for a class in a school), so that a teacher can share a GeoGebraBook only with her own class. This should simplify organizing, structuring and providing relevant teaching materials to students in the direction of mathematical portfolios, i.e. GeoGebraBooks whose contents can be changed or extended by students themselves. On the one hand, a teacher could prepare a GeoGebraBook with exercises where students can create constructions within the book and save their work. Thus, each student has her own copy of this GeoGebraBooks just like a mathematical portfolio where texts, images, videos and applets can be included. On the other hand, it should be possible for multiple students or even a whole class to create a common GeoGebraBook in which everyone can work together on their materials.

Just like in the development of the GeoGebra software, the future directions of GeoGebraBooks will be heavily influenced by the needs and feedback of users. However, the main goal of development should stay in line with those of cognitive tools: learners and teachers should have a lot of freedom in the design of GeoGebraBooks, where they are actively working with the system to support their mathematical creativity.

Literature

Bruner, J. (1971): Studien zur kognitiven Entwicklung. 1. Auflage. Ernst Klett: Stuttgart

Danckwerts, R.; Vogel, D. (2003): Dynamisches Visualisieren und Mathematikunterricht. In: mathematik lehren, 2003 (117), 19–39

Dörfler, W. (1991): Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 21, hpt: Wien, 51–75

Duval, R. (1999): Represenation, vision, and visualization: Cognitive functions in mathemati-cal thinking. Basic issues for learning. In: Proceedings of the twenty-first annual meeting of the North American Chapter of the International group for the Psychology of Mathematics Education, 3–26

Elschenbroich, H.-J. (2005): Mit dynamischer Geometrie argumentieren und beweisen. In: Barzel, B.; Hußmann, S.; Leuders, T. (Hrsg.): Computer, Internet & Co. im Mathematikun-terricht: Cornelsen Scriptor: Berlin, 76–94.

GeoGebraTube Team (2014): KidZ – 6. Schulstufe. www.geogebra.org/book/at/st6 (28.02.2014)

Grevsmühl, U. (1995): Didaktisches Begleitheft zum Fernstudienlehrgang Mathematik für Grundschullehrer. http://www.grevsmuehl.de/diffbrief.htm (28.02.2014)

Hohenwarter, M. (2006a): Dynamische und interaktive Materialien für den Mathematikunter-richt. http://www.geogebra.org/publications/2006_nuernberg.pdf (28.02.2014)

Hohenwarter, M. (2006b): GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht. Dissertation. Universität Salzburg

Hohenwarter, M.; Kimeswenger, B. (2013): Mathematik begreifen mit GeoGebra für Tablets. In: Brandhofer, G.; Ebner, M.; Micheuz, P.; Reiter, A. (Hrsg.): 25 Jahre Digitale Schule in Österreich. Österreichische Computer Gesellschaft: Wien, 353–358. http://www.informatische-grundbildung.com/sommertagung-2013/tagungsband/oer/ (28.02.2014)

Jonassen, D.H. (1992): What are Cognitive Tools? In: Cognitive Tools for Learning. Springer

Kautschitsch, H. (1994): Neue Anschaulichkeit durch neue Medien. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 26 (3), 79–82

Kautschitsch, H.; Metzler, W. (Hrsg.) (1982): Visualisierung in der Mathematik. Hölder-Pichler-Tempsky & B.G.Teubner: Wien – Stuttgart

Kautschitsch, H.; Metzler, W. (Hrsg.) (1983): Mathematische Anschauung und Mathematik-film. Hölder-Pichler-Tempsky & B.G.Teubner: Wien – Stuttgart

Kautschitsch, H.; Metzler, W. (Hrsg.) (1985): Anschauung und mathematische Modelle. Höl-der-Pichler-Tempsky & B.G.Teubner: Wien – Stuttgart

Kautschitsch, H.; Metzler, W. (Hrsg.) (1987): Medien zur Veranschaulichung von Mathematik. Hölder-Pichler-Tempsky & B.G.Teubner: Wien – Stuttgart

Klimsa, P. (2002): Multimedianutzung aus psychologischer und didaktischer Sicht. In: Issing, L.; Klimsa, P. (Hrsg.): Information und Lernen mit Multimedia und Internet. Beltz: Wein-heim, 5–17

Koerber, S. (2000): Der Einfluss externer Repräsentationsformen auf proportionales Denken im Grundschulalter. Dissertation. Technische Universität Berlin

Meier, A. (2009): realmath.de. Konzeption und Evaluation einer interaktiven dynamischen Lehr- Lernumgebung für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Dissertation. Franzbecker: Hildesheim – Berlin

Meier, A. (2014): Addition gleichnamiger Brüche – Veranschaulichung. http://www.realmath.de/Neues/Klasse6/addition/gleichnamigver.html (28.02.2014)

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre 2014
páginas 19-33

El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora

Laura Muñiz-Rodríguez, Pedro Alonso, Luis J. Rodríguez-Muñiz

Fecha de recepción: 5/12/2013
Fecha de aceptación: 24/07//14

Resumen	El aprendizaje de las matemáticas puede ser una experiencia motivadora si lo basamos en actividades constructivas y lúdicas. El uso de los juegos en la educación matemática es una estrategia que permite adquirir competencias de una manera divertida y atractiva para los alumnos. Con el fin de llevar a la práctica esta metodología docente, se ha desarrollado durante el curso 2012-2013, una experiencia basada en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a través del juego, con alumnos de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España (alumnado de 12 años). **Palabras clave**: juegos, actividades lúdicas.
Abstract	Learning mathematics can be a motivating experience if we support it on constructive and playful activities. Using games in mathematics education is a strategy that allows students to achieve skills in an entertaining and attractive way. In order to put into practice this teaching method, during the course 2012-2013, it was carried out an experience based on learning and teaching mathematics through games, with first year students of Obligatory Secondary Education (ESO) in Spain (12 years old students).. **Keywords**: games, playful activities.
Resumo	O aprendizado das matemáticas pode ser uma experiência motivadora se for baseado em atividades construtivas e lúdicas. O uso de jogos na educação matemática é uma estratégia que permite adquirir habilidades de uma forma divertida e atraente para os alunos. Com a finalidade de implementar essa metodologia de ensino foi desenvolvida, durante o curso 2012-2013, uma experiência de aprendizagem baseada no ensino da matemática por meio do jogo, junto à alunos do primeiro curso do Ensino Secundário Obrigatório (ESO) da Espanha (alunos com 12 anos de idade aproximadamente). **Palavras chave:** atividades lúdicas, jogos.

1. Introducción

El juego puede ser considerado como una actividad universal que se ha venido desarrollando a lo largo del tiempo. La actividad matemática ha tenido desde siempre una componente lúdica que ha dado lugar a una buena parte de las creaciones que en ella han surgido. Ya los pitagóricos llevaron a cabo distintos estudios sobre los números, utilizando para ello las configuraciones que formaban las piedras (De Guzmán, 1984). En la Edad Media, Fibonacci practicó la matemática numérica, mediante técnicas derivadas de los árabes, utilizando el juego como herramienta. En el Renacimiento, Cardano escribe el primer libro sobre juegos de azar, "*Liber de ludo aleae*" (Cardano, 1663; obra póstuma) adelantándose al tratamiento matemático de la probabilidad que posteriormente desarrollarían otros autores como Pascal y Fermat (García Cruz, 2008). En esta época, aparecen los llamados duelos (juegos) intelectuales, consistentes en resolver ecuaciones algebraicas, en los que participan entre otros Cardano y Tartaglia (De Guzmán, 1984).

En el siglo XVII, conviene destacar a Leibniz como promotor de esta actividad lúdica intelectual (Falsetti et al., 2006), apareciendo posteriormente otras figuras como Euler, quien a través del problema de los siete puentes de Königsberg inició la teoría de grafos (Contreras Beltrán et al., 2013), o Johann Bernoulli, quien en 1696 planteó a los mejores matemáticos de su tiempo el problema de la braquistócrona (Hernández Abreu, 2007), que Newton afirmó haber resuelto en unas pocas horas.

Gauss, gran aficionado a jugar a las cartas, anotaba las jugadas para realizar posteriormente un estudio estadístico, mientras que Hamilton analizó el problema de recorrer el conjunto de vértices de un dodecaedro regular sin repetir ninguno (camino hamiltoniano). Otros científicos ilustres como Hilbert, Neuman o Einstein también han mostrado su interés por los juegos matemáticos (De Guzmán, 1984).

Partiendo del método genético (García Cruz, 2008), podríamos afirmar que si los matemáticos de todos los tiempos han disfrutado tanto contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprender la matemática a través del juego?

Mediante el juego se pueden crear situaciones de máximo valor educativo y cognitivo que permitan experimentar, investigar, resolver problemas, descubrir y reflexionar. Las implicaciones de tipo emocional, el carácter lúdico, el desbloqueo emocional, la desinhibición, son fuentes de motivación que proporcionan una forma distinta a la tradicional de acercarse al aprendizaje (Corbalán y Deulofeu, 1996).

El caso que se presenta trata de abordar los contenidos y competencias de una unidad didáctica del currículo de Matemáticas para Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España, desarrollándolos a través de actividades y juegos que motiven y sean fuente de entretenimiento para el alumnado. La experiencia fue llevada a cabo con un grupo de 1º de ESO (12 años) en el Instituto de Educación Secundaria (IES) Padre Feijoo de Gijón (Asturias) durante el curso 2012-2013, en el transcurso del periodo de prácticas del Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación Profesional de la Universidad de Oviedo.

El trabajo tiene la siguiente estructura: en primer lugar, se exponen los motivos por los que este proyecto contribuye al logro de un aprendizaje más significativo, así como un aumento del interés del alumnado hacia las matemáticas; a continuación, se presentan los objetivos que se pretenden alcanzar, los recursos y los materiales necesarios para llevar a cabo las actividades, la secuenciación y descripción de las sesiones en las que se desarrolla la unidad, y los criterios, procedimientos e instrumentos de evaluación; finalmente, se hace una reflexión sobre los resultados de la experiencia de innovación y se analizan sus posibilidades de generalización como herramienta didáctica.

2. Justificación y enmarque teórico

Entendemos por juego toda aquella actividad cuya finalidad es lograr la diversión y el entretenimiento de quien la desarrolla. Según Piaget (1985), «*los juegos ayudan a construir una amplia red de dispositivos que permiten al niño la asimilación total de la realidad, incorporándola para revivirla, dominarla, comprenderla y compensarla*».

El juego implica una serie de procesos que contribuyen al desarrollo integral, emocional y social de las personas, no solamente de los niños, sino también de los jóvenes y adultos (Blatner y Blatner, 1997). Jiménez (2003) sostiene que los juegos son actividades amenas que indudablemente requieren esfuerzo físico y mental, sin embargo, el alumnado las realiza con agrado; no percibe el esfuerzo y sí la distracción. En muchos casos, el juego es un medio para poner a prueba los conocimientos de un individuo, favoreciendo de forma natural la adquisición de un conjunto de destrezas, habilidades y capacidades de gran relevancia para el desarrollo tanto personal como social (Rojas, 2009).

Las principales razones para utilizar los juegos como recurso didáctico en el aula son las siguientes:

- Son actividades atractivas y aceptadas con facilidad por los estudiantes que las encuentran novedosas, las reconocen como elementos de su realidad y desarrollan su espíritu competitivo. Además, el juego estimula el desarrollo social de los estudiantes, favoreciendo las relaciones con otras personas, la expresión, la empatía, la cooperación y el trabajo en equipo, la aceptación y seguimiento de unas normas, la discusión de ideas, y el reconocimiento de los éxitos de los demás y comprensión de los propios fallos (Chamoso *et al*., 2004).
- En el ámbito matemático, el paralelismo existente entre las fases de los juegos de estrategia y la resolución de problemas fomentan el descubrimiento de procesos heurísticos en los alumnos (Corbalán, 1996, Gairín *et al.*, 2006, Edo *et al.*, 2008 y Hernández *et al.*, 2010). Los juegos desarrollan capacidades cognitivas en los tres niveles de representación: enactivo, icónico y simbólico. Requieren esfuerzo, rigor, atención y memoria, y estimulan la imaginación (Alsina, 2007).
- Destacan por su utilidad en el tratamiento de la diversidad. En el aula de matemáticas, Contreras (2004) señala la utilidad de los juegos «*como recurso motivador para los alumnos con mayores dificultades, y también como origen de posibles investigaciones para alumnos destacados*».

Las matemáticas son una disciplina rechazada por muchos alumnos, debido a su aparente complejidad y aburrimiento, a su carácter abstracto y poco motivador. Descubrir que las matemáticas son una ciencia fascinante es un trabajo difícil, puesto que es necesario terminar con esos mitos que la caracterizan (Torres, 2001).

A menudo se imparte esta materia con métodos principal o exclusivamente deductivos, exponiendo los contenidos del currículo a través de una lección magistral, y dejando en mano de los discentes la realización de tareas escolares que pueden llegar a ser repetitivas, mecánicas y tediosas. Sin embargo, De Guzmán (2004) afirma: «*Si cada día ofreciésemos a nuestros alumnos, junto con el rollo* *cotidiano, un elemento de diversión, incluso aunque no tuviese nada que ver con el contenido de nuestra enseñanza, el conjunto de nuestra clase y de nuestras mismas relaciones personales con nuestros alumnos variarían favorablemente*». Jiménez (2003) concluye que, con estas actividades, «*el alumno se implica más en el proceso de enseñanza-aprendizaje*».

La enseñanza deductiva en matemáticas está enfocada a lo que Bloom (1980) denomina proceso mental de bajo nivel, es decir, se basa en procedimientos memorísticos y de repetición, que no dan cabida a la resolución de problemas, por medio del análisis, la interpretación o la representación en lenguaje matemático de una idea, es decir, a los procesos mentales de alto nivel.

La investigación realizada en este campo respalda que el juego contribuye a un mejor aprendizaje (Gairín, 1989; De Guzmán, 1989; Corbalán, 1994; De Guzmán, 2004; Rojas, 2009; Cano *et al*., 2010); en particular, se considera el juego como un instrumento muy potente para el aprendizaje de conocimientos relacionados con la competencia matemática. Sin embargo, es un modelo poco extendido en la realidad española.

Introducir el juego u otras tareas lúdicas en el aula no tiene por qué ser complejo en matemáticas, donde surgen numerosos planteamientos y problemas cuya resolución puede ser vista como un premio o una meta a alcanzar. Algunos investigadores ya han analizado las ventajas que puede suponer introducir juegos en el aula mediante el estudio de casos prácticos de aplicación (Torres, 2001; Chamoso *et al*., 2004; Hernández *et al*., 2010; Bracho *et al*., 2011; Malaspina, 2012 y Villarroel, 2012).

Con esta sólida fundamentación teórica, expondremos el diseño de una unidad didáctica íntegramente basada en juegos y la posible extensión de esta metodología a otros ítems del currículo.

3. Ámbito de aplicación

A continuación describimos brevemente el marco educativo y el contexto en el que se ha desarrollado el trabajo.

3.1 El sistema educativo español

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE, Ministerio de Educación y Ciencia, 2006), establece el sistema educativo español. La ESO forma parte de la educación básica obligatoria y gratuita, y consta de cuatro cursos académicos que abarcan de los doce a los dieciséis años de edad del alumnado. El Gobierno de España establece los contenidos mínimos del currículo, complementado posteriormente por cada comunidad autónoma. En el caso del Principado de Asturias, comunidad autónoma donde se ha desarrollado la experiencia, esta compleción del currículo la regula el Decreto 74/2007, de 14 de junio (Consejería de Educación y Ciencia, 2007).

El currículo establece para cada uno de sus cuatro elementos (objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación) una serie de mínimos que los centros pueden contextualizar, ajustando la enseñanza a las peculiaridades de su entorno socioeconómico y cultural. Esta autonomía resulta muy relevante para la viabilidad de nuestra propuesta.

Las matemáticas son obligatorias durante toda la ESO. Para el primer curso, la materia cuenta con un total de cuatro horas semanales (Consejería de Educación y Ciencia, 2007) y se distribuye en seis bloques de contenidos: un bloque de contenidos comunes y cinco bloques específicos: Cálculo, Álgebra, Geometría, Funciones y Gráficas, y Estadística y Probabilidad.

3.2 Contexto del centro educativo

La experiencia que se presenta ha sido llevada a cabo durante el curso 2012–2013 en el IES Padre Feijoo (Figura 1), situado en Gijón (Asturias). Es un centro en el que se imparten los estudios de ESO y de Bachillerato.

Figura 1. IES Padre Feijoo (Gijón, Asturias)

El IES contaba en el 2012-2013 con 670 estudiantes, de los cuales 69 estaban matriculados en el Bachillerato nocturno, y los 601 restantes se distribuían en los grupos de la ESO (456) y del Bachillerato (145).

El alumnado de necesidades educativas específicas del centro supone alrededor de un 2% del total de estudiantes. Por otro lado, el IES cuenta con, aproximadamente, un 7% de alumnado de procedencia extranjera. La mayor parte de este alumnado inmigrante proviene de Hispanoamérica, aunque también hay alumnos del Magreb, África Subsahariana o Este de Europa (datos obtenidos del Proyecto Educativo del centro correspondiente al curso 2012-2013).

Por otro lado, el centro contaba en ese curso con un total de 74 docentes, ocho de los cuales desarrollaban su labor docente en el área de matemáticas. Entre el profesorado se percibe una gran preocupación por el alumnado y una gran implicación en las distintas actividades que desarrolla el centro.

En cuanto al contexto socio-familiar, conviene señalar que el barrio en el cual se sitúa el IES Padre Feijoo (barrio de La Calzada) es una zona de arraigo industrial, que ha sufrido un importante desarrollo urbanístico en los últimos años. Cuenta con una población de algo más de 26.000 habitantes, aunque la zona de influencia del IES es aún mayor porque se extiende a los barrios colindantes. Se trata de un sector con un nivel económico medio-bajo y unas elevadas tasas de paro juvenil. Asimismo, el nivel de estudios medios y superiores de esta comunidad presenta una puntuación media inferior al resto de la ciudad (Proyecto Educativo del curso 2012-2013).

El grupo sobre el que se ha realizado la experiencia consta de 19 alumnos que obtienen, en general, buenos resultados en las distintas materias, mostrando interés por aprender. Ningún alumno demanda necesidades educativas específicas, ni tampoco hay repetidores dentro del grupo. Lo anterior parece anunciar una cierta predisposición positiva.

3.3 Situación de partida

La idea de esta innovación es diseñar o adaptar juegos para las unidades didácticas del currículo de Matemáticas en ESO; es decir, centrar las clases en actividades lúdicas que contribuyan a desarrollar en el alumnado las capacidades matemáticas que marca el currículo.

Dadas las limitaciones de tiempo para llevar a cabo la experiencia, el proyecto se focalizó en plantear a través de juegos la unidad didáctica "*Elementos en el plano*" dentro del bloque de Geometría del currículo de 1º de ESO de Matemáticas.

Para conocer la actitud del alumnado hacia el modo de trabajar las matemáticas, se realizó una entrevista semiestructurada con el objetivo de que valorasen el grado de utilidad y motivación de las matemáticas. Se obtuvieron las siguientes conclusiones: al 64.7% del alumnado le parecía interesante la materia, sin embargo, alegaba aburrirse realizando ejercicios para afianzar los conceptos que se le explicaban; la mayoría no tenía ningún tipo de motivación, su único fin era aprobar el examen; un 76.5% describía la dificultad de la materia, y afirmaba que el método de trabajo no solventaba esta complejidad; sin embargo, la gran mayoría, el 94%, reconocía la utilidad de las matemáticas.

De la entrevista se deduce que el alumnado reconoce la importancia de las matemáticas pero se detecta la necesidad de cambiar la metodología, para que despierte su interés y provoque en ellos la curiosidad de que aprender matemáticas no ha de ser necesariamente algo aburrido o inútil.

Conviene destacar que en el IES no se había desarrollado hasta este momento ningún tipo de proyecto de estas características. Las líneas metodológicas seguidas por los docentes de matemáticas se centran en la enseñanza expositiva y son herederas de la llamada "matemática moderna".

Por ello, la experiencia desarrollada ha involucrado de forma directa al docente y al alumnado, requiriendo el apoyo y el consentimiento del equipo directivo del IES; suponiendo una acción innovadora, concebida como aportación para la mejora docente.

4. Objetivos de aprendizaje

El proyecto ha pretendido desarrollar en el alumnado una serie de capacidades:

- Adquirir un nivel de autoestima adecuado, que le permita disfrutar de los aspectos creativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.
- Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual.
- Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e intuitivo, para la elaboración de estrategias para la resolución de problemas.
- Utilizar de forma adecuada los distintos medios y recursos didácticos como ayuda en el aprendizaje de las matemáticas.

4.1 Análisis de los objetivos

Para comprobar el grado de adquisición de los objetivos anteriores, se han propuesto una serie de indicadores y medidas (Tabla 1).

Tabla 1. Indicadores y medidas de los objetivos generales y específicos

Objetivo general	Indicadores de impacto	Medidas
• Mejorar la actitud y el interés del alumnado en el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas	• El alumnado: a. mejora el rendimiento en la materia de matemáticas b. afronta la asignatura con motivación e interés • Los docentes obtienen una mayor satisfacción en su trabajo	• Calificaciones de los alumnos • Resultados obtenidos en un cuestionario sobre satisfacción del alumnado • Valoración del profesorado sobre la experiencia, los materiales y actividades y la actitud del alumnado, a través de un cuestionario
Objetivos específicos	**Indicadores de impacto**	**Medidas**
Adquirir un nivel de autoestima adecuado. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e intuitivo, para la elaboración de estrategias para la resolución de problemas Utilizar de forma adecuada los distintos medios y recursos didácticos como ayuda en el aprendizaje de las matemáticas	El alumnado: reconoce la utilidad de las matemáticas para la vida diaria adquiere competencias transversales que enriquecen su aprendizaje. interioriza los conceptos desde un planteamiento aplicado es más eficiente al resolver problemas matemáticos El profesorado mejora su coordinación al elaborar conjuntamente materiales y actividades para la clase.	Anotaciones realizadas por el docente a partir de la observación en el aula Resultados obtenidos en las distintas pruebas de evaluación que realiza el alumnado, que abarcan: contenidos de la materia, resolución de problemas y competencias transversales. Los resultados se analizarán tanto de forma conjunta, como disociada para cada uno de los bloques Actas de las reuniones, donde los docentes valoran todos los aspectos relativos a la innovación

5. Desarrollo de la innovación

En esta sección, se describe la metodología utilizada para el desarrollo de la innovación y los recursos didácticos. También se incluye la secuenciación de los juegos y la descripción, con algo más de detalle, de alguno de ellos.

5.1 Metodología

El proyecto de innovación está pensado para que en cada una de las sesiones que comprendan una unidad didáctica se desarrolle uno de los siguientes formatos:

- La sesión se divide en dos fases. Primero el profesorado explica algún concepto o procedimiento referente a la unidad didáctica que se esté trabajando. A continuación, se plantea un juego por medio del cual el alumnado practica e interioriza los contenidos explicados.

- Se integra el juego o se toma como punto de partida para explicar las nociones o algoritmos pertinentes. De este modo, el alumnado es sujeto activo en su aprendizaje, y recurre a su intuición y conocimientos para resolver los problemas.

El docente debe manejar y dirigir en todo momento la situación. Es importante que establezca de forma clara la dinámica de juego, pautando el desarrollo de la actividad y marcando las normas o reglas del juego que los alumnos deben respetar en todo momento.

El alumnado debe vivir el juego como tal, reaccionando de manera eficiente ante las diferentes condiciones que se planteen. La sensación de querer ganar el juego le permite ser activo en su aprendizaje, y desarrollar procesos cognitivos utilizando la intuición de manera cada vez más ágil.

Las actividades lúdicas deben combinan juegos tanto individuales como colectivos. De esta forma, el alumnado aprende a ser autónomo y a resolver situaciones por sí mismos, además de prosperar en su competencia social. La educación en valores supone un pilar importante en dinámicas de juego. La cooperación, la madurez, la tolerancia, la solidaridad, el respeto, la participación, la justicia, la igualdad, la disciplina, etc. deben estar presentes en todo momento.

La unidad didáctica concreta que se desarrolló durante la ejecución de la experiencia se titula “*Elementos en el plano*”, y pertenece al bloque de Geometría del currículo de Matemáticas de 1º de ESO. Se desarrolló en 8 sesiones de 55 minutos cada una, siguiendo la metodología expuesta arriba.

5.2 Recursos, medios y materiales didácticos

Cada juego va acompañado de una serie de actividades o fichas de trabajo que el alumnado realizará o adjuntará a su cuaderno. El cuaderno es muy importante de cara al desarrollo de la innovación. Por un lado, el docente lo utilizará como instrumento de evaluación de la actividad del alumnado, y por otro lado, este dispone del cuaderno como elemento fundamental para repasar las clases.

El uso de calculadora será necesario en algunas ocasiones. Es imprescindible que el profesorado informe de cuando su uso está permitido y cuando no. Además, en ocasiones será necesario utilizar equipos informáticos y programas como GeoGebra (Geogebra, 2013).

Si fuera necesario, el alumnado podría disponer de un libro de texto como material adicional de cara a realizar actividades de refuerzo. Las necesidades particulares de cada alumno, así como la valoración que haga el docente de la situación, contestarán de forma específica a esta pregunta.

Con el fin de favorecer el desarrollo de la actividad, se ha diseñado un blog (Figura 2) en el que el alumnado puede consultar los juegos y actividades realizadas en el aula, y descargarse el material necesario para realizarlas (Muñiz, 2013):

Figura 2. Página principal del blog: *Matemáticas con sabor a juego*
http://matematicasconsaborajuego.blogspot.com.es/p/presentacion.html

5.3 Secuenciación de los juegos y actividades

En la Tabla 2 viene recogida la secuenciación de los juegos y las actividades realizadas a lo largo de la unidad didáctica, así como los contenidos con los que se relacionan (para una información más detallada, véase Muñiz, 2013).

Tabla 2. Distribución de los juegos y actividades de la unidad didáctica

Sesión	Juego – Actividad	Contenido
1ª	Conociendo a Euclides	Introducción histórica: Biografía de Euclides
2ª	Tabú: Elementos en el plano	Definición y propiedades de punto, recta, semirrecta, segmento y ángulo
3ª	La escalera de GeoGebra	Representación de punto, recta, semirrecta, segmento y ángulo
4ª	Cada oveja con su pareja	Conversiones en el sistema sexagesimal
	Memory sexagesimal	
5ª	Medida de ángulos	Medida y clasificación de ángulos
	Viaje espacial de ángulos	Medida y operaciones con ángulos
6ª	Sopa de ángulos	Clasificación de ángulos
	Crucigrama de ángulos	
7ª	JOKAN	Clasificación de ángulos
	Dominó de ángulos	
8ª	Trivial: Elementos en el plano	Elementos del plano. Medida y operaciones con ángulos. Clasificación de ángulos.

A lo largo de la unidad didáctica se llevaron a cabo un total de doce juegos y actividades. A continuación desarrollamos tres de ellas con un mayor detalle.

Tabú: Elementos en el plano

<u>Descripción:</u> El juego consiste en que el alumnado identifique los conceptos que se van a estudiar a partir de la definición de los mismos. Para ello, se describen los distintos elementos del plano que se estudian en esta unidad didáctica (punto, recta, segmento, semirrecta y ángulo), utilizando 5 pistas correspondientes a las distintas características del elemento, mediante las cuales los alumnos deben de reconocer el elemento (Figura 3). Las pistas se van facilitando de manera progresiva, de forma que cada nueva pista supone una descripción más completa del elemento que la anterior, lo cual repercutirá en la puntuación final.

<u>Comentario:</u> Mediante este juego, el papel activo del alumnado se retroalimenta con la satisfacción obtenida al acertar la respuesta.

RECTA	
Es un elemento del plano	5 puntos
No tiene anchura	4 puntos
Sí tiene longitud	3 puntos
No tiene principio ni fin	2 puntos
Contiene infinitos puntos alineados	1 punto

Figura 3. Material utilizado en el juego *Tabú: Elementos en el plano*

Memory sexagesimal

<u>Descripción:</u> El objetivo del juego es encontrar las parejas de cartas que relacionan dos medidas sexagesimales que representen un mismo ángulo. El juego comienza con las fichas colocadas de tal forma que los alumnos no puedan ver las medidas que en ellas figuras. Por turnos, se irán descubriendo pares de cartas hasta formar una pareja. Es importante recordar el lugar donde se encuentran las medidas ya descubiertas.

<u>Comentario.</u> La dinámica de este juego es muy sencilla, sin embargo, la mayor parte de los alumnos lo catalogaron como uno de los más complejos. La principal diferencia con respecto a los clásicos juegos de parejas es que en el *Memory sexagesimal* (Figura 4), estas no pueden formarse directamente, sino que una vez se ha descubierto un par de cartas, los jugadores deben de dedicar un tiempo a comprobar si las medidas representan o no una misma cantidad, realizando para ello las operaciones matemáticas correspondientes.

Figura 4. Material utilizado en el juego *Memory sexagesimal*

Dominó de ángulos

<u>Descripción.</u> Clásico juego del dominó (García, 2013), con la diferencia de que en este caso, las fichas están diseñadas de modo que a un lado está expresado un valor relacionado con la amplitud de un ángulo, y al otro una representación de los ángulos determinados con alguna propiedad que los caracteriza.

<u>Comentario.</u> El *Dominó de ángulos* (Figura 5) ha sido, probablemente, el juego con mayor éxito. La concentración de los alumnos en el desarrollo de esta actividad fue muy significativa.

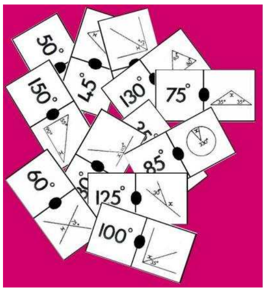
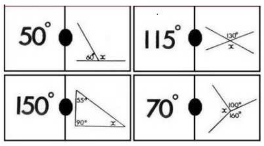



Figura 5. Material utilizado en el juego Dominó de ángulos

6. Evaluación

Otro aspecto fundamental del proyecto es la evaluación del mismo, la cual se ha llevado a cabo desde dos puntos de vista: evaluación del alumnado y evaluación de la experiencia.

6.1 Evaluación del alumnado

Para llevar a cabo la evaluación del alumnado se han tenido en cuenta los siguientes aspectos:

- Examen de evaluación de la unidad didáctica que los alumnos realizaron al finalizar las sesiones de la unidad (60% de la nota).
- La actitud de los alumnos a lo largo de las sesiones (10%). Premiando el interés por la materia, el esfuerzo, la participación en el aula, así como el compañerismo, la cooperación, la disposición y el esfuerzo personal.
- Actividades realizadas o información recogida en el cuaderno (20%). De manera periódica y al final de la unidad, se supervisaron los cuadernos de los estudiantes.
- Puntuación o posición lograda en cada uno de los juegos que se desarrollaron en el aula (10%).

6.2 Evaluación de la experiencia

Se ha desglosado en tres etapas, para cada una de las cuales se proponen una serie de instrumentos de evaluación (Tabla 3).

Tabla 3. Etapas e instrumentos de evaluación de la experiencia

ETAPAS	INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
Evaluación previa	• Actas de las reuniones previas con el profesorado involucrado, para conocer su opinión sobre el proyecto
Evaluación de proceso	▪ Anecdotario donde se realice un registro diario de los aspectos tanto positivos como negativos del proyecto ▪ Debate en el aula en el que participa el docente y los discentes para comentar el desarrollo del proyecto y de las actividades ▪ Observación en el aula
Evaluación de resultados	• Calificaciones de las evaluaciones del alumnado • Encuesta realizada sobre el alumnado al finalizar el proyecto, donde deba valorar los aspectos más descriptivos del proyecto • Entrevista a los docentes que lleven a cabo el proyecto para conocer su opinión acerca del mismo.

6.3 Resultados de la evaluación

A partir de la evaluación realizada, conviene resaltar los siguientes aspectos.

- Previamente a su puesta en práctica, el profesorado se mostraba reticente al proyecto. El uso de los juegos en el aula les parecía una buena estrategia para aumentar la motivación; sin embargo, temían que la nueva dinámica de trabajo supusiese una disminución en el rendimiento académico. Afirmaban que este tipo de actividades iban a ser motivo de pérdida de la concentración, acomodación en los estudios, disminución del orden en el aula, etc. La experiencia y los resultados nos han demostrado que el uso de esta estrategia ha repercutido positivamente en el rendimiento de los alumnos.

- A lo largo de las distintas sesiones, por medio de la observación en el aula, se percibió un aumento de la motivación en los alumnos. La mayoría de los discentes se implicaban en las actividades, mostrándose participativos. El interés por ganar, les hacía implicarse de forma directa en su aprendizaje, siendo rápidos a la hora de planificar estrategias para resolver los problemas que se les planteaban. Las clases de matemáticas incorporaron una vertiente lúdica sin perder ni rebajar los objetivos de aprendizaje de la materia.

- Una vez finalizada la unidad didáctica, se pidió a los alumnos que respondiesen a una encuesta, donde tenían que valorar la experiencia (de 1 a 10) a través de una serie de ítems, comparando la nueva metodología (Met_N) con la seguida anteriormente (Met_A). Los resultados obtenidos fueron positivos (Tabla 4).

Tabla 4. Resultados de la valoración del alumnado

	Media aritmética Met_N	Media aritmética Met_A
Nivel de interés y motivación	8.5	6.2
Grado de dificultad de los contenidos	6.1	7.2
Resultados en el aprendizaje	8.1	7.0
Grado de satisfacción	8.1	5.9

A partir de los resultados anteriores, se constata un aumento de la motivación y del interés hacia las matemáticas con la implantación de la nueva metodología. Los alumnos afirman que aprender matemáticas jugando les resulta interesante y divertido, incluso algunos lo llegan a calificar de apasionante.

En lo que respecta a la dificultad del proceso de aprendizaje, el alumnado reconoce que el uso de juegos les ha facilitado la comprensión de los conceptos. Trabajar en pequeños grupos les ha permitido personalizar el ritmo de aprendizaje, tanto para aquellos estudiantes con dificultades, como para aquellos más aventajados. En general, se sienten satisfechos con lo aprendido.

Comparando las calificaciones individuales de cada alumno obtenidas en el control de evaluación de la unidad didáctica con respecto a su trayectoria a lo largo del curso, no se aprecian diferencias significativas.

Finalmente, hay que destacar que la experiencia ha sido muy enriquecedora y satisfactoria para todos. La participación del alumnado, su motivación en las clases, su interés por aprender, su concentración y su empeño por resolver los problemas que les permitían ganar el juego, fueron aspectos muy positivos. En particular, sentir el creciente gusto por las matemáticas en los estudiantes, fue un elemento de plena satisfacción para la labor docente, que contrarresta el trabajo y esfuerzo que conlleva planificar una unidad didáctica utilizando juegos didácticos.

7. Conclusiones

Sobre la base de los resultados obtenidos, podemos afirmar que el uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en 1º de ESO aumenta la motivación y el interés de los estudiantes hacia el estudio de esta materia, favoreciendo así la adquisición de conocimientos.

La variedad de recursos didácticos utilizados en el aula es un elemento relevante, puesto que influye directamente en el rendimiento de los alumnos. Una vez analizadas las consecuencias en el aprendizaje que conlleva la utilización de actividades de carácter lúdico en el aula de matemáticas, la idea ahora es extender esta mecánica a otras unidades didácticas.

Es conveniente remarcar que los juegos propuestos tienen una estructura que se adapta con gran facilidad a otras unidades del currículo de la materia para este curso (1º de ESO), lo que permite parcialmente su reutilización, con pequeñas modificaciones. Asimismo, actualmente existe una amplia bibliografía al respecto que permite a los docentes incorporar estos elementos a su actividad docente.

Por ejemplo, los juegos *Memory sexagesimal* o *Dominó de ángulos* se pueden ajustar fácilmente al estudio de otros conceptos. El objetivo del juego sería el mismo, sólo habría que modificar el contenido de las cartas. De esta forma, se podrían trabajar contenidos conceptuales como fracción, suceso, o volumen, así como procedimentales: operaciones con enteros, cuadrados y raíces, o jerarquía de las operaciones.

Finalmente, podemos plantearnos si esta experiencia puede ser generalizada a otras etapas educativas. Si bien el estudio se ha ceñido a un aula de 1º de la ESO, los resultados han sido tan satisfactorios que creemos que se puede extrapolar la metodología. No obstante, el principal trabajo en este caso sería la búsqueda de juegos adecuados a los contenidos del curso correspondiente.

8. Agradecimientos

La experiencia ha podido llevarse a cabo gracias a la colaboración del equipo directivo del IES Padre Feijoo, del profesorado del Departamento de Matemáticas del centro y, en particular, del profesor tutor en el IES, Ángel Fernández Fuenteseca.

Bibliografía

Alsina, C. (2007): Educación matemática e imaginación. UNIÓN, 11, 9-17.

Blatner, A. Blatner; A. (1997): The art of play. Brunner/Routledge-Taylor & Francis, Nueva York.

Bloom; B. (1980): All our children learning: a primer for parents, teachers, and other educators. McGraw-Hill, Nueva York.

Bracho, R. Mas, A. Jiménez, N. García, T. (2011): Formación del profesorado en el uso de materiales manipulativos para el desarrollo del sentido numérico. UNIÓN, 28, 41-60.

Cano, N. A.; Zapata, F. N. (2010): La enseñanza de las matemáticas a través de la implementación del juego del rol y de aventura. UNIÓN, 23, 211-222.

Cardano, G. (1663): Opera omnia (10 volúmenes). Lyon.

Chamoso, J. M.; Durán, J. García, J. Martín; J. Rodríguez, M. (2004): Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. SUMA, 47, 47-58.

Consejería de Educación y Ciencia (2007). Decreto 74/2007, de 14 de junio, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en el Principado de Asturias. Boletín oficial del Principado de Asturias 162, pp. 13835-14036.

Consejería de Educación y Ciencia (2008). Decreto 75/2008, de 6 de agosto, por el que se establece la ordenación y el currículo del Bachillerato. Boletín Oficial del Principado de Asturias 196, pp. 18444-19056.

Contreras, M. (2004): Las matemáticas de ESO y Bachillerato a través de los juegos. Recuperado el 08/04/2013: http://www.mauriciocontreras.es/JUEGOSM.htm

Contreras Beltrán, J.M.; Duarte Tosso, I. Núñez Valdés, J. (2013): ¿Bastan solo seis enlaces para conectar a dos personas cualesquiera en el mundo? UNIÓN, 33, 103-118.

Corbalán, F. (1994): Juegos Matemáticos para Secundaria y Bachillerato. Educación Matemática Secundaria. Síntesis, Madrid.

Corbalán, F. Deulofeu, J. (1996): Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. Uno, revista de Didáctica de las Matemáticas, 7, 71-80.

Corbalán, F. (1996): Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos. SUMA, 23, 21-32.

Edo, M. Baeza, M., Deulofeu, J., Badillo, E. (2008): Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. UNIÓN, 14, 61-75.

Falsetti, M. Rodríguez, M. Carnelli, G. Formica, F. (2006): Perspectiva integrada de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática: una mirada al campo disciplinar de la matemática. UNIÓN, 7, 23-38.

Gairín, J. M. (1989): Recursos para la clase de Matemáticas: el juego. SUMA, 3, 65-66.

Gairín, J., Muñoz, J. M. (2006): Moviendo fichas hacia el pensamiento matemático. SUMA, 51, 15-29.

García, A. (2013): Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas. Aviraneta, Madrid.

García Cruz, J. A. (2008): Génesis histórica y enseñanza de las matemáticas. UNIÓN, 15, 61-87.

Geogebra (2013): Web oficial de Geogebra. Recuperado el 08/04/2013. http://www.geogebra.org/cms/es/

De Guzmán, M. (1984): Juegos matemáticos en la enseñanza. Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).

De Guzmán, M. (1989): Juegos y matemáticas. SUMA, 4, 61-64.

De Guzmán, M. (2004): Juegos matemáticos en la enseñanza. SUMA, 59, 5-38.

Hernández, H. M., Kataoka, V. Y., Silva, M. (2010): El uso de los juegos para la promoción del razonamiento probabilístico. UNIÓN, 24, 69-83.

Hernández Abreu, D. (2007): La cicloide: un recorrido histórico por sus propiedades. UNIÓN, 12, 115-134.

Jiménez, R. (2003): Aprender matemáticas jugando. Recuperado el 08/04/2013: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~cepco3/competencias/mates/secundaria/premio_aprende_matematicas_jugando.pdf

Kehle, P. (1999): Shifting Our Focus From Ends to Means: Mathematical Reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 30, 4, 468-474.

Malaspina, U. (2012): El rincón de los problemas. UNIÓN, 23, 191-200.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Ley Orgánica 2/2006 de Educación, de 3 de mayo. Boletín Oficial del Estado 106, pp. 17158 - 17207.

Muñiz, L. (2013): Matemáticas con sabor a juego: una forma diferente de aprender. Recuperado el 16/10/2013: http://matematicasconsaborajuego.blogspot.com.es/p/presentacion.html

Piaget, J. (1985): Seis estudios de Psicología. Origen/Planeta, México.

Rojas, I. R. (2009): Aplicación de juegos lógicos en Juventud Salesiana. UNIÓN, 19, 150-156.

Torres, M. (2001): El juego en el aula: una experiencia de perfeccionamiento docente en Matemática a nivel institucional. SUMA, 38, 23-29.

Villarroel, S., Sgreccia, N. (2012): Enseñanza de la geometría en secundaria. Caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas. UNIÓN, 29, 59-84.

Laura Muñiz Rodríguez: Es Licenciada en Matemáticas y Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación Profesional en la Universidad de Oviedo (Asturias, España). Actualmente es alumna del Programa de Doctorado en Matemáticas y Estadísitica de dicha Universidad. **lauramr1604@gmail.com**

Pedro Alonso Velázquez: Es Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Zaragoza y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Oviedo. Catedrático de Escuela Universitaria del Área de Matemática Aplicada y Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oviedo. Su investigación se ha centrado en el campo del álgebra lineal numérica y en la educación matemática **palonso@uniovi.es**

Luis José Rodríguez Muñiz: Es Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Oviedo. Profesor Titular de Estadística e Investigación Operativa y Vicerrector de Estudiantes de la Universidad de Oviedo. Ha publicado trabajos sobre probabilidad y estadística con datos difusos y sobre didáctica de la matemática **luisj@uniovi.es**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 35-56

A Estatística e a Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Rúbia Gomes Fernandes, Guataçara dos Santos Junior, Antonio Frasson

Fecha de recepción: 18/11/2013
Fecha de aceptación: 22/07/2014

Resumen	El presente estudio tiene como objetivo investigar cómo los procesos pedagógicos pueden promover la adquisición de conocimientos matemáticos, especialmente los centrados en estadística y probabilidad en los primeros años de escuela primaria. En que concierne à la metodología, la búsqueda se centró en los dictados establecidos para la investigación exploratoria con enfoque cuantitativo y cualitativo. La investigación se realizó con 51 participantes, 30 alumnos del 4º grado de la ciudad de Curitiba - PR municipal y entrevistó a 21 profesores de la misma escuela. Así, la práctica de la enseñanza se tradujo en la articulación de los conocimientos empíricos y científicos en los procesos de enseñanza, favoreciendo la adquisición de conocimientos matemáticos, sobre todo los que son acerca de la estadística y de la probabilidad en los primeros años de escuela primaria. **Palabras clave**: Estadísticas, probabilidad, educación matemática.
Abstract	The present study aims to investigate how the pedagogical processes promote the acquisition of mathematical knowledge, especially those focused on statistics and probability in the early years of elementary school. Methodologically the research focused on the dictates established by a exploratory research with quantitative and qualitative focus. The research was conducted with 51 participants, 30 students from the 4th grade level of the municipal school in Curitiba - PR and we interviewed 21 teachers from the same school. Thus, the teaching practice resulted in the articulation of the empirical and scientific knowledge during the teaching processes, favoring the acquisition of mathematical knowledge, particularly about statistical and probability in the early years of elementary school. **Keywords**: Statistics; probability; mathematics education.
Resumo	O presente estudo objetiva investigar de que forma os processos pedagógicos favorecem a aquisição dos saberes matemáticos, em especial os voltados para a estatística e da probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental. Metodologicamente a pesquisa centrou-se nos ditames estabelecidos para uma pesquisa exploratória com enfoque quantitativo e qualitativo. A investigação foi realizada com 51 participantes, sendo 30 alunos do 4º ano do ensino fundamental da rede municipal da cidade Curitiba - PR e 21 docentes entrevistados da mesma escola. Desse modo, a prática docente teve como resultado a articulação dos saberes empíricos e científicos durante os processos pedagógicos, favorecendo a aquisição dos conhecimentos matemáticos, em especial os estatísticos e probabilísticos nos anos iniciais do ensino fundamental. **Palavras-chave:** Estatística; Probabilidade; Educação matemática.

1. Introducción

A complexidade estrutural da sociedade que se faz presente nos dias atuais conduz para o entendimento de que o ser humano deve estar preparado para uma percepção ampla da vida, face aos novos postulados que se apresentam nos mais diversos contextos vivenciados pelo homem. Dentro dessa percepção, torna-se primordial que o homem esteja cada vez mais capacitado para que possa refletir sobre as implicações que se fazem presentes, visto que ele é parte integrante dessa teia social. Capra (2000, p. 34), ao analisar as mudanças ocorridas no mundo, destaca que:

> Nos séculos XVI e XVII, a visão de mundo medieval, baseava-se na filosofia aristotélica e na teologia cristã, mudou radicalmente. A noção de um universo orgânico, vivo e espiritual foi substituída pela noção de mundo como uma máquina, e a máquina do mundo, tornou-se a metáfora dominante da era moderna. Essa mudança radical foi realizada pelas novas descobertas em física, astronomia e matemática, conhecidas como Revolução Científica [...].

Tal posicionamento centra-se na necessidade de discriminar, medir e classificar as informações e os dados transportados, expostos pelos mais diversos meios de comunicação, que podem influenciar os atos decisórios e a precisão nos contextos sociais, educacionais, políticos, econômicos e culturais.

Corroborando com o exposto, Lopes (1999, p.4) destaca que:

> [...] o indivíduo tem necessidade dessas noções para interpretar inúmeros artigos de jornais e revistas nos quais as informações são dadas sob a forma de porcentagens, de médias, de gráficos, de pictogramas etc. Aponta para o quanto as pessoas são bombardeadas por declarações de políticos, solicitadas por agências de publicidade e sondagens de opiniões; para o delírio do grande público frente aos jogos de azar e o quanto é imprescindível que tenham uma visão realista de suas chances de ganhar e consigam guardar uma atitude crítica diante das `receitas` para dominar o acaso.

A esse respeito, percebe-se a importância do sujeito ser alfabetizado com as distintas linguagens, para realizar a leitura e a interpretação das informações e dos dados advindos dos mais diversos contextos. Aqui poderíamos ver os saberes matemáticos e em especial o ensino da estatística e da probabilidade como uma das formas adequadas para a contextualização da aprendizagem.

Em relação aos saberes matemáticos, os determinantes emanados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais. PCN (1977) voltados para o ensino da matemática, determinam que o aluno deve ser capaz de "ler e interpretar dados apresentados de maneira organizada e construir representações, para formular e resolver problemas que impliquem o recolhimento de dados e a análise de informações" (Brasil, 1997, p.132).

Nesse sentido, compreende-se que os conteúdos abarcam o entendimento, as estratégias de raciocínio, as atitudes e o interesse dos estudantes, como uma forma de tornar os processos de ensino e de aprendizagem significativos para os estudantes.

Para tanto, o presente estudo objetiva investigar de que forma os processos pedagógicos favorecem a aquisição dos saberes matemáticos, em especial os voltados para a estatística e da probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental.

2. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino de Matemática no Brasil

Com a implementação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB (Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996), institucionalizaram-se os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, objetivando assegurar um currículo para a educação básica, a partir de dois segmentos: ensino fundamental e ensino médio.

Em relação ao ensino da matemática para anos iniciais do ensino fundamental, os PCN evidenciam a necessidade de ofertar subsídios para que os sujeitos tenham condições de ler, de interpretar e de compreender informações diversas vinculadas ao contexto social.

Com vista aos determinantes para o ensino da matemática Nacarato, Mengali e Passos (2009, p.16) apontam pontos de convergência em relação ao PCN, como a questão da “alfabetização matemática; índices de não linearidade do currículo; aprendizagem com significado; valorização da resolução de problemas; linguagem matemática, dentre outros”.

Corroborando com o exposto, Carvalho (2005, p. 122-123) observou aspectos positivos e negativos relacionados aos pontos supracitados. No tocante aos enfoques positivos relaciona-os com o ensino fundamental e em especial aos anos iniciais, ressalta que:

> [...] o tratamento e análise de dados por meio de gráficos; a introdução de noções de estatística e probabilidade; a percepção de que a matemática é uma linguagem; o reconhecimento da importância do raciocínio combinatório; um esforço para embasar a proposta em estudos recentes de educação matemática; a percepção de que a função da Matemática escolar é preparar o cidadão para uma atuação na sociedade em que vive.

Sob esse aspecto, verifica-se que a função do ensino da matemática vai além das matrizes curriculares restritas ao conteúdo pleno, pois deve favorecer reflexões que extrapolam a sala de aula.

Em relação aos aspectos negativos, Carvalho (2005), entende que podem ser referenciadas as ênfases excessivas aos conteúdos e às técnicas algorítmicas operatórias, em detrimento dos conceitos matemáticos. Destacam-se, também, as poucas referências, que subsidiam o processo educativo para o desenvolvimento do pensamento matemático no campo do cálculo mental, a estimativa e as aproximações.

Nessa perspectiva, tem-se que conforme os PCN a finalidade do ensino fundamental, objetiva:

> [...] subsidiar a elaboração ou a revisão curricular dos Estados e Municípios, dialogando com as propostas e experiências já existentes, incentivando a discussão pedagógica interna das escolas e a elaboração de projetos educativos, assim como servir de material de reflexão para a prática de professores (BRASIL, 1997, p. 29).

A partir dessa determinação, cabe destacar que os PCN estabelecem a necessidade de a educação escolar aproximar-se da formação cidadã. Nesse viés, compreende-se que a matemática pode ser um instrumento pedagógico valioso quando contribui realmente para a formação intelectiva dos alunos de forma autônoma, oportunizando que os conhecimentos, saberes e conceitos matemáticos escolares possam lhe dar subsídios para entender e participar da sua vida cotidiana.

Reiterando o exposto, Pires (2000, p. 57) afirma que “o reconhecimento dessa área do conhecimento como estimuladora do interesse, curiosidade, espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas” deve se fazer presente. Nesse sentido, os PCN indicam que:

> [...] tanto nos objetivos educacionais que propõem quanto na conceitualização do significado das áreas de ensino e dos temas da vida social contemporânea que devem permeá-las, adotam como eixo o desenvolvimento e capacidades do aluno, processo em que os conteúdos curriculares atuam não como fins em si mesmos, mas como meios para a aquisição e desenvolvimento dessas capacidades (BRASIL, 1997, p. 33).

Nessa perspectiva curricular, os conteúdos curriculares estão distribuídos em quatro blocos: números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas; e tratamento da informação. Em relação aos conteúdos de estatística e probabilidade, objeto deste estudo, eles estão contemplados no bloco tratamento da informação.

No que diz respeito à estatística, os PCN determinam que “a finalidade é fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia a dia” (Brasil, 1997, p.56). Já, em relação à probabilidade, o principal objetivo dos PCN é que o aluno tenha condições de compreender que, em grande parte, os acontecimentos do cotidiano são de “natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza que se manifestam intuitivamente podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experiências e observa eventos” (Brasil, 1997, p. 56-7).

Desse modo, entende-se que cabe às instituições escolares focalizar e sistematizar as suas práticas pedagógicas com vistas a essa determinação. Assim, o trabalho relativo a noções de estatística e probabilidade não deverá estar pautado apenas “na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos” (BRASIL, 1997, p. 57).

Para tanto, os PCN, em relação ao trabalho pedagógico nos dois primeiros ciclos, sugere atividades de interesse e conhecimento dos estudantes, como por exemplo, datas de aniversários e festividades, objetivando a elaboração de listas pertinentes ao tema segundo um critério previamente estabelecido. Após a sistematização pedagógica, os alunos podem analisar, discutir e avaliar, para, em seguida, efetivar a construção de gráficos que apresentem essas informações em outro formato. Além disso, é possível explorar essa prática pedagógica tendo como foco informações advindas das vivências diárias dos alunos.

Entende-se, que para o sujeito estar, de fato, educado matematicamente, as metodologias desenvolvidas devem ser exploradas de modo que priorizem “a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios” (Brasil, 1997, p. 26).

Nessa perspectiva, entende-se que se pode sistematizar o trabalho pedagógico com a probabilidade, realizada após a estruturação dos conceitos estatísticos, relacionando-os com o processo em questão. Nesse sentido, os PCN determinam que:

> A construção de tabelas e gráficos que mostram o comportamento do tempo durante um período (dias ensolarados, chuvosos, nublados) e o acompanhamento das previsões do tempo pelos meios de comunicação indicam a possibilidade de se fazer algumas previsões, pela observação de acontecimentos. Pela observação da frequência de ocorrência de um dado acontecimento, e um número razoável de experiências, podem-se desenvolver algumas noções de probabilidade (BRASIL, 1997, p. 133).

Percebe-se que nos PCN ainda há questões que podem ser repensadas no que diz respeito aos conceitos relacionados à estatística e à probabilidade. Lopes (1998, p. 112), ao analisar esse processo, ressalva que foi dada pouca ênfase ao ensino de estatística e de probabilidade nos PCN, enfatizando que "deveriam ter posto em maior evidência as questões relativas ao ensino da probabilidade e da estatística, considerando que tais temas nunca foram antes abordados em propostas curriculares brasileiras, além de não terem feito parte da formação inicial do professor".

Analisando o processo de ensino da estatística e de probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental, pode-se afirmar que as propostas curriculares devem ser implementadas nos espaços escolares conforme orientações indicativas pelos PCN.

3. A Estatística e a Probabilidade no Ensino Fundamental no Brasil

A estatística pode também ser entendida como uma ciência ou um método, podendo ser subsidiada pela probabilidade, cuja intenção primordial é poder auxiliar as pessoas a tomar decisões ou obter conclusões em situações de incertezas, com base em informações e dados. Para Lopes (1998, p.111), a estatística apresenta-se "com o objetivo de coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações, tornando o estudante capaz de descrever e interpretar sua realidade, usando conhecimentos matemáticos". No que diz respeito ao pensamento probabilístico, torna-se fundamental proporcionar aos alunos o embate com situações reais diversificadas como, por exemplo: jogos de regras e resolução de situações-problema, que podem favorecer a elaboração de estratégias.

Lopes (1998, p. 111), ao referenciar os ditames da probabilidade, aponta que a estatística:

> É apresentada com a finalidade de promover a compreensão de grande parte dos acontecimentos do cotidiano que são de natureza aleatória, possibilitando a identificação de resultados possíveis desses acontecimentos. Destacam-se o acaso e a incerteza que se manifestam intuitivamente, portanto cabendo à escola propor situações em que as crianças possam realizar experimentos e fazer observações dos eventos.

Nesse aspecto, a estatística e a probabilidde podem ser apresentadas utilizando-se o recurso da matematização que significa organizar, formular, sistematizar, criticar e desenvolver mecanismos próprios para compreender (Skovsmose, 1990). Observa-se que, para que esse processo se efetive, é indispensável que docentes e discentes se encontrem no domínio da situação de aprendizagem.

A sistematização pedagógica efetivada em sala de aula deve favorecer a relação proativa entre o aluno, o conhecimento e as práticas educativas, num movimento de pensar e de repensar constante.

Essa relação tem como objetivo formar alunos críticos frente aos conteúdos matemáticos, bem como torná-los reflexivos e argumentativos com relação a decisões em âmbito social e, em especial, em circunstâncias nas quais os conhecimentos e saberes estatísticos e probabilísticos são ferramentas indispensáveis para entendimento e compreensão do seu cotidiano.

Com relação à estatística na sociedade atual, pode-se perceber que é cada vez maior o volume de informações inseridas na vida cotidiana dos indivíduos que os remetem a esse conhecimento. Nessa perspectiva, os conhecimentos estatísticos podem ser compreendidos como recursos essenciais para a execução de projetos e investigações nos mais diversos contextos, sendo utilizada no planejamento, na coleta e na análise de dados, bem como na realização de inferências para tomar decisões.

Tendo como referência uma perspectiva crítica do ensino da matemática, Pinheiro (2005, p. 17) aponta que a estatística:

> [...] se mostra como conhecimento que contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento, raciocínio e aquisição de atitude, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito do próprio conhecimento. Isso vem favorecer ao aluno a capacidade de resolver problemas, gerando nele hábitos de investigação, proporcionando-lhe confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, bem como lhe propiciando a formação de uma visão ampla da realidade.

Com base no exposto, entende-se que atuar em uma prática, que vislumbre a ação de selecionar, analisar e refletir, tem sido um grande e constante desafio educativo. Observa-se a necessidade da sistematização desses durante as práticas pedagógicas, contribuindo para a formação de cidadãos autônomos, capazes de pensar e tomar decisões sobre os acontecimentos que os cercam.

Lopes (1998, p. 11-12) ao discorrer sobre esta questão afirma que, o “ensino de estatística e probabilidade são conhecimentos fundamentais para analisar índices de custo de vida, para realizar sondagens, escolher amostras e outras situações do cotidiano”.

Sob essa ótica, compreende-se como fundamental fazer a distinção entre situações-problemas e exercícios de aplicação de conceitos matemáticos previamente sistematizados. A constituição desse processo abarca elementos mais elaborados do que simplesmente a aplicação direta e imediata de conceitos matemáticos, que são a base fundamental de exercícios de aplicação. A sua resolução envolverá a interpretação e o estabelecimento de estratégias para solucioná-las. Ainda, nesta vertente de pensamento, Lopes (2008, p. 62) declara:

> [...] não faz sentido trabalharmos atividades envolvendo conceitos estatísticos e probabilísticos que não estejam vinculados a uma problemática. Propor coleta de dados desvinculada de uma situação-problema não levará à possibilidade de uma análise real. Construir tabelas e gráficos desvinculados de um contexto ou relacionados a situações muito distantes do aluno podem estimular a elaboração de um pensamento, mas não garantem o desenvolvimento de sua criticidade.

Percebe-se que não basta desenvolver um processo de ensino fora de um contexto problematizado real que oportunize reflexões sobre conceitos probabilísticos e estatísticos. É fundamental que o estudante pense sobre o problema e tenha subsídios para solucioná-lo a partir de seu contexto.

Isso, também, não significa somente sistematizar pedagogicamente os conceitos do senso comum que o aluno traz de seu convívio social. Deve-se aproveitá-los, para torná-los científicos, vislumbrando contribuir para que os indivíduos comecem gradativamente a posicionar-se reflexivamente nas atividades de ensino, haja vista ser situações com as quais já possuem o mínimo de familiaridade e conhecimento.

A esse respeito, no sentido de contribuir com o processo de criticidade dos indivíduos e com o exercício pleno de sua cidadania, Lopes (2008, p.60-61) faz a seguinte afirmação:

> Não basta ao cidadão entender as porcentagens expostas em índices estatísticos como o recenseamento populacional, taxas de inflação, desemprego, é preciso analisar/relacionar criticamente os dados apresentados, questionando/ponderando até mesmo sua veracidade. Assim como não é suficiente ao aluno desenvolver a capacidade de organizar e representar uma coleção de dados, faz-se necessário interpretar e comparar esses dados para tirar conclusões.

Torna-se perceptível que os pressupostos que se delinearam, a partir das análises e discussões apresentadas pelos pesquisadores e estudiosos mencionados nesse estudo, estão em consonância com os indicativos nacionais e têm por finalidade balizar e nortear as práticas pedagógicas em âmbito nacional, para o ensino da matemática, no que tange à estatística e à probabilidade.

Entretanto, reflete-se que, mesmo com avanços educativos consideráveis, como a inserção de um bloco de conteúdos específicos para abordar essas relações matemáticas, ainda se faz preciso refletir sobre as práticas pedagógicas nessa modalidade de ensino. Ao ponderar sobre o ensino e a aprendizagem estatísticas e probabilísticas nas instituições escolares, percebe-se que ainda é necessário repensar estas práticas. As preocupações com esse eixo temático, que está no centro de várias discussões e estudos científicos, além das muitas questões, necessitam ser repensadas, para que a educação escolar possa ofertar a formação preconizada pelos PCN.

Assim, é indispensável observar as necessidades atuais dos alunos impostas pela sociedade em que vivem, pois é cada vez maior e mais intenso o fluxo de informações, levantamentos de dados, taxas percentuais entre outros elementos que subsidiam a tomada de decisão dos indivíduos e estes têm acesso cada dia mais precocemente aos meios de informação.

4. Leitura e interpretação gráfica

A Estatística no que concerne a leitura, interpretação e compreensão gráfica está crescendo significativamente, uma vez, que diariamente as pessoas se confrontam com inúmeras situações que exigem delas, essas habilidades, conhecimentos e saberes.

Percebe-se que, os gráficos são constantemente apresentados nos diversos contextos sociais, como forma de comunicação no cotidiano das pessoas. Assim, acredita-se que possa entender como natural que os estudantes tenham condições de ler, interpretar e compreender a linguagem gráfica, mesmo antes do contato formal nos ambientes escolares. Todavia, tal fato, não necessariamente implica que eles realmente saibam o que é uma estrutura gráfica, seu significado e a relevância na sociedade contemporânea (Carvalho, 2009).

Por compreender que estes elementos são fundamentais para a representação dos dados de um conjunto. Os gráficos e tabelas têm como finalidade esclarecer, organizar e sintetizar as informações e dados quantitativos advindos de distintas fontes de comunicação, sendo assim, um “meio para de comunicar e classificar dados” (Curcio, 1989, p.1). Complementando essa ideia Monteiro e Selva (2001) indicam que os gráficos são uma ferramenta cultural que permite ao sujeito expandir sua capacidade de entender e explorar as informações estatísticas e estabelecer relações entre os distintos tipos de informação.

Quanto às tabelas, Duval (2002) em sua análise, pontua a contribuição cognitiva das tabelas e seus distintos usos, sendo essencial diferenciar dois importantes aspectos: a própria organização representacional, ou seja, a composição semiótica das tabelas, e as funções cognitivas a que elas se prestam.

Nesse sentido, designa-se em geral por tabela, qualquer disposição em linhas e colunas. “Essa organização apresenta uma dupla vantagem, pois distribui os dados de acordo com o cruzamento de linhas e colunas, separando-os visualmente” (Araújo e Flores, 2010, p.4). Contudo, para Duval (2002), isso não basta para descrever o funcionamento representativo das tabelas, fazendo-se imprescindível discernir as particularidades das tabelas em relação às demais representações gráficas.

