UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
NÚMERO 36 – DICIEMBRE DE 2013

ÍNDICE

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 3-4

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Alicia Bruno
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García González
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés del Carmen Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio

Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo

Colaboran

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

OEI

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 5-6

Editorial

"No hay rama de la matemática, por lo abstracta que sea,
que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real"
Nikolai Lobachevski (1792-1856)

Estimados colegas y amigos*:*

Con este número cerramos otro año como Directoras de UNIÓN. Como siempre, fortalecidas por el enorme y permanente apoyo de colegas evaluadores y asesores que nos acompañaron permanentemente para mejorar cada edición y de los autores, de diferentes ciudades de los países iberoamericanos, que enviaron excelentes artículos en español y portugués.

El balance del 2013 ha sido especialmente valioso pues se realizó el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, que se realiza cada cuatro años y es el evento más importante de la FISEM. En esta oportunidad fue realizado en la ciudad de Montevideo, donde los integrantes de la Sociedad Uruguaya de Educación Matemática nos brindaron una cálida y excelente organización permitiendo compartir experiencias y encuentros enriquecedores de los que desde el comienzo de su creación colaboramos para que sus objetivos e ideales se fueran cumpliendo y de las nuevas generaciones de educadores de matemática. Aunque Luis Balbuena Castellanos, verdadero mentor de la FISEM, no estuvo presente lo recordamos permanentemente así como a otros presidentes de Sociedades de Educación Matemática como Alicia Villar (SEMUR) y de Nelly Vázquez de Tapia (SOAREM).

En este volumen, el último de este año, es un monográfico que hay artículos referidos a la aplicación de la matemática desde distintas perspectivas y en diferentes contextos, comenzando por la Firma Invitada, el Dr. Ubiratan D`Ambrosio, creador de la Etnomatemática, quién nos introduce en un recorrido histórico, pasando luego a la Biología, Tecnologías, Interacción social y juegos entre otros.

Agradecemos la continuación del apoyo altruista de la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz, que a través de la acción del Presidente de la Fundación, Salvador Pérez Pérez y su esposa, Rosario Aurora Estévez González, los padres de Carlos Salvador y Beatriz, para continuar con la edición de UNIÓN.

La publicación desde la plataforma de la OEI, lo que permite el acceso a mayor cantidad de docentes de matemática.

Muchas Gracias a todos los que colaboraron para que UNIÓN haya llegado a su número 36, los invitamos a seguir acompañándonos y colaborando con sus artículos y sugerencias.

Para Finalizar, un Brindis por los momentos compartidos, con el deseo de que se cumplan sus deseos personales y profesionales.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

Editorial

" Não há ramo da matemática, pelo abstrata que seja,
que não possa se aplicar algum dia aos fenómenos do mundo real"
Nikolai Lobachevski (1792-1856)

Estimados colegas e amigos*:*

Com este número fechamos outro ano como Directoras de UNIÃO. Como sempre, fortalecidas pelo enorme e permanente apoio de colegas avaliadores e assessores que nos acompanharam permanentemente para melhorar a cada edição e dos autores, de diferentes cidades dos países iberoamericanos, que enviaram excelentes artigos em espanhol e português.

O balanço do 2013 tem sido especialmente valioso pois realizou-se o VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, que se realiza a cada quatro anos e é o evento mais importante da FISEM. Nesta oportunidade foi realizado na cidade de Montevideo, onde os integrantes da Sociedade Uruguaia de Educação Matemática nos brindaram uma cálida e excelente organização permitindo compartilhar experiências e encontros enriquecedores dos que desde o começo de sua criação colaboramos para que seus objectivos e ideais se fossem cumprindo e das novas gerações de educadores de matemática. Ainda que Luis Balbuena Castellanos, verdadeiro mentor da FISEM, não esteve presente o recordamos permanentemente bem como a outros presidentes de Sociedades de Educação Matemática como Alicia Villar (SEMUR) e Nelly Vázquez de Tapia (SOAREM).

Neste volume, o último deste ano, é um monográfico que há artigos referidos à aplicação da matemática desde diferentes perspectivas e em diferentes contextos, começando pela Assinatura Convidada, el Dr. Ubiratan D`Ambrosio, criador da Etnomatemática, quem nos introduz num percurso histórico, passando depois à Biologia, Tecnologias, Interacção social e jogos entre outros.

Agradecemos a continuação do apoio altruísta da Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz, que através da acção do Presidente da Fundação, Salvador Pérez Pérez e sua esposa, Rosario Aurora Estévez González, os pais de Carlos Salvador e Beatriz, para continuar com a edição de UNIÃO.

A publicação desde a plataforma da OEI, o que permite o acesso a maior quantidade de docentes de matemática.

Muito obrigado a todos os que colaboraram pára que UNIÃO tenha chegado a seu número 36, os convidamos a seguir nos acompanhando e colaborando com seus artigos e sugestões.

Para Finalizar, um Brindis pelos momentos compartilhados, com o desejo de que se cumpram seus desejos pessoais e profissionais.

Um abraço fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
página 7-8

Firma Invitada: Ubiratan D´Ambrosio

Breve Reseña

Professor Emérito da Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP

Carreira acadêmica:

- Bacharel/Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (1954/55).
- Doutor em Matemática pela Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (1963). Tese: *Superfícies generalizadas e conjuntos de perímetro finito* (orientador: Jaurès P. Cecconi).
- Pós-doutoramento (*Research Associate*) no Department of Mathematics, Brown University, Providence,RI, USA (1964-65).
- *Assistant Professor of Mathematics*, State University of New York at Buffalo, USA (1965-66).
- *Associate Professor of Mathematics*, University of Rhode Island, USA (1966-68).
- *Associate Professor of Mathematics (with tenure) e Director of Graduate Studies*, State University of New York at Buffalo, USA (1968-72).
- Professor Titular de Matemática UNICAMP / Universidade Estadual de Campinas (desde 1972 – aposentadoria em 1993).

- Diretor do IMECC/Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da UNICAMP / Universidade Estadual de Campinas (1972-80),
- Coordenador dos Institutos da UNICAMP / Universidade Estadual de Campinas (1982-1986)
- Pró-Reitor de Desenvolvimento Universitário da UNICAMP / Universidade Estadual de Campinas (1986-1990)

Distinções recentes:

- 2001: Medalha "Kenneth. O. May", conferida pela International Commission of History of Mathematics, affiliada à International Mathematical Union e à International Union of History and Philosophy of Science.
- 2003: Medalha "Felix Klein", conferida pela Insternational Commission of Mathematics Instruction, afiliada à International Mathematical Union
- Eleito Acadêmico Correspondente da *International Academy of the History of Science* (2011)

Principais atividades acadêmicas atuais:

- Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNIAN/Universidade Anhanguera de São Paulo.
- Programa de Pós-Graduação em História da Ciência da PUCSP/Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Professor credenciado dos programas de pós-graduação do IGCE/Instituto de Geografia e Ciências Exatas da UNESP/Universidade Estadual Paulista, Campus Rio Claro; e da Faculdade de Educação da USP/Universidade de São Paulo.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 9-19
www.fisem.org/web/union

A Educação Matemática e o estado do mundo: Desafios

Firma Invitada: Ubiratan D´Ambrosio

Conferencia Plenaria en VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Septiembre 2013. Montevideo, Uruguay

Resumen

Aunque la preocupación principal de esta reunión es para discutir los avances y los retos de la Educación Matemática, creo que me permiten hacer mis comentarios a un objetivo mayor, que es la supervivencia de la civilización en la Tierra, con dignidad para todos. No se trata simplemente de una jerga. El mundo está amenazado, no sólo por los ataques a la naturaleza y al medio ambiente, pero también por la creciente violación de la dignidad humana. Nos enfrentamos cada vez más con casos de vivir bajo el miedo, el odio y la violación de los principios básicos en que se asienta la civilización.

Esta preocupación es explicitada en el Editorial de la revista *Science* (08 March 2013), de autoria del eminente científico británico Martin Rees:

> "Las principales amenazas a la existencia sostenible de la humanidad ahora vienen de gente, no de la naturaleza. Crisis ecológicas que degradan irreversiblemente la Biosfera pueden ser desencadenadas por las demandas de un crecimiento insostenible de la población mundial. La rápida propagación de alguna pandemia puede causar estragos en las megaciudades del mundo en desarrollo. Y las tensiones políticas que resultan de la escasez de recursos, son exacerbadas por el cambio climático. También de preocupación son las amenazas de imponderables consecuencias de las potentes nuevas cyber-, bio- y nano-tecnologías, porque estamos entrando en una época en que algunas personas podrían, a través de error o terror, provocar una ruptura social irreversible."

La importancia de las matemáticas como un conocimiento que puede orientar para evitar el colapso de la civilización es indiscutible. Es ampliamente reconocido por los historiadores que la civilización mundial tiene sus fundamentos en las matemáticas. Nadie está en desacuerdo que las matemáticas son la columna vertebral del mundo moderno, por una serie de razones: su importancia en las Ciencias y en tecnología; su fundamentación de las teorías económicas y financieras; sus aplicaciones prácticas; su influencia en las artes. Pero sobre todo para regular la ocupación del espacio y para organizar el tiempo de nuestra vida cotidiana. Espacio y tiempo son la esencia de las prácticas y teorías matemáticas.

Mikhail Gromov, uno de los matemáticos más destacados, recibió en 2009 el Premio Abel (que es el equivalente del Premio Nobel de Matemáticas). En una entrevista del 2010, Gromov hizo la siguiente declaración:

> "La tierra agotará sus recursos básicos, y no podemos predecir lo que pasará después de eso. Quedaremos sin agua, aire, suelo, metales raros, sin dejar de mencionar el petróleo. Esencialmente todo llegará a su fin dentro de cincuenta años. ¿Qué pasará después de eso? Tengo miedo. Todo puede ir bien si encontramos soluciones, pero si no, entonces todo puede llegar muy

> rápidamente a su fin! Las matemáticas pueden ayudar a resolver el problema, pero si no tenemos éxito, habrá no más cualquier matemáticas, tengo miedo!"

Es seguro que, como matemáticos, estamos preocupados por el avance de nuestra disciplina. Pero también es seguro que, como seres humanos, estamos igualmente preocupados por sobrevivir con dignidad. Como matemático y educador matemático acepto, como prioridad, la búsqueda de una civilización con dignidad para todos, en que la inequidad, la arrogancia y la intolerancia no tengan lugar. Esto significa rechazar la violencia y lograr un mundo en paz. El reto: como obtener eso con la Educación Matemática.

Introdução

Minha motivação principal é o estado da civilização, que depende de fatos e fenômenos naturais, de fatos e fenômenos criados pela intervenção humana, e dos sistemas de conhecimento que permitem explicar, entender e nos proteger dos fatos e fenômenos naturais, e de inventar e manipular fatos e fenômenos criados pelos homens.

É inegável que a civilização moderna está ameaçada. Há um perigo evidente de extermínio da civilização. Como diz Martin Rees, num. Editorial recente da revista *Science* (March 08, 2013).

> "As principais ameaças à existência sustentável da humanidade agora vêm de pessoas, não da natureza. Choques ecológicos que degradam irreversivelmente a Biosfera podem ser desencadeados pelas exigências de um crescimento insustentável da população do mundo. A rápida disseminação de pandemias pode causar estragos nas megacidades do mundo em desenvolvimento. E as tensões políticas serão provavelmente decorrentes da escassez de recursos, agravados pelas alterações climáticas. Igualmente preocupantes são as ameaças imponderáveis resultantes das poderosas novas cyber - bio- e nanotecnologias, pois estamos entrando em uma era na qual alguns indivíduos poderiam, por meio de erro ou terror, provocar uma ruptura social irreversível."

O matemático Mikhail Leonidovjch Gromov, detentor do Prêmio Abel de 2009, diz, numa entrevista de 2010, que

> "A Terra vai ficar sem os recursos básicos, e não podemos prever o que vai acontecer depois disso. Vamos ficar sem água, ar, solo, metais raros, para não falar do petróleo. Tudo vai, essencialmente, chegar ao fim dentro de cinquenta anos. <u>O que vai acontecer depois disso?</u> (*destaque meu*). Estou com medo. Tudo pode ir bem se encontrarmos soluções, mas se não, então tudo pode chegar muito rapidamente ao fim!"

É importante mencionar que Mikhail Leonidovjch Gromov é um matemático russo/francês, nascido em 1943, Diretor do *Institut de Recherches Mathématiques de Bûres-sur-Yvette,* França, e que o Prêmio Abel é o equivalente a um Premio Nobel, pois todos sabem que não há Premio Nobel de Matemática.

Cabe uma reflexão sobre por que não há Prêmio Nobel de Matemática. O magnata sueco Alfred B. Nobel (1833-1896) fundou e legou toda a sua imensa fortuna à Fundação Nobel. Em 1901, essa fundação, seguindo a vontade de seu fundador, institui uma premiação milionária, denominada Prêmio Nobel, para distinguir indivíduos e instituições especializadas que "mais tenham contribuído para o benefício da humanidade" em certas áreas do conhecimento. As áreas contempladas foram, de acordo com a vontade de Nobel, Física, Química, Fisiologia ou Medicina, Literatura e Paz. Em 1969, foi decidido incluir a área de Economia entre as premiações. Matemática foi, por vontade explícita de Nobel, permanentemente excluída da premiação. As explicações são as mais discutidas e controvertidas. Algumas até fazem parte da fofocagem matemática. Mas pode-se levantar a hipótese de Alfred Nobel considerar a Matemática nada mais que uma linguagem e que, diretamente, não contribui para o benefício da humanidade, servindo apenas de apoio para as demais áreas. Particularmente nas premiações em Economia, os laureados têm sido excelentes matemáticos com contribuições relevantes para a economia.

A questão da natureza da Matemática, de sua finalidade e de como ela se relaciona com a sociedade em geral tem sido objeto de muitas especulações, como será indicado neste trabalho. O fato é que a exclusão da Matemática das áreas contempladas pelo Prêmio Nobel sempre foi muito inconfortável para os matemáticos, algumas vezes interpretada como um *captio diminutio* da Matemática dentre as áreas acadêmicas autônomas. Daí a decisão justa e acertada de criar uma premiação equivalente ao Prêmio Nobel para matemáticos.

Na comemoração do bicentenário do grande matemático norueguês, Niels Henrik Abel (1802-1829), foi instituído, sob patrocínio do Rei da Noruega, uma premiação, absolutamente equivalente ao Prêmio Nobel, denominada Prêmio Abel. A premiação tem o mesmo valor, cerca de 1 milhão de dólares, e os critérios de concessão e de escolha são os mesmos que os do Prêmio Nobel. Atribuído pela primeira vez ao matemático francês Jean-Pierre Serre (1926-), em 2009 o prêmio foi atribuído a Mikhail Leonidovjch Gromov "Por suas contribuições revolucionárias à geometria."

Voltemos à entrevista de Gromov. Seu pessimismo quanto à sobrevivência da civilização não é uma afirmação leviana, jargão próprio de catastrofistas, nem uma visão apocalíptica de cunho religioso. Vindo de uma pessoa de seu *status* acadêmico, merece atenção. Esta é uma preocupação real, sentida por todos nós.

A pergunta que, naturalmente, segue é "O QUE PODEMOS FAZER?" Aceito o desafio do destacado uruguaio, filósofo e historiador das ideias, Fernando Flores Morador, professor da Universidade de Lund, na Suécia, quando diz:

> "El sujeto no puede evitar participar en un conflicto histórico, pero puede elegir entre intentar tomar la iniciativa o no intervenir (adoptar una actitud pasiva). Ganar y retener la iniciativa es la regla número uno de la acción histórica. Sin la iniciativa, los participantes pasivos, son obligados a adoptar como propios los puntos de vista de aquellos históricamente activos."[1]

Minha decisão é, como diz Fernando Flores, assumir e tomar a iniciativa, de acordo com minhas possibilidades e competência, de propor novas direções para entender, explicar e agir no mundo real, e difundir essas ideias. É difícil romper o conservadorismo acadêmico e não se enfileirar com aqueles que seguem os paradigmas ditados por alguns setores conservadores da academia e das instituições. Como diz Gromov, nessa mesma entrevista de 2010,

"Estando em nossa **torre de marfim**, o que podemos dizer? Estamos nesta torre de marfim, e nos sentimos confortáveis nela. Mas, realmente, não podemos

[1] Fernando Flores Morador: *Enciclopédia de las Tecnologías Rotas. Libro I: El Humanista como Ingeniero*. Lund University, Suécia, 2011; p.44

dizer muito, porque não vemos bem o mundo. Temos que sair, mas isto não é tão fácil".

Há algum tempo utilizo uma metáfora para definir conhecimento tradicional, , equivalente às torres de marfim, que são as GAIOLAS EPISTEMOLÓGICAS.

O conhecimento tradicional é como uma gaiola e seus cultores são como pássaros vivendo nessa gaiola. Alimentam-se do que está na gaiola, voam só no espaço da gaiola, só vêem e sentem o que as grades permitem. Os pássaros vivendo em uma gaiola alimentam-se do que encontram na gaiola, voam só no espaço da gaiola, comunicam-se numa linguagem conhecida por eles, procriam e repetem-se e só vêem e sentem o que as grades permitem. Não podem saber de que cor a gaiola é pintada por fora. No mundo acadêmico, os especialistas são como pensadores engaiolados em paradigmas e metodologias rígidas, que não permitem ver além do que é considerado academicamente correto.

Mas sair da gaiola, como sair das torres de marfim, não é fácil. A aprovação dos pares oferece vários benefícios, como segurança, promoções e salários, assim como a gaiola oferece aos pássaros segurança, abrigo, alimentação e convívio. Mas o preço por estes benefícios é alto: as grades impedem ver a realidade ampla.

É fundamental poder sair e voltar livremente, conhecer a realidade ampla e reconhecer os problemas maiores afetando a humanidade. É necessário estabelecer uma parceria de colaboração com todos os demais especialistas.

Essa parceria tem sido desconsiderada. Particularmente, a matemática e as ciências se distanciaram na modernidade. Em uma entrevista de 1998, Mikhail Leonidovjch Gromov escreveu

> "nós, matemáticos, muitas vezes temos pouca idéia sobre o que está se passando em ciência e engenharia, enquanto os cientistas experimentais e engenheiros geralmente não se apercebem das oportunidades oferecidas pelo progresso da matemática pura. Este **perigoso desequilíbrio** deve ser restaurado trazendo mais ciências para a educação dos matemáticos e expondo os futuros cientistas e engenheiros à matemática central. Isto requer novos currículos e um grande esforço de parte dos matemáticos para trazer as técnicas e ideias matemáticas fundamentais (principalmente aquelas desenvolvidas nas últimas décadas) a uma audiência maior. Necessitamos para isso a criação de uma nova geração de matemáticos profissionais capazes de trafegar entre matemática pura e ciência aplicada. A fertilização cruzada de ideias é crucial para a saúde tanto das ciências quanto da matemática."[2]

Encontros e desencontros no curso da história

A situação, considerada perigosa por Gromov na citação acima, reflete uma das características mais marcantes da modernidade, que é a fragmentação do conhecimento em áreas distintas e autônomas. Essa fragmentação dicotômica é uma das responsáveis para se tratar a Matemática e as Ciências como disciplinas autônomas, muitas vezes até estranhas. Cientistas, e muito mais fortemente os humanistas e artistas, têm dificuldade para entender o código linguístico e o vocabulário especial dos matemáticos, difícil de compreender e geralmente

[2] Mikhael Gromov: Possible Trends in Mathematics in the Coming Decades, *Notices of the American Mathematical Society*, August 1998 p. 847.

incompreensível para os não iniciados. A busca da transdisciplinaridade, que rapidamente está ganhando espaço no mundo acadêmico e educacional, é uma reação à fragmentação dicotômica.