O autor referido destaca que as tabelas não servem exclusivamente para fins de consultas rápidas ou questões desse gênero, elas podem expressar características com relação à classificação ou variação determinando, com isso, uma leitura global da tabela exigindo compreensão plena, e não simplesmente, uma leitura estanque e pontual. Portanto, conduz o sujeito a ultrapassar “um passo pontual para um passo de interpretação global na leitura dos dados” (Araújo e Flores, 2010, p.4).

Assim, entende-se como essencial refletir que o aluno só terá condições de realizar uma leitura global compreensiva das estruturas tabulares, quando o professor auxiliar com encaminhamentos pedagógicos que contemplem tal questão, atuando como colaborador nesse processo. A esse respeito, cabe apresentar os elementos importantes indicados por Crespo (1999, p.25) para a construção de uma tabela:

- Corpo: conjunto de linhas e colunas que contém informações sobre a variável em estudo;
- Cabeçalho: parte superior da tabela que especifica o conteúdo de cada coluna;
- Coluna indicadora: parte da tabela que especifica o conteúdo das colunas;
- Linhas: retas imaginárias que facilitam a leitura, no sentido horizontal de dados que se inscrevem em seus cruzamentos com as colunas;
- Casa ou célula: espaço destinado a um só número;
- Título: conjunto de informações, as mais completas possíveis, e que possa responder as perguntas: O quê? Quando? Onde? Deve estar localizado no

topo da tabela e é de suma importância, pois se não colocarmos os leitores não saberão sobre o que está falando a tabela.

As tabelas podem ser simples ou de dupla entrada. A simples organiza seus dados estabelecendo relação entre eles e uma determinada característica, enquanto que a de dupla entrada organiza os dados que apresentam mais de uma característica e, com isso, duas ordens de classificação uma na horizontal (linha) e outra na vertical (coluna).

Com relação aos gráficos, observa-se que são constantemente apresentados nos diversos contextos sociais, como forma de comunicação no cotidiano das pessoas. Assim, acredita-se que os professores possam entender como natural que os alunos tenham condições de ler, interpretar e compreender a linguagem gráfica, mesmo antes do contato formal nos ambientes escolares. Todavia, tal fato, não necessariamente implica que eles realmente saibam o que é uma estrutura gráfica, seu significado e a relevância na sociedade contemporânea (CARVALHO, 2009).

Fernandes e Cardoso (2009, p.9) salientam que as tabelas e gráficos favorecem a organização e apresentação das informações e dados estatísticos de modo claro e objetivo. Para eles, ainda existem vários motivos para que os estudantes já nos primeiros anos de escolarização iniciem seus estudos no que abarca as relações estatísticas, como por exemplo:

- [...] os gráficos e os dados ocupam um lugar importante nos órgãos de comunicação social;
- os gráficos são um meio simples, poderoso de apresentar dados de uma forma condensada, compreensível e interessante para as crianças;
- a habilidade de resolver problemas é desenvolvida, porque as crianças envolvem-se na coleta de dados, na organização, na apresentação e na avaliação crítica dos resultados;
- as outras capacidades matemáticas, como contar, medir, seriar, ordenar, podem ser reforçadas;
- a motivação aumenta e progride quando colecionam e organizam dados, quando os analisam e comunicam oralmente ou por escrito os resultados.

Compreende-se que o domínio da linguagem gráfica pode operar como uma estrutura de rompimento do processo dicotômico entre a construção e interpretação de gráficos. Desse modo, quando o sujeito tem o domínio da linguagem gráfica este terá à capacidade de ler os dados apresentados no gráfico, permitindo a ele “interpretar os dados e generalizar as informações nele presentes”. Portanto, [...] “existe uma evolução para a compreensão das pessoas sobre diferentes formas de representação” (Lopes, 2004, p.190).

Ainda a esse respeito, Curcio (1989) indica que o potencial máximo de um gráfico é alcançado quando a partir da sua representação é possível interpretar e tecer conclusões sobre as informações e dados nele expressos. Para Friel, Curcio e Bright (2001) os gráficos refletem a competência do leitor em compreender e significar essas estruturas construídas por si mesmo, ou por outros sujeitos.

Desta forma, e considerando que a sociedade contemporânea utiliza cada vez mais os gráficos, tabelas e dados estatísticos, torna-se fundamental que os alunos venham a desenvolver competências para que tenham condições de interpretá-los e compreendê-los. Apresentam-se três níveis de leitura e compreensão definidos por Curcio (1989) com relação aos gráficos e tabelas:

- Nível 1: Ler os dados: Neste nível foi considerada apenas a leitura direta de um gráfico sem qualquer interpretação, atendendo apenas a factos representados explicitamente;
- Nível 2: Ler entre os dados: Este nível já requer a comparação, o conhecimento de conceitos e habilidades matemáticas, que já permitem identificar relações [..] fazendo inferências simples;
- Nível 3: Ler além dos dados: Este nível exige uma ampliação dos conceitos, a predição, a inferência [..] ou previsões com base numa interpretação dos dados.

Reflete-se que a proposta de trabalho desenvolvida por Curcio, se enquadra nos pressupostos que sustentam o letramento estatístico, pois se destaca a relevância em ambos os casos, das pessoas terem condições de interpretar, ler, compreender e ter subsídios para inferir informações estatísticas e gráficas.

5. Procedimentos Metodológicos

A proposta pedagógica objetiva investigar de que forma os processos pedagógicos favorecem a aquisição dos saberes matemáticos, em especial os voltados para a estatística e da probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental. Tal ação apoiou-se nas instruções dos PCN, que alertam para o fato de que, ao resolver problemas, não basta somente aplicar conceitos aprendidos, mas, também, desenvolver e concretizar ações que exijam analisar, interpretar e elaborar estratégias para solucioná-los.

Nesta investigação, a base metodológica aplicada caracteriza-se como uma pesquisa exploratória com enfoque quantitativo e qualitativo, tendo como fio condutor o planejamento das ações a serem dinamizadas, bem como, a observação dos aspectos oriundos do processo de interação dos pesquisadores e participantes, a atuação (intervenção sobre conceitos estatísticos e probabilísticos) e a análise dos dados coletados no estudo.

A referida pesquisa foi realizada em uma escola da Rede Municipal de Ensino da cidade de Curitiba do estado do Paraná. Esta escola como organização de ensino a estrutura ciclada. A população estudada é representada por 51 participantes, sendo 30 alunos matriculados no 4º ano do ensino fundamental, representados por 18 meninas e 12 meninos identificados por A1 até A30, dentro da faixa etária que variava entre nove e onze anos e 21 docentes entrevistados, identificados por D1 até D21.

5.1 A construção do instrumento de pesquisa

A construção do questionário estruturado e a coleta de dados foram organizados em cinco etapas, na expectativa de favorecer e estreitar a compreensão dos alunos com relação aos conhecimentos estatísticos e probabilísticos.

Justifica-se a inclusão dos alunos no processo de construção do questionário e consequentemente na coleta de dados pelo fato de que o trabalho pedagógico se tornará mais interessante, visto que ao participam ativamente em todas as etapas, começando na escolha das questões que comporão o instrumento de pesquisa, perpassando pela coleta dos dados, representações tabulares e gráficas, até a conclusão com as análises e discussões oportunizam a contextualização do processo de aprendizagem voltado para o estudo do ensino da estatística e da probabilidade.

- Inicialmente os pesquisadores lançaram aos alunos os seguintes questionamentos: As pessoas utilizam os conhecimentos de estatística no dia a dia? Em que circunstâncias de nossas vidas, podemos perceber os conhecimentos estatísticos? Será que só vemos os conceitos estatísticos dentro da escola?
- Na sequência, foi realizada uma roda de conversa na tentativa de exemplificar a definição de que maneira as pessoas utilizam a estatística na sua vida cotidiana, para coletar, organizar, comunicar e interpretar os dados, visando a real compreensão da definição da estatística.
- Assim, com vistas à necessidade de contextualizar a estatística em distintos contextos sociais aos alunos, na tarefa subsequente propôs-se uma roda de conversa com a intenção de instiga-los a estabelecer relações entre as estruturas, já sistematizadas em sala de aula, e as questões estatísticas apresentadas nos contextos sociais.
- Realizou-se uma apresentação em *powerpoint* com imagens referentes à organização de dados, coleta de dados, tabelas, gráficos, infográficos, informações estatísticas vinculadas à mídia imprensa, televisiva, jornalística, em situações diversas, para discussão coletiva com os estudantes.
- Após essas fases, o grupo estruturou um questionário, composto por três questões, que abordava perguntas referentes à estatística e à probabilidade, conforme se mostra na figura 1.

1- A estatística e a probabilidade são conhecimentos importantes para as pessoas? ( ) Muito ( ) Médio ( ) Pouco ( ) Indiferente
2- A estatística e a probabilidade são conhecimentos utilizados, além da escola? ( ) Muito ( ) Médio ( ) Pouco ( ) Indiferente
3- Como você pode classificar suas informações e conhecimentos sobre a estatística e probabilidade? ( ) Muito ( ) Médio ( ) Pouco ( ) Indiferente

Figura 1: Questionário estruturado pelos estudantes
Fonte: Autores

5.2 Aplicações de atividades por meio do instrumento

As atividades, apresentadas a seguir, advêm da construção do questionário. Pretende-se que esses momentos pedagógicos possam ampliar e aprofundar seus conhecimentos e informações gradativamente sobre essa temática. Para atender a esse pressuposto configuram-se as seguintes etapas.

- Aleatoriamente foram escolhidos alguns alunos da turma para aplicar esse questionário para docentes da instituição. Após o preenchimento dos questionários, houve uma discussão coletiva da questão, cuja temática centrou-se na pergunta: “você consegue identificar em sua vida cotidiana, em que momentos você faz uso dos conceitos de estatística e de probabilidade?” E das colocações pertinentes a essa temática por parte dos alunos, realizou-se a tabulação das demais questões, bem como, as reflexões, as análises e as discussões que abarcaram as questões representadas no questionário.

- A segunda etapa objetivou que os alunos tivessem a oportunidade de organizar e de tabular os dados advindos dos questionários no Laboratório de Informática utilizando o programa excel, bem como representá-los utilizando diferentes estruturas gráficas, tais como: coluna, pizza, dispersão, rosca, bolha, radar, superfície, ações e barra.
- Na última etapa, a tarefa indicada para os alunos foi a de que confeccionassem cartazes com as questões tratadas desde início do processo pedagógico e realizassem uma apresentação para a turma. Após essa etapa, foi organizado um mural com o trabalho desenvolvido pelos estudantes para informar a comunidade escolar.

6. Análise e discussão dos resultados

Com base nos dados coletados, observou-se a partir da primeira interrogação: “a estatística e a probabilidade são conhecimentos importantes para as pessoas?” a amostra dos entrevistados, que perfazem 21 sujeitos (docentes), conforme mostra o gráfico 1.

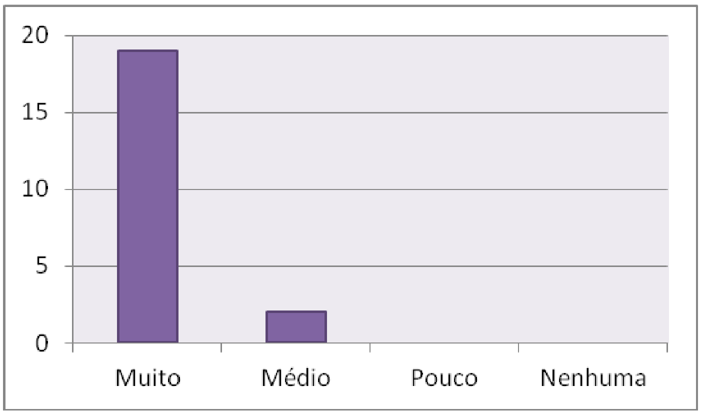


Figura 2: Gráfico 1.ª questão
Fonte: Autores

Em relação à análise desta questão os alunos puderam observar que 19 dos docentes entrevistados informaram que os conhecimentos estatísticos e probabilidade são essenciais para todos os sujeitos na atualidade e somente dois pontuaram que esses conhecimentos de importância mediana.

Dessa forma, entende-se como essencial oportunizar práticas pedagógicas, com as quais os alunos tenham condições de participar ativamente, dialogando e interagindo. Sabe-se que a escola é um ambiente que faz parte de uma totalidade mais ampla, na qual inúmeros sentidos e linguagens se configuram.

No intuito de aliar os conhecimentos matemáticos com uma metodologia que propicie maior envolvimento dos alunos. Optou-se por uma ação pedagógica alicerçada nos conhecimentos matemáticos do senso comum, como estratégia para o ensino de conteúdos estatísticos e probabilísticos nesse momento.

Nesta primeira análise já existiu uma convergência do aprendizado com o proposto nos PCN conforme apontam Nacarato, Mengali e Passos (2009), pois foi observado a importância de um ensino com significado com a resolução de problemas.

Os resultados iniciais também corroboram com Pires (2009), pois outro ponto destaque inicialmente percebido neste processo de ensino e aprendizagem foi o maior envolvimento dos alunos nas atividades propostas aliado a um despertar da curiosidade e de espírito de investigação.

Com relação ao segundo questionamento: “a estatística e a probabilidade são conhecimentos utilizados, além da escola?”, como resultado apresentou o gráfico a seguir.

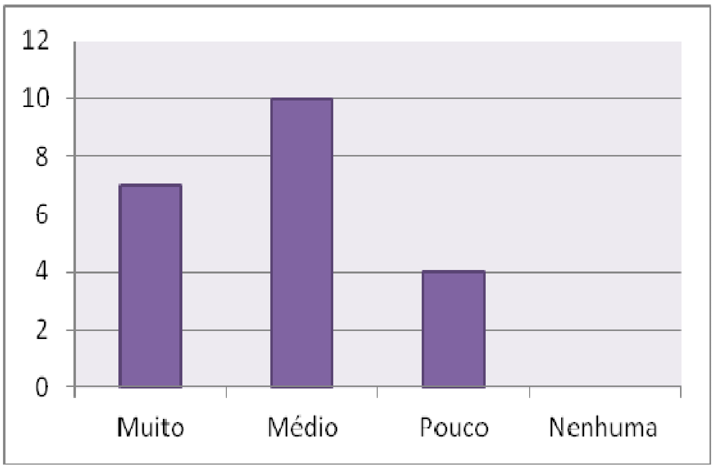


Figura 3: Gráfico 2.ª questão
Fonte: autores

A esse respeito, foi observado pelos alunos que dentre os 21 docentes entrevistados, 7 destacaram que é muito útil os conhecimentos estatística e probabilidade, além dos espaços escolares, 10 indicaram que esses conhecimentos são aplicados de forma mediana, e os outros 4 pontuaram serem conhecimentos com pouca aplicabilidade.

Nesse sentido, os PCN ressaltam que os saberes estatísticos e probabilísticos podem possibilitar o desenvolvimento pedagógico do pensamento matemático. Dessa forma, não basta direcionar os encaminhamentos pedagógicos apenas para a aplicação de fórmulas, procedimentos e cálculos, uma vez, que esses exclusivamente não conduzirão o aluno a apropriar-se dos conhecimentos de estatística e de probabilidade, que, por exemplo, envolvem fenômenos aleatórios, interpretação de amostras e transmissão de resultados por meio da linguagem estatística.

Assim, compreende-se como essencial o fato de os alunos terem participado de todos os processos pedagógicos, na elaboração, na construção e na aplicação desse recurso didático, para, então, tecer suas próprias conclusões a respeito dos questionamentos suscitados, e a devolutiva da comunidade escolar envolvida.

Conforme defende Lopes (2008, p.62), foi muito importante propor um ensino envolvendo atividades vinculadas a uma problemática. Isto oportunizou, por parte dos alunos, reflexões sobre os conceitos estatísticos, colaborando para que os mesmos iniciassem um posicionamento mais científico com relação os dados que estavam sendo analisados.

O gráfico 3 apresenta os resultados obtidos à terceira indagação: como você pode classificar suas informações e conhecimentos sobre a estatística e probabilidade?

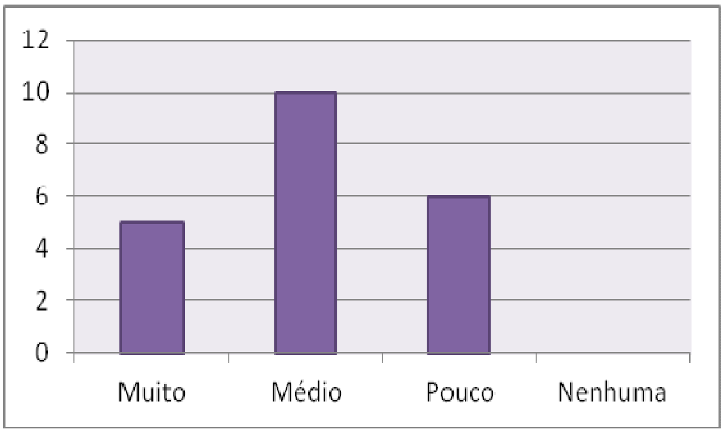


Figura 4: Gráfico da 3.ª questão
Fonte: Autores

No que trata da classificação dos conhecimentos e informações dos docentes com relação à estatística e probabilidade dos 21 docentes pesquisados, os alunos tiveram condições de notar que cinco deles indicaram terem muitos conhecimentos sobre o assunto, dez destacaram ter conhecimentos medianos envolvendo o assunto e, os outros seis reconheceram ter pouco conhecimentos sobre o tema.

Em relação às respostas dadas pelos docentes, ressaltam-se as colocações de Toledo e Ovalle (1985), que destacam que frequentemente os sujeitos estão expostos à estatística e à probabilidade, empregando-a com maior ou menor grau de intensidade. Contudo, é necessário refletir, por exemplo, que grande parte da população não compreende o suficiente para ponderar e interpretar um gráfico.

Pautando-se no exposto, observou-se que, com a efetivação da pesquisa, atitudes positivas foram detectadas nos alunos frente ao processo de ensino e da aprendizagem. Como exemplo, os alunos perceberam que para realizar as tarefas propostas precisaram dialogar, reportando-se a conhecimentos e informações já vivenciadas. A leitura compreensiva na resolução de problemas estatísticos estruturou-se gradativamente. Por meio dela os alunos observaram a necessidade em fazê-la com cautela, atenção e interpretando o enunciado dos conceitos ali tratados; visualizaram que os saberes e conhecimentos estatísticos e probabilísticos estão presentes na sociedade em distintos contextos sociais.

Conforme observado durante o processo interventivo, as práticas desenvolvidas ultrapassaram a mera execução de exercícios, avançando numa efetiva análise para solucionar distintas situações-problema, utilizando os conhecimentos matemáticos, a partir de experiências já adquiridas (Skovsmose, 2008).

Assim, Gal e Garfield (1999) destacam a importância de oportunizar aos estudantes uma prática pedagógica com dados reais, quer resolvendo problema interessante quer propondo seus próprios problemas, conduzindo-os, a seguir, aos pressupostos da investigação estatística, além de favorecer a tomada de decisões, sempre justificadas por eles, sobre coleta de dados, tabulação e análise.

Nesse sentido, a prática instituída corroborou com os pressupostos teóricos discutidos por Lopes e Nacarato (2009), ratificados nas colocações expostas por Gal e Garfield (1999), e nos PCN, ao afirmarem que:

> [...] O ensino-aprendizagem da Estatística deve partir de uma abordagem conceitual, inserida em situações cotidianas e significativas para os estudantes, das quais emergem os conceitos estatísticos, gerando uma prática pedagógica na qual se proponham aos alunos momentos para observação e construção de sucessos possíveis, a partir da experimentação concreta, pois é necessário desenvolver um trabalho educacional que vise o desenvolvimento da intuição probabilística (Lopes; Nacarato, 2009, p.89).

A esse respeito, sistematizou-se ao longo das etapas de intervenção uma prática interventiva que favorecesse a compreensão das relações matemáticas conectadas a situações-problema reais, nas quais os alunos ocupassem papel ativo no processo de ensino e aprendizagem, ao invés de serem meros expectadores.

Nesse contexto, além de aprenderem a importância de estabelecer relações de interação e diálogo no âmbito escolar e fora dele, os estudantes participaram ativamente da coleta de dados, da organização, da tabulação, da representação gráfica e da interpretação de dados numa perspectiva interativa, amparando-se nos recursos tecnológicos para explorar os elementos matemáticos.

Dessa forma, as situações-problema, apresentadas na intervenção, poderiam ter mais que uma forma de resolução, o que proporcionou aos pesquisadores e alunos sentirem a necessidade de discutir e analisar coletivamente, para favorecer a compreensão do que deve ser efetivado para resolver a situação-problema em questão. Isso remete a uma aprendizagem pautada na exposição de suas ideias e respeitando as demais com criticidade, segundo os pressupostos teóricos utilizados para sustentar a pesquisa (Fiorentini, 2006).

Assim, percebeu-se na fala dos alunos no decorrer das tarefas interventivas que eles realmente estavam motivados e engajados a participar das propostas, com muito entusiasmo.

A aluna “A4” disse “que era legal estudar estatística, sem fazer continhas e resolver problemas, com o que era possível se divertir e também aprender estatística”.

Na sequência, a aluna “A25” afirmou “que com as aulas desse jeito, é bem mais legal, a gente fica mais amigo de todo mundo, das pedagogas, das outras professoras e das outras turmas”.

O aluno “A18” disparou: "achei muito divertidas essas aulas, professora. Aprendi matemática sem estar na sala de aula, assim que é bom”.

Já, a aluna “A6” comentou que “podíamos fazer aula no Laboratório de Informática todas as semanas, porque foi bem legal pegar os dados, que coletamos com as entrevistas, e fazer um monte de gráficos diferentes”.

O aluno “A3” referiu que essas “aulas estão muito bacanas, pois só agora, estou conseguindo enxergar e usar a matemática que aprendemos na escola, fora da sala, numa situação de verdade”.

Analisando os relatos dos alunos, acredita-se que os mesmos terão a possibilidade de pensar e repensar sobre um mesmo conhecimento escolar em perspectivas distintas. Além disso, entendeu-se que essa prática deve se expandir e se fortalecer no cotidiano escolar.

Dessa maneira, para auxiliar a análise desses indicativos é importante avaliar a postura dos participantes com vistas à sua formação integral, com relação ao ensino da matemática. Entende-se que cabe à escola oportunizar uma educação que favoreça a "compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais, que também dependem da leitura e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos" (BRASIL, 1997, p. 25).

Assim, reiterando a ideia exposta, Lopes (1998, p.13) afirma que na sociedade, da qual fazemos parte:

> [...] torna-se cada vez mais "precoce" o acesso do cidadão a questões sociais e econômicas em que tabelas e gráficos sintetizam levantamentos; índices são comparados e analisados para defender ideias. Dessa forma, faz-se necessário que a escola proporcione ao estudante, desde o Ensino Fundamental, a formação de conceitos que o auxiliem no exercício de sua cidadania. Entendemos que cidadania também seja a capacidade de atuação reflexiva, ponderada e crítica de um indivíduo em seu grupo social.

Amparando-se no exposto, constatou-se a necessidade e a importância da postura do professor em sala de aula, pois ele é o dinamizador desse processo pedagógico, que objetiva estabelecer relações de interação e de diálogo, oportunizando, desse modo, a construção e o entendimento dos conceitos matemáticos e, em especial, dos saberem voltados à estatística e probabilidade. Os alunos participaram efetivamente, conjecturaram, elaboram hipóteses, testaram e discutiram sua veracidade.

Além disso, foram desenvolvidos o respeito e a tolerância mútua em sala de aula, aliados à postura analítica, reflexiva e criativa, bem como foram assimilados os saberes matemáticos e foi percebido que os conceitos escolares estão presentes em diversos espaços sociais, e, também, que as pessoas constantemente necessitam deles para tomar decisões com relação a sua vida. Assim, reflete-se a afirmação de Polya (1978, p.87) que as experiências vividas num processo interventivo "poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente".

Percebeu-se que as colocações dos entrevistados advindas da coleta de dados, apontaram para a importância que os conhecimentos estatísticos e probabilísticos têm na vida cotidiana das pessoas. Além do que, corrobora com as considerações elencadas pelos alunos, como as seguintes: "estou conseguindo enxergar e usar a matemática que aprendemos na escola, fora da sala, numa situação de verdade" (A11), "pegando os dados que coletamos com as entrevistas, e fazer um monte de gráficos diferentes" (A6), na execução e na reflexão das atividades pedagógicas da pesquisa. Estas observações estão de acordo com Lopes (1998), a qual aponta que o fato de coletar, organizar, comunicar e interpretar dados e informações coletadas, fazendo uso de tabelas, de gráficos e de representações, oportunizam aos alunos subsídios suficientes para que sejam capazes de descrever e de interpretar sua realidade, aplicando os conhecimentos matemáticos e em especial de estatística e de probabilidade. Sendo assim, compreende-se que o ensino da matemática, não pode ser sistematizado de maneira desconectada com a realidade e com as situações-problema de aplicabilidade em que os alunos tenham condições de inferir significado, articulando saberes empíricos com os conceitos científicos.

Entende-se que a Estatística pode ser entendida como um método ou ciência, que por vezes é subsidiada pela probabilidade, objetivando colaborar com os sujeitos em circunstâncias decisórias. A tomar decisões ou obter conclusões em situações de incerteza, baseando-se nas informações e dados. Tendo como finalidade "coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações, tornando o estudante capaz de descrever e interpretar sua realidade, usando conhecimentos matemáticos" (Lopes, 19988, p.111).

Com relação à segunda etapa dessa pesquisa estatística destaca-se que os alunos tiveram a possibilidade de organizar, tabular e representar graficamente os dados advindos do questionário, utilizando para isso também os recursos tecnológicos no laboratório de informática. Com isso, foi possível perceber a difuldade que eles apresentavam para compreender, transitar e operacionalizar com os conheceimentos e relações estatísticas. Além disso, contatou-se também a fragilidade conceitual frente à necessidade da utilização do princípio da trasnumeração, bem como ao realizar a leitura dos dados e entre eles. Com relação às representações gráficas e tabulares observou-se que por vezes não faziam uso dos elementos obrigatórios que devem compor tais representações, como legenda, título, fonte.

Cabe destacar que resultados corroboram com os obtidos por Walichinski; Santos Junior (2013, p.30), pois foi observado que:

> [...os alunos apresentaram dificuldades nas questões mais simples, como por exemplo, identificar os tipos de gráficos mais comuns; realizar a leitura de dados em um grafico onde se faz necessário observar a legenda; retirar uma informações de um tabela de dupla entrada; trabalhar com a legenda; trabalhar com a escala unitária na construção gráficas, realizar a leitura dos dados[...]. Além disso, destacam-se outras dificuldades apresentadas pelos alunos, onde o nivel de complexidade é maior, como por exemplo, realizar a leitura entre os dados em um gráfico; representar dados por meio de tabelas e grafico de barras.

Por isso, compreende-se como primordial a participação ativa dos estudantes em todos os momentos desse processo pedagógico de intervenção. Com o intuito de sanar e superar essas dificuldades ou, pelo menos minimizar esse cenário educativo. Começando na escolha das questões do instrumento, perpassando pela coleta de dados, representações tabulares e gráficas, até a conclusão com as análises e discussão. Além disso, é necessário viabilizar o diálogo e a interação entre os alunos e professor, na expectativa de buscar a melhor estratégia para representar os dados coletados, instigando os alunos a agrupar as informações comuns para facilitar a observação, entendimento e análise dos resultados.

Ao trabalhar as questões referentes à representação tabular nesta etapa da pesquisa, é preciso destacar o emprego utilidade das tabelas, bem como seus formatos e os elementos que necessariamente devem ser considerados. As tabelas precisam ser apresentadas de modo claro, objetivo contemplando todos os dados fundamentais (título, coluna, linhas, cabeçalho, corpo da tabela, fonte) para a compreensão textual, ou seja, serem autoexplicativa, que não necessitem de nenhum contexto textual para subsidiar o entendimento (Crespo 1999) e (Cazorla;

Vendramini, 2009).

No que trata das estruturas gráficas entende-se que esse momento do processo pedagógico deve ser essencialmente interativo, no qual os alunos possam discutir e compreender sobre a aplicabilidade, o uso e o emprego das representações gráficas. Bem como, a maneira que é preciso apresentar os elementos que compõem qualquer gráfico. Destacam-se os fatores indicados como fundamentais (título, escala, fonte, legenda) na concepção de (Cazorla; Vendramini, 2009).

Os gráficos devem permitir a visualização, leitura compreensão de uma variável ou das relações existentes que se estabelecem entre elas. Sendo importante analisar criteriosamente com os alunos, qual é o formato gráfico mais favorável para comunicar às informações desejadas para (Fernandes; Cardoso, 2009) e (Carvalho, 2009).

Nesse sentido, acredita-se que os gráficos que aparecem, mas comumente nos contextos sociais, são os de barras, colunas, pictogramas, setores e linha. Referindo-se aos gráficos de pictograma, Crespo (2002) reflete que esse formato gráfico, é o que mais facilmente apresenta informações com compreensão, para os indivíduos de modo geral, indicando seu objeto de estudo utilizando símbolos para isso. Percebe-se a grande incidência dessa estrutura gráfica, nos primeiros anos escolarização, para expressar variáveis categorizadas quando os alunos, ainda não conhecem o plano cartesiano (Cazorla; Oliveira, 2010). Portanto, acredita-se que esse seja o motivo, para que o pictograma seja uma das representações gráficas muito utilizadas pelos meios de comunicação. Além disso, trabalhou-se com estruturas gráficas diferentes, como: coluna, setores, dispersão, rosca, bolha, radar, superfície, ações e barra com o auxílio do programa Excel.

No desenvolvimento dessa pesquisa, os pressupostos do letramento estatístico foram contemplados, como campo do conhecimento que abarca os saberes matemáticos, estatísticos e do contexto além dos procedimentos, ou seja, das habilidades e competências dos indivíduos nas questões pertinentes a leitura, interpretação, compreensão e análise dos dados e informações. Percebe-se tal fato, pois para que os alunos pudessem ler e interpretar informações estatísticas fez imprescindíveis habilidades e conhecimentos para leitura efetiva do contexto, isso nada mais é, do que estar familiarizado e integrado com as informações de um determinado ambiente.

Na última etapa, para finalizar o processo interventivo, a tarefa proposta para os alunos foi que confeccionassem cartazes com as questões tratadas desde início do processo pedagógico e realizassem uma apresentação para a turma. A proposta para esse momento era contribuir com o processo de sistematização dos conceitos e saberes de estatística e probabilidade. Ao solicitar que os estudantes realizassem uma breve apresentação dos conhecimentos aprendidos no decorrer desse processo de intervenção, para a comunidade escolar, bem como significar tais conhecimentos e saberes.

Desse modo, apoiando-se nas instruções dos PCN (1997), que alerta para o seguinte fato, que ao resolver problemas, não basta somente aplicar conceitos aprendidos e, sim, desenvolver e concretizar ações que exijam análise, interpretar e elaborar estratégias para solucioná-los, bem como fazê-lo numa perspectiva de interação e diálogo. A dinâmica desenvolvida neste estudo evidencia que mais importante do que fazer exercícios, faz-se necessário analisar os diferentes tipos de situações, aprendendo a construir estratégias utilizando os conceitos matemáticos (Skovsmose, 2006).

Constatou-se a necessidade e importância da relação interacionalista e dialógica, desejando oportunizar a constituição, a relação, e compreensão legítima de conceitos e conhecimentos matemáticos aplicáveis dentro e fora dos espaços escolares. Visualizou-se que, após os alunos perceberem que tinham oportunidade e espaço para expressar suas ideias e pontos de vista, as aulas poderiam acontecer estando amparadas em pressupostos dialógicos interacionistas. Os discentes participaram, conjecturaram, apontaram hipóteses, averiguaram sua veracidade, estabeleceram o respeito e tolerância mútua, além de constituir uma postura analítica, questionadora e criativa, bem como elaboraram os conceitos sistematizados em âmbito escolar, percebendo que podem facilmente valer-se deles, para resolver situações cotidianas fora dos contextos escolares.

Assim, estes fatores podem ter grande relevância para subsidiar a formação dos sujeitos que a escola deseja, ou seja, sujeitos críticos, reflexivos, capazes de interagir com a sociedade (Bassanezi, 2002). A respeito dessa temática, os PCN (1997) orientam que a prática pedagógica necessita propiciar uma aprendizagem significativa com relação à matemática no processo pedagógico, sendo o fio condutor dos conceitos, ideias e métodos matemáticos não devem ser a definição de alguns exercícios de aplicação mecânica e operatória imediatas.

É preciso oportunizar situações-problemas contextualizadas ou mais familiares possíveis, abordando os elementos citados anteriormente durante a resolução. Compreende-se que, dessa forma os alunos serão conduzidos e provocados a refletir matematicamente sobre situações-problemas do seu contexto social. Assim, os princípios estatísticos e probabilísticos podem desmistificar antigos paradigmas, pois prima pelo raciocínio, lógica, perspicácia e relações conectivas entre a própria área, e as demais, em detrimento das estruturas repetitivas, mecanizadas, esquematizadas com regras e fórmulas para resolução de situações-problemas. Além disso, desenvolvendo esta estratégia pode-se garantir que foram levantadas questões e realizadas investigações que atingiram o âmbito do conhecimento reflexivo.

Nessa perspectiva, a ruptura das práticas tradicionais em prol de uma educação matemática realmente voltada à formação global dos alunos, emana de uma nova postura docente de enfrentamento com relação as suas próprias limitações no que diz respeito aos conteúdos, às expectativas dos alunos e às demais relações que se estabelecem a partir desta.

Desse modo, os PCN corroboram com as questões discutidas nesse estudo, ao afirmar que os saberes matemáticos são ferramentas entendidas como essenciais nas seguintes perspectivas:

> [...] na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares (BRASIL, 1997, p.25).

Portanto, foi organizado um mural com o trabalho desenvolvido pelos estudantes para informar a comunidade escolar e finalizar o processo de intervenção pedagógica.

7. Considerações Finais

Ao final desta investigação, pode-se verificar que a mesma atingiu o objetivo: investigar de que forma os processos pedagógicos favorecem a aquisição dos saberes matemáticos, em especial os voltados para a estatística e da probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental.

O posicionamento dos pesquisadores durante o trabalho foi essencial, ao proporcionar momentos pedagógicos realmente interativos, nos quais os alunos deixaram de serem meros receptores e adotaram uma postura ativa, sendo protagonistas no processo do seu aprendizado, como agentes transformadores frente ao processo de ensino e da aprendizagem dos saberes e conceitos matemáticos.

Durante a efetivação desta proposta pedagógica interventiva, estabeleceu-se efetivamente uma relação participativa que contribuiu para realização das tarefas, bem como para compreensão significativa dos saberes escolares com relação à matemática, com vistas aos conceitos de estatística e de probabilidade empregados dentro dos espaços escolares e fora dele.

Assim sendo, pode-se concluir que as práticas pedagógicas do processo interventivo contribuem para o ensino e para a aprendizagem de princípios e conhecimentos matemáticos, e efetiva-se num trabalho articulado com a realidade social do sujeito. Além disso, é importante que o professor deflagre uma ação numa perspectiva crítica e analítica, articulando conceitos matemáticos com realidade.

Bibliografía

Brasil. Secretaria de Educação do Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1997.

Brasil. Ministério da Educação e Cultura. Lei n.º 9.394/96, de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em: www.mec.gov.br. Acesso: 29/03/2013.

Capra, Fritjof. A teia da vida. São Paulo: Cultrix, 2000.

Carvalho, R. (2005) A formação de conceitos probabilísticos em crianças da 4ª série do Ensino Fundamental. Brasília, DF: Pontifícia Universidade Católica de Brasília,. (Dissertação, Mestrado em Educação).

Cazorla, M. I. A relação entre a habilidade visopictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos, 2002. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas.

Cazorla, M. I. (2006) Educação Estatística: as dimensões da Estatística na formação do professor de Matemática. Mesa Redonda do VIII Encontro Paulista de Educação Matemática, disponível em http://www.pucsp.br/pensamentomatematico/epem.html, acesso em 30/06/2007.

Crespo, A. (2002) Estatística Fácil. 18. ed. São Paulo: Saraiva.

Fernandes, E. (2000) Investigação em educação matemática – perspectivas e problemas. Lisboa.

Freire, P. (1994) Educação e mudança. 20ª. Ed. São Paulo: Paz e Terra.

Gal, I; garfield, J B. Teaching and Assessing Statistical Reasoning. In: STILL, Lee V.; CURCIO, Frances R. (EDS.). Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12. Reston: NTCM, 1999.

Lopes, C.A.E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. Revista: Caderno. Cedes, Campinas, vol. 28, n.º 74, p. 57-73, jan./abr, 2008. Disponível em: < http://www.cedes.unicamp.br >.

______. A Probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP, 1998. (Dissertação, Mestrado em Educação).

______. O conhecimento profissional dos professores e suas relações com a Estatística e a Probabilidade na Educação Infantil. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP, 2003. (Tese, Doutorado em Educação).

Lopes, C.; Moran, R. (1999) Estatística e a Probabilidade através das atividades propostas em alguns livros didáticos brasileiros recomendados para o Ensino Fundamental. In: Conferência Internacional “experiências e expectativas do ensino de estatística – desafio para o século XXI”. Florianópolis.

Lopes, C. E.; Nacarato, A. M. (2009). Educação Matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopia e realidade. Campinas: Mercado de Letras.

Nacarato, M.; Mengali, S.; Passos, B. (2009). A matemática nos anos inicias do ensino fundamental: Tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica.

Pinheiro, M. (2005). Educação crítica-reflexiva para o ensino médio científico – tecnológico: A contribuição do enfoque CTS para o ensino-aprendizagem do conhecimento matemático. Dissertação (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina.

Pires, C, M. (2000). Currículos de matemática: da organização linear à ideia de rede. São Paulo: FTD.

Polya, G. (1978) A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência.

Skovsmose, O. (2008). Mathematical education and democracy. Educational Studies in Mathematics.Tradução: Antonio Miguel et alii. Nº 21.

Stadler, R. (2003) Produção, leitura e compreensão do texto sala-de-aula – Faculdade de Ciências e Letras de Assis, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Assis. (Tese, Doutorado em Letras).

Walichinski, D. Santos Junior, G Contribuições de uma sequência de ensino para o processo de ensino e aprendizagem de gráficos e tabelas segundo pressupostos da contextualização. UNIÓN [en línea], 35. Recuperado el 18 de noviembre de 2013, de http://www.fisem.org/www/union/normas_publicacion.php

Rúbia Juliana Gomes Fernandes: Nascida em 08 de junho de 1982 na cidade Curitiba do estado Paraná - Brasil. Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Ponta Grossa - Brasil. Atua como professora de matemática da Rede Municpal de Educação de Curitiba Brasil e pedagoga da Rede Estadual do Estado do Paraná. **rufernandes@hotmail.com**

Guataçara dos Santos Júnior: Nascido em 03 de outubro de 1971 na cidade Ponta Grossa do estado Paraná - Brasil. Possui doutorado em Ciências Geodésicas pela Universidade Federal do Paraná - Brasil. Atualmente é professor na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Ponta Grossa - Brasil. Atua no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia onde orienta trabalhos prioritariamente para o ensino de Probabilidade e Estatística. **guata@utfpr.edu.br**

Antonio Carlos Frasson: Natural de Itararé - São Paulo - Brasil. Atualmente reside na cidade Ponta Grossa do estado Paraná - Brasil. Possui doutorado em Educação pela Universidade Metodista de Piracicaba São Paulo - Brasil. Atuante é Professor na Universidade Tecnológica do Paraná - Câmpus Ponta Grossa - Brasil. Atua no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia e no curso de Engenharia de Produção. **acfrasson@utfpr.edu.br**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 57-79

Construcciones y mecanismos mentales asociados a las ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*

Gabriel Araya Rivera, Marcela Parraguez González

Fecha de recepción: 25/09/2013
Fecha de aceptación: 4/06/2014

Resumen	La investigación que reportamos presenta las construcciones y mecanismos mentales asociados a la solución de las ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0,* de ángulos simples, como una necesidad de responder a la problemática de un trabajo mecanizado de los aprendices al resolver dichas ecuaciones, mediante el análisis de la aplicación de la propiedad “si *ab=0*, entonces a=*0* ó b=*0*”. A partir de un análisis cognitivo basado en la teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas), modelamos cómo estudiantes de secundaria construyen y aprenden el concepto solución de dichas ecuaciones trigonométricas. **Palabras clave**: mecanismos mentales, ecuaciones trigonométricas.
Abstract	The research we report presents mental constructs and mechanisms associated with the solution of trigonometric equations of simple angles *ab=0*, as a need to analyse the mechanized work of apprentices when solving these kind of equations using the property "if *ab =0*, then *a= 0* or *b=0*". From a cognitive analysis based on APOS theory (actions, processes, objects and schemes) modelling how high school students construct and learn the concept solution of these equations. **Keywords**: mental mechanisms, trigonometric equations.
Resumo	A pesquisa que nós informamos apresenta as construções e mecanismos mentais associados à solução das equações trigonométricas do tipo *ab=0*, de ângulos simples, como uma necessidade de responder ao problema de um trabalho automatizado dos aprendizes ao resolver estas equações, por meio da análise da aplicação da propriedade "se *ab = 0*, então *a = 0* ou *b = 0*." A partir da análise cognitiva baseada na teoria APOS (ações, processos, objetos e esquemas), nós modelamos como os estudantes secundários eles constroem e eles aprendem a conceito de solução destas equações trigonométrico. **Palavras-chave:** mecanismos mentais, equações trigonométricas.

1. Problemática de investigación

La ecuación cuadrática $x^2+x=0$ de variable real *x* se puede generalizar a ecuaciones del tipo $sen^2x + sen\,x = 0$, y para que un estudiante determine su conjunto solución, es importante que factorice, esto es, $sen\,x(sen\,x+1)=0$, y posteriormente reflexione sobre qué valores debe tomar $sen\;x$ y luego la variable x para que cada factor se haga cero. Pero si los estudiantes utilizan técnicas memorísticas, no podrán mostrar en sus argumentos propiedades de la matemática que justifiquen sus procedimientos. De esta forma, centrarse en el producto igualado a cero permitirá, por ejemplo, resolver la ecuación $sen\,x\,(2sen\,x+1)=0$ sin calcular el producto, sino más bien reflexionando que para que $sen\,x\,(2sen\,x+1)=0$, uno de los factores debe ser cero. Igualando cada factor a cero, el estudiante reflexionará en torno a $sen\,x=0$ y $2sen\,x+1=0$, lo que le permitirá llegar a $sen\,x=0$, para $x=0°, x=180°$ o $sen\,x=-\frac{1}{2}$, para $x=210°, x=330°$, transformando estos valores a radianes y generalizando el conjunto solución a $S=\left\{0+n\pi, \frac{7\pi}{6}+2n\pi, \frac{11\pi}{6}+2n\pi \,/\, n\in \mathbf{Z}\right\}$.

Nuestra problemática de estudio surge del interés por contribuir al aprendizaje de la resolución de ecuaciones trigonométricas *ab=0,* utilizando las propiedades del cuerpo de los números reales, como lo es la *propiedad hankeliana*: *ab=0* entonces *a=0* o *b=0*. Específicamente nos centramos en la factorización como forma de resolver en los números reales una ecuación del tipo *ab=0*, donde los factores *a* y *b* representen funciones trigonométricas de ángulos simples. Nos preguntamos ¿qué justifica el paso de la factorización *ab=0* a la separación en dos ecuaciones *a=0* ó *b=0*, que permiten despejar la variable o la función trigonométrica, si corresponde?. Nuestra problemática de investigación consiste en describir y analizar qué matemática y por qué esa matemática es la que los estudiantes de cuarto año medio ponen en juego cuando se ven enfrentados a resolver ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0,* donde *a* y *b* son funciones trigonométricas de ángulos simples

2. Importancia de resolver el problema planteado

Nuestro propósito es enfrentar a los estudiantes a la resolución de las ecuaciones trigonométricas a través de la *propiedad hankeliana*, porque su aplicación permite analizar las dificultades que presenta un estudiante de cuarto año medio (Formación Diferenciada de Matemática para el cuarto nivel, 17 años) en las conexiones y el tránsito de ciertos conceptos matemáticos, como por ejemplo: las funciones trigonométricas, el producto igualado a cero y los ceros de una función, y también si es capaz de comprender una ecuación, esquematizarla, reconocer los elementos que se dan para su resolución a través de la *propiedad hankeliana*, así como seleccionar una propiedad matemática que le permita dar solución a la ecuación planteada.

3. Antecedentes de investigación

Revisamos investigaciones en Matemática Educativa para detectar qué se ha hecho en relación a nuestro objeto de estudio. En la mayoría de ellas no encontramos indicios sobre estudios en ecuaciones trigonométricas propiamente tales, aunque sí existen estudios de la trigonometría en general y de las funciones trigonométricas en particular. Maldonado y Miranda (2009) reportan un análisis didáctico y cognitivo de los elementos de la trigonometría, y Navarro y Villalva (2009) estudian la desarticulación entre la semejanza y la trigonometría en el bachillerato.

Sin embargo, Ochoviet (2004) reflexiona sobre la propiedad “si *ab=0*, entonces *a=0* ó *b=0*”, siendo a y *b* números reales (propiedad hankeliana), lo que permite justificar el paso del producto igualado a cero, a las dos ecuaciones. Reportaremos la investigación de Ochoviet porque nos brinda elementos acerca de la aplicación de la *propiedad hankeliana* cuando un producto está igualado a cero, cuestión que se generalizará en nuestra investigación a ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.

Ochoviet estudia las dificultades que se dan cuando no se especifica qué representan en la propiedad hankeliana los factores *a* y *b*. En efecto, analiza casos en que los estudiantes presentan dificultades en su aplicación

1) Si bien los estudiantes conocen la propiedad, no la utilizan para resolver ecuaciones de segundo grado, aun cuando es la única herramienta disponible.
2) En la verificación de la solución de ecuaciones de segundo grado en su forma factorizada, los estudiantes reemplazan por las dos raíces en forma simultánea. Por ejemplo, al resolver la ecuación $(4x+8)(x-5)=0$, obtienen las raíces -2 y 5. Pero al verificar evalúan incorrectamente $(4\cdot(-2)+8)((5-5))=0$, con esto deducen que $0\cdot 0=0$.

En investigaciones acerca de las funciones trigonométricas, Maldonado y Miranda (2009) hacen un análisis didáctico y cognitivo de los elementos de trigonometría. Aquí se observa que las nociones de los estudiantes sobre razones trigonométricas carecen de significado, lo que implica negativamente en el estudio de las funciones trigonométricas. Estos autores, Maldonado y Miranda observan que la secuencia curricular que antecede a las funciones trigonométricas son: razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno, tangente, y sus recíprocas; valores del seno, el coseno y la tangente para los ángulos de 30°, 45° y 60°; uso de tablas y calculadora para otros ángulos agudos; resolución de triángulos rectángulos y su aplicación a la solución de problemas: cálculo de distancias inaccesibles. Esta presentación, de acuerdo al estudio sobre libros de texto, orienta a quedarse en la algoritmización, limitando al estudiante en significar los conceptos necesarios para el estudio de la función trigonométrica.

Otro antecedente reportado en la tesis de Maldonado (2005) es que antes de abordar las funciones trigonométricas como una función de variable real, se definen las razones trigonométricas con ángulos medidos en grados, seguido de la conversión de grados a radianes en el círculo unitario, apareciendo de esta forma la función de variable real. Esto lleva a una relación radianes-reales no explícita, produciendo conflicto en el estudiante al no concebir la noción del concepto de función.

En Maldonado, Rodríguez y Santana (2009), se hace una propuesta para abordar la transición grados a radianes, observando que un buen diseño de actividades favorece dicho aprendizaje.

Por otro lado, Buendía y Montiel (2009) realizan un acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. Presentan la importancia del traspaso de la trigonometría clásica a la trigonometría en el círculo, como también la importancia del trabajo con ángulos negativos, la conversión de grados a radianes, la equivalencia entre radianes y reales, la periodicidad y el acotamiento de la función.

Como podemos apreciar, las investigaciones en funciones trigonométricas convergen en el problema de traspaso de las razones a las funciones. En nuestro estudio será interesante observar si las dificultades que manifiestan estos investigadores también se presentan en los informantes de esta investigación. En efecto, pondremos cuidado en qué dificultades existen en el traspaso de grados a radianes, cómo abordan los ángulos negativos, qué dificultades tienen para trabajar ángulos especiales de $30º, 45º$ y $60º$ para ser aplicados en todo el dominio de las funciones trigonométricas.

4. Marco teórico: teoría APOE

Para analizar las conexiones matemáticas y el tránsito entre objetos matemáticos, hemos elegido la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas), porque nos entrega las herramientas necesarias para describir las conexiones y el tránsito entre determinados objetos matemáticos, a través de las construcciones y mecanismos mentales necesarios para llegar a resolver una ecuación trigonométrica de ángulos simples de la forma *ab=0*.

La teoría APOE es desarrollada por Ed Dubinsky, basándose en el enfoque constructivista de Piaget. Dubinsky (1996) toma el concepto de abstracción reflexiva de Piaget que describe el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes aplicado en estudios cualitativos. La abstracción reflexiva aparece a temprana edad, cuando se coordina la estructura sensoriomotriz, y se va desarrollando en el estudiante que logra entender características matemáticas más elevadas.

Según la hipótesis de APOE, todo estudiante que se enfrenta a problemas construye acciones, procesos y objetos que se organizan en esquemas. Las **acciones** son construcciones básicas para que un estudiante entienda un concepto matemático, son transformaciones de los objetos mediante estímulos externos. En los **procesos,** mediante construcciones internas, repite las acciones anteriores reflexionando sobre ellas para **interiorizarlas** en un proceso. Las reflexiones sobre los procesos desde una mirada global se **encapsulan** en un **objeto**. Cuando ve las acciones, procesos y objetos como una estructura coherente, tiene una concepción **esquema** del concepto (Trigueros, 2005). Las acciones, procesos, objetos y esquemas son las estructuras mentales que necesita para construir el concepto, y necesita de las abstracciones reflexivas (interiorización, encapsulación, coordinación, generalización y reversión), denominadas también mecanismos mentales, que le permitirán pasar de una estructura a otra.

4.1 Relación entre la problemática, la teoría APOE y el objeto de estudio

Al ser nuestra problemática de corte cognitivo, a través de APOE se enfrentará a los estudiantes a la resolución de las ecuaciones trigonométricas a través de la *propiedad hankeliana*, analizando las dificultades que presentan en la resolución de ecuaciones trigonométricas, y también si son capaces de comprender un problema, esquematizarlo, reconocer los elementos que se dan para su resolución, y seleccionar una propiedad matemática que les permita dar solución a la ecuación planteada. Además, miraremos la articulación que un estudiante realiza entre la *propiedad hankeliana* que conoce en los números reales, las funciones trigonométricas y la resolución de ecuaciones.

Nuestro marco teórico nos permitirá analizar las reflexiones de los estudiantes cuando construyan acciones, procesos y objetos asociados a las ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*. La descomposición genética permitirá modelar la epistemología y la cognición del concepto a través de las construcciones y mecanismos mentales.

Objetivos generales de investigación

1. Analizar las construcciones y mecanismos mentales de los estudiantes para resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.
2. Modelar las construcciones y mecanismos mentales de los estudiantes a través de una descomposición genética.

Objetivos específicos de investigación

1. Realizar un análisis teórico (descomposición genética) de las ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.
2. Documentar las acciones que muestran los estudiantes para resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.
3. Identificar qué acciones interiorizan los estudiantes en un proceso para resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.
4. Describir cómo los estudiantes encapsulan en un objeto los procesos que le permiten resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.
5. Analizar los procesos que se coordinan para construir el objeto ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.

Con los objetivos y el problema presentados, necesitamos que este último sea plasmado directamente a través de las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué conexiones realizan los estudiantes en la aplicación de la *propiedad hankeliana* para resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*?
- ¿Entre qué matemática o conceptos matemáticos transitan los estudiantes cuando resuelven ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*, aplicando la *propiedad hankeliana*?

5. Metodología

El ciclo de investigación que nos proporciona la teoría APOE permite obtener una descripción detallada de los conceptos matemáticos mediante su repetición. Este ciclo tiene tres componentes:

- Análisis teórico (descomposición genética).
- Diseño y aplicación de instrumentos.
- Análisis y verificación de datos.

Análisis teórico:

También conocido como "*descomposición genética*" (DG), este análisis inicial del concepto matemático permite determinar un camino viable en la construcción del concepto, modelando la epistemología y la cognición de éste. El resultado de la DG es la base para ayudar a la construcción del concepto a través de una descripción detallada de las construcciones y mecanismos mentales que pone en juego cuando construye un determinado concepto.

Así, nos preguntamos ¿qué es comprender el concepto de ecuación trigonométrica de ángulos simples del tipo *ab=0*? Cabe señalar que no existe una única DG del concepto: puede estar sujeta a las vías que se generen para la construcción del concepto y las estructuras mentales definidas de antemano.

Diseño y aplicación de instrumentos.

Para determinar la viabilidad de la DG es necesario documentarla mediante el diseño y aplicación de instrumentos, que en esta investigación consisten en un *cuestionario diagnóstico* y una *entrevista semiestructurada*.

Los instrumentos que recogerán información se aplicarán a una muestra dirigida, conformada por estudiantes de cuarto año medio que cursan la asignatura Funciones y Procesos Infinitos, de un colegio particular subvencionado de la Región de Coquimbo, Chile. El cuestionario diagnóstico de cuatro preguntas se aplicará a ocho estudiantes (que etiquetamos desde E1 hasta E8) a fin de detectar los conocimientos previos que subyacen alrededor del concepto en estudio.

Al ser nuestra investigación cualitativa, nos interesa la calidad y profundidad de la información. Necesitamos *estudiantes tipo* que puedan comprender los conceptos descritos en la DG y otros que no, para discutir si la diferencia radica en la presencia o falta de alguna construcción mental. Tampoco necesitamos de la representatividad de la población, sino de la selección de estudiantes con las características ya mencionadas. Así, los criterios de selección de los informantes son: Estudiantes voluntarios, estudiantes tipo del curso Funciones y Procesos Infinitos de un establecimiento particular subvencionado de la comuna de Ovalle y estudiantes que estén en el cuarto año de enseñanza media.

Tabla 1. Resumen de la recogida de información.

<table>
<tr><td rowspan="2">Muestra dirigida de ocho estudiantes tipo</td><td>Cuestionario diagnóstico
(aplicado a la totalidad)</td></tr>
<tr><td>Entrevista semiestructurada
(aplicada a seis estudiantes)</td></tr>
</table>

La entrevista que se aplicará a seis de los ocho estudiantes (E2, E3, E4, E5, E6 y E7) que desarrollaron el cuestionario diagnóstico, nos permitirá documentar de mejor manera las construcciones y mecanismos mentales que están dispuestos en la DG, o bien ausentes de ella. En este último caso, se requerirá de una refinación de la DG.

Análisis y verificación de datos.

Obtenidos los datos empíricos, deben analizarse y verificarse desde la DG. Este análisis debe permitir responder a:

- ¿Qué elementos no han sido considerados en la DG?
- ¿Cuáles de las construcciones incluidas en la DG hipotética no se perciben?

Al responder estas preguntas, el investigador podrá refinar su DG. La aplicación completa de las tres componentes permitirá documentarla mediante los datos empíricos. El método de análisis permite comparar las respuestas de los estudiantes y detectar a los que comprendieron el concepto y los que no. El análisis busca encontrar la explicación al porqué de las diferencias en estos estudiantes en términos de construcciones de acciones, procesos, objetos y esquemas.

6. Descomposición genética hipotética

La DG que diseñamos del concepto "Ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*" se basa, por un lado, en la experiencia y conocimiento que tenemos como docentes del concepto al impartir las asignaturas Álgebra y Modelos Analíticos y Funciones y Procesos Infinitos (MINEDUC, 2002); por otro lado, en el conocimiento de los investigadores del concepto, la revisión de textos como Swokowski y Cole (1997), la revisión de los programas de estudio y la revisión de la investigación de Ochoviet acerca de la propiedad "si *ab=0*, entonces *a=0 ó b=0*". Todo esto nos permitirá modelar un camino viable que será la base para ayudar a los estudiantes a la construcción del concepto. La DG hipotética de las "ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*" que presentaremos, permitirá indagar a partir de las construcciones y mecanismos mentales, saber qué significa comprender este concepto y cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un estudiante.

A continuación presentamos un posible camino o mapa de mecanismos y construcciones mentales para el concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0* y su solución", a través de la *propiedad hankeliana*. Probaremos su viabilidad para que los estudiantes comprendan el concepto.

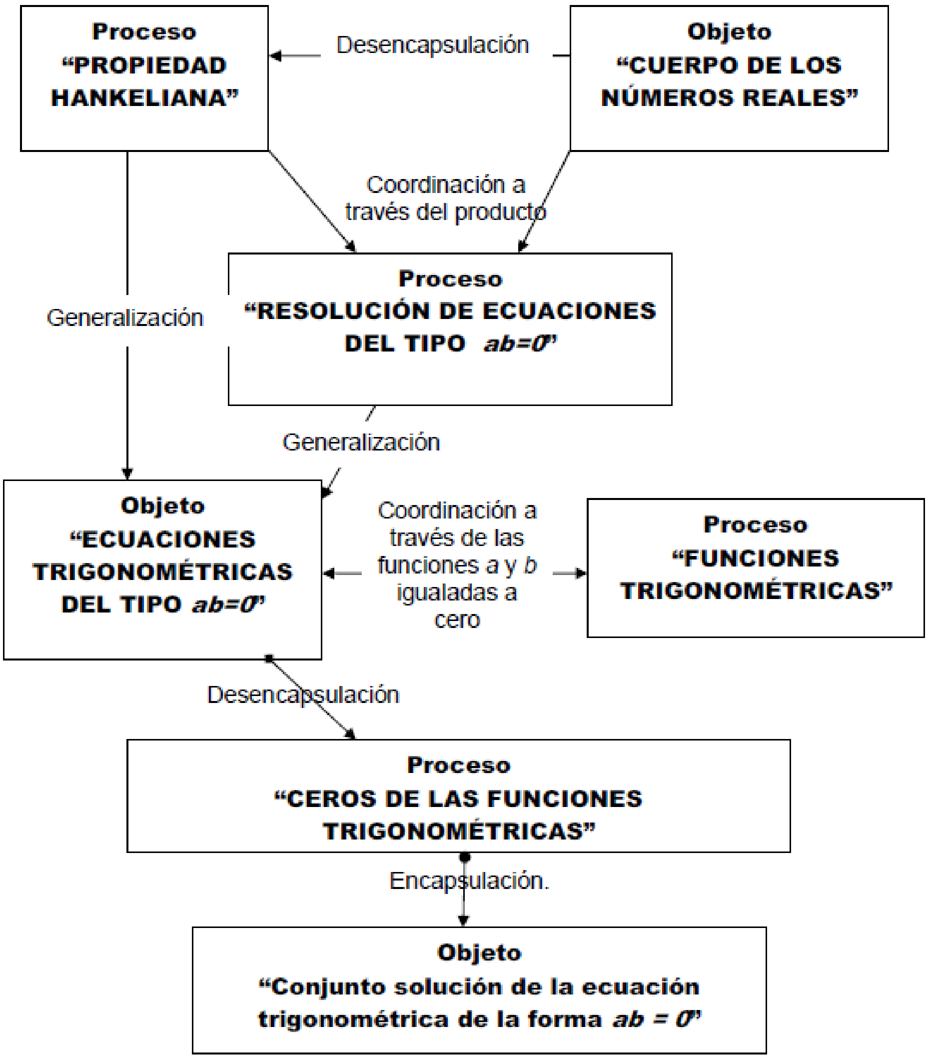
Descripción de la DG

De acuerdo a la figura 1:

- Si el estudiante es consciente de los procesos suma y multiplicación de números reales como una totalidad, actuando sobre las propiedades clausura, conmutativa, asociativa, elementos neutros, elementos inversos y propiedad distributiva, entonces tiene una concepción objeto del concepto "cuerpo de los números reales".
- Si el estudiante es capaz de registrar que *a y b* representan números reales, reconocer que el producto *ab=0* implica que *a=0 ó b=0* y comprender que si *ab=0* es verdadero, entonces *a=0 ó b=0* también es verdadero, entonces tiene una concepción proceso del concepto *propiedad hankeliana*.
- Si el estudiante es capaz de expresar una ecuación como *ab=0,* reconocer que *a y b* representan expresiones algebraicas de variable real, reconocer que si el producto *ab=0* implica *a=0 ó b=0* y encontrar las raíces reales que verifican que *ab=0*, entonces tiene una concepción proceso del concepto "Ecuaciones del tipo *ab=0*".
- Si el estudiante es capaz de expresar una ecuación trigonométrica como *ab=0*, reconocer que *a y b* representan funciones trigonométricas de variable real, reconocer que si el producto *ab=0* implica *a=0 ó b=0*, encontrar el conjunto solución donde se verifica que *ab=0* y estar consciente de todo este proceso en su totalidad, entonces tiene una concepción objeto del concepto "Ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo ab =0".

- Si el estudiante es capaz de entender que en las funciones trigonométricas a cada valor de la variable independiente del dominio (expresados como radianes) le corresponde un único valor de la variable dependiente, entonces tiene una concepción proceso del concepto “Funciones trigonométricas”.
- Si el estudiante es capaz de entender que si en una función trigonométrica de variable real, para cualquier valor que es un cero de la función, entonces tiene una concepción proceso del concepto “ceros de las funciones trigonométricas”.
- Si el estudiante es capaz de entender que el conjunto solución de una ecuación trigonométrica se puede representar como una o varias expresiones del tipo, donde es una expresión algebraica de variable entera, toma conciencia de este proceso en su totalidad y es capaz de actuar sobre él, entonces tiene una concepción objeto del concepto “conjunto solución de una ecuación trigonométrica del tipo ab =0”.

Figura 1: DG del conjunto solución de la construcción conjunto solución de la ecuación trigonométrica ab=0, como objeto



7. En búsqueda de evidencias empíricas para la DG

Realizamos una toma de datos con la intención de documentar las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG, que consideró dos momentos: la aplicación de un cuestionario diagnóstico de cuatro preguntas construidas a la luz de la DG, y la indagación en profundidad a través de una entrevista semiestructurada de tres preguntas, de ciertos aspectos de la DG dados por el análisis del cuestionario anterior.

7.1 Primer momento: el cuestionario

Diseñamos un cuestionario diagnóstico con la intención de documentar:

- El cuerpo de los números reales como objeto (pregunta 1)
- Propiedad hankeliana como proceso (pregunta 2)
- Resolución de las ecuaciones del tipo *ab=0* como proceso (pregunta 3)
- Funciones trigonométricas como proceso (pregunta 4)

Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada una de las preguntas.

7.1.1 Análisis a priori del cuestionario

Hemos seleccionado una pregunta del cuestionario, para darla a conocer en esta comunicación, que a continuación será analizada a la luz de la DG presentada.

Pregunta 3 del cuestionario

Resolver en los números reales las siguientes ecuaciones, verificar una a una las soluciones y escribir en forma explícita el conjunto solución.

$i)\quad (x-1)x=0 \qquad\qquad ii)\quad (2x+5)(x-4)=0$

$iii)\quad x^3+7x^2+10x=0 \qquad\qquad iv)\quad 0=5x$

En esta pregunta se espera que los estudiantes resuelvan cada ecuación ocupando la propiedad hankeliana y las propiedades de los números reales como cuerpo. Nos interesa indagar su concepción sobre ecuaciones de este tipo, así como también si aplican la propiedad hankeliana, despejan la variable ocupando propiedades de los reales como cuerpo, verifican para cada raíz encontrada y explicitan el conjunto solución. La **respuesta esperada,** que mostramos sólo para la ecuación i), corresponde a un procedimiento como el siguiente:

$i)\quad (x-1)x=0$ aplicamos la propiedad hankeliana

$x-1=0 \quad \vee \quad x=0$

$x_1=1 \qquad\qquad x_2=0$

Verificación: Para $x_1=1 \rightarrow$ $(1-1)\cdot 1=0$, $0\cdot 1=0$, $0=0$ Verdadero

Para $x_2=0 \rightarrow$ $(0-1)\cdot 0=0$, $(-1)\cdot 0=0$, $0=0$ Verdadero

Por lo tanto el conjunto solución de *i)* es $S=\{0,1\}$

7.1.2 Observaciones sobre el desempeño de los estudiantes y análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, a continuación presentamos una selección del trabajo realizado por los estudiantes en la pregunta antes descrita.

Análisis a posteriori Pregunta 3

En la parte i de la pregunta 3, el estudiante 1 (E1) realiza la acción de calcular el producto $x(x-1)$, factoriza erróneamente, y a pesar de eso encuentra una de las raíces en forma correcta y otra en forma errónea, como consecuencia de la factorización incorrecta. Luego realiza la acción de verificar con $x=1$, la cual finalmente explicita como solución (figura 2).

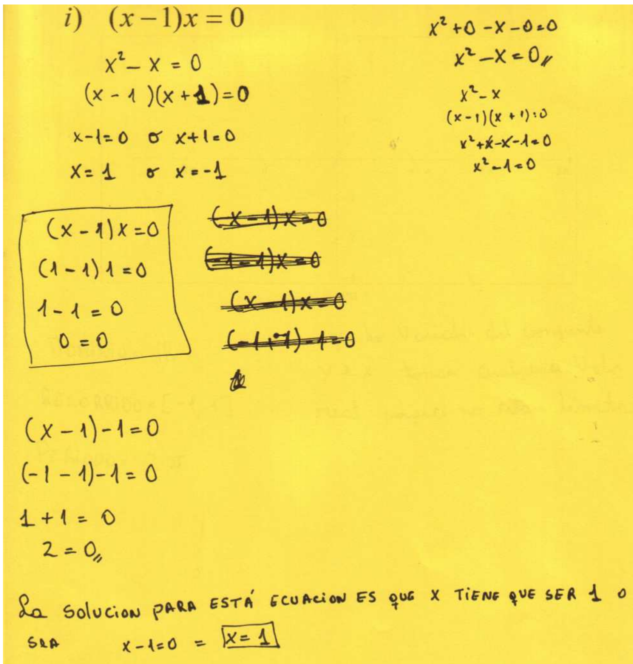


Figura 2: Respuesta del E1 a la pregunta 3 apartado i.

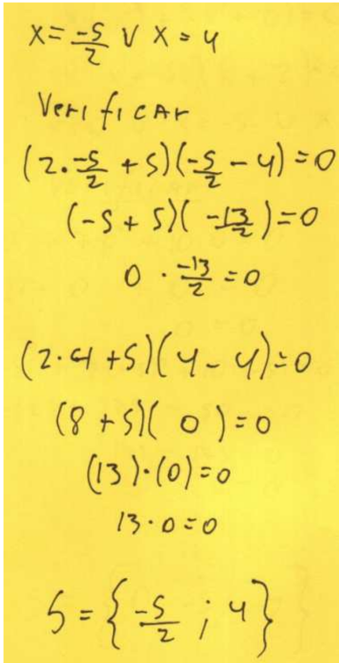


Figura 3: Respuesta del E6 a la pregunta 3, apartado ii

De acuerdo a este análisis, este estudiante, para la parte i de la pregunta 3, muestra una concepción acción del concepto ecuaciones del tipo *ab=0*. En la parte ii de la pregunta 3, el estudiante 6 (E6) realiza la acción de igualar cada factor a cero en forma mental, representando dicha forma en las acciones: despejar la variable, verificar para cada raíz encontrada y explicitar el conjunto solución (figura 3), acciones que logra interiorizar en el proceso "ecuaciones del tipo *ab=0*".

En la parte iii de la pregunta 3, E2 realiza la acción de factorizar el trinomio por *x*, luego realiza la acción de volver a factorizar el segundo factor expresado en $(x+5)(x+2)$. Al tener toda la expresión igualada a cero y factorizada, realiza la acción de encontrar dos de las tres raíces, omitiendo la raíz $x=0$ (figura 4); como en la parte i de la pregunta 3, en $(x-1)x=0$, encuentra las dos raíces, podría ser que en la parte iii le resta importancia al factor x ante los otros dos factores provenientes del trinomio cuadrático, reduciendo el factor x a un mero coeficiente, pero sin una reflexión. De todas formas realiza la acción de verificar las raíces encontradas, finalizando con la acción de explicitar el conjunto solución, pero con la omisión de $x = 0$. Todas estas evidencias muestran que para la parte iii de la pregunta 3, E2 está en vías de mostrar una concepción proceso del concepto "resolución de ecuaciones del tipo *ab=0*".

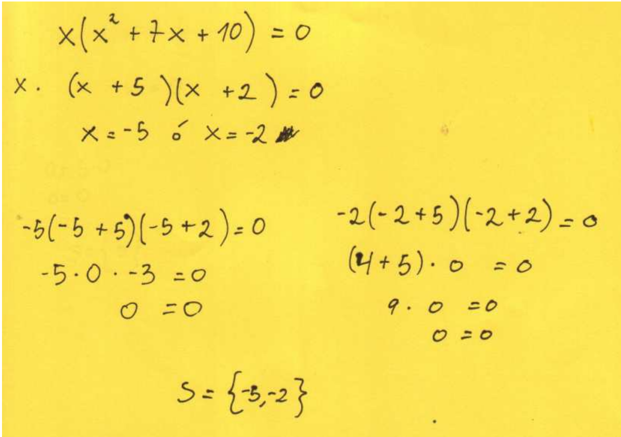


Figura 4: Respuesta del E2 a la pregunta 3, apartado iii.

En el apartado iv, E3 realiza la acción de identificar el producto igualado a cero y resuelve la ecuación ocupando la *propiedad hankeliana*. Esto se aprecia en sus argumentos cuando iguala cada factor a cero (figura 5). También realiza las acciones de identificar una contradicción para 5=0 y de encontrar la única raíz; luego realiza las acciones de verificar para la raíz encontrada y de explicitar el conjunto solución.

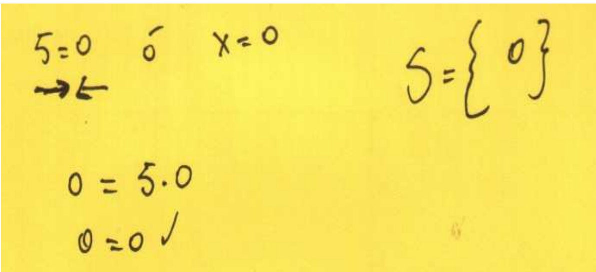


Figura 5: Respuesta del E3 a la pregunta 3, apartado iv).

De acuerdo a este análisis, se puede apreciar que el estudiante reflexiona en las acciones de igualar cada factor a cero, encontrar y verificar la única raíz y explicitar el conjunto solución. Esto evidencia que E3 ha interiorizado estas acciones en el proceso "resolución de ecuaciones del tipo *ab=0*".

Conclusiones de la pregunta 3

De un total de ocho estudiantes que respondieron la pregunta 3 del cuestionario inicial, podemos señalar que:

- Siete de los ocho muestran la concepción proceso del concepto "ecuaciones del tipo *ab=0*". Evidencia de lo anterior es que transforman mediante estímulos internos una ecuación de la forma *ab=0* a dos expresiones igualadas a cero como aplicación de la *propiedad hankeliana*, lo que lleva a realizar las acciones de encontrar cada raíz, verificar para cada raíz y explicitar el conjunto solución. Estas acciones se interiorizan en el proceso "ecuaciones del tipo *ab=0*".

- Uno de los ocho estudiantes (E2) está en vías de mostrar una concepción proceso del concepto “ecuaciones del tipo *ab=0*”. Las evidencias mostraron que este estudiante tiene problemas en la factorización y la interpretación de un producto igualado a cero.
- Es importante señalar que sólo E3 resuelve la ecuación *0=5x* ocupando la *propiedad hankeliana*.

7.2 Segundo momento: la entrevista semiestructurada

Hemos seleccionado una pregunta de la entrevista para mostrar los problemas que los estudiantes presentaron para abordarla. Más aún, a través de su respuesta muestran las construcciones y mecanismos mentales puestos en juego en su desarrollo.

7.2.1 Análisis a priori de la entrevista

Pregunta 1 de la entrevista

Resolver las siguientes ecuaciones para la variable x en todo el dominio de la(s) función(es). Verificar en el intervalo $[0,2\pi[$.

$i)\quad (sen\,x-1)\cos x=0$ $\qquad$ $ii)\quad (2sen\,x+1)(sen\,x-4)=0$

$iii)\quad \tan x\, sen^2 x - sen^2 x - \tan x\, sen\, x + sen\, x = 0$ $\qquad$ $iv)\quad 0=5\tan x$

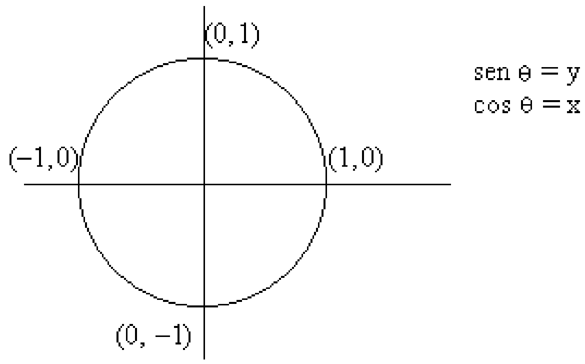
El propósito de esta pregunta es documentar la construcción objeto del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*”, a partir de un comportamiento observable de los estudiantes, esto es:

- Si el estudiante en i) generaliza la *propiedad hankeliana* y las ecuaciones del tipo *ab=0* a ecuaciones trigonométricas, igualando cada factor a cero, despeja para la o las funciones ocupando inverso aditivo y multiplicativo, determina los valores de *x* para que $sen\ x=1$ y $\cos\ x=0$, justificando con la circunferencia goniométrica, verifica para cada raíz, da la solución general para todo el dominio de las funciones seno y coseno, y está consciente de todo el proceso, actuando sobre él, entonces muestra la concepción objeto del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*”.
- Si el estudiante en ii) generaliza la *propiedad hankeliana* y las ecuaciones del tipo *ab=0* a ecuaciones trigonométricas, igualando cada factor a cero, despeja para la función seno ocupando inverso aditivo y multiplicativo, encuentra los valores de *x* en el intervalo $[0,2\pi[$ para $sen\ x=-\frac{1}{2}$, determina que no existen valores de *x* para *sen x=4*, verifica en el intervalo $[0,2\pi[$, entrega la solución general en todo el dominio de la función seno, y está consciente de todo el proceso, actuando sobre él, entonces muestra la concepción objeto del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*”.
- Si el estudiante en iii) factoriza por $sen\ x$, luego factoriza en dos binomios, generaliza la *propiedad hankeliana* y las ecuaciones del tipo *ab=0* a ecuaciones trigonométricas, igualando cada factor a cero, despeja para cada función ocupando inverso aditivo y multiplicativo, encuentra los valores de *x* en

el intervalo $[0,2\pi[$ verifica en el intervalo $[0,2\pi[$, entrega la solución general en todo el dominio de las funciones, y está consciente de todo el proceso actuando sobre él, entonces muestra la concepción objeto del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*”.

- Son suficientes i) y ii) para que dé el objeto; el análisis de iii) es similar, salvo que existe la dificultad de la factorización. Si el estudiante no logra factorizar es imposible hacer el análisis del resto del procedimiento. En $0 = 5\tan x$, si el estudiante justifica que para que se cumpla la igualdad debe hacerse cero la tan(x), ocupando la *propiedad hankeliana,* y entrega la solución particular en el intervalo $[0,2\pi[$, entonces tendrá la concepción proceso del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*”. Si entrega la solución general en todo el dominio de la función tangente, entonces tendrá la concepción objeto del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*”. Si despeja $\tan x$ ocupando inverso multiplicativo, no se puede hacer el análisis con la *propiedad hankeliana*.

Mostramos, a modo de ejemplo, la **respuesta esperada i**:



$$i)\quad (sen\ x - 1)\cos x = 0$$
$$sen\ x - 1 = 0 / +1 \quad \vee \quad \cos x = 0$$
$$sen\ x = 1 \quad \vee \quad \cos x = 0$$
$$x = 90^{o} \qquad x = 90^{o}, 270^{o}$$
$$x = \frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Verificación:

Para $x = 90^{o}$ →

$$i)\quad (sen\ 90^{o} - 1)\cos 90^{o} = 0$$
$$(1-1)\cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 = 0$$

Verdadero

Para $x = 270^{o}$ →

$$(sen 270^{o} - 1)\cdot \cos 270^{o} = 0$$
$$(-1-1)\cdot 0 = 0$$
$$(-2)\cdot 0 = 0$$
$$0 = 0$$

Verdadero

$$S = \left\{ (2n-1)\cdot \frac{\pi}{2} / ; n \in Z \right\}$$

7.2.2 Observaciones sobre el desempeño de los estudiantes y análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, presentamos una selección del trabajo realizado por los estudiantes en la pregunta antes descrita.

Análisis a posteriori pregunta 1

En la parte i de la pregunta 1, E4 generaliza la propiedad hankeliana y las ecuaciones del tipo *ab=0* a ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*, igualando cada factor a cero. Esto le permite coordinar los procesos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0* a través de cada factor igualado a cero, despejando cada función y determinando los valores de x para $senx = 1$ y $\cos x = 0$, recurriendo al círculo unitario (figura 6); además verifica $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$ en el intervalo $[0, 2\pi)$. Entrega la solución general $S = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \end{cases}, \ (n \in Z)$, aunque esta solución se reduce a $S = \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad (n \in Z) \right.$.

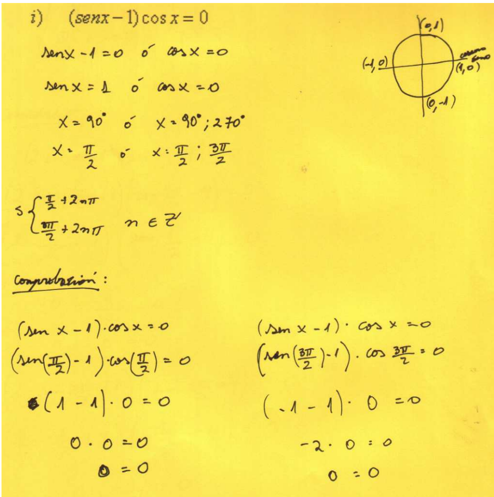


Figura 6: Respuesta del E4 a la pregunta 1i de la entrevista.

Estas evidencias demuestran que E4, para esta parte de la pregunta 1, está consciente de todo el proceso de resolver una ecuación trigonométrica del tipo *ab=0*, por lo que dicho proceso es encapsulado en el objeto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*".

En la parte ii de la pregunta 1, E5 generaliza la propiedad hankeliana y las ecuaciones del tipo *ab=0* a ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*. Esto le permite coordinar los procesos "funciones trigonométricas" y "ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*" a través de los factores $2senx+1$ y $senx-4$ igualados a cero. A partir del primer factor encuentra las raíces x=210° y x=330° en el intervalo $[0, 2\pi)$ y deduce que de $sen\ x = 4$, la solución es vacía. Posteriormente verifica para *x*=210° y justifica que para *x*=330° no es necesario la comprobación porque daría lo mismo (figura 7).

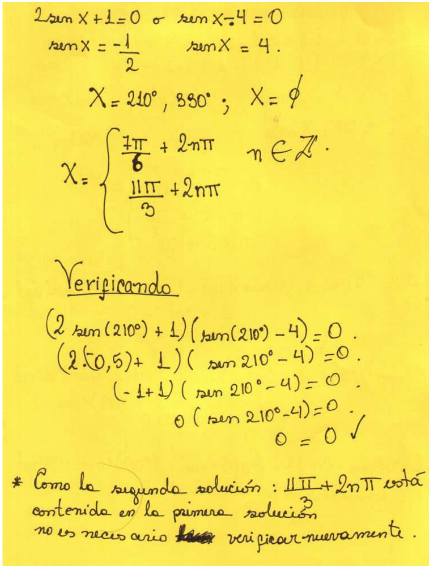


Figura 7: Respuesta del E5 a la pregunta 1ii de la entrevista.

Explicita incorrectamente el conjunto solución, porque transforma 330° en $\frac{11\pi}{3}$. Se puede observar que E5, para esta parte de la pregunta 1, está en vías de mostrar una concepción objeto del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo AB=0", ya que comete el error mencionado anteriormente.

En la parte iii de la pregunta 1, E6 realiza la acción de transformar $\tan x$ en $\frac{senx}{\cos x}$, pudiendo haber factorizado por $sen\ x$; luego realiza las acciones de calcular la potencia $senx \cdot sen^2 x$, eliminar el denominador de la expresión $\frac{senx}{\cos x} \cdot sen^2 x - sen^2 x - \frac{senx}{\cos x} + senx = 0$ y factorizar por $sen\ x$ (figura 8).

E6 logra coordinar los procesos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0* a través de los factores igualados a cero, porque sólo iguala $sen\ x$ a cero y esto lo utiliza en el otro factor: $sen^2 x - sen^2 x \cdot \cos x - 1 + \cos x$, haciendo cero los términos que contengan $sen\ x$, para deducir que $\cos\ x = 1$. La factorización le permite realizar la acción de encontrar dos de las tres soluciones particulares en el intervalo $[0, 2\pi)$, generalizando ambas en $S = \{n\pi,\quad n \in Z$. Por último, realiza la acción de verificar las raíces particulares. Este estudiante, en sus trasformaciones, realiza sólo algunas reflexiones internas que lo llevan a parte de la solución, pero la trasformación de $\tan x$ por $\frac{senx}{\cos x}$, hizo que se perdiera la solución particular $x=\frac{\pi}{4}$, y por ende entregar el conjunto solución completo. En consecuencia, para la parte iii de la pregunta 1, E6 está en vías de mostrar una concepción proceso del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*”.

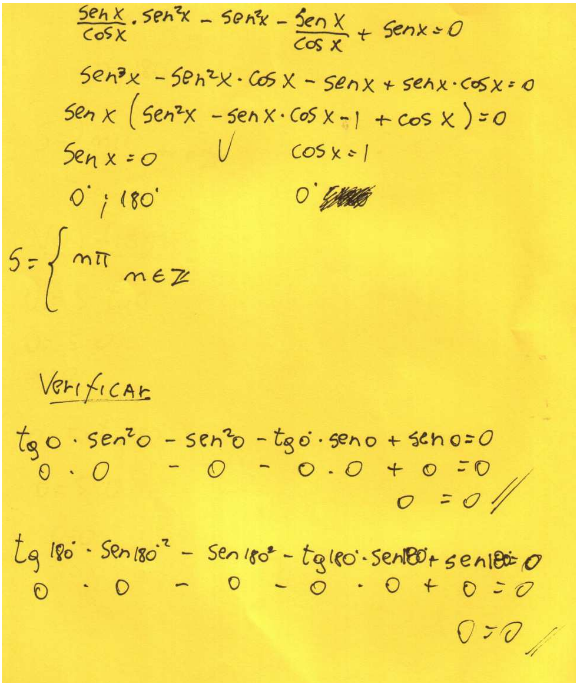


Figura 8: Respuesta del estudiante 6 a la pregunta 1iii de la entrevista.

En la parte iv de la pregunta 1, E2 iguala $\tan x$ a cero, encontrando las soluciones particulares x=0° y x=180°. Posteriormente generaliza la solución a:

$$S=\begin{cases}0+n\pi\\ \pi+n\pi\end{cases},\quad n\in Z$$

y verifica sólo para *x*=0° (figura 9), quizás porque sabe que para *x*=180° será lo mismo.

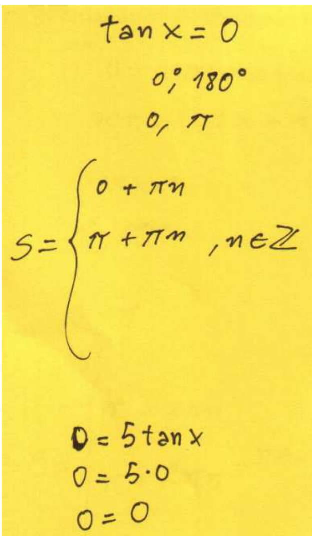


Figura 9: Respuesta del E2 a la pregunta 1iv de la entrevista.

De acuerdo a nuestra DG, E2 para esta parte de la pregunta 1, muestra una concepción objeto del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*”, ya que está consciente de todo el proceso y actúa sobre él, lo que le permite encontrar el conjunto solución.

Conclusiones de la pregunta 1

De un total de seis estudiantes que respondieron la pregunta 1, podemos señalar que los principales errores que cometieron fueron: omisión de alguna raíz particular, al no utilizar fórmulas de reducción como $\tan x = \tan(180° + x)$, y no descartar *x*=90° con su generalización en el conjunto solución, aunque hayan notado que en la verificación indetermina *tan*(90°). Esto último quizás por falta de orden en el procedimiento, donde primero debieron verificar y luego generalizar el conjunto solución.

- Dos los seis estudiantes igualaron directo $\tan x$ a cero, sin dividir por 5 en la ecuación 0=5tan(x), lo que permitió hacer el análisis a partir de nuestra DG pero con dificultades, ya que asumimos que pensaron que $5\tan x = 0$, sólo cuando $\tan x = 0$.
- Uno de seis estudiantes igualó a cero tanto el factor 5 como el factor $\tan x$ en la ecuación $0 = 5\tan x$, lo que permitió analizar sin ningún problema su respuesta a partir de una generalización directa de la *propiedad hankeliana*.
- Uno de los seis estudiantes muestra una concepción proceso del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*”. Si bien generaliza las ecuaciones de la forma *ab=0* y la *propiedad hankeliana* a ecuaciones de la forma *ab=0,* y además coordina los procesos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas de la forma *ab=0*, a través de los factores *a* y *b* igualados a cero, no está consciente de todo el proceso que le permita actuar sobre él y detectar errores al resolver una ecuación trigonométrica del tipo *ab=0*.
- Tres de los seis estudiantes muestran estar en vías de tener una concepción objeto del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*”. Si bien están conscientes de todo el proceso, falta que actúen en mayor profundidad sobre él, para que detecten pequeños errores y tomen buenas decisiones algebraicas que les permitan que se encuentren todas las soluciones particulares o que pueden factorizar en todas las ecuaciones dadas, como generalización de la *propiedad hankeliana* a ecuaciones trigonométricas de la forma *ab=0*.
- Dos de los seis estudiantes muestran una concepción objeto del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*”. Ellos son capaces de resolver una ecuación de este tipo a través de una generalización de las ecuaciones del tipo *ab=0* y la *propiedad hankeliana*; además, coordinan los procesos ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0* con las funciones trigonométricas a través de los factores *a* y *b* igualados a cero. En consecuencia están conscientes en todo el proceso, siendo capaces de actuar sobre él.

8. Conclusiones y reflexiones

8.1. Conclusiones teóricas

A partir de la investigación de Ochoviet (2004), nos centrarnos en la *propiedad hankeliana*, que fue nuestra base como estructura matemática en la resolución de “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*”.

Con la teoría APOE analizamos la evolución cognitiva de los conceptos que subyacen alrededor de las “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*” mediante la descripción de las construcciones y mecanismos mentales. El resultado de este análisis a priori se tradujo en nuestra DG Hipotética, que tenía como objetivo probar su viabilidad mediante un cuestionario diagnóstico y una entrevista semiestructurada.

Los instrumentos se analizaron con las respuestas de los estudiantes, categorizando las conclusiones, lo que nos permitió llegar a una DG refinada. Esta última contribuyó a la discusión final de los resultados, concluyendo que de acuerdo a nuestros estudiantes, los conceptos que surgen alrededor de nuestro objeto cognitivo son:

- Cuerpo de los números reales.
- Propiedad hankeliana en los reales.
- Resolución de ecuaciones del tipo *ab=0*.
- Funciones trigonométricas.
- Ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*.
- Raíces de las funciones trigonométricas en intervalo $[0,\ 2\pi[$.
- Conjunto solución de la ecuación trigonométrica de ángulos simples del tipo *ab=0*.

Esto responde a una de nuestras preguntas de investigación: ¿entre qué matemática u objetos matemáticos transitan los estudiantes de cuarto año medio cuando resuelven ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*, aplicando la *propiedad hankeliana*? Esto contrasta los análisis a priori y posteriori de nuestra investigación para los conceptos matemáticos involucrados.

Para responder la pregunta ¿qué conexiones realizan los estudiantes de cuarto año medio en la aplicación de la *propiedad hankeliana* para resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*?, sintetizaremos las conclusiones por categorías en la siguiente tabla, donde se aprecian las conexiones que realizan los estudiantes al transitar entre conceptos (o en el mismo), pasando de una concepción a otra a través de los mecanismos mentales.

La síntesis tiene como base la DG refinada.

Tabla 1

Concepto	Mecanismos y construcciones mentales
Cuerpo de los números reales	Un estudiante muestra una concepción **objeto** del concepto “cuerpo de los números reales” cuando está consciente de todo el **proceso** suma y multiplicación de números reales, actuando sobre las propiedades clausura, conmutatividad, asociatividad, neutro aditivo, neutro multiplicativo, inverso aditivo, inverso multiplicativo y distributividad.
Propiedad hankeliana. Si *ab=0*, entonces *a=0 o b=0*; a, b reales	Cuando un estudiante muestre la concepción **objeto** del concepto “cuerpo de los números reales”, podrá **desencapsular** en un **proceso** el concepto *propiedad hankeliana,* reconociendo que si *a y b* son números reales, el producto *ab=0* implica que *a=0 o b=0*.
Resolución de ecuaciones del tipo *ab=0*	Cuando un estudiante muestre la concepción **objeto** del concepto “cuerpo de los números reales, podrá **desencapsular** en un **proceso** el concepto “resolución de ecuaciones del tipo *ab=0*”; además, podrá **coordinar** los **procesos** *propiedad hankeliana* y “resolución de ecuaciones del tipo *ab=0*”, a través del producto *ab=0*.
Funciones trigonométricas	Un estudiante muestra la concepción **objeto** del concepto “funciones trigonométricas”, cuando reflexiona sobre los **procesos** dominio, recorrido y periodicidad de una función específica, tomando conciencia de estos **procesos** al pensarlos como un todo y actuando sobre ellos.
Ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0*	Un estudiante muestra la concepción **objeto** del concepto ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0* cuando es capaz de reconocer que los factores *a y b* representan funciones trigonométricas de variable real, reconocer que si *ab=0*, entonces *a=0 o b=0.* Además logra **generalizar** la resolución de ecuaciones del tipo *ab=0* y la *propiedad hankeliana* a este tipo de ecuaciones. **Coordina** los **objetos** ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0* y funciones trigonométricas a través de los factores *a y b* igualados a cero. Además está consciente del proceso como una totalidad, actuando sobre él.
Raíces de la ecuación trigonométrica del tipo *ab=0* en el intervalo $[0,\ 2\pi[$	Un estudiante muestra la concepción **proceso** del concepto “raíces de la ecuación trigonométrica del tipo *ab=0* en el intervalo $[0,\ 2\pi[$” si es capaz de entender que si en una función trigonométrica $f(x)$ de variable real, para cualquier valor $x=c$, si $f(c)=0$, entonces c es un cero de la función trigonométrica. Además logra **desencapsular** los objetos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0* en este **proceso.**
Conjunto solución de la ecuación trigonométrica de la forma *ab=0*	Un estudiante muestra la concepción **proceso** del concepto “conjunto solución de la ecuación trigonométrica de la forma *ab=0*”, cuando es capaz de **coordinar** la solución general con la solución particular en el intervalo $[0,\ 2\pi[$ a través del período de la función trigonométrica específica.

Las preguntas de investigación fueron guiadas por nuestros dos objetivos generales, que se desglosaron en cinco objetivos específicos. Estos fueron alcanzados a través de nuestra investigación y se concretizan y sintetizan en los siguientes resultados:

- Construcción de una DG, producto del análisis teórico, que describió hipotéticamente las construcciones y mecanismos mentales que subyacen alrededor de las ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*.
- El 16,6% de los estudiantes muestra una concepción **proceso** del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*". Las evidencias muestran que un estudiante para esta concepción es capaz de generalizar las ecuaciones de la forma *ab=0* y la *propiedad hankeliana* a ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*; pero al intentar coordinar los procesos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*, presenta dificultades tales como: transformación de grados a radianes, determinación de alguna solución particular de una ecuación trigonométrica y reflexión en el error cuando se verifica una solución particular.
- El 50% de los estudiantes está en **vías** de mostrar una concepción **objeto** del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*". Un estudiante en vías de mostrar la concepción objeto generaliza la *propiedad hankeliana* y las ecuaciones de la forma *ab*, y coordina los procesos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas del tipo *ab=0* a través de los factores *a y b* igualados a cero, pero con reparos, ya que puede cometer errores en la determinación de un ángulo específico cuando $sen\ x$ es negativo u omitir una solución particular en un cuadrante distinto del primero. Además encuentra el conjunto solución con algunas dificultades producto de errores anteriores. No obstante, un estudiante con estas características está consciente del proceso "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*", pero al actuar sobre él no detecta errores, por eso se explica que muestra estar en vías de la concepción objeto para este concepto.
- El 33% de los estudiantes muestra una concepción **objeto** del concepto "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples de la forma *ab=0*". Esto se demuestra porque son capaces de generalizar las ecuaciones del tipo *ab=0* y la *propiedad hankeliana* a ecuaciones trigonométricas de la forma *ab=0*. Además coordinan los procesos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas de la forma *ab=0* a través de los factores *a y b* igualados a cero, y todo esto les permite encontrar el conjunto solución. En consecuencia, un estudiante con estas características está consciente de todo el proceso y actúa sobre él.

8.2. Conclusiones didácticas

El análisis de los resultados permitió reafirmar que se necesita de una concepción objeto de la estructura de cuerpo de los números reales, para resolver "ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*". Esto porque los estudiantes necesitan transitar por esta estructura para justificar sus procedimientos, utilizando propiedades como asociatividad, distributividad, existencia de inverso multiplicativo, entre otras, tránsito que se planteó en una de nuestras preguntas de investigación.

Por otro lado, los estudiantes necesitan transitar por las funciones trigonométricas para resolver las ecuaciones trigonométricas propuestas en nuestra investigación. Se pudo concluir que un estudiante que muestre una concepción objeto de la estructura de cuerpo de los números reales (como lo mostró E18), no podrá mostrar una concepción objeto del concepto “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*” si no muestra una concepción objeto del concepto “funciones trigonométricas”.

Las conexiones que realizan los estudiantes en la aplicación de la *propiedad hankeliana* para resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*, permitió que nos diéramos cuenta, a través del análisis de resultados, de que necesitan coordinar los objetos “ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab=0*” y las “funciones trigonométricas a través de los factores *a y b* igualados a cero, teniendo presente “la estructura de cuerpo de los números reales” como objeto, cuestión que se puede explicar a través de:

- Detectamos que los estudiantes tienen problemas de traspaso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas, dificultades de traspaso de grados a radianes, problemas de manipulación de ángulos negativos y de ángulos especiales *30°*, *45°* y *60°* para ser aplicados en todo el dominio de las funciones trigonométricas. Pudimos apreciar dificultades en la determinación de ángulos en cuadrantes distintos del primero, al encontrar, por ejemplo, tres de cuatro soluciones particulares en el intervalo $[0, 2\pi[$ y principalmente, cuando la imagen de la función no es una de las usuales que se desprenden de la circunferencia goniométrica o de los triángulos rectángulos especiales.
- Al no verificar antes de explicitar el conjunto solución, algunos estudiantes olvidan descartar las soluciones que no verifican la igualdad y que estaban incluidas en la solución general.

La teoría APOE permite describir la evolución cognitiva de las ideas matemáticas, lo que se representó para los conceptos en la DG hipotéticos y refinados. De esta forma se pueden construir estos conceptos matemáticos, ya que la hipótesis de la teoría APOE es que todo concepto matemático se puede describir a partir de las construcciones y mecanismos mentales. La importancia de esto es realizar una DG para los conceptos previos más relevantes: estructura de cuerpo de los números reales y funciones trigonométricas. Una DG permitiría detectar qué significa comprender el concepto cuerpo de los reales y funciones trigonométricas y cómo puede ser alcanzada tal construcción.

Por otro lado, la *propiedad hankeliana* nos da luces para otras investigaciones, como las construcciones y mecanismos mentales asociados a cualquier tipo de ecuaciones del tipo *ab=0*, donde *a y b* son funciones de variable real. Cualquier investigación en Matemática Educativa debe estar atenta a responder a las necesidades del sistema educacional. En Chile, la enseñanza media sufre cambios constantemente. Actualmente existe un ajuste curricular en primero y segundo medio, que en los próximos años se extenderá a tercero y cuarto. En segundo medio se estudian los números reales. Será interesante que investigaciones analicen cómo se aborda este concepto, por la importancia en la construcción de conceptos tales como funciones trigonométricas o funciones exponenciales, entre otros. Como sugerencia, se puede hacer reflexionar a los estudiantes de enseñanza media acerca de las propiedades de cuerpo de los números reales, centrándose en el sentido de la igualdad y el uso posterior para justificar, por ejemplo, la resolución de ecuaciones o el análisis de parámetros en funciones trigonométricas o exponenciales. También existe una necesidad del desarrollo de habilidades propias de la matemática y que aparecen en los programas de estudio. Estas habilidades podrían relacionarse con los mecanismos mentales que ponen en juego los estudiantes cuando conectan conceptos matemáticos. Esto da pie a otro foco de investigación; por ejemplo, cómo se puede relacionar habilidades como el conocer, comprender, aplicar, analizar, sintetizar y evaluar con los mecanismos mentales.

Sugerimos también que cuando se aborden las funciones trigonométricas, se dé importancia a cualquier tipo de ángulo y no sólo los usuales que se desprenden de los triángulos rectángulos especiales o de la circunferencia goniométrica. Asimismo, dar mayor importancia en la enseñanza media a las funciones trigonométricas inversas, incluso cuando haya un trabajo con calculadora: lo que interesa son las reflexiones que pone en juego un estudiante cuando transita de un concepto a otro.

Bibliografía

Buendía, G y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1287-1296. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(3), 24-41

Maldonado, E y Miranda, J. (2009). Análisis didáctico y cognitivo de los elementos de trigonometría. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 169-178. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Maldonado, E, Rodríguez, F y Santana, S. (2009). Una propuesta para abordar la transición grados→radianes. En P. Lestón (Ed*), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 693-701. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

MINEDUC (2002). *Funciones y Procesos Infinitos*. Programa de Estudio Cuarto Año Medio. Santiago-Chile.

Navarro, P. y Villalva, M. (2009). Un estudio sobre la desarticulación entre la semejanza y la trigonometría en el bachillerato. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 287-296. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ochoviet, T. (2004). *¿ $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \vee \quad B = 0$? Reflexiones e implicancias en la enseñanza de la matemática.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.

Swokowski, E. y Cole, J. (1997). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México D.F.: International Thomson Editores.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en Matemática Educativa a nivel superior. *Revista Educación Matemática Santillana 7(001),* 5-31.

Gabriel Araya Rivera: Magíster en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile). Profesor de Matemática y Computación. Universidad de La Serena (Chile). **gearaya@gmail.com**

Marcela Parraguez González. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile). Doctora en Matemática Educativa. Profesora del Programa de Doctorado y Magíster en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile). **marcela.parraguez@ucv.cl**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 81-96

A planilha como recurso para o ensino de números racionais: reflexões sobre uma prática pedagógica

Eliane Maria Hoffmann Velho; Clair Teresinha de Souza; Lori Viali

Fecha de recepción: 19/03/13
Fecha de aceptación: 2/04/2014

Resumen	En este artículo se examina la contribución de la hoja de cálculo para la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales. Con este fin, un conjunto de seis actividades que involucran a múltiples representaciones de racionas, desarrollado con los procedimientos disponibles en esta herramienta y se aplica a una clase de sexto grado (séptimo ano) en una escuela pública en el área metropolitana de la capital se utilizó. Se concluye que el aprendizaje obtenido utilizando esta aplicación duró más tiempo porque se movilizaron todos los sentidos de los estudiantes. **Palabras clave**: La enseñanza con hoja de cálculo. La enseñanza de los números racionales. Varias representaciones.
Abstract	This paper analyzes the contribution of the spreadsheet teaching and learning of rational numbers. For this, was used a set of six activities involving their multiple representations. These activities was developed with the procedures available in this tool and applied to a sixth-grade class (seventh year) in a public school in the metropolitan area of a big city. We conclude that learning obtained using this application was more durable because every sense of the students was mobilized. **Keywords**: Teaching with Spreadsheets. Teaching Rational Numbers. Multiple Representations.
Resumo	Este artigo analisa a contribuição da planilha ao ensino e aprendizagem de números racionais. Para tanto, foi utilizado um conjunto de seis atividades, envolvendo as múltiplas representações dos racionas, desenvolvidas com os procedimentos disponíveis nessa ferramenta e aplicadas a uma turma de sexta série (sétimo ano) de uma escola pública da região metropolitana de uma capital. Concluí-se que a aprendizagem obtida utilizando esse aplicativo foi mais duradoura, pois todos os sentidos dos alunos foram mobilizados. **Palavras-chave:** Ensino com a Planilha. Ensino de Números Racionais. Representações múltiplas.

1. Introdução

Ninguém previa a algumas décadas, conforme analisa Lévy (1998), que a interação entre computadores e o homem seria tão sofisticada e se envolveria tanto na realidade das pessoas. Atualmente a sociedade está cada vez mais imersa e dependente dos recursos tecnológicos de tal forma que muitos as visualizam como extensões do próprio corpo, tal a facilidade que elas proporcionam no cotidiano. Essas inovações avançam a passos largos, o que é novidade hoje, amanhã já estará superado por novas tendências, porque "vive-se hoje em uma sociedade de bases tecnológicas, em que há mudanças contínuas, em ritmo acelerado." (Piccoli, 2006, p. 42). Isso acarreta a necessidade de uma atualização constante e, portanto de estudos permanentes.

Com tantos avanços, conforme constata Alarcão (2003), está-se vivendo em uma era que começou por ser, inicialmente, denominada de sociedade da informação, evoluiu rapidamente para a sociedade da informação e do conhecimento e, recentemente, está sendo chamada de sociedade da aprendizagem. Inserida neste cenário, a escola como uma instituição social, não pode ficar estagnada e indiferente às mudanças. É necessário que ela acompanhe o ritmo das transformações sociais e incorpore de forma ágil a tecnologia.

O computador por já estar presente na vida extraclasse do estudante, torna-se um aliado no ambiente escolar aproximando vivências, facilitando a obtenção de informações e também operando como recurso didático. De acordo com Borba e Penteado (2001, p. 17) "[...] o acesso à informática na educação deve ser visto não apenas como um direito, mas como parte de um projeto coletivo que prevê a democratização de acesso as tecnologias desenvolvidas por essa mesma sociedade." Com esse intuito, ele deve ser inserido nas atividades educacionais essenciais ao desenvolvimento do educando como na escrita, na leitura, na busca de informações e para o entendimento dos conceitos matemáticos.

Dentro dessa perspectiva, o computador mostra-se como um recurso didático a ser explorado nas escolas, que além de ser um bom recurso, também possibilita o desenvolvimento da autonomia do estudante e promove a sua interação com a modernidade. Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) a inserção da informática na esfera educativa é um desafio ao meio escolar. Esse desafio se reflete na incorporação de novas formas de comunicação e conhecimento que precisam ser constantemente adaptadas a uma realidade em permanente evolução.

A incorporação da informática na esfera escolar depende fundamentalmente, das ações do professor que deve aliar as tecnologias, métodos inovadores, para motivar e facilitar a aprendizagem. Isso se torna necessário, pois o aluno visualiza o computador como uma máquina lúdica que serve para o jogo, a diversão e o contato com os amigos, mas não como um instrumento de aprendizagem. Essa inserção na tecnologia deve vir acompanhada de uma reformulação curricular, de modo a propiciar uma maior autonomia ao ato de ensinar contemplando propostas de trabalho interdisciplinares de modo a explorar a interatividade e comunicabilidade propiciada pela máquina.

No entanto, a informatização das escolas ainda é incipiente e não está acompanhando a evolução da sociedade. Na pesquisa realizada por Nonato Filho (2011) é destacado que o Programa Nacional de Informática na Educação (Proinfo) que pretende informatizar todas as escolas, ainda tem um longo caminho até atingir esse objetivo. Ainda é grande o número de escolas que não possuem a infraestrutura adequada. A grande maioria dos professores não foi capacitada e não é encorajada a utilizar a tecnologia de forma rotineira. Se o professor não domina a tecnologia e não se sente confiante a utilizá-la ele certamente não o fará e se o fizer os resultados ficarão aquém do esperado, pois o uso da máquina por si só não garante a aprendizagem.

A partir da constatação que a tecnologia precisa estar presente no universo escolar e que ela deve interagir de forma lúdica com o estudante como meio de garantir o seu envolvimento nas tarefas, o que corrobora para uma aprendizagem significativa, foram desenvolvidas atividades para o ensino de números racionais. O recurso utilizado foi a planilha por ser um aplicativo interativo, de fácil aprendizagem, presente em todos os computadores e exigido pelo mercado de trabalho. O experimento foi realizado com uma turma de sexta série (sétimo ano) de uma escola estadual do município de Viamão (próximo a capital gaúcha).

Foi construído um conjunto de atividades nesse aplicativo, envolvendo o conceito de número racional, para ser trabalhado explorando os recursos disponíveis da ferramenta. Desse modo o objetivo desse trabalho foi refletir sobre a viabilidade, aplicabilidade e contribuição do uso da planilha como recurso didático para o estudo do conjunto dos números racionais, isto é, para a melhoria do entendimento e transição entre as suas múltiplas representações: decimal, fracionária e percentual. A escolha do conteúdo a ser trabalhado ocorreu em virtude da dificuldade de aprendizagem desse conceito. Essa lacuna será determinante para o fracasso de muitos alunos no ensino médio e superior. Percebe-se que os alunos chegam ao ensino médio e mesmo na graduação, sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo que envolve os racionais na forma decimal e fracionária, muito menos conseguem entender a lógica da reta numérica (Brasil, 1998). Assim é necessário investir em métodos de ensino que proporcionem uma aprendizagem real e duradoura desse conjunto numérico.

2. Educação Matemática com a Planilha

Ao longo do tempo sempre foi considerando importante a abstração no ensino de matemática sendo o raciocínio lógico e argumentativo um dos objetivos da Educação Matemática. Além disso, essa disciplina apresenta um modo de pensamento estável, pois como relata D' Ambrosio (1998, p. 13), "[...] a matemática tem um caráter de grande universalidade [...]". Desta forma, seus modelos e formas de argumentação se impuseram como organizadores do pensamento e de demonstrações. Tal postura acabou favorecendo métodos de ensino que priorizam o acúmulo de conhecimentos e que são praticadas por meio de aulas expositivas com apresentações de regras e fórmulas prontas. Contudo a relevância de apreender seus conceitos vão além da sala de aula, conforme relatam Onuchic e Allevato (2004, p.213): "a necessidade de se entender e ser capaz de usar a Matemática na vida diária e nos locais de trabalho nunca foi tão grande", o que requer propostas didáticas que enfatizem o trabalho pessoal e reflexivo do aluno, com o exercício sistemático do pensar, com o fazer matemática, onde a busca, a solução e sua interpretação devem ser desenvolvidas no processo de aprendizagem.

No entanto, se observa, normalmente, que o ensino da Matemática está apoiado na memorização e na repetição com pouca ou nenhuma relação com o mundo real. Essa abordagem vem acarretando dificuldades de aprendizagem, pois é baseada quase que exclusivamente em habilidades mecânicas. Como constata D´Ambrosio (2003, p. 59), o rendimento escolar está cada vez mais baixo, em todos os níveis, pois os "[...] alunos não podem agüentar coisas obsoletas e inúteis, além de desinteressantes para muitos. Não se pode fazer todo aluno vibrar com a beleza da demonstração do teorema de Pitágoras e outros fatos matemáticos importantes.” Decorre dessa problemática a urgência na busca de novas posturas em relação ao ensino matemático com a aplicação de métodos educacionais inovadores para se alcançar a mobilização, e consequentemente, o engajamento do educando. Nessa busca, a informática que já está inserida na cultura dos alunos, pode ser uma ferramenta para auxiliar na aprendizagem dessa disciplina, superando práticas pedagógicas antigas, pois está em “[...] harmonia com uma visão de construção de conhecimento que privilegia o processo e não o produto-resultado em sala de aula, e com uma postura epistemológica [...]” (Borba & Penteado, 2001, p. 45), entendendo o conhecimento como dependente da interação do sujeito.

De acordo com esses autores os computadores não substituem os seres humanos, pois somos nós que pensamos, criamos e tomamos decisões, mas eles organizam nossos pensamentos, desse modo “[...] nosso trabalho, como educadores matemáticos, deve ser o de ver como a matemática se constitui quando novos atores (computadores) se fazem presentes [...]” (Ibid, p. 47). Deve-se, então, explorar as possibilidades que a informática oferece para qualificar a ação pedagógica. Assim, fica claro o insubstituível papel do professor, orientando a aprendizagem, estimulando a autonomia e ajustando os conhecimentos matemáticos para serem desenvolvidos na máquina.

Contudo, o computador sendo usado como recurso educacional, não é o instrumento que ensina, mas “[...] a ferramenta com a qual o aluno desenvolve algo, e, portanto, o aprendizado ocorre pelo fato de estar executando uma tarefa por intermédio do computador” (Valente, 1991, p.24). Nessa realidade o professor precisa engajar-se a esses recursos, vencendo seus medos e relutâncias, e deve, sobretudo, ser o pesquisador e orientador de situações de aprendizagem significativas.

A planilha tem como função substituir o processo manual e mecânico de calcular e normalmente no mercado de trabalho, segundo De Fazzio (2002), é muito utilizada na construção de tabelas, elaboração de folhas de pagamento e também como controle de compras e vendas. Atualmente em qualquer computador é possível encontrar um software desse tipo. Suas principais características são: a possibilidade de criar gráficos facilmente e rapidamente, elaborar e manusear tabelas, armazenar e manipular bases de dados e criar e utilizar um grande número de algoritmos matemáticos para a realização de inúmeras tarefas sobre bases de dados ou objetos matemáticos.

A planilha surgiu da necessidade de se efetuar cálculos repetitivos de uma forma mais rápida e eficiente. Sua criação se deve a Dan Bricklin, aluno da Universidade de Harvard, que teve a idéia, em 1978, de desenvolver um procedimento automatizado que o ajudasse na realização de tarefas acadêmicas. Com esse recurso Bricklin entrou para a história da informática e a planilha foi o software responsável por alavancar as vendas de computadores pessoais, pois conforme Viali (2006, p. 1):

> A planilha incentivou o desenvolvimento do microcomputador, pois antes do seu lançamento não existia um programa que justificasse realmente a compra de um micro. Em 1979 a planilha tornou-se disponível para o

público através da plataforma Apple II e o impacto foi quase imediato, pois muitas pessoas compravam o micro apenas para usar este software.

Contudo, mesmo sendo encontrada a disposição em quase todos os computadores, ela é um recurso pouco conhecido dos professores e ainda praticamente ignorado como recurso didático. Entretanto, no mercado de trabalho ela é o aplicativo dominante e é raro um anúncio de emprego, de qualquer tipo, que não exija seu conhecimento a níveis médio ou avançado. Isto justifica seu uso na escola, pois como argumenta Flores (2004, p. 1) “[...] é um programa bastante amigável, e, portanto, de rápida aprendizagem por qualquer pessoa. Desta maneira é uma ferramenta de ensino de fácil acesso a quase todo professor, poderá utilizá-la para ensinar seus alunos [...]”. O que pode aliar a aprendizagem de matemática com sua utilização futura na profissão.

Ao se pensar no emprego da planilha em prol de um ensino de maior qualidade, que forme para a vida em sociedade, Viali (2005), explica que a principal virtude desse recurso é a popularização, porque é “[...] bem conhecida pelos alunos e aqueles que ainda não a conhecem, não reagem negativamente ao ter que aprendê-la, pois sabem que cedo ou tarde terão que fazer isto por imposição do mercado de trabalho, o mesmo já não se daria com um software específico.”

Vale destacar que para a utilização da planilha como ferramenta didática, é necessária adequar toda sua gama de possibilidades aos objetivos desejados em cada conteúdo, o professor previamente deve elaborar sua proposta de ensino e testar sua eficácia, pois conforme relata Viali (2002), “[...] apesar da Excel ser amplamente conhecida e utilizada, ela não foi projetada como recurso pedagógico [...]”, portanto a exploração prévia pelo professor é fundamental para que, na sala de aula, muitos imprevistos possam ser amenizados.

3. O Conjunto dos Números Racionais

Entende-se como conjunto dos números racionais, representado pela letra Q, o conjunto definido por: Q = {a/b / a, b Є Z, b ≠ 0}. Essa sentença explica que todo número é racional quando puder ser escrito na forma a/b, com a e b inteiros e b ≠ 0. É relevante frisar que os decimais exatos e as dízimas periódicas também são números racionais, pois podem ser escritos na forma a/b, com assim como os porcentuais. Esses elementos não constituem novos conjuntos numéricos, apesar de terem uma notação diferente, pertencem à mesma categoria das frações (Onuchic & Allevato, 2008).

No ensino brasileiro as representações fracionária e decimal dos racionais são conteúdos que começam a ser desenvolvidos nos ciclos iniciais do ensino fundamental. Porém, como constatado nos PCNs “[...] os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial, os que envolvem os racionais na forma decimal” (Brasil, 1998, p. 100). Ao se pensar na utilização cotidiana dos números racionais as representações decimal e percentual são as mais evidentes, principalmente pelas transações comerciais. Contudo, como justificado pelos PCNs, o estudo da forma fracionária é relevante entre outros motivos por ser fundamental para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos como o das proporções, das equações e do cálculo algébrico. Dessa forma, “a familiaridade do aluno com as diferentes representações dos racionais (fracionária, decimal e percentual) pode levá-lo a perceber qual delas é mais utilizada ou adequada para expressar um resultado” (BRASIL, 1998, p. 103).

Para Onuchic e Allevato (2008) as diferentes personalidades, em outras palavras, as interpretações dos números racionais são denominadas de: ponto racional, fração, quociente, operador e razão. Consideram, também, os racionais com a “personalidade” da proporcionalidade, porque envolve a idéia de linearidade. Conforme esclarecem essas autoras, não se trata de novas nomenclaturas matemáticas: “[...] o fundamental é permitir que os alunos desenvolvessem compreensões sobre estes conceitos, dando-se-lhes a oportunidade de encontrar os diferentes significados dentro de uma variedade de problemas” (Ibid, p. 85).

O ponto racional trata da personalidade do número racional quando aplicado a reta numérica, que “[...] ocupa um ponto bem definido na reta e, reciprocamente, a todo ponto racional da reta corresponde um número racional” (Onuchic & Allevato, 2008, p. 87). É preciso, que fique claro para o aluno durante a construção da reta numérica que, por exemplo, 2/3 = 0,666... é uma dízima periódica simples, cuja fração geratriz é 2/3 e não aproximações do tipo 0,6 ou 0,66. No relato sobre o desempenho dos alunos na Prova Brasil[1] (PDE/Prova Brasil, 2008) verificou-se que a de identificação e a localização na reta numérica, dos racionais na forma decimal, apenas 40% dos alunos mostraram essa habilidade na quarta série (quinto ano) e 54% na oitava série (nono ano), nessa última etapa, se solicitava, também, a compreensão com números negativos. Ficou claro dessas avaliações a pouca compreensão dessa personalidade dos racionais.

Já a fração é a personalidade que relaciona a parte ao todo, a barra fracionária nesse caso delimita o numerador e o denominador, por exemplo, na “[...] fração 3/5, o denominador 5 indica que o todo foi dividido em 5 partes iguais e recebe o nome de 1/5; o numerador 3 indica que três dessas partes foram tomadas [...]”(Onuchic & Allevato, 2008, p. 90). Para o entendimento das frações como pertencentes ao conjunto dos números racionais os PCNs colocam “[...] que o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza contínua ou discreta), compreenda a inclusão de classes, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas” (BRASIL, 1998, p. 102).

O quociente é a personalidade dos racionais em que “[...] um número de objetos precisa ser repartido igualmente num certo número de grupos” (Onuchic & Allevato, 2008, p. 88), tratando os números racionais como quociente de um inteiro por outro ($a \div b = a/b$, $b \neq 0$), como soluções para situações de divisão e admitindo a barra fracionária como símbolo dessa função. No entanto, para o aluno, essa interpretação se diferencia da personalidade dos racionais como fração, pois como explicam os PCNs “[...] dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 unidades em 3 partes iguais” (BRASIL, 1998, p. 102). A diferença entre essas duas personalidades precisa ficar clara para o aluno, pois nos dois casos o resultado é o mesmo, 2/3.

[1] A Prova Brasil avalia periodicamente as competências construídas e as habilidades desenvolvidas e detectam dificuldades de aprendizagem em Língua Portuguesa e Matemática de estudantes do quinto e nono ano.

A personalidade operador define uma estrutura multiplicativa de números racionais, ou seja, uma ação que pode ser aplicada a um número, nesse caso a barra fracionária não é nem um símbolo funcional nem um delimitador, mas representa a operação de composição de funções, pois “a notação barra fracionária a/b, neste caso, é usada para simbolizar uma classe particular de funções compostas definida por (a/b).x = a(x:b) = (a.x):b, onde a e b são constantes e x é uma expressão numérica para alguma quantidade” (Onuchic & Allevato, 2008, p. 94).

Por fim, a personalidade razão, dos números racionais, que faz uma comparação entre duas grandezas, mostrou-se como a mais difícil de ser entendida pelos alunos, contudo o entendimento desse operador é relevante, pois fundamenta o conceito de proporcionalidade (Ibid).

Alguns resultados da Prova Brasil, como por exemplo, atividades que avaliavam a habilidade do estudante em reconhecer frações nas suas diversas representações como parte de um inteiro foram analisadas. Dos estudantes da quarta série (quinto ano), 64% conseguiram responder de forma correta as relações entre conjuntos, a razão entre medidas, entre outras. Contudo, somente 37% conseguiram resolver corretamente uma questão sobre percentual. Dos alunos da oitava série (nono ano), apenas 58% acertaram tais questões. Nessa mesma série, somente 32% dos alunos conseguiram acertar a questão que identificava as representações fracionária, decimal ou percentual de um racional (PDE/PROVA BRASIL, 2008) e na questão envolvendo o percentual apenas 26% conseguiram responder acertadamente. Em contrapartida, quando a atividade foi a de leitura e interpretação de gráficos, observou-se que 79% dos alunos, de modo geral, responderam corretamente (PDE/Prova Brasil, 2008).

Como se pode perceber a aprendizagem dos números racionais envolve dificuldades, em parte, porque requer a identificação de distintas representações e também por que não mantém os mesmos critérios dos conjuntos naturais e inteiros. Para se ter uma aprendizagem efetiva, os PCNs recomendam tratar essas diversas interpretações de maneira conjunta, sendo que “a consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo do terceiro e quarto ciclos, que possibilite a análise e a comparação de variadas situações-problema” (Brasil, 1998, p. 103).

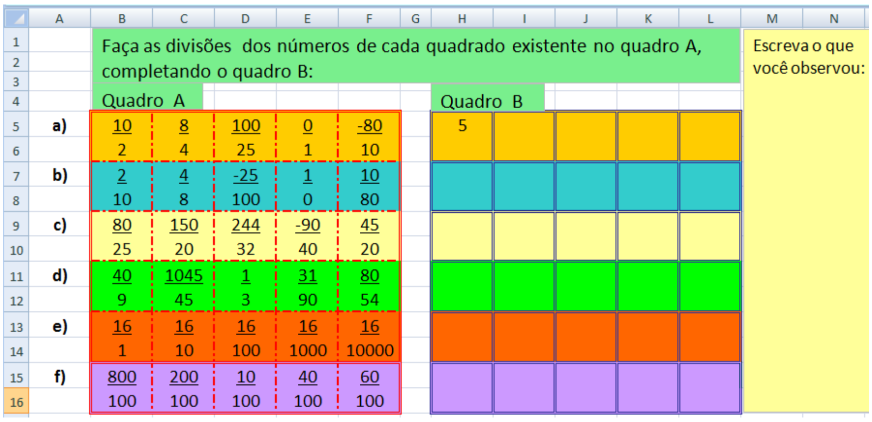
4. Procedimentos Metodológicos

Esta investigação fez uma análise de um projeto pedagógico que foi elaborado com o recurso da planilha do ambiente Linux, que é a que está disponível nos computadores das escolas públicas estaduais. As atividades realizadas envolveram as diversas representações dos racionais e engajaram os alunos no processo de elaboração dos conhecimentos matemáticos além de familiarizá-los com um software que é demandado pelo mercado de trabalho.

Com essa intenção foi desenvolvida uma investigação de caráter qualitativo na qual foi feito o confronto entre os dados e o conhecimento teórico acumulado a respeito do tema. Este tipo de trabalho se vale do pesquisador como o principal instrumento investigativo e supõe o seu contato direto com o ambiente e a situação que esta sendo investigada (Ludk & Andre, 1986).

O projeto foi aplicado em uma Escola Estadual de Ensino Fundamental localizada em um município da região metropolitana da cidade de Porto Alegre. O público alvo da investigação foi uma turma de 28 alunos da sexta série (sétimo ano) e foi realizada entre os meses de maio e junho de 2012. Cada uma das seis atividades elaboradas foi desenvolvida em duas aulas semanais envolvendo um total de seis planilhas. A última planilha foi considerada como avaliação, pois envolveu todas as representações trabalhadas e sua resolução foi desenvolvida pelos estudantes sem a intervenção docente.

O objetivo da atividade um foi a interpretação da personalidade do número racional denominada quociente, na qual a divisão do numerador pelo denominador gera um decimal, que pode ser exato ou uma dízima periódica que pode ser simples ou composta.



Faça as divisões dos números de cada quadrado existente no quadro A, completando o quadro B:

Quadro A

a)	10/2	8/4	100/25	0/1	-80/10
b)	2/10	4/8	-25/100	1/0	10/80
c)	80/25	150/20	244/32	-90/40	45/20
d)	40/9	1045/45	1/3	31/90	80/54
e)	16/1	16/10	16/100	16/1000	16/10000
f)	800/100	200/100	10/100	40/100	60/100

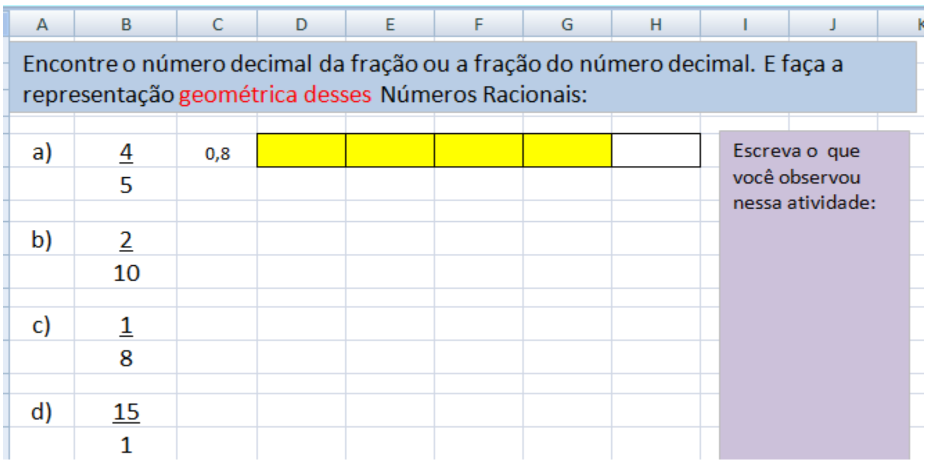
Quadro B

5				

Escreva o que você observou:

Figura 1. Atividade 1: a personalidade quociente de um racional. Fonte: os autores

Com a atividade dois pretendeu-se desenvolver a compreensão da personalidade do número racional; denominada fração, como uma relação parte e todo com auxílio da representação geométrica. Além disso, que toda fração é representada por número decimal correspondente e vice-versa e a transformação entre os dois tipos de representação.



Encontre o número decimal da fração ou a fração do número decimal. E faça a representação geométrica desses Números Racionais:

a)	4/5	0,8	
b)	2/10		
c)	1/8		
d)	15/1		

Escreva o que você observou nessa atividade:

Figura 2. Atividade 2: a personalidade fração de um número racional. Fonte: os autores

Na atividade três o propósito foi evidenciar a personalidade do número racional que envolve o conceito de proporcionalidade e também a idéia de equivalência, entre outros entendimentos, como o de parte e todo da fração.