Na Antiguidade, pode-se falar em identificação entre a Matemática e as ciências e a engenharia. O exemplo mais notável é Arquimedes (*ca*287-212 a.C.). O livro clássico de Marcus Pollio Vitruvius (séc I a.C.) *De Architectura*, mostra a presença inerente da Matemática nas grandes obras de Engenharia do Império Romano. Na Alta Idade Média, sobretudo por motivação religiosa, a Matemática herdada dos gregos praticamente desaparece dos ambientes eruditos. Nota-se, porém, sobretudo graças ao desenvolvimento da arquitetura gótica, da urbanização e da perspectiva na pintura, a emergência de novas direções que viriam a se organizar como parte da disciplina Matemática, como a conhecemos hoje. Na Baixa Idade Média, os conhecimentos de natureza matemática originados dos gregos, preservados e ampliados pelos árabes, são apropriados pelos participantes das Cruzadas e levados para a Europa, onde se mesclam com os conhecimentos de ciências, de engenharia e das artes em geral, e também de uma economia emergente. Esses fazeres e saberes buscam fundamentação teórica, começando a se desenvolver bases conceituais. A advertência de Dominicus Grandissalinus, no séc.XV, que "seria vergonhoso para alguém exercer qualquer arte e não saber o que ela é, de qual assunto ela trata e as outras coisas que dela são prometidas" é significativa. Representa um apelo à busca de explicações, de natureza matemática, para as grandes obras de engenharia e arquitetura. Exemplo disso são as reformulações da obra vitruviana por Filippo Brunelleschi (1377-1446), Leon B. Alberti (1404-1472) e Sebastiano Serlio (1475-1554). Após Isaac Newton (1642-1726), as novas ideias resultantes da invenção do cálculo tem repercussões na engenharia, nas artes, nas visões de corpo, na mecânica do ser vivo, na política, na sociedade, na "redescoberta" do mundo.

Paradoxalmente, o Iluminismo ou Idade da Razão preconiza o afastamento da Matemática e das aplicações. A Matemática entra na fase de ser justificada por ser a base de todas as demais atividades materiais (particularmente técnicas) e intelectuais (ciências e filosofia) e de procurar, internamente, sua fundamentação. Torna-se epistemologicamente autônoma. A Matemática se distancia das demais áreas de conhecimento e é identificada e justificada como a base de suporte para as outras áreas. Isso fica evidente nas importantes obras de Luis Antonio Verney (1713-1792), principalmente *O método verdadeiro de Estudar* (1746) e *De Re Physica* (1769), infelizmente pouco conhecidas pelos historiadores das ciências e da matemática.[3]

A artificialidade da separação entre a Matemática e as Ciências se acentua no início do século XX, e há um apelo de importantes matemáticos para uma maior aproximação da matemática com as ciências, como fica evidente na seguinte observação de Eliakim H. Moore, em 1902, um dos mais destacados matemáticos desse período e Presidente da American Mathematical Society, ao defender sua proposta pedagógica:

> "Este programa de reforma pede o desenvolvimento de um sistema completo de laboratório de instrução em matemática e física, um propósito principal

[3] Ver a tese de doutorado de Frederico José Andries Lopes: *Verney e De Re Physica*, UNESP/Rio Claro, 2002.

> sendo, até onde for possível, desenvolver por parte de todo aluno o espírito verdadeiro de pesquisa, e uma apreciação, tanto prática quanto teórica, dos métodos fundamentais de ciência. **....** Sobre a possibilidade de efetivar esta unificação de matemática e física nas escolas secundárias, haverá objeção por alguns professores que é impossível fazer bem mais de uma coisa de cada vez".[4]

Por que, na modernidade, matemáticos e cientistas se distanciaram?

Algumas possíveis causas do estranhamento acadêmico da matemática e das ciências que ocorreu desde a modernidade são:

- a natureza da Matemática.
- o estilo de comunicar matemática.
- sua inutilidade *vs* sua "efetividade desarrazoada".

A última questão é a mais intrigante e sintetiza as grandes correntes de filosofia matemática. A inutilidade é proclamada por matemáticos, talvez com uma certa ironia. A mais conhecida é a afirmação de G.H.Hardy (1877-1947), um dos mais destacados matemáticos do século XX. Num testemunho que se tornou um clássico sobre a vida intelectual de um matemático, Hardy diz:

> "Nunca fiz nada de 'útil'. Nenhuma descoberta minha fez ou tem probabilidade de fazer, direta ou indiretamente, para o bem ou para o mal, a menor diferença para o conforto da vida neste mundo. Ajudei a formar outros matemáticos, mas matemáticos iguais a mim, e o trabalho deles, na medida em que eu os auxiliei, foi tão inútil quanto o meu. A julgar por todos os critérios práticos, o valor da minha vida na matemática é nulo; e fora da matemática é bem reduzido, de qualquer maneira. Tenho apenas uma chance de escapar a um veredito de nulidade completa, caso julguem que criei algo que vale a pena criar. Que criei algo é inegável; a questão é o valor da minha criação. O argumento a favor da minha vida, então, ou da vida de qualquer um que tenha sido um matemático no mesmo sentido que eu fui, é este: que acrescentei alguma coisa ao conhecimento e ajudei muitos a acrescentar mais; e que essas coisas têm um valor que difere apenas em grau, mas não em espécie, do valor das criações dos grandes matemáticos ou de qualquer um dos outros artistas, grandes ou pequenos, que deixaram algum tipo de lembrança atrás de si."[5]

Alex Csiszar faz uma observação muito interessante sobre a proclamada inutilidade e o estilo de comunicação matemática:

> "Uma dificuldade principal para matemáticos é que há uma percepção de "inutilidade" da matemática. Na verdade, muito (mas de nenhum modo todo) trabalho matemático nunca levará a qualquer tipo de aplicação prática, e parece impossível predizer o que, eventualmente, encontrará alguma utilização, ou levar a resultados que terão alguma importância fora do campo da matemática."[6]

Já a "efetividade desarrazoada" é aceita sem hesitação. Aceita-se, sem

[4] Eliakim H. Moore, Presidential Address to the American Mathematical Society, 1902.
[5] G.H. Hardy: *Em Defesa de um Matemático*. Com uma Introdução de C.P.Snow. Tradução de Luis Carlos Borges, do original de 1940+1967, Martins Fontes, São Paulo, 2000; p. 140.
[6] Alex Csiszar: Stylizing rigor; or, Why mathematicians write so well, *Configurations*, vol.11, 2, Spring 2003, p.241.

contestação, que a Matemática é a espinha dorsal da civilização moderna. A própria frase "efetividade desarrazoada" [*unreasonable effectiveness*] tornou-se clássica após ter sido utilizada como título de um trabalho referencial pelo eminente físico Eugene Wigner. Nesse trabalho ele diz:

> "O milagre da conveniência da linguagem matemática para a formulação das leis de física é um maravilhoso presente que nós nem entendemos nem merecemos. Nós deveríamos ser agradecidos por isso e esperar que vá permanecer assim nas pesquisas futuras, e que se estenda para campos maiores do conhecimento, para melhor ou para pior, para nosso prazer, mesmo que talvez também para nossa confusão."[7]

Na história de matemática existem inúmeros estudos de como matemática é essencial para as ciências, mas discussões sobre como as ciências influenciaram e continuam influenciando o desenvolvimento da matemática são menos comuns. Ainda menos comum são os estudos as elações de discordância entre os próprios matemáticos.

A Matemática é vista por muitos, inclusive por matemáticos, como um monobloco epistemológico. Isso reflete uma luta de poder na Matemática institucionalizada. Esta última observação, sobre o poder interno, é ilustrada pela atitude de David Hilbert, em 1928, quando ele escreveu para a revista *Mathematische Annalen*, a mais prestigiosa publicação de pesquisa matemática da época, dizendo não mais ser capaz de cooperar com Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) no corpo editorial da revista. Brouwer era um dos mais destacados topólogos da época e o introdutor do intuicionismo. Hilbert alegou profundas divergências com Brouwer sobre os fundamentos da matemática. Como resultado, Brouwer foi excluído do corpo editorial do *Mathematische Annalen*![8]

Há algumas referências à Matemática como apoio às Ciências e à Filosofia e algumas vezes uma vaga referência às Ciências motivando o desenvolvimento da Matemática.[9]

Vejo a proclamada inutilidade e a efetividade desarrazoada como motivador e de fato um apoio para reflexões teóricas sobre a integração da Matemática com as demais ciências, mantendo-se a especificidade do estilo de comunicação matemática.

Uma proposta para se examinar a integração é o exame dos desencontros e desacordos

- na própria Matemática,
- da Matemática e as demais ciências,
- da Matemática e as demais áreas de conhecimento.

Hoje, os departamentos acadêmicos tradicionais, embora tentem resistir, são meros subsidiários de projetos de pesquisa, em áreas emergentes, como Cibernética, Inteligência Artificial, Mecatrônica, Nanotecnologia, Biologia Molecular,

[7] Eugene Wigner: The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, Communications in Purê and Applied Mathematics, vol.13, nº1, February 1960.
[8] Gerhard van der Geer, We Can Make a Change, *Notices of the American Mathematical Society*, May 2004, p.493.
[9] Mark Steiner: *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, Harvard Univ. Press, Cambridge, 1998.

Teorias da Mente e da Consciência, Novos enfoques à Cognição e Aprendizagem, Teoria dos Jogos, Teoria Geral de Sistemas, Fractais, Teorias *Fuzzy*, Teorias de Caos. Todas essas áreas têm muito conteúdo matemático, mas são fortemente integradas com as outras ciências e, portanto, sujeitas a outros padrões de formalismo e rigor.

Uma pergunta que normalmente ocorre é: o que se passa, então, com a Matemática Clássica, na transição do século XX para o século XXI?

Há questões matemáticas ainda não resolvidas, que continuam estimulando pesquisa matemática tradicional. Lembro aquelas que receberam muita publicidade, como o teorema de Fermat (formulado em 1663) e a hipótese de Riemann (formulada em 1859). O interesse acadêmico em questões assim leva a prêmios multimilionários, mas os detalhes das resoluções ficam restritos a pouquíssimos indivíduos. Dizer que questões do tipo são resolvidas implica algo como um ato-de-fé no universo acadêmico.

A aceitação do conhecimento matemático como um ato-de-fé, isto é, a crença numa forma de "infalibilidade" das instituições academicamente credenciadas, tem óbvias repercussões negativas na atitude geral da sociedade. Facilita a aceitação, pela sociedade, dos avanços da Matemática, e o mesmo se dá com as demais ciências, sem ter ideia do que está aceitando. A retórica da autoridade institucional garante a subordinação a desígnios e interesses de indivíduos, de grupos religiosos, de grupos econômicos e financeiros, e de partidos políticos. Essencialmente, subordina a sociedade como um todo ao poder. Essa subordinação é notada no dia-a-dia. Um exemplo é a manipulação de pesquisas bio-médicas, a questão dos transgênicos, a legislação sobre aborto, e principalmente a retórica do terrorismo e do anti-terrorismo. Há inúmeras outras formas de intimidação de indivíduos. Lamentavelmente, a linguagem hermética da Matemática é um dos maiores responsáveis por esse uso do prestígio de uma área de conhecimento em benefício de grupos de poder.

Não é de agora a preocupação de se levar o conhecimento científico a todas as camadas da população. É significativo o que disse David Hilbert, o matemático de maior prestígio na transição do século XX para o século XXI e a figura maior do formalismo matemático, na sua conferência seminal proferida no 2º Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris, em 1900:

> "Um velho matemático francês disse: Uma teoria matemática não está visível antes da perfeição até que você a faça tão clara que seja possível explicá-la para a primeira pessoa que você encontra na rua".[10]

Curiosamente, quase 30 anos depois, Hilbert enquadra-se com os conservadores, na sua disputa com Brouwer.

Não há dúvida que o grande desenvolvimento de uma nova Matemática se fará em integração com as demais áreas do conhecimento, numa relação de tipo simbiótica, e que afetará muito especialmente nosso entendimento do estado da civilização.

A vitalidade de uma nova Matemática e de novas ciências, respondendo ao apelo de Gromov citado no início deste trabalho, exige grande liberdade de

[10] David Hilbert: Problemas Matemáticos (trad.do orig. de 1900 por Sergio R. Nobre) *Revista Brasileira de História da Matemática*, vol.3, nº5, 2003, pp.5-12;p.5.

expressão, criatividade e ousadia. É interessante lembrar o que disse o grande matemático norueguês Sophus Lie, em 1893, em correspondência a um amigo:

> "Sem fantasia ninguém pode se tornar um matemático, e o que me garantiu um lugar entre os matemáticos dos nossos dias, apesar de minha falta de conhecimento e de forma, foi a audácia do meu pensamento."[11]

Há reações, às vezes violentas, contra audácia e com a superação das teorias já institucionalmente consolidadas. Utiliza-se, invariavelmente, o argumento de se manter o rigor científico. Lembro em particular, o caso Sokal.

Acredito ser este o maior desafio para o conhecimento científico atual: conseguir uma estruturação e uma linguagem capazes de atingir a população como um todo, mantendo padrões de rigor, mas não necessariamente aqueles dominantes nas gaiolas epistemológicas da ciência moderna. Para isso será necessário uma nova concepção de rigor, na qual a integração de todas as ciências e da Matemática se fará espontaneamente e sem traumas de natureza epistemológica.

Isso exige coragem e audácia. Na imagem de Imre Lakatos, os cientistas devem ser ativistas revolucionários, caracterizados como aqueles que acreditam que referenciais conceituais podem ser desenvolvidos e substituídos por outras melhores. O próprio Lakatos faz a *mea culpa* filosófica redimível ao dizer que "somos nós que criamos nossas prisões e nós podemos também, criticamente, demoli-las."[12]

Transdisciplinaridade.

Metaforicamente, as disciplinas funcionam como conhecimento engaiolado e sair da gaiola é praticar a transdisciplinaridade.

A transdisciplinaridade vai além das limitações impostas pelos métodos e objetos de estudos das disciplinas e das interdisciplinas, isto é, vai além das grades das gaiolas.

O processo psico-emocional de geração de conhecimentos, que é a essência da criatividade, é um processo transdisciplinar. É um programa de pesquisa, e pode ser categorizado através de questionamentos como:

1. Como passar de práticas *ad hoc* para lidar com situações e problemas novos a métodos?
2. Como passar de métodos a teorias?
3. Como proceder da teoria à invenção?

Explicitando, o processo transdisciplinar envolve

- a geração e produção de conhecimento;
- a sua organização intelectual;
- a sua organização social;
- a sua transmissão e difusão, que são, normalmente, tratados de forma isolada, como disciplinas específicas: ciências da cognição (trata da geração de

[11] Citado em Arild Stubhaug: *The Mathematician Sophus Lie*, Springer-Verlag, 2000; p;409.
[12] Imre Lakatos: *The methodology of scientific research programmes*, Philosophical Papers Volume 1, eds. John Worrall and George Currie, Cambridge University Press, Cambridge, 1978; p.20.

conhecimento), epistemologia (trata da organização intelectual do conhecimento), história, política e educação (trata da organização social, institucionalização e difusão do conhecimento).

Na transição da Baixa Idade Média e da Renascença para a Idade Moderna, quando novos meios de observação e de questionamento são desenvolvidos e novos contextos culturais são conhecidos, as disciplinas tradicionais, embora muito gerais, não davam conta de novos questionamentos e de situações e problemas até então não identificados e reconhecidos.

René Descartes reconhece a insuficiência dos métodos específicos às disciplinas no seu *Discurso do Método,* de 1637:

> "Por este motivo, considerei ser necessário buscar algum outro método que, contendo as vantagens desses três [da filosofia, da lógica, e das matemáticas, a análise dos geômetras e a álgebra], estivesse desembaraçado de seus defeitos."[13]

Mas Descartes disse claramente que procurou um método que lhe servisse para "*bem conduzir a razão*", e que apresentava esse método tão somente como exemplo de como ele conduzia sua razão. Jamais como um método, "engaiolado" em novos paradigmas epistemológicos, a ser seguido por todos.

Enquanto os instrumentos de observação (aparelhos — <u>artefatos</u>) e de análise (conceitos e teorias — <u>mentefatos</u>) eram mais limitados, os enfoques disciplinar e interdisciplinar mostravam-se satisfatórios. Mas com a sofisticação dos novos instrumentos de observação e de análise, que se intensificou em meados do século XX, constatou-se que mesmo o enfoque interdisciplinar é insuficiente. A ânsia por um conhecimento total, por uma cultura planetária, não poderá ser satisfeita com as práticas interdisciplinares. Do mesmo modo, o ideal de respeito, solidariedade e cooperação entre todos os indivíduos e todas as nações não será realizado somente com a interdisciplinaridade.

O método chamado moderno para se conhecer algo, para explicar um fato e um fenômeno, baseia-se no estudo de disciplinas específicas, o que inclui métodos específicos e objetos de estudo próprios. Esse método, dominante no mundo acadêmico, caracteriza o reducionismo característico do século XVI. Logo esse método se mostrou insuficiente e já no século XVII surgiram tentativas de se reunir conhecimentos e resultados de várias disciplinas para o ataque a um problema. Não se nega que o indivíduo deva procurar conhecer mais coisas para conhecer melhor. A prática da multidisciplinaridade, que hoje está presente em praticamente todos os programas escolares, visa isso. Mas é insuficiente, como diz o próprio Descartes no início de seu *Discurso do Método*, na citação acima. A interdisciplinaridade tenta responder a essa insuficiência, não só se justapõem resultados, mas mesclando métodos e, consequentemente, identificando novos objetos de estudo.

Sobrevivência e Transcendência e Cultura

Vou agora abordar rapidamente um tema muito geral e básico, a quintessência de ser humano, que é a resposta aos pulsões de sobrevivência e de transcendência.

---

[13] René Descartes: Discurso do Método (trad Enrico Corvisieri), em *Descartes - Vida e Obra*, São Paulo: Editora Nova Cultural Lida, 1999; p.49.