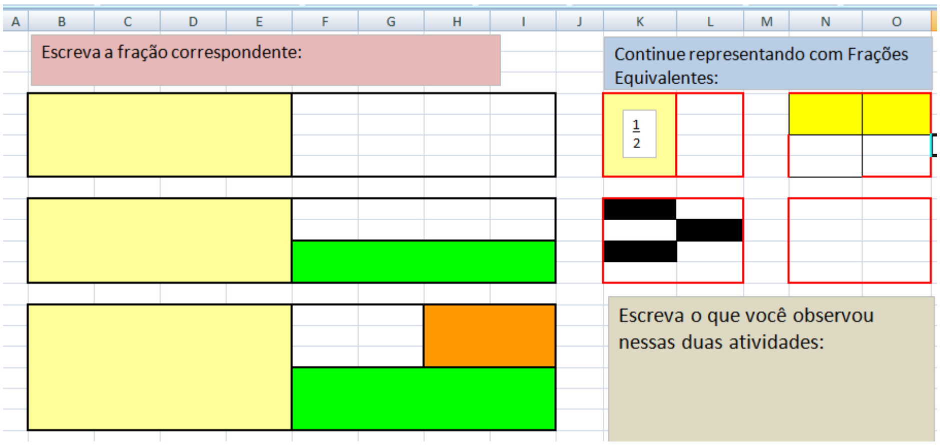


Figura 3. Atividade 3: a personalidade de proporcionalidade de um número racional
Fonte: os autores

A atividade quatro foi desenvolvida para favorecer o entendimento das posições do numerador e do denominador, a compreensão da personalidade do número racional que forma o percentual e para corroborar para a construção e a interpretação de gráficos.

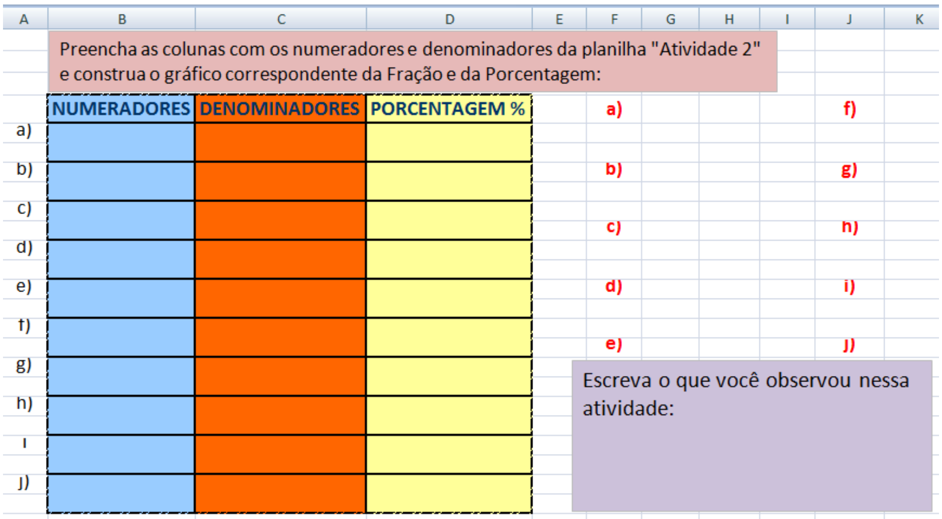


Figura 4. Atividade 4: a personalidade de operador de um número racional. Fonte: os autores

Na atividade cinco o objetivo foi o trabalhar a personalidade do número racional como ponto racional ao se completar a reta numérica, também foi pretendido aprimorar a conversão da representação fracionária em decimal.

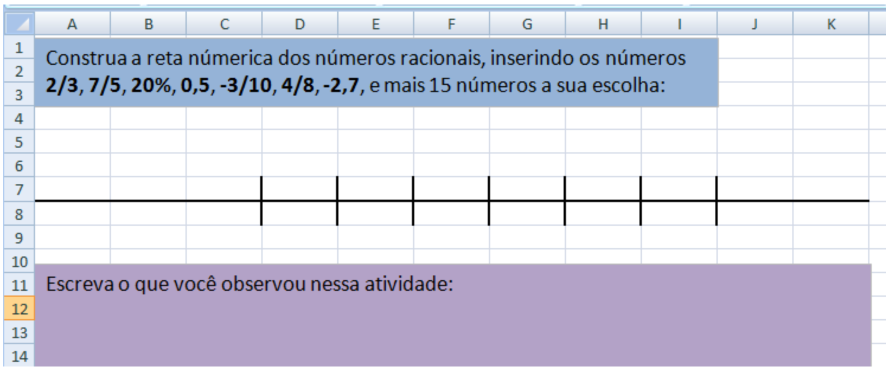


Figura 5. Atividade 5: a personalidade ponto decimal de um número racional
Fonte: os autores

A atividade seis foi considerada como avaliação, pois englobou todas as personalidades dos números racionais e foi realizada pelos alunos sem o auxílio do professor.

Complete o quadro dos números racionais:

NUMERADOR	DENOMINADOR	FRAÇÃO	DECIMAL	PORCENTAGEM	Escreva o que você observou nessa atividade:
1	5				
			0,4		
		$\frac{3}{4}$		75%	
3	5				
			0,45		

Figura 6. Atividade 6: toda as personalidades anteriores de um número racional
Fonte: os autores

Cabe salientar que após cada atividade foi solicitado que os alunos escrevessem as observações sobre o trabalho realizado. O propósito era ter mais uma fonte de consulta para a avaliação da aprendizagem e do sucesso ou não da proposta didática.

5. Síntese das Ocorrências

Antes da realização da proposta de ensino foi feita uma entrevista com a professora titular da turma onde as atividades seriam aplicadas, de forma a ter um perfil dos estudantes. Foi apurado que dos 28 estudantes do grupo, oito eram repetentes, vinte e seis possuíam computador, sete conheciam a planilha, mas apenas um sabia o básico sobre ela. Esse perfil forneceu a base para a abordagem didática. O laboratório de informática tinha como recurso para o professor além do computador, um quadro branco e um data show. Contudo não existiam computadores suficientes para todos os alunos da turma. Desta forma, quatro alunos trabalharam em duplas. Foi necessário uma preparação prévia do laboratório para que cada um dos 24 computadores disponíveis recebesse uma cópia da planilha com as atividades planejadas.

A intervenção didática teve início com a apresentação dos objetivos aos alunos. Em seguida, de forma resumida, foram apresentadas as funções básicas da planilha. O propósito era ser superficial para deixar espaço para que os alunos assumissem um comportamento investigativo de modo que descobrissem por si o recurso. Conforme Polya (1995, p. 1), "[...] o professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho." Com esse propósito os alunos foram incentivados a manusear a planilha para que pudessem se familiarizar com o aplicativo. Quanto ao papel do computador nesse tipo de atividade Oliveira relata que:

> Ao monitor, cabe a tarefa de instigar dúvidas, pois é o periférico que fornece o *feedback* das ações executadas, proporcionando a colaboração entre os pares mais facilmente do que a prática no uso do lápis e papel, mantendo e fixando a atenção constante e simultaneamente. Com isso, a aprendizagem flui de modo espontâneo com a participação e envolvimento dos grupos, desde que o

trabalho inicialmente conduzido desperte interesse e suficiente motivação. (Oliveira, 2009, p. 39).

Os alunos estavam muito empolgados em usar o computador, desta vez não para jogar ou brincar, mas sim para aprender. No entanto, para que fossem atingidos os objetivos educacionais propostos, os alunos teriam que superar o desafio de trabalhar em uma planilha, aprendendo a manejá-la e a resolver enunciados matemáticos. Levy (1993, p. 10) coloca que: "o desafio que os educadores enfrentam está relacionado à aplicação prática do computador, como elemento integrador do processo de ensino aprendizagem e não como uma simples ferramenta que facilita ou automatiza os cálculos".

Passada a empolgação inicial foi apresentada a primeira atividade proposta. Os estudantes abriram a planilha na atividade 1 leram o enunciado que solicitava a resolução das divisões apresentadas no quadro A e cujas respostas deveriam ser colocadas no quadro B. Foi explicado detalhadamente como construir uma fórmula na planilha. Ainda durante o desenvolvimento da atividade por meio de questionamentos, os estudantes foram fazendo constatações, tais como: todos os números apresentados no quadro A eram inteiros; a forma em que os números foram apresentados dentro de cada célula do quadro A era denominada de fração.

No primeiro encontro as dificuldades de entender e manejar a planilha superaram as dificuldades de interpretar e compreender o conteúdo. Os estudantes tiveram muitas dúvidas e ficavam temerosos de errar ao executarem os comandos. Uma parte considerável do tempo, de uma hora-aula, foi utilizada para as explicações e mesmo assim os pedidos de auxilio foram muitos e quase todos ao mesmo tempo. Conforme Oliveira (2009) é comum essa demora inicial com atividades executadas com a planilha, pois é necessário destacar a utilização dos comandos e procedimentos da ferramenta sendo utilizada. Mas superadas as dúvidas e a ansiedade inicial o trabalho ganha em qualidade, pois o uso do lúdico intrínseco ao computador agindo como fator motivador, contribuiu para a aprendizagem do conteúdo matemático proposto.

Em todas as planilhas das atividades elaboradas existe uma caixa de texto destinada a reflexões dos estudantes. Na caixa de texto, dessa atividade, ao final do trabalho, obteve-se depoimentos com o seguinte teor: "usando o computador é mais fácil de fazer as divisões, mas fazendo de cabeça é mais difícil" (Aluno C). "Todos os resultados desta linha pertencem ao conjunto dos inteiros" (Aluno E). "Nesta linha os resultados das contas deram números quebrados. E não deu para dividir por zero" (Aluno B). "Os resultados das contas pertencem a dois conjuntos, dos inteiros e dos racionais" (Aluno G). Tais depoimentos mostram como os alunos estavam engajados na proposta procurando pensar sobre o que estavam realizando, apesar dos obstáculos iniciais.

Na atividade 2, os estudantes além de fazerem as divisões com auxilio da planilha, também deveriam representar as frações geometricamente, para isso precisavam selecionar o total de células, depois aplicar bordas na seleção para então pintarem as células correspondentes a fração. Nessa atividade, os maiores obstáculos encontrados foram os de usar os recursos da planilha, como de selecionar e pintar as células. No espaço reservado para os estudantes escreverem o que analisaram durante a resolução da atividade foram observados depoimentos como: "[...] achei isso bem legal, mas é chato ficar clicando para completar a borda" (Aluno A); "Se minha prova fosse feita aqui tiraria 10, pois o computador não erra, acho que se todas as aulas fossem assim seria legal, mas eu esqueceria como se faz as contas, pois aqui o computador é quem faz, eu não penso na tabuada quando eu faço tudo certo" (Aluno H); "Da letra f, até a j, não soube fazer, precisei da ajuda da professora, não entendi que aquilo era o resultado da divisão, só fui compreender quando a professora colocou no quadro a explicação de como se fazia para se achar a fração do número decimal" (Aluno M).

Os exercícios citados pelo aluno M correspondiam a encontrar a fração que gerava o decimal, para essa solicitação foi explicado no quadro o procedimento. A intenção era usar a tecnologia como ferramenta auxiliar da ação pedagógica, então sempre que necessário, foram utilizados outros recursos para facilitar a aprendizagem. Conforme coloca Godoy (1998, p. 101), "[...] a tecnologia não substitui o professor e deve ser vista como um instrumental para ser utilizado em etapas definidas do processo de ensino, ao invés de ser pensada como estratégia única a ser adotada durante um curso".

No terceiro encontro quando foi trabalhada a atividade 3, os estudantes já se sentiam mais confortáveis com a planilha e exerceram sua autonomia mostrando curiosidade sobre a atividade que seria proposta. Antes de qualquer solicitação do professor foram logo ligando o computador, abrindo a planilha e tentando resolver os exercícios propostos. Cada um ajudava o outro a lembrar da aula anterior e dos conceitos básicos sobre o uso da planilha. Se obtivessem resultados diferentes, discutiam a questão e apagavam as respostas e refaziam passo a passo para verem onde estavam errando e quem estava errado. Oliveira enfatiza que:

> Em um meio colaborativo de aprendizagem e de interação com o computador, os alunos podem usufruir o experimentar com possibilidades de erros e acertos mais naturais, pois o "deletar" é mais leve e menos lastimoso do que o "apagar", utilizando-se da borracha. Dispõe-se de modo imediato e correto dos resultados das operações efetuadas e sem o "sacrifício" da aplicação dos algoritmos apresentados na forma tradicional, mas com nova roupagem, mais suave, proveniente da rapidez dos cálculos e da facilidade em (re)fazer e investigar (Oliveira, 2009, p. 39).

Essa atividade apresentava dois quadros onde os estudantes deveriam analisar a parte pintada e escrever a fração correspondente. O objetivo desse exercício foi o de desenvolver o conceito de frações equivalentes. No geral os estudantes tiveram facilidade para entenderem a equivalência, como se percebe no relato da Aluna B: "[...] muito fácil, para descobrir a fração equivalente e só multiplicar pelo mesmo número em cima e em baixo, é a simplificação invertida." Como essa atividade foi mais rápida do que o planejado o tempo que restou foi deixado livre para que os estudantes investigassem algumas ferramentas do aplicativo e então surgiram muitas perguntas relacionadas ao uso da planilha.

A atividade 4 foi bem mais difícil e demorada para ser desenvolvida do que as anteriores, pois envolvia a execução de muitos procedimentos. Os estudantes deveriam completar o quadro do numerador, do denominador e da percentagem, utilizando os dados da planilha número dois. Em seguida deveriam construir o gráfico correspondente a cada percentagem ou a cada fração. As dificuldades foram muitas, então foi explicado passo a passo o desenvolvimento com o data show, mesmo assim os estudantes pediam auxilio a todo o instante para os professores e para os colegas. Os obstáculos se concentraram no conceito de percentual por isso foram dadas novas explicações. Com relação aos gráficos as dificuldades se centraram no manuseio do aplicativo ao adicionar os dados nos rótulos.

Alguns relatos dos alunos revelaram os percalços encontrados nessa atividade: “Achei muito complicado isso, a professora teve que me explicar muitas vezes, e mesmo assim eu não sei fazer sozinho, não consigo colocar os números dentro do gráfico, na caixinha” (Aluno A). “Eu não gostei de toda hora ter que voltar no exercício dois para preencher o quadro do exercício quatro” (Aluno C). “Gostei de ver os gráficos prontos, mas não de fazer, pois não entendia que o gráfico, representava o total, só compreendi percentual com a professora explicando no quadro” (Aluno H).

Foram destinados pelo menos dois períodos para desenvolver esse conteúdo e foi percebido que a confusão centrava-se na forma de perceber a planilha. Assim essa planilha foi minimizada e criada uma nova, com a ajuda dos alunos foram construídos novos dados para novos gráficos. Apesar dos percalços houve ganho na aprendizagem pois, o empenho dos estudantes foi grande ao tentar solucionar as dificuldades. Convém destacar que nessa atividade foi necessário que os professores utilizassem o quadro e outros recursos da planilha, confirmando o que foi dito por Valente (1993) de que o docente precisa ter noções sobre os potenciais educacionais do computador, para assim ser capaz de modificar as atividades alternando-as se necessário for, hora com atividades tradicionais hora com atividades envolvendo tecnologia, em prol do aprendizado.

Na atividade 5 os estudantes usaram a planilha para construírem a reta numérica, essa atividade foi desenvolvida com certa facilidade, muitos demonstravam autonomia ao executarem os exercícios e até auxiliaram os que tinham menos habilidade. Como estavam mais familiarizadas com o software, as dificuldades de manuseio foram consideravelmente menores e a lógica da reta numérica não pareceu muito complicada para a turma.

No espaço reservado para o estudante descrever sobre o trabalho realizado, foram observados depoimentos como: “essa atividade é fácil, pois é só lembrarmos a sequência em que vão os números” (Aluno C), “com o uso da calculadora do computador fica fácil saber qual número é menor e qual é maior” (Aluno D), “me quebrei um pouquinho para diminuir ou aumentar o tamanho do retângulo pequeno” (Aluno G). Percebeu-se que os depoimentos dos estudantes, por serem realizados com frequência, ficaram mais desenvoltos, com textos que demonstravam maior clareza ao expressar a experiência vivida. Porém a maior contribuição foi a de diagnosticar no discurso dos alunos, suas experiências, seus ganhos cognitivos e a aprendizagem. Isso serviu para balizar a ação docente e apontar caminhos no curso da ação didática.

A atividade 6 foi de avaliação, não só do aprendizado dos estudantes, mas também da abrangência pedagógica do projeto, pois a tarefa exigia a demonstração da compreensão de todas as atividades propostas, favorecendo um resgate do conteúdo desenvolvido e requerendo o uso adequado de recursos já utilizados nas demais planilhas. Esse exercício foi realizado de forma individual.

Não foram identificadas dificuldades no uso dos recursos da planilha nesse exercício, inclusive a inserção de fórmulas foi feita corretamente pelos alunos.

Observou-se que eles conseguiram sem dificuldades identificar numerador e denominador, montar corretamente a fração correspondente e realizar com competência a transformação da representação fracionária para a decimal. Mas ainda apresentaram dificuldades para encontrar a fração geratriz de um número decimal e na compreensão do percentual, alguns estudantes primeiro representaram geometricamente a fração, no caderno, para depois utilizar o aplicativo.

Os conteúdos que envolveram a fração geratriz e o percentual não foram focados com ênfase durante a elaboração das seis atividades. O objetivo pretendido foi o de desenvolver um conceito abrangente de números racionais. Os conceitos de fração geratriz e porcentual devem ser trabalhados com maior detalhamento em aulas adicionais caso necessário.

A análise da atividade de avaliação mostrou que os objetivos traçados foram alcançados, pois os estudantes ao final apresentaram habilidades e conhecimento para realizar as tarefas de forma autônoma. Os depoimentos escritos depois de cada atividade serviram para reavaliar a proposta e efetuar correções de rumo permitindo assim o alcance dos objetivos propostos.

6. Considerações Finais

O objetivo de trabalho, fazer uma investigação para analisar a viabilidade de aplicação da planilha como recurso didático no ensino fundamental para o ensino aprendizagem dos números racionais. Tal intuito faz emergir constatações de que a planilha é facilmente encontrada já instalada na grande maioria dos computadores. Não é necessário estar conectado a uma rede para utilizá-la e ela tem uma curva de aprendizado relativamente rápida o que facilita o trabalho do professor, pois não precisará empenhar boa parte do tempo para que os alunos adquiram competência no seu uso. Basicamente todas as planilhas apresentam recursos semelhantes diferindo apenas em pequenos detalhes de interface. Assim se o professor ou o aluno é competente para utilizar o Excel ele poderá sem dificuldades manusear outras planilhas disponíveis no mercado pagas ou não. As atividades foram elaboradas na planilha Excel da Microsoft e no ambiente operacional Windows, contudo a aplicação com os alunos foi realizada com o uso da planilha disponível no ambiente Open Office e com o sistema operacional Linux. Não obstante a troca do aplicativo e do sistema operacional as atividades elaboradas foram desenvolvidas sem problemas e sem a necessidade de adaptações ou improvisações.

Para o desenvolvimento das atividades com a planilha percebeu-se a necessidade de um tempo preliminar para que os alunos se familiarizassem com o recurso. Outra constatação é que uma vez iniciadas as atividades no aplicativo é necessário o seu uso de forma continuada para que os temores e as dificuldades se dissipem e que isso ocorre após algumas poucas aulas.

A grande contribuição observada do uso da planilha como recurso de ensino é o trabalho colaborativo. O desafio de se apropriar e dominar a máquina entusiasma o aluno e o incentiva a trabalhar colaborativamente, pois o que a domina primeiro tem prazer em auxiliar o colega que ainda não o fez e desta forma os atritos e desavenças em sala de aula são amenizados. A aula fica mais prazerosa para todos incentivando a integração entre os estudantes e destes com o professor. Um efeito observado com esse grupo, em particular, foi a diminuição da evasão escolar, pois segundo a professora regente, alguns alunos que praticamente não frequentavam mais as aulas não faltaram uma única vez durante as atividades com o computador. Todas as atividades foram realizadas com o grupo completo dos 28 alunos da turma.

Bibliografía

Alarcão. Isabel. (2003). *Professores Reflexivos em uma Escola Reflexiva*. São Paulo: Cortez.

Borba, M. de C. & Penteado, M. G. (2001). *Informática e Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica.

Brasil. (1997). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: 1-4.* Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: 5-8.* Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2008). *PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil, ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores.* Brasília: MEC, SEF/Inep.

Brasil. (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional* (Lei nº 9.394/96 de 20 de dezembro de 1996). Diário Oficial da União. Brasília, 23 de dezembro de 1996.

Bricklin, D. (2003). *The Idea.* Recuperado em 12 de junho de 2013 de: <http://www.bricklin.com/history/saiidea.htm>.

D'ambrosio, U. (1998). *Etnomatemática.* 5ª ed. São Paulo: Ática.

D'ambrosio, U. (2003). *Educação Matemática: da teoria à prática.* 10ª ed. Campinas SP: Papirus.

De Fazzio Jr., P. J. (2002). *Microsoft Excel com Matemática Financeira*. Recuperado em 10 de junho de 2013 de: <www.defazzio.com.br>.

Flores, M. L. P. (2004). *O uso do Excel para resolver problema de operações financeiras.* Revista Renote: novas tecnologías na educação. 2(2).

Kieren, T. (1975). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers**.** In: Lesh, R. (Ed.) *Number and measurement: Paper from a research workshop.* Columbus (Ohio): ERIC/MEAC, p.101-44.

Levy, P. (1993). *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática.* Rio de Janeiro: Editora 34.

Levy, P. (1998). *A máquina universo: criação, cognição e cultura informática.* Porto Alegre: Artmed.

Ludke, M. & André, M. E. D. A. de (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU.

Moreira, L. C. G. (2008). *Planilhas convencionais e on-line: um estudo comparativo para o ensino na graduação.* 2008. 143 f. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, PUCRS, Porto Alegre.

Nonato Filho, R. (2011*). ProInfo e o ensino de matemática em Pimenta Bueno-RO: implicações e desafios.* 2011. 137 f. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, PUCRS, Porto Alegre.

Oliveira, J. V. dos S. (2009). *Investigação do recurso planilha como instrumento de mediação no ensino de funções no ensino médio para alunos com dificuldades de aprendizagem.* 2009.131 f. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, PUCRS, Porto Alegre.

Onuchic, L. de La R. & Botta, L. S. (1997). *Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais.* Revista de Educação Matemática – SBEM-SP, São José do Rio Preto/SP, 5(3), p. 5-8.

Onuchic, L. de La R. & Allevato, N. S. G. *Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.* In: Educação Matemática: pesquisa em movimento. BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. São Paulo: Cortez, 2004.

Onuchic, L. de La R. & Allevato, N. S. G. *As Diferentes "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas.* Bolema, Rio Claro-SP, Ano 21, n. 31, 2008, p. 79-102.

Piccoli, L. A. P. (2006). *A construção de conceitos em matemática: uma proposta usando tecnologia de informação.* 108 f. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, PUCRS, Porto Alegre.

POLYA, G. (1995). *A arte de resolver problemas.* Trad: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência.

Valente, J. A. (1991). Usos do computador na educação. In: *Liberando a mente: Computadores na Educação Especial*. Campinas: Unicamp, p. 16-31.

Valente, J. A. (1993). *Computadores e Conhecimento: repensando a educação. Por que o computador na educação***.** Gráfica central da Unicamp, Campinas-SP**.**

Viali, L. (2004). Utilizando Recursos Computacionais (Planilhas) No Ensino De Cálculo De Probabilidades (capítulo 13). In: *Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores: Reflexões, Relatos, Propostas.* Helena Noronha Cury (org.). Porto Alegre: EDIPUCRS. p. 351-95.

Viali, L. (2005) *O ensino de probabilidade com recurso da planilha.* V CIBEM (Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática). Porto, Portugal.

Viali, L. (2006). *Planilhas.* Recuperado em: 12 de junho de 2013 de: <http://www.pucrs.br/famat/statweb/computacional/planilhas/planilhas.htm>.

Eliane Maria Hoffmann Velho, Licenciada em Matemática pela FACCAT (FAculdades Integradas de Taquara, RS). Mestre pelo PPGEDUCEM (Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática da PUCRS). Bolsista FAPERGS/CAPES. Professora de Matemática na E. M. E. F. Presidente Vargas de Gramado, RS. - **lihoffmann@hotmail.com**

Clair Teresinha de Souza, licenciada em Matemática pela FAPA, Pós-graduada em Geometria Analítica e Espacial pela CESUCA. Mestranda do PPGEDUCEM (Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática da PUCRS). Professora de Matemática no Colégio Marista Graças em Viamão, Rs
clair_desouza@yahoo.com.br

Lorí Viali, doutor em Engenharia de Produção pela UFSC com sanduíche na USF (*University of South Florida*), EUA. Professor permanente do curso de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática da PUCRS. Professor titular da Faculdade de matemática da PUCRS. Professor Associado do Instituto de Matemática da UFRGS. **viali@pucrs.br, viali@mat.ufrgs.br, http://www.pucs.br/famat/viali**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 97-109

Impacto Escolar de la Metodología Basada en Algoritmos ABN en Niños y Niñas de Primer Ciclo de Educación Primaria

Rafael Bracho-López, Mª del Carmen Gallego-Espejo, Natividad Adamuz-Povedano, Noelia Jiménez-Fanjul

Fecha de recepción: 18/11/2013
Fecha de aceptación: 22/07/2014

Resumen	El desarrollo del sentido numérico en general y particularmente el aprendizaje de las operaciones aritméticas básicas constituyen un pilar fundamental para el conocimiento matemático en los primeros años de aprendizaje. Por otro lado, la idoneidad de los algoritmos tradicionales para el desarrollo de la competencia matemática en la actualidad es algo que se viene cuestionando en las últimas décadas. En el presente trabajo nos centramos en analizar el desarrollo de las competencias numéricas en un grupo de alumnos al finalizar el primer ciclo de Educación Primaria, tras haber utilizado como alternativa metodológica para el aprendizaje del cálculo los denominados algoritmos abiertos basados en números (ABN). **Palabras clave**: Sentido Numérico. Algoritmos Tradicionales. Algoritmos ABN. Competencia Matemática. Matemática Formal e Informal..
Abstract	Certainly the development of number sense in general and particularly the learning of basic arithmetic operations are a fundamental pillar for the mathematical knowledge in early learning years. On the other hand, nowadays, the suitability of traditional algorithms for the development of mathematical competence is something very questioned in the last decades. In this paper we focus on analysing the development of numerical skills in a student's group after the first cycle of primary education, having used as a methodological alternative for calculation learning the algorithms called open algorithms based on numbers (ABN). **Keywords**: Number Sense. Traditional Algorithms. ABN Algorithm. Mathematical Literacy, Mathematics Formal and Informal.
Resumo	O desenvolvimento do sentido do número, em geral, e em particular a aprendizagem de operações aritméticas básicas são um conhecimento matemático fundamental no pilar aprendizagem precoce. Além disso, a adequação dos algoritmos tradicionais para o desenvolvimento de competência matemática, hoje, é algo que tem sido questionada nas últimas décadas. Neste artigo vamos nos concentrar na análise do desenvolvimento das habilidades numéricas em um grupo de alunos após o primeiro ciclo do ensino básico, tendo utilizado como metodologia alternativa para a aprendizagem chamados algoritmos de cálculo abertas com base em números (ABN). **Palavras-chave:** Senso numérico. Algoritmos tradicionais. Algoritmos ABN. Alfabetização matemática. Matemática formal e informal.

1. Introducción

Corren tiempos de transformación y de cambio en el panorama educativo. Tiempos que se corresponden con los cambios frenéticos que nuestra sociedad está experimentando. Un chico o una chica de los que nos encontrábamos en las aulas hace unas décadas tenía unas necesidades de aprendizaje y educativas muy diferentes a las que tiene un estudiante de hoy día (Bracho, 2001).

En el caso de las matemáticas escolares y más concretamente en lo relativo al dominio del cálculo en los primeros años de aprendizaje matemático, son muchas las voces que se alzan pidiendo cambios metodológicos. Hace más de cuarenta años Ablewhite (1971) ya advertía de los problemas que se derivaban del aprendizaje de las operaciones básicas. Pocos años más tarde la aparición de las calculadoras hizo que comenzara a cuestionarse la enseñanza de los algoritmos tradicionales y su papel en la escuela (Barba y Calvo, 2011; Castro, Rico y Castro, 1987), y desde entonces han sido muy numerosos los autores que han escrito sobre el poco sentido pedagógico que los algoritmos tradicionales tienen en la actualidad (Martínez, 2011).

Ante esta realidad, tanto los referentes universales sobre educación matemática como los marcos normativos actuales de los países desarrollados, inciden en la importancia de fomentar en los escolares el desarrollo del denominado “sentido numérico”, entendido este como un concepto amplio que hace referencia al desarrollo de capacidades tan importantes como el cálculo mental flexible, la estimación numérica y el razonamiento cuantitativo, entre otras (Greeno, 1991), todo ello con un enfoque orientado hacia el desarrollo de la competencia matemática (García et al., 2011).

¿Pero cómo podría hoy día un maestro o maestra o, mejor un colegio, lanzarse a la aventura de afrontar metodológicamente el aprendizaje de las operaciones aritméticas básicas de una manera distinta a la tradicional y adecuada a los tiempos que corren? Sin duda lo ideal sería que las administraciones educativas fuesen las que marcasen los hitos a seguir ofreciendo las herramientas necesarias para el cambio metodológico. En algunos países de nuestro entorno ya se vienen dando pasos decisivos en este sentido desde hace años con muy buenos resultados y los modelos desarrollados podrían servirnos de referencia. Un buen ejemplo a seguir es el caso holandés, seguido en otros países del entorno europeo (Heuvel-Panhuizen, 2000). Sin embargo, en la mayoría de los casos resultaría utópico esperar que todo nos llegue argumentado y pautado desde el propio sistema educativo. Más bien, históricamente está demostrado que los cambios metodológicos parten de las prácticas innovadoras que se sustentan en las investigaciones educativas (García et al., 2011).

Buenos ejemplos a seguir tomados de nuestro entorno más cercano pueden ser las experiencias basadas en “aritmética mental” auspiciadas por David Barba y Cecilia Calvo en Cataluña (Barba y Calvo, 2011); el caso del CEIP Aguamansa de La Orotava en Tenerife, basado en el uso didáctico de la calculadora y el fomento del cálculo mental, exportado a otros centros canarios y peninsulares (Iglesias y Martín, 2011), o la metodología basada en algoritmos abiertos basados en números (en adelante ABN), ideada por Jaime Martínez Montero, puesta en marcha inicialmente en varios centros de la provincia de Cádiz y actualmente en prometedora fase de expansión dentro y fuera de Andalucía e incluso en Sudamérica y Europa (Martínez, 2011). Todas estas experiencias comparten características comunes, como que se basan en un conocimiento profundo del sistema de numeración decimal (en adelante SND), se trabaja con números en todo su sentido y no con cifras aisladas, se utilizan constantemente las propiedades de las operaciones, los cálculos se realizan de forma personalizada y toman su sentido a partir de situaciones problemáticas contextualizadas. En el presente trabajo nos centraremos en analizar el impacto escolar de una de estas metodologías: los algoritmos ABN.

Martínez (2001) cree en la necesidad de la utilización de un nuevo método que desarrolle el sentido numérico en el alumnado mejorando el cálculo mental. Esta nueva metodología está basada en la utilización de los denominados Algoritmos ABN. Este nombre no se le ha puesto a estos algoritmos de forma caprichosa sino que las siglas corresponden a las características más significativas del método. La primera letra, la A, corresponde al término “abiertos”, ya que no hay una forma única de realizarlos y cada estudiante puede solucionarlos de manera flexible en función de su desarrollo y dominio del cálculo. La B y la N nos indican que son “basados en números”, al contrario de los algoritmos tradicionales que están basados en cifras, en el sentido de que desgajan todas las cifras que contiene el número y a todas se les da idéntico tratamiento (Martínez, 2010).

Estas características de los algoritmos ABN hacen que sea más fácil el enlace con los procesos intuitivos naturales de los estudiantes, desarrollando un enfoque dinámico del sentido del número. Además, son transparentes en el sentido de que no encierran ni ocultan cálculos ni procesos intermedios. Por ello Martínez (2013) afirma que estos algoritmos son una alternativa actual para un aprendizaje significativo de las operaciones aritméticas orientado hacia el desarrollo de la competencia matemática.

El conocimiento matemático puede dividirse en informal y formal. Las matemáticas informales se refieren a conceptos y procedimientos adquiridos fuera del contexto escolar, mientras que las formales se refieren a las habilidades y conceptos que el niño aprende en el aula. Las investigaciones apoyan que el conocimiento matemático de los niños se desarrolla como resultado de experiencias tanto informales como formales (Ginsburg, 1989).

Nuestro objetivo en este trabajo es analizar el desarrollo del sentido numérico en general y de manera más específica en los aspectos relacionados con la matemática formal e informal, tras la utilización de la metodología basada en los algoritmos ABN, contrastándolo con el que se consigue con la inspirada en el uso de los algoritmos tradicionales. A partir de dicho objetivo general, nuestra hipótesis de trabajo es que la metodología basada en la utilización de los algoritmos ABN mejora de forma significativa el desarrollo del sentido numérico y de la competencia matemática en los primeros años del aprendizaje matemático.

2. Metodología

Nuestra investigación se centra en situaciones concretas, particularizando los resultados y ofreciendo una perspectiva contextualizada a través de técnicas descriptivas e inductivas. Desde un enfoque empírico analítico se trata de una investigación cuantitativa con un diseño cuasi-experimental donde se ha realizado un estudio descriptivo e inferencial con dos grupos no equivalentes.

La muestra está formada por sendos grupos de estudiantes de Educación Primaria de dos colegios de la provincia de Córdoba. Ambos centros tienen características parecidas y pertenecen a entornos socioeconómicos similares aunque difieren en que no están en el mismo ámbito urbano, uno pertenece a Córdoba capital y otro a un pueblo de esta misma provincia.

Esta muestra ha sido configurada de manera no probabilística y no aleatoria, es decir, hemos realizado la elección de estos grupos de estudiantes por el acceso que tenemos a ellos, ya que la participación es voluntaria y sujeta a la predisposición de estos.

El alumnado de uno de los centros siguió durante el primer ciclo de Educación Primaria la metodología basada en los algoritmos ABN, mientras que el alumnado del otro colegio utilizó los algoritmos de cálculo tradicionales, por lo que el primer grupo ha sido considerado grupo experimental y el segundo grupo de control. Hemos de comentar que cada grupo ha estado formado por 26 alumnos, pero en el grupo experimental se encontraron seis niños con necesidades educativas específicas, mientras que en el grupo de control no había ninguno, por lo que se optó por no incluir al alumnado de estas características en el estudio comparativo general, si bien sí se estudiaron esos casos por separado aunque su análisis no sea objeto de este trabajo.

La interpretación de los datos se ha basado en la realización del test de competencia matemática básica, desarrollado por Ginsburg y Baroody y adaptado al medio español por Núñez y Lozano (2007). Se trata de un test estandarizado específico de matemáticas y validado a nivel internacional, el cual se aplica de manera individualizada y cuyo objetivo es evaluar el desarrollo del pensamiento matemático temprano y detectar las dificultades de aprendizaje del alumnado, facilitando el diagnóstico y el tratamiento de las mismas.

La variable dependiente que se ha analizado ha sido el sentido numérico del alumnado, y para cuantificar esta variable nos hemos ayudado de una serie de variables específicas, como son el índice de competencia matemática (en adelante ICM), la puntuación directa (PD), el percentil, la edad y el curso equivalentes, variable ítem i (i Є [1,72]), además de los conocimientos matemáticos formales e informales de cada discente, que se desglosan en los aspectos que se describen más tarde en la tabla 4. Como variable independiente tenemos la variable grupo que clasifica al alumnado del estudio en grupo de control y grupo experimental.

3. Análisis de resultados

Al tratarse de una tarea de cierta complejidad, la aplicación de los tests ha sido realizada por evaluadores entrenados para tal fin, ya que entre otras cosas, para cada alumno había que contar con las condiciones adecuadas, seleccionar los ítems de partida en función de su edad exacta, así como los que constituyen los denominados “suelo” y “techo”, que determinan en cada caso el intervalo del que se extraerán las conclusiones acerca de la competencia matemática en general y de los aspectos concretos de la matemática formal e informal de cada niño en particular. Estos datos personales han sido de gran valía para las maestras de

Total	20	100,0	26	100,0

cada grupo; sin embargo, no serán tenidos en cuenta como tales en el presente estudio, sino que nos centraremos en los resultados grupales para extraer nuestras conclusiones.

3.1. Índice de competencia matemática

En la tabla 1 se ofrecen los rangos, las medias y las desviaciones típicas de las puntuaciones estándar, que denominamos "Índices de Competencia Matemática", ya que dicho parámetro ofrece una información bastante fiel de la competencia matemática de cada estudiante dependiendo de su edad en comparación con su grupo de referencia (Ginsburg y Baroody, 2007):

Tabla 1. Estadísticos descriptivos del ICM en ambos centros

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desviación típica
Grupo Experimental Índice de competencia matemática(ICM)	20	75	137	**111,25**	17,559
Grupo de Control Índice de competencia matemática(ICM)	26	64	116	**96,08**	16,287

Como puede observarse a primera vista, la media del ICM del grupo experimental es bastante superior; no obstante, debemos comprobar si dicha diferencia es significativa. Por otro lado, se aprecia una dispersión considerable, lo que es indicativo de una gran diversidad entre el alumnado de ambos grupos a pesar de haber excluido a los chicos con necesidades educativas especiales.

Si nos centramos en la interpretación del ICM por niveles, obtenemos los siguientes resultados:

Tabla 2. Datos del ICM por niveles

	Índice de Competencia Matemática			
	Grupo Experimental		Grupo de Control	
	Frecuencia	Porcentaje (%)	Frecuencia	Porcentaje (%)
Muy superior > 130	2	10	0	0
Superior [121, 130]	7	35	0	0
Por encima [111, 120)	1	5	6	23,1
Medio [90, 110)	8	40	12	46,2
Por debajo [81, 90)	1	5	3	11,5
Pobre [70, 80)	1	5	2	7,7
Muy pobre < 70	0	0	3	11,5
Total	20	100,0	26	100,0

Observamos que los mayores porcentajes de alumnos en uno y otro caso (40% y 46,2% respectivamente) obtienen un ICM medio, que podemos considerar adecuado a su edad. Sin embargo, en el caso del grupo de control, el 30,7% tiene valores inferiores y el 23,1% superiores, mientras que en el experimental, tan solo encontramos a 2 alumnos con niveles inferiores a los considerados medios y la mitad de los chicos del grupo obtienen niveles superiores a estos.

Pero veamos, si como decíamos antes, estas diferencias que apreciamos son significativas. Al aplicar la prueba de Kolmogorov-Smirnov para los ICM de los dos colegios se obtuvieron significaciones mayores que 0,05 en ambos casos, por lo que podemos afirmar que esta variable se ajusta a una distribución normal y por tanto tiene sentido aplicar la prueba paramétrica de T de Student. La hipótesis nula, H0, sería que no tenemos evidencias de que las diferencias entra las medias del ICM sean significativas, mientras que la H1 sería que habría evidencias de que sí lo son.

Tabla 3. Prueba paramétrica T de Student para igualdad de medias

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias		
		F	Sig.	t	gl	Sig. bilateral
ICM	Se asumen varianzas iguales	,400	**,530**	3,028	44	**,004**
	No se asumen varianzas iguales			2,998	39,368	,005

Como la significación obtenida para la prueba de Levene para igualdad de varianzas es de 0,530 y resulta por tanto mayor que 0,05, podemos asumir que las varianzas son iguales. El resultado de la prueba T de Student (0,004) es menor que la significación que asumimos para el estudio (0,05), por lo que aceptamos la hipótesis alternativa (H1), es decir, tenemos evidencias de que hay diferencias significativas entre las medias del ICM de ambos centros.

3.2. Matemática formal e informal

Más allá de los aspectos generales analizados hasta ahora, resultaría interesante ofrecer información acerca del nivel de desarrollo específico en lo referente a los aspectos fundamentales de la matemática formal e informal. En la tabla 4 se presentan los aspectos concretos que hemos estudiado dentro de estos dos grandes apartados, con indicación de los ítems dedicados a cada uno de ellos:

Tabla 4. Aspectos analizados en el estudio realizado

Matemática informal		Matemática formal	
Numeración	23 ítems	Convencionalismo	8 ítems
Comparación	6 ítems	Hechos numéricos	9 ítems
Cálculo informal	8 ítems	Cálculo formal	9 ítems
Conceptos informales	4 ítems	Conceptos formales	5 ítems
Total de ítems	72 ítems		

Estas habilidades se refieren (Ginsburg y Baroody, 2007):

- *Numeración:* Supone el dominio de la secuencia numérica verbal y su aplicación a la determinación de la cardinalidad de conjuntos.
- *Comparación de cantidades:* El conocimiento del "orden" va ligado a la comprensión intuitiva de hacia donde crecen los números o estos se hacen menores. Con un desarrollo adecuado los niños serán capaces de establecer distancias relativas entre cantidades.
- *Cálculo informal:* Se refiere al manejo de los números en situaciones sencillas que implican sumar y restar. Se parte del uso de estrategias de conteo básicas, para en la fase final afrontar la resolución de cálculos de forma mental, es decir, sin el uso de algoritmos.
- *Conceptos informales:* Se refieren a los conocimientos previos, naturales e intuitivos que los niños poseen sobre el conteo, la numeración, incluso ciertas estrategias de cálculo, etc.
- *Convencionalismos:* Básicamente se centran en la valoración de la capacidad de lecto-escritura de cantidades.
- *Hechos numéricos:* Implican el conocimiento del resultado de operaciones aritméticas sencillas (suma, resta y multiplicación) sin necesidad de realizar el cálculo, es decir, el resultado debe conocerse de manera inmediata.
- *Cálculo formal:* Supone la realización de cuentas de suma y resta de dificultad creciente, incluyendo la consideración de "llevadas" y los "ceros intermedios".
- *Conceptos formales:* Se refieren a los conocimientos matemáticos introducidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula. Las actividades que se plantean son del tipo: ¿Qué expresiones numéricas son correctas para un problema determinado? o ¿cuál es el menor número de una cifra o el mayor de dos cifras?, etc.

Pues bien, analizando los ítems correspondientes a cada uno de estos aspectos se observan diferencias considerables entre los dos grupos de escolares, pero también habría que analizar si pueden considerarse o no significativas estas diferencias.

Al aplicarle la prueba de Kolmogorov-Smirnov a las variables de matemática informal y a las de matemática formal obtuvimos que ninguna de las primeras se ajustaban a la distribución normal, mientras que entre las de matemática formal, si se ajustaban los hechos numéricos y el cálculo formal y no lo hacían los convencionalismos y los conceptos formales.

Por ello, se optó por aplicar la prueba paramétrica T de Student en los dos casos que había ajuste, y en el resto de variables se aplicó la no paramétrica U de Mann-Whitney. La Tabla 5 muestra el resumen de las puntuaciones obtenidas en cada grupo:

Tabla 5. Test de diferencias de los estadísticos descriptivos para las variables de matemática informal y formal

Componentes del TEMA-3	Grupo Experimental		Grupo Control			
	X	s	X	s	t	p
Numeración	22,45	0,759	21,88	0,766	U de M-W[5]	**0,008 d.s.**[6]
Comparación	5,55	0,510	5,31	0,549	U de M-W	0,143 d.n.s[3]
Cálculo Informal	6,70	1,261	5,62	0,941	U de M-W	**0,004 d.s.**[2]
Conceptos Informales	3,75	0,550	3,46	0,582	U de M-W	0,054 n.d.s.[7]
Convencionalismos	7,9	0,308	7,5	0,762	U de M-W	**0,028 d.s.** [2]
Hechos Numéricos	6,3	2,577	4,42	1,793	2,780	0.09 d.n.s[3]
Cálculo Formal	6,70	2,430	5,62	2,418	1,505	0,139 d.n.s[3]
Conceptos Formales	3,05	1,099	1,81	0,939	U de M-W	**0,000 d.s.** [2]

Podemos observar que tenemos evidencias de que existen diferencias significativas entre las medias de las variables numeración, cálculo informal, convencionalismos y conceptos formales, pero no en las otras cuatro variables. Sin duda resultaría provechoso el análisis de los datos de todas las variables, ya que pensamos que de ellos se extraen conclusiones interesantes; sin embargo, nos centraremos en los resultados de estas cuatro variables en las que se han detectado diferencias significativas y, si acaso, también podríamos estudiar los datos sobre cálculo formal, dado su significado en el análisis comparativo entre las metodologías tradicional y ABN.

Como comentamos, los ítems sobre numeración se centran en el dominio del conteo y en el conocimiento informal del SND. Los resultados sobre esta variable se recogen en la Tabla 6. En ella puede observarse que el 60% del alumnado del grupo experimental responde correctamente a los 23 ítems mientras que solo el 11,5% del alumnado del grupo de control lo consigue. En este colegio el mayor porcentaje se encuentra en 73,1% correspondiente a responder correctamente 22 ítems. Las diferencias se dan concretamente en los ítems 37 y 45, que se refieren al dominio regresivo de la serie numérica en las primeras decenas y a las transiciones entre decenas a partir de la centena, respectivamente.

Tabla 6. Ítems respondidos correctamente sobre numeración

	Numeración (23 ítems)		
	Ítems respondidos correctamente	Número de alumnos	Porcentaje
Grupo experimental	21	3	15
	22	5	25
	23	12	60
	Total	20	100
Grupo de control	19	1	3.8
	21	3	11.5
	22	19	73.1
	23	3	11.5
	Total	26	100

Pensamos que el aprendizaje significativo del SND, al que se le da una particular importancia en el caso de la metodología ABN, abordándose sistemáticamente de la mano de unos materiales manipulativos concretos, junto con el fomento del cálculo mental, son elementos que refuerzan estos aspectos del conocimiento matemático provocando estas diferencias.

En cuanto al cálculo informal, el 40% del alumnado del grupo experimental responde correctamente a todos los ítems relacionados con el cálculo informal, mientras que tan solo un estudiante del grupo de control consigue hacerlo. En este colegio el mayor porcentaje (53,8%) corresponde al de los estudiantes que responden correctamente 5 ítems.

Tabla 7. Ítems respondidos correctamente sobre cálculo informal

	Cálculo informal (8 ítems)		
	Ítems respondidos correctamente	Número de alumnos	Porcentaje (%)
Grupo experimental	5	5	25
	6	4	20
	7	3	15
	8	8	40
	Total	20	100
Grupo de control	4	1	3.8
	5	14	53.8
	6	6	23.1
	7	4	15.4
	8	1	3.8
	Total	26	100

El buen conocimiento del SND y de las propiedades de los números y de las operaciones, también repercute sobre las habilidades formales a la hora de leer, escribir y representar los números, así como en la comprensión de los conceptos numéricos que se introducen en el aula en los primeros años de aprendizaje matemático. Así, en el caso de los 8 ítems dedicados a las habilidades en lectoescritura y representaciones numéricas, el 90 % del alumnado del grupo del grupo experimental responde correctamente, mientras que este porcentaje se reduce al 61,5 % en el caso del grupo de control.

Tabla 8. Ítems respondidos correctamente sobre convencionalismos

	Convencionalismos (8 ítems)		
	Items respondidos correctamente	Nº alumnos/as	Porcentaje (%)
Grupo Experimental	7	2	10
	8	18	90
	Total	20	100
Grupo de control	5	1	3,8
	6	1	3,8
	7	8	30,8
	8	16	61,5
	Total	26	100

Los ítems relacionados con conceptos formales se refieren a la representación escrita, los conceptos de decena, centena y millar y a la propiedad de conmutatividad, cuestiones muy relacionadas también con el conocimiento profundo del SND y sus propiedades.

De las 5 preguntas que evalúan estos aspectos, el 45% del alumnado del grupo experimental responde correctamente a 4 o más en comparación con el 7,7% de estudiantes del grupo de control que lo consigue. Además, el 46,2% de este último colegio solo responde a una de estas preguntas, que son de las que más dificultad entrañan del test.

Tabla 9. Ítems respondidos correctamente sobre conceptos formales

	Conceptos formales (5 ítems)		
	Ítems respondidos correctamente	Nº alumnos/as	Porcentaje (%)
Grupo Experimental	1	1	5
	2	7	35
	3	3	15
	4	8	40
	5	1	5
	Total	20	100
Grupo de control	1	12	46,2
	2	9	34,6
	3	3	11,5
	4	2	7,7
	Total	26	100

Aunque en conjunto no se hayan observado diferencias significativas entre los grupos en las preguntas relacionadas con cálculo formal, analicemos los datos relativos a este aspecto, ya que pensamos que pueden revelar aspectos de interés (Tabla 10).

El 30% del alumnado del grupo experimental responde correctamente a todos los ítems que evalúan esta variable, mientras que este porcentaje se reduce a un 11,5% en el caso del alumnado del grupo de control. En este colegio el mayor porcentaje de alumnos (19,2%) tan solo responde correctamente a dos ítems de este apartado.

Por otro lado, en las preguntas que se corresponden con meros cálculos algorítmicos sencillos no se aprecian grandes diferencias, pero las diferencias de rendimiento son más evidentes en las sumas y restas con llevada y en los ítems relativos a situaciones problemáticas que conllevan cálculos mentales. Ante dichas situaciones se aprecia que los estudiantes que han trabajado el método tradicional se encuentran con dificultades al intentar representar mentalmente las operaciones como una cuenta de lápiz y papel y resolverlo de igual manera, por lo que los resultados que obtenían además de ser más lentos fueron, en la mayoría de los casos, erróneos. En cambio, el alumnado que ha trabajado el cálculo ABN opera directamente de izquierda a derecha haciendo valer su destreza obtenida con la utilización de material manipulativo además de la realización de las operaciones con un sentido numérico adecuadamente desarrollado.

Tabla10. Ítems respondidos correctamente sobre cálculo formal

	Cálculo formal (9 ítems)		
	Ítems respondidos correctamente	Nº alumnos/as	Porcentaje
Grupo Experimental	1	1	5
	2	1	5
	4	2	10
	5	1	5
	6	3	15
	7	2	10
	8	4	20
	9	6	30
	Total	20	100
Grupo de control	2	5	19,2
	3	1	3,8
	4	3	11,5
	5	2	7,7
	6	4	15,4
	7	4	15,4
	8	4	15,4
	9	3	11,5
	Total	26	100

4. Conclusiones

En términos generales y a la vista de los resultados obtenidos se puede determinar que la competencia matemática desarrollada por el grupo de alumnos y alumnas del grupo experimental (grupo que han seguido la metodología basada en los algoritmos ABN) es superior a la desarrollada por el grupo de control (grupo que ha seguido la metodología basada en los algoritmos tradicionales). En este sentido creemos que nuestra hipótesis de trabajo, a saber: la metodología basada en la utilización de los algoritmos ABN mejora de forma significativa el desarrollo del sentido numérico y de la competencia matemática en los primeros años de aprendizaje matemático, se ha visto cumplida.

Estas diferencias se observan en todos los aspectos de la matemática formal e informal (numeración, comparación, convencionalismo, hechos numéricos y conceptualización y cálculo, tanto formal como informal), si bien solo se pueden considerar estadísticamente significativas en numeración y cálculo, en el caso de la matemática informal, y en convencionalismos y conceptualización, en el caso de la matemática formal. Ello demuestra que la metodología objeto de estudio, no solo mejora los aspectos formales del conocimiento matemático, sino que de manera colateral refuerza los no formales de forma considerable.

Centrándonos en el bloque de cálculo, tanto formal como informal, unos contenidos que se han trabajado de forma más mecánica en el caso del grupo de control, frente a la metodología basada en la comprensión del sistema de numeración decimal y en las propiedades de los números y de las operaciones, propia de los algoritmos ABN, los resultados del grupo experimental han sido notablemente superiores en general, y de manera particular en lo que respecta al cálculo mental y a los cálculos asociados a situaciones problemáticas concretas, hecho que apoya los resultados obtenidos en su día por el propio Martínez (2011), creador de los algoritmos ABN, cuando concluía que ni siquiera el adiestramiento mecánico y repetitivo puede superar la velocidad y la efectividad que se alcanzan al realizar las operaciones con sentido y de manera reflexiva. Especial significado por su relevancia como eje vertebrador del conocimiento matemático, tienen los resultados relativos a las destrezas en la resolución de problemas, donde se pone de manifiesto la importancia de abordar los cálculos de manera comprensiva en el contexto de la situación problemática, ya que si se utilizan técnicas sistemáticas alejadas de la realidad del problema se corre el riesgo de perderse en el proceso.

En resumen, pensamos que de los resultados obtenidos en la investigación se desprende la importancia de encontrar hoy día alternativas metodológicas que aborden el aprendizaje del sistema de numeración decimal y de las operaciones aritméticas básicas de manera significativa y comprensible, frente a las metodologías basadas en los algoritmos tradicionales, cuyos mecanismos son sin duda incomprensibles para el alumnado en toda la enseñanza primaria y especialmente en los primeros años de aprendizaje, además de carecer de mucho sentido, puesto que su aplicación actual fuera del entorno escolar es muy escasa, por no decir prácticamente nula. Particularmente y con independencia de que puedan existir otras metodologías idóneas, la basada en la utilización de los denominados algoritmos ABN se muestra como una alternativa metodológica que responde a los objetivos actuales en lo relativo al desarrollo del sentido numérico y a la orientación de este hacia el desarrollo de la competencia matemática.

Se nos plantean las futuras líneas de trabajo siguientes:

- Estudiar los aspectos motivacionales del alumnado y del profesorado durante el proceso de implementación en el aula de la metodología ABN, algo que puede resultar determinante en los primeros años de aprendizaje matemático.
- Analizar el impacto de la utilización del método ABN en la formación del profesorado, tanto permanente como inicial.
- Analizar el impacto escolar de la metodología basada en los algoritmos ABN en niños y niñas con necesidades educativas especiales.
- Analizar otras metodologías que poseen características similares a la basada en los algoritmos ABN.

5. Bibliografía

Ablewhite, R. C. (1971). Las matemáticas y los menos dotados. Madrid: Ediciones Morata.

Barba, D. y Calvo, C. (2011). Sentido numérico, aritmética mental y algoritmos. En J. E. García y J.L. Álvarez (Eds.), Elementos y razonamientos en la competencia matemática (pp. 47- 78). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Bracho, R. (2001). El Gancho Matemático. Granada. Port Royal.

Castro, E., Rico, L., y Castro, E. (1987). Números y operaciones (Vol. 2). Madrid: Síntesis.

García, T.; Bracho, R.; Maz, A.; Lucena, M.; Hidalgo, M.D.; Adrián, C., y Jiménez, N. (2011). Una comunidad de investigación orientada al aprovechamiento de recursos didácticos para el desarrollo del sentido numérico en niños y niñas de primer ciclo de Educación Primaria. En J.L. Lupiáñez, M.C. Cañadas, M. Palarea y A. Maz (Eds.), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática (pp. 113-121). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Ginsburg, H. (1989). Children´s arithmetic (2 edition). Austin, TX: PRO-ED.

Ginsburg, H., y Baroody, A. J. (2007). Tema-3: test de competencia matemática básica (M. C. Núñez del Río y I. Lozano Guerra, Trans.). Madrid: TEA Ediciones.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. Journal for research in mathematics education, 22(13), 170-218.

Heuvel-Panhuizen, M. V. D. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Instituto Freudenthal (CD-ROM). Utrecht: ICME9, Universidad de Utrecht.

Iglesias, J. M. y Martín A.R. (2011). Algorismes personals per al desenvolupament del càlcul mental: una experiència real. Perspectiva escolar, 355, 46-53.

Martínez, J. (2001). Los efectos no deseados (y devastadores) de los métodos tradicionales de aprendizaje de la numeración y de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas. Epsilón, 49, 13-26.

Martínez, J. (2010, 11 de Junio de 2013). ¿Que es eso de ABN? [http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2010/2004/que-es-eso-de-abn.html].

Martínez, J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). Bordón. Revista de pedagogía, 63(4), 95-110.

Martínez, J. (2013). La atención a la diversidad en el área de matemáticas. Un enfoque metodológico y curricular. Valladolid: La Calesa.

Rafael Bracho López. Doctor en Educación Matemática. Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Córdoba. Líneas de investigación: Desarrollo del sentido numérico y Evaluación de la producción científica. **rbracho@uco.es**

Mª del Carmen Gallego Espejo. Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Escuela Universitaria “Sagrada Familia” de Úbeda (Jaén). Línea de investigación: Desarrollo del sentido. **maycargallegoespejo@gmail.com**

Natividad Adamuz Povedao. Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Córdoba. Líneas de investigación: Desarrollo del sentino numérico y Evaluación de la producción científica. **nadamuz@uco.es**

Noelia Jiménez Fanjul. Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Córdoba. Líneas de investigación: Desarrollo del sentido numérico y Evaluación de la producción científica. **noelia.jimenez@uco.es**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 111-133

Dinamización Matemática:

O ensino de medidas de áreas com o enfoque CTS

Carlos Teles de Miranda, Guataçara dos Santos Junior, Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro

Fecha de recepción: 9/02/2013
Fecha de aceptación: 3/04/2014

Resumen	El objetivo de este estudio es analizar las contribuciones del enfoque Ciencia, Tecnología y Sociedad -CTS- para la enseñanza y el aprendizaje de medidas de áreas. La investigación ocurrió en una clase del 2 º año del curso de Licenciatura Plena en Matemática de una Universidad ubicada en la región sur de Brasil y siguió la orientación del enfoque CTS con la modalidad inserción. Las actividades fueron aplicadas como talleres. Esta investigación es caracterizada como aplicada y los datos colectados han sido analizados de forma cualitativa. Los resultados han mostrado que los estudiantes se involucran de modo interesante al discutir, de manera crítica y comprometida, las situaciones presentes en el cotidiano involucrando la matemática y el enfoque CTS. **Palabras clave**: enfoque CTS, discusión crítica.
Abstract	This work´s aim is to analyse the contributions of Science, Technology and Society approach – STS to teaching and learning measuring areas. The research took place with a second grade class of Math teaching degree in a university located in South of Brazil and followed the assumptions of STS approach with the insertion modality. The activities were applied as workshops. This is an applied research and the collected dada were analysed qualitatively. The results showed an interesting participation of the students when they discussed critically and with engagement situations present in daily routine involving math and the STS approach. **Keywords**: STS approach, discussed critically.
Resumo	Este trabalho tem como objetivo analisar as contribuições do enfoque Ciência, Tecnologia e Sociedade - CTS para o ensino e aprendizagem de medidas de áreas. A pesquisa aconteceu em uma turma do 2º ano do curso de Licenciatura Plena em Matemática de uma Universidade localizada na região sul do Brasil e seguiu os pressupostos do enfoque CTS com a modalidade enxerto. As atividades foram aplicadas sob o formato de oficinas. Esta pesquisa é caracterizada como aplicada e os dados coletados foram analisados de forma qualitativa. Os resultados mostraram um envolvimento interessante dos alunos ao discutirem, de maneira crítica e engajada, situações presentes no cotidiano envolvendo a matemática e o enfoque CTS. **Palavras-chave:** enfoque CTS, discutirem crítica.

1. Introdução

O desenvolvimento desse trabalho esteve pautado na preocupação em romper com a maneira extremamente tradicional de ensinar a matemática. Em proporcionar o aprendizado da matemática de modo crítico, mas com embasamento teórico para que a criticidade refletisse principalmente no entorno social do aluno.

Considerando que a matemática está presente nas diversas áreas do conhecimento e que isso deve ser elemento propulsor para a criação ou elaboração de estratégias de ensino que contemplem de forma eficaz a aprendizagem, as reflexões foram se concretizando por esse viés.

Com base em consultas bibliográficas foram encontrados os direcionamentos dados pelo documento Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), do Brasil. Os PCNEM mencionam, de modo geral, que o ensino de matemática deve ocorrer de forma abrangente e catalisadora, envolvendo a matemática com a Ciência e a Tecnologia. Este ensino deve proporcionar ao educando a possibilidade de fazer ligações com as Ciências da Natureza e as Sociais de modo que este aluno se torne crítico e ético, consciente de sua existência, buscando a transformação social.

Logo, a matemática ensinada na escola deve ser apresentada de maneira que o aluno possa efetivamente saber onde ela é ou poderá ser utilizada e quais motivos levaram a uma determinada utilização. A matemática deve possibilitar ao aluno, conforme os PCNEM, a percepção da mesma como um sistema composto por “códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la” (Brasil, 2000, p. 40).

Nos PCNEM a sugestão é que os trabalhos envolvendo a matemática a ciência e a tecnologia aconteçam com as devidas conexões, apresentando ao aluno como ocorre tal ligação. Se existe uma dependência entre elas, caso contrário, que sejam então apresentadas suas inter-relações. Bastante coerente com os fatos esboçados nos PCNEM é a proposta de ensino sob o enfoque Ciência, Tecnologia e Sociedade - CTS. Ao mencionar tal enfoque (Bazzo, 2002, p. 93) diz que “em linhas gerais, CTS pode ser entendido como uma área de estudo onde a preocupação maior é tratar a ciência e a tecnologia tendo em vista suas relações, consequências e respostas sociais”. O enfoque CTS com fatos ou assuntos controversos poderá proporcionar um ambiente mais dinâmico para o aprendizado.

O enfoque CTS agrega valor ao ensino da matemática por proporcionar uma ampla visualização da Ciência e da Tecnologia possibilitando e promovendo discussões no contexto social. O enfoque CTS parte de três premissas classificadas no campo da pesquisa social, no campo das políticas públicas e no campo da educação. O ensino sob esse enfoque pode ser feito por meio de três modalidades: a) enxerto CTS; b) Ciência e tecnologia por meio de CTS; c) CTS puro. Nesse trabalho, utilizou-se a modalidade de enxerto, isto é, as atividades foram direcionadas considerando aspectos da ciência e tecnologia agregados ao conteúdo matemático.

Portanto, o conteúdo específico da matemática, medidas de áreas, foi tratado por meio de atividades que proporcionassem comparações entre a unidade em estudo com a grandeza medida, de maneira crítica envolvendo debates e discussões. Esta estratégia, em geral, não é muito utilizada nos moldes tradicionais de ensino no Brasil.

Ressalta-se que as atividades desenvolvidas sob o enfoque CTS se configuram em uma estratégia metodológica que objetiva fazer com que o aprendizado se torne mais crítico. Isso ocorre frente à possibilidade de utilizar mais bases teóricas e proporcionar um ambiente democrático. O qual envolve o debate de temas controversos, sem perder o foco no conteúdo matemático a ser ensinado. As atividades foram desenvolvidas utilizando imagens de satélites como recurso didático. Considerando as situações relatadas, este trabalho teve como objetivo analisar as contribuições do enfoque CTS para a aprendizagem de áreas.

2. Aporte teórico

Ciência, Tecnologia e Sociedade – CTS é uma perspectiva ou movimento que dá ênfase à existência de importantes ligações entre eles. No mesmo sentido a definição de CTS conforme Pinheiro (2005) está pautada nas inter-relações entre ciência, tecnologia e sociedade, que constitui um campo de trabalho voltado para as investigações acadêmicas e para as políticas públicas. Fundamenta-se em correntes investigativas da Filosofia e Sociologia da Ciência, pode surgir sob o formato de reivindicação popular no sentido de participar de modo intenso e democrático em decisões envolvendo o contexto científico e tecnológico no qual essa população está inserida.

No periodo de 1960 e 1970, houve uma reação acadêmica frente aos movimentos sociais e à política da época, que passa a ser conhecida, de modo geral, como estudos sociais da ciência e da tecnologia, ou ainda como CTS. Para essa reação acadêmica convergiam diferentes campos do conhecimento humano em três eixos, que conforme Bazzo; Linsingen; Pereira (2003), podem ser classificados da seguinte maneira: a) no campo da pesquisa social sobre o desenvolvimento da ciência e da tecnologia, entendido como um processo desencadeado por fatores culturais, políticos, sociais e epistemológicos; b) no campo das políticas públicas e modos de regulação das atividades da ciência e tecnologia, como determinantes nos modos de vida da sociedade. Preocupa-se então, com as consequências sociais e ambientais acarretadas pelo desenvolvimento da ciência e tecnologia; c) no campo da educação, utilizando-se dos mecanismos educacionais para promover a avaliação e o controle social do desenvolvimento científico e tecnológico. Isto é, proporcionar por meio da educação uma base sólida e senso crítico sobre tal desenvolvimento.

Bazzo (1998) observa que uma parcela da sociedade recebe um ‘bombardeio’ de informações diariamente que dizem respeito à ciencia e à tecnologia e que estas são concebidas como libertadoras em si mesmas, isto é, proporcionariam ao homem adaptação ao meio em que vive, liberdade intelectual, bem estar e felicidade, liberdade política. O mesmo autor chama a atenção para a visão linear de progresso científico e tecnológico que além do avanço no conhecimento e independente das condições de suas aplicações, fariam felizes os homens, no entanto, constata que:

> Esta visão, que é notória no entendimento do senso comum, felizmente tem-se alterado para um número cada vez mais expressivo de pessoas que veêm nela um mito que precisa ser trabalhado para sua erradicação. Essas pessoas começam a ter clara consciência de que a ciência e a tecnologia têm feito o

> homem mais feliz, mas que, junto com isto, possuem a capacidade de também destruí-lo. (Bazzo, 2002, p.117).

Aqui, o autor faz um apontamento sobre a superação dessa visão tradicional da ciência e da tecnologia conhecido como modelo linear ou tradicional de progresso, apresentado por Auler (2002) como um conceito positivista da ciência e da tecnologia que pode ser expressa por meio da equação: mais ciência é igual a mais tecnologia que é igual a mais riqueza que é igual a mais bem-estar social. No modelo linear a tecnologia surge como uma aplicação da ciência, então ao se considerar a ciência como neutra logo a tecnologia também o será, (Pinheiro, 2005).

A preocupação em discutir os benefícios e as consequências do desenvolvimento da ciência e da tecnologia e da relação entre a ciência, tecnologia e sociedade, na busca de novas alternativas para entender o desenvolvimento científico-tecnológico, apresentava os focos principais na América do Norte e Europa. Para Garcia et al. (1996), pode-se classificar a origem das questões e discussões sobre ciência, tecnologia e sociedade em duas vertentes, uma denominada tradição européia e outra tradição americana.

Atualmente, no entendimento de Garcia et al. (1996), é possível dizer que esta divisão está superada, foi importante, mas no início das discussões. Portanto, os estudos em Ciência, Tecnologia e Sociedade abarcam uma diversidade de programas filosóficos, sociológicos e históricos, os quais, na dinâmica dimensão social da ciência e da tecnologia, compartilham alguns núcleos comuns, tais como a rejeição da imagem de ciência como atividade pura e neutra; crítica ao conceito de tecnologia como ciência aplicada e neutra e a promoção da participação pública na tomada de decisão.

2.1. O ensino e aprendizagem com o enfoque CTS

Gordillo et al. (2001) afirma que a população, ao apropriar-se dos assuntos que dizem respeito à ciência e à tecnologia, terá condições de participar ativamente no processo de tomada de decisão, principalmente política, sobre os impactos dos conhecimentos científicos e tecnológicos que incidem sobre a sociedade, e que tal apropriação deve acontecer principalmente na escola.

Um dos objetivos do ensino com enfoque CTS é promover a aprendizagem de maneira holística, isto é, proporcionar ao estudante uma visão global dos conhecimentos científicos e tecnológicos promovendo a integração com o entorno social (Auler; Bazzo, 2001). Para o Ensino Médio, os estudos CTS objetivam levar o educando a discutir e entender o que é ciência, o que é tecnologia, bem como, identificar seus impactos na sociedade.

Ainda no contexto educacional, essa pesquisa procurou fundamentação nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM). O documento citado apresenta orientações sobre a inserção da ciência e da tecnologia no ensino das diversas disciplinas do currículo.

2.2. A modalidade de enxerto CTS

Os trabalhos realizados com o enfoque CTS sob a modalidade de enxerto, de acordo com Marulanda et al. (2005) são úteis para abordagem de temas envolvendo a ciência a tecnologia, para o autor parece ser a estratégia mais viável frente aos currículos de ensino presentes na América Latina.

Para Osorio (2002) o enxerto pode ser utilizado como um estudo de caso, real ou fictício, onde os alunos debatem sobre as consequências provocadas pela ciência e tecnologia na sociedade ou ambiente. Nas situações propostas por meio do enxerto os participantes precisam tomar decisões sobre o uso ou a rejeição da tecnologia.

O enxerto CTS é utilizado envolvendo assuntos controversos realcionados à Ciência e da Tecnologia com implicações na sociedade. A enxertia é o tópico relevante sobre uma situação específica (por exemplo, um problema com a água potável), que é abordado a partir de um tipo específico de ensino, Marulanda et al. (2005)**.**

(Marulanda et al. 2005, s/p.) sugere algumas situações para orientar o professor interessado em trabalhar com o enfoque CTS na modalidade de enxerto:

a) Os Dilemas Éticos: situações que envolvam a avaliação de valores éticos sobre ciência e a tecnologia.
b) pesquisa monográfica e análise de leituras: procura reorientar o ensino de um assunto a partir da investigação de alguns conceitos-chave, considerando critérios CTS.
c) Analisar situações e compreensão sistêmica: O objetivo deste ensino é mobilizar as habilidades de compreensão de leitura e interpretação de contextos.
d) O portfólio didático da mídia: a utilização de notícias científicas e tecnológicas em sala de aula.
e) Os grupos de discussão: discussões em grupo ou grupos focais são grupos cujo papel é o de avaliar as atitudes e opiniões e informar a comunidade.
f) Mediação: A mediação é um método de participação pública que consiste em envolver grupos de pessoas em uma disputa, explorar juntos e reconciliar suas diferenças. A disputa chega a um acordo quando, em conjunto, as partes o que acreditam ser uma solução viável.
g) O caso simulado: composto por atividades participativas focadas em questões conflitantes e controversas em relação às implicações sociais e ambientais do desenvolvimento científico e tecnológico. As atividades envolvem a organização de grupos de discussão em várias formas, com controvérsias tecnocientíficas fictícias, mas plausíveis.

Em todos os trabalhos envolvendo o enfoque CTS sob a modalidade de enxerto, os debates devem ser geridos pelo professor, o qual é claro deve estar preparado e com bom argumentos sobre o assunto com o qual se fez o enxerto, pois as discussões podem tomar rumos diferentes daqueles propostos nos objetivos da aula.

Outro fato que deve ser considerado é a possibilidade de haver o debate em torno das atividades escolhidas, para tanto, como ocorre no enfoque CTS, o professor deverá estar preparado para situações inusitadas, debater sobre um determinado assunto conduz a uma ampliação desse assunto, tomando proporções, como mencionado anteriormente, fora dos objetivos propostos para aquela aula. O fato do debate tomar proporções não planejadas não é ruim, é claro que se o professor tiver tempo disponível a situação pode e deve ser prolongada (Skovsmose, 2008).

2.3. O ensino de medidas de áreas

Saber da importância do estudo desse conteúdo não basta, diferenciações no ensino precisam ser adotadas, autores como Kordaki e Portari (2002) dizem que os livros didáticos induzem a uma mudança muito rápida entre operações multiplicativas e o estudo de áreas, partindo logo para a utilização de fórmulas, desprovendo o aluno de investigar e comparar o que está medindo.

De acordo com Cavanagh (2008) o estudo da medição de área é uma parte importante do currículo do ensino médio, por duas razões relevantes: em primeiro lugar, por causa da grande variedade de aplicações diárias de conceitos da área em atividades como pintura, jardinagem, ladrilhos e na verdade, qualquer tarefa que envolve cobrir uma superfície bidimensional, e em segundo lugar, porque os conceitos de área são frequentemente utilizados nos livros didáticos pelos professores para introduzir muitas outras ideias matemáticas. Por exemplo, áreas retangulares são usadas para representar as operações multiplicativas envolvendo números inteiros e frações.

A base para o aprendizado sobre medidas de áreas consiste em compreender como uma unidade específica pode ser inserida, até que ela cubra completamente uma superfície plana, sem deixar lacunas ou sobreposições. Em outras palavras, a região é dividida em unidades de igual tamanho do plano que se quer encobrir. (Outhred; Mitchelmore, 2000)

Há fortes evidências de pesquisas anteriores que a estrutura subjacente do arranjo linha x coluna que resulta do processo de iteração de unidades em quadriculas não é de maneira nenhuma óbvia, os alunos precisam de muita prática em construção de malhas quadriculadas com régua, por exemplo, e também com construções concretas comparando ou cobrindo uma região para que possam desenvolver uma sólida compreensão conceitual da medição da área (Outhred; Mitchelmore, 2000).

Kidman (1999) menciona que nem sempre a compreensão dos alunos perante o ato de medir e relacionar esta medida com a área fica evidente, os estudantes fazem confusão com o perímetro.

Uma situação que deve ser considerada preocupante é sobre o estudo de Baturo e Nason (1996) sobre o conceito de medição de áreas de futuros professores, concluíram que os equívocos cometidos na escola primária ou secundária, muitas vezes estão profundamente arraigados e podem persistir na idade adulta.

3. Metodologia da pesquisa

Esta pesquisa tem a classificação de aplicada, em virtude de o trabalho trazer em seus objetivos a apresentação e aplicação de uma proposta que possa contribuir diretamente com a aprendizagem em sala de aula. Isto está de acordo com Cervo e Bervian (1983), que defendem que a pesquisa aplicada visa o desenvolvimento de conhecimento específico sobre um assunto definido e sua proposta é concretizada em ações, contribuindo de modo prático na solução de problemas reais.

Quanto à abordagem do problema esta pesquisa é caracterizada como qualitativa. A Pesquisa qualitativa é multimetodológica quanto ao foco, envolvendo uma abordagem interpretativa e naturalística para seu assunto. Isto significa que os pesquisadores qualitativistas estudam as coisas em seu "*setting* natural, tentando dar sentido ou interpretar fenômenos em termos das significações que as pessoas trazem para eles" (Denzin; Lincoln, 1994, p.2).

Logo, a pesquisa qualitativa, ao analisar os dados coletados, utiliza uma abordagem naturalista que busca compreender os fenômenos em configurações específicas do contexto, como mundo real, por exemplo.

Também foi utilizada a pesquisa de cunho interpretativo, a qual segundo Alves-Mazzotti (2001) tem o objetivo de compreender o fenômeno a partir dos próprios dados, das referências fornecidas pela população estudada e dos significados atribuídos ao fenômeno por esta população.

A pesquisa foi aplicada em uma Universidade da Cidade de Cascavel, no Estado do Paraná, região sul do Brasil. O local é provido de laboratório de Matemática com espaço amplo, possui instrumentos de medição e sala de recursos audiovisuais. A população envolvida na pesquisa é composta por vinte e nove acadêmicos do segundo ano do curso noturno de Licenciatura Plena em Matemática. A turma foi escolhida considerando que, por meio de observações anteriores, os alunos mostraram desenvoltura e intimidade ao lidar com artefatos tecnológicos, principalmente aqueles que envolvem a comunicação.

Para proceder à coleta de dados foram adotados os procedimentos envolvendo os recursos: questionários, gravação em áudio e/ou vídeo, fotográficos, diário de campo contendo as falas, expressões, observações e questionamentos dos envolvidos, registro das atividades desenvolvidas coletadas ao final de cada oficina.

As atividades foram realizadas seguindo um roteiro, pois a pesquisa foi aplicada sob o formato de oficinas de ensino, logo, o tempo deveria ser apropriado para tal.

Portanto, aconteceram sete encontros, sendo um encontro semanal de 28/09/2011 a 03/11/2011, do seguinte modo:

<u>Primeiro encontro</u>: Convite, conversação com os envolvidos e aplicação de um questionário inicial para entender a concepção do público sobre CTS.

<u>Segundo encontro</u>: retomada e discussão acerca das questões envolvendo CTS presentes no questionário inicial.

<u>Terceiro encontro</u>: Aplicação das atividades da Oficina I, envolvendo o cálculo de áreas por meio de imagens de satélites.

<u>Quarto encontro</u>: Aplicação da Oficina II, envolvendo o cálculo de áreas de quadrados e retângulos, sob o enfoque CTS.

<u>Quinto encontro</u>: Aplicação da Oficina III, com o assunto referente à área de triângulos. O tema foi discutido de forma crítica, alicerçada pelo enfoque CTS.

<u>Sexto encontro</u>: Aplicação de um questionário final.

4. Discussão e resultados

Com o intuito de atingir os objetivos aqui perseguidos, as atividades foram elaboradas de acordo com a modalidade de enxerto CTS. Ou seja, o tema medidas de áreas foi enxertado com assuntos relacionados ao enfoque CTS e para isso foram utilizadas imagens de satélites. Isso possibilitou dar os seguintes direcionamentos às atividades:

a) Os alunos são convidados pelo professor-pesquisador a formularem questões e procurarem justificativas;
b) Os alunos são coresponsáveis pelo processo de aprendizagem;
c) Os alunos usam materiais manipuláveis nas atividades de aprendizagem;
d) Os alunos envolvem-se com questões que poderão servir de base para investigações.

Com relação à avaliação, ela foi contínua, por meio da análise das respostas dos grupos e/ou individuais, das estratégias que os alunos utilizaram para solucionar as questões propostas, considerando também os princípios que fundamentam o enfoque CTS, isto é, aqueles que direcionam para uma postura educacional mais crítica frente aos conteúdos e contextos envolvidos na aprendizagem.

O primeiro encontro iniciou-se, portanto, com a conversação e ficou combinado que as atividades da pesquisa seriam aplicadas durante quatro horas/aula semanais.

A aplicação das atividades teve início no dia 28 de Setembro de 2011 por meio do questionário do Quadro 1. Neste momento o objetivo era saber qual o entendimento dos envolvidos na pesquisa a respeito da Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS) e demais questões relacionadas envolvendo a sociedade.

Quadro 1: Questionário inicial para coleta de dados
Fonte: Pinheiro (2005, p. 148)

1- O que você entende por ciência?
2- O que você entende por tecnologia?
3- Quais os conhecimentos que você considera que foram ou são importantes para o avanço da ciência e da tecnologia? Justifique o porquê de cada um.
4- Que relação existe entre ciência e tecnologia?
5- Você acredita que nossa sociedade poderia funcionar sem ciência e sem tecnologia? Por quê?
6- Você acredita que o desenvolvimento econômico depende do desenvolvimento científico-tecnológico? Por quê?
7- Você acredita que o desenvolvimento científico-tecnológico pode ajudar a reduzir as desigualdades sociais? Como e por quê?
8- Você acha que todo progresso científico-tecnológico constitui um avanço humano?

O questionário foi respondido por 29 acadêmicos. Para o pesquisador, essa sondagem feita por meio do questionário foi crucial para dar procedimento à aplicação das próximas atividades.

Ainda com relação ao questionário, esperava-se que as respostas, dadas por cada participante, apresentassem proximidade de conceitos maior umas com as outras.

Por não apresentar a homogeneidade esperada, a classificação e categorização das respostas tornaram-se mais difíceis, porém foi determinante para dar continuidade aos trabalhos.

Quadro 2: Categorização dos dados do questionário inicial. Fonte: Autoria própria

Questão	Categoria	%
1. O que você entende por ciência?	Área de estudo e pesquisa que se dedicam ao conhecimento de alguns assuntos específicos.	28
	É todo o conhecimento existente.	28
	Fenômeno que estuda a natureza e está relacionado com o conhecimento humano.	18
	Estuda a evolução da vida, desvenda mistérios do mundo.	10
	Sem resposta	6
	Capacidade de fazer justificativas a respeito de determinado fenômeno por meio de bases racionais.	10
2. O que você entende por tecnologia?	É a aplicação dos conhecimentos científicos.	31
	Inovação, melhoramentos, invenções, artefatos que melhoram a vida humana.	69
3. Quais os conhecimentos que você considera que foram ou são importantes para o avanço da ciência e da tecnologia? Justifique	Não sei, ou sem resposta.	38
	Todo o conhecimento humano.	55
	Descoberta do fogo.	7
4. Que relação existe entre ciência e tecnologia?	A ciência depende da tecnologia.	38
	Aplicação do conhecimento científico.	17
	Sem resposta	14
	O conhecimento científico é a base para a tecnologia.	25
	Relação de produção.	6
5. Você acredita que nossa sociedade poderia funcionar sem ciência e sem tecnologia? Por quê?	Não. Afetaria o trabalho humano.	6
	Sem tecnologia sim. Sem ciência não.	7
	Não. Afetaria a comunicação humana e a produção industrial.	13
	Não. O ser humano depende muito da tecnologia.	48
	Não. Haveria estagnação, subdesenvolvimento e pobreza.	25
	Explicação confusa	1
6. Você acredita que o desenvolvimento econômico depende do desenvolvimento científico-tecnológico? Por quê?	Sim. Com o desenvolvimento científico a produção agrícola pode ser melhorada, que é uma das principais fontes econômicas.	2
	Sim. Existe avanço econômico conforme a sociedade progride na C&T.	30
	Sem resposta	10
	Sim. Um depende do outro.	15
	Apenas “sim”.	6
	Sim. Está relacionada com o capitalismo.	10
	Sim. Gera postos de trabalho.	27
7. Você acredita que o desenvolvimento científico-tecnológico pode ajudar a reduzir as desigualdades sociais? Como e por quê?	Sem resposta.	37
	Depende! Todos tendo acesso ao desenvolvimento será bom. Caso contrário haverá muita desigualdade social.	17
	Sim. Oportunidade de trabalhar com igualdade.	20
	Não. Máquinas estão tomando o lugar do homem nos postos de trabalho, destruindo valores humanos.	17
	Sim. A mudança na desigualdade depende de atitudes pessoais.	6
	Apenas “sim”.	3
8. Você acha que todo progresso científico-tecnológico constitui um avanço humano?	Sem resposta.	14
	Apenas “sim”.	54
	Sim. Para uma minoria que pode pagar por isso.	6
	Não. Escraviza o ser humano.	6
	Sim. Mas nem sempre é benéfico	17
	Sim. Fruto da produção humana atende as necessidades humanas.	3

A categorização das respostas é apresentada em forma de percentual. Isto é, 100% dos participantes responderam a questão 1 conforme a distribuição apresentada no Quadro 2, e assim sucessivamente.

Entretanto, além da falta de homogeneidade nas respostas, outras observações podem ser feitas com relação às mesmas, como é a situação apresentada por Acevedo Díaz, Manassero Mas e Vázquez Alonso (2002) onde os autores salientam que muitos alunos de todas as idades pensam que a ciência inventa coisas e resolve problemas práticos mais do que investigar e compreender o mundo com o predomínio da visão utilitarista, de artefatos tecnológicos, frente a uma visão cultural ou acadêmica.

Acevedo Díaz, Vázquez Alonso e Manassero Mas (2003) confirmam isso mencionando que os alunos tendem a entender a tecnologia como instrumentos, aparelhos e utilitários que ajudam no dia a dia das pessoas. Para Rubba e Harkness (1993) Rubba, Schoneweg e Harkness (1996), Acevedo Díaz, Manassero Mas e Vázquez Alonso (2002) e Acevedo Díaz, Vázquez Alonso e Manassero Mas (2003) existe a tendência dos estudantes interpretarem a relação entre ciência e tecnologia como a de dependência, isto é, a ciência depende da tecnologia e vice-versa.

Após a análise e categorização dos dados, optou-se por direcionar os trabalhos retomando e discutindo as questões presentes no questionário do Quadro 1. Isso de acordo com Alves-Mazotti e Gewandsznajder (2001) que orientam que em uma pesquisa qualitativa os dados devem ser analisados frequentemente, possibilitando ao pesquisador a articulação nos conteúdos a serem aplicados.

O segundo encontro, portanto, teve como objetivos: Introduzir os conceitos que envolvem a Ciência, Tecnologia e Sociedade; Proporcionar discussão crítica sobre os conceitos estudados e Propiciar a reflexão sobre o significado Ciência, Tecnologia e Sociedade para cada um.

Para proceder aos trabalhos foi elaborado um material sob o formato de apresentação em *slides*. Tal apresentação, tendo em vista que a pesquisa foi aplicada no formato de oficinas, tornou-se necessária para preencher as lacunas conceituais sobre CTS apresentadas pelos envolvidos na pesquisa e nas respostas do questionário do Quadro 2.

Foram abertas sessões para discussões, as quais foram gravadas em áudio como coleta de dados para posteriores estudos. Durante as discussões, os acadêmicos apontaram a ciência como o conhecimento humano e estabeleceram uma relação de dependência entre ciência, desenvolvimento humano e trabalho.

Após o questionamento sobre a atividade da ciência, demonstraram a crença na ciência como atividade neutra. Não pensavam em ciência de modo crítico, isto é, a ciência estava sendo vista como verdade absoluta, como provedora de bem-estar social e, para alguns, pronta e acabada. Ficou comprovado o que para Palacios et al (2001) é a concepção clássica das relações entre ciência e tecnologia com a sociedade, a concepção essencialista e triunfalista que pode ser expressa pela equação, mais ciência = mais tecnologia = mais riqueza = mais bem-estar social, isto é, o modelo linear de desenvolvimento. Outros participantes fizeram observações do tipo: ciência → conhecimento → poder → domínio.

Neste caso parece haver um senso crítico com relação à ciência, no entanto não se distancia da crença no modelo linear de desenvolvimento.

Com relação à tecnologia, também acreditavam que ela é neutra, atribuindo ao ser humano (usuário) a capacidade, ou culpa, pelo uso adequado ou não. (BAZZO, 1998, p.85) orienta que não se adote posições extremas quanto aos impactos "da ciência e da tecnologia no comportamento humano, é importante que tenhamos claras as diferentes faces que elas assumem nas suas estreitas relações com a vida cotidiana de todos nós".

Em outro momento, os envolvidos na pesquisa não mostraram senso crítico quanto à evolução da ciência e da tecnologia, não conseguiram visualizar que a sociedade está envolvida por uma teia de consumo, onde existe um jogo comercial que envolve o cidadão numa perspectiva alienante do consumismo exacerbado, ou seja, a lei da oferta e procura, ou demanda e consumo.

Para Bazzo (1998) não se pode negar as contribuições que a ciência e a tecnologia trouxeram nos últimos tempos, no entanto, não seria adequado confiar nelas excessivamente, de maneira que as pessoas fiquem cegas diante dos confortos que proporcionam cotidianamente seus aparatos e dispositivos técnicos. "Isso pode resultar perigoso porque, nesta anestesia que o deslumbramento da modernidade tecnológica nos oferece, podemos nos esquecer de que a ciência e a tecnologia incorporam questões sociais, éticas e políticas".

Justificaram ainda que muitas vezes o consumo de tecnologias é necessário para auxiliar no trabalho do cidadão, mas que não poderiam ser dominados por essas tecnologias.

Vale ressaltar o comentário de Acevedo Díaz (1998), Acevedo Díaz, Manassero Mas e Vázquez Alonso (2002) e Gilbert (1995), em consonância com Bazzo (1998), que dizem ser necessário se esforçar para não cair, consciente ou inconscientemente, em posições excessivamente críticas, as quais reforçam a visão destruidora sobre a ciência e a tecnologia. Segundo as mesmas, a ciência e a tecnologia são a principal causa da deterioração do meio ambiente e fonte dos problemas mais graves da humanidade. Outrossim, não se deve ir ao outro extremo, que apresenta uma visão positivista da ciência e da tecnologia que mostra como as grandes conquistas da humanidade em suas tentativas de aprender mais sobre a natureza e ainda submetê-las a resolver todas as necessidades humanas possíveis em um determinado momento.

No terceiro encontro, houve o início da aplicação das atividades da Oficina I. O tema trabalhado na referida oficina foi o cálculo de áreas de figuras planas irregulares. As atividades foram elaboradas com a utilização do texto "O Brasil visto do espaço" disponível em: www.inpe.br/acessoainformacao/node/405, o material foi impresso e disponibilizado para cada participante.

O texto foi escolhido por apresentar dados importantes sobre satélites e suas imagens, por trazer dados numéricos sobre a área desmatada comparando-a com a área de outros países.

Outros objetivos da atividade eram: propor o cálculo de áreas de figuras planas irregulares sob o enfoque CTS; explorar imagens de satélites como estratégia metodológica; calcular a área de uma figura plana irregular, aproximada, por falta e excesso e evidenciar a inexatidão nos cálculos proporcionando a discussão crítica do assunto estudado.

Durante a leitura do texto disponibilizado, contendo a explanação sobre os satélites, definições, funcionamento e utilidade, introduziu-se o questionamento sobre o envolvimento da ciência, tecnologia e os impactos delas na sociedade. A introdução seguiu os direcionamentos de (AULER; BAZZO, 2001, p.2) onde o autor menciona que se deve despertar a curiosidade do estudante para que ele possa inter-relacionar ciência com aplicações tecnológicas, fenômenos presentes no dia-a-dia “e abordar o estudo daqueles fatos e aplicações cientificas que tenham maior relevância social; abordar as implicações sociais e éticas relacionadas ao uso da tecnologia e adquirir uma compreensão da natureza da ciência e do trabalho científico”.

Para continuar com a atividade foi elaborada uma problematização que está no Quadro 3.

Quadro 3: Problematização da atividade 1 da oficina I-
Fonte: autor

Problematização:

A imagem (PERCURSO 1) contém uma poligonal fechada oriunda da ligação entre os pontos vermelhos da figura. Originou-se de uma varredura feita por satélites na região da Amazônia, em cada um dos pontos foram feitas observações sobre o desmatamento ocorrido. Na figura, suponha que cada quadrícula tenha a unidade de medida igual a 1.

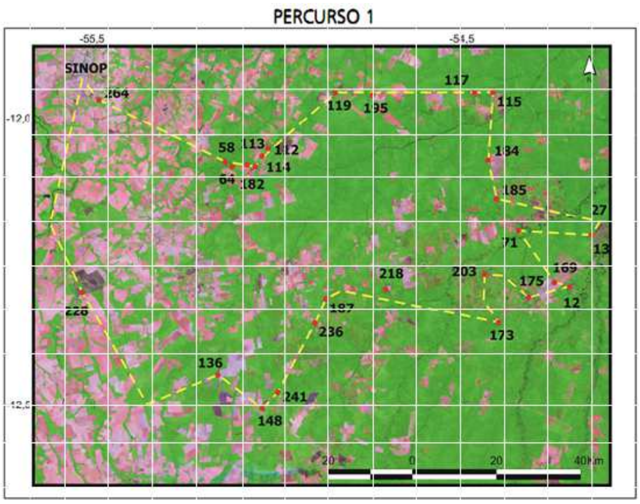


Figura 1: Imagem de satélite na forma de poligonal fechada: Percurso 1
Fonte: INPE (2008)

a) Calcule a medida aproximada, por excesso, da área da poligonal fechada com o tracejado na cor amarela.
b) Calcule a medida aproximada, por falta, da área da poligonal fechada com o tracejado na cor amarela.
c) Compare as respostas dos itens (a) e (b) e diga se alguma delas é exata.
d) No contexto até agora estudado, em sua opinião, qual é a importância da Ciência e da Tecnologia para a sociedade?
e) Que avanço existe para a humanidade nesse contexto?

Quadro 4: Categorização das respostas da problematização da Atividade 1 da oficina I. Fonte: Autor

Item	CATEGORIA/RESPOSTA	%
a)	Respostas variando de 71 a 76 unidades de medida	100
b)	Respostas variando de 43 a 50 unidades de medida	100
c)	Nenhuma delas é exata	100
d)	São importantes nas descobertas e atualizações cotidianas, no mapeamento e monitoramento das situações em que se encontram as florestas podendo proporcionar idéias para a melhoria de vida do cidadão e controle ambiental.	62
	Ajuda a controlar o desmatamento, isso influência no bem estar ou não do cidadão.	38
e)	Gera a consciência sobre a preservação ambiental, coloca o cidadão próximo da realidade dando-lhe a possibilidade de intervir na situação.	44
	Promove e nos dá uma visão aproximada da área desmatada regularmente, fato que não era possível há algum tempo atrás.	56

Após a aplicação da atividade, as respostas encontradas pelos participantes da pesquisa foram categorizadas. Estão em forma de percentual, ou seja, 29 participantes ou 100% deles, responderam conforme a distribuição encontrada no Quadro 4.

Ao introduzir o conceito de cálculo de áreas utilizando os métodos “por falta” e “por excesso”, observou-se que os participantes não conheciam tal estratégia, tentaram resolver aplicando fórmulas, ficaram em dúvida sobre como responder a questão. Isso, de acordo com Murphy (2009), Baturo & Nason (1996), Tierney, Boyd e Davis (1990) pode ser porque geralmente é aceito que a Matemática deve ser ensinada de modo que haja entendimento, no entanto, no que se refere às medidas de áreas, parece que os alunos muitas vezes se baseiam na utilização de fórmulas com pouca compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Elas são incapazes de notar a razoabilidade das suas respostas e por isso são incapazes de monitorar o uso dessas fórmulas.

Há também evidências de que os futuros professores têm uma dependência semelhante no que diz respeito às fórmulas. Os participantes foram instruídos a estimarem a quantidade de quadrículas mesmo que ultrapassassem o tracejado amarelo (por excesso), depois para que estimassem a quantidade de quadriculas que estivessem apenas dentro do tracejado amarelo (por falta), em seguida que fizessem a média aritmética entre as duas medidas encontradas.

Houve variação nas respostas encontradas nos itens (a) e (b), isso já era esperado, pois de acordo com (LABURÚ et al.,2010, p.1402-2) “por mais perfeitos que sejam os métodos e procedimentos de medida, o valor achado para a grandeza física será sempre uma aproximação para o *valor verdadeiro* (ou *valor alvo*), pois sempre existem erros de medição”.

A questão (c) foi propositalmente introduzida para que houvesse a reflexão sobre o que ocorreu nos dois itens anteriores e conforme Skovsmose (2007) a Educação Matemática deve proporcionar ao estudante reflexões em torno do assunto abordado ou ensinado. Já, de acordo com Freire (1983) deve-se excluir a educação bancária, onde o aluno é uma espécie de receptáculo no qual o conhecimento é depositado sem nenhum senso crítico.

Nos itens (c) e (d) percebe-se o entrosamento ou intimidade com o CTS, para Gordillo e Galbarte (2002) o sistema educativo deve ser encarregado de formar cidadãos responsáveis no trato com as tecnologias. Um cidadão que reconheça o funcionamento de um determinado artefato tecnocientífico, bem como, o funcionamento da tecnociencia e sua relação com a sociedade. Por consequência surgirá uma sociedade preparada para intervir com responsabilidade nas questões que a afetem ou poderão afetá-la.

A oficina II foi iniciada com o quarto encontro. A atividade da referida oficina foi direcionada por meio da leitura do texto, “Ministro reforça operação contra desmatamento na Amazônia”, disponível em www.consecti.org.br/2011/05/24/, cada um dos participantes recebeu uma cópia impressa do material. Depois da leitura foi discutida a problematização, Quadro 4, produzido com o auxílio de uma imagem coletada no endereço eletrônico do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais -INPE, do Brasil, mostrando um mosaico de polígonos justapostos. Esses polígonos são imagens de satélite e cada polígono é uma parte do território varrido pela cobertura de satélites, Figura 2. A atividade teve como objetivos: propor o cálculo de áreas de figuras planas sob o enfoque CTS; calcular a área de retângulos e quadrados, por meio de formulações matemáticas; evidenciar a inexatidão dos instrumentos utilizados para medir; proporcionar discussão crítica do assunto estudado, por meio de comparações entre áreas.

Quadro 4: Problematização da atividade 1 da oficina II. Fonte: Autor

Problematização

A Amazônia Legal é composta por vários Estados brasileiros. Para monitorar o desmatamento nesses Estados são necessárias aproximadamente 230 imagens do satélite Landsat, (retângulos amarelos), como pode ser visto no mosaico da figura. Cada retângulo representa uma cena, isto é, uma imagem com informações sobre desmatamento, queimadas ou preservação do ambiente.

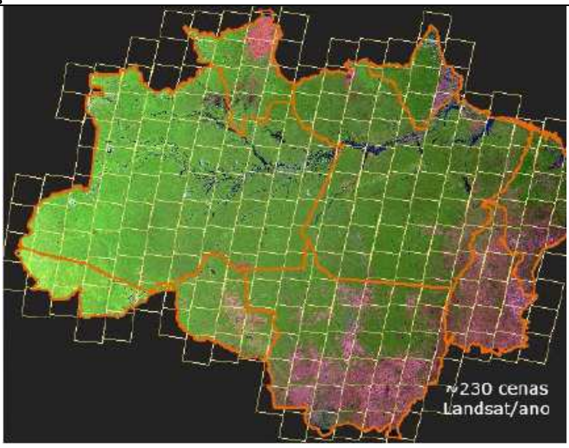


Figura 2: Imagem de satélite: polígonos sobre a Amazônia. Fonte: INPE (2012)

a) Supondo que cada retângulo da imagem apresentada, possua a base com 1 cm de medida e a altura com 2 cm de medida, qual é a área total encoberta por todos os retângulos?
b) A área encontrada no item (a) é exata?
c) A área encontrada por meio das imagens de satélite, depois de passadas por todo um tratamento tecnológico, é exata?
d) No texto, o ministro da Ciência e Tecnologia deixa subentendidas as implicações da ciência e da tecnologia na sociedade. Destaque uma frase do texto onde isso está implícito, explicando-a.

Quadro 5: Categorização das respostas da problematização da Atividade 1 da oficina I
Fonte: Autor

Item	CATEGORIA/RESPOSTA	%
a)	Aproximadamente 460 cm^2.	100
b)	Não é exata.	100
c)	Não é exata.	100
d)	O Ministro também anunciou lançamentos de satélites para os próximos anos na intenção de tornar os dados fornecidos...	40,75
	“Esse trabalho conjunto vai trazer respostas bem rápidas e mais eficientes para podermos documentar o que aconteceu...	59,25
	Justificativas das respostas	
	A intenção do Ministro é mostrar à sociedade, de forma mais precisa, a realidade vivida na Amazônia.	55,55
	A tecnologia será utilizada para sustentar possíveis punições para quem desmata e prevenir o desmatamento.	29,65
	Atrair a confiança da sociedade para um sistema tecnológico também de confiança, mais sofisticado, evoluído.	14,80

Do mesmo modo que nas atividades anteriores, as respostas encontradas pelos participantes da pesquisa foram categorizadas em forma de percentual. Responderam conforme a distribuição encontrada no Quadro 5. Para a atividade envolvendo medidas de áreas de retângulos e quadrados por meio da utilização de fórmulas, utilizou-se também, a visão geométrica. Quanto a isso (Chiummo, 1998, P. 37) diz que “a importância da passagem do quadro geométrico para o quadro numérico é fundamental para o completo entendimento do processo ensino-aprendizagem do conceito de área”.

Logo, os resultados obtidos na atividade mostram que os participantes da pesquisa realizaram a tarefa com desenvoltura, calcularam a área de todos os polígonos, no entanto, por meio da visão geométrica proporcionada pela imagem de satélite, puderam comprovar que o resultado não era exato. Nota-se, por meio das respostas encontradas no item (d), que os alunos produziram uma opinião considerável sobre a utilização da tecnologia relacionando-a com a sociedade, o enfoque CTS mostrou-se eficaz, para Vilches e Furió (1999) os professores terão que se apropriar das novas orientações e entender a importância de novos conteúdos, novos objetivos e metas da educação científica necessária para enfrentar o desafio da formação dos futuros cidadãos do século XXI.

De acordo com (Angotti et al. 2001, p. 185) “Nossos conceitos, ideias, relações sociais, limites morais e políticos têm sido reestruturados no curso do desenvolvimento tecnológico moderno”. Conforme Osório (2002) o enfoque CTS é apresentado como um campo de análise adequado para a compreensão e educação do fenômeno tecnocientífico moderno. Diante das considerações feitas pelos autores citados, é notório que as situações que envolvem CTS devem ser discutidas para efeitos de tomada de consciência. Durante o quinto encontro foram realizadas atividades relacionadas à oficina III, as quais versavam sobre o cálculo de áreas de triângulos e tinham como objetivos: a) propor o cálculo de áreas triângulos, por meio de formulações matemáticas, sob o enfoque CTS; b) proporcionar discussão crítica do assunto estudado, por meio de comparações entre áreas. Será tomada como base para discussões apenas a primeira atividade da oficina. A atividade foi iniciada com a leitura do texto: Em que nível tecnológico está o monitoramento por satélite da floresta? Disponível no endereço eletrônico www.viajeaqui.abril.com.br/nationalgeographic/. Cada participante recebeu uma cópia impressa do material da oficina III. Depois da leitura foi discutida a problematização produzida com o auxílio de duas imagens coletadas no endereço eletrônico do INPE, (Figura 3), a qual apresenta áreas de floresta degradada, e (Figura 4) que mostra um histórico sobre as observações feitas durante vários anos desse mesmo local. Outras informações do texto foram utilizadas para a problematização, Quadro 6.

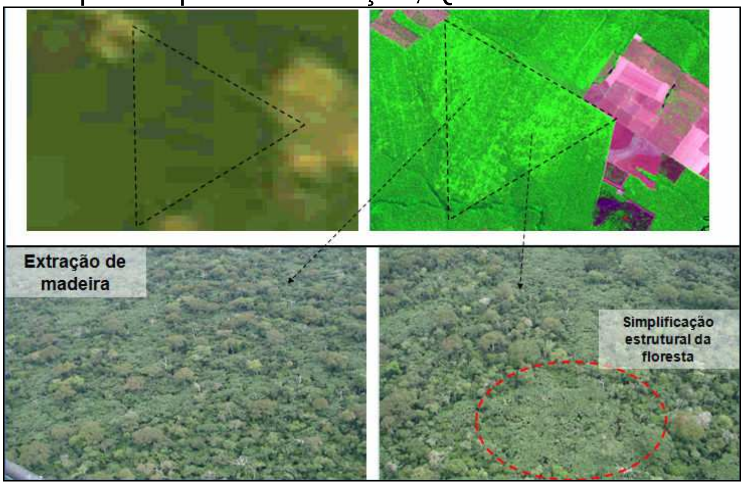


Figura 3: Imagem de satélite floresta degradada. Fonte: INPE (2008)

HISTÓRICO

1990	2000	2003	2004	2006	2007
Floresta/ capoeira	Cicatriz de fogo florestal	Floresta degradada	Floresta degradada	Floresta degradada	Floresta degradada (sem Alerta)

DESCRIÇÃO DE CAMPO

- Simplificação estrutural da floresta que pode ter sido causada por extração seletiva de madeira

Figura 4: Tabela com histórico de degradação da Floresta. Fonte: INPE (2008)

Quadro 6: Problematização da atividade 1 da oficina III. Fonte: autor

Problematização

A imagem da Figura 3 foi estruturada por meio dos dados coletados por satélites e tratada pelos responsáveis pelo Programa de Cálculo do Desflorestamento da Amazônia (PRODES) e pelo Sistema de Detecção de Desmatamento em Tempo Real (DETER). Por intermédio do histórico da área observada, Figura 4, pode-se perceber que a ciência e a tecnologia cumpriram seu papel informativo, no entanto no período compreendido entre o ano de 2000 a 2007 a floresta permaneceu degradada.

a) Você acredita que faltou fiscalização no local? Por quê?
b) Na imagem destaca-se a figura de um triângulo, com o auxílio de uma régua meça os três lados e a altura.
c) Como você faria para calcular a área desse triângulo?
d) A maneira que você encontrou para realizar os cálculos do item (c) vale para todos os triângulos?
e) Com o material disponibilizado, construa um retângulo. Encontre o ponto médio de um dos lados maiores do retângulo. Ligue o ponto médio aos vértices correspondentes ao lado oposto.
f) Recorte o triângulo com o auxílio de uma tesoura. O que você observou com relação ao triângulo recortado e as sobras do papel?

A atividade foi realizada em pequenos grupos e, na sequência, os resultados foram socializados em um grande grupo. Dessa socialização, elegeu-se uma resposta para cada questão.

Questão (a) *Sim, faltou fiscalização. Os satélites realizam a tarefa de forma rápida. No entanto as equipes responsáveis pelo trabalho terrestre nem sempre são suficientes, o território é grande e nem sempre há tempo hábil para coibir o desmatamento. Parece haver um problema com funcionários e, portanto, político. (resposta escolhida pelos participantes da pesquisa).*

Questão (b): O valor encontrado foi de aproximadamente 4,3 cm em cada lado e aproximadamente 3,2 cm de altura. O triângulo é equilátero.

Questão (c): Foram citadas duas maneiras de realizar a tarefa, ambas utilizando-se de fórmulas, isto é: $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ e $A = \frac{b.h}{2}$.

Questão (d): Para todos os triângulos utilizariam apenas a fórmula: $A = \frac{b.h}{2}$.

Questão (e) Para a realização da tarefa foi disponibilizado para cada participante um retângulo de papel colorido com medida qualquer (poderia ser um quadrado). As recomendações constantes no enunciado foram seguidas e pode ser visto:

Figura 5: Imagens da realização da tarefa do item (e) da atividade 1
Fonte: Acervo do Autor

Questão (f): Depois de realizada a tarefa do item (e) os participantes chegaram à seguinte conclusão: "As sobras formam outro triângulo igual ao recortado". Ou, "Colocando dois triângulos que sobraram sobre o triângulo maior, verifica-se que a sobra é igual ao primeiro triângulo".

No item (a) a resposta dada para a questão sugere um encaminhamento para a crítica social, para a falta de políticas públicas do governo, tanto na esfera Estadual quanto Federal e, com relação a isso, Sebastian (2000) observa que, em primeira instância, deve-se reforçar o papel instrumental da ciência e da tecnologia como um fornecedor de conhecimento e tecnologia para promover um bom governo. Isto é, para promover a equidade, democracia, segurança, a coesão social e o bem-estar da sociedade como um todo. Nos demais itens, Fonseca et al (2002) e Fainguelernt (1999) sugerem práticas de oficinas para uma possível mudança no ensino de Matemática, mais especificamente de geometria. Percebe-se que as argumentações feitas pelos autores citados frente às respostas, corretas, encontradas pelos envolvidos na pesquisa, tendem a valorizar as formas diferenciadas de ensino da Matemática.

No sexo encontro, continuação da oficina III, houve a aplicação de um questionário, Quadro 7, com o intuito de coletar dados para possíveis discussões a respeito das contribuições do enfoque CTS para o ensino da matemática.

Quadro 7: Questionário final para coleta de dados (adaptado). Fonte: Pinheiro (2005, p. 169)

1- Para você, o que é Matemática? Que influência este conhecimento exerce sobre o contexto da ciência, da tecnologia e na vida das pessoas em geral?
2- É possível estabelecer alguma relação entre o conhecimento matemático e o enfoque CTS?
3- Em sua opinião, qual o diferencial trazido pela modalidade de enxerto no que se refere ao ensino de medidas de áreas apresentado sob o enfoque CTS nas aulas de Matemática?

Quadro 8: Categorização dos dados do questionário final. Fonte: Autoria própria.

Questão	Categoria	%
1. Para você, o que é Matemática? Que influência este conhecimento exerce sobre o contexto da ciência, da tecnologia e na vida das pessoas, de forma geral?	A Matemática é uma ciência exata. A Matemática pode ser apresentada em forma de modelos que envolvem tanto a ciência quanto a tecnologia, pois está presente em desenvolvimentos tecnológicos e auxilia o desenvolvimento científico.	51
	A Matemática é a ciência que estuda a relação dos números no contexto humano, social e natural. Auxilia no avanço da ciência e da tecnologia, pois está relacionada com as tecnologias e, por consequência, na vida das pessoas, desde uma compra no supermercado até o uso de um computador.	49
2-É possível estabelecer alguma relação entre o conhecimento matemático e o enfoque CTS? Qual?	Sim, principalmente na Matemática projetando algum modelo tecnológico para tomar decisões no lugar de seres humanos.	92,6
	Sem resposta	3,7
	Acho que não.	3,7
3- Em sua opinião, qual o diferencial trazido pela modalidade de enxerto no que se refere ao ensino de medidas de áreas apresentado sob o enfoque CTS nas aulas de Matemática?	Trouxe a oportunidade de associação entre os conteúdos, ou seja, de estudar Matemática (áreas) analisando, preocupando-se, tendo como referência situações cotidianas, problemas atuais, a vivência de hoje. Os alunos continuam vendo os mesmos conteúdos, porém de formas diferentes. Aprende-se sobre medidas de áreas, por exemplo, analisando imagens fornecidas pela tecnologia, discutem ciência e os problemas que afetam a sociedade.	43
	Trouxe informações sobre como poderíamos calcular áreas de imagens feitas por meio de satélites, além de modelos tecnológicos, discussões e debates em sala sobre o assunto. Trazem um conhecimento para nós, acadêmicos, de que como a ciência e a tecnologia influenciam as nossas vidas.	23
	A Matemática trabalha com o conteúdo interagindo com esse enfoque CTS, instigando os alunos no desenvolvimento dos conteúdos e nas informações apresentadas, proporcionando pesquisa, debates e opiniões. A aula fica mais democrática e podemos sair do campo do ensino da Matemática tradicional de apenas resolver exercícios. Com o CTS o que muda é a quantidade de informações novas sobre assuntos polêmicos, torna-se uma aula mais crítica.	34

Após a análise dos dados coletados, optou-se por categorizá-los, Quadro 8, também nessa situação utilizou-se a distribuição em forma de percentual para as respostas de cada questão.

Sobre a Matemática, nas respostas da questão 1, todos a mencionaram como uma ciência, fizeram associações entre CTS e Matemática e apontaram a interferência da Matemática na sociedade. Ainda apontaram a Matemática como base racional para as pesquisas científicas. A discussão sobre a questão número 2 foi contemplada nos apontamentos da questão número 1.

As respostas dadas pelos envolvidos na pesquisa estão diretamente relacionadas ao que diz D'Ambrósio (2001) a respeito da Matemática e da ciência, ele menciona que os matemáticos muitas vezes têm pouca ideia sobre o que está se passando em ciência e em engenharia, do mesmo modo os cientistas experimentais e engenheiros muitas vezes não se dão conta das oportunidades oferecidas pelo progresso da Matemática pura.

O mesmo autor diz que esse desequilíbrio é perigoso e deve ser restaurado, "trazendo mais ciências para educação dos matemáticos e expondo os futuros cientistas e engenheiros à Matemática presente em todas as ciências, na tecnologia, na economia e na gestão política". No entanto, para isso serão necessários "novos currículos e um grande esforço de parte dos matemáticos, para trazer as técnicas e ideias matemáticas fundamentais (principalmente aquelas desenvolvidas nas últimas décadas) a uma audiência maior". (D'AMBRÓSIO, 2001, p. 31).

Já com relação à questão número 3, a qual é bastante relevante para essa pesquisa, os alunos fizeram uma espécie de avaliação dos trabalhos matemáticos sobre medidas de áreas sob o enfoque CTS, estabeleceram um panorama de como ocorre o ensino sob esse direcionamento, bastante interessante.

Respaldos sobre as respostas da questão 3 podem ser encontrados em Bazzo (1998) que discute a inserção da CTS na grade curricular, em Osório (2002) que discute e orienta como utilizar o Enfoque CTS na educação, nos trabalhos de Acevedo Díaz, Manassero Mas e Vázquez Alonso (2002) e Acevedo Díaz, Vázquez Alonso e Manassero Mas (2003) que discute as concepções sobre CTS de alunos do ensino médio, e a formação de professores para a Educação CTS e nos trabalhos de Pinheiro, Silveira e Bazzo (2007) que discutem a relevância do Enfoque CTS para o Ensino Médio. Nos trabalhos de Pinheiro (2005, 2008) e Pinheiro, Silva e Santos Junior (2007), os quais envolvem a discussão da Ciência Tecnologia e Sociedade relacionando-as com a Educação Matemática Crítica.

4. Considerações finais

Considerando a problemática sobre quais contribuições o enfoque CTS proporcionaria à aprendizagem do conteúdo específico da matemática, medidas de áreas. O objetivo foi de analisar os resultados obtidos nas discussões em torno das atividades aplicadas na pesquisa. Falar sobre CTS envolve uma variedade inesgotável de situações e neste trabalho os assuntos relativos à CTS foram, introdutórios, de conceitos principais.

Os envolvidos na pesquisa passaram a entender que a tecnologia procede do conhecimento científico, descartando a interpretação de tecnologia como apenas aparelhagens. Abandonaram a concepção de dependência entre ciência e tecnologia apresentando opiniões que levam em consideração aspectos, éticos, políticos, morais e sociais.

Notaram que a sociedade em geral está bastante dependente da tecnologia, que o desenvolvimento científico-tecnológico proporciona avanços, no entanto isso deve ser discutido cuidadosamente no que se refere à finalidade de tais avanços.

A maneira com que as atividades foram elaboradas teve importância crucial para que os questionamentos surgissem, assuntos polêmicos envolvendo a Ciência e a Tecnologia foram postos em discussão, os alunos tiveram que opinar, mostrando que têm potencial crítico e político para intervir na sociedade que os envolve.

Com o enfoque CTS os assuntos abordados durante as aulas de Matemática, revelaram que o envolvimento com a disciplina torna-se prazeroso proporcionando a liberdade para o aluno expressar seus anseios, opiniões e sugestões.

O conteúdo medidas de áreas enxertado com os elementos de CTS trouxe em cada atividade problematizações que necessitavam de argumentações e cálculos para respondê-las, nas quais os envolvidos na pesquisa tornaram-se produtores de seu próprio conhecimento.

A questão da utilização de imagens de satélite como recurso didático, aconteceu em função das reflexões em torno da preocupação de levar ou proporcionar aos alunos mais alternativas para a aprendizagem da matemática. As visões que tais imagens proporcionaram deixaram evidente que a aprendizagem da matemática pode acontecer por meio de visualizações atraentes, foi importante também, a conscientização que estas imagens proporcionaram no trato das atividades que envolviam medições.

Portanto, de maneira bastante explícita, obteve-se como resultados da pesquisa:

a) A possibilidade de elaboração de atividades de modo atraente, articulador e substancial, por meio de contextualizações reais e controversas.

b) O posicionamento crítico dos participantes da pesquisa diante da ciência, tecnologia e da Matemática.

c) A percepção da Matemática como “ferramenta” utilizada como balizadora dos avanços científicos e tecnológicos.

d) A sala de aula tornou-se um ambiente de investigação, esse fato ocorreu em função da possibilidade dos envolvidos na pesquisa medirem, construírem e compararem superfícies de áreas.

e) A mudança na postura do professor também ficou evidente. O professor deverá ser articulado e disposto a produzir suas aulas periodicamente.

Bibliografia

Acevedo Díaz, J. A. (1998). Análisis de algunos criterios para diferenciar entre ciencia y tecnología: una aproximación al tema. *Enseñanza de las Ciencias***.** v. 16, n.3, p. 409-420.

Acevedo Díaz, J. A. Manassero Mas, M. A.; Vázquez Alonso, A. (2002). Nuevos retos educativos: hacia una orientación CTS de la alfabetización científica y tecnológica. *Revista Pensamiento Educativo*, n. 30, p. 15-34, jul.

Acevedo Díaz, J. A. Vázquez Alonso, A.; Manassero Mas, M. A. (2003). Papel de la educación CTS en una alfabetización científica y tecnológica para todas las personas. *Enseñanza de las Ciencias*, v. 2, n. 2, artículo1.

Alves-Mazotti, A. J. Gewandsznajder, F. (2001). *O método nas ciências naturais e sociais: Pesquisa quantitativa e qualitativa*. Pioneira Thomson Learning. São Paulo.

Angotti, J. A. P., Bastos, F. P., Mion, R. A. (2001). *Educação em Física: Discutindo Ciência, Tecnologia e Sociedade*. Revista Ciência & Educação, v.7, n.2, p.: 183-197. Ed. Escrituras, São Paulo (ISSN 1516-7313).

Auler, D. (2002). *Interações entre Ciência-Tenologia-Sociedade no contexto da formação de professores de Ciências*. Tese (Doutorado em Educação), CED, UFSC, Florianópolis/SC.

Auler, D. Bazzo, W. A. (2001). Reflexões para implementação do movimento CTS no contexto educacional brasileiro. *Ciência e Educação,* Bauru (SP), v. 7, n. 1, p.1-27.

Baturo, A.; Nason, R. (1996). *Student teachers subject matter knowledge within the domain of area measurement*. Educational Studies in Mathematics, 31, 235–268.

Bazzo, W. A. (1998). *Ciência, Tecnologia e Sociedade: e o contexto da educação tecnológica.* Florianópolis: Ed. da UFSC.

Bazzo, W. A. (2002). A pertinência de abordagens CTS na educação tecnológica. *Revista Iberoamericana de Educación*, n. 28, p. 83-99. Biblioteca Digital da OEI (Organização de Estados Iberoamericanos para a Educação, a Ciência e a Cultura), Disponível em: <http://www.campus-oei.org/>. Acesso em: 15 nov. 2010.

Bazzo, W. A.; Linsingen, I. von; Pereira, L. T. do V. (Ed.). (2003).*Introdução aos Estudos CTS (Ciência,Tecnologia e Sociedade)*. Madri: Oei. 170 p.

Bogdan, R. C.; Biklen, S. K.(1994) *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora. 333 p.

Brasil. (2000). Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM).* Brasília.

Cavanagh, M. (2008). Area measurement in year 7. *Reflections,* v. 33, n. 1, p. 55-58.

Cervo, A. L.; Bervian, P. A. (2001). *Metodologia científica: para uso dos estudantes universitários*. 3. Ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.

Chiummo, A. (1998). O conceito de áreas de figuras planas: capacitação para professores do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em ensino de matemática). Pontíficia Universidade Católica de São Paulo. Disponível em: www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertação/anachiummo.pdf. Acesso 20 jan. 2012.

D'Ambrósio, U. *Etnomatemática:* elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica.

Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. (Eds.). (1994). *Handbook of Qualitative Research*. Thousand Oaks: Sage, cap. 15.

Fainguelernt, E. K. (1999). *Educação matemática:* representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artmed.

Fonseca, M. C. F. R.; et al. (2002). *O ensino de Geometria na escola fundamental:* três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica.

Freire, P. (1983). *Pedagogia do oprimido*. 13ª ed. Rio de Janeiro. Paz e Terra.

García, J. L. et al. (1996). *Ciencia, Tecnología y Sociedad: Una Introducción al Estudio Social de la Ciencia y la Tecnología*. Madrid: TECNOS.

Gilbert, J. K. (1995). Educación tecnológica: una nueva asignatura en todo el mundo. *Enseñanza de las Ciencias.* v. 13, n. 1, p. 15-24.

Gordillo, M. M.; Ramirez, R. A.; Álvarez, A. C.; GARCÍA, E. F. (2001). *Ciencia, tecnología y sociedad*. Madrid: Grupo Editorial Norte. 258 p.

Gordillo, M. M.. Galbarte, J. C. G. (2002). Reflexiones Sobre la Educación Tecnológica desde el Enfoque CTS. *Revista Iberoamericana de Educación,* n. 28, p. 17-59. Biblioteca Digital da OEI. Disponível em: <http://www.campus-oei.org>. Acesso em 1 fev. 2011.

INPE. (2011). *Istituto de Pesquisas Espaciais*. disponível em: www.inpe.br. Acesso em: 06 Jan.

Kidman, G. (1999). *Grade 4, 6 and 8 students' strategies in area measurement*. Proceedings of the 22nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA) (Volume 1, pp. 271-277). Adelaide: MERGA.

Kordaki, M.; Potari, D. (2002). *The effect of area measurement tools on strategies: The role of a computer microworld.* International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7, 65-100.

Laburú, C. E.; Barros, M. A. (2009). *Problemas com a compreensão de estudantes em medição: razões para a formação do paradigma pontual*. Revista Investigações em Ensino de Ciências – V14(2), pp. 151-162.

Marulanda**,** C. O. et al. (2005)**;** Tecnología y Sociedad. *Manual de trabajo para docentes y estudiantes de educación básica secundaria y media*. Disponível em: <http://www.oei.es/salactsi/uvalle/gdd_capitulo4.htm>. Acesso 11 Jul 2012

Murphy, C. (2009). *The role of subject knowledge in primary student teachers' approaches to teaching the topic of area.* Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st. Lyon France INRP.

Osorio M., C. (2002). *La Educación científica y tecnológica desde el enfoque en ciencia, tecnología y sociedad. Aproximaciones y experiencias para la educación secundaria*. Revista Iberoamericana de Educación. N.28. Biblioteca da OEI. Biblioteca Digital da OEI. pp. 1-15.

Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. *Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement.* Journal for Research in Mathematics Education, **31**(2), 144167, 2000.

Pinheiro, N. A. M. (2005) *Educação crítico-reflexiva para um ensino médio científico-tecnológico:* a contribuição do enfoque CTS para o ensino e aprendizagem do conhecimento matemático. 2005. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica)- Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Pinheiro, N. A. M. Silveira, R. M. C.; Bazzo, W. A. (2007). Ciência, Tecnologia e Sociedade: a relevância do enfoque CTS para o contexto do ensino médio. *Ciência & Educação,* v. 13, n. 1, p. 71-84.

Pinheiro, N. A. M. (2008). Educação matemática crítica: discutindo sobre suas perspectivas e contribuições para o ensino-aprendizagem da matemática. *Boletim GEPEM,* n. 52, jan./jun. p. 29-49.

Pinheiro, N. A. M; Silva, S. C. R.; Santos Júnior, G. (2007). Educação matemática crítica: uma perspectiva para o ensino na sociedade científico-tecnológica. Disponível em: <www.fae.ufmg.br/abrapec>. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS (ENPEC.SC). 6, 2007. **Anais...** Florianópolis: UFSC.

Rubba, P. A. Harkness, W. L. (1993) Examination of preservice and in-service secondary science teachers' beliefs about science-technology-society interactions. *Science Education,* v. 77, n. 4, p. 407-431.

Rubba, P. A. Schoneweg, C.; Harkness, W. L. (1996) A new scoring procedure for the views on Science- Technology-Society instrument. *International Journal of Science Education,* v.18, n. 4, p. 387-400.

Skovsmose, O. (2007) *Educação crítica*: Incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo. Cortez.

Skovsmose, O. (2008). *Desafios da Educação Matemática Crítica*. São Paulo: Papirus.

Tierney, C., Boyd, C., Davis, G. (1990). Prospective Primary Teachers' Conceptions of Area. In: Booker, G., Cobb, P., Mendecuti, T. D. (Eds.), *Proceedings of the 14th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 307–315). Mexico: IGPME.

Vilches, A., & Furió, C. (1999). *Ciencia, Tecnología, Sociedad: Implicaciones en la Educación Científica para el Siglo XXI*. Biblioteca Digital da OEI para a Educação, a Ciência e a Cultura.

Carlos Teles de Miranda: Licenciado em matemática pela Universidade Paranaense - UNIPAR em 2003. Pós-Graduado em Ensino de Ciências e Matemática - Unioeste 2010. Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia - UTFPR - Ponta Grossa - PR. Professor de Metodologia para o ensino da matemática e Estágio Supervisionado em Matemática. UNIPAR - Campus Cascavel. **carlost@unipar.br**

Guataçara dos Santos Junior: Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (1993), Mestre em Ciências Geodésicas pela UFPR (2001). Doutor em Ciências Geodésicas pela UFPR (2005). Atualmente é professor de matemática na UTFPR-Campus Ponta Grossa. Atua na Graduação, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção (Mestrado) e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia (Mestrado). **guata39@gmail.com**

Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro: Licenciada em Matemática pela UEPG (1993), Mestrado em Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (1999) e Doutorado em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (2005). Atualmente é professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, atua na área de matemática. Desenvolve e orienta pesquisa nas áreas de Educação Matemática e Educação Científica e Tecnológica. **nilceiaamp@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre 2014
páginas 135-140
www.fisem.org/web/union

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Flexibilidad, originalidad y fluidez en la variación de problemas

Problema

Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 se deben escribir números de tres dígitos con las siguientes reglas:

a) En cada número no se deben repetir los dígitos
b) El dígito del centro debe ser la suma de los dígitos que van a los extremos

¿Cuál es el mayor número que se puede formar?

¿Cuál es el menor número que se puede formar?

Este problema fue creado por una profesora de primaria en una experiencia didáctica con doce profesores de este nivel educativo sobre creación de problemas de matemáticas, mediante variaciones de la siguiente situación con sus problemas, en forma de actividades individuales:

Situación[1]

Se escriben los números

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9

y luego se pintan según las siguientes reglas:

1. Sólo se pueden usar los colores rojo, azul y verde.
2. Cada número se pinta con un solo color.
3. Si un número se pinta de rojo, debe ser la suma de un número pintado de azul más un número pintado de verde.

Actividades individuales

a) Juan pintó los números como se indica a continuación:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	**V**	**V**	**R**	**V**	**A**	**R**	**A**	**R**

Pedro dice que Juan no ha respetado todas las reglas.

Examina si Pedro tiene razón. En caso que la tenga, ¿Cuál de las reglas no respetó Juan? ¿Por qué? ¿Se puede cambiar el color de uno de los números y tener así todos los números pintados respetando las reglas? ¿Cuál? ¿Hay sólo una posibilidad?

[1] Situación y problemas ampliamente examinados en Malaspina, U. (2008) http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/16/Union_016_022.pdf

b) Carlitos empezó a pintar los números y se le ocurrió pintar el 2 de azul, el 6 de verde y el 9 de rojo. Muestra que es posible mantener estos colores del 2, 6 y 9 y terminar de pintar los nueve números respetando las reglas.

c) Examina si es posible pintar los nueve números respetando las reglas y que al final el 4, el 5 y el 9 sean rojos.