Sobrevivência é o conjunto de estratégias para satisfazer as necessidades materiais para se manter vivo e dar continuidade à espécie., o que deve ser realizado aqui e agora (comum a todas as espécies). Transcendência é ir além das necessidades materiais e manter-se vivo com dignidade (característico da espécie humana); é perguntar sobre onde (além do aqui) e sobre antes, depois e quando (além do agora).

A busca de sobrevivência e de transcendência são ações transdisciplinares, individuais e socializadas, e contextualizadas no ambiente natural e sócio-cultural de um grupo.

É oportuno neste momento conceituar cultura. Há muitos escritos e teorias, geralmente impregnadas de ideologias, sobre o que é cultura. Sintetizo a essência dessas várias conceituações definindo cultura como o conjunto de mitos, valores, normas de comportamento e estilos de conhecimento compartilhados por indivíduos vivendo num determinado tempo e espaço.

A humanidade pode ser mapeada em inúmeras culturas, ocupando diferentes espaços e evoluindo com o tempo. Assim, ao longo da história, vão se transformando. A comunicação entre gerações e o encontro de grupos com culturas diferentes cria uma dinâmica cultural e não podemos pensar numa cultura estática, congelada em tempo e espaço. A dinâmica de encontros culturais é lenta e o que percebemos na exposição mútua de culturas é que pode haver uma convivência multicultural ou em muitos casos uma subordinação cultural, algumas vezes até mesmo a destruição de uma das culturas no encontro. Naturalmente, a convivência multicultural representa um progresso no comportamento das sociedades, algumas vezes conseguido após violentos conflitos. A convivência de culturas ganha espaço no momento atual, embora não sem problemas.

Ao atentarmos para os conceitos de espaço e tempo, como intrínsecos à busca de sobrevivência e transcendências, é essencial entender como a espécie evolui na lida com esses conceitos. A Matemática, como uma disciplina básica no ambiente acadêmico ocidental, tem sua origem no tratamento de espaço e tempo.

Não nego que o conhecimento disciplinar, consequentemente o multidisciplinar e o interdisciplinar, são úteis e importantes, e continuarão a ser ampliados e cultivados, mas somente poderão conduzir a uma visão plena da realidade se forem subordinados ao conhecimento transdisciplinar.

A pesquisa e a educação estão, rapidamente, caminhando em direção a uma educação transdisciplinar. È nossa esperança que uma nova geração, pensando e agindo com uma postura transdisciplinar, possa evitar uma ruptura irreversível da civilização, como é a grande preocupação de todos nós e é alertada por inúmeros cientistas, como destacado no início deste trabalho.

Nota final: Partes deste trabalho já foram publicadas em outros trabalhos de minha autoria.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 21-36

El rol de la historia de las ciencias en la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de Ingeniería

Viviana Angélica Costa, Marcelo Arlego

Fecha de recepción: 23/02/2012
Fecha de aceptación: 4/04/2013

Resumen	En este trabajo presentamos una posible estrategia didáctica para la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de Ingeniería. La misma aborda una perspectiva histórica, contextualizando los conceptos matemáticos con el conjunto de fenómenos físicos que motivaron su origen. Para ello, exponemos una reseña de los orígenes del Cálculo Vectorial durante los siglos XVIII y XIX. Se consideran reflexiones de investigadores enfatizando la importancia de incorporar aspectos epistemológicos e historiográficos, en la enseñanza de las ciencias. **Palabras clave**: cálculo vectorial, ingeniería, epistemología.
Abstract	In this work we present a possible didactic strategy for teaching vector calculus in engineering careers. It addresses a historical perspective, contextualizing mathematical concepts with physical phenomena that led to its origin. To this end, we present an overview of the origin of vector calculus during the eighteenth and nineteenth centuries. We consider reflections of researchers emphasizing the importance of incorporating epistemological and historiographical aspects in science education. **Keywords**: vector calculus, engineering, epistemological.
Resumo	Neste trabalho apresentamos uma possível estratégia didática para o ensino de cálculo vetorial em carreiras de engenharia. Ele aborda uma perspectiva histórica, contextualizando os conceitos matemáticos com fenômenos físicos que levaram à sua origem. Para este fim, apresentamos uma visão geral da origem do cálculo vetorial, durante os séculos XVIII e XIX. Finalmente, consideramos as reflexões de pesquisadores, enfatizando a importância de incorporar aspectos epistemológicos e historiográficos em educação científica. **Palavras-chave:** cálculo vetorial, engenharia, epistemológicos.

1. El rol de la historia de la ciencia en la enseñanza de las ciencias

Algunos investigadores dan cuenta de la importancia de incorporar discusiones epistemológicas e historiográficas de las *ciencias* en la *enseñanza de las ciencias*. En general consideran que ésta inclusión en los procesos de enseñanza puede contribuir a desarrollar en los estudiantes un pensamiento crítico y ser un estímulo para la reflexión. Otros, como Thomas Khun (1959, 1977) y Martin Klein (1972), presentan objeciones, manifiestan lo contrario y argumentan sus posturas.

A continuación se destacan algunos de los argumentos a favor de una perspectiva histórica en la *enseñanza de las ciencias*. Martínez – Sierra (2008), afirma que:

> *"… un análisis histórico-epistemológico tiene por objetivo entender su naturaleza, su significado y sentido al determinar las causas que posibilitaron su aparición, de identificar las diferentes etapas de su construcción en el ámbito científico, así como las condiciones de sus transformaciones sucesivas hasta llegar en el aula como objeto de enseñanza…"*

Además, se pregunta, sobre los procesos de construcción de conocimiento: ¿Cómo y por qué surge históricamente un conocimiento? ¿Cómo se vincula con los saberes ya existentes? ¿Cómo se integra en una estructura más amplia para a su vez propiciar nuevos descubrimientos?

Según Lombardi (1997),

> *"en la actualidad existe un consenso casi unánime entre los investigadores en educación acerca de la relevancia de la perspectiva histórica en la formación científica"……."introducir la dimensión histórica en la enseñanza de las ciencias puede contribuir a desarrollar en los estudiantes el pensamiento crítico...la historia de la ciencia pasa a ser para el alumno un poderoso estímulo para la reflexión".*

Gil Pérez (*et al*, 1993), por su parte, exponen varias razones para afirmar el importante papel de la historia en el proceso de formación del matemático y sobre la utilización de la historia en la *educación matemática*. Expresan que la historia debería ser un potente auxiliar en la enseñanza de la matemática, para lograr objetivos tales como:

- hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas,
- enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes,
- señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente,
- apuntar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes.

Además exponen:

> "*Desde el punto de vista del conocimiento más profundo de la propia matemática la historia nos proporciona un cuadro en el que los elementos aparecen en su verdadera perspectiva, lo que redunda en un gran enriquecimiento tanto para el matemático técnico, como para el que enseña…" "La historia se puede y se debe utilizar, por ejemplo, para entender y hacer comprender una idea difícil del modo más adecuado [..]. Los diferentes métodos del pensamiento matemático, tales como la inducción, el pensamiento algebraico, la geometría analítica, el cálculo infinitesimal, la topología, la probabilidad, han surgido en circunstancias históricas muy interesantes y muy peculiares, frecuentemente en la mente de pensadores muy singulares, cuyos méritos, no ya por justicia, sino por ejemplaridad, es muy útil resaltar".*

Según Matthews (1994) la introducción de tópicos correspondientes a la *historia de la ciencia* en la enseñanza de las disciplinas científicas puede favorecer el desarrollo de habilidades de razonamiento y de pensamiento crítico, así como contribuir a una mejor comprensión de los conceptos científicos. Además defiende la enseñanza de la Historia y Filosofía de las Ciencias, como asignatura en Carreras de Profesorados de Ciencias y Carreras de Ciencias. Argumenta para ello que la *historia de la ciencia* mejora la *enseñanza de las ciencias* porque:

- motiva e interesa a los alumnos;
- humaniza los contenidos;
- proporciona una mejor comprensión de los conceptos científicos mostrando su desarrollo y perfeccionamiento;
- tiene un valor intrínseco la comprensión de ciertos episodios cruciales en la historia de la ciencia: revolución científica, darwinismo, etc;
- demuestra que la ciencia es mutable y cambiante y que, en consecuencia, el conocimiento científico actual es susceptible de ser transformado;
- combate la ideología cientificista;
- permite un conocimiento más rico del método científico y muestra las pautas del cambio de la metodología aceptada.

Por otro lado, la no incorporación de la *historia de la ciencia* en la *enseñanza de las ciencias*, vinculada generalmente al desconocimiento y a la imagen ingenua que transmiten algunos profesores de ciencia a sus alumnos, produce las llamadas visiones deformadas de la ciencia que se registran en alumnos y en docentes. Entre varias de las visiones deformadas, Fernández (*et al*., 2002) describe, entre otras, la que proporciona *una concepción aproblemática y ahistórica de la ciencia*. Se transmiten conocimientos ya elaborados, sin mostrar cuáles fueron los problemas que generaron su construcción, cuál ha sido su evolución, las dificultades, etc., ni mucho menos aún, las limitaciones del conocimiento científico actual o las perspectivas abiertas. Se pierde así de vista que, como afirma Bachelard (1938), *"todo conocimiento es la respuesta a una cuestión, a un problema*", lo que dificulta captar la racionalidad del proceso científico.

En particular, en la enseñanza de la matemática para alumnos de carreras de ingeniería, Christiane Dujet[1], directora del programa internacional Matemáticas para los ingenieros (INSA de Lyon), expresa en la conferencia pronunciada en México y Monterrey en mayo de 2005, la necesidad de integrar la epistemología y/o la historia de las matemáticas en la enseñanza de la matemática para los ingenieros y científicos. Expone:

> "*el punto de vista epistemológico e histórico le permite al alumno percibir de antemano las dificultades que precedieron (a menudo durante un siglo o más) la elaboración de los conceptos, algunos de los cuales han llegado a ser considerados casi como evidencias hoy día (funciones, límites, series, etc.) y aprender mejor las sutilezas que contienen. El estudiante puede asimismo relativizar sus propias dificultades y desmitificar a las matemáticas".*

En suma, el uso de la historia de la ciencia debería mostrar que el conocimiento actual es el resultado de un largo proceso, en donde la interrelación teoría - empírica es constante y sobre el cual los factores filosóficos, culturales, sociales e incluso estéticos, tienen un peso importante. Sin embargo, es relevante

1 http://www.m2real.org/spip.php?article2&lang=fr

aclarar que el uso de la historia de ciencia como recurso didáctico para estructurar la presentación de un tema complejo, tanto en libros de texto como en clase, no debería derivar en simplificaciones extremas que distorsionen el sentido de la historia de la ciencia, y de la propia ciencia, en la enseñanza (Matthews, 1994), (Lombardi, 1997).

2. El Cálculo Vectorial en el contexto de la Ingeniería

Durante finales del siglo XVIII y el XIX se dan las llamadas Primera y Segunda Revolución Industrial, las revoluciones sociales e intelectuales asociadas a ellas y la creación de las primeras escuelas técnicas, dando esto surgimiento a la Ingeniería[2].

La Ingeniería actual se enfrenta a nuevos desafíos, relacionados con temas claves, como son: la sostenibilidad, la salud, la reducción de la vulnerabilidad y la calidad de vida (National Academy of Engineering, NAE[3]). Hay un acuerdo unánime en afirmar que para ello es necesario el soporte y avance de la investigación científica y, particularmente, de la inventiva, la creatividad, y la investigación y desarrollo tecnológico propios de la Ingeniería. Algunos de esos retos, son: conseguir que la energía solar sea accesible, suministrar energía a partir de la fusión nuclear, desarrollar métodos de secuestración del carbono, gestionar el ciclo del nitrógeno, suministrar acceso al agua potable, y otros[4] . Se señala que los ingenieros han marcado los avances de la civilización a lo largo de toda la historia, y que su presencia e influencia se ha acrecentado a partir de la Revolución Industrial, que supuso la sustitución del trabajo humano por el de las máquinas en incontables facetas. Por otro lado, en las últimas décadas se han generado avances procedentes de la ingeniería (automóviles, aviones, radio, televisión, naves espaciales, láseres, ordenadores, entre otros) que han mejorado cada aspecto de la vida humana.

En relación a la educación en carreras de ingeniería, en el Congreso Mundial de Ingeniería[5], realizado en el año 2010 en la ciudad de Buenos Aires, se redactó un informe final, en el que se destaca que:

> "*la sociedad mundial atraviesa un momento histórico, de profundos cambios en todos los aspectos del quehacer social, político, económico, científico, tecnológico y ambiental y que la ingeniería tiene la obligación no sólo de acompañar, sino de liderar los cambios necesarios que aseguren el desarrollo sostenible de todas y cada una de las regiones del mundo. Para ello se requiere de un ingeniero provisto de sólidos conocimientos y competencias técnicas y tecnológicas, sino que además debe estar provisto de una sólida cultura general, conocer en primer lugar las características y necesidades de su región, y estar asimismo dotado de una cosmovisión sistémica que le permita aplicar sus conocimientos en el lugar del mundo en que se los requiera*".

[2] *Ingeniería*[2] es la profesión en la que el conocimiento de las ciencias matemáticas y naturales adquiridas mediante el estudio, la experiencia y la práctica, se emplea con buen juicio a fin de desarrollar modos en que se puedan utilizar, de manera óptima los materiales y las fuerzas de la naturaleza en beneficio de la humanidad, en el contexto de restricciones éticas, físicas, económicas, ambientales, humanas, políticas, legales y culturales. Sus inicios, como campo de conocimiento, están ligados al comienzo de la *revolución industrial* (Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina).

[3] http://www.nae.edu/nae/naehome.nsf

[4] http://www.engineeringchallenges.org/

[5] http://ingenieria2010.com.ar/es.html

En carreras de Ingeniería el Cálculo Vectorial es una de las asignaturas básicas del área matemática. Es una rama de la matemática referida al análisis real multivariable de vectores en dos o más dimensiones. El dominio de los conceptos que involucra es esencial para alumnos de estas carreras. Será importante para su correcta aplicación en la resolución de problemas de su especialidad, establecer leyes y reglas, que expliquen el comportamiento de los cuerpos sometidos a la interacción de diversas fuerzas. Además, para abordar los conceptos del Área de física como son Electromagnetismo Clásico, Mecánica de los Fluidos, Aerodinámica, Mecánica de Sólidos, Transferencia de Calor, Mecánica del Medio Continuo, Campos y Ondas, entre otras.

Uno de los conceptos fundamentales del cálculo vectorial, es el de concepto de *campo vectorial*. Un *campo vectorial* (o función vectorial) es una función que asocia un vector a cada punto de su dominio. Por ejemplo "…*para analizar las características de vuelo de un avión, los ingenieros realizan pruebas en el túnel de viento, las cuales proporcionan información vital acerca del flujo de aire sobre las alas y alrededor del fuselaje de la nave. Para modelar tal situación es necesario describir la velocidad del aire en varios puntos del túnel, utilizando para esto una función que es un campo* vectorial" (Marsden *et al*, 2005).

Además, el estudio de las *variaciones de un campo vectorial* y de un campo escalar, calculadas al aplicar el operador nabla ∇ mediante el producto punto o producto cruz a campos escalares f o vectoriales F, obteniendo magnitudes vectoriales o escalares (*gradiente* ($\nabla \cdot f$), *rotor* ($\nabla x F$), *divergencia* ($\nabla \cdot F$) y *laplaciano* $\nabla \cdot (\nabla \cdot f)$) son importante para describir el comportamiento cualitativo de diversos fenómenos físicos. También, existen dos propiedades matemáticas importantes de los *campos vectoriales* que pueden utilizase para describir fenómenos y leyes de la física. Estas propiedades son el "*flujo*" y la "*circulación*" (Feynman, 1987).

Figura 1: Fenómenos físicos descriptos matemáticamente por campos vectoriales

En este marco, es importante que el profesor busque e implemente diversas estrategias didácticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje del *Cálculo Vectorial*, que ayuden al estudiante en la comprensión de los conceptos. Una de las posibles estrategias, es la de contextualizar sus contenidos con la historia que dio origen a los mismos. Como menciona Matthews (1994), introducir tópicos correspondientes a la historia de la ciencia en la enseñanza de las disciplinas científicas podría favorecer el desarrollo de habilidades de razonamiento y de pensamiento crítico, así como contribuir a una mejor comprensión de los conceptos científicos.

Nos preguntamos entonces: ¿Cómo surgió el concepto de *campo vectorial*? ¿Cuáles fueron los inicios del *Cálculo Vectorial*? ¿Cuáles son los conceptos que subyacen a esta rama de la matemática? ¿Qué importancia tuvieron esos conceptos en el desarrollo de la las ciencias físicas y matemáticas? ¿Cuáles eran los problemas sociales, o tecnológicos, que dieron origen al descubrimiento de estos conceptos? ¿Quiénes fueron sus actores? ¿Qué los motivó a dar con sus hallazgos?

3. Las instituciones y avances científicos en Francia e Inglaterra durante finales del siglo XVIII y el siglo XIX

Durante los siglos XVIII y XIX, los filósofos naturales de Francia y Gran Bretaña fueron los más destacados del mundo científico. Pero, para finales de ese último siglo, Alemania superó a Inglaterra y a Francia, por lo que a la ciencia se refiere (Mason, 1986). Por esa época se vio que los problemas técnicos de la sociedad podían ser resueltos por la ciencia, de ahí que se crean varias instituciones y escuelas técnicas, cuyos profesores eran destacados científicos, entre ellos Laplace y Lagrange. Además de la creación de escuelas técnicas, bajo Napoleón, se crearon también escuelas militares (médicas y técnicas), volviéndose la ciencia francesa más práctica y experimental (ibid).

Los científicos franceses en esa época desarrollaban su actividad de acuerdo a las necesidades e intereses prácticos de la sociedad. El primer problema que plantearon los revolucionarios a los científicos fue el de la normalización de los pesos y medidas en todo el país. Para ello la Academia de Ciencias, convoca a una asamblea en favor del Sistema Métrico Internacional, *“Discours à l'Assemblée nationale, au nom de l'Académie des Sciences (12 juin 1790)”.* Esto mostraba la gran importancia de la Academia en la época, su intervención en la vida política y como intentaba resolver los problemas que se planteaban en la sociedad y su puesta en práctica (ibid).

La revolución francesa y las guerras napoleónicas trajeron turbulencia en la actividad científica. Esto promovió en Inglaterra el surgimiento de ésta actividad. En la década de 1850 se reformaban las universidades de Cambridge y Oxford, para dar también lugar al surgimiento de nuevas universidades. Se crea el primer laboratorio químico para la enseñanza, por obra de Thomas Thomson, y William Thomson (primer barón Kelvin). Este último funda el primer laboratorio para la enseñanza de la física en Glasgow. Es Kelvin quien dio forma a la *moderna estructura de la enseñanza de la ciencia*, introduciendo el trabajo experimental como parte integrante de la formación del científico.