Como se puede percibir, las modificaciones introducidas por la profesora son de carácter cualitativo y revelan *flexibilidad* y *originalidad* en la tarea creativa. Flexibilidad en el sentido de hacer las modificaciones con amplitud, yendo más allá de cambios ligeros a lo presentado en el problema; y originalidad en el sentido de presentar novedad respecto al problema dado y distinguirse notoriamente de otras modificaciones al mismo problema. La profesora se apartó de la situación presentada – en el sentido de colorear los dígitos – pero usando los dígitos planteó nuevas reglas encaminadas a construir nuevos números (de tres dígitos) y puso requerimientos de un problema de optimización sencillo, adecuado para alumnos de primaria, que son muy distintos a los requerimientos de los problemas en los ítems a, b y c relacionados con la situación planteada. El problema es muy diferente, en relación a los problemas presentados por los otros once profesores y fue correctamente resuelto por su autora.

Es importante hacer notar que la profesora entendió la situación y resolvió correctamente los problemas de los ítems a, b y c. Es más, el problema que propuso y estamos comentando, es el segundo de los que creó, siendo el primero en relación a la situación dada y con variaciones relacionales al problema del ítem c. A continuación transcribimos su primer problema:

Examina si es posible pintar los nueve números respetando las reglas y que al final el 4, 6, 8 y 9 sean rojos.

Presentó como solución:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	**A**	**V**	**R**	**V**	**R**	**V**	**R**	**R**

Así, en la propuesta completa presentada por la profesora, encontramos también *fluidez*, en el sentido de crear más de un problema, con ideas y propuestas diferentes, a partir de la situación y los problemas dados.

Cabe destacar que en la experiencia didáctica no se dio previamente orientación alguna para crear problemas. Luego de presentarles la situación y las preguntas en los ítems a, b y c, se les pidió crear problemas o plantear preguntas teniendo como fuente de inspiración la situación y los problemas propuestos.

Toda la experiencia didáctica se desarrolló en 90 minutos, de los cuales 30 fueron dedicados a la creación de problemas, en forma individual. Los primeros 50 fueron dedicados a la resolución individual de los problemas propuestos en la situación y a la socialización de tales soluciones, con el fin de tener un buen grado de comprensión de la situación y de los problemas. Hubo 10 minutos de socialización de los problemas creados por los profesores.

Siguiendo las reflexiones iniciadas en el artículo del número anterior de UNIÓN, buscamos criterios para construir indicadores de la capacidad de crear problemas y – conscientes de la importancia de observar modificaciones cualitativas a la información y requerimientos de un problema dado – propusimos la situación descrita más arriba y los problemas de los ítems a, b y c, que se prestan para modificaciones cualitativas, por plantear explícitamente algunas reglas sencillas, relacionando el coloreo de números escritos y la suma de tales números. Ahora, teniendo en cuenta criterios adoptados en los test de creatividad (Alencar, E.M.L.S., 1990; Gontijo, C. y Fleith, D.S. (2010), usamos la *flexibilidad, originalidad y fluidez*, según lo especificado en párrafos anteriores. Con tales criterios, en las propuestas de los 12 profesores encontramos 11 que reflejan bastante flexibilidad, pues cambian las reglas dadas; 4 con bastante originalidad, pues usan expresiones verbales de gran importancia matemática, introducen, otra operación aritmética, usan la paridad e imparidad de los dígitos o plantean preguntas con varias respuestas correctas; y 11 con fluidez considerable, pues propusieron más de un problema, con ideas y propuestas diferentes. En un estudio más sistemático se debería definir con más precisión lo que se entiende por flexibilidad, originalidad y fluidez y establecer niveles en una escala ordinal.

El análisis de las propuestas de los 12 profesores de primaria nos muestra una vez más que existen capacidades creativas de problemas de matemáticas en los docentes y que es responsabilidad de los formadores de profesores el desarrollarlas y potenciarlas.

A continuación transcribimos algunos otros problemas creados por los profesores, y comentamos aspectos relacionados con la flexibilidad, originalidad y fluidez que percibimos.

- Problemas del profesor 4

4.1 *Lupe pinta los números de la siguiente manera:*

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
V	**A**	**R**	**A**	**V**	**V**	**V**	**R**	**R**

Verifica si se cumplen las reglas dadas en la situación.

4.2 *Se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 y luego se pintan según las siguientes reglas:*

i) Solo se pueden usar los colores azul, verde y rojo

ii) Por lo menos dos números deben ser pintados con cada color

iii) Si un número se pinta de rojo, este debe resultar de la resta de un número azul y otro verde

Muestra una forma de pintar los números cumpliendo las reglas dadas.

Comentarios

Si bien el texto del problema 4.1 no revela flexibilidad ni originalidad, el haberlo formulado y luego resuelto correctamente, hace que con el problema 4.2 constituyan una muestra de fluidez, pues la autora formula un problema adicional, con ideas diferentes. En este problema (el 4.2) muestra flexibilidad al incluir nuevas reglas. Muestra originalidad al usar la expresión "*por lo menos*", que por su importante significado matemático es de gran relevancia introducirlo desde la primaria. Además, usa otra operación – la sustracción – en lugar de la adición. Tal como está planteado, tiene más de una respuesta correcta, lo cual es esencial en la formación matemática de los niños.

Con las nuevas reglas se pueden plantear problemas más desafiantes como

¿Cuál es la mayor cantidad de números que pueden pintarse de rojo?

Puede ser muy enriquecedor plantear conjeturas para la respuesta y demostrarlas o rechazarlas.

- Problema del profesor 6

Se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 y luego se pintan según las siguientes reglas:

i) Se pintan todos los números de verde, amarillo o rojo

ii) Cada número se pinta de un solo color

iii) Los números pares pintados de verde deben ser la suma de dos impares pintados uno de amarillo y otro de rojo.

iv) Por lo menos dos números pares se pintan de verde.

Ana pinta los números de la siguiente manera:

1	2	3	4	5	6	7	8
R	**R**	**A**	**V**	**A**	**V**	**A**	**V**

Juan dice que Ana no ha cumplido las reglas. ¿Juan dice la verdad? ¿Por qué?

Comentarios

La flexibilidad está en haber cambiado las reglas dadas en la situación inicial, inclusive cambiando los "roles" de los colores y reduciendo de 9 a 8 el total de dígitos a considerar. La originalidad se percibe al incluir el uso de la paridad e imparidad de números enteros en su regla (iii). Con el profesor 4 son los únicos que introducen el uso de "por lo menos", cuya importancia ya hemos comentado.

Se puede pensar en preguntas que susciten discusión en sesiones de socialización, como:

¿se puede pintar de verde algún número impar?

¿cuál es el menor número que se puede pintar de verde?

- Problemas del profesor 7

7.1 *¿Se pueden cumplir las reglas dadas en la situación y tener pintados todos los números en tres grupos de tres, de diferentes colores?*

7.2 Si pinto los números pares de azul ¿se pueden pintar los impares usando los otros dos colores y respetando las reglas?

Comentarios

El profesor muestra fluidez al presentar dos problemas cualitativamente diferentes. Si bien no cambia las reglas y podríamos caracterizar las propuestas con poca flexibilidad, las preguntas que formula muestran originalidad. Ambos problemas invitan a considerar la existencia de una solución y la socialización de soluciones llevaría a verificar que hay más de una solución, lo cual es muy importante por el énfasis que se pone en los centros educativos en trabajar con problemas de respuesta única.

- Problema del profesor 11

Se escriben los dígitos del 1 al 9 y se pintan según las siguientes reglas:

i) Solo se pueden usar el verde, rojo o azul

ii) Cada número se pinta de un solo color

iii) Si un número se pinta de rojo, debe ser la resta de un número pintado de azul menos un número pintado de verde.

Juan pintó los números así:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
V	V	A	R	R	V	V	A	A

Abel dice que Juan no ha respetado todas las reglas. Examina si Abel tiene razón.

Comentarios

Se percibe la flexibilidad al haber modificado la regla 3 de la situación por su regla (iii), en la que muestra originalidad al cambiar la adición por la sustracción. Con el profesor 4 son los únicos que introducen el uso de una operación distinta de la que se usa en la situación dada.

Comentarios generales

1. La experiencia didáctica muestra que en los profesores de primaria en ejercicio hay potencialidades didácticas y matemáticas para la creación de problemas.
2. La profundización de conocimientos matemáticos y las reflexiones sobre experiencias docentes, con los criterios dados por los enfoques teóricos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, contribuirán a acrecentar en los docentes potencialidades como las percibidas.
3. Mediante estrategias adecuadas, se puede estimular el desarrollo de competencias didácticas y matemáticas de los docentes en formación y en servicio. En Malaspina (2013) y Malaspina (2014a, 2014b) se resumen algunas estrategias, que consideramos serían muy útiles al aplicarlas en los procesos de enseñanza y aprendizaje para la formación inicial y continua de los docentes.
4. Establecer indicadores para medir la capacidad de crear problemas de matemáticas pasa por la dificultad de establecer previamente los criterios. Algunos de ellos están esbozados en el presente artículo y en el del número anterior de UNIÓN, pero requieren ser afinados y profundizados. Puede ser un interesante trabajo interdisciplinario con psicólogos interesados en la educación, y en particular en la educación matemática.

Referencias

Alencar, E.M.L.S. (1990). Como desenvolver o potencial criador: uma guía para a liberaçao da criatividade em sala de aula. Ptrópolis: Vozes

Gontijo, C. y Fleith, D.S. (2010). Avaliaçao da criatividade em matemática. Em *Medidas de criatividade*. Porto Alegre: Artmed.

Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, (pp. 117–128). Uruguay: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.

Malaspina, U. & Vallejo, E. (2014a). Problem posing in preservice primary school teachers' training. En Osterle, S., Nicol, C., Liljedahl, P. & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of the PME 38 and PME-NA 36*, Volumen 6 (p. 159). Vancouver, Canadá: PME.

Malaspina, U., Mallart, A. & Font, V. (2014b). Problem posing as a means for developing teacher competencies. En Osterle, S., Nicol, C., Liljedahl, P. & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of the PME 38 and PME-NA 36*, Volumen 6 (p. 356). Vancouver, Canadá: PME.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre 2014
páginas 141-161
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC):

Aplicaciones Tecnológicas para el Aprendizaje de las Matemáticas

José Carlos Cortés Zavala, Lourdes Guerrero Magaña,
Christian Morales Ontiveros, Lourdes Pedroza Ceras

Resumen	Se presenta el trabajo realizado bajo la línea de investigación relacionada con el uso de tecnología computacional para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En ésta convergen aspectos y tendencias educativas actuales, tales como: el uso de software, el uso de diversas plataformas de Internet, el diseño y desarrollo de software educativo y la utilización de calculadoras y computadoras, entre otros. Estudiamos las tendencias citadas desde la perspectiva de los profesores (didáctica y enseñanza) y desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas (aspectos cognitivos), a través de la creación y uso de Ambientes Tecnológicos Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas (ATIAM). Así mismo, se presentan los resultados de investigación respecto al diseño y construcción de software para el aprendizaje de las matemáticas, así como las experimentaciones realizadas en los ATIAM. **Palabras clave**: Tecnología, ambientes de aprendizaje, matemáticas.
Abstract	It presents the work carried out under the research related to the use of computer technology for teaching and learning of mathematics. In this converging aspects and current educational trends, such as the use of software, the use of various Internet platforms, design and development of educational software and the use of calculators and computers, among others. Aforementioned trends studied from the perspective of teachers (teaching and learning) and from the point of view of mathematics learning (cognitive aspects), through the creation and use of Interactive Technological Environments for Learning Mathematics (ATIAM). It also presents the results of research on the design and construction of software for mathematics learning, as well as the experiments conducted in the ATIAM. **Keywords**: Technology, learning environments, mathematics
Resumo	Ele apresenta o trabalho realizado no âmbito da investigação relacionada com o uso da tecnologia de computador para o ensino e aprendizagem da matemática. Neste aspectos convergentes e as tendências educacionais atuais, como o uso de software, o uso de várias plataformas de Internet, design e desenvolvimento de software educativo e da utilização de calculadoras e computadores, entre outros. Tendências acima mencionadas estudado a partir da perspectiva dos professores (ensino e aprendizagem) e, do ponto de vista da aprendizagem matemática (aspectos cognitivos), através da criação e uso de ambientes tecnológicos interativos para aprender matemática (ATIAM). Ele também apresenta os resultados de pesquisa sobre a concepção e construção de software para a aprendizagem de matemática. **Palavras-chave**: Tecnologia, ambientes de aprendizagem, matemática.

1. Introducción

En este artículo se presentan algunos ejemplos del trabajo realizado sobre el diseño y desarrollo de software educativo (SE), que forma parte de la línea de investigación sobre el uso de tecnología computacional para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En ésta línea de investigación convergen varios aspectos y tendencias educativas actuales, tales como: el uso de software, el uso de diversas plataformas de Internet, la utilización de calculadoras y el desarrollo de SE para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El SE es diseñado y desarrollado desde la perspectiva de los profesores (didáctica y enseñanza) y desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas (aspectos cognitivos).

El uso del SE que proponemos está pensado para ser parte de un Ambiente Tecnológico Interactivo para el Aprendizaje de las Matemáticas (ATIAM) al que hemos definido como: "*aquel que se genera en el espacio o entorno donde los actores de los procesos de enseñanza y de aprendizaje (profesor y alumno) y el objeto de conocimiento, interactúan de forma organizada a través de una metodología que incluye actividades de aprendizaje con el uso de tecnología*" (Cortés, Núñez, 2007), es decir el SE forma parte de una estartegía de enseñanza general. Por otro lado el SE que proponemos contiene una propuesta de aprendizaje que se refleja en el tipo de actividades que se proponen como contenido del software.

La investigación realizada alrededor de los ATIAM (Cortés, Núñez 2007; Núñez, Cortés 2008; Núñez 2008), ha mostrado que éstos tienen potencial significativo para favorecer el desarrollo de habilidades asociadas al aprendizaje de conceptos matemáticos y a procesos de construcción relacionados con ellos.

Expondremos también algunos ejemplos del SE mencionada sin tocar a fondo los ATIAM generados con él. Las piezas de SE que expondremos son: FRACCIONES SE para el aprendizaje de operaciones con fracciones; DOMIMAT SE para jugar domino construyendo diversos tipos de escenarios matemáticos; GEODEMO SE desarrollado para promover el aprendizaje de la demostración matemática de estudiantes de bachillerato y por último EXPOBALANCE SE desarrollado para asimilar el aprendizaje de las leyes de exponenciación en estudiantes tanto de secundaria como de bachillerato.

2. Características fundamentales para el diseño de software educativo

La inclusión de la tecnología computacional en el proceso de enseñanza aprendizaje requiere del uso de software especializado. Sin embargo, la mayoría de las veces solamente se dispone de paquetes de cómputo diseñados por empresas con un objetivo comercial; esto es, sus diseños son genéricos, tratando que el producto generado llegue a la mayor cantidad de usuarios posible, resultando así el software genérico desde el punto de vista de la enseñanza, aún siendo éste de matemáticas.

Un diseño efectivo de software educativo debe estar basado en modelos de aprendizaje que puedan ser articulados en los ATIAM. Además, su implementación debe estar libre de errores computacionales y ocuparse de proponer estrategias para el aprendizaje de los conceptos matemáticos objetivo.

Por tal motivo, el desarrollo de software efectivo para la enseñanza y el aprendizaje debe considerar gran cantidad de elementos, tanto de carácter educativo como de tipo computacional; así mismo, debe someterse a diferentes fases de evaluación de su funcionamiento y sobre el sentido educativo específico para lo que fue diseñado.

La etapa de diseño del software debe considerar mínimamente las características que se describen en los siguientes apartados.

2.1. Selección del tema a abordar

Ésta es una característica fundamental para el diseño, ya que posibilita utilizar la tecnología como una *herramienta* de apoyo para resolver un problema de aprendizaje. Dependiendo de la problemática relativa al aprendizaje de un concepto, proceso o idea matemática a atender podemos definir el tipo de tecnología a utilizar considerando también los recursos tanto académicos como económicos con los que cuenta el profesor.

2.2. Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

Es necesario considerar aspectos teóricos para elaborar una estrategia de aprendizaje que pueda dirigir la actividad educativa; se deben tomar en cuenta fundamentos de enseñanza y de aprendizaje para las actividades que se van a proponer. Además de fundamentar la propuesta de desarrollo de software en los elementos teóricos propios del área y del tema a abordar, particularmente se ha utilizado la teoría de representaciones semióticas, propuesta por Duval (1988), así mismo se pretende promover en el estudiante el uso de la visualización, en el sentido de Zimmermann W. & Cunningham S. (1991), en cada representación. Por ejemplo, en el SE "*Fracciones*" se utiliza el Registro Semiótico Numérico así como el Registro Semiótico Gráfico para representar las ideas de incrementos de una variable. Así mismo, en el SE "*DinExpontes*" no solo se utilizan estos registros semióticos, sino que además se logra identificar como un mismo objeto puede tener diferentes representaciones semióticas.

2.3. La programación

Consiste en la implementación de la propuesta en un lenguaje de programación. Es necesario elaborar una interface de comunicación y control del programa para con el usuario, y codificar, en algún lenguaje, las estrategias para abordar el tema. En particular hemos trabajado con Visual Basic y Java, ya que son lenguajes que incorporan un ambiente gráfico de fácil y rápido manejo; además, éstos combinan la programación estructurada con la orientada a objetos, dando la posibilidad de implementar módulos reutilizables para la construcción de distinto software.

2.4. Prueba del programa

Una vez que se tiene un primer prototipo, se debe realizar una prueba técnica para determinar su buen funcionamiento; después, es necesario comprobar que el software cumple los objetivos didácticos para los que se diseñó.

En la evaluación técnica se contempla que:

- no existan errores de programación
- la actividad que se propone se entienda con claridad
- permita al usuario navegar en él sin dificultad

- permita la introducción sencilla de respuestas.

Para la evaluación del software desde un punto de vista educativo, se debe valorar los objetivos didácticos para los que fue realizado. Normalmente se realizan experimentaciones piloto basadas en los sustentos teóricos, la estrategia que se está implementando y el manejo del software. Estas experimentaciones se plantean a diferentes niveles, primeramente con pequeños grupos y posteriormente con grupos de estudiantes y profesores en ambientes naturales.

2.5. Documentación

Una característica fundamental, ya que permite que el software sea utilizado por una población mayor, es la descripción del funcionamiento del programa a través de un manual y de las actividades que pueden ser utilizadas en combinación con el software. Éstas servirán de guía hacia los aprendizajes que se quieren favorecer y deberán incluir los objetivos para los que fueron creadas.

Exponemos en las siguientes secciones dos ejemplos del trabajo de investigación que se ha venido realizando y las características de desarrollo de software anteriormente expuestas.

3. Primer Ejemplo: FRACCIONES

3.1 Selección del tema a abordar

Para estudiantes de primaria y secundaria el entendimiento de lo que es un número fraccionario no es fácil. Un número fraccionario se representa de la forma $\frac{a}{b}$, lo cual hace que los estudiantes consideren, a este número, como una operación que se debe realizar. En este sentido Lamon menciona que los niños muestran un obstáculo cognitivo debido a la experiencia que de ellos tiene y que intentan hacer conexiones entre números y operaciones con los que están familiarizados (Lamon, 1999, p.25); Es decir dividir a entre b siendo el resultado el número buscado, para ellos resulta complicado entender que un número puede ser representado de la manera $\frac{a}{b}$. Este razonamiento es lógico debido a que los estudiantes, antes de trabajar con números fraccionarios, han conocido los números naturales y las operaciones entre ellos. Es difícil entender que la forma de representar a los números fraccionarios y la representación de operaciones entre números naturales es diferente, aún cuando se escriben igual.

En el software que se diseñó y desarrolló (Cortés, López 2003) se utilizan actividades que promueven la representación de números en forma de fracciones simples $\frac{a}{b}$ y mixtas $a\frac{b}{c}$. Primeramente se utiliza una representación gráfica y se pide el valor numérico, posteriormente se da la representación numérica y se pide la gráfica. Considerando que cuando el estudiante realiza operaciones gráficas con fracciones le facilitará el entendimiento de números fraccionarios.

3.2. Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

A continuación se explica la secuencia de actividades de aprendizaje que se promueven en el software fracciones. Primeramente se muestra la pantalla de inicio y se dan las opciones en la barra del menú.

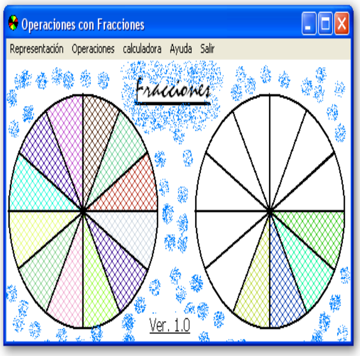


Figura 1: Pantalla de inicio

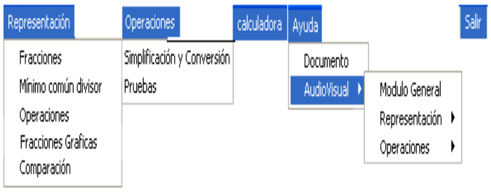


Figura 2: Opciones de menú

El módulo de Fracciones cuenta con cinco menús principales que son: Representaciones, operaciones, calculadora, ayuda y Salir. A su vez algunas de las opciones cuentan con sub-menús tal y como se muestra en las anteriores figuras.

Las actividades que realizará el estudiante están dadas en cada una de las opciones. Se han agrupado en dos rubros que son Representaciones y Operaciones. En los siguientes apartados explicaremos cada una de las actividades.

Representaciones: *opción Fracciones*

En esta parte, la idea principal de esta actividad es: presentar gráficamente una fracción y también su representación numérica.

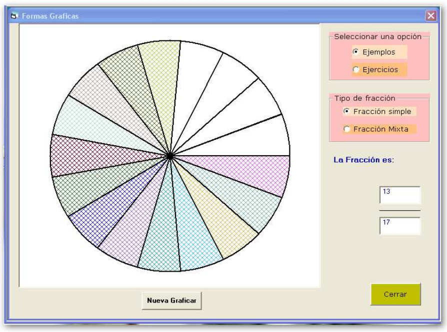


Figura 3: La pantalla principal de la actividad

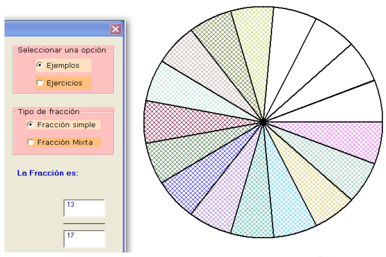


Figura 4: Ejemplo de Fracción simple

Podemos seleccionar ejemplos y ejercicios de Fracciones simples o Fracciones compuestas:

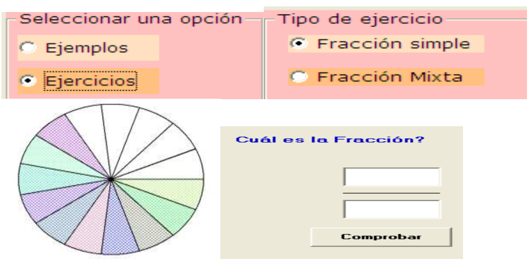


Figura 5: Un ejercicio de Fracción Simple

Figura 6

En los espacios en blanco el usuario introduce datos, La primera es respuesta correcta y la segunda incorrecta

La actividad que se espera realice el estudiante es la de convertir una representación gráfica en una fracción simple de forma numérica.

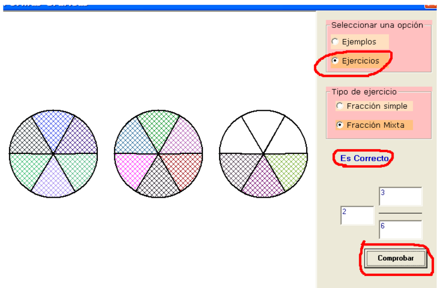


Figura 7: Un ejercicio de Fracción Mixta

La actividad que se espera realice el estudiante es la de convertir una representación gráfica en una fracción mixta de forma numérica

Representaciones: *opción Mínimo común divisor*

En esta parte se pretende que se adquiera la habilidad de, dados dos (ó tres) fracciones, analizar y encontrar el valor mínimo que cumple con la característica de ser divisible entre los denominadores de las fracciones presentes, y dicho valor encontrado sea representado gráficamente:

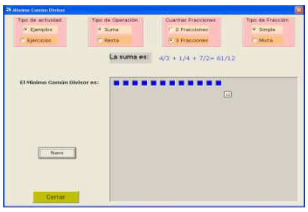


Figura 8: Pantalla principal

Figura 9: Un ejemplo

Como se observa, se podrá elegir entre si se desea suma o resta, con dos ó tres fracciones o si desea usar con fracciones simples o mixtas.

Cuando se ha elegido ejemplos, se mostrará el resultado, de las operaciones de las fracciones, de manera gráfica. Para que se muestre cuantos cuadritos en azul son, basta con poner el puntero del Mouse en el último cuadro y se mostrará el número del mismo. Para ver otros ejemplos solamente hay que dar clic en el botón que dice nuevo

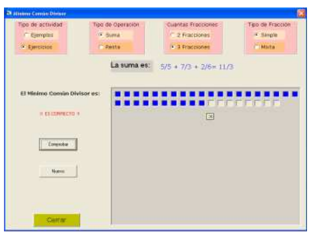


Figura 10: Un ejercicio de Fracción simple

Si se eligen ejercicios, se tendrá que buscar el valor numérico que cumple como mínimo común divisor y una vez hallado se indicara de manera gráfica dando un clic en el cuadrito deseado y, automáticamente, se seleccionarán todos los cuadritos, poniéndose en azul, desde el primero de la izquierda hasta el cuadro elegido. Dando clic en Comprobar, se sabrá si la representación dada fue la indicada o no.

Representaciones: *opción operaciones*

En esta parte, la idea principal es convertir de una representación numérica a una gráfica:

Figura 11: Pantalla principal

Al igual que en las actividades anteriores tenemos ejemplos y ejercicios de una fracción, de suma y de multiplicación.

Las operaciones se representan gráficamente en la forma de fracción mixta, por lo que tenemos parte entera y parte fraccionaria. Los cuadros azules representan la parte seleccionada y los amarillos la unidad. Por ejemplo el resultado de la suma 15/10 más 5/6 es 7/3 que corresponde a dos entero y 1/3.

Figura 12: Ejemplo de suma de fracciones

Ejercicio de Suma de Fracciones: En la actividad relacionada con ejercicios el estudiante tiene que seleccionar la cantidad de cuadros que corresponden a la fracción mostrada numéricamente.

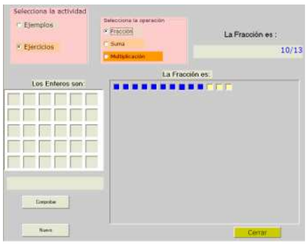


Figura 13

El estudiante tendrá que seleccionar la fracción correspondiente dando un clic en el cuadro amarillo deseado (contando de izquierda a derecha) y se seleccionaran todos los cuadros desde el primero de la izquierda hasta el cuadro elegido. En caso de existir enteros debemos dar un clic en el cuadro seleccionado de la ventana de enteros. Para deseleccionar la opción tomada se da dos clics en el cuadro elegido y listo. Para validar si es correcta la respuesta, se da clic en el botón “comprobar” y sabremos si lo es o no, tal y como se muestra.

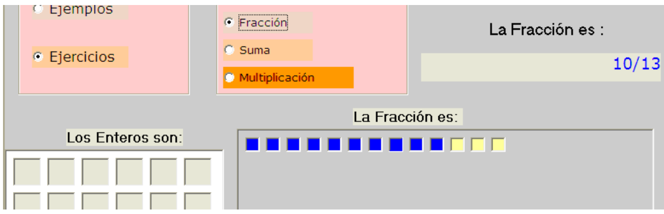


Figura 14

Representaciones: *opción fracciones gráficas*

La finalidad de esta parte es, la de que, mediante gráficas y su operación entre ellas, se obtenga y se introduzca el valor numérico del resultado de la suma o resta de dos fracciones simples o mixtas, además de obtener el mínimo común divisor de las dos fracciones

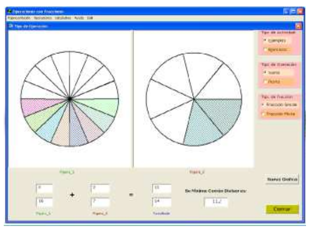


Figura 15: Pantalla principal

Las opciones que encontraremos será la de si se desea un ejemplo ó un ejercicio, o bien una suma o una resta o usar fracciones simples ó mixtas.

Cada fracción, de la operación en cuestión, está representada por una gráfica, excepto la del resultado. Los ejemplos mostrarán los resultados tanto de la operación de las fracciones (reducida a su mínima expresión) como el mínimo común divisor de las dos fracciones. Si elegimos un ejercicio, tendremos que introducir el resultado de la operación de las dos fracciones (reducida a su mínima expresión) además del mínimo común divisor. Para ver si lo tecleado está bien basta con dar clic en comprobar.
Es conveniente hacer notar que el resultado de la operación de las fracciones se debe de simplificar hasta donde se pueda (reducida a su mínima expresión), ya que de lo contrario no será correcto. Por ejemplo, en la figura 16 el resultado normal es 78/60, si se da clic en comprobar nos indicará que es erróneo el resultado.

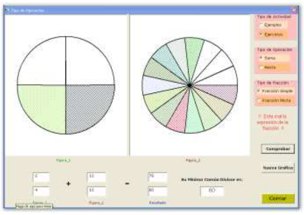


Figura 16

Simplificando la fracción, encontramos que su mínima expresión es 13/10 (la sexta parte de 78/60). Dando clic en Comprobar nos desplegará la figura 17, indicando que es correcto el resultado introducido.

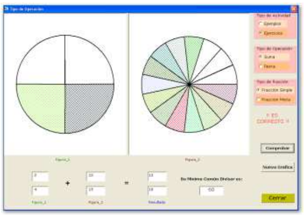


Figura 17

Como se notó, hay que poner tanto el resultado como el mínimo común divisor entre las dos fracciones para que se valide la respuesta.

Representaciones: *opción comparaciones*

La idea principal de esta parte es:

a) Buscar la equivalencia de una fracción dada con alguna de las 12 posibles mostradas.

b) Dado el resultado buscar, entre las 12 posibles mostradas, dos fracciones cuya operación, según se indique entre las dos, sea su equivalente.

Dados 2 fracciones buscar, entre las 12 posibles mostradas, una fracciones que sea el su resultado equivalente.

Su pantalla de inicio nos mostrará la elección de equivalencias, como se muestra en la figura 18.

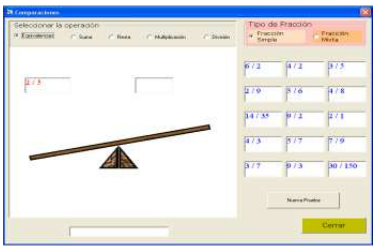


Figura 18

En la cual podremos tener las opciones a elegir del tipo de ejercicio, ya sea equivalencia, suma, resta, multiplicación o división. Y si deseamos usar fracciones simples o mixtas:

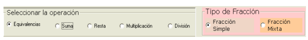


Figura 19

Si elegimos que el tipo de operación no sea equivalencias simples, sino mediante otra operación, tendremos la opción de elegir como deseamos hallar las equivalencias.

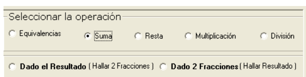


Figura 20

Si elegimos, dado el resultado hallar

O si elegimos, dado dos fracciones hallar el dos fracciones cuya operación sea equivalente a la dada, se mostrará una pantalla semejante a la figura siguiente:

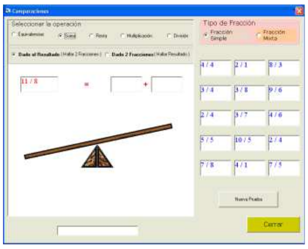


Figura 21

resultado que sea el equivalente a la operación de las dos fracciones, se mostrará una pantalla semejante a la figura:

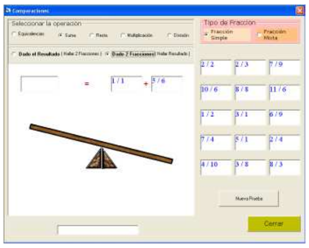


Figura 22

Seleccione una fracción dando clic en la deseada y arrástrelo hacia el espacio de la o las fracciones en blanco. Si los valores seleccionados son correctos la balanza estará en equilibrio, como en la figura:

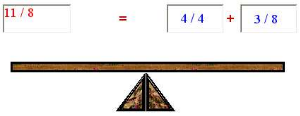


Figura 23

Si los valores son incorrectos y mayores entonces la balanza se irá hacia la derecha y si son menores se irá a la izquierda, figura 24.

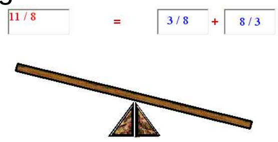


Figura 24

La figura 25 muestra los valores que se presentan, como posibles soluciones, de los cuales se deberá seleccionar uno o dos, dependiendo de lo que se pida. La forma de hacerlo es: elegir la fracción deseada y dar clic en ella y sin soltar, el botón del Mouse, arrastrarlo hacia las ventanas en blanco, y una vez posicionados en el espacio deseado soltar el botón del Mouse para dejar “caer” en el espacio elegido la fracción seleccionada, tal y como se muestra en dicha figura.

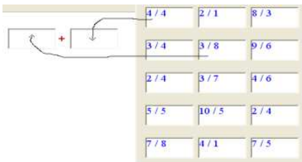


Figura 25

Observe que, en este módulo, el indicador de si la respuesta es correcta o no, será la posición del equilibrio de la balanza.

3.3. Programación del software

Este sistema fue implementado en el lenguaje Visual Basic para Windows, por requerir predominantemente un ambiente de programación para el fácil manejo de gráficos y tablas de datos.

3.4. Prueba del programa

Este software se ha probado, de manera informal, con algunos estudiantes de primaria y de secundaria, y según lo dicho por ellos se les hace una manera agradable de aprender. Una experimentación más completa y formal sobre los beneficios al usar el software de Fracciones será posteriormente expuesta.

3.5. Observaciones generales

La secuencia de actividades que se presentan en el software “Fracciones” permite al estudiante entender lo que es una fracción y ejercitarse en las operaciones básicas con números fraccionarios.

4. Segundo Ejemplo: DOMIMAT

4.1 Selección del tema a abordar

Esta aplicación está basada en el tradicional juego de Domino, pero el contenido de las fichas son expresiones matemáticas como la mostrada en la figura:

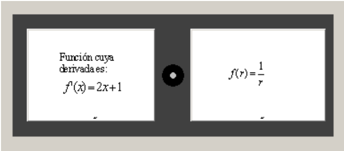


Figura 26

Se siguen las mismas reglas que el juego original, con la opción de jugar un solo usuario contra la computadora. Un de las ideas principales en esta aplicación es que el usuario puede construir sus propias fichas, ya que estas se generan a partir de imágenes en algún formato conocido (Jpg, Gif, Bmp, Tif, etc).

4. 2 Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

La interface de la aplicación es la siguiente:

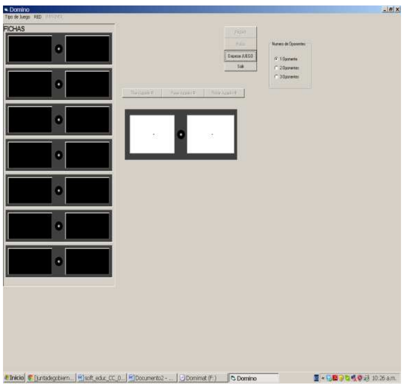


Figura 27: Pantalla principal

Figura 28: opciones que se presentan

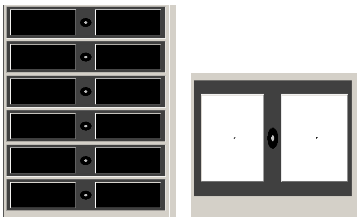


Figura 29: las fichas

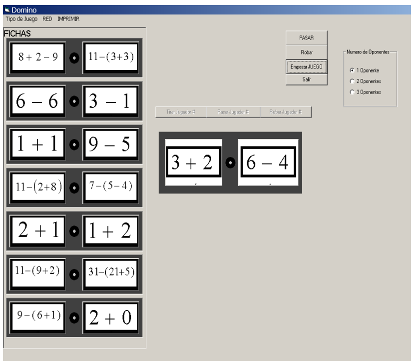


Figura 30: fichas aritméticas

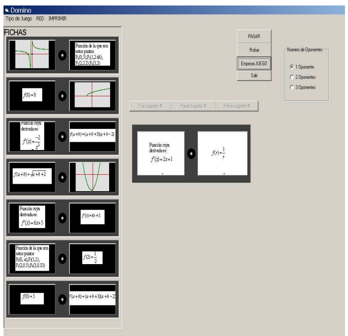


Figura 31: fichas de funciones

El juego consiste en arrastrar del mazo de fichas una ficha que en alguno de sus lados contenga una expresión equivalente a uno de los lados de la ficha muestra, si la ficha seleccionada cumple con esto, al arrastrarla se generara una nueva ficha, si no cumple con esto no se acepta el movimiento.

4.3. Programación del software

Este sistema fue implementado en el lenguaje Visual Basic para Windows, por requerir predominantemente un ambiente de programación para el fácil manejo de imágenes. Cada ficha se compone de 2 imágenes creadas en algún formato conocido (Jpg, Gif, Bmp, etc). La aplicación contiene una carpeta llamada imágenes.

En la carpeta “Imágenes” se encuentran las carpetas del tipo de juego que queremos realizar

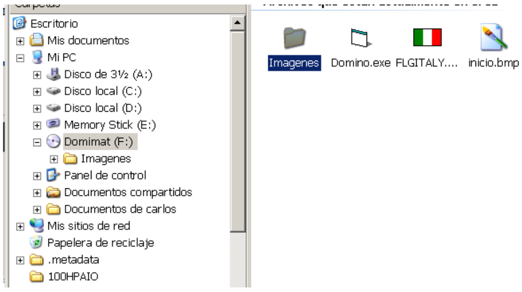


Figura 32

Cada una de estas carpetas contiene en su interior 7 carpetas mombradas”0”, “1”…”6”

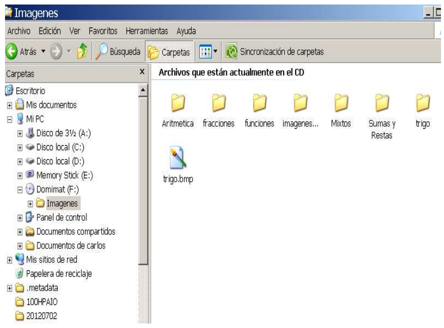


Figura 33

Y a su vez cada una de estas carpetas deberá contener al menos 8 imágenes con expresiones equivalentes.

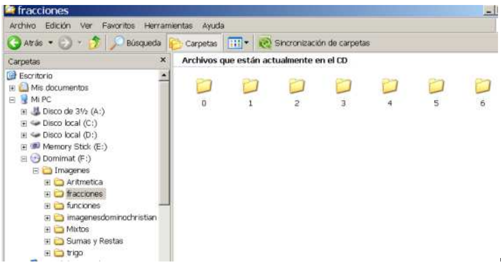


Figura 34

Las fichas son generadas seleccionando de manera semi-aleatoria una imagen de cada carpeta, salvo una ficha que contiene 2 imágenes de una misma carpeta.

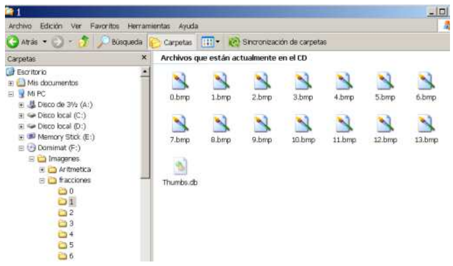


Figura 35

4.4 Prueba del programa

Está aplicación se ha probado de manera informal con niños de edades diferentes, y de acuerdo a sus comentarios se les ha hecho divertido.

4.5 Observaciones generales

El realizar juegos didácticos a través de crear aplicaciones informáticas es una forma de introducir un aprendizaje, en el caso de “DomiMat” se deja abierta la posibilidad a los educadores de crear el tipo de juego que requieran, de hecho como “DomiMat” utiliza fichas creadas con imágenes puede ser utilizado para otro tipo de asignatura (Química a través de crear fichas de Expresiones Químicas, Lengua a través de crear fichas de Sinónimos, etc).

5. Tercer Ejemplo: Desarrollo de Software para el Aprendizaje de la Demostración en Geometría

5.1 Selección del tema a abordar

Actualmente se está dando mucha importancia a actividades que tienen que ver con los procesos de exploración, menospreciando la actividad de demostración formal. De acuerdo con Hanna (2007), esto se debe en parte a que las calculadoras y computadoras han influenciado la práctica educativa en matemáticas y se cree que la demostración no es más la parte central ó, en todo caso, que su uso en el salón de clase no propicia el aprendizaje.

En este contexto, las nuevas propuestas educativas (SEP, 2007; NCTM, 2000) plantean que los estudiantes deben desarrollar capacidades de argumentación con el fin de poder exponer y defender sus ideas y resultados, suponiendo que dichas capacidades favorecerán en el futuro los procesos de demostración matemática. No hay duda del papel significativo de la argumentación en el aula; sin embargo, el hacer énfasis en ella parece estar subyugando la importancia de la demostración formal.

El presente trabajo aún está en una etapa de desarrollo; sin embargo, se ha tomado como un segundo ejemplo con el fin de exponer los avances que se tienen en el mismo y mostrar así la utilización de características esenciales en el desarrollo de cualquier tipo de software educativo para matemáticas. La finalidad del proyecto de investigación bajo el cual se está construyendo este software, es promover el aprendizaje de la demostración matemática de estudiantes de bachillerato. El diseño del mismo está basado en la propuesta de Tanguay (2005; 2007), que a su vez sigue la orientación teórica de Duval (1995; 1991).

5.1.1 Argumentación, demostración y otras formas de prueba

Varios investigadores (Duval, 1991, 2000; Balacheff, 1988; Harel y Sowder, 1998; Harel 2007; Tall, 1999; Herbst y Miyakawa, 2008; Kuzniak y Rauscher, 2011) han dedicado esfuerzos al estudio de las formas de validación en matemáticas, tratando de caracterizarlas y determinar su impacto, tanto en el pensamiento y razonamiento matemático, como en el aprendizaje y desarrollo mismo de las matemáticas.

Particularmente, Duval (1991, 2000) señala que en principio parecería que la argumentación y la demostración forman un continuo: argumentar, explicar, demostrar; sin embargo, en el fondo hay un distanciamiento profundo entre ellas, tanto de carácter lógico como de carácter cognitivo. Señala que "*Pasar de la argumentación a un razonamiento válido implica un descentramiento específico que no se favorece por la discusión o por la interiorización de una discusión* (Duval, 2000). La argumentación no abre una vía de acceso a la demostración y, por tanto, ambas requieren de aprendizajes específicos por parte de los estudiantes.

En el presente trabajo, tomamos como base teórica el trabajo de Duval (1991, 1995, 2000). Si bien consideramos que la exploración, planteamiento de conjeturas y la posibilidad de usar diferentes tipos de pruebas matemáticas, son aspectos importantes del quehacer matemático, es importante no descuidar en los estudiantes el aprendizaje de la demostración. Debido a las discrepancias entre argumentación y demostración, identificadas en diferentes investigaciones, como las realizadas por Duval (1999), Balacheff (1988), Harel & Sowder (1998), entre otros investigadores, es fundamental diseñar actividades que puedan mostrar al estudiante una vía para el aprendizaje de la demostración matemática (Kuzniak y Rauscher, 2011). En particular, debemos ayudar a los estudiantes a comprender la estructura de la demostración deductiva, lo cual se puede lograr haciendo énfasis en la estructura ternaria de la inferencia (figura 36).

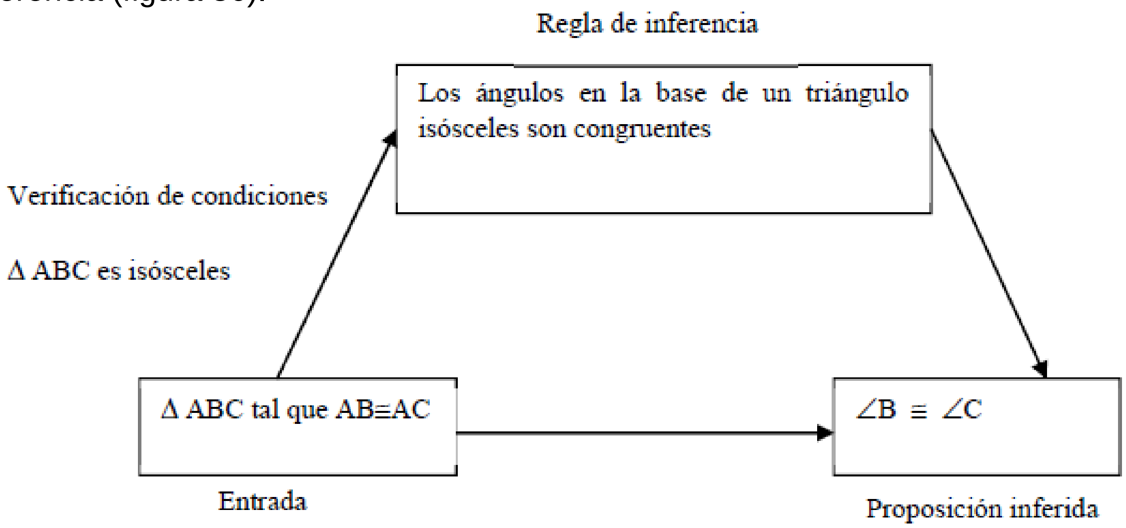


Figura 36. Estructura ternaria de una inferencia

5.2. Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

Se tomaron como base algunas actividades diseñadas y experimentadas exitosamente en lápiz-y-papel (Tanguay, 2005, 2006).

Particularmente se creó una secuencia de actividades, que fue implementada en dos grupos de estudiantes de bachillerato (estudiantes entre 15 y 17 años). Los resultados reportados muestran que las tareas favorecen el entendimiento con relación a la estructura de la demostración en geometría. En particular, la estructura de las actividades, que se describe enseguida, favorece diferentes formas de trabajo en los estudiantes, ya que pueden proceder de lo menos evidente a lo más evidente; una forma de trabajo común en el quehacer matemático (Chen y Herbst, 2012).

5.2.1. Estructura de las actividades

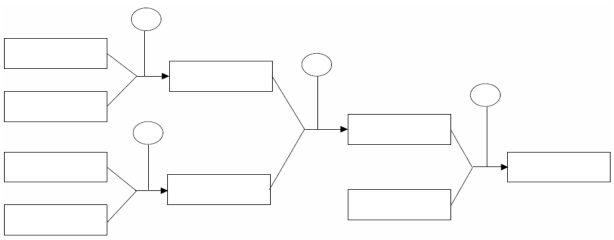
Se involucran cuatro tipos diferentes de recursos para la construcción de una demostración:

1) El enunciado de un teorema.
2) Un diagrama con la estructura genérica de la demostración.
3) Un conjunto de proporciones para construir la demostración; y
4) Una lista de justificaciones para validar cada uno de los pasos de demostración.

Por tanto, dada una proposición objetivo (no evidente), el estudiante cuenta con un diagrama (figura 37) organizado mediante casillas ligadas que guiarán la estructura de demostración. Así mismo, cuenta con un conjunto (completo, incompleto o excedido) de proposiciones que deberá ir colocando en las casillas del diagrama, de tal manera que se produzca un encadenamiento deductivo. Cada colocación deberá ser justificada mediante un enunciado que también puede ser proporcionado al estudiante. Así mimo, el alumno cuenta con una construcción geométrica (figura 38), que le proporciona una ayuda visual para el proceso de construcción.

Enunciado del teorema: “Las mediatrices de los lados de un triángulo”.

Diagrama



1) Transitividad de la igualdad:
Si $x = y$ y $y = z$ entonces $x = z$

2) Un punto sobre la mediatriz de todo segmento PQ, necesariamente está a la misma distancia de los extremos P y Q.

3) Un punto a la misma distancia de dos puntos P y Q necesariamente está sobre la mediatriz del segmento PQ.

M es el punto medio de AB	m es mediatriz de AB	m es mediatriz de AB
$\angle XMA = 90°$	$90° = \angle XMB$	$XA = XB$
$AM = BM$	$\angle XMA = \angle XMB$	$\Delta XMA = \Delta XMB$
$XM = XM$	X está sobre la recta m; $X \neq M$; M el punto medio de AB	X está sobre la recta m; $X \neq M$; M el punto medio de AB

Figura 37. Diagrama, proposiciones y justificaciones dadas

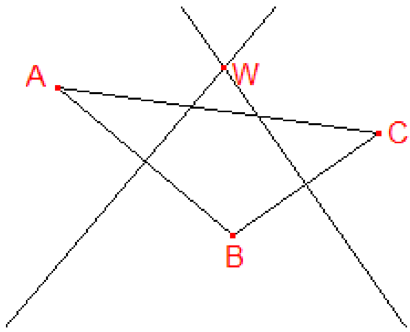


Figura 38. Construcción geométrica del teorema

5.3. Programación del software

Al incorporar a estas tareas las capacidades dinámico-interactivas proporcionadas por la tecnología, podemos generar ATIAM para producir demostraciones a través de la exploración y dinamismo de los sistemas computacionales.

Tomando como base las características de diseño de software, mencionadas al inicio del presente artículo, estamos construyendo un software para diseñar y utilizar actividades como las mostradas; es decir, aquellas que enfaticen la organización deductiva de las demostraciones. Particularmente en: a) la estructura de las inferencias, b) el papel de las reglas en la deducción; y, c) en resaltar la forma no lineal de la demostración.

En las siguientes figuras se presentan los avances en la construcción de este software. Primeramente se diseñó una interface interactiva para construir diagramas (figura 39) y se está diseñando un editor que permita desarrollar reglas y proposiciones. También se cuenta con un módulo para elaborar construcciones geométricas (figura 40). Estas herramientas se combinan para producir actividades que podrán ser almacenadas en archivos y/o integradas directamente al software (figuras 41, 42 y 43).

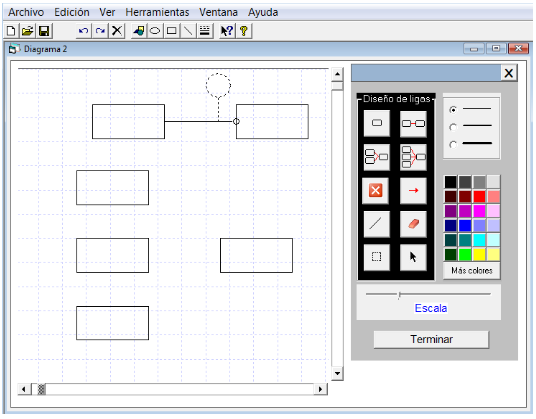


Figura 39. Interface para el diseño de diagramas

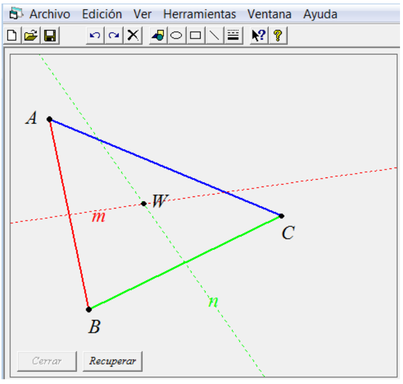


Figura 40. Construcciones geométricas dinámicas

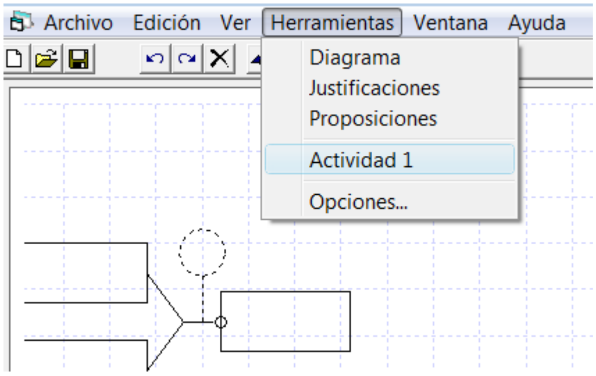


Figura 41. Actividades incorporadas al software

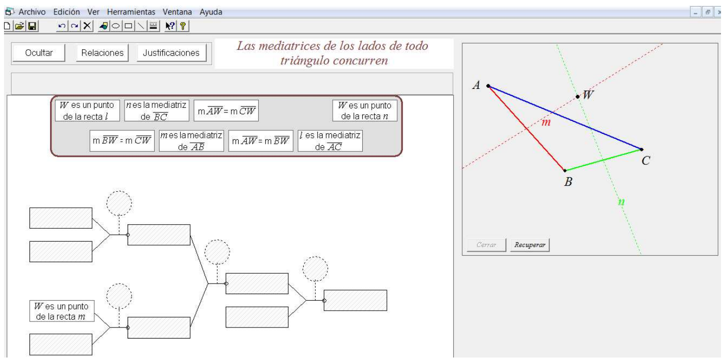


Figura 42. Ejemplo de una actividad (las relaciones pueden ser seleccionadas y arrastradas a las casillas del diagrama. La imagen es dinámica interactiva)

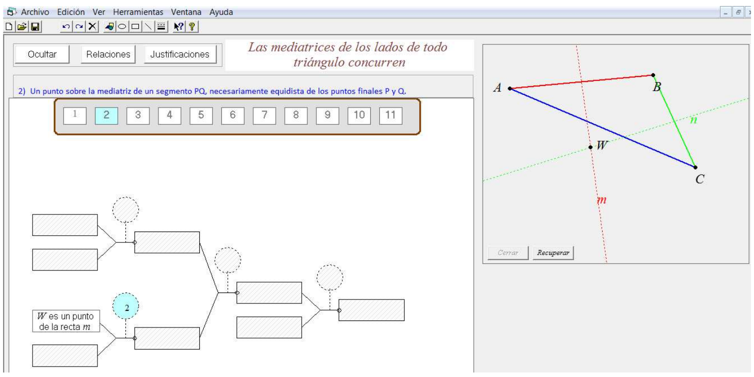


Figura 43. Ejemplo de una actividad (las justificaciones dadas pueden ser seleccionadas y arrastradas a los círculos del diagrama)

5.4 Prueba del programa

Este software no ha sido sometido aún a una evaluación pedagógica, ya que su desarrollo se encuentra en la etapa de implementación y prueba técnica. Sin embargo, esperamos contar con un prototipo que nos permita realizar las primeras evaluaciones así como las experimentaciones para el logro de los objetivos planteados en su diseño.

5.5 Observaciones generales

Las consideraciones anteriores, en la línea de los trabajos de investigación de Tanguay (2006) así como del desarrollo de ATIAM's, nos han permitido proponer actividades que hacen énfasis en la organización deductiva de demostraciones, en el papel particular que juega la lógica deductiva en el proceso de justificación, así como en lo relativo al arreglo no lineal de las inferencias en la estructura global de la prueba. Saliendo parcialmente del sistema de representación usual en geometría para situarse en el registro diagramático y gráfico en mayor medida. Con ello esperamos que el estudiante tenga oportunidades para revisar o incluso rechazar su concepción tanto de la prueba como de la argumentación.

6. Cuarto ejemplo: DinExponentes

6.1 Selección del tema a abordar

En la búsqueda de nuevas posibilidades de aprendizaje significativo, se ha observado que el uso de la tecnología puede lograr marcar una diferencia significativa, siempre y cuando ésta sea dirigida adecuadamente. El caso del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas es uno de los objetivos principales de la educación básica (incluyendo el bachillerato). Su enseñanza requiere de procesos y recursos didácticos que promuevan el aprendizaje de diferentes conceptos. Sin embargo, una de las principales dificultades de aprendizaje de las matemáticas tiene que ver con la forma de enseñanza (SEP, 2010), ya que en este proceso ha habido una marcada tendencia a la mecanización, y a la memorización de reglas, fórmulas etc., dejando de lado la comprensión y argumentación que existe en el fondo. En este sentido, las diferentes formas de representar un concepto y las formas en que podemos transitar de una representación a otra, deben ser promovidas mediante experiencias de aprendizaje que ayuden a los estudiantes a conectar y entender los conceptos. En particular, la representación númerica, gráfica y la posibilidad de hacer tratamientos de manera directa sin tener que cambiar de representación, ayuda a la mejor comprensión de los conceptos y favorece el desarrollo de habilidades visuales (Hitt, 1998).

6.1.1 La enseñanza del álgebra en Educación Matemática

La problemática asociada al aprendizaje del álgebra ha sido tratada en varias investigaciones, las cuales se han enfocado en conceptos y procedimientos algebraicos, resolución de problemas y las dificultades de los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra. El simbolismo literal fue la primera forma algebraica en investigarse; con el tiempo, las investigaciones en álgebra se han ampliado para abarcar otras representaciones, el uso de herramientas tecnologicas, diferentes perspectivas en los contenidos y una amplia varierdad de marcos teóricos acerca del pensamiento algebraico. Dado que el álgebra y la aritmética comparten de alguna manera símbolos o el uso de literales, se requiere de varios ajustes conceptuales para que los estudiantes que inician el estudio del álgebra asimilen el cambio en el significado de estos símbolos. Los primeros estudios sobre la interpretación que hacen los estudiantes de los símbolos algebraicos tienden a enfocarse en niveles cognitivos previos a la experiencia aritmética, formas de pensamiento y dificultades en la notación. En este sentido, es importante que en las aulas se haga uso de ATIAMs y herramientas que han mostrado favorecer el estudio de las matemáticas.

Para el desarrollo del SE "*DinExpontes"* se toma en cuenta la base teórica de las representaciones semioticas de Duval (1999), con la idea de ayudar al estudiante a transitar de la memorización de reglas exponenciales a la comprensión de que los números se pueden representar de muchas otras formas, para transitar de la representación númerica a la representación simbólica de una forma completamente dinámica e interactiva, que solo puede lograrse haciendo uso de la tecnología.

6.2 Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

Tomando en cuenta las consideraciones indicadas en SEP (2008), en el sentido de que la comprensión de los procesos de aprendizaje de las matemáticas ha dado lugar a una nueva concepción en esta área, considerándola como, "*el proceso de conducción de la actividad del aprendizaje, lo cual a su vez, conlleva a una nueva concepción del profesor como el propiciador y conductor de dicha actividad de aprendizaje, esta concepción implica que el profesor diseñe o seleccione actividades que promuevan la construcción de conceptos a partir de experiencias concretas en la que los estudiantes puedan observar, conjeturar e interactuar.*"

Partiendo de esta visión, en la estrategia desarrollada para el modelo de las actividades en "*DinExpontes"* se utilizan los siguientes recursos para la enseñanza y aprendizaje de las leyes de exponenciación.

a) Operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división).
b) Representación numérica y simbólica.
c) Manipulación de las representaciones del punto anterior.

De tal manera que estos recursos asociados a una balanza le puedan dar certidumbre a cada uno de los resultados que va obteniendo el estudiante, partiendo de actividades sencillas y que van aumentando el nivel de aprendizaje propuesto con la idea de que al final de las actividades el estudiante muestre un nivel más avanzado de la representación simbólica.

6.3 Programación del Software

En el caso particular del software *DinExponentes* hemos implementado el diseño y programación en el lenguaje Java por ser un lenguaje orientado a objetos, y en la fase de desarrollo hemos seguido la metodología descrita al inicio del presente artículo, con el fin de generar un ATIAM en el que los estudiantes, a través de la exploración, sean autosuficientes en la generación de números elevados a alguna potencia.

En las siguientes figuras se presentan los avances en la construcción de este software. Primeramente se diseñó una interface básica e interactiva para la implementación de los objetos matemáticos.

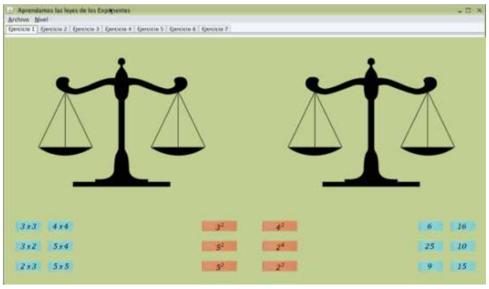


Figura 44. Interface Principal con Representación Numérica

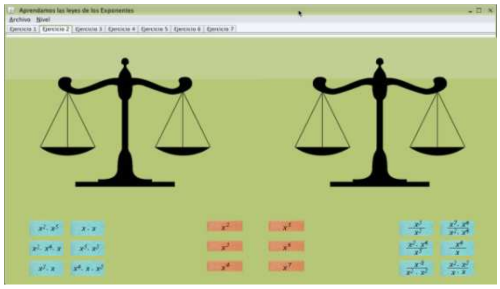


Figura 45. Representación Simbólica

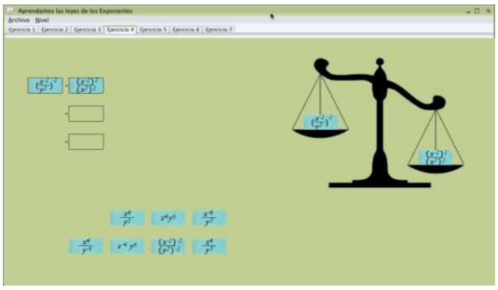


Figura 46. Representación Gráfica

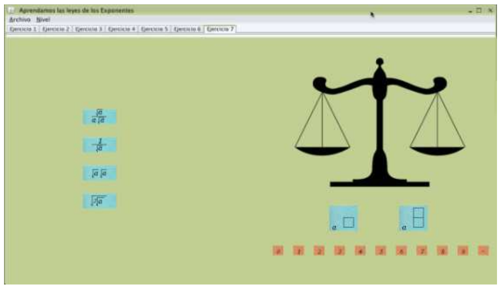


Figura 47. Diferentes representaciones del mismo objeto matemático

6.4. Prueba del Software

Este software ha sido sometido solo a pruebas técnicas, ya que cuando se trabaja con objetos que interactuan de forma dinámica se requiere utilizar tanto las coordenadas de pantalla y coordenadas del objeto como coordenadas de la nueva posición del objeto, por lo cual esto conlleva acarrear ciertos errores computacionales que deben ser depurados en esta fase de desarrollo. Posterior a esta etapa, se pretende tener un prototipo que pueda ser sometido a una prueba pedagógica que permita mostrar si es necesario trabajar más en las actividades didácticas y a su vez permita mostrar si se necesitan más objetos dinamico interactivos para la comprensión de los conceptos algebraicos.

6.5. Observaciones generales

La estructura de programación utilizada en *DinaExponentes* así como la estructura de las actividades asociadas a éste, permite que no solo se puedan abordar temas tales como la leyes de exponenciación, sino que además se pueden abordar otro tipo de temas, tales como resolución de inecuaciones, ecuaciones de primer y segundo grado, derivación de funciones, etc., por mencionar algunos. Sin embargo, es muy importante resaltar que el factor más importante es el cómo se desarrollen y aborden las actividades implementadas en los ATIAMS.

7. Conclusiones

La tecnología está siendo parte de nuestra vida cotidiana; particularmente, en la enseñanza, está modificando la forma en que se enseña y se aprende. No hay duda que está jugando un papel significativo como herramienta para el aprendizaje, sobre todo en aquellas áreas del conocimiento en las que la representación gráfica y visualización son mecanismos fundamentales para el entendimiento de conceptos.

Las actividades de exploración y desarrollo de conjeturas, que se pueden implementar a través de software, ahora toman una nueva relevancia en la enseñanza ya que propician el trabajo experimental en las matemáticas.

La tecnología, como herramienta de apoyo al aprendizaje, permite que estas experiencias aporten al estudiante evidencias, que les llevan a proponer conjeturas. Dichas evidencias también pueden ayudar a buscar formas de justificación que, de manera gradual, puedan ser dirigidas hacia la demostración formal de proposiciones.

Desde el punto de vista socio-cultural, las actividades con uso de software permiten generar un ambiente de trabajo interactivo y dinámico, que enfatiza la participación activa del estudiante y una mayor responsabilidad hacia su propio aprendizaje. En este sentido, el uso de la tecnología en el salón de clase, nos brinda oportunidades para cambiar el ambiente tradicional del aula, a uno en el que sea posible favorecer procesos de pensamiento y habilidades como la reflexión, la comunicación y el debate científico; rasgos deseables en la formación de los estudiantes que son generados por los ATIAM.

Es importante aclarar que en este artículo abordamos sólo una de las tendencias inicialmente mencionadas: la relacionada con el desarrollo de software educativo para matemáticas; en artículos posteriores serán abordadas otras tendencias.

8. Bibliografía

Balacheff, N. (1988) Etude des processus de preuve chez des élèves de Collège. Thèse de Doctorat d'état ès-sciences. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Chen, CH., & Herbst, P. (2012) The interplay among gestures, discourse, and diagrams in students' geometrical reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 83 (pp.285–307).

Clements D., Battista, M. (2000). Designing effective software. En: Anthony E. Kelly y Richard A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 761-776). NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Confrey, J.(1993) *A constructivist research programme towards the reform of mathematics educations.* (Introduction to symposium for the Annual Meeting of American Education Research Association), April, 1993.

Cortés, C. y López A. (2003). FRACCIONES software de apoyo al aprendizaje. Tesis de Licenciatura Universidad Michoacana. México.

Cortés, C. y Romero, M. (2003). DOMIMAT software educativo.

Cortés, C. y Núñez, E. (2007) Ambientes tecnológicos interactivos para el aprendizaje de las matemáticas. *Memorias del IX Congreso Nacional de Investigación Educativa*. México 2007.

Duval R. (1988) Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Duval, R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (3), (pp. 233-261).

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Peter Lang, Suisse.

Duval, R. (1999). Questioning argumentation. *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof.*

Duval, R. (2000) Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 20/2 (pp.135-170).

Hanna, G. (2007) The ongoing value of proof. En: P. Boero (Ed.) *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 3–16). Sense Publishers.

Harel (2007). Students' proof schemes revisited. En: P. Boero (Ed.) *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 65-78). Sense Publishers.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students¿ proof schemes: Results from exploratory studies. En: A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), Research in collegiate mathematics education. III (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Herbst, P., & Miyakawa, T. (2008). When, how, and why prove theorems? A methodology for studying the perspective of Geometry teachers. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education,* Vol 40, No. 3, (pp. 469–486).

Hitt, F. (1998) Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum, *Revista de Educación Matemática,* Vol. 10, México.

Hitt, F. (2002) *Funciones en contexto*. Editorial Pearson Educación. México.

Hitt, F. (2007). Utilization de la calculatrice symbolique dans un environnement d'apprentissage coopératif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. *Environnements Informatisés et Ressources Numériques pour l'apprentissage Conception et usages, regards croisés*. Francia : Hermes Science.

Hitt, F, y Cortés, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e internet*. Vol 10 2009. Costa Rica.

Hughes, D. (1990) Visualization and Calculus Reform. In *Visualization in Teaching and Learning Mathematics: A Project (MAA notes #19)*. Walter Zimmerman and Steven Cunningham, eds. Washington DC: Mathematical Association of America, 1-8.

Kuzniak, A. & Rauscher, J. (2011) How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 77 (pp.129–147).

Larios, V. (2000) *Las Conjeturas en los Procesos de Validación Matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática*. Tesis de maestría en Docencia de las Matemáticas, UAQ.

Lamon, S (1999). Teaching fractions and rations for understanding. Lawrence erlbaum associates, publishers. London 1999. p. 21-32.

Núñez, E y Cortés, C. (2008) Propuesta de una metodología de enseñanza usando ambientes tecnológicos interactivos. En: *Investigaciones y propuestas sobre el uso de la tecnología en educación matemática*. ISBN 978-970-94810-4-4. Vol. 1, año 2008. Editorial AMIUTEM.

Núñez, E. (2008). *Ambientes Tecnológicos Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Morelos.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

SEP (2007). *Plan de Estudios 2006*. Secretaría de Educación Pública, México.

SEP (2008). *Reforma de la Educación Secundaria. Fundamentación Curricular*

Matemáticas, Secretaría de Educación Pública, México.

SEP (2010). *La Problemática de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria*, Secretaría de Educación Pública, México.

Tall, D. (1999) The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World, vol, 4,* 117–136. Reston, Virginia: NCTM.

Tanguay, D. (2006) Comprendre l'structure déductive en démonstration. *Envol*, Vol. 134, France.

Tanguay, D. (2005) Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* Vol. *10*, pp. 55-93.

Zimmermann W. & Cunningham S. (1991). *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 25-37)*,* MAA Series, No. 19. USA.

Cortés Zavala José Carlos: Profesor de la Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana en México. Autor de varios artículos de investigación y docencia. Presidente de AMIUTEM, Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores en México. **jcortes@umich.mx**

Guerrero Magaña María de Lourdes: Profesora de la Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana en México. Autora de varios artículos de investigación y docencia. **gmagana@umich.mx**

Morales Ontiveros Christian: Profesor de la Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana en México. **chris@umich.mx**

Pedroza Ceras Lourdes: Estudiante de la Facultad de Físico Matemáticas. **mpedrozc@fismat.umich.mx**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre 2014
páginas 163-170

Ideas para enseñar:
Repensando la enseñanza de los números negativos en la escuela secundaria

Patricia Detzel, Ethel Barrio, Analía Petich, Rosa Martinez

1. Introducción

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación - dependiente de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina- que pretende construir conjuntamente, investigadores y profesores, un modo posible donde la Didáctica de la Matemática se convierta en un marco posible para que los docentes puedan pensar sus clases de matemática. A partir de encuentros periódicos pretendemos crear un ambiente de estudio y producción de conocimiento matemático-didáctico para hacer más visible el complejo marco de decisiones del docente en su tarea diaria. Estamos convencidos que los investigadores necesitamos conocer más sobre las necesidades y desafíos que enfrentan los docentes en su trabajo, intentando encontrar posibles nexos entre la Didáctica de la Matemática y el quehacer docente. Autores como Bednarz (1999), Desgagné (2001) y Anadón (2001, 2008), destacan la importancia de incorporar a los docentes de las escuelas medias a los grupos de estudio para realizar investigaciones "con" ellos más que "sobre" ellos.

En este contexto, nos propusimos adaptar–en forma colaborativa profesores e investigadores– una propuesta de enseñanza en relación a la introducción de los números negativos en un entorno algebraico, para ser puesta en aula con alumnos de primer año de la escuela secundaria. En este trabajo mostraremos parte de ese recorrido, retos y desafíos.

Se optó por estudiar la propuesta de Cid, E. & Ruiz Munzón, (2011) para introducir los números negativos en un contexto algebraico. Las actividades de estudio e investigación que presenta están divididas en sesiones y han sido adaptadas en forma colaborativa, entre docentes e investigadores, para ser implementadas en un primer año del Colegio de Educación Media Nº15, de la ciudad de Cipolletti, provincia de Río Negro.

Recorrido de la experiencia

En el año 2012, junto a un grupo de docentes de matemática de diferentes escuelas secundarias, surge de común acuerdo el estudio de la enseñanza de los números negativos. Investigadores y profesores aceptamos el desafío y compartimos la responsabilidad de involucrarnos en un proceso de investigación acerca de una problemática particular del quehacer docente. Durante ese año se llevaron a cabo 18 encuentros quincenales con una duración de tres horas y media cada uno y una reunión semanal con el equipo extensionista. En el 2013, se suman docentes e investigadores al trabajo colaborativo para (re)pensar ajustes a la propuesta con el fin de llevar a cabo su implementación. El camino que emprendimos supone transitar entre lo que se sabe y se puede enseñar, y entre lo que se desea enseñar pero no se sabe y es necesario aprender. Planificamos dos meses para la puesta en aula, con una carga horaria de cinco horas cátedra semanales. Durante ese tiempo, decidimos realizar una observación participante de las clases a cargo de dos personas, de modo tal que alguna de ellas sostuviera su presencia para garantizar la continuidad entre las clases. En forma simultánea, trabajamos en un espacio de acompañamiento semanal con el docente a cargo de poner en marcha la propuesta. Pensamos estos encuentros como una oportunidad de adentrarnos como grupo en la comprensión y definición de tareas a analizar, discutir, generar acciones que fueran animando y acompañando la transformación de las ideas en acciones y las acciones en ideas, en un proceso de adaptabilidad. La producción e intercambios de las clases y de los encuentros se registran de modo minucioso y sistemático, documentando los momentos de trabajo a través de registros escritos y de grabaciones.

En este proceso, a partir del análisis de las actividades de la propuesta original, se generó una dinámica de reflexión, dando lugar a una reapropiación personal de esas situaciones, a propósito de interpretaciones que se hicieron y experiencias que se compartieron propiciando que cada uno explicitara su propio punto de vista. Esos puntos de vistas que se discutieron vinieron desde distintos lugares: por una parte, los investigadores con su marco de referencia subyacente y sus interrogaciones; por otro, los docentes a través de su práctica, y las restricciones y recursos de su acción específica. En este sentido, se posibilita la elaboración de un repertorio común y compartido.

Una propuesta para la enseñanza de los negativos diferente

En general los números negativos se introducen en los primeros años de la escuela media (alumnos de 12 a 14 años). Esta introducción se realiza en un entorno aritmético, y se circunscribe inicialmente a los números enteros.

Para justificar las reglas de cálculo de estos números, se recurre a recursos correspondientes a ciertos *modelos concretos* (deudas y haberes o pérdidas y ganancias, juegos con puntuaciones positivas o negativas, personas que entran o salen de un recinto o que recorren un camino con dos sentidos, temperaturas, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, etc.) que actúan por analogía. Una vez que los alumnos se han familiarizado con estas reglas, se inicia el estudio del álgebra. (Cid, Bolea 2007). Esta forma de hacer supone una inversión del proceso habitual de *modelización matemática*, en el que el modelo matemático es un medio para obtener información sobre un sistema intra o extra matemático que se constituye en objeto de estudio. En este sentido, en la escuela media, cuando el objeto de estudio es el número entero, generalmente, el medio para estudiarlo son ciertos sistemas constituidos por objetos pertenecientes al mundo sensible y las acciones que se ejercen sobre ellos; es decir, los *modelos concretos*. Sólo cuando se considera completa su introducción, recupera parcialmente su función como modelo matemático de un sistema y se presentan a los alumnos sus “aplicaciones”.

Somos conscientes que este recorrido descripto no logra que los alumnos puedan dar sentido a los números positivos y negativos, lo que creemos que explicaría las dificultades que se ponen en evidencia con el manejo de los signos.

En este sentido, elegimos esta propuesta que tiene por objetivo la introducción simultánea de los números negativos y del álgebra escolar como instrumento de *modelización algebraica* (Chevallard, 1989; Gascón, 1993-94; Bolea 2003). Aceptamos considerarla como un insumo para (re)pensar la enseñanza de los números negativos en la escuela secundaria porque atiende a las siguientes cuestiones:

- ✓ "*la razón de ser de estos números*" se encuentra en el cálculo algebraico, no en el aritmético.
- ✓ el "*hacer matemática*" está considerado como "*actividad de modelización".*

Nos parece importante destacar los puntos claves que debimos asumir como grupo de estudio y poner en tensión con nuestras concepciones:

- *La presentación de las notaciones.* Se comienza con las notaciones incompletas, es decir, las notaciones en las que se han suprimido los signos "+" que indican operación binaria (por ejemplo, – 4 – 2) para terminar presentando las notaciones completas (por ejemplo, (–4) + (– 2)). En general, se hace el recorrido inverso que va de la notación completa a la incompleta.
- *Los significados de los signos "+" y "-".* Se consideran como objeto de estudio y permiten iniciar un trabajo algebraico cuando aún no se dispone de las reglas de los signos. Se trabajan en forma sucesiva y minuciosa al operar en principio como sumandos y sustraendos -en lugar de números- para luego aceptarlos como tales. Es decir, ante la expresión $m - 8 - 2$ hay que entender que a m se le tiene que "restar 8" y luego "restar 2", lo que es equivalente a "restar 10". En general, para resolver dicha expresión se recurre a que (– 8) + (– 2)= – 10.
- *La modelización algebraica*. Las tareas presentadas en la propuesta requieren de un *cálculo algebraico funcional*, es decir, un cálculo que exige una reflexión y toma de decisiones para poner en evidencia las propiedades del sistema modelizado. Las relaciones que existen entre los diferentes componentes del sistema dan lugar a expresiones algebraicas en las que intervienen letras, que pueden jugar un papel de incógnitas, parámetros o variables. Por ejemplo, la expresión algebraica $n- 2$ que da respuesta a una tarea determinada, se interpreta como "dos menos que al principio". En general, esta expresión se suele interpretar como una traducción literal "un número menos dos".
- *Los programas de cálculo como objeto de estudio.* Esta propuesta exige detenerse en las equivalencias de las diferentes expresiones algebraicas. Este encadenamiento de las operaciones deriva en un trabajo descontextualizado propio del trabajo algebraico. La tarea de simplificación de expresiones algebraicas tiene su razón de ser en la economía y justificación del cálculo algebraico, no se presenta como técnica algorítmica. Ejemplo, $m - 8 - 2= m - 10$.

Repensando la introducción de los números negativos: adaptabilidad de la propuesta

Nos interesó estudiar las condiciones bajo las cuales esta propuesta –producto de una investigación– se puede convertir en un insumo para la práctica docente. El análisis en conjunto, entre investigadores y profesores, de las actividades de la propuesta seleccionada proporcionó un escenario fértil de investigación sobre el proceso de adaptabilidad de la misma a las clases comunes. Analizar y estudiar esta propuesta nos colocó en un lugar de horizontalidad en el desarrollo del trabajo colectivo.

En esta adaptabilidad prevaleció la necesidad de habilitar una dinámica que permitiera problematizar el conocimiento a enseñar y hacer consciente el proceso de decisiones. Desmenuzar el repertorio de elecciones brinda conocimiento a los docentes que les permiten ampliar su margen de maniobra. Es nuestra intención poder ejemplificar en la ponencia sobre estas cuestiones; para ello haremos foco, específicamente, en dos tareas, como se detalla a continuación:

Tabla 1

PROPUESTA ORIGINAL	ADAPTABILIDAD DE LA PROPUESTA
Tarea 1. Laura se llevó sus tazos al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 tazos y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos tazos le quedaron después de jugar?	**Tarea 1.** Laura se llevó sus figuritas al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 figuritas y en la segunda ganó 7. ¿Cuántas figuritas le quedaron después de jugar?

Como se puede observar en la adaptabilidad de este problema sólo se cambia la palabra tazos por figurita. Se decidió conservar los números en juego y se discutió en los encuentros los tipos de respuestas posibles por los alumnos:

D1: *En la tarea*1 *no necesariamente vamos a exigir que el alumno escriba la expresión. Con que lo deje expresado en forma coloquial alcanza ¿no?. Además es bueno dejar que cada alumno elija una cantidad inicial distinta y después analizar …vos elegiste 10 y llegaste a 8, otro eligió 30 y le quedaron 28 y así* […] *hacerles ver* [a los alumnos] *que en todos los casos independientemente de la cantidad elegida siempre tienen dos menos que al principio, que es lo que queremos destacar en este trabajo algebraico. ..* [E4 – 00:02:42]

Luego de la puesta en aula de esta tarea, en el grupo de estudio (E8) se reflexionaba:

C1: *En la tarea 1 ¿cómo anduvo este problema?*

C2: *Nosotros interveníamos para que ellos* [los alumnos] *hicieran más cuentas para que puedan ver la relación. Por ejemplo toma 16, hace las cuentas y le dio 14, toma el 102 y le da 100…*

C1: *Pero después de esos números, ellos se podían despegar de esos valores particulares?*

C2: *Intentamos ir llevándolos* [a los alumnos] *con preguntas a que puedan ver la "relación que había entre los números".*

C3: *No todos. Algunos hacían todas las cuentas para todos los casos*…

C2: *Juan gestionó en el pizarrón. Tomó distintos valores que le dieron los alumnos*… *luego comparan y algunos decían: "profe siempre le saco dos".*

D1: *Un alumnos puso* X *es figuritas y después escribió* $X - 9 + 7$ *y después reemplazó por* 20. […] *No alcanzamos en esta clase llegar a la expresión* $X - 2$.

C1: *La clase siguiente habría que pensar en números grandes pero que faciliten las cuentas o que facilite que se vea la relación, por ej 102 permite ver mejor la relación con 100, ó 109, porque restar 9 les cuesta…*[E8- 00:06:03].

En esta tarea estábamos abocados a que los alumnos puedan hallar la regularidad entre la cantidad inicial y la cantidad final. Nos llevó un tiempo poder reconocer la importancia que tiene la escritura de la expresión $x - 2$, pues representa el modelo de "2 *menos que al inicio*". Es importante trabajar la relación entre las expresiones: “*dos menos que antes*”, “*dos menos que al principio*”, $x - 2$. Por otro lado, reflexionar acerca de la equivalencia entre $x - 9 + 7$ y $x + 2$.

En relación a la adaptabilidad de la tarea 2, además de cambiar el nombre de las ciudades, se decidió presentarla en dos incisos y en tiempos diferentes. Es decir, una vez resuelto por los alumnos el inciso a) se les hizo entrega del inciso b). Se muestran a continuación estos cambios:

Tabla 2

<table>
<tr><th>PROPUESTA ORIGINAL</th><th>ADAPTABILIDAD DE LA PROPUESTA</th></tr>
<tr>
<td>Tarea 2. Un tren sale de Barcelona con cierto número de pasajeros y llega a Gerona después de hacer dos paradas. En la primera parada, bajan 15 y suben 12 pasajeros; en la segunda parada, bajan 38 y suben 42 pasajeros. ¿Con cuántos pasajeros llegó el tren a Gerona?
Completa las tablas siguientes:
<table>
<tr><th>N° Inicial de Pasajeros</th><th>N° Final de Pasajeros</th></tr>
<tr><td>427</td><td></td></tr>
<tr><td>1582</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>N° Inicial de Pasajeros</th><th>N° Final de Pasajeros</th></tr>
<tr><td></td><td>45</td></tr>
<tr><td></td><td>876</td></tr>
<tr><td></td><td>c</td></tr>
</table>
</td>
<td>Tarea 2. Un tren sale de Lanús con cierto número de pasajeros y llega a Lomas de Zamora después de hacer dos paradas. En la primera parada, bajan 15 y suben 12 pasajeros; en la segunda parada, bajan 38 y suben 42 pasajeros.
a) ¿Con cuántos pasajeros llegó el tren a Lomas de Zamora?
b) Completa las tablas siguientes:
<table>
<tr><th>N° Inicial de Pasajeros</th><th>N° Final de Pasajeros</th></tr>
<tr><td>427</td><td></td></tr>
<tr><td>1582</td><td></td></tr>
<tr><td>A</td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>N° Inicial de Pasajeros</th><th>N° Final de Pasajeros</th></tr>
<tr><td></td><td>45</td></tr>
<tr><td></td><td>876</td></tr>
<tr><td></td><td>C</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

En el grupo de estudio (docentes D_i e investigadores C_i) discutíamos cómo correr a los alumnos de un trabajo numérico para acercarlos más a un trabajo algebraico y que surgiera, por parte de ellos, la necesidad de la letra. Estuvo presente en varios encuentros el rol que cumplía la tabla en esta Tarea. [E 5 II – 00:04:38]

D_1: *En la tarea* 2 *vamos a trabajar por separado la tabla, primero le damos a) y una vez que terminaron con la primer pregunta damos el b) para que trabajen con las tablas.*

C_2: *¿Te acordás que podía pasar en a) si no damos la tabla?*

D_1: *Sí. Puede ocurrir que algún alumno tome un valor con el que no le permita operar en la segunda parte. Entonces, bueno ahí le decimos que tome valores más grandes.*

En encuentros anteriores se había analizado que no dar la tabla da la posibilidad que los alumnos elijan valores con los cuales no pueden hacer los cálculos. Esto haría correr el riesgo de desviar la atención de la clase al análisis de “cuáles son los posibles valores que se pueden tomar como cantidad inicial”. Esta cuestión no está presente con la tabla.

C_2: *Insisto ¿por qué decís que es más rico trabajar con la tabla después?*

D_2: *Si empiezan a trabajar con la tabla ya tienen la respuesta de a) y la letra está dada en la tabla.*

D1: *Con los valores de la tabla resuelven y todos llegan a los mismos resultados. En cambio con la pregunta a) cada uno* [alumno] *da un valor distinto y así se puede generalizar que independientemente de las cuentas de cada uno "siempre llega uno más que al principio". Se da la posibilidad de que aparezcan distintos valores y de mostrar lo que pasa en todos los casos. Así rescatamos la relación de la cantidad inicial y cantidad final.* […] *Dejaríamos que lo digan en forma coloquial en a), en la tabla le exige escribir la expresión.*

D2: *Si hay una expresión del tipo m* – 15 + 12 – 38 + 48 *yo no le diría que simplifique…*

C5: *Pero ¿Cómo contesta entonces cuántos llegan?*

D2: *Yo creo que si nos ponemos a explicar por qué son equivalentes, nos adelantamos… […] Nos preguntamos si es pertinente trabajar la equivalencia…*

En este extracto mostramos el tipo de discusión que mantuvimos en los encuentros. Se reflexionó acerca de las condiciones de la tarea y las interacciones de los alumnos con los conocimientos en este caso "el sentido de la letra como variable". Esta cuestión se vio reforzada en otro encuentro después de la clase y se analizó lo sucedido en el aula…

C2: *A vos* [uno de los docentes] *te gustó cómo quedó con la tabla después?*

D1: *Sí. A mí me pareció que estuvo bien porque ellos tomaron distintos valores como cantidades iníciales, dio lugar a discutir que no podían ser 24 pasajeros la cantidad inicial, y además era fácil ver que llegaba con uno más* […]

C1: *Vos decís que no poner la tabla permite a los alumnos trabajar más con la letra y no tanto con lo numérico. […] Ajá, creo que tiene razón, viste que los chicos sino sacan cuentas y hacen cálculos y se quedan ahí…* [E9-00:17:17]

C4: *¿cómo? ¿cómo?*

C1: *Juan decidió no dar la tabla al inicio eso trae como consecuencia que depende de los valores que tomen los chicos se desvía la discusión en "los posibles valores de la cantidad inicial", cuestión que la tabla salva, por eso yo dudaba… Es cierto que se complican con la cantidad inicial pero favorece más el trabajo con la letra. Si tienen la tabla sólo sacan cuentas al principio y después la letra está dada, no surge cómo necesidad…*

D1: *Está bueno… los alumnos ya se dan cuenta que si tienen un dato desconocido uso una letra…* [E9- 00:20:00].

Después de las primeras clases y haciendo un balance de los logros de los alumnos, avanzamos sobre algunos hallazgos: "le dimos mucho peso al rol de la letra como variable y no nos detuvimos en un trabajo con la equivalencia de las expresiones", que en términos de la propuesta sería el programa de cálculo.

En este contexto toma importancia, en la tarea 2, el hecho de presentar la tabla como parte del problema y no separada por incisos. Nuestro objeto de estudio es la equivalencia entre las expresiones resultantes en la resolución del problema entonces la tabla es el instrumento que daría lugar a distintas expresiones que dan cuenta de los cálculos realizados, posibilitando así trabajar la equivalencia entre ellas. Es decir, en la tercer fila podrían aparecer expresiones como: $a - 15 - 38 + 12 + 42$; $a - 53 + 54$, $a + 1$ a través de la simplificación de las expresiones algebraicas.

Al separar en dos incisos, los alumnos para responder a) llegan a la relación "uno más que al inicio", para responder b), en el tercer renglón, hacen una traducción del resultado que ya tienen, es decir, se debilita la posibilidad de otras expresiones que no sea $a + 1$.

A modo de cierre

Al decidir qué enseñar y cómo hacerlo, el docente toma múltiples decisiones, entre un conjunto de opciones posibles. Así, para la elección de un camino a seguir, debe considerar alternativas de acción: en algunos casos, este proceso se realiza de forma implícita; en otros -como en este trabajo colaborativo- la reflexión sobre la práctica hace visible el conjunto de esas elecciones potenciales, abriendo un espacio de estudio para llevar adelante estas tareas.

Esta vivencia nos llevó a ampliar nuestras miradas y a realizar acciones que interrumpieron la rutina. Pudimos reconocer y extender nuestros marcos interpretativos, interpelando nuestras prácticas desde diferentes lugares.

Consideramos que el camino que recorrimos –investigadores y docentes- nos brindó aprendizajes que podrían integrarse en dos ideas que consideramos estructurantes: aprender a utilizar el conocimiento en situación y aprender a situarnos frente al conocimiento, al propio y al de los otros.

Bibliografía

Anadón, M y L´Hostie (2001), Nouvelles dynamiques de recherche en éducation. Les press de l´université Laval. Canadá.

Anadón, M. (2008), La investigación llamada "cualitativa": de la dinámica de su evolución a los innegables logros y los cuestionamientos presentes. Invest Educ Enferm. 26(2):198-211.

Bednarz, N. at col (1999), Un lien possible entre la recherche en didactique des mathématiques et la pratique de classe: la recherche collaborative. Actes du congrès de la commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM). Neufchâtel, Suisse.

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège Troisième partie: Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. Petit X, 25, 5-38

Cid, E. & Ruiz Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Eds.) (2011), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Desgagné, S. (2001a), La recherche collaborative: nouvelle dynamique de recherche en éducation, chap. 2, pp.51-76, á Anadón et L´Hostie (2001), Nouvelles dynamiques de recherche en éducation. Les press de l´université Laval. Canadá.

Desgagné, S. - Bednarz, N. Lebuis, P. – Poirier, L. et Couture, C. (2001b), L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation, Revue des sciences de l'éducation vol. 27, n° 1, p. 33-64. ttp://id.erudit.org/iderudit/000305ar.

Gascón, J. (1993-1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». Petit x, 37, 43-63.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 171-184
Coordinada por Fredy González

Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica:

Notas Históricas acerca del Doctorado en Educación Matemática de Venezuela[1]

Fredy González

Resumen	En este artículo se refieren detalles del proceso que condujo a la apertura del primer Doctorado de Educación Matemática en Venezuela. Se hace mención de sus pasos iniciales con el Programa Venezolano de Doctorado en Educación Matemática (PROVEDEM) cuyo antecedente primordial fue la Primera Maestría Latinoamericana en Enseñanza de la Matemática; el aludido proceso se contextualiza en el marco del desarrollo de la Educación Matemática en Venezuela. Además, se ofrece información acerca de los pormenores de la apertura del DEM-UPEL, así como también se sus aspectos curriculares esenciales (a quiénes está dirigido, perfil del egresado, orientaciones teóricas y metodológicas, y prácticas formativas predominantes). El artículo culmina esbozando una Prospectiva del Doctorado en Educación Matemática en Venezuela. **Palabras clave:** Proyecto PROVEDEM; UPEL Maracay, ASOVEMAT.
Abstract	In this paper are reported details of the process that he led to the opening of the first Doctorate of Mathematical Education in Venezuela. One mentions his initial steps with the Venezuelan Program of Doctorate in Mathematical Education (PROVEDEM) whose basic precedent was the First Latin-American Master in Education of the Mathematics; the development of the Mathematical Education in Venezuela is the frame that uses as context to the mentioned process, In addition, information offers brings over of the details of the opening of the DEM-UPEL, as well as also the principal elements of his curriculum (whom it is directed, profile of the graduate, theoretical and methodological orientations, and formative predominant practices). The article culminates outlining a Prospective of the Doctorate in Mathematical Education in Venezuela. **Keywords:** Proyecto PROVEDEM; UPEL Maracay, ASOVEMAT
Resumo	Nesse artigo são ditos detalhes do processo da criação do primeiro Doutorado de Educação Matemática de Venezuela. Também se inclui informação sobre seu curriculum (quem pode fazê-lo, perfil do graduado, orientações teóricas e metodológicas, práticas formativas predominantes). O artigo também oferece uma prospectiva do desenvolvimento futuro desse programa de pós-graduação **Palavras-chave:** Proyecto PROVEDEM; UPEL Maracay, ASOVEMAT.

[1] Este artículo está basado en una ponencia de título similar expuesta por el autor en la Mesa Redonda intitulada *Postgrados en Educación Matemática: Retos para Latinoamérica*, desarrollada en la XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME28); Barranquilla, Colombia; 28 de julio al 01 de agosto de 2014

1. Introducción

Uno de los indicadores que se toman en cuenta para apreciar el grado de avance de un determinado ámbito de producción de conocimientos y saberes, hacia su consolidación como campo disciplinario de pleno derecho, es que la comunidad de personas que asumen como su asunto primordial de interés indagatorio a los procesos que tienen lugar en dicho ámbito, cuenten con un espacio de formación avanzada y continua, como lo es un Programa Doctoral que se aboque específicamente a tales procesos; así lo afirma Godino (2000: 348) quien sostiene que:

> Otro indicador de consolidación institucional (al menos para el caso español) consiste en los programas de doctorado específicos ofertados en distintas universidades y de tesis doctorales defendidas sobre problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (paréntesis añadido) (Godino, 2000: 348)

Tal es el caso de la Educación Matemática (EM) en Venezuela, país suramericano que, a partir del seis de diciembre de dos mil doce, por disposición del Consejo Nacional de Universidades (CNU) cuenta con un doctorado específico como lo es el *Doctorado en Educación Matemática* (DEM) de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), en el Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara", en Maracay (para hacer referencia a este programa se usará de aquí en adelante la sigla DEM-UPEL). En el presente trabajo se hará referencia a los principales hitos que definen la trayectoria seguida por el proceso que condujo a la creación de este programa doctoral, el primero creado en Venezuela

2. El Proyecto PROVEDEM: paso inicial del Doctorado de EM en Venezuela

Los esfuerzos para crear en Venezuela un doctorado específico en Educación Matemática se remontan a julio de 1998 cuando, en una sesión especial del III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (III CIBEM) realizado en la Universidad Central de Venezuela (Caracas), fue presentado el Proyecto de Programa Venezolano de Doctorado en Educación Matemática (Proyecto PROVEDEM) (Ver Figura 1)

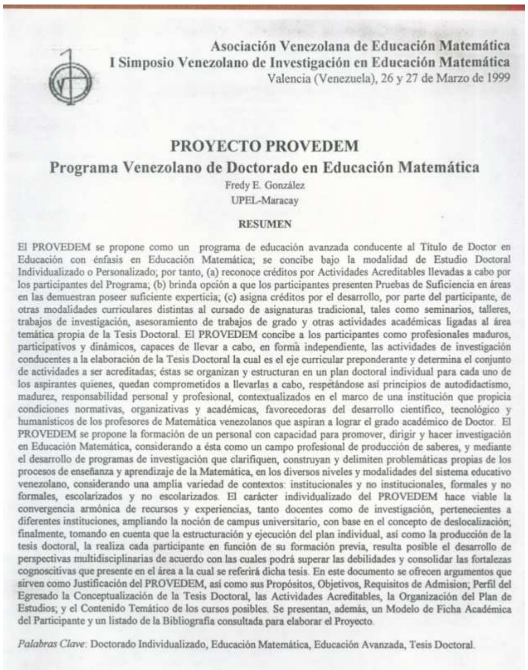
> Merece destacar la presentación del Proyecto PROVEDEM (Programa Venezolano de Doctorado en Educación Matemática) a cargo del profesor Fredy González. Y en cuanto a reuniones la de la asociación ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática)

Figura 1. Extracto de la Reseña sobre el III CIBEM publicada en la Revista SUMA (http://revistasuma.es/IMG/pdf/29/136-140.pdf)

La reunión especial del III CIBEM donde se examinó el Proyecto PROVEDEM fue coordinada por Fredy González y en la misma participaron destacados educadores matemáticos tanto venezolanos como de otros países, algunos de quienes estuvieron presentes fueron Walter Beyer, Dario Fiorentini, Carlos Vasco, Claude Gaulin, Ubiratan D´Ambrosio, Pedro Gómez quienes, junto con los demás asistentes a la reunión, además de expresar palabras de aliento y estímulo para con la iniciativa, destacaron la importancia y necesidad de crear en Venezuela un programa de doctorado específico en Educación Matemática.

El Proyecto PROVEDEM no prosperó en esa oportunidad; sin embargo, la expectativa de desarrollar en nuestro país un programa postgradual de quinto nivel, específico en Educación Matemática, se mantuvo vigente y en diferentes eventos venezolanos dedicados a la Educación Matemática la idea de este doctorado siempre fue un tema de conversación.

Así ocurrió en el I Simposio Venezolano de Investigación en EM (I SIMVIEMAT) que se realizó en Valencia (Carabobo, Venezuela) durante los días 26 y 27 de marzo de 1999; el Grupo de Trabajo Nº 1 de este Simposio, intitulado "*Los postgrado en Educación Matemática y la Investigación*", fue coordinado por el Profesor Martín Andonegui, destacado educador matemático adscrito al Departamento de Matemática del Instituto Pedagógico de Barquisimeto; fue en este grupo donde el Proyecto PROVEDEM fue presentado, luego de haber sido expuesto en el III CIBEM. La información acerca de este proyecto fue escuchada con incredulidad y con críticas no menores; sin embargo, algunos de los asistentes formularon un conjunto de importantes sugerencias que fueron tomadas en cuenta para su mejoramiento (Figura 2).



Asociación Venezolana de Educación Matemática
I Simposio Venezolano de Investigación en Educación Matemática
Valencia (Venezuela), 26 y 27 de Marzo de 1999

PROYECTO PROVEDEM
Programa Venezolano de Doctorado en Educación Matemática
Fredy E. González
UPEL-Maracay

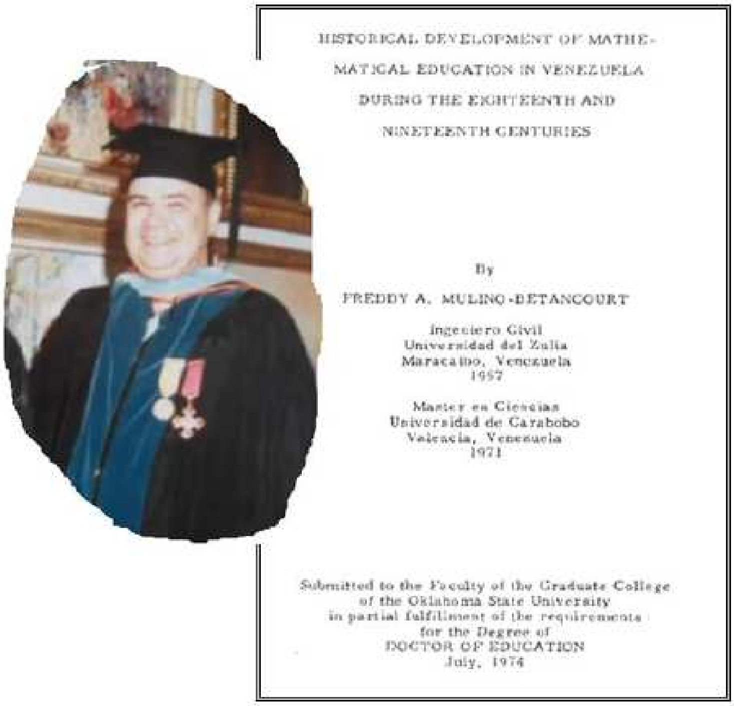
RESUMEN

El PROVEDEM se propone como un programa de educación avanzada conducente al Título de Doctor en Educación con énfasis en Educación Matemática; se concibe bajo la modalidad de Estudio Doctoral Individualizado o Personalizado; por tanto, (a) reconoce créditos por Actividades Acreditables llevadas a cabo por los participantes del Programa; (b) brinda opción a que los participantes presenten Pruebas de Suficiencia en áreas en las demuestran poseer suficiente experticia; (c) asigna créditos por el desarrollo, por parte del participante, de otras modalidades curriculares distintas al cursado de asignaturas tradicional, tales como seminarios, talleres, trabajos de investigación, asesoramiento de trabajos de grado y otras actividades académicas ligadas al área temática propia de la Tesis Doctoral. El PROVEDEM concibe a los participantes como profesionales maduros, participativos y dinámicos, capaces de llevar a cabo, en forma independiente, las actividades de investigación conducentes a la elaboración de la Tesis Doctoral la cual es el eje curricular preponderante y determina el conjunto de actividades a ser acreditadas; éstas se organizan y estructuran en un plan doctoral individual para cada uno de los aspirantes quienes, quedan comprometidos a llevarlas a cabo, respetándose así principios de autodidactismo, madurez, responsabilidad personal y profesional, contextualizados en el marco de una institución que propicia condiciones normativas, organizativas y académicas, favorecedoras del desarrollo científico, tecnológico y humanísticos de los profesores de Matemática venezolanos que aspiran a lograr el grado académico de Doctor. El PROVEDEM se propone la formación de un personal con capacidad para promover, dirigir y hacer investigación en Educación Matemática, considerando a ésta como un campo profesional de producción de saberes, y mediante el desarrollo de programas de investigación que clarifiquen, construyan y delimiten problemáticas propias de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, en los diversos niveles y modalidades del sistema educativo venezolano, considerando una amplia variedad de contextos: institucionales y no institucionales, formales y no formales, escolarizados y no escolarizados. El carácter individualizado del PROVEDEM hace viable la convergencia armónica de recursos y experiencias, tanto docentes como de investigación, pertenecientes a diferentes instituciones, ampliando la noción de campus universitario, con base en el concepto de deslocalización; finalmente, tomando en cuenta que la estructuración y ejecución del plan individual, así como la producción de la tesis doctoral, la realiza cada participante en función de su formación previa, resulta posible el desarrollo de perspectivas multidisciplinarias de acuerdo con las cuales podrá superar las debilidades y consolidar las fortalezas cognoscitivas que presente en el área a la cual se referirá dicha tesis. En este documento se ofrecen argumentos que sirven como Justificación del PROVEDEM, así como sus Propósitos, Objetivos, Requisitos de Admision; Perfil del Egresado la Conceptualización de la Tesis Doctoral, las Actividades Acreditables, la Organización del Plan de Estudios; y el Contenido Temático de los cursos posibles. Se presentan, además, un Modelo de Ficha Académica del Participante y un listado de la Bibliografía consultada para elaborar el Proyecto.

Palabras Clave: Doctorado Individualizado, Educación Matemática, Educación Avanzada, Tesis Doctoral.

Figura 2. Resumen de la Ponencia sobre Proyecto PROVEDEM presentada en el I SIMVIEMAT

Es necesario señalar que, a pesar de que en Venezuela antes de 2012 no se contaba con un programa de doctorado específico, los educadores matemáticos venezolanos se las ingeniaron para realizar estudios doctorales que les permitieran abordar temas propios de la Educación Matemática; la estrategia tuvo dos trayectorias; una consistió en realizar estudios con tesis doctorales específicas en Educación Matemática en programas postgraduales de Estados Unidos o Europa (particularmente Francia o España); la segunda fue la incorporación a alguno de los Doctorados en Educación (genéricos) existentes en Venezuela y en la tesis doctoral abordar como asunto de interés indagatorio alguna cuestión específicamente propia de la Educación Matemática. La primera tesis doctoral en Educación Matemática producida por un autor venezolano fue la de Fredy Mulino Betancourt en julio de 1974 (Figura 3).



HISTORICAL DEVELOPMENT OF MATHE-
MATICAL EDUCATION IN VENEZUELA
DURING THE EIGHTEENTH AND
NINETEENTH CENTURIES

By

FREDDY A. MULINO-BETANCOURT

Ingeniero Civil
Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela
1957

Master en Ciencias
Universidad de Carabobo
Valencia, Venezuela
1971

Submitted to the Faculty of the Graduate College
of the Oklahoma State University
in partial fulfillment of the requirements
for the Degree of
DOCTOR OF EDUCATION
July, 1974

Figura 3. La primera tesis doctoral escrita por un venezolano sobre Educación Matemática

3. Oportunidades de estudios doctorales en EM antes de la autorización del DEM

Desde mediados de los años 90´s hasta 2012, cuando fue autorizado el DEM-UPEL, las oportunidades de estudios doctorales en Educación existentes en Venezuela eran ofrecidas por las siguientes instituciones de educación superior: Universidad Nacional Experimental Simón Rodríguez (UNESR); La Universidad del Zulia (LUZ), Universidad Central de Venezuela (UCV), Universidad de Carabobo (UC), Universidad Santa María (USM), Universidad Rafael Belloso Chacín (URBE), y la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), en sus núcleos de Caracas (UPEL-IPC), Barquisimeto (UPEL-IPBAR), Maracay (UPEL-IPMAR), Maturín (UPEL-IPMAT), y Rubio (UPEL-IPRJGR).

La presencia de educadores matemáticos ejerciendo labores académicas en algunos de estos programas, hizo posible la apertura de espacios para la realización de estudios propios de Educación Matemática; así, por ejemplo, en 1997 en el Doctorado en Ciencias Humanas de LUZ, bajo la Coordinación de la Dra. Blanca Quevedo (de la Universidad Valle del Momboy, Trujillo, Venezuela), fue formalizada la primera línea de investigación en Educación Matemática de Venezuela, intitulada *Línea de investigación en Didáctica de la Matemática*, sus participantes fundadores fueron María Escalona; Xiomara Arrieta; Hugo Parra Sandoval; Ángela Cova; Rafael Luque; y Yaneth Ríos; posteriormente, esta línea pasó a denominarse "*Línea de Investigación Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales*" debido a que fueron incluidas las investigaciones en enseñanza de la Física; el desarrollo de esta línea contó con el apoyo de los siguientes docentes extranjeros: Dra. Pilar Azcárate (Universidad de Cádiz. España. Octubre 1998); Dra. Ana María Pessoa de Carvalho (Brasil, 2.000); y, Dr. Nicolás Marín (Universidad de Almería, España; Julio de 2001). Los primeros egresados fueron: Hugo Parra Sandoval (Tutor: Fredy

González), María Josefina Escalona Fuenmayor y Xiomara Arrieta de Uzcátegui, todos docentes de La Universidad del Zulia.

Posteriormente, en 2001 el Dr. David Mora conformó una *Línea de Investigación en Enseñanza de la Matemática* en el marco del Convenio Cooperativo de Formación Docente, suscrito entre la Escuela de Educación de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad Central de Venezuela y la Escuela de Matemática de la Facultad de Ciencias de esta misma institución; dicha línea fue aprobada por el Comité del Doctorado en Educación de la mencionada Escuela, dada su importancia para el fortalecimiento de la investigación venezolana en el campo de la Educación Matemática.

El siguiente esfuerzo por abrir espacio a la Educación Matemática en los estudios doctorales en Venezuela, se dio en 2006 en el Instituto Pedagógico de Maracay cuando Mario Arrieche y Fredy González, "*con la perspectiva de que, en un futuro próximo, pudiera ser creado un programa de doctorado específico en Educación Matemática*", propusieron ante las autoridades de investigación y postgrado de dicha Institución, la apertura del ***Área de Investigación en Educación Matemática para el Doctorado en Educación de la UPEL Maracay***; en el documento contentivo de la proposición se hace referencia a la Educación Matemática como Disciplina Científica; luego, se esbozan las líneas de investigación que se despliegan en el Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" con sede en el Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de Maracay; seguidamente, se presenta el programa sinóptico de cada uno de los Seminarios que conformarían el área; finalmente, se inserta el título de algunos de los temas alrededor de los cuales se podrían implementar trabajos de investigación de carácter doctoral.


REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO "RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA"
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

Maestría en Educación
Mención Enseñanza de la Matemática

Núcleo de Investigación en Educación Matemática
"Dr. Emilio Medina"

PROPUESTA
ÁREA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
PARA EL DOCTORADO EN EDUCACIÓN DE LA UPEL MARACAY

Elaborado por:

Dr. Fredy E. González
Coordinador
Núcleo de Investigación en Educación Matemática
"Dr. Emilio Medina"

Dr. Mario José Arrieche
Coordinador
Maestría en Educación
Mención Enseñanza de la Matemática

Maracay, Enero de 2006

Figura 4. Portada de la Propuesta de Área de Investigación EM para el Doctorado en Educación de la UPEL Maracay presentada por González y Arrieche en 2006

En los programas de doctorado en ciencias de la educación (genéricos) de las otras instituciones hasta el momento (septiembre de 2014) no se tiene conocimiento de la existencia de líneas de investigación específicas en Educación Matemática; sin embargo, en estas condiciones fue posible realizar tesis doctorales con temas propios de EM, y en la actualidad el país cuenta con un numeroso grupo de sus educadores matemáticos que han alcanzado su grado de Doctor.

4. De la Primera Maestría Latinoamericana en Enseñanza de la Matemática al Primer Doctorado Venezolano en EM.

El Primer Programa de Postgrado en Enseñanza de la Matemática de América Latina, fue fundado en 1974 en el Instituto Pedagógico de Caracas, su primer coordinador fue el Dr. Mauricio Orellana; mientras que fue en Diciembre de 2012 cuando el Consejo Nacional de Universidades autorizó el funcionamiento del DEM-UPEL, primero en su tipo en Venezuela y (hasta el momento de escribir estas líneas, septiembre de 2014) único programa doctoral venezolano específico en Educación Matemática; entre estas dos fundaciones transcurrieron casi cuatro décadas; y si se toma en cuenta que fue a partir de 1961, con la realización de la 1ª Conferencia Interamericana de Educación Matemática (I CIAEM) a la cual asistió una delegación de educadores matemáticos venezolanos (Jesús Salvador González; Manuel Balanzat, educador matemático argentino que, desde 1960 hasta septiembre de1962, fue profesor de Análisis Matemático, Análisis Funcional y Teoría de las Distribuciones, temas dictados por primera vez en Caracas, en la Universidad Central de Venezuela), cuando nuestro país se vio inmerso en el proceso de Reforma de la Enseñanza de la Matemática asociado con el denominado Movimiento de la “Matemática Moderna”, entonces se puede afirmar que la emergencia del DEM-UPEL es un punto culminante en un lapso de medio siglo (1961-2012) de Educación Matemática en Venezuela, pleno de pormenores que es preciso concientizar[2].

5. La *Matemática Moderna* y el desarrollo de la EM en Venezuela

A raíz del derrocamiento de la dictadura perezjimenista (enero de 1958), Venezuela entró en un proceso de construcción de democracia que planteaba exigencias en todos los ámbitos sociales, lo cual abarcó, por supuesto, el campo educativo; esto fue reforzado por el impacto global que tuvo el lanzamiento del Sputnik por la URSS, lo cual trastocó muchas de las creencias que, en materia de educación, para esa época eran suscritas por los EEUU; considérese la influencia que en aquel entonces ese país norteamericano tenía sobre Venezuela y se podrá configurar un cuadro sociocultural que habría de tener impacto sobre todos los países latinoamericanos y, particularmente sobre la Patria de Simón Bolívar. Hay autores, como Julio Mosquera, que ven en el proceso de Reforma de la Enseñanza de la Matemática, asociado con la denominada “Matemática Moderna”, una estrategia estadounidense de dominación ideológica, destinada a garantizar su predominio sobre Latinoamérica y contrarrestar la potencial influencia soviética, habida cuenta de que la URSS había hecho suya a Cuba a raíz de la “Crisis de los Cohetes”. Sin entrar en consideraciones sobre la relación entre “Matemática Moderna y Neocolonialismo en Venezuela” (Mosquera, 2010), lo cierto es que la “Matemática Moderna” comenzó a ser estudiada en Venezuela; primero en las instituciones de educación superior y luego, poco a poco, fue permeando hacia las de educación secundaria y primaria.

[2] Se propone el siguiente estudio: Pormenores de Medio Siglo de Educación Matemática en Venezuela: 1961-2012

Quien esto escribe tiene un vivencia personal al respecto; en 1967 cuando aún era un preocupado liceísta que quería estudiar para profesor de Matemática en el Instituto Pedagógico de Caracas, y al enterarse de que en esta Institución "*se enseñaba una Matemática que nada tenía que ver con la que se estudiaba en el Instituto de Comercio ´Antonio José de Sucre´* (ICAJS)," junto con otros compañeros le solicitó al profesor Francisco Perdomo, jefe del Departamento de Matemática en el ICAJS que les diera unas clases de "esa otra Matemática", a lo cual accedió; fue así como el autor junto con sus condiscípulos, escucharon por primera vez cuestiones relacionadas con la Teoría de Conjuntos.

Trascendiendo la anécdota, es posible conjeturar que hacia finales de la década de 1960, la Matemática Moderna se mantenía a nivel de la educación superior ("*la Matemática que se enseña en el Instituto Pedagógico es distinta a la que se estudia en los liceos*"); así que, en la medida en que los profesores y otros profesionales que enseñaban matemática se fueron formando en esta "Nueva Matemática", ella permearía hacia los niveles educativos preuniversitarios (educación secundaria y educación primaria).

¿Dónde tenía lugar esa formación? En principio en seminarios, charlas y cursos especializados; luego, poco a poco, se abrieron espacios más amplios como encuentros y jornadas; finalmente, el proceso se institucionalizó con la fundación, el seis (06) de agosto de 1973, del Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC); la valorización y el reconocimiento del trabajo efectuado por esta institución es una tarea pendiente; en el caso específico de la Educación Matemática, la contribución es fundamental; en efecto, a través de su Coordinación de Matemática, el CENAMEC tuvo una actuación relevante en la introducción de la Matemática Moderna en Venezuela, para fue necesario la formación de profesores de Matemática, lo cual se llevó a cabo mediante la edición de materiales educativos impresos de variado tipo y la realización de cursos, charlas, seminarios y otras reuniones que tuvieron lugar en las diferentes regiones del país y que estuvieron dirigidas por los docentes adscritos a la mencionada Coordinación, entre cuyas tareas estaba la formación de los "multiplicadores", es decir del personal que recibía la formación y adquiría el compromiso de propagarlo, "multiplicarlo", entre sus colegas.

Con el tiempo, se creó la necesidad de compartir experiencias a nivel nacional; fue así como se comenzaron a organizar los "encuentros nacionales de profesores de Matemática" promovidos por el CENAMEC (sin embargo, es importante señalar que el CENAMEC no inauguró este tipo de eventos, puesto que en 1961 (el mismo año de la primera CIAEM) se realizó en Cumaná (estado Sucre) el Primer Seminario para la Enseñanza de la Física y las Matemáticas (Beyer, 2001a). Los primeros tres eventos (1982, 1983, 1984) se denominaron "Encuentro Nacional de Profesores de Didáctica de la Matemática en Institutos de Educación Superior" que, como su nombre lo indica, estaba dirigido a docentes universitarios; sin embargo, también asistían docentes de educación secundaria, lo cual motivó que se ampliara la convocatoria a fin de propiciar la presencia de profesores de Matemática de instituciones educativas preuniversitarias; fue por ello que, a partir de 1985, el evento pasó a denominarse "Encuentro sobre Enseñanza de la Matemática", esto significó un cambio de filosofía porque abrió el espacio para que se encontraran los profesores universitarios con sus colegas de los niveles secundario y primario; esta denominación se mantuvo durante los encuentros IV, V, VI y VII, ocurridos anualmente desde 1985 hasta 1989 (en 1998 no hubo Encuentro porque se le dio prioridad al III CIBEM que se realizó en Julio de ese año en los espacios de la UCV; este congreso exigió el esfuerzo conjunto de la ASOVEMAT y de todas las demás organizaciones venezolanas vinculadas con la Educación Matemática entre las cuales, por su puesto, estuvo el CENAMEC); todos se realizaron en Caracas; pero, por exigencia de los propios participantes, a partir de 1989 se comenzaron a realizar eventos semejantes fuera de la capital del país, siendo los dos primeros la I Jornada Centro-Occidental de Educación Matemática (Instituto Pedagógico de Barquisimeto, Lara) y el I Encuentro de Profesores de Matemática de las Regiones Nor-Oriental, Insular y Guayana (Instituto Pedagógico de Maturín)

Los organizadores de este último fueron protagonistas de un intenso movimiento que dio como resultado la fundación en Mayo de 1992, de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT), con lo cual se dio un salto cualitativo importante en el proceso de desarrollo de esta disciplina en Venezuela y que marcó el inicio de un período que se cierra con la apertura del Doctorado en Educación Matemática (DEM) en la UPEL Maracay, lo cual constituye un "*´acontecimiento´ significativo de la profesionalización de nuestra disciplina en Venezuela*” (Luis Carlos Arboleda, Comunicación Personal, 23 de julio de 2014).

6. Pormenores de la apertura del Doctorado en EM4 en Venezuela

El proceso iniciado en 1998 con la presentación en el III CIBEM del Proyecto Programa Venezolano de Doctorado en Educación Matemática (PROVEDEM), tuvo un punto culminante con el visto favorable por parte del CNU, en su sesión del 06 de diciembre de 2012, del informe para la Creación del Doctorado en Educación Matemática en la UPEL Maracay (DEM-UPEL) (Figura 5).

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
CONSEJO NACIONAL DE UNIVERSIDADES
SECRETARIADO PERMANENTE

De conformidad con lo previsto en el artículo 23 de la Ley de Universidades, se convoca a los integrantes del Cuerpo para una sesión ordinaria el día 06, mes diciembre de 2012, Hora: 8:30 a. m., sede: Universidad Nacional Experimental Politécnica de la Fuerza Armada Bolivariana, Calle Holanda, entre avenida La Estancia y avenida Caracas, frente al edificio Banaven, (Cubo Negro), Chuao, Municipio Chacao, estado Miranda.

15. Informe favorable de creación de los siguientes PROGRAMAS DE POSTGRADO.

15.5 Doctorado en Educación Matemática, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, sede: Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara”, avenida Las Delicias, Maracay, estado Aragua.

16. Varios

ASALIA R. VENEGAS S.
SECRETARIA PERMANENTE

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
CONSEJO NACIONAL DE UNIVERSIDADES
SECRETARIADO PERMANENTE
Nº 076, Caracas, 10 de diciembre de 2012

El Consejo Nacional de Universidades en su sesión ordinaria del 06 de diciembre de 2012, en ejercicio de las atribuciones previstas en los ordinales 1° y 3° del artículo 20 de la Ley de Universidades, de conformidad con lo establecido en el artículo 13 de la Normativa General de los Estudios de Postgrado para las Universidades e Institutos debidamente autorizados por el Consejo Nacional de Universidades, publicada en Gaceta Oficial Nº 37.328 de fecha 20.11.01 y de acuerdo al informe del Consejo Consultivo Nacional de Postgrado.

ACUERDA

Autorizar la creación y el funcionamiento del Programa de Postgrado: **Doctorado en Educación Matemática,** modalidad Presencial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, sede: Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara", avenida Las Delicias, Maracay, estado Aragua.

COMUNÍQUESE Y PUBLÍQUESE,
MARLENE YADIRA CÓRDOVA
Presidenta del Consejo Nacional de Universidades

ASALIA R. VENEGAS S.
Secretaria Permanente

Figura 5. Agenda de la Reunión del CNU (06/12/2012) donde se emite voto favorable para la creación del Doctorado en Educación Matemática de la UPEL Maracay.

En Febrero de 2013, se inició el proceso de conformación de su Cohorte Fundacional, la cual quedó integrada por once participantes (Figura 6), quienes, al momento de escribir este texto (septiembre de 2014) ya han cursado sus dos primeros semestres académicos; y, ya se hizo la selección de quienes integrarán la Segunda Cohorte, la cual está conformada también por once profesores.

Figura 6. Cohorte Fundacional del DEM-UPEL (izq. a der.) Raúl Morillo, Mario Arrieche (profesor), Belén Arrieche, Elena Vásquez, Mariela Herrera, Angélica Martínez, Enedina Rodríguez, José Graterol, Henry Suárez, (Juan Prieto, Alexandra Noguera, y Cinthia Humbría no asistieron a la sesión inaugural). Foto: Fredy González

7. Vinculación del DEM-UPEL con el nivel de desarrollo de la EM en Venezuela

El nivel de desarrollo alcanzado por la Educación Matemática como disciplina científica a nivel global ha sido documentado suficientemente en trabajos tales como los de Sriraman & English (2010); para el caso iberoamericano, las evidencias pueden ser obtenidas mediante una revisión de las actas, memorias y otros documentos generados a partir de la realización de eventos académicos de gran relevancia, tales como: Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), la cual se ha llevado a cabo en veintiséis (26) ocasiones; de éstas, la RELME XXI se realizó en Maracaibo (Venezuela) en 2007; Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), celebrado en siete ocasiones, la tercera de las cuales tuvo lugar en Caracas (Venezuela) en 1998; y, Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM), que en 2011 cumplió cincuenta (50) años de fundada y cuya cuarta edición ocurrió en Caracas en 1975. Como puede apreciarse, en Venezuela han tenido lugar importantes acontecimientos vinculados con la Educación Matemática como ámbito para la producción profesional de saberes en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Venezuela, además de haber sido escenario de realización de eventos internacionales trascendentes como los ya mencionados, también ha desarrollado su especificidad en cuanto se refiere a Educación Matemática; pruebas fehacientes de ello son la constitución en 1992 de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT), organización ésta que ya cumplió dos décadas de fundada; y la consolidación del Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM) como espacio de difusión de la producción científica generada por los educadores matemáticos venezolanos.

Más elementos acerca del proceso de constitución, desarrollo y consolidación de la Educación Matemática en Venezuela se pueden obtener revisando los siguientes trabajos: Beyer (2001a, 2001b), González (1999), Parra (2002, 2010), y Serres (2004).

En suelo venezolano, Aragua particularmente está considerado como uno de los "atractores de la Educación Matemática Venezolana" (González, Iglesias & González, 2010); en efecto, en este estado también han ocurrido eventos de relevancia para la Educación Matemática que se hace en nuestro país. En primer lugar se ha de mencionar que, hacia finales de la década de los 70´s y principios de los 80´s, se llevó a cabo en Maracay una de las sesiones del Seminario Permanente de Enseñanza de la Matemática, creado por Lelys Páez; la coordinación de la sesión estuvo a cargo de Emilio Medina, quien fue el segundo venezolano (después de Freddy Mulino Betancourt, de la Universidad de Carabobo) en obtener el grado de Doctor con una tesis específicamente dedicada a la Educación Matemática, trabajo éste que sirvió de base para la creación de la Maestría en Matemática, mención Docencia, en la Universidad de Carabobo que, con el tiempo, se transformó en la actual Maestría en Educación Matemática que se dicta en dicha universidad.

La serie de eventos dedicados a la Educación Matemática ocurridos en Aragua, tuvo continuidad en la realización de las Jornadas Regionales de Educación Matemática que fueron impulsadas, conjuntamente por el Departamento de Matemática y la Maestría en Educación, Mención Enseñanza de la Matemática del Instituto Pedagógico de Maracay (IPMAR). La alianza entre la Maestría y el Departamento se vio fortalecida con la creación, en 2003, del Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando Nuevas Tecnologías (CEINEM-NT) y del Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM), y la vinculación de éstas cuatro organizaciones con la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT) que, en conjunto, han sido responsables de la concepción, organización, ejecución y evaluación de múltiples actividades propias de la Educación Matemática que han tenido como epicentro al Instituto Pedagógico de Maracay (IPMAR; UPEL Maracay). Este es el contexto que sirvió de marco a la emergencia del DEM-UPEL.

8. Algunos Aspectos Curriculares del Doctorado en EM en Venezuela

8.1. Objetivo del DEM-UPEL

La finalidad fundamental del Doctorado en Educación Matemática de la UPEL es brindar condiciones adecuadas que aseguren la *formación y desarrollo como investigadores,* al más alto nivel académico, técnico, científico y humanístico, de los educadores matemáticos venezolanos, de modo tal que: (a) cuenten con una idónea formación teórica, metodológica y práctica; (b) sean capaces de investigar y evaluar problemáticas vinculadas con los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática; y, (c) puedan proponer y validar soluciones alternativas e innovaciones didácticas que hagan viable la superación de los problemas que confrontan la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, en diferentes modalidades y niveles del Sistema Educativo de Venezuela, que tomen en cuenta el contexto económico-social, histórico, cultural y político del país.

En el mediano y largo plazo, se espera que el DEM-UPEL coadyuve al fortalecimiento y consolidación de una comunidad venezolana de investigadores en Educación Matemática que asuman como asuntos de interés indagatorio las anomalías presentes en la formación matemática de los ciudadanos de esta nación, atendiendo tanto los que ostentan los protagonistas de los proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, como los que se asocian con los contextos social, cultural, institucional donde acontece el hecho educativo edumático (González, 2000).

Es así como el DEM-UPEL ofrece un espacio de convergencia de diversos grupos de investigación venezolanos mediante la conformación de una Red de Unidades de Investigación que sirve de apoyo a los doctorantes que son asumidos como Investigadores en Formación (IEF).

8.2. ¿A quiénes está dirigido el DEM-UPEL?

Las Categorías de Aspirantes a ingresar al DEM UPEL son las siguientes: Profesionales con grado de Magister (o equivalente); Profesionales con grado de Especialista; Profesionales con sólo grado de Profesor (o equivalente) de Matemática; Profesionales (no docentes) con formación inicial (pregrado) en áreas afines a la Matemática (ingenieros, estadísticos, físicos, químicos, etc.) que se desempeñen como profesores de Matemática, siempre y cuando posean título de magíster en Educación (mención Enseñanza de la Matemática) o en Educación Matemática. En condiciones excepcionales, y previo visto bueno de las correspondientes autoridades, podrán solicitar admisión los Estudiantes Activos del último semestre de la Carrera de Docencia en Matemática que evidencien un alto nivel de desempeño y rendimiento en sus estudios, queda entendido que para poder ser admitidos como alumnos regulares del DEM UPEL, estos estudiantes, previamente, han de haber alcanzado el grado de profesor o su equivalentes; y, además, quienes ingresen sin poseer el grado de Magister, deberán cursar un número de unidades de crédito mayor que el que cursarían quienes sí lo posean.