William Thomson (1824-1907). Físico y matemático británico. Se destacó por sus importantes trabajos en el campo de la *termodinámica*. Es uno de los científicos que más hizo por llevar la física a su forma moderna. Famoso por haber desarrollado la escala de temperatura Kelvin. Recibió el título de barón Kelvin en honor a los logros alcanzados a lo largo de su carrera.

La matemática que se enseñaba en Gran Bretaña durante los primeros años del siglo XIX no iba mucho más allá del nivel que se podía encontrar en la época de Newton. Continuaban utilizando su notación en el cálculo, un tanto engorrosa, desestimando el simbolismo más elegante introducido por Leibniz. Se inicia entonces un movimiento tendiente a remediar tal situación con el objeto de introducir en Inglaterra las matemáticas continentales.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Filósofo, matemático, jurista, bibliotecario y político alemán. Fue uno de los grandes pensadores del siglo XVII y XVIII. Realizó profundas e importantes contribuciones en las áreas de metafísica, epistemología, lógica, filosofía de la religión, así como a la matemática, física, geología, jurisprudencia e historia. Su mayor contribución a la matemática consistió en la de enumerar en 1675 los principio fundamentales del *cálculo infinitesimal*. Esta contribución fue independientemente del método de Newton. Empleó por primera vez el cálculo integral para encontrar el área bajo la curva de una función *y=f(x).* Introdujo varias notaciones usadas en la actualidad, como por ejemplo, el signo "*integra*" ∫, y la letra "*d*" para referirse a los "*diferenciales*". También creó el sistema binario. Junto con René Descartes y Baruch Spinoza, es uno de los tres grandes racionalistas del siglo XVII. Su filosofía se enlaza también con la tradición escolástica y anticipa la lógica moderna y la filosofía analítica. Leibniz hizo asimismo contribuciones a la tecnología y anticipó nociones que aparecieron mucho más tarde en biología, medicina, geología, teoría de la probabilidad, psicología, ingeniería y ciencias de la información.

La Asociación Británica para el desarrollo de la ciencia, creada en 1831, ante los avances industriales que prometían y suministraban las aplicaciones más importantes a la sociedad, es que destinó durante su primer siglo de existencia los mayores montos, a las ciencias físicas. Así, la máquina de vapor dio lugar al nacimiento de la *termodinámica,* y a su vez la ciencia de la electricidad produjo gran parte del equipo de la industria eléctrica (Mason, 1986).

4. El desarrollo de la electricidad y el magnetismo

Las investigaciones en las áreas de *electricidad* y *magnetismo* se desarrollaron rápidamente durante finales del siglo XVIII y XIX a raíz de diversos descubrimientos como el telescopio, el microscopio, el choque eléctrico y la identificación del rayo con la descarga eléctrica.

Benjamín Franklin (1706-1790) en 1749, demostró la naturaleza eléctrica de los rayos. Desarrolló la teoría donde la electricidad es un fluido que existe en la materia y su flujo se debe al exceso o defecto del mismo en ella.

En 1766, el químico Joseph Priestley (1733-1804) prueba que la fuerza que se ejerce entre las cargas eléctricas varía inversamente proporcional a la distancia que las separan y demuestra que la carga eléctrica se distribuye uniformemente en la superficie de una esfera hueca, y que en el interior de la misma, no hay un campo eléctrico, ni una fuerza eléctrica. Newton había mostrado que si la fuerza gravitatoria disminuía con el cuadrado de la distancia a su fuente, una capa esférica de materia no ejercería ninguna tracción gravitatoria sobre los cuerpos de su interior, de donde concluía Priestley que, por analogía, también la fuerza eléctrica ejercía una *ley del inverso del cuadrado*[6].

En 1776, Charles Agustín de Coulomb (1736-1806) inventó la balanza de torsión, con la que midió de forma cuantitativa la fuerza entre las cargas eléctricas y corroboró que dicha fuerza era proporcional al producto de las cargas

[6] La ley del inverso del cuadrado refiere a algunos fenómenos físicos cuya intensidad disminuye con el cuadrado de la distancia al centro (o fuente) donde se originan.

individuales e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que las separa, conocida como *ley de Coulomb*[7].

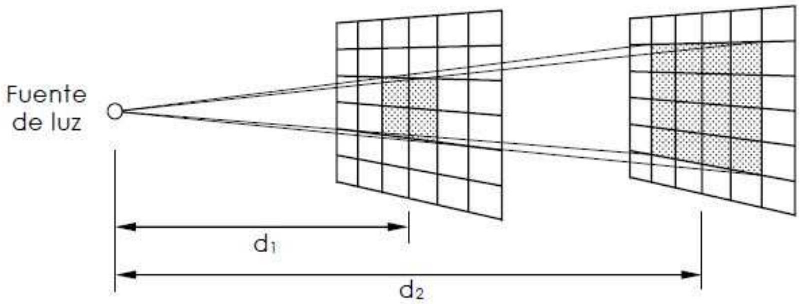


Figura 2: Ley del inverso del cuadrado

Al menos, a los físicos franceses les parecía que estos descubrimientos mostraban que las fuerzas eléctricas y magnéticas eran de la misma especie que la gravedad, operando a distancia a través del espacio vacío y obedeciendo la *ley del inverso del cuadrado*.

A principios del siglo XIX, se realizaron varios descubrimientos. En 1800, Alejandro Volta (1745-1827) construye la primera celda electrostática y la batería capaz de producir corriente eléctrica. Desde 1801 a 1815, sir Humphry Davy (1778-1829) desarrolla la electroquímica, explorando el uso de la pila de Volta o batería, y tratando de entender como ésta funciona. Durante el año 1807, conoce al joven Michael Faraday al cual toma como asistente.

En 1831, Michael Faraday (1791-1867) da un paso fundamental en el desarrollo de la electricidad al establecer que el magnetismo produce electricidad a través del movimiento. En el caso de la inducción electromagnética, sugería que la cantidad de electricidad inducida en un conductor dependía del número de *líneas de fuerza* magnética que cruzaba, mientras que la *fuerza electromotriz generada era proporcional a la tasa en que dichas líneas eran cortadas*.

Michael Faraday (1791 - 1867). Físico y químico británico, investigó en las áreas del *electromagnetismo* y la *electroquímica*. Fue discípulo del químico Humphry Davy, y ha sido conocido principalmente por su descubrimiento de la inducción electromagnética, que ha permitido la construcción de generadores y motores eléctricos, y de las leyes de la electrólisis, por lo que es considerado como el verdadero fundador del electromagnetismo y de la electroquímica. En 1831 trazó el campo magnético alrededor de un conductor por el que circula una corriente eléctrica (ya descubierto por Oersted), y ese mismo año descubrió la inducción electromagnética, demostró la inducción de una corriente eléctrica por otra, e introdujo el *concepto de líneas de fuerza*, para representar los *campos magnéticos*. Durante este mismo período, investigó sobre la electrólisis y descubrió las dos leyes fundamentales que llevan su nombre.

Faraday fue el primer científico en usar la noción de *líneas de fuerza* para representar geométricamente la disposición de las *fuerzas eléctricas y magnéticas* en el espacio. En 1845, durante el transcurso de sus investigaciones sobre el efecto magneto-óptico, llamó por primera vez *campo* a la región del espacio que

[7] La ley de Coulomb es válida sólo en condiciones estacionarias, es decir, cuando no hay movimiento de las cargas o como aproximación cuando el movimiento se realiza a velocidades bajas y en trayectorias rectilíneas uniformes. Es por ello que es llamada fuerza electrostática. En términos matemáticos, la magnitud F de la fuerza que cada una de las dos cargas puntuales q_1 y q_2 ejerce sobre la otra separadas por una distancia d se expresa como: $F = k * | q_1 * q_2 | / d^2$.

hay entre los polos magnéticos, la cual está llena de líneas de fuerza. Faraday entendió el *campo* como un espacio lleno de líneas de fuerzas eléctricas o magnéticas. Así, alrededor de 1850 el *concepto de campo* estaba bien establecido en la física británica, pero faltaba una explicación de su constitución física.

Maxwell señaló en "*On Faraday's Lines of Force*" (1855-56), que las líneas de fuerza del espacio que rodea a un imán (las curvas magnéticas de Faraday) dan cuenta de la dirección de la fuerza del campo, pero no de su intensidad en cualquier punto. Para resolver esta cuestión, Maxwell elaboró un modelo geométrico del campo en el que imaginaba un fluido incompresible moviéndose por tubos formados por líneas de fuerza; de otra forma, consideró que las curvas magnéticas no eran líneas simples, sino tubos muy finos de sección variable que transportaban un fluido incompresible. De este modo, *la dirección y la intensidad de la fuerza quedaban respectivamente representadas en cualquier punto del campo por la dirección e intensidad del fluido imaginario* (Berkson, 1974). No obstante, también subrayó que semejante modelo geométrico no podía considerarse como una representación física verdadera del campo, puesto que el fluido incompresible ni siquiera era hipotético; tan sólo se trataba de presentar las ideas matemáticas de una forma más tangible. Maxwell trató de poner en forma cuantitativa y matemática las explicaciones en gran medida cualitativas que Faraday había sugerido para los fenómenos eléctricos y magnéticos (Mason, 1986).

James Clerk Maxwell (1831 – 1879). Físico escocés conocido principalmente por haber desarrollado la *teoría electromagnética clásica*, sintetizando todas las anteriores observaciones, experimentos y leyes sobre electricidad, magnetismo y aun sobre óptica, en una teoría consistente. Las ecuaciones de Maxwell demostraron que la electricidad, el magnetismo y la luz, son manifestaciones del mismo fenómeno: el *campo electromagnético*. Desde ese momento, todas las otras leyes y ecuaciones clásicas de estas disciplinas se convirtieron en casos simplificados de las *ecuaciones de Maxwell*[8]. Su trabajo sobre electromagnetismo ha sido llamado la "segunda gran unificación en física", después de la primera llevada a cabo por Newton. Fue una de las mentes matemáticas más preclaras de su tiempo, y muchos físicos lo consideran el científico del siglo XIX que más influencia tuvo sobre la física del siglo XX.

Cabe mencionar que el empleo de *analogías físicas*, en las que una forma matemática común permitía relacionar fenómenos físicos dispares, también contribuyó a resaltar la unificación de estos fenómenos, lo que resultó de gran importancia para el avance de la física del siglo XIX.

Maxwell introdujo una analogía *hidrodinámica*, en la cual la carga eléctrica positiva se consideraba como una *fuente* o *manantial* que vierte continuamente una cantidad de fluido que depende de su intensidad. En contraposición, la carga eléctrica negativa era como un *sumidero*, que absorbe todo el fluido de las proximidades de manera proporcional a su intensidad; de acuerdo con lo que indicaba Faraday (Acevedo, 2004).

La idea de *campo* en física no nace, en contra de lo que pudiera parecer, de un desarrollo tecnológico o de la necesidad de explicar un conjunto de fenómenos, sino de una metafísica de la naturaleza (del conjunto de principios que rigen nuestra

[8] Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de cuatro ecuaciones (originalmente 20 ecuaciones) que describen por completo los fenómenos electromagnéticos.

representación del mundo), elaborada por Descartes, modificada por Newton y Kant, que influyeron en Oersted y Faraday.

La importancia del *concepto de campo* es indiscutible, tanto desde un punto de vista científico como técnico. Para la física, su introducción supuso poner en duda y superar el marco teórico mecanicista. Como expresa García Doncel (1994):

> "*sin esta idea básica de campo, la evolución posterior de la física relativista y cuántica resulta inconcebible. El impacto que el descubrimiento de las ondas electromagnéticas ha tenido sobre la física es muy profundo. Ellas le han impuesto una segunda revolución conceptual*".

Durante los primeros 50 años del siglo XIX continuaron importantes aportes en las áreas detalladas. El matemático francés Siméon-Denis Poisson (1781-1849), en 1812, publicó su trabajo más importante relacionado con la aplicación matemática a la Electricidad y Magnetismo, describiendo las leyes de la electrostática. Danés Hans Christian Oersted (1777-1851), en 1819 descubre el electromagnetismo, cuando en un experimento para sus estudiantes, la aguja de la brújula colocada accidentalmente cerca de un cable energizado por una pila voltaica, se movió. En 1823, Andre-Marie Ampere (1775-1836) establece los principios de la electrodinámica, cuando llega a la conclusión de que la Fuerza Electromotríz es producto de dos efectos: la tensión eléctrica y la corriente eléctrica. En 1826, el físico alemán Georg Simon Ohm (1789-1854) formuló con exactitud la ley de las corrientes eléctricas, definiendo la relación exacta entre la tensión y la corriente (Ley de Ohm). En 1828, el matemático inglés George Green (1793- 1841) publicó el trabajo "*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*" en el cual amplió el trabajo de Poisson obteniendo una solución general para el cálculo de los potenciales. También aparecieron en este ensayo las funciones de Green y aplicaciones importantes del teorema de Green. En 1828, el americano Joseph Henry (1799-1878) perfeccionó los electroimanes, observó que la polaridad cambiaba al cambiar la dirección del flujo de corriente, y desarrolló el concepto de inductancia propia. James Prescott Joule (1818-1889) físico inglés, descubrió la equivalencia entre el trabajo mecánico y la caloría, e inventó la soldadura eléctrica de arco y demostró que el calor generado por la corriente eléctrica era proporcional al cuadrado de la corriente. El científico alemán Hermann Ludwig Ferdinand Helmholtz (1821-1894), definió la primera ley de la termodinámica demostrando que los circuitos eléctricos cumplían con la ley de la conservación de la energía y que la electricidad era una forma de energía. En 1845, Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) físico alemán, anunció las leyes que permiten calcular las corrientes, y tensiones en redes eléctricas, conocidas como las *Leyes de Kirchhoff*, estableciendo las técnicas para el análisis espectral, con la cual determinó la composición del sol. En 1854, William Thomson, con su trabajo sobre el análisis teórico sobre transmisión por cable hizo posible el desarrollo del cable trasatlántico y en 1858 inventó el cable flexible.

5. De las aplicaciones físicas a las abstracciones matemáticas

Desde mediados del siglo XVIII, los desarrollos del *Cálculo* tuvieron estrecha relación con el *análisis matemático de los fenómenos físicos* y en particular con el movimiento en la *termodinámica*, la *hidrodinámica* y las investigaciones sobre la *luz*, la *electricidad* y el *magnetismo*, abordadas mediante la formulación de ecuaciones diferenciales para describir los fenómenos y el desarrollo de los métodos necesarios para resolver estas ecuaciones (Mankiewicz, 2005).

Uno de los objetivos de los matemáticos del siglo XVIII era el de descubrir un principio general del que fuera deducible la mecánica de Newton. En la búsqueda de sus claves llegaron a observar un cierto número de hechos curiosos de física elemental, que sugirieron a Euler, que la naturaleza persigue sus diversos fines por los medios más económicos y eficientes, y que esa simplicidad oculta, subyace al aparente caso de los fenómenos. Fue esta idea metafísica la que le indujo a crear el cálculo de variaciones como técnica para la investigación de tales cuestiones. El sueño de Euler, fue hecho realidad casi un siglo después por Hamilton (Simmons, 1993).

Leonhard Euler (1707-1783). Matemático y físico. Nació en Basilea (Suiza) y murió en San Petersburgo (Rusia). Se lo considera el principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes de todos los tiempos. Vivió en Rusia y Alemania la mayor parte de su vida y realizó importantes descubrimientos en áreas tan diversas como el cálculo o la teoría de grafos. También introdujo gran parte de la moderna terminología y notación matemática, particularmente para el área del análisis matemático, como por ejemplo la noción de función matemática. Asimismo se le conoce por sus trabajos en los campos de la mecánica, óptica y astronomía.

Durante la mitad del siglo XIX en los principales centros industriales del mundo, se inicio un período en el desarrollo de las matemáticas, en los que la revolución industrial, asignan a las matemáticas una dilatada función social, situándola en un lugar central en el proceso formativo de los ingenieros en las escuelas técnicas superiores. Es en este siglo cuando comienza a desarrollarse la *física matemática*, área de contacto entre matemáticas y física. Esta disciplina constituía las principales áreas de aplicación de las matemáticas en las que se podía comprobar la potencia de la matemática superior en las diferentes ramas de la física. Además, la física fue ganando una estructura casi deductiva, similar a la que en épocas anteriores había sido exclusiva de la mecánica de Newton. Esta disciplina, creció de a poco, y a principios del siglo XX, aun existía una brecha importante entre la matemática y el nivel matemático presente en la formación de ingenieros. En pocos casos, la *física matemática*, llego a ser directamente eficaz en la aplicación a la producción. Klein fue uno de los pioneros en remediar este problema, aplicando la matemática a la producción y fundando un laboratorio aerodinámico en Gotinga.

Los trabajos de Kelvin, Jacobi, Kircchoff, Planck, Lagrange, entre otros, a mediados y finales del siglo XIX, aportaron importantes fundamentos teóricos que permitieron un tratamiento matemático que describiera diversas situaciones físicas que eran de particular interés en la mecánica y tecnología. Por otro lado, en las ecuaciones diferenciales de la elasticidad formuladas por Navier y posteriormente también en el trabajo de Hamilton, se hallan los puntos de partida del futuro *cálculo vectorial y tensorial* (Wussing, 1998).

El *Cálculo Vectorial*, evoluciona a partir del desarrollo del *Algebra Vectorial*. El concepto de *vector* surge a partir del descubrimiento de los números complejos a través de los sistemas de números hipercomplejos creado por Hamilton (Crowe, 1994). El *algebra vectorial* define conceptos tales como vectores, su notación, operaciones básicas y propiedades de las operaciones entre vectores.

William Rowan Hamilton (1805 – 1865). Matemático, físico y astrónomo irlandés, que hizo importantes contribuciones al desarrollo de la óptica, la dinámica, y el álgebra. Su primera obra importante la produjo en óptica geométrica. Su descubrimiento del *cuaternión* junto con sus trabajos en dinámica y el *principio de Hamilton*, son los más conocidos. Este último trabajo fue después decisivo en el desarrollo de la *mecánica cuántica*, donde un concepto fundamental llamado *hamiltoniano* lleva su nombre.

El producto vectorial, surge de la invención de los cuaterniones, atribuido a Hamilton; siendo éstos, en primera instancia, el intento por dotar a los vectores en el espacio de tres dimensiones de estructura multiplicativa (Martínez et. al., 2008).

Las operaciones vectoriales se consideran por primera vez, explícitamente, aunque sin que se defina aún el concepto de vector, a propósito de la representación geométrica de los números complejos proporcionada por Wessel, Argand y Gauss, así como es también la base de los trabajos de Bellavitis, iniciados en 1832, los cuales le llevaran a su "Teoría de las equipolencias", primera representación de conjunto de un cálculo de magnitudes dirigidas y orientadas (Gongora, 2009).

No obstante, la utilidad de los números complejos es limitada pues si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo, estas no tienen por que estar en el mismo plano, por consiguiente se hace necesaria una versión tridimensional de los números complejos.

Wessel, Servois, Möebius lo intentaron. El propio Gauss intentó construir un álgebra de números de tres componentes, en la que la tercera componente represente un desplazamiento en una dirección perpendicular al plano *a+bi*. Así se llega a un álgebra no conmutativa, pero no era el álgebra requerida por los físicos. Además tuvo apenas influencia pues no se publicó.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Fue de los primeros en extender el concepto de divisibilidad a otros conjuntos. Riemann trabajo junto a Gauss y fue éste su director de tesis de doctorado. Según E.T Bell (1985), y opinión compartida por la mayoría de los historiadores de la ciencia, Gauss junto a Arquímedes y Newton ocuparían el podium de los grandes genios de las matemáticas a lo largo de la Historia

Los números complejos proporcionan un álgebra para representar los vectores y las operaciones con ellos, así, no es necesario realizar las operaciones geométricamente pero es posible trabajar con ellos algebraicamente. Con esta teoría de parejas, Hamilton estaba preparado para descubrir y aceptar los números complejos de cuatro dimensiones sin necesidad de interpretaciones geométricas. La versión final de su trabajo la presento en sus *Lectures on Quaternions* (Lecturas sobre Cuaterniones, 1853). En ese mismo trabajo presenta el *operador nabla*, con el símbolo definido por la fórmula $\vec{\nabla} = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$ que se concibe actuando sobre escalares, vectores o cuaterniones considerados como funciones de las tres variables independientes *x, y, z*.

Si bien el inicio del algebra vectorial, del concepto de vector, de las operaciones entre vectores (producto escalar y vectorial) se inician con los cuaterniones, mas adelante se da un debate entre cuaterninistas (defensor fue

Tait) y vectorialistas, que defienden una u otra notación. Luego por diversas cuestiones se dejará de utilizar la notación que le dio inicio. La polémica se decidió finalmente del lado de los vectores.

Gibbs, primer doctor en ingeniería de USA (1839-1903), es quien da la notación actual del *Cálculo Vectorial*, al elaborar una *versión exclusivamente vectorial*, independientemente de los cuaterniones, desarrollada en un inicio para un curso que impartía a sus estudiantes. Es allí cuando se concibe el establecimiento del *cálculo vectorial* como disciplina autónoma.

Los teoremas relativos al cálculo vectorial, los llamados Teorema de Green[9], Teorema de Gauss[10] y Teorema de Stokes[11], vinculan el *cálculo diferencial vectorial* con el *cálculo integral vectorial*, y tienen aplicaciones físicas al estudio de *electricidad y magnetismo*, *hidrodinámica*, *conducción del calor* y en la *resolución de ecuaciones diferenciales* mediante el llamado *teoría del potencial*[12] (Marsden, 2004), (Simmons, 1993).

Además, el teorema de Gauss puede utilizarse en diferentes problemas de física gobernados por la ley del inverso del cuadrado, como la gravitación, la intensidad de la radiación. En particular para campos eléctricos se deduce la conocida *ley de Gauss* que constituye la primera de las *ecuaciones de Maxwell*.

Muchos de estos teoremas tuvieron su origen en la física. El Teorema de Green, descubierto cerca de 1828, surgió en relación con la *teoría del potencial*; y el teorema de Gauss surgió en relación con la *electrostática*. El teorema de Green tiene aplicación en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, en particular de las soluciones a la ecuación de Laplace.

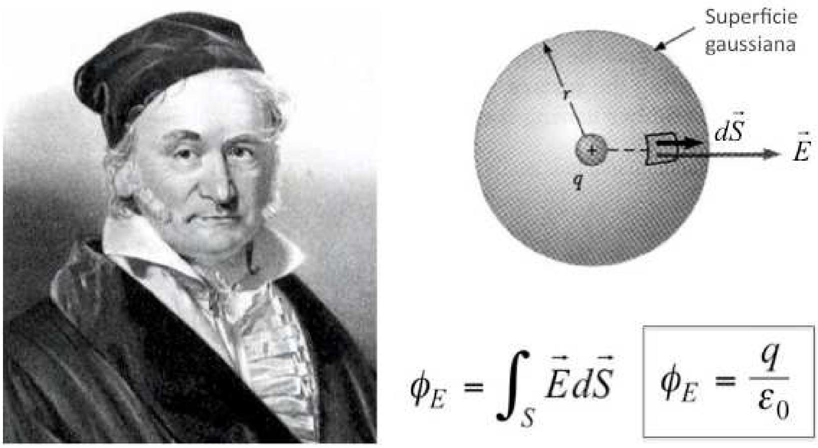


Figura 3: C. F. Gauss. Ley de Gauss

9 Relaciona una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple *C* (*circulación*) y una integral doble sobre la región plana *D* limitada por *C*. Es un caso especial del más general teorema de Stokes

10 También llamado de Gauss-Ostrogradsky, enunciado por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss en 1835, pero no fue publicado hasta 1867, relaciona el *flujo de un campo vectorial* a través de una superficie cerrada con la integral de su divergencia en el volumen delimitado por dicha superficie. Es un resultado importante en física, sobre todo en electrostática y en dinámica de fluidos.

11 Establece que la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial sobre una superficie abierta es igual a la integral cerrada del Campo vectorial a lo largo del contorno que limita la superficie

12 La teoría del potencial es una rama de las matemáticas, que estudia la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, sus soluciones y aplicaciones (por ejemplo en la teoría de la gravitación).

De los teoremas del Cálculo Vectorial, es posible la deducción de la ecuación en *mecánica de los fluidos*, de la ecuación de *conservación de la masa* y en *electromagnetismo* la ecuación de *conservación de la carga* (conocidas como ecuaciones de Euler). En particular, las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido fueron deducidas por Leonhard Euler en 1775, en un artículo titulado, *"General Principles of the Motion of Fluids".*

A Euler se deben las ecuaciones de un cuerpo rígido y la formulación de varias ecuaciones básicas de la mecánica en términos de valores mínimos de funciones. Las ecuaciones de Euler para un fluido fueron finalmente modificadas por Navier y Stokes para incluir efectos de viscosidad; las ecuaciones resultantes de Navier-Stokes se describen virtualmente en casi todo libro de *mecánica de fluidos*.

George Gabriel Stokes (1819- 1903). Matemático y físico irlandés que realizó contribuciones importantes a la *dinámica de fluidos* (incluyendo las *ecuaciones de Navier-Stokes*), la óptica y la física matemática (incluyendo el *teorema de Stokes*). Fue secretario y luego presidente de la Royal Society de Inglaterra. Hijo menor del Reverendo Gabriel Stokes, rector de Skreen, en el condado de Sligo, en el seno de una familia protestante evangélica. Estudió en Skreen, Dublín y Bristol, se matriculó en 1837 en Pembroke College, en la Universidad de Cambridge, donde cuatro años más tarde, tras graduarse con los más altos honores (los de senior wrangler y el primer Premio Smith), fue elegido para ocupar una plaza de profesor, hasta el año 1857, cuando se ve obligado a renunciar por haber contraído matrimonio (ambas cosas eran incompatibles según los estatutos de su facultad universitaria). Sin embargo, doce años más tarde, tras haber sido modificados los estatutos, es reelegido. En 1849 le fue concedida la Cátedra Lucasiana de matemáticas de la Universidad de Cambridge. El 1 de junio de 1899 se celebró en Cambridge el jubileo de su nominación, en una ceremonia brillante a la que asistieron numerosos delegados de universidades europeas y americanas. Sir George Stokes, que fue nombrado baronet en 1889, también sirvió a su universidad representándola en el parlamento desde 1887 hasta 1892, como uno de los dos miembros de la Cambridge University Constituency. Durante parte de este período (1885-1890) fue presidente de la Royal Society, de la que había sido secretario desde 1854, y de esta manera, siendo a la vez Profesor Lucasiano, unió en sí mismo tres cargos que sólo en una ocasión habían estado en manos de un solo individuo, *Sir Isaac Newton*, quien, no obstante, no ocupó las tres simultáneamente. Stokes fue el mayor del trío de *filósofos naturales, los otros dos fueron James Clerk Maxwell y Lord Kelvin*, que contribuyeron especialmente a la fama de la escuela de Cambridge de física matemática a mediados del siglo XIX.

Los avances que se sucedieron en la ciencia para mediados del siglo XIX, fueron importantísimos, dieron lugar a nuevas teorías y avances en nuevas ramas en las ciencias. En el siglo XX, se refina el conocimiento adquirido y el desarrollo tecnológico, acelerado desde la aparición del método científico. En física, se desarrollo en el siglo XX la *teoría cuántica* y la *relatividad*. En matemática, encuentran su desarrollo ramas, como la *geometría algebraica*, la *topología* y la *geometría diferencial*, en particular las *formas diferenciales*, que proporcionan una manera elegante de generalizar los teoremas de Green, Gauss y Stokes, mostrando que éstos son manifestaciones de una sola teoría matemática subyacente y proporcionan el lenguaje necesario para generalizarlos a *n* dimensiones.

6. Comentarios finales

Durante los siglos XVIII y XIX se realizaron importantes avances en las ciencias, en particular en la física y la matemática, que surgieron en repuesta a las necesidades del momento. Las leyes, principios y teorías desarrolladas en esas áreas dieron origen a nuevas teorías. Las situaciones físicas que dieron lugar al origen del concepto de *campo vectorial*, los avances realizados en las áreas de *electricidad* y *magnetismo*, la *teoría del potencial*, los *cuaterniones*, el *principio de Hamilton* y la *Ecuación de Laplace*, ligados en un mismo *contexto*, contribuyeron al origen del *cálculo vectorial* que actualmente conocemos.

En carreras de ingeniería, las herramientas de las ciencias físicas y matemáticas son fundamentales. Ambas contribuirán en la formación de los alumnos. Una posible *estrategia didáctica* para la enseñanza del *Cálculo Vectorial* en estas carreras, dada la fuerte vinculación de esta rama de las matemáticas con los fenómenos físicos relativos al Electromagnetismo y a la Mecánica de los Fluidos entre otros, sería dar una perspectiva histórica a los conceptos involucrados, poner en contexto las herramientas matemáticas en relación con el conjunto de fenómenos que las rodearon y del conjunto de situaciones físicas que se combinaron de manera única para darle origen.

Como lo sostienen diversos investigadores, antes mencionados, este tipo de estrategia ayudaría a los estudiantes a desarrollar un pensamiento crítico, ser un estímulo para la reflexión, mejorar la comprensión de la naturaleza de la ciencia, el trabajo científico y los procedimientos metodológicos relacionados.

Bibliografía

Acevedo Díaz, J. A. (2004). El papel de las analogías en la creatividad de los científicos: la teoría del campo electromagnético de Maxwell como caso paradigmático de la historia de las ciencias. Revista Eureka sobre enseñanza y divulgación de las ciencias. Vol. 1. Nro. 3. p. 188-205.

Bachelard, G. (1938). La Formation de l'esprit scientifique. Vrin. París.

Bell, E. T. (1995). Historia de las Matemáticas. Fondo de Cultura económica. México DF.

Fernandez, I., Gil, D., Carrascosa, J., Cachapuz, A. y Praia, J. (2002). Visiones deformadas de la ciencia transmitidas por la enseñanza. Revista Enseñanza de las Ciencias. Vol 20. Nro 3. pp 477 – 484.

Feynman, R. (1987). Física, Vol II (Electromagnetismo y materia). Addison-Wesley Iberoamericana.

García Doncel, M. (1994). Heinrich Hertz, Investigación y Ciencia. 208. pp. 72-79.

Gil Pérez, D., Guzmán Ozámiz, M. (1993). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática-Tendencias e Innovaciones. Organización de Estados Iberoamericanos. Para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular. Disponible en: Biblioteca Digital OEI, www.oei.es/oeivirt/ciencias.pdf .

Góngora, A. (2009). Desarrollo histórico del álgebra vectorial. Revista Unión. Número 19. pp 63-76.

Klein, M. J. (1972). Use and Abuse of Historical Teaching in Physics, en Brush S G y King A L. History in the Teaching of Physics. Hanover, University Press of New England.

Klein, F. (2006). Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX. Editorial Crítica. p 768.

Kuhn, T. S. (1959). The Essential Tension: Tradition and Innovation in Scientific Research. The Third University of Utah Research, Conference on the Identification of Scientific Talent. University of Utah Press. Salt Lake City. Reimpreso en The Essential Tension. pp 225-239. (University of Chicago Press: Chicago).

Kuhn, T. S. (1977). Concepts of Cause in the Development of Physics, en The Essential Tension. pp 21-30. University of Chicago. Press: Chicago.

Lombardi, O. (1997). La pertinencia de la Historia en la enseñanza de ciencias: argumentos y contraargumentos. Revista Enseñanza de las Ciencias. Vol 15. Nro 3. pp 342–349.

Mankiewicz, R. (2005). Historia de las Matemáticas, del cálculo al caos. Editorial Paidós. Colección Orígenes, en rústica. p 141-147.

Mason, S. (1986). Historia de las Ciencias. Vol 4. Alianza Editorial.

Marsden, J., Tromba, A. J. (2004). Cálculo Vectorial. Editorial Pearson Educación. Edición Número 5. p 696.

Martínez Sierra, G., Benoit Poirier, P. F. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol 2. Nro 2. pp 201-208. http://www.journal.lapen.org.mx .

Matthews, M. R. (1994). Historia, Filosofía y Enseñanza de las Ciencias: La aproximación actual. Enseñanza de las Ciencias. Vol 12. Nro 2. pp 255-277.

Simmons, G. F. (1993). Ecuaciones diferenciales, Con aplicaciones y notas históricas. Mc Graw-Hill. Segunda Edición. Impreso en España.

Wussing, H. (1998). Lecciones de historia de las matemáticas. Siglo XXI de España Editores. pp 226-229. p 345.

Viviana Angélica Costa. Licenciada en Matemática (1989), Universidad Nacional de La Plata (UNLP). Magister en Simulación Numérica y Control de la Universidad Nacional de Buenos Aires (2002). Profesor del Departamento de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNLP. Argentina .Coordinador de la Unidad de Investigación y Desarrollo IMApEC, Investigación en Metodologías Alternativas para la Enseñanza de las Ciencias **http://www.ing.unlp.edu.ar/fismat/imapec**. NIECyT. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología. **http://niecyt.exa.unicen.edu.ar/es/index.html** **vacosta@ing.unlp.edu.ar**

Marcelo Arlego. Doctor en Física UNLP. (2004). Post-doc: Braunschweig (Alemania) (2005-2007). Investigador del CONICET. Argentina. Temas de investigación: Física: Materia condensada, área de sistemas de electrones fuertemente correlacionados, en particular magnetismo cuántico en bajas dimensiones. Enseñanza de las ciencias: Temas de articulación matemática – ciencias. básicas en carreras de ingeniería. Enseñanza de conceptos de mecánica cuántica en escuela secundaria, mediante métodos no tradicionales. NIECyT - Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología. **http://niecyt.exa.unicen.edu.ar/es/index.html** **arlego@fisica.edu.ar**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 37-46

Matemáticas y neurociencias: una aproximación al desarrollo del pensamiento matemático desde una perspectiva biológica

Rafael Antonio Vargas Vargas

Fecha de recepción: 22/10/2012
Fecha de aceptación: 10/06/2013

Resumen	En el presente artículo se realiza una revisión sobre la investigación que desde las neurociencias se realiza para entender cómo se desarrolla el pensamiento matemático. Se muestra las dos formas de pensamiento matemático: uno antiguo y común a muchas especies animales: la estimación y otro propio de la especie humana y relacionado con el lenguaje: el pensamiento matemático formal. Ambas son fundamentales para un adecuado pensamiento matemático. Para su desarrollo se requiere de la educación, pero alteraciones en el desarrollo cerebral presentes en autismo y síndrome de Turner producen incapacidad para desarrollar un pensamiento matemático adecuado. **Palabras clave**: pensamiento matemático, cerebro, neurociencias
Abstract	In this article the author review about neurosciences research oriented to understand the developing of mathematical thinking. It shows two forms of mathematical thinking: the first one, ancient and present in many animal species: the ability to estimate and the second one, characteristic of the human being and linked to language: formal mathematical thinking. Both are essential for proper mathematical thinking and for this, is essential a normal development of brain structures and education. Alterations in brain development as in autism and Turner syndrome lead to an inability to develop mathematical thinking. **Keywords**: mathematical thinking, brain, neurosciences
Resumo	Este artigo é um comentário sobre a pesquisa da neurociência é feito para compreender como desenvolver o pensamento matemático. Ele mostra as duas formas de pensamento matemático: um velho comum para muitas espécies de animais: estimação e uma outra característica da espécie humana e relacionada com a linguagem: o pensamento matemático formal. Ambos são essenciais para o pensamento matemático adequado. É necessária para o desenvolvimento da educação, mas alterações no desenvolvimento cerebral presente no autismo e síndrome de Turner produzir incapacidade de desenvolver um raciocínio matemático adequado. **Palavras-chave:** pensamento matemático, cérebro, neurociências

1. Introducción

A lo largo de la historia de la humanidad el hombre ha empleado las matemáticas en su vida diaria. Múltiples hallazgos arqueológicos así lo confirman: murales babilónicos, papiros egipcios, textos griegos, latinos y árabes brindan información acerca del pensamiento matemático propio de cada cultura. Sin embargo, las matemáticas que empleamos hoy no son las mismas que las matemáticas de hace 2000 o 3000 años, pues han evolucionado y el uso de ellas se ha ampliado. Las matemáticas pasaron de ser un pasatiempo de unos cuantos privilegiados para ser una necesidad, que hace obligatorio su aprendizaje por parte de todos los miembros de la sociedad (Collette, 1993; Vegas José Manuel & Moreno Ricardo, 2006).

Desde el nacimiento de la sociedad los seres humanos han creado símbolos, reglas, procedimientos matemáticos, que fueron aumentando en complejidad y abstracción, y al aumentar en complejidad se han desarrollado subdisciplinas o áreas matemáticas especiales: álgebra, cálculo, trigonometría, topología, etnomatemáticas, etc. Todo este desarrollo ha significado el trabajo de muchas mentes que en conjunto han logrado aumentar el bagaje en matemáticas por parte de la humanidad. El aprender matemáticas requiere un esfuerzo mental que probablemente se ha traducido en cambios cerebrales en la especie humana. Y esos cambios estructurales cerebrales los ha heredado el individuo actual (Tzanakis et al., 2002, pp. 201-240). Aprender matemáticas implica un esfuerzo continuo que incluye procesos cerebrales simples como atención, memoria, o procesos mentales más complejos como la organización de ideas, la comparación, el análisis, el razonamiento, seguir pasos, cumplir reglas y realizar toma de decisiones (Sfard, 1991, pp. 1-36). Todos estos procesos son necesarios y fundamentales en el trabajo matemático y con ese esfuerzo se presentan cambios en la estructura y la función cerebral, que inducen la aparición y modificación de circuitos cerebrales (Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu, & Tsivkin, 1999, pp. 970-974; Park, Park, & Polk, 2012). Esto implica que con la evolución de las matemáticas el cerebro también ha evolucionado solo que todavía no es claro como (Frank, Everett, Fedorenko, & Gibson, 2008, pp. 819-824; Gordon, 2004, pp. 496-499; Otte, 2003, pp. 203-228).

Dado que hoy en día las matemáticas son tan comunes que forman parte de nuestro día a día, surgen muchas preguntas alrededor de las matemáticas y la función cerebral. Una pregunta frecuente es ¿los conceptos matemáticos son innatos o se aprenden? Si se aprenden, ¿cuando se aprenden?. ¿Qué zonas del cerebro están encargadas de la tarea matemática?. Estas son algunas preguntas que diversos investigadores del área de las neurociencias intentan resolver hoy en día y actualmente algunos investigadores han planteado algunas posibles respuestas. Esta información es útil en educación pues puede ser empleada para mejorar el interés y el desempeño de los individuos en estas áreas.

2. Matemáticas y evolución.

Algunos etólogos han mostrado como ciertas especies animales que incluyen aves y mamíferos pueden mostrar capacidades matemáticas básicas, especialmente en lo relacionado con estimaciones (Bongard & Nieder, 2010, 2277-2282; Cantlon, 2012, pp. 10725-10732; Gallistel & Gelman, 1992, pp. 43-74). Estos planteamientos indican que la capacidad de pensamiento matemático elemental tiene bases biológicas relacionadas con el desarrollo de sistemas somato-sensoriales complejos como la visión, la audición y el tacto. Estos procesos no son exclusivos de los seres humanos, pues están presentes en invertebrados y vertebrados. Experimentos en insectos, aves, y mamíferos han puesto en evidencia la capacidad de estos animales de realizar procedimientos matemáticos sencillos (Pahl, Si, & Zhang, 2013; Agrillo, Piffer, & Bisazza, 2010; Hunt, Low, & Burns, 2008, pp. 2373-2379).

3. Matemáticas y neurodesarrollo

En los niños de corta edad, lactantes, preescolares, hay evidencia de que tienen conceptos sobre estimaciones y operaciones matemáticas básicas (Wood & Spelke, 2005, pp. 23-39). Los niños que todavía no hablan pueden distinguir numéricamente entre unos pocos objetos, en forma similar a como lo hacen algunos animales como los chimpancés (Bongard & Nieder, 2010, pp. 2277-2282; Vallentin, Bongard, & Nieder, 2012, pp. 6621-6630). Esto hace pensar que el sentido de la cantidad es una característica innata que compartimos con los primates, mientras que el pensamiento matemático simbólico y verbalizado, es una característica adquirida, que aparece con el aprendizaje y es exclusivo del ser humano.

En niños de menos de un año se han realizado algunos estudios en donde se les muestra un objeto, usualmente un juguete, y luego se oculta tras una pantalla. Después se les muestra otro objeto y nuevamente se oculta detrás de la misma pantalla. Si al retirar la pantalla solo aparece un objeto, el niño permanece con la mirada sobre el objeto durante mucho más tiempo, como si estuviera sorprendido de un resultado no lógico, esperaría dos objetos y no uno. Esto se interpreta como una capacidad innata de pensamiento matemático.

Otro ejercicio muestra la relación entre razonamiento viso-espacial y matemático. Al niño se le presentan dos filas de objetos que tienen la misma cantidad de elementos, pero una es más larga porque hay más espacio entre los objetos. Cuando al niño se le pregunta en cual fila hay más objetos siempre responde que en la más larga. Esto se interpreta como una capacidad de estimación, el niño relaciona tamaño con cantidad (Lourenco & Longo, 2010, pp. 873-881). En ambos tipos de estudio la capacidad viso-espacial del niño es determinante, esta función está relacionada con actividad en la corteza occipital, área visual, y la corteza parietal.

En niños mayores, y en la medida que aprende la matemática simbólica, es importante el uso del cuerpo para realizar cálculos, especialmente el uso de los dedos para contar y realizar operaciones básicas como sumas y restas (Fischer & Brugger, 2011). En este caso las cortezas motora y sensorial son importantes: De igual forma las áreas de audición y lenguaje son fundamentales (Cantlon, 2012, pp. 10725-10732; Moeller, Martignon, Wessolowski, Engel, & Nuerk, 2011).

Aparentemente el cerebro emplea inicialmente el sentido viso-espacial de la cantidad, y luego lo combina con los símbolos matemáticos que aprende y que están relacionados con el lenguaje (De Smedt, Holloway, & Ansari, 2011, pp. 771-781). Cuando se realiza un cálculo, ambos sistemas comienzan a trabajar. Estos procesos se pueden realizar conjuntamente o en forma independiente. Los cálculos exactos dependen del lóbulo frontal izquierdo, lóbulo encargado del lenguaje y la asociación entre palabras. Las aproximaciones o estimaciones matemáticas emplean el hemisferio derecho, aunque también puede participar el hemisferio izquierdo.

4. Matemáticas y áreas cerebrales. ¿En dónde se realiza el procesamiento matemático?

Desde el siglo XIX se intentó relacionar el cerebro con el carácter y la personalidad de los individuos; en esta época surgió una disciplina que se denominó frenología, promovida por el médico alemán Franz Joseph Gall. Esta teoría plantea que las funciones cerebrales determinan la personalidad del individuo y se reflejarán en características craneofaciales: nariz, mentón, pómulos, forma del cráneo, etc. A pesar del impacto que tuvo en un primer momento pronto decayó pues no contaba con bases científicas que la soportaran, sin embargo esta teoría sirvió de base para plantear más adelante el estudio de las funciones cerebrales.

La comprensión de la función cerebral, especialmente de la corteza cerebral, se inició a finales del siglo XIX. Fue en 1861 cuando el médico francés Paul Pierre Broca presentó a la Sociedad Francesa de Antropología el caso de un paciente quien padecía un trastorno del lenguaje desde los 31 años de edad, el paciente falleció a los 50 años. Al realizar la autopsia el Dr Broca encontró una lesión en la circunvolución prefrontal inferior del hemisferio cerebral izquierdo. Este caso, más otros similares, permitieron que el Dr Broca llegara a la conclusión que existía una relación entre lenguaje y función cerebral, y que lesiones en el área prefrontal izquierda causaban una alteración del lenguaje. Con este trabajo se inicia la neurología moderna y en su honor se denomino a esta zona el área de Broca y a la patología desarrollada por el daño de esta zona en donde el paciente no podía producir un lenguaje claro, se le denominó afasia motora, de expresión, no fluente o de Broca. Más tarde empiezan a aparecer nuevos trabajos uno de ellos el del médico Alemán Karl Wernicke quien reporta casos en donde había un trastorno del lenguaje, más no en su producción, sino en su comprensión. El paciente podía hablar, y de hecho hablaba en forma fluida, más no comprendía lo que escuchaba. Se identificó el área comprometida como la zona superior del lóbulo temporo-parietal, por lo que a esta zona se le denominó área de Wernicke y al trastorno generado por lesión de esta zona se le denomino afasia sensorial, de comprensión, fluente o de Wernicke (figura 1). Con estos trabajos se identifican funciones cerebrales específicas de algunas zonas y se establecen las bases para el estudio del lenguaje desde el punto de vista de las neurociencias (Ardila, 2006, pp. 690-698).

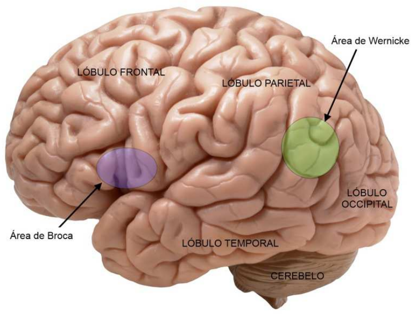


Figura 1. Cerebro humano y áreas corticales principales. Están identificados los lóbulos frontal, parietal, occipital y temporal, así como el cerebelo. El área de Broca está ubicada en el lóbulo frontal y el área de Wernicke en zonas del lóbulo parietal y temporal

En cuanto a las matemáticas y las zonas cerebrales encargadas de su procesamiento, los estudios científicos inician un poco más tarde, dado que en muchas ocasiones es difícil encontrar casos en donde el trastorno involucre solamente funciones matemáticas, sin que se mezcle funciones del lenguaje. Los primeros casos de trastornos en el procesamiento matemático se publican hacia 1908 y son Max Lewandowsky (1876-1916) y Ernst Stadelmann (1835-1921) quienes reportan el primer caso de alteración en la capacidad de cálculo. Sin embargo, el término acalculia fue acuñado en 1919 por el neurólogo sueco Salomon Henschen (1847-1930). A partir de este momento se inicia formalmente el estudio de alteraciones del procesamiento matemático y su comprensión (Kaufmann & von Aster, 2012, pp. 163-175). Trabajos posteriores aumentan el conocimiento acerca de este tipo de procesamiento. Piaget y sus trabajos en el desarrollo del niño permiten ir aclarando como es el proceso de aprendizaje en el niño, sin que se aclare que regiones participan. Con el avance de la tecnología y la incorporación de nuevos métodos diagnósticos que van desde el electroencefalograma, la tomografía axial computarizada y estudios radiológicos funcionales (TEP, fRMN) se han logrado acumular más y más datos que han permitido conocer más en detalle que regiones cerebrales están activas en el momento del procesamiento matemático tanto innato, como adquirido.

4.1 Cada hemisferio cerebral tiene funciones particulares

Las regiones cerebrales involucradas en el procesamiento matemático son:

- El lóbulo frontal en el cuál se destacan la corteza prefrontal, la corteza premotora y el área motora primaria.
- El lóbulo parietal, en él participan el área somatosensorial primaria y la corteza de asociación del lóbulo parietal.
- El lóbulo occipital en el cual están involucradas la corteza visual primaria y la corteza de asociación del lóbulo occipital.
- El lóbulo temporal que incluye la corteza auditiva primaria, la corteza superior temporal y la corteza de asociación del lóbulo temporal.

Estas áreas van madurando progresivamente, de tal manera que en el niño sólo algunas de estas áreas son activas y otras se irán activando con el desarrollo cerebral y con el estímulo que el individuo reciba del medio a través de la educación. Inicialmente maduran las áreas primarias, tanto motoras, como somatosensorial, visual y auditiva. El surco intraparietal superior es una de las áreas activas tanto en especies animales con capacidad matemática básica como en niños y adultos. Las áreas que siguen en maduración son las áreas secundarias motoras y sensoriales y finalmente las áreas de asociación. Algunas de las últimas zonas en madurar son la corteza prefrontal y la corteza temporal superior encargada de integrar información proveniente de diferentes modalidades sensoriales, y que terminan su maduración al final de la segunda década de la vida (figura 2) (Serra-Grabulosa, Adan, Pérez-Pàmies, Lachica, & Membrives, 2010, pp. 39-46).

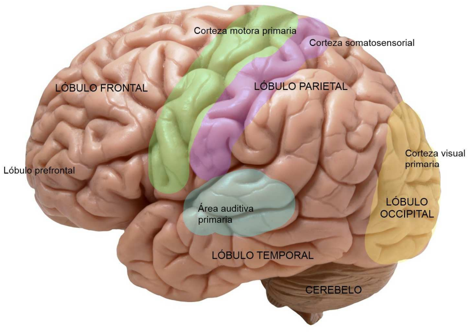


Figura 2. Áreas cerebrales y matemáticas. Algunas áreas implicadas en el procesamiento matemático incluyen las cortezas motoras, somatosensoriales, visuales y auditivas primarias

En el momento se plantea que el cerebro derecho tiene la capacidad para reconocer los símbolos numéricos y realizar aproximaciones o estimaciones matemáticas. El cerebro izquierdo tiene la capacidad de reconocer la escritura alfabética matemática, esto probablemente está relacionado con su función lingüística (Zarnhofer et al., 2012); desde el punto de vista de procedimientos tiene la capacidad de realizar cálculos exactos como la multiplicación (Price, Mazzocco, & Ansari, 2013, pp. 156-163).

Una lesión en una de estas áreas o trastornos en el desarrollo cerebral normal, pueden afectar la capacidad del individuo para aprender conceptos y procedimientos matemáticos. Este tipo de trastorno es difícil de detectar dada la complejidad del lenguaje y los procedimientos matemáticos, pero que de presentarse pueden afectar el desarrollo y el desempeño tanto individual, como social del individuo. En resumen, el procesamiento matemático depende de un desarrollo armónico de todas las áreas corticales que a su vez depende de un desarrollo psicomotor adecuado. Familia, ambiente, educación, recreación, son claves para garantizar el desarrollo y plasticidad cerebral necesarios para apropiarse de conceptos matemáticos.

5. **Trastornos del pensamiento matemático: Acalculia y discalculia.**

La acalculia y la discalculia son trastornos en los que el individuo tiene incapacidad total o parcial para realizar procesos matemáticos, esto puede estar relacionado con daños cerebrales. Acalculia y discalculia pueden ser incapacitantes pues muchas actividades cotidianas dependen de tener capacidades y habilidades matemáticas mínimas: por ejemplo para contar dinero, para entender los precios de los artículos y compararlos, para marcar números telefónicos, para leer y decir la hora, para pagar un artículo y revisar el cambio recibido, para tramitar cheques y consignaciones bancarias, para retirar dinero de cajeros electrónicos, para recordar fechas, para programar citas, etc.

Estos trastornos pueden clasificarse en primarios o secundarios. En los trastornos de tipo primario existe un trastorno en el pensamiento matemático, pero no está relacionado con una patología específica. En los trastornos secundarios la acalculia o discalculia es secundaria a una patología específica que lesiona áreas cerebrales y que pueden estar relacionadas con hemorragias cerebrales, tumores primarios o metastásicos en cerebro o infecciones cerebrales. Se ha observado que los pacientes con este tipo de problemas también presentan alteraciones en otras tres esferas: 1) La orientación en el espacio: dificultad para identificar derecha – izquierda, norte – sur. 2) Dificultad para el control de sus propias acciones y 3) problemas con la representación de su cuerpo, especialmente de manos y dedos. Se observa, por ejemplo, dificultad para nombrar los dedos, lo cual es clave para aprender a contar y otros autores además reportan dificultades adicionales en las áreas visuales, táctiles y psicomotrices (Castro-Cañizares, Estévez-Pérez, & Reigosa-Crespo, 2009, pp. 143-148 ; Butterworth, Varma, & Laurillard, 2011, pp. 1049-1053).

Durante el desarrollo la habilidad de conteo en niños depende de un desarrollo adecuado de estas tres esferas: orientación, representación corporal y autocontrol (Kaufmann, 2008, pp. 163-175). Una vez se logra esto se pasa a desarrollar habilidades más complejas y abstractas que se desarrollan en paralelo al desarrollo de otras regiones cerebrales: áreas de asociación, lóbulo frontal. Si este desarrollo es causa o consecuencia del aprendizaje matemático no es claro hasta el momento. Sin embargo, algunos estudios reportan trastornos de discalculia en pacientes con problemas al nacimiento, por ejemplo en recién nacidos prematuros se observa menor densidad de la sustancia gris en el lóbulo parietal izquierda, la cual es clave para la representación espacial. También pacientes con síndrome de Turner (Bruandet, Molko, Cohen, & Dehaene, 2004, pp. 288-298) y trisomia del cromosoma X presentan problemas al hacer estimaciones o aproximaciones y cálculo aritmético, aunque la lectura y la escritura de números, así como la lectura de tablas de multiplicar están preservadas. Estudios de RNM en estos pacientes evidencian menor densidad de sustancia gris en el surco interparietal izquierdo. Resultados similares se han reportado en pacientes con el síndrome de X frágil (síndrome relacionado con retraso mental y/o autismo) (Owen, Baumgartner, & Rivera, 2013).

El surco parietal está relacionado con procesamiento espacial y esto es clave en matemáticas pues la organización en columnas de los números para crear conceptos abstractos como unidades, decenas, centenas está relacionada con la posición del número en el espacio: de izquierda a derecha. Algunos pacientes muestran dificultad para leer cifras de más de un digito, como sucede en la representación de números decimales (submúltiplos) o unidades mayores a un digito (múltiplos).

En otras patologías también se han evidenciado trastornos en el procesamiento numérico, pero involucran la participación de otras áreas cerebrales. Pacientes con lesiones en ganglios basales (núcleo estriado) presentan pésimo rendimiento en problemas aritméticos de más de un paso. El núcleo caudado aparentemente se activa cuando un problema matemático es novedoso. Finalmente la ínsula anterior izquierda y la corteza cerebelosa aparentemente participan en el aprendizaje donde participan los dedos (contar) y en donde se manipulan objetos en tres dimensiones, lo cual habla de la posible existencia de una red motora digital en donde control de movimiento, relaciones espaciales y actividad matemática se mezclan. Muchas de estas funciones se han logrado identificar estudiando pacientes con lesiones cerebrales específicas. En el libro The Mathematical brain el Dr Brian Butterworth describe aspectos normales y alteraciones en el procesamiento matemático (Butterworth, 2000), el cual es fundamental para desempeñarnos en nuestras labores cotidianas.

5.1 Sinestesia y supercomputadoras humanas. Genios o enfermos.

Mientras que algunas personas tienen una capacidad matemática limitada para realizar procedimientos matemáticos, como sucede en la acalculia o la discalculia, otros por el contrario muestran habilidades excepcionales para realizar procedimientos matemáticos. En este grupo con habilidades excepcionales existe una gran variedad de personas, desde algunos con alteraciones neurológicas específicas como en el caso del autismo, hasta otros con características normales que con ejercicios y algoritmos han logrado capacidades de cómputo elevadas. En los casos de trastornos neurológicos, en el autismo por ejemplo, ciertos individuos tienen una capacidad de memorizar fechas, números, listas, sin que ello les represente un alto cociente intelectual. Otros casos en los que el individuo puede mostrar habilidades de cálculo sobresaliente es el de los individuos con sinestesia.

En estos pacientes existe una alteración sensorial en la cual un estimulo genera una percepción distinta a la habitual, así un estimulo auditivo puede generar sensaciones visuales (ruido = blanco; silencio = azul), o sensaciones táctiles pueden generar sensaciones auditivas u olfatorias. Estos trastornos tienen que ver con alteraciones en el desarrollo neuronal en épocas tempranas de la vida que impiden el desarrollo de una arquitectura cerebral normal, por lo tanto señales sensoriales se mezclan y pueden generar distorsiones. Aunque los pacientes tienen una capacidad memorística sobresaliente, otros procedimientos que implican análisis, pensamiento inductivo, pensamiento deductivo, que dependen de un desarrollo cortical adecuado no son posibles (Cohen Kadosh et al., 2005, pp. 1766-1773; Hubbard & Ramachandran, 2005, pp. 509-520).

Pero en condiciones normales algunos individuos han desarrollado capacidades memorísticas y de cálculo sobresalientes, con trabajo y esfuerzo, por lo que se les ha denominado computadoras humanas. Muchos de ellos adjudican esa capacidad a trabajo y ejercicios constantes asociado a desarrollo de algoritmos. Algunos relacionan números con objetos y personas, los visualizan y crean historias que les permite por ejemplo recordar cifras.

Algunos investigadores han realizado estudios funcionales de pacientes con alta capacidad de cálculo, los resultados muestran que estas personas tienen un aumento notable del flujo sanguíneo cerebral en áreas relacionadas con el procesamiento matemático, lo cual implica que se puede modular la actividad del cerebro con la práctica diaria. Actividades recreativas sensorio-motrices como el ejercicio, las actividades artísticas y el sueño podrían favorecer estos procesos.

6. Conclusión

Es necesario realizar más estudios para profundizar en los mecanismos que favorecen el desarrollo de capacidades matemáticas sin sacrificar otras funciones cerebrales. No obstante, la evidencia científica acumulada hasta el momento parece confirmar la máxima greco-latina del balance cuerpo-mente: ***mente sana en cuerpo sano*** *(mens sana in corpore sano)* y para ello la orientación de los educadores y la práctica de actividades físicas (práctica deportiva, danza), artísticas (música, pintura, escultura) e intelectuales desde épocas tempranas de la vida son fundamentales para garantizar el desarrollo adecuado de un pensamiento matemático.

Bibliografìa

Agrillo, C., Piffer, L., & Bisazza, A. (2010). *Large number discrimination by mosquitofish*. *PloS one*, *5*(12), e15232. doi:10.1371/journal.pone.0015232

Ardila, A. (2006). *[The origins of language: an analysis from the aphasia perspective]*. *Revista de neurologia*, *43*(11), 690-698.

Bongard, S., & Nieder, A. (2010). *Basic mathematical rules are encoded by primate prefrontal cortex neurons*. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *107*(5), 2277-2282. doi:10.1073/pnas.0909180107

Bruandet, M., Molko, N., Cohen, L., & Dehaene, S. (2004). *A cognitive characterization of dyscalculia in Turner syndrome*. *Neuropsychologia*, *42*(3), 288-298.

Butterworth, B. (2000). *The Mathematical Brain* (New Ed.). Papermac.

Butterworth, B., Varma, S., & Laurillard, D. (2011). *Dyscalculia: from brain to education*. *Science (New York, N.Y.)*, *332*(6033), 1049-1053. doi:10.1126/science.1201536

Cantlon, J. F. (2012). *Math, monkeys, and the developing brain*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 109 (Supplement_1), 10725-10732. doi: 10.1073/pnas.1201893109

Castro-Cañizares, D., Estévez-Pérez, N., & Reigosa-Crespo, V. (2009). *[Contemporary cognitive theories about developmental dyscalculia]*. *Revista de neurologia*, *49*(3), 143-148.

Cohen Kadosh, R., Sagiv, N., Linden, D. E. J., Robertson, L. C., Elinger, G., & Henik, A. (2005). *When blue is larger than red: colors influence numerical cognition in synesthesia*. Journal of cognitive neuroscience, *17*(11), 1766-1773. doi:10.1162/089892905774589181

Collette, J.-P. (1993). *Historia de las matemáticas*. Siglo XXI de España Editores.

De Smedt, B., Holloway, I. D., & Ansari, D. (2011). *Effects of problem size and arithmetic operation on brain activation during calculation in children with varying levels of arithmetical fluency*. NeuroImage, *57*(3), 771-781. doi:10.1016/j.neuroimage.2010.12.037

Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., & Tsivkin, S. (1999). *Sources of Mathematical Thinking: Behavioral and Brain-Imaging Evidence*. Science, *284*(5416), 970-974. doi:10.1126/science.284.5416.970

Fischer, M. H., & Brugger, P. (2011). *When Digits Help Digits: Spatial-Numerical Associations Point to Finger Counting as Prime Example of Embodied Cognition*. Frontiers in Psychology, *2*. doi:10.3389/fpsyg.2011.00260

Frank, M. C., Everett, D. L., Fedorenko, E., & Gibson, E. (2008). *Number as a cognitive technology: evidence from Pirahã language and cognition.* Cognition, *108*(3), 819-824. doi:10.1016/j.cognition.2008.04.007

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). *Preverbal and verbal counting and computation*. Cognition, *44*(1–2), 43-74. doi:10.1016/0010-0277(92)90050-R

Gordon, P. (2004). *Numerical cognition without words: evidence from Amazonia*. Science *(New York, N.Y.)*, *306*(5695), 496-499. doi:10.1126/science.1094492

Hubbard, E. M., & Ramachandran, V. S. (2005). *Neurocognitive mechanisms of synesthesia*. Neuron, *48*(3), 509-520. doi:10.1016/j.neuron.2005.10.012

Hunt, S., Low, J., & Burns, K. C. (2008). *Adaptive numerical competency in a food-hoarding songbird*. Proceedings Biological sciences / The Royal Society, *275*(1649), 2373-2379. doi:10.1098/rspb.2008.0702

Kaufmann, L. (2008). *Dyscalculia: neuroscience and education.* Educational research; a review for teachers and all concerned with progress in education, *50*(2), 163-175. doi:10.1080/00131880802082658

Kaufmann, L., & von Aster, M. (2012). *The Diagnosis and Management of Dyscalculia*. Deutsches Ärzteblatt International, *109*(45), 767-778. doi:10.3238/arztebl.2012.0767

Lourenco, S. F., & Longo, M. R. (2010). *General Magnitude Representation in Human Infants*. Psychological Science, *21*(6), 873-881. doi:10.1177/0956797610370158

Moeller, K., Martignon, L., Wessolowski, S., Engel, J., & Nuerk, H.-C. (2011). *Effects of finger counting on numerical development - the opposing views of neurocognition and mathematics education*. Frontiers in psychology, *2*, 328. doi:10.3389/fpsyg.2011.00328

Otte, M. (2003). *Complementarity, sets and numbers*. Educational Studies in Mathematics, *53*(3), 203-228. doi:10.1023/A:1026001332585

Owen, E. R., Baumgartner, H. A., & Rivera, S. M. (2013). *Using infrared eye-tracking to explore ordinal numerical processing in toddlers with Fragile X Syndrome*. Journal of neurodevelopmental disorders, *5*(1), 1. doi:10.1186/1866-1955-5-1

Pahl, M., Si, A., & Zhang, S. (2013). *Numerical cognition in bees and other insects*. Frontiers in psychology, *4*, 162. doi:10.3389/fpsyg.2013.00162

Park, J., Park, D. C., & Polk, T. A. (2012). *Parietal Functional Connectivity in Numerical Cognition.* Cerebral Cortex. doi:10.1093/cercor/bhs193

Price, G. R., Mazzocco, M. M. M., & Ansari, D. (2013). *Why mental arithmetic counts: brain activation during single digit arithmetic predicts high school math scores*. The Journal of neuroscience, *33*(1), 156-163. doi:10.1523/JNEUROSCI.2936-12.2013

Rotzer, S., Loenneker, T., Kucian, K., Martin, E., Klaver, P., & von Aster, M. (2009). *Dysfunctional neural network of spatial working memory contributes to developmental dyscalculia.* Neuropsychologia, *47*(13), 2859-2865. doi:10.1016/j.neuropsychologia.2009.06.009

Serra-Grabulosa, J. M., Adan, A., Pérez-Pàmies, M., Lachica, J., & Membrives, S. (2010). *[Neural bases of numerical processing and calculation]*. Revista de neurologia, *50*(1), 39-46.

Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics, *22*(1), 1-36. doi:10.1007/BF00302715

Tzanakis, C., Arcavi, A., Sa, C. C. de, Isoda, M., Lit, C.-K., Niss, M., … Siu, M.-K. (2002). *Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey*. En J. Fauvel & J. V. Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 201-240). Springer Netherlands. Recuperado a partir de http://link.springer.com/chapter/10.1007/0-306-47220-1_7

Vallentin, D., Bongard, S., & Nieder, A. (2012). *Numerical Rule Coding in the Prefrontal, Premotor, and Posterior Parietal Cortices of Macaques.* The Journal of Neuroscience, *32*(19), 6621-6630. doi:10.1523/JNEUROSCI.5071-11.2012

Vegas José Manuel, & Moreno Ricardo. (2006). *Una historia de las matemáticas para jóvenes. Desde la Antigüedad al Renacimiento.* Recuperado a partir de http://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=327023

Von Aster, M. G., & Shalev, R. S. (2007). *Number development and developmental dyscalculia*. Developmental medicine and child neurology, *49*(11), 868-873. doi:10.1111/j.1469-8749.2007.00868.x

Wood, J. N., & Spelke, E. S. (2005). *Chronometric studies of numerical cognition in five-month-old infants*. Cognition, *97*(1), 23-39. doi:10.1016/j.cognition.2004.06.007

Zarnhofer, S., Braunstein, V., Ebner, F., Koschutnig, K., Neuper, C., Reishofer, G., & Ischebeck, A. (2012). *The Influence of verbalization on the pattern of cortical activation during mental arithmetic*. Behavioral and brain functions*: BBF*, *8*, 13. doi:10.1186/1744-9081-8-13

Rafael Antonio Vargas Vargas Médico-cirujano e Ingeniero Electrónico. Magister en Fisiología y Doctor en Ciencias Biomédicas. Actualmente profesor asistente del Departamento de Ciencias Fisiológicas de la Pontificia Universidad Javeriana, sede Bogotá. Realiza actividades académicas y de investigación relacionadas con la fisiología y la farmacología.
Contacto: rvargas3200@hotmail.com; rafael.vargas@javeriana.edu.co

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 47-65

Jogos, interações sociais e aprendizado

Neiva Ignês Grando, Andréa Damasceno Raupp

Fecha de recepción: 5/08/2011
Fecha de aceptación: 8/07/2013

Resumen	El juego forma parte de nuestro contexto social y ocupa cada vez más espacio en la escuela como una de las tendencias integradas en las propuestas pedagógicas. En razón del potencial de esa tendencia, se buscan respuestas para la cuestión: ¿Qué modalidades de interacción se pueden proporcionar a través del juego para fomentar el aprendizaje y el desarrollo de los estudiantes? Se presenta parte de una investigación y tiene como objetivo hacer un análisis de las interacciones en situaciones de juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Ya que se considera el proceso interactivo, mediado por el lenguaje, como determinante para el aprendizaje, el análisis fue realizado basado en la teoría histórico-cultural, que permite identificar que las distintas situaciones proporcionan el aprendizaje y el desarrollo de los estudiantes. **Palabras clave**: Educación matemática. Juegos. Interacción social.
Abstract	Games play an important role in our social context, and are occupying more and more social space as one of the trends to be incorporated into the pedagogical proposals. Due to the potential of this trend, one looks for answers to this questioning: What interaction modes can be provided by games in order to promote the students' learning and development? This text presents part of the one research with the aim to analyze the interactions in game situations in the process of math teaching and learning. Considering the educational process, mediated by language as a learning determiner, the analysis has been conducted on the grounds of historic-cultural theory, by allowing to verify that the different situations provided students with learning and development. **Keywords**: Math Education. Games. Interaction social.
Resumo	O jogo faz parte do nosso contexto cultural e vem ocupando cada vez mais o espaço escolar como uma das tendências a serem incorporadas nas propostas pedagógicas. Em razão do potencial dessa tendência, procuram-se respostas para o seguinte questionamento: Que modalidades de interação podem ser proporcionadas pelo jogo para promover o aprendizado e o desenvolvimento dos estudantes? Este texto apresenta parte de uma pesquisa, tendo por objetivo analisar as interações em situações de jogo no processo ensino-aprendizagem de matemática. Considerando o processo interativo, mediado pela linguagem, como determinante para o aprendizado, a análise foi realizada com base na teoria histórico-cultural, permitindo identificar que as diferentes situações proporcionaram o aprendizado e o desenvolvimento dos estudantes. **Palavras-chave:** Educação Matemática. Jogos. Interação social.

1. Introdução

Tem sido possível perceber mudanças comuns no comportamento (hábitos e atitudes) das crianças que ingressam na escola pública ou privada. Esta observação é compreensível se considerado o contexto social e cultural em que crescem as crianças. Sobre esse aspecto, Arce afirma "que não existe um desenvolvimento da infância universal, único e natural. O desenvolvimento infantil é passível de mudanças históricas. As crianças de hoje não se desenvolvem da mesma forma que as crianças do século XVIII se desenvolveram." (2004, p. 17). Como exemplo dessa mudança citamos a necessidade de os estudantes se movimentarem, bem como de falarem a todo o momento, não conseguindo permanecer sentados passivamente por muito tempo apenas ouvindo o professor explicar a matéria. Tal percepção é destacada por Bonilla, que registra este perfil atual de estudantes, os quais não gostam "da monotonia, da repetitividade, e que, em função disso, as aulas precisam ser criativas, divertidas, interessantes, com os professores conversando, interagindo." (2005, p. 77). Certamente, isso não significa chegar ao extremo de fazer da sala de aula "um palco de circo", afinal, a apropriação dos significados dos conceitos deve ser a prioridade na escola.

O diálogo estabelecido entre os sujeitos envolvidos no processo ensino-aprendizagem proporciona uma relação de um com o outro, jamais sobre o outro. Assim se produz uma relação de "empatia" (Freire, 2001, p. 68), a qual permite ao professor aproximar-se do modo de pensar do estudante e, então, planejar atividades que o auxiliem a se apropriar do conhecimento matemático.

A escolha pela atividade com jogos como objeto de pesquisa, dentre outras, conduziu a que se retomassem alguns conhecimentos que justificaram a sua inclusão como parte da proposta metodológica. Um desses conhecimentos refere-se a algumas tendências pedagógicas para o ensino da matemática no Brasil apresentadas por Fiorentini (1995). Neste estudo se verificou que o uso de jogos na educação brasileira não é recente; na verdade, foi inserido em concordância com os pressupostos teóricos e metodológicos da tendência empírico-ativista, a partir da década de 1920.

Para Fiorentini e Miorim, "antes de optar por um material ou um jogo, devemos refletir sobre a nossa proposta político-pedagógica; sobre o papel histórico da escola, sobre o tipo de aluno que queremos formar, sobre qual matemática acreditamos ser importante para esse aluno." (1990, p. 10).

A concepção frequentemente veiculada em escolas e na formação continuada com relação ao jogo apresenta características que normalmente são os atrativos principais para muitos professores (Fiorentini; Miorim, 1990, p. 5) tornarem a aula lúdica, descontraída, mais agradável. O prejuízo para os estudantes é o professor considerar apenas esses aspectos ao utilizar o jogo em sala de aula para promover o aprendizado. Assim, conforme a crítica feita por Damazio, poderia haver "a troca do fundamental pelo secundário, o agradável em detrimento da apropriação do conceito." (2008, p. 18).

Percebendo-se a necessidade de ampliar o conhecimento sobre o processo ensino-aprendizagem, este texto apresenta o jogo como um recurso a ser utilizado na educação matemática, com o foco na análise das interações.

2. A teoria histórico-cultural e a atividade com jogos

Ao longo da história educacional, o trabalho docente vem sendo, norteado por tendências que influenciam a prática pedagógica. Na área de educação matemática, uma dessas tendências é o uso de jogos em sala de aula. Este tema vem sendo divulgado pela mídia, principalmente por revistas ligadas à educação e por jornais[1], que, entre outros assuntos, abordam a questão da educação. Contudo, nem sempre sua utilização está fundamentada em pressupostos teóricos que possibilitem extrair deles o que têm de melhor para o aprendizado. O jogo em sala de aula pressupõe momentos de troca de informações e conhecimentos entre os participantes, e é por meio da linguagem que essas trocas se estabelecem. Assim, pelo fato de a teoria histórico-cultural abordar as interações sociais e o papel da linguagem como vitais para o aprendizado e o desenvolvimento das pessoas, possibilita encontrar respostas à compreensão das interações e da linguagem utilizada durante o jogo.

A teoria histórico-cultural apresenta significativas contribuições para a educação, como o conceito de zona de desenvolvimento proximal. Com tal conceito, Vigotski (2007) contribui para a compreensão do processo interno, individual, do ser humano sobre as necessidades para o desenvolvimento como sendo algo que ocorre na relação intra e interpsicológica.

Durante muito tempo se considerou mais relevante aquilo que a criança já fazia por si mesma do que aquilo que ela conseguia fazer com a ajuda de outros. Tal constatação levou Vigotski a considerar dois níveis de desenvolvimento: o desenvolvimento real e o desenvolvimento potencial. Com esses dois níveis seria possível estabelecer relações entre o processo já efetivado e a capacidade de aprendizado. O primeiro nível, do desenvolvimento real, refere-se àquilo que a criança consegue fazer sozinha, utilizando-se de conceitos elaborados, de ciclos completados. O segundo nível de desenvolvimento refere-se àquilo que a criança consegue realizar com a orientação de outra pessoa, por meio de pistas ou colaboração. Com essas duas referências, esse autor conceituou zona de desenvolvimento proximal como

> [...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (2007, p. 97).

Para Vigotski, "o bom aprendizado é somente aquele que se adianta ao desenvolvimento" (2007, p. 102), pois é o aprendizado que desperta na pessoa vários processos internos, num momento de interação social com outros em seu ambiente, os quais serão internalizados tornando-se "parte das aquisições do desenvolvimento independente da criança." (2007, p. 103). Para compreender o que vem a ser essa interação social recorre-se a Palangana: "Vygotsky [...], quando fala em interação social está se referindo a ações partilhadas, ou seja, a processos cognitivos realizados não por um único sujeito e sim por vários." (2001, p. 156). É por meio dessas interações que o ser humano evolui nas funções psicológicas, pois

[1] Por exemplo: *Revista do Professor*, março 2000; revista *Nova Escola*, edições de agosto/2006 e setembro/2006; jornal *Zero Hora*, 4 maio 2008 e 7 maio 2008.

no início de sua vida essas funções, chamadas "elementares", não exigem a compreensão da ação, sendo

> [...] construídas basicamente por determinantes biológicos, por processos reativos. Já as estruturas seguintes (ou superiores), as formas de comportamento mais complexas, emergem todas no processo de desenvolvimento cultural. [...] na constante mediação com adultos ou pessoas mais experientes, os processos psicológicos mais complexos, típicos do homem, começam a tomar forma. Assim, é na e pela interação social que as funções cognitivas do mesmo são elaboradas. (Palangana, 2001, p. 135).

Para que as interações sejam favoráveis ao aprendizado e ao desenvolvimento deve-se considerar a natureza da relação entre parceiros. Segundo pesquisa realizada por Tudge (2002, p. 163) com o objetivo de distinguir entre competência e confiança, nem sempre a consequência da interação é o desenvolvimento. Os resultados desta investigação mostram como possível consequência uma regressão, na medida em que as crianças mais competentes mostram-se menos confiantes em seus pontos de vista. Além disso, segundo o autor,

> não há garantias de que o significado que é criado quando dois parceiros interagem corresponda a um nível superior, mesmo se tratando de uma criança mais competente do que a outra, e que esteja efetivamente fornecendo informações dentro da zona de desenvolvimento proximal do parceiro menos competente. Em vez de aceitar de maneira casual os benefícios cognitivos de associar uma criança a um parceiro mais competente, deveríamos prestar mais atenção ao próprio processo de interação. (p. 165)

Diante dessa afirmação, evidencia-se a importância de o professor acompanhar os processos interativos em sala de aula a fim de intervir, se necessário, para que ocorra o aprendizado.

Ao se considerar a teoria histórico-cultural como suporte à prática educacional, outros conceitos são fundamentais, tais como os de interação, desenvolvimento e aprendizado. Vygotski (2005, p. 145) enfatiza a importância do papel da linguagem e das interações sociais do sujeito com o meio para a apropriação de significados. A intervenção do adulto e as interações com os demais colegas, mediadas pela linguagem, serão determinantes no processo de aprendizado e desenvolvimento.

A escola é um local de convivência social por excelência; portanto, é um ambiente propício às interações sociais, de fundamental importância no processo de formação de conceitos científicos. Explica Vygotski:

> Os anos escolares são, no todo, o período ótimo para o aprendizado de operações que exigem consciência e controle deliberado; o aprendizado dessas operações favorece enormemente o desenvolvimento das funções psicológicas superiores enquanto ainda estão em fase de amadurecimento. Isso se aplica também ao desenvolvimento dos conceitos científicos que o aprendizado escolar apresenta à criança. (2005, p. 131).

No espaço escolar, há o confronto diário de pensamentos, realidades e vivências diferentes. A comunicação que surge durante as interações privilegia não apenas a troca das experiências trazidas para a escola, mas também aquelas vividas na própria escola. Dessa forma, proporciona a socialização do conhecimento que cada um possui, ou em processo de elaboração, que abre horizontes para novas aprendizagens. O jogo em duplas ou em grupos maiores permite essa socialização e leva à valorização da vivência que cada um possui na medida em que há a discussão de ideias diferentes em busca de uma comum. Ainda conta com a intervenção do professor, solicitada com naturalidade para auxiliar no confronto das ideias. Com relação ao exposto, Palangana vê este tipo de prática como desafio:

> Do ponto de vista da instrução sistemática, esse é o grande desafio que se coloca a uma prática pedagógica pretensamente interacionista: discutir as interações criança/adulto e criança/criança com base em dados empíricos contextualizados historicamente. O desenvolvimento não se produz, apenas, por uma soma harmoniosa de experiências, mas acima de tudo através de vivências em matrizes sociais diferentes, cujos interesses e valores são, frequentemente, contraditórios. (2001, p. 157).

Ao trazer para a sala de aula o jogo como proposta de trabalho, promovem-se a interação e a comunicação entre os estudantes, que são desafiados a resolver um problema.

Traçando um paralelo entre o jogo e resolução de um problema, identifica-se uma dificuldade bastante comum: na interpretação das regras pode haver dificuldade de compreensão do que é permitido fazer, da mesma forma que na leitura de um problema, de identificação do que deve ser feito.

Para que se compreenda a situação de um problema, as regras de um jogo ou, até mesmo, uma ordem de exercício muitas vezes é necessária a leitura em voz alta por um colega ou pelo professor, que dá a devida entonação ao texto. Então, ouvindo com atenção, o estudante acaba por traduzi-lo do seu modo. No caso, a fala é uma necessidade para internalizar o que foi lido e resolver o problema, ou, no jogo, iniciar a partida, muitas vezes questionando se o seu entendimento está correto.

Na teoria histórico-cultural encontra-se o suporte para a compreensão de tal situação. Ocorre que a fala possui funções que vão surgindo e se modificando ao longo do desenvolvimento humano, a saber: função organizadora; função planejadora e função sintetizadora (Vigotski, 2007, p. 17). Contudo, essas funções não ocorrem com tempo inicial e final, como se, ao surgir uma nova função, a outra desaparecesse. No exemplo anterior pode-se relacionar o fato de o professor ler em voz alta em razão da necessidade de organizar as palavras no pensamento; assim, ao repetir do seu modo, o aluno vislumbra a possibilidade de planejar e agir.

É importante que o professor tenha essa compreensão e permita aos educandos a expressão da oralidade durante o jogo, além de estimular a argumentação para que o pensamento possa se manifestar pela fala, produzindo o que Vygotski (2005, p. 58) chama de "pensamento-verbal". Entende-se que "o pensamento verbal, entretanto, não abrange todas as formas de pensamento ou de fala." (p. 58). As estruturas da fala tornam-se estruturas básicas do pensamento mediante um lento acúmulo de experiências, determinado por um processo histórico-cultural. O pensamento, por sua vez, possui estrutura própria, visto que seu fluxo não é acompanhado por uma manifestação simultânea da fala; logo, a transição do pensamento para a fala não é fácil. (p. 185). Por isso, há a necessidade de se recorrer ao outro na tentativa de encontrar a melhor forma de explicar a resposta.

Para Grando (2004, p. 33), possibilitar que o jogo aconteça entre duplas favorece a interação e a cooperação entre os pares, podendo auxiliar no processo de aprendizagem na medida em que é necessário expressar uma ideia. Nas palavras de Vigotski, "o aprendizado desperta vários processos internos de desenvolvimento, que são capazes de operar somente quando a criança interage com pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com seus companheiros." (2007, p. 103). Ao jogar, faz-se necessário argumentar sobre a melhor jogada, fazer previsões e elaborar procedimentos, o que proporciona o exercício de articulação das palavras que expressem o pensamento, auxiliando no domínio da linguagem e favorecendo o crescimento intelectual. De acordo com Vygotski, "o desenvolvimento do pensamento é determinado pela linguagem, isto é, pelos instrumentos lingüísticos do pensamento e pela experiência sócio-cultural da criança." (2005, p. 62).

Quando ocorre a fala entre os parceiros, ambos têm um objetivo em comum: preparar a melhor jogada. Para isso, buscam, pela palavra, apresentar suas ideias e trocar opiniões. O estudante que demonstrar maior domínio na linguagem e capacidade de argumentação poderá ter sua ideia acatada mesmo que não seja a melhor possibilidade. Ao observar o colega, é de se esperar que numa situação futura de jogo aquele que antes não conseguia se expressar o faça de forma semelhante à do parceiro que serviu de suporte para um novo aprendizado. De acordo com Vigotski, "o aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças penetram na vida intelectual daqueles que as cercam." (2007, p. 100).

Interações entre estudantes de diferentes níveis de desenvolvimento ou com o próprio professor estimulam a ampliação de significados, que podem permitir avançar no conhecimento e, assim, despertar processos internos que promoverão o desenvolvimento.

3. Analisando as interações em situação de jogo

A pesquisa envolveu turmas de quarta a sexta série do ensino fundamental de oito anos, tendo, em média, trinta estudantes cada, a maioria com idade entre 9 e 12 anos. O material utilizado para análise foram filmagens feitas em 2002 e 2004, com 4ª e 6ª série, em 2006, com 4ª série e em 2008, com 4ª e 5ª série, de uma escola da rede particular de ensino de Passo Fundo/RS. Utilizou-se a memória da professora pesquisadora para compor os episódios[2], juntamente com as gravações, para obter, por meio da observação dos diálogos, do comportamento, das atitudes, informações para a análise das interações e processos desencadeados durante as situações de jogos.

O material produzido em vídeo sofreu alguns recortes para efeitos de uma análise mais detalhada, que fosse significativa para a pesquisa, destacando-se situações que abrangessem ações cognitivas, comunicativas e gestuais. Este tipo de abordagem metodológica é referida por Góes como "análise microgenética", que, de modo geral se trata "de uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação" (2000, p. 9), frequentemente associada ao uso de gravações em vídeo para um trabalho posterior de transcrição.

---

[2] Segundo Carvalho (apud Mortimer, 2000, p. 265), um episódio do ensino se constitui num "conjunto de atividades e discussões que tem por objetivo a aprendizagem de um determinado conceito ou aspecto importante do conceito por parte significativa dos alunos".

Para construir os episódios de ensino utilizou-se como critério o fato de cada jogo ter sido utilizado pela primeira vez nas turmas. Em cada episódio registraram-se uma ou mais sequências, tendo como critério a interação entre os estudantes e estudantes e professora que pudesse identificar situações de aprendizado e desenvolvimento. Dessa forma, a análise caracteriza-se por ser microgenética, em razão do olhar minucioso de processos interativos. Segundo Góes, micro "por ser orientada para minúcias indiciais [...]. É genética no sentido de ser histórica, por focalizar o movimento durante processos e relacionar condições passadas e presentes". (2000, p. 15).

No início de cada episódio faz-se referência aos conceitos já desenvolvidos com os estudantes e apresentam-se, conforme constam no plano de aula da professora, o jogo utilizado, o objetivo da aula, a disposição da turma, o material utilizado, o objetivo do jogo e as regras propostas; em seguida, apresentam-se apenas os trechos que contem turnos[3] (falas) relevantes para a análise do episódio vivenciados durante o jogo.

Em todos os jogos foram desenvolvidos conteúdos formais da disciplina de matemática, como expressões numéricas, equivalência de frações, potenciação, radiciação, dobro, metade, inequações e cálculo mental. Além desses, outros aspectos da formação do estudante fizeram parte do processo ensino-aprendizagem, tais como superação do medo, atitudes de confiança, de cooperação, de trabalho em equipe, de honestidade, de humildade e respeito a regras.

Neste artigo, optou-se por apresentar dois episódios, que aconteceram no ano de 2008 com uma turma de quarta série, formada por 28 estudantes, com uma média de idade de 10 anos.

3.1. Episódio 1. Jogo do Pontinho

Tinha-se a intenção de desenvolver o trabalho com cálculo mental e incentivar nos estudantes o pensamento estratégico, analisando e refletindo sobre as ações necessárias para resolver um problema, com o foco na interação social.

As informações referentes ao planejamento seguem como consta no plano de ensino:

a) Objetivo da aula: exercitar o cálculo mental; incentivar a análise de jogadas (atenção e percepção); promover a troca de informações por meio de interações.
b) Disposição da turma: dois grandes grupos.
c) Local: Sala de aula
d) Material: caneta para quadro branco e um painel (1m x 0,6m) em PVC com números distribuídos em cinco colunas e quatro linhas, com pontos no entorno dos números para serem ligados. A marcação dos pontos era feita nas margens laterais do painel. (Figura 1).
e) Objetivo do jogo: Cercar os números para somar o maior número de pontos possível.
f) Regras: Cada representante da equipe tem direito a traçar apenas um segmento por vez. Se acontecer de fechar duas casas com apenas um segmento, o grupo

[3] Os turnos serão numerados para facilitar a localização dos trechos do diálogo no texto durante a análise.

recebe as duas pontuações. Só pode permanecer na frente do painel um componente da equipe, que deverá marcar o que o grupo decidir. (Escola..., 2008).

Figura 1. Fotografia do painel do jogo

Na sua vez, um componente da equipe saía do seu lugar, dirigia-se até o painel e fazia sua marcação. De início, os estudantes apenas tentavam cercar os números de seu interesse, sem a preocupação de elaborar alguma estratégia para marcar ou impedir que o outro grupo o fizesse. Apesar de não ser este o objetivo, este momento, do jogo pelo jogo, teve importância. Segundo Grando,

> o jogo pelo jogo também tem seu valor pedagógico, visto que os alunos passam a se relacionar com os companheiros (interação social), aprendem a seguir regras e a observar regularidades, desenvolvem sua capacidade de concentração e observação, e aprendem a lidar com o novo, com o risco e com o ganhar e o perder. (2004, p. 54).

Quando perceberam que uma jogada interferia na outra, ou seja, que ao marcar poderiam dar a possibilidade ao outro grupo de cercar um ponto, começou a tensão do jogo. Num primeiro momento, nenhum dos dois grupos tentou se organizar como grupo, ou seja, agiam cada um por si, querendo dizer ao colega que estava encarregado de jogar qual seria a melhor marcação. Muitas vozes se pronunciavam juntas, sendo visível a necessidade de comunicação, porém eles ainda não haviam percebido outra forma de fazê-lo a não ser falando em voz alta. Às vezes, mesmo um colega que estava ao lado de outro da mesma equipe não conseguia entender o que estava sendo planejado em razão da euforia dos participantes. Como já havia sido previsto, em razão de experiências anteriores, entendeu-se que a agitação e o barulho faziam parte do processo, como é destacado por Smole, Diniz e Milani:

> [...] em se tratando de barulho, devemos lembrar que ele é inerente ao ato de jogar. A diferença é que, no caso do jogo, a conversa será em torno das jogadas, da vibração por uma boa decisão ou mesmo pela vitória e sobre o conhecimento que se desenvolve enquanto eles jogam. Costumamos dizer duas coisas sobre isso: a primeira é que esse é um barulho produtivo, uma vez que favorece as aprendizagens esperadas e a maior interação entre eles. A segunda é que jogar sem barulho é impossível, pois um jogo silencioso perderia o brilho da intensidade e do envolvimento dos jogadores. Portanto, o melhor é conviver com esse fato, parando para discutir apenas quando houver alguma possibilidade de tumulto, mas nem nesse caso deve haver alarde. (2007, p. 16).

A comunicação entre o jogador representante e seu próprio grupo foi bastante difícil, pois nem sempre eles conseguiam se expressar de maneira a se fazerem entender pelo jogador. O fato de haver números iguais espalhados pelo painel obrigava os colegas do grupo a indicar qual deles deveria ser marcado. Então, encontrando dificuldades no uso da linguagem oral, eles recorriam aos gestos.

Júlio[4] foi o representante do grupo 1, cuja decisão era marcar o número 12 no painel. Contudo, como havia quatro números 12, um em cada linha, em posições diferentes, Júlio não sabia qual deles marcar. A sequência a seguir ilustra a situação:

<u>Sequência 1</u>

1. Júlio: Mas qual doze?
2. Leo: Naquele ali, ó! (apontando de longe para o painel)
3. Roger: Perto do nove! Mais pra lá. (gesticulando para os lados)
4. Júlio: Esse aqui? (apontando para uma das quatro possibilidades)

(Dois componentes não se contiveram, saíram dos seus lugares e se aproximaram do jogador para indicar qual era o local da marcação).

5. Professora: Não. Não vale! Só pode ficar o jogador na frente.

Os colegas voltaram para o grupo e tentaram novamente explicar, mas não conseguiram fazer isso com o uso de palavras que orientassem o colega, como para direita, esquerda, para cima ou para baixo. Recorriam aos gestos não por não saberem o que é direita ou esquerda, mas pela dificuldade de utilizarem tais conceitos naquela situação específica. Alguns colegas ainda tentavam indicar com o uso das palavras “direita” e “esquerda”, mas se atrapalhavam no momento de marcar, pois a sua direita, quando se viravam de frente para o colega não coincidia com a direita de frente para o painel. Segundo Vygotski,

> a maior dificuldade é a aplicação de um conceito, finalmente apreendido e formulado a um nível mais abstrato, a novas situações concretas que devem ser vistas nesses mesmos termos abstratos – um tipo de transferência que em geral só é dominado no final da adolescência. (2005, p. 100).

Nesta fase do jogo os jogadores da mesma equipe começaram a interagir entre si, no sentido de buscar a melhor forma de jogar. Então, aumentou a tensão, pois as opções para marcar começaram a diminuir e uma jogada mal feita poderia trazer prejuízo ao grupo.

Percebendo isso, o colega que iria representar sua equipe reunia-se antes com o grupo a fim de decidirem juntos a melhor jogada. Essa atitude levou a que a agitação diminuísse um pouco em razão da necessidade de mais concentração para refletir, elaborar procedimentos e fazer previsão de jogadas. A passagem que segue ilustra esse fato. O grupo encontrou esta situação:

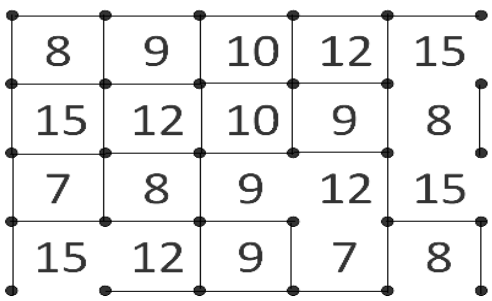


Figura 2. Situação de jogo

---

[4] Os nomes dos estudantes citados ao longo do texto são fictícios.

Dois colegas indicaram ao seu representante, Carlos, que marcasse acima do número 7, sem perceberem as outras possibilidades, ou, ainda, sem analisarem a consequência desta escolha. Neste momento, Mauro, após conversar com os demais do seu grupo, pediu para esperar, pois queria justificar sua divergência e apontar nova solução, conforme se observa na sequência seguinte.

<u>Sequência 2</u>

1. Carlos: Aqui no sete? (apontando com a caneta para o lugar indicado).
2. Mauro: Não! Aí não! Vai dar mais pontos pra eles!
3. Professora: Mauro, repete aqui, fala!
4. Mauro: Não marca o sete porque senão eles vão marcar o nove e o doze juntos. Eles vão marcar vinte e um pontos e a gente só sete.
5. Carlos: Vinte e um!
6. Professora: Como é que é, Mauro? Eles vão o quê?
7. Mauro: Eles vão marcar vinte e um pontos e a gente só sete. É melhor marcar o oito, que só a gente fica com ponto.

Outras situações, como esta de um colega discordar do grupo no momento de marcar, já tinham acontecido, mas até o momento ninguém havia se manifestado sobre as consequências das jogadas; apenas estavam fazendo o jogo pelo jogo, preocupando-se com os pontos que iriam ganhar. Para que Mauro fizesse a argumentação a favor da sua escolha foi preciso usar a imaginação, procurando prever possibilidades de jogada. Para isso foi necessário usar a capacidade de percepção para ver o todo, não apenas uma pequena parte, no caso, a possibilidade de fechar no número 7. Este tipo de situação favorece o desenvolvimento do estudante, pois, "sob o ponto de vista do desenvolvimento, a criação de uma situação imaginária pode ser considerada como um meio para desenvolver o pensamento abstrato." (Vigotski, 2007, p. 124).

Aos poucos, Mauro foi desenvolvendo certa habilidade nesse tipo de raciocínio, no qual era necessário perceber o elemento de forma particular num contexto geral e, assim, "abstrair, isolar os elementos, e examinar