8.3. ¿En cuál etapa de desarrollo se encuentra el DEM-UPEL?

Luego de su autorización por el CNU (06/12/2012), se llevó a cabo la conformación de su Cohorte Fundacional, cuyos integrantes comenzaron las actividades académicas (Cursos y Seminarios) correspondientes al primero de los diez semestres, en octubre de 2013; en julio de 2014 culminaron el segundo semestre de asignaturas obligatorias. Además, en esta misma fecha, se inició la conformación de la Segunda Cohorte que iniciará estudios en octubre de 2014; en total se cuenta con veintidós participantes, once en cada una de las dos cohortes que se han constituido hasta el momento. Por tanto, se puede afirmar que el DEM-UPEL se encuentra en su fase inicial de desarrollo.

8.4. ¿Cuál es el perfil del egresado del DEM-UPEL?

Se espera que quienes completen exitosamente todas las actividades académicas previstas en el DEM UPEL, asumiendo actitudes éticas, críticas, creativas y de actualización permanente, estén en condiciones de: (a) evaluar e investigar problemáticas vinculadas con los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, aportando con ello resultados, teóricos o empíricos, inéditos, originales y/o novedosos que coadyuven al desarrollo de la Educación Matemática como disciplina científica; (b) proponer y validar, con base en investigación científica y de calidad, innovaciones didácticas con mediación tecnológica, que hagan viable la superación de los problemas que se confrontan en las aulas de clase de Matemática en los diversos niveles de la educación venezolana, tomando en cuenta los contextos económico, social, histórico, cultural y político del país; (c) trabajar en forma autónoma e interdependiente en la generación, mediante la investigación, de nuevos conocimientos en el campo de la Educación

Matemática; (d) proponer teorías y modelos que describan, expliquen y mejoren la realidad de la organización y funcionamiento de la Educación Matemática, como disciplina científica, tanto en Venezuela como en otros países del área iberoamericana; y, (e) desarrollar innovaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática fundamentadas en la aplicación, con fines educativos, de las posibilidades que brindan los dispositivos tecnológicos electrónicos contemporáneos, tanto en lo que se refiere a su potencialidad para abordar asuntos propios de la Matemática (v.g. Software) como en lo relativo a la generación de nuevas modalidades de interacción entre los actores de situaciones educativas vinculadas con la Matemática.

8.5. ¿Cuáles son las orientaciones teóricas y metodológicas del DEM-UPEL?

La comunidad venezolana de EM, como casi todas las del resto del ámbito latinoamericano, está expuesta al influjo de las diferentes perspectivas teóricas que circulan internacionalmente; tal influencia se produce por la vía del consumo de información que llega al país a través de libros y revistas, más ahora, dadas las facilidades de acceso –vía INTERNET- a publicaciones editadas electrónicamente con la filosofía del *Open Journal System* (OJS; https://pkp.sfu.ca/ojs/).

Sin embargo, la principal vía de penetración hacia Venezuela de las perspectivas teóricas internacionales de la Educación matemática, son los venezolanos que han obtenido su doctorado en el exterior y se convierten en voceros y propagadores de los enfoques teóricos bajo cuya visión han sido formados.

De esa manera, en Venezuela se han formado grupos alrededor de la *Educación Matemática Crítica,* cuyo campo de acción se ubica principalmente en la Región Capital; el *Enfoque Ontosemiótico* (Región Central); el *Pensamiento Numérico y Algebraico* (Región Central); el Pensamiento Matemático Avanzado (Región Centroccidental); la *Didáctica Fundamental Francesa* (en alguno de los estados andinos con incidencia sobre el estado Lara); la *Etnomatemática* (Regiones Nororiental y Sur, así como parte del Centro y Occidente).

Ninguna de estos posicionamientos teóricos puede considerarse predominante por sobre los otros, aun cuando por circunstancias y cualidades de sus líderes, el EOS y la EMC cuentan con un número importante de trabajos realizados desde esas perspectivas.

Conscientes de esa realidad, los responsables de la gestión del DEM-UPEL adoptaron una posición multi perspectivista, de modo que en el desarrollo de las investigaciones que se generen en el programa, los investigadores responsables de los proyectos adopten el enfoque teórico que resulte más idóneo para abordar el correspondiente problema de investigación.

Esa apertura en cuanto a lo teórico se corresponde con la flexibilidad respecto de los abordajes metodológicos; es así como para cada trabajo de investigación se ha de concebir una estrategia metodológica ad hoc, especifica, atendiendo a sus especificidades, en concordancia con la naturaleza de la pregunta de investigación.

8.6. ¿Cuáles son las prácticas formativas predominantes?

El quehacer académico del DEM-UPEL está presidido por la siguiente premisa "se aprende a investigar investigando con otros investigadores"; por tanto, la investigación pretende ser el eje transversal de todas sus actividades académicas.

Para ello el DEM-UPEL se apoya en las unidades de investigación que constituyen su Red Académico Investigativa (RAI) del DEM UPEL, la cual se concibe como una modalidad organizativa que permite el acercamiento, la cooperación, el intercambio, el apoyo recíproco, la colaboración, el compartir, y muchas otras formas y modalidades de interacción, entre instituciones, organizaciones y personas, de Venezuela y el mundo, relacionadas con la Educación Matemática, cuya actuación sinergizada pueda coadyuvar al logro de los fines, propósitos y objetivos del DEM UPEL; así que la RAI-DEM UPEL propiciará el intercambio de: docentes, ambientes de aprendizaje, temáticas, problemas de investigación, y otros asuntos propios de la Educación Matemática, entre las personas y demás entes que la constituyan.

Por tanto, los participantes del DEM-UPEL están en contacto permanente con los investigadores adscritos a dichas unidades, bien sea a través de cursos, seminarios y otro tipo de interacciones, presenciales o no, de modo que los doctorantes se vayan apropiando de las rutinas propias del quehacer investigativo mediante su participación en una comunidad real de investigadores en Educación Matemática activos, de cuya cultura se van apropiando mediante un proceso de inmersión consciente.

9. Prospectiva del Doctorado en EM en Venezuela

El DEM-UPEL constituye un hito en el desenvolvimiento histórico de la Educación Matemática en Venezuela; se espera que se convierta en un espacio de producción científica importante en relación con las múltiples problemáticas, relativas a la formación matemática de los ciudadanos venezolanos, que serán abordadas como asuntos de interés indagatorio por los doctorantes en el momento de realizar sus respectivas tesis doctorales.

En el mediano plazo, se aspira contar con un importante número de doctores que puedan generar teorías locales atinentes a la realidad matemático-educativa de este país suramericano, de modo que sirva de referente a los educadores matemáticos del ámbito iberoamericano.

Referencias.

Beyer, W. (2001a). Pasado, presente y futuro de la Educación Matemática venezolana. Parte II. *Enseñanza de la Matemática. Revista Oficial de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT),* 10(2), 3-20.

Beyer, W. (2001b). Pasado, Presente y Futuro de la Educación Matemática en Venezuela. Parte I. *Enseñanza de la Matemática. (Revista de la ASOVEMAT)*, *10*(01), 23-36

Godino, J. D. (2000). La Consolidación de la Educación Matemática como disciplina científica. *Revista Números, 43-44*, 347-350. Recuperado el 3 de septiembre de 2014, de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo70.pdf

González, F. (1999). *La Educación Matemática en Venezuela: Apuntes para su reconstrucción histórica.* Conferencia Paralela. III CIBEM, Caracas. En Beyer, W., Cruz, C., Mosquera, J. y Serres Y. (Eds.). Memorias del III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Caracas: ASOVEMAT, pp. 125-127.

González, F. (2000). Agenda latinoamericana de investigación en educación matemática para el siglo XXI. *Educación Matemática,* 12(1), 107-128.

González, F.; Iglesias, M.; González Rondell, A. (2010). *Atractores Individuales y Colectivos de la Educación Matemática en Venezuela: Caso UPEL Maracay.*

Ponencia presentada en el VII Congreso Venezolano de Educación Matemática (VII COVEM), Caracas: UPEL-IPC, 5 al 8 de Octubre de 2010.

Mosquera, Julio. (2010). Matemática Moderna y Neocolonialismo en Venezuela. En: J. M. Matos & W. R Valente. (Eds.) (2010). *A reforma da Matemática Moderna em Contextos ibero-americanos*. Editora: Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento (UIED) da Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Pt. Capítulo 5, pp 103-136. Recuperado el 08 de septiembre de 2014 de http://run.unl.pt/bitstream/10362/5321/1/Matos_2010.pdf

Parra, H. (2002). Comunidad Académica de Educación Matemática Venezolana. Ideas para el debate. *Enseñanza de la Matemática (Revista de la ASOVEMAT)*, 11(2), 13-20

Parra, H. (2010). *La Educación Matemática. Su presencia y futuro en la Universidad del Zulia.* Revista Integra Educativa (Publicación del Instituto Internacional de Integración, dependiente del Convenio Andrés Bello, con sede en La Paz, Bolivia), III(2); 279 291. Disponible en: http://www.scielo.org.bo/pdf/rieiii/v3n2/a10.pdf (Consulta: 15 de agosto de 2011; 10:45)

Serres, Y. (2004). Una visión de la comunidad venezolana de Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol.7*, N°1, pp. 79-107

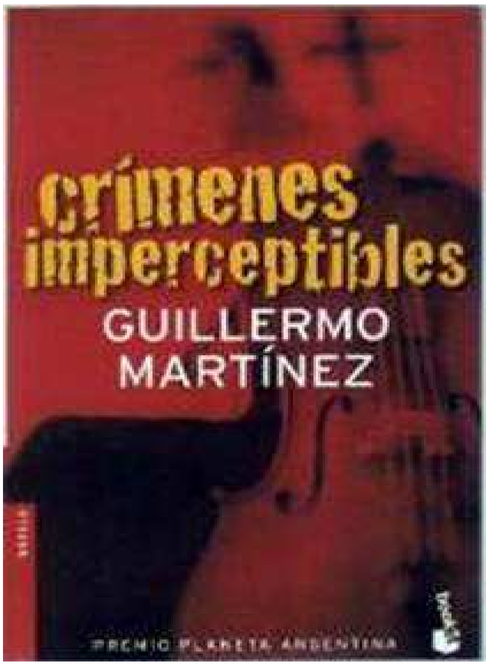
Sriraman, B. & L. English (Eds.) (2010). *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers (Advances in Mathematics Education).* Berlin/Heidelberg: Springer Science. ISBN: 9783642007415. 668 pages

Fredy González. es Doctor en Educación (Universidad de Carabobo, Venezuela, 1997); Master en Matemática, Mención Docencia (Universidad de Carabobo, Venezuela, 1994); y Profesor de Matemática y Contabilidad (Instituto Pedagógico de Caracas, 1974); se desempeña como formador de profesores de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL, Núcleo Maracay, Estado Aragua, Venezuela); es Coordinador Fundador del Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM); además coordina el Proyecto de Reconstrucción Histórica de la Educación Matemática en Venezuela, el cual forma parte de una indagación de más largo alcance intitulada Historia Social de la Educación Matemática en América Latina (HISOEM-AL). **niemupel@gmail.com**, **fredygonzalez1950@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 185-186

Libros



Crímenes imperceptibles.

Autor:
Guillermo Martínez.

Editorial:
Planeta

ISBN: 9789875801578

Edición: 2009.

Páginas: 244

Me pregunto si….

Un asesino serial, proyecta sus crímenes escribiendo una serie matemática previamente, o la serie es consecuencia de la naturaleza misma de pensamientos tan “desnaturalizados”.

¿Será este un ejemplo más donde la cordura (asociada a regularidades) y la locura (asociada a un orden con una lógica diferente) conviven para dar origen a la genialidad?

Estas reflexiones me surgen luego de haber completado la lectura del magnífico libro de Guillermo Martínez, en el cual la genialidad reside en lanzar al lector a la búsqueda de un asesino con conocimientos de lógica y hacernos transitar, a lo largo de toda la lectura, por pensamientos e ideas matemáticos, para acompañar el devenir del hilo argumental.

Se trata de un estudiante argentino que llega a Oxford con una beca para estudiar matemática, y se ve involucrado intelectualmente, no como sospechoso, en la resolución del gran enigma que representa la resolución de un caso de crímenes en serie. El autor de la novela juega de una manera muy ingeniosa con el concepto de serie desde la mirada matemática y desde la criminalística, entretejiendo situaciones donde el lector, sobre todo si es amante de esta ciencia, se incorpora a la lectura como cada vez que disfruta del desafío de resolver un problema matemático.

Nuestro protagonista, conoce casualmente a Arthur Seldom, una leyenda entre los matemáticos, quien dice en la declaración ante la policía, cuando sucedió la primera muerte que "*el crimen por motivaciones intelectuales, por pura vanidad de la razón, digamos a la manera de Raskolnikov*, (protagonista del espectacular libro Crimen y castigo de Dostoyevski)….. *no parece pertenecer al mundo real. O bien, los autores han sido siempre tan inteligentes que todavía no los hemos descubierto*". Esto abre al lector una expectativa increíble, generando el supuesto de que el asesino serial de la novela, con sus razonamientos lógicos, superará a su creador. Así es como motiva la voracidad de continuar con la lectura, haciéndose cada vez más amena y agradable.

Además, el primer mensaje que deja el asesino, lo dice claramente: *El primero de la serie,* y está acompañado del dibujo de un círculo, primer símbolo de una serie gráfica a descubrir. Esto también pone a trabajar la veta creativa del lector.

Es en el capítulo 3, en un diálogo entre el protagonista y Seldom, queda definida la razón del título: El asesino intenta que sean crímenes que no parezcan tales, confundiéndose con accidentes o muerte natural, otro elemento que descoloca, ya que no se trata de la habitual descarga de energías negativas o traumas inconscientes propias de las novelas o películas de este tipo.

También comenta Seldom en un diálogo con el protagonista, que en uno de sus libros había escrito: "*La lógica oculta detrás de los crímenes en serie es en general muy rudimentaria, con patrones muy burdos… monotonía y repetición. No son verdaderos enigmas lógicos*". Es como que razona en voz alta, a manera de comentario casual, lo que a mí, en particular, y me atrevo a decir que en general, pone al lector ante la gran expectativa de que este caso, sí, es un verdadero enigma lógica, y lo deja volando con la imaginación hacia las más dispares y alocadas divagaciones del pensamiento.

En resumen, ¿por qué lo recomiendo?...

Mi conclusión es que se trata de una apasionante novela, que atrapa desafiando a la inteligencia y creatividad científica, además de ser lo que es cualquier obra de arte, una propuesta recreativa y para disfrutar en momentos de ocio.

Prof. Raquel Cognigni.
Dpto. de Matemática.
Universidad Nacional del Comahue.
Argentina.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 187-193

Educación en la Red: Wolfram Alpha

http://www.wolframalpha.com/

En 2009, sobre la base de lo que hoy es Wolfram Language, la compañía de investigación, Web y software para la nube más respetadas del mundo, Wolfram Research, presentó Wolfram|Alpha, haciendo por primera vez realidad el conocimiento computacional a gran escala e introduciendo un receptor de nuevas y sorpresivas direcciones tecnológicas. Utilizado por millones de personas todos los días, a través de Internet, aplicaciones celulares y asistentes inteligentes, así como en implementaciones empresariales, Wolfram|Alpha representa uno de los proyectos de software más complejos y ambiciosos de todos los tiempos, y un gran logro intelectual y tecnológico.

Wolfram Alpha (también escrito Wolfram|Alpha o WolframAlpha) nació con el propósito de convertirse en un poderosísimo motor de respuestas, de conocimiento computacional. Es un servicio en línea que responde a las preguntas directamente mediante el procesamiento de la respuesta haciendo cálculos de su propia base de conocimiento. No es un motor de búsqueda, ya que no busca respuestas a las preguntas de un conglomerado de páginas web o documentos. Las consultas y procesamientos de cálculos también se hacen en un campo de texto, pero en éste se procesan las respuestas y visualizaciones adecuadas dinámicamente en lugar de producirlas como resultado de la obtención de un banco de respuestas predefinidas. Por lo tanto difiere de los motores de búsqueda semántica, los cuales indexan una gran cantidad de respuestas y luego tratan de hacer coincidir éstas con la pregunta hecha.

Wolfram Alpha sintetiza conocimientos avanzados haciendo inferencias a partir de un pequeño conjunto de información básica. Se basa en uno de los programas creados por Wolfram Research, Mathematica (en continuo desarrollo desde 1988), que incorpora el procesamiento de álgebra, cálculo numérico y simbólico, visualizaciones y capacidades estadísticas. Wolfram|Datos de alfa está continuamente actualizando, a menudo en tiempo real. Siempre se está desarrollando su código base. Algunos de los datos en la base de conocimiento se deriva de sitios web oficiales público o privado, pero la mayor parte proviene de las fuentes primarias más sistemáticas.

Todo lo que necesita usar Wolfram|Alfa es un navegador moderno con JavaScript y conectividad web. Es un programa con versión de uso gratuito que, por el momento, solamente admite texto en inglés.

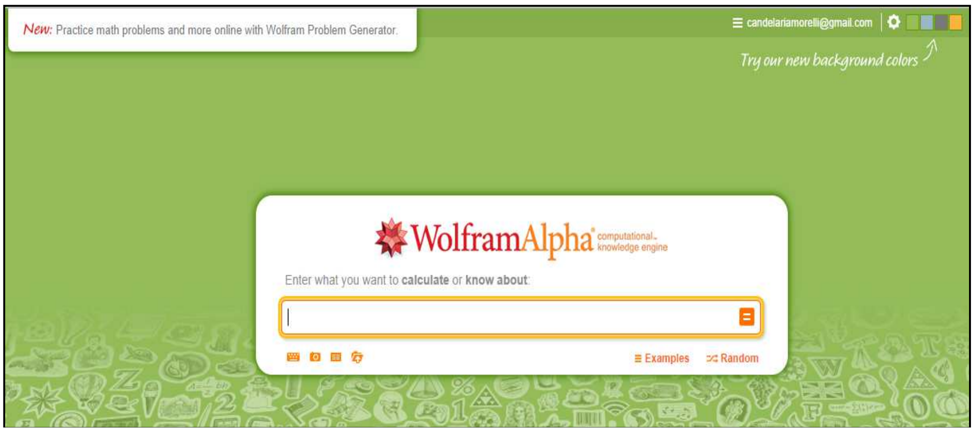


Figura 1

Debajo del mensaje en inglés **Enter what you want to calculate or know about** (Ingrese lo que desea calcular o saber) se puede escribir (en inglés) cualquier texto o cálculo matemático que uno esté interesado en conocer su respuesta. Para dar ejemplos variados: *weather in Chubut, how tall is Eiffel Tower? sphere surface area=1, integrate sin x dx from x=0 to pi*. Se muestra a continuación:

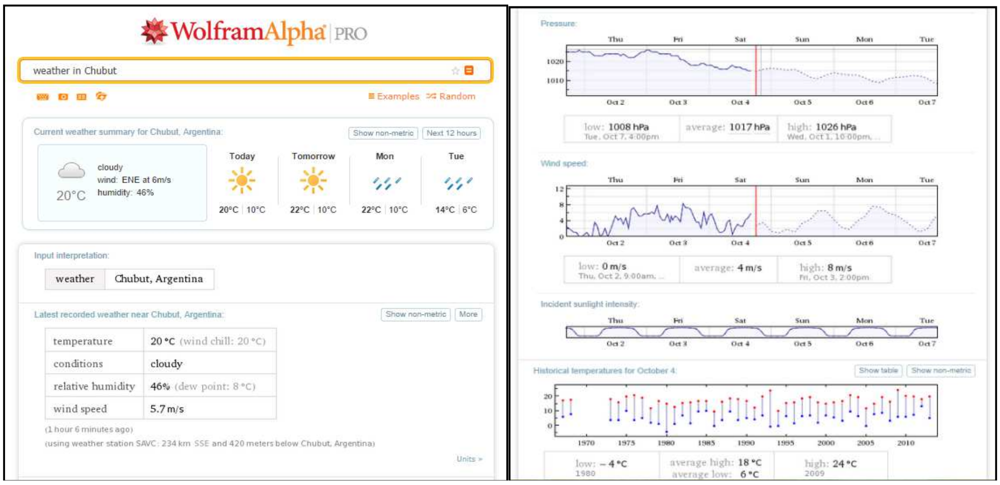


Figura 2: Ejemplo del tiempo en Chubut

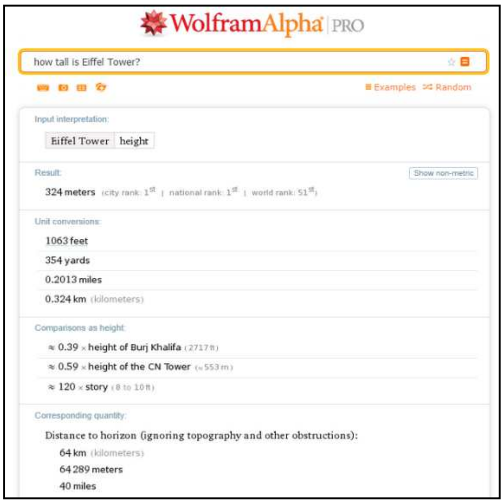


Figura 3: Ejemplo altura Torre Eiffel

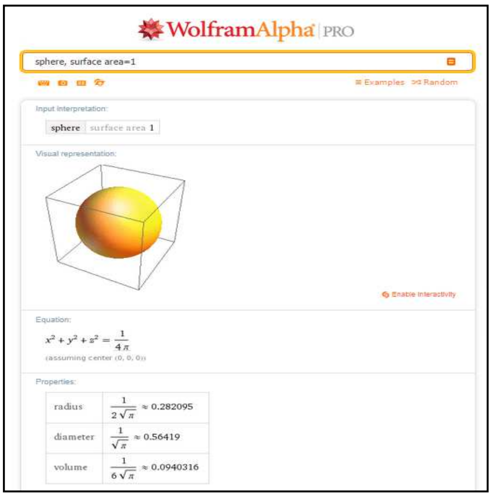


Figura 4: Ejemplo de esfera

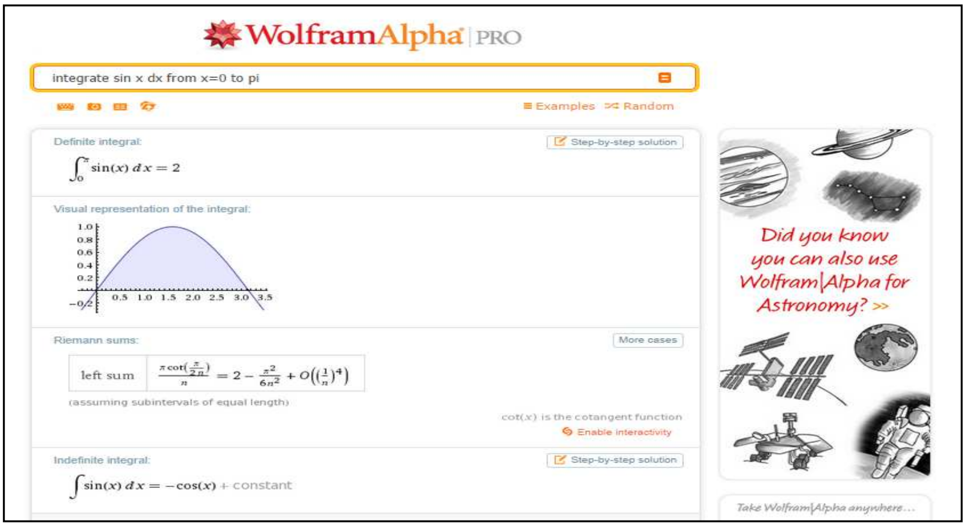


Figura 5: Ejemplo de integral

Si se desconoce la notación o escritura o cómo referirse a una temática en particular, se puede clickear en el ícono de Examples y se obtiene una sábana de ejemplos con accesos directos, como se muestra a continuación:

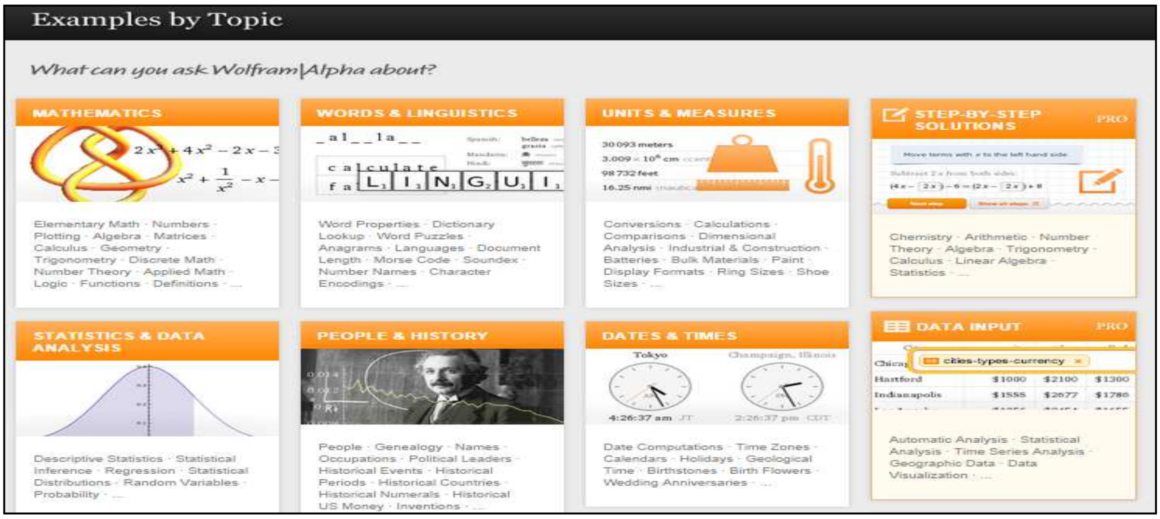


Figura 6

Figura 7

Figura 8

No es sólo matemático, sino que es un asistente personal parecido a la idea de Google Now o Siri, pero mucho más potente a nivel de cálculos, podría decirse que, **Wolfram Alpha es una gran enciclopedia**. Una gran enciclopedia en forma de idea innovadora. Para facilitar el acceso de nuevos usuarios hay videos tutoriales para el uso de Wolfram|Alfa así como Twitter, Facebook, un Blog oficial y página web de la Comunidad de Wolfram.

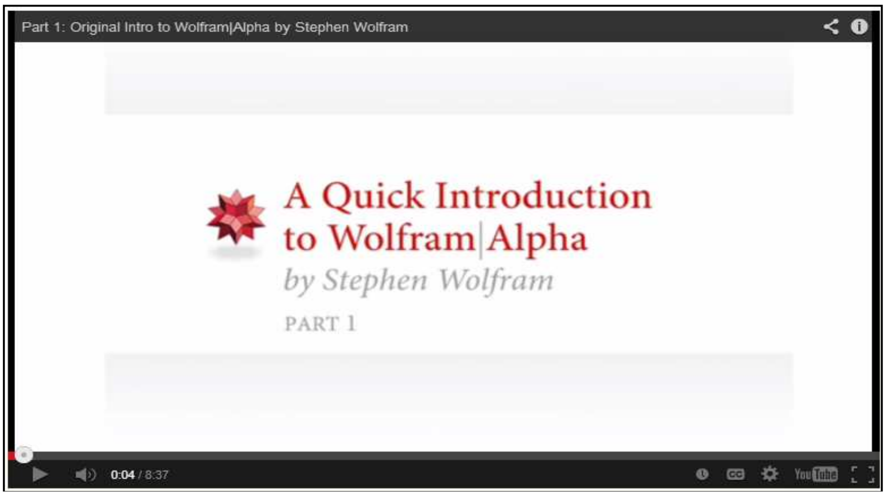


Figura 9: http://www.wolframalpha.com/screencast/introducingwolframalpha.html

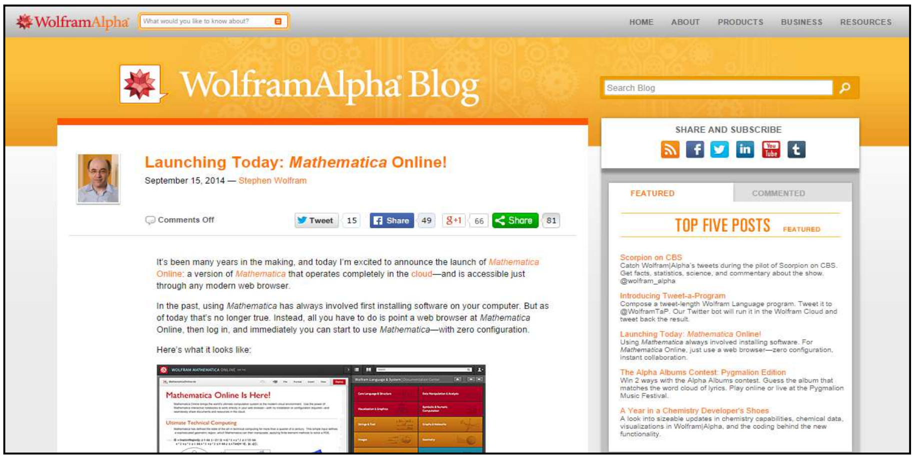


Figura 10: http://blog.wolframalpha.com/

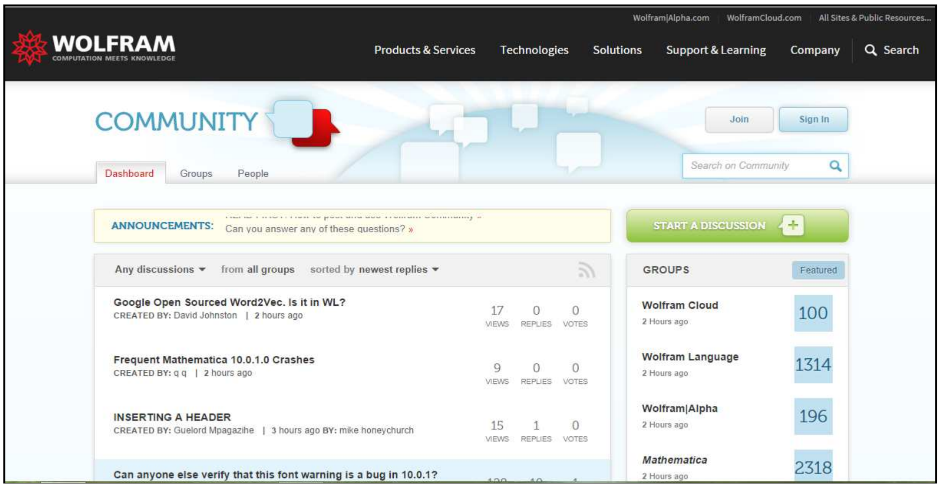


Figura 11: http://community.wolfram.com/

En 2012 lanzaron Wolfram Alpha Pro que ofrece a los usuarios funciones adicionales por una tarifa de suscripción mensual, una característica clave es la posibilidad de cargar muchos tipos de archivos comunes y de datos, incluyendo datos de tabla en bruto, imágenes, audio, XML y docenas de formatos científicos, médicos y matemáticos especializados para un análisis automático. Otras características incluyen un teclado extendido, la interactividad con el CDF, descargas de datos y la capacidad de personalizar y guardar resultados gráficos y tabulares. La interactividad computable de formato de documento (CDF) da versiones dinámicas de Wolfram|Alfa, salida con controles interactivos, rotación 3D, animación y mucho más.

¿Para qué niveles educativos es Wolfram|Alfa adecuado? Todos los niveles, desde preescolar a Universidad y más allá. En el extremo elemental, Wolfram|Alfa puede hacer aritmética mostrando pasos, hacer relojes, trabajar con colores y así sucesivamente. No sólo sirve para hacer de calculadora (campo real y complejo), preguntas de todo tipo (aunque de momento sólo disponibles en inglés) donde nos muestra la respuesta en tiempo real, todo sin enlaces. Además cuenta con un sistema para desglosar la solución por pasos donde explica perfectamente cómo llegar (Step-by-step Solution) y con un generador de problemas con soluciones para practicar (http://www.wolframalpha.com/problem-generator/)

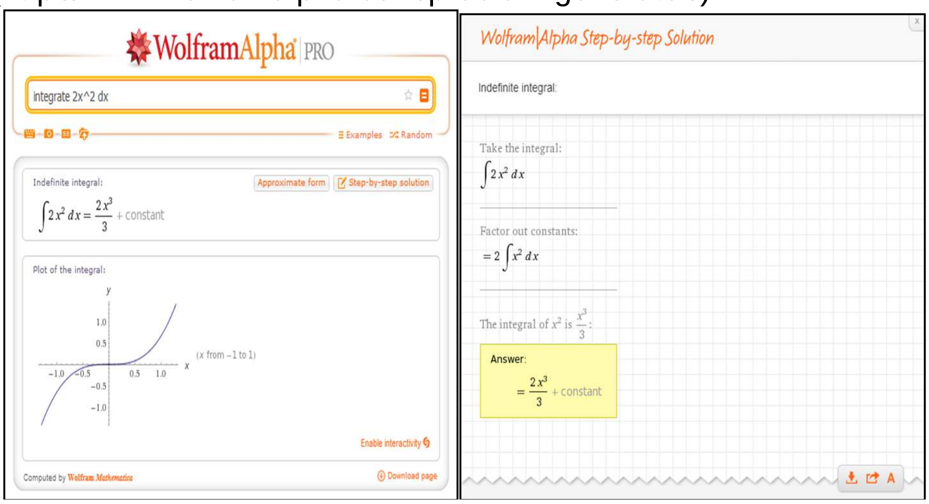


Figura 12

Se destacan tres grandes aplicativos que son el “Calculador de Derivadas”, el “Calculador de Integrales” y el Wolfram Demonstrations Project (web donde se accede a demostraciones interactivas en diferentes áreas de conocimiento y para diferentes niveles educativos).

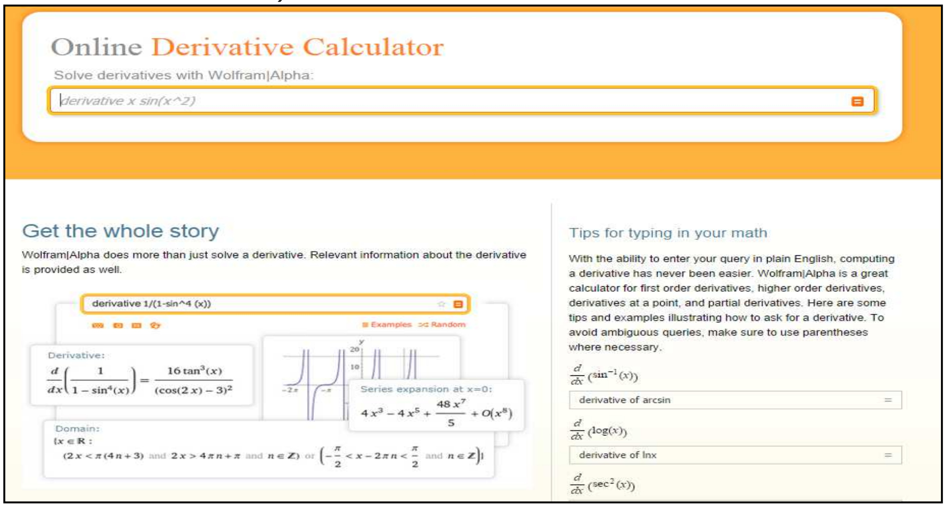


Figura 13: http://www.wolframalpha.com/calculators/derivative-calculator/

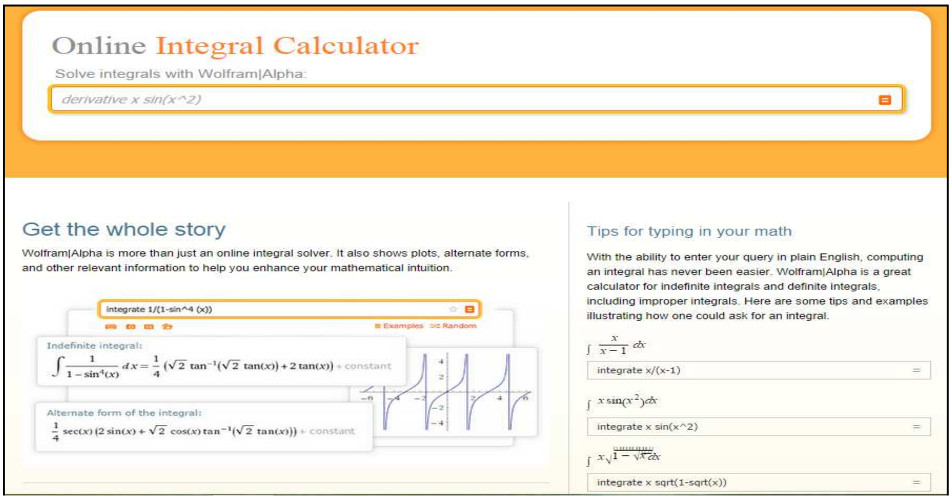


Figura 14: http://www.wolframalpha.com/calculators/integral-calculator/

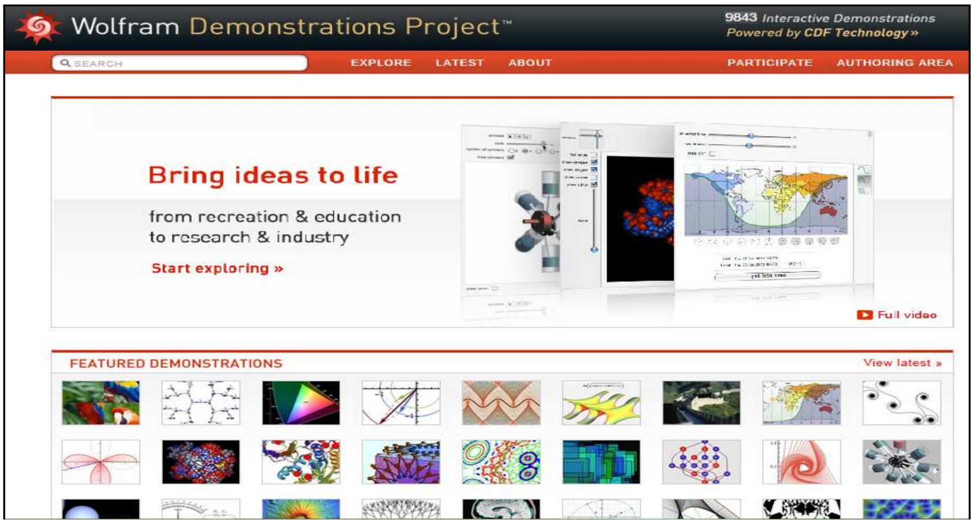


Figura 15: http://demonstrations.wolfram.com/

Ahondando en internet, nos encontramos con un Blog llamado Wolfram Alpha en Español, que es altamente recomendable para compartir, interactuar y aprender, sobre el uso de este programa para el aprendizaje y, especialmente, para la enseñanza mediante el uso de las TICs. Aquí encontrarás muchos artículos que describen las principales funcionalidades de Wolfram|Alpha.

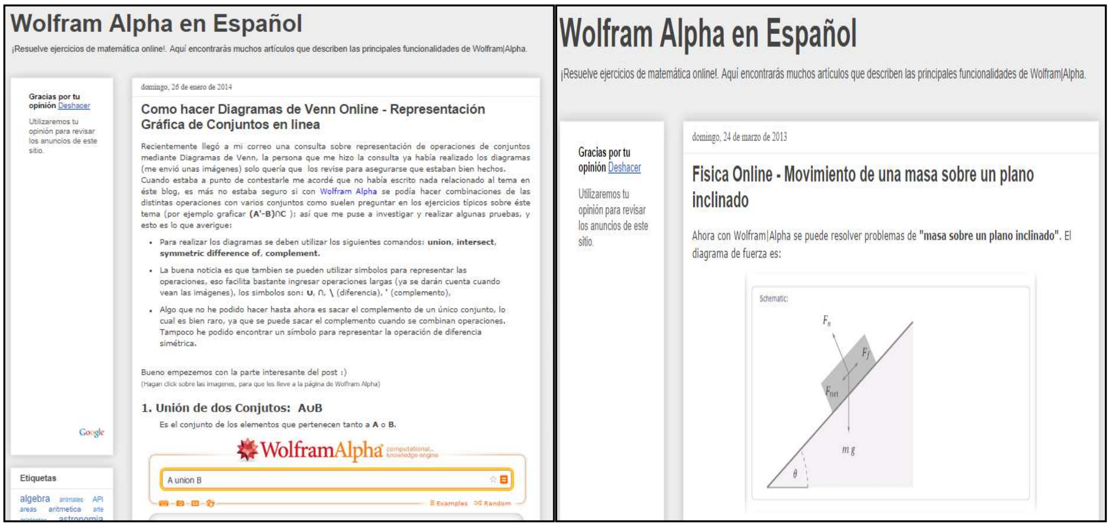


Figura 16: http://wolframalpha0.blogspot.com.ar/

Todas las posibilidades son increíbles e inagotables, lo son mucho más de lo que puedan parecer ahora. Wholpram Alpha interactúa con el lenguaje humano para devolver todo tipo de datos acerca de lo que se quiere encontrar. La finalidad es que un usuario pueda hablarle a la computadora y ésta interpretar las órdenes por él, es decir, a un nivel básico, si se escribe: “suma 2 más 2” debe enseñar la respuesta a esa suma, que WolfranAlpha sea capaz de deducir las piezas precisas de código que lleven a cabo lo que se le está pidiendo y luego mostrar ejemplos que permitan al usuario elegir lo que necesite. El objetivo de Stephen Wolfram y su equipo de investigación es democratizar la programación. Analizando este concepto a un nivel superior, si se quiere “crear” algo pero no se sabe cómo escribir su código, se debe encargar este proyecto a otra persona o aprender a programar en ese código. Con las herramientas de Mathematica y Wolfram Alpha se pretende llegar al extremo de que se pueda “contar” a la computadora lo que tiene que hacer por nosotros y que éste lo haga. Para saber más sobre este proyecto se puede visualizar la charla que dio su creador Stephen Wolfram a través de TED:
http://www.ted.com/talks/lang/es/stephen_wolfram_computing_a_theory_of_everything.

Por último, se puede destacar que muchos otros asistentes de voz o buscadores como Siri o Bing utilizan Wolfram Alpha para contestar alguna de las preguntas que se les formula. Solamente falta esperar que se pueda disponer de este software en español ya que se podrá aún más apreciar su gran utilidad.

Prof. Candelaria Morelli.
Dpto. de Matemática.
Universidad Nacional del Comahue.
Argentina.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 195-203

www.fisem.org/web/union

La Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz: Material escolar para Huayrasitana. Perú

Una vez más, nuestra Fundación acude a la cita del inicio del curso para poner un nuevo eslabón a la cadena de ayudas para que los niños y niñas de escuelas dispongan de materiales escolares durante todo el curso académico. En esta ocasión (y ya van 70…) la ayuda ha llegado al Centro Escolar IE Nº 10476, en Huayrasitana, en la cordillera andina peruana. Se trata de un poblado que se encuentra a 3300 metros sobre el nivel del mar, perteneciente al distrito de Chalamarca, provincia de Chota, región de Cajamarca al norte del país.

El presupuesto ascendió a 1660 € (6.151,09 soles). Los materiales fueron entregados el día 19 de abril de 2014, al mediodía, con la presencia del profesorado, del alumnado y de casi todos los padres y madres.

Acerca de estas acciones, pueden encontrar más información e imágenes en la web de la Fundación: www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

Pero en esta ocasión hay un *“valor añadido”* que queremos resaltar. Nos referimos a la aportación que hizo el alumnado del Instituto de Enseñanza Secundaria “Santa Ana” de la villa de Candelaria, en la isla canaria de Tenerife. Fueron 516 € solidarios entregados personalmente al vicepresidente, el profesor Luis Balbuena Castellano quien había acudido al centro a impartir una charla. Además de agradecer el gesto a los estudiantes y la colaboración del profesorado, les prometió la rápida aplicación a alguna acción solidaria para la que ellos habían reunido tan importante cantidad de dinero.

Una vez adquirido el material en la ciudad de Chiclayo, el viaje para transportarlo hasta el lugar fue de dos días con un recorrido realizado, en primer lugar, en una camioneta y más tarde el traslado se finalizó a lomos de caballos y acémilas. Los profesores peruanos José F. Ventura Vegas y Gladys Zorrilla de Ventura, con la colaboración de otras personas, realizan la formidable e imprescindible labor de organización de todos los muchos detalles que conlleva. La responsabilidad, la honestidad y la alteza de miras de todos ellos han sido y siguen siendo una de las claves, quizá la más importante, del éxito de este programa que ellos mismos han nominado como "Útiles para todos". El Patronato de la Fundación se siente muy agradecido por ello. El prof. Balbuena, en comunicación enviada a los citados docentes, les decía que *con personas como ustedes se siente uno afortunado porque dan un ejemplo de entrega, de generosidad y de lealtad.*

La acción la dan por concluida cuando en la Fundación se recibe un envío postal que contiene las actas, informes, documentos de entrega, documentos de material, declaración jurada de gastos, ejemplares de las mochilas entregadas, planos de ubicación de las zonas, facturas y boletas, videos del desarrollo y gran cantidad de fotografías. Impresionante.

Los profesores Ventura y Zorrilla, entre otras cosas, nos informan del agradecimiento mostrado por "los niños y niñas, padres de familia y docentes de la Institución Educativa de Huayrasitana por el apoyo recibido. Expresiones como que *nunca hasta hoy* personas desde tan lejos se han acordado de nosotros". Y afirman de forma rotunda: "Es una muestra de la sensibilidad y el agradecimiento de los pobladores de una comunidad peruana tan lejana y que valoran lo recibido".

II Jornada médica, en Perú, con la colaboración de la alumni ull

La población de Huayrasitana, toda, ha sido el objetivo de la II Jornada Médica desarrollada el día 29 del pasado mes de agosto que, en esta ocasión también ha sido financiada por nuestra Fundación y por la *Alumni ULL* que es la Asociación de Antiguos Alumnos y Amigos de la Universidad cuya sede está en La Laguna, ciudad Patrimonio de la Humanidad situada en Tenerife, en las Islas Canarias. El presupuesto de esta Jornada ha sido de 491,27 €.

La realización es posible por el compromiso y la entrega de muchas personas del sector de la medicina encabezadas por el doctor José Carlos Ventura Zorrilla, hijo de nuestros apreciados colaboradores José y Gladys. La estela continua…Ya se había realizado el día 31 de agosto de 2012, la I Jornada Médica en Conchud, provincia de Chota con un presupuesto de 548,90 €.


El pasado 24 de junio de 2014, se firmó un convenio de colaboración entre nuestra Fundación y la *Alumni ULL*. En el acto de la firma, el presidente de la *Alumni ULL*, Zenaido Hernández Cabrera informó del acuerdo tomado en la Asamblea General de la Asociación del 17 de febrero de 2012 según el cual se ofrece el 0,7 % de su previsión de ingresos por cuotas de sus asociados a actividades solidarias en el exterior. En la reunión de la Junta Directiva de 23 de enero de 2014 se acordó que esta cantidad, tras la experiencia positiva realizada en el 2012, se cediese a la Fundación *Carlos Salvador y Beatriz* para que la gestionase y aplicara a alguno de sus proyectos. En el mismo acto, el presidente de la Fundación, Salvador Pérez Pérez agradeció el gesto y resaltó lo que se dice en el texto del convenio: *la colaboración que se establece se fundamenta en la voluntad de las partes de establecer una colaboración de mutuo interés y cumpla con el objetivo de ayudar solidariamente a actividades de educación y sanidad en Iberoamérica.*

Como se ha indicado, el día 29 de agosto de 2014 se desarrolló exitosamente la Jornada Médica participando en ella el Dr. Ventura Zorrilla y colaborando otros profesionales sanitarios como su esposa Diana (también médico), la sobrina de los profesores peruanos Anita en calidad de técnico en Farmacia, Liz estudiante de Enfermería y el personal del Centro Médico (ellos lo llaman *posta)* de Huayrasitana que facilitaron el local para la atención correspondiente. Informan que gracias a este personal altruista y solidario se contó con los medicamentos que usa el CIS (Seguro Integral que ofrece el Estado). Igualmente nos informaron que las autoridades de la Comunidad de Huayrasitana han difundido la Jornada a través de las radioemisoras de la provincia de Chota.

Firma del convenio de colaboración. Salvador Pérez (izquierda), Loli Mejías (centro). Zenaido Hernández (derecha.)

El personal sanitario, entre médicos, enfermeros y técnicos, en un total de diez personas, ha medido talla, peso, presión arterial, temperatura y han visto las historias clínicas además de llevar medicinas para algunos habitantes de la zona.

En el esfuerzo realizado debe contemplarse el traslado hasta el lugar, la preparación de todo el material, las medicinas, etc. En todo el proceso demuestran un gran entusiasmo, una perfecta profesionalidad y los deseos de *"hacer cosas por lo demás"*, uno de los varios lemas del esfuerzo de la Fundación que, a pesar de sus escasos medios, sigue adelante pues *"con poco se puede hacer mucho".* Y no son palabras…

IV convocatoria de Ayudas al Estudio en Canarias

El plazo cierra el 1 de diciembre

Desde el día 15 de septiembre se ha abierto el plazo de una nueva convocatoria de las Ayudas al Estudio en Canarias que llegan en esta ocasión a su cuarta ocasión consecutiva.

El plazo de presentación finalizará el 1 de diciembre. En la página web de la Fundación (www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com) hay abundante información.

Desde la Fundación se procura dar la mayor publicidad posible enviando la convocatoria a todos los Institutos de Enseñanza Secundaria (IES) de Canarias que contiene las indicaciones para la solicitud. Igualmente se enviará documentación a los Orientadores Escolares y a las AMPAS (Asociaciones de Padres y Madres de alumnos) de cada IES así como a los Servicios Sociales de cada Ayuntamiento.

Recordar que en el pasado curso 2013-2014, el número de ayudas solicitadas llegó a las 624. De ellas pudieron ser atendidas un total de 94 repartidas en 6 islas y con un presupuesto de 23.800 €.

En los criterios de valoración se tiene en cuenta el expediente académico, los miembros de la familia, los hermanos que estudian, la distancia al centro, los miembros de la familia que trabajan, la ayuda concedida el curso anterior y la valoración de la propia Fundación a través de la información aportada por los centros. Se elaboró un programa informático para procesar toda la información. La mayoría de las solicitudes reunían las condiciones de la convocatoria: dificultades económicas y buena trayectoria académica. La comisión encargada de la selección informó al Patronato de la Fundación de la gran cantidad de situaciones de extrema necesidad que no pudieron ser atendidas.

Hay mucha más información de la Fundación en la página web:

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

¡¡Aquí les esperamos!!

Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz

Material escolar para Huayrasitana. Perú

Uma vez mais, nossa Fundação vai a cita-a do início do curso para pôr uma novo eslabão à corrente de ajudas para que os meninos e meninas de escolas disponham de materiais escolares durante todo o curso académico. Nesta ocasião (e já vão 70…) a ajuda tem chegado ao Centro Escolar IE Nº 10476, em Huayrasitana, na cordillera andina peruana. Trata-se de um povoado que se encontra a 3300 metros sobre o nível do mar, pertencente ao distrito de Chalamarca, província de Chota, região de Cajamarca ao norte do país.

O orçamento ascendeu a 1660 € (6.151,09 sóis). Os materiais foram entregues no dia 19 de abril de 2014, ao meio dia, com a presença do profesorado, do alumnado e de quase todos os pais e mães.

A respeito destas acções, podem encontrar mais informação e imagens no site da Fundação: www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

Mas nesta ocasião há um “valor acrescentado” que queremos realçar. Referimos-nos à contribuição que fez o alumnado do Instituto de Ensino Secundário “Santa Ana” da villa de Candelaria, na ilha canaria de Tenerife. Foram 516 € solidários entregados pessoalmente ao vice-presidente, o professor Luis Balbuena Castelhano quem tinha ido ao centro a dar uma palestra. Além de agradecer o gesto aos estudantes e a colaboração do profesorado, prometeu-lhes a rápida aplicação a alguma acção solidária para a que eles tinham reunido tão importante quantidade de dinheiro.


Uma vez adquirido o material na cidade de Chiclayo, a viagem para transportar até o lugar foi de dois dias com um percurso realizado, em primeiro lugar, numa camioneta e mais tarde o translado finalizou-se a lombos de cavalos e acémilasOs professores peruanos José F. Ventura Vegas e Gladys Zorrilla de Ventura, com a colaboração de outras pessoas, realizam a formidable e imprescindível labor de organização de todos os muitos detalhes que implica. A responsabilidade, a honestidade e a alteza de olhas de todos eles têm sido e seguem sendo uma das chaves, quiçá a mais importante, do sucesso deste programa que eles mesmos têm nominado como “Úteis para todos”. O Patronato da Fundação sente-se muito agradecido por isso. O prof. Balbuena, em comunicação enviada aos citados docentes, dizia-lhes que com pessoas como vocês se sente um afortunado porque dão um exemplo de entrega, de generosidad e de lealdade.

A acção dão-na por concluída quando na Fundação se recebe um envio postal que contém as actas, relatórios, documentos de entrega, documentos de material, declaração jurada de despesas, instâncias das mochilas entregadas, planos de localização das zonas, facturas e boletas, videos do desenvolvimento e grande quantidade de fotografias. Impressionante.

Os professores Ventura e Zorrilla, entre outras coisas, informam-nos do agradecimento mostrado por "os meninos e meninas, pais de família e docentes da Instituição Educativa de Huayrasitana pelo apoio recebido. Expressões como que nunca até hoje pessoas desde tão longe se lembraram de nós". E afirmam de forma rotunda: "É uma mostra da sensibilidade e o agradecimento dos povoadores de uma comunidade peruana tão longínqua e que valorizam o recebido".

II Jornada médica, em Peru, com a colaboração da alumni ull

A população de Huayrasitana, toda, tem sido o objectivo da II Jornada Médica desenvolvida no dia 29 do passado mês de agosto que, nesta ocasião também tem sido financiada por nossa Fundação e pela Alumni ULL que é a Associação de Antigos Alunos e Amigos da Universidade cuja sede está na Laguna, cidade Património da Humanidade situada em Tenerife, nas Ilhas Canárias. O orçamento desta Jornada tem sido de 491,27 €.

A realização é possível pelo compromisso e a entrega de muitas pessoas do sector da medicina encabeçadas pelo doutor José Carlos Ventura Zorrilla, filho de nossos apreciados colaboradores José e Gladys. A estela contínua… Já se tinha realizado no dia 31 de agosto de 2012, a I Jornada Médica em Conchud, província de Chota com um orçamento de 548,90 €.


O passado 24 de junho de 2014, assinou-se um convênio de colaboração entre nossa Fundação e a *Alumni ULL*. No acto da assinatura, o presidente da Alumni ULL, Zenaido Hernández Cabrera informou do acordo tomado na Assembleia Geral da Associação do 17 de fevereiro de 2012 segundo o qual se oferece o 0,7 % de sua previsão de rendimentos por quotas de seus sócios a actividades solidárias no exterior. Na reunião da Junta Directiva de 23 de janeiro de 2014 lembrou-se que esta quantidade, depois da experiência positiva realizada em 2012, se cedesse à Fundação Carlos Salvador e Beatriz para que a gerisse e aplicasse a algum de seus projectos. No mesmo acto, o presidente da Fundação, Salvador Pérez Pérez agradeceu o gesto e realçou o que se diz no texto do convênio: a colaboração que se estabelece se fundamenta na vontade das partes de estabelecer uma colaboração de mútuo interesse e cumpra com o objectivo de ajudar solidariamente a actividades de educação previdência em *Iberoamérica.*

Como se indicou, no dia 29 de agosto de 2014 se desenvolveu exitosamente a Jornada Médica participando nela o Dr. Ventura Zorrilla e colaborando outros profissionais sanitários como sua esposa Diana (também médico), a sobrinha dos professores peruanos Anita em qualidade de técnico em Farmácia, Liz estudante de Enfermaria e o pessoal do Centro Médico (eles o chamam posta) de Huayrasitana que facilitaram o local para a atenção correspondente. Informam que graças a este pessoal altruísta e solidário se contou com os medicamentos que usa o CIS (Seguro Integral que oferece o Estado). Igualmente informaram-nos que as autoridades da Comunidade de Huayrasitana têm difundido a Jornada através das radioemisoras da província de Chota.

Assinatura do convênio de colaboração. Salvador Pérez (esquerda), Loli Mejías (centro). Zenaido Hernández (direita.)

O pessoal sanitário, entre médicos, enfermeiros e técnicos, num total de dez pessoas, tem medido talha, peso, pressão arterial, temperatura e têm visto as histórias clínicas além de levar medicinas para alguns habitantes da zona.

No esforço realizado deve contemplar-se o translado até o lugar, a preparação de todo o material, as medicinas, etc. Em todo o processo demonstram um grande entusiasmo, uma perfeita profissionalidade e os desejos de *"fazer coisas pelo demais"*, um dos vários lemas do esforço da Fundação que, apesar de seus escassos meios, segue adiante pois "com pouco pode-se fazer muito". E não são palavras …

IV convocação de Ajudas ao Estudo em Canárias
O prazo fecha o 1 de dezembro

Desde o dia 15 de setembro abriu-se o prazo de uma nova convocação das Ajudas ao Estudo em Canárias que chegam nesta ocasião a sua quarta ocasião consecutiva. O prazo de apresentação finalizará o 1 de dezembro. Na página site da Fundação (www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com) há abundante informação.

Desde a Fundação tenta-se dar a maior publicidade possível enviando a convocação a todos os Institutos de Ensino Secundário (IES) de Canárias que contém as indicações para a solicitação Igualmente enviar-se-á documentação aos Orientadores Escolares e às AMPAS (Associações de Pais e Mães de alunos) da cada IES bem como aos Serviços Sociais da cada Prefeitura. Recordar que no passado curso 2013-2014, o número de ajudas solicitadas chegou às 624. Delas puderam ser atendidas um total de 94 repartidas em 6 ilhas e com um orçamento de 23.800 €.

Nos critérios de valoração tem-se em conta o expediente académico, os membros da família, os irmãos que estudam, a distância ao centro, os membros da família que trabalham, a ajuda concedida o curso anterior e a valoração da própria Fundação através da informação contribuída pelos centros. Elaborou-se um programa informático para processar toda a informação. A maioria das solicitações reuniam as condições da convocação: dificuldades económicas e boa trajectória académica. A comissão encarregada da selecção informou ao Patronato da Fundação da grande quantidade de situações de extrema necessidade que não puderam ser atendidas.

Há muita mais informação da Fundação na página site:

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

¡¡ Aqui esperamos-lhes!!

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
página 205

Convocatoria
Secretaría General de la FISEM
Período 2015-2019

La Secretaría general de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), ha de convocarse, de acuerdo con los estatutos, cada cuatro años, por lo que se realiza la convocatoria de candidaturas para el periodo 2015-2019.

Los interesados en participar en esta convocatoria deberán enviar una solicitud a la Presidenta de la FISEM, con copia a la Secretaría General de la FISEM, **antes del 30 de octubre de 2014**.

El procedimiento y los documentos que deben presentarse, de acuerdo con el reglamento de la FISEM, para participar en esta convocatoria son los siguientes:

- Solicitud dirigida a la Presidenta de la FISEM en la que consten al menos estos datos: apellidos y nombres completos, documento de identidad, domicilio, sociedad federada a la que pertenece, E-mail, situación profesional y lugar de trabajo.
- Certificado del secretario de su sociedad en el que conste su condición de socio activo así como su antigüedad como tal que debe ser superior o igual a dos años.
- Certificación del secretario de su sociedad, en la que se haga constar que dispone del aval de su sociedad para participar en esta convocatoria.
- Una proyecto de trabajo de un máximo de tres folios (tamaño A4) en la que exponga su programa de actuación al frente de la Secretaría General.
- Currículum vítae (breve resumen con un máximo de tres folios A4).

Las solicitudes y la documentación se enviarán por e-mail a la Presidenta de la FISEM a la dirección **crccrespo@gmail.com**, con copia al Secretario General de la FISEM a la dirección **sg@fisem.org**

Todas las solicitudes recibidas serán posteriormente enviadas a la Junta de Gobierno de la FISEM para que decida mediante votación directa, para la elección del secretario general de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática

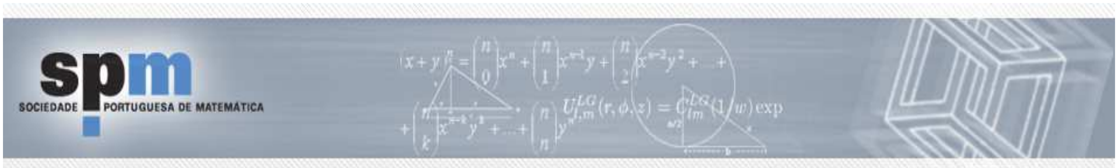
UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 207-208

Convocatorias y eventos

XI Congreso Argentino de Educación Matemática

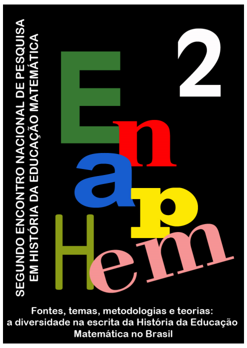
Lugar: Universidad Nacional de San Juan. Argentina.
Convoca: Sociedad Argentina de Educación Matemática.
Fecha: 2 al 4 de octubre de 2014.
Información: **www.soarem.org.ar**



7º ENCONTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Convoca: Sociedade Portuguesa de Matemática. Seminário Nacional de História da Matemática Sociedade Brasileira de História da Matemática.
Lugar: Óbidos. Portugal.
Fecha: 15 a 19 de octubre de 2014
Informació: **http://www.spm.pt/arquivo/1105**

Lugar: Puerto Alegre. Brasil.
Convoca: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS
Fecha: 20 al 22 de octubre de 2014
Información: **http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/10anos**



II ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA
EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
II ENAPHEM

Lugar: Universidade Estadual Paulista (UNESP). Bauru. SP
Fecha: 31 de octubre al 2 de noviembre de 2014.
Información: **http://www2.fc.unesp.br/enaphem/index.php**

“Avanzando juntos hacia las Metas Educativas Iberoamericanas 2021”
Lugar**:** Buenos Aires. Argentina.
Convoca**:** Organización de Estados Iberoamericanos (OEI).
Fecha: 12 al 14 de noviembre de 2014.
Información: **http://www.oei.es/congreso2014**

AÑO 2015

AÑO 2017

En el mes de julio en Madrid:

VIII CIBEM

Convoca la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)
www.fisem.org

RI REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre de 2014
páginas 209-210

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@fisem.org**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “Arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Figura 1, Figura 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**
4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

Para libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista:

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de **http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php**

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a **revistaunion@fisem.org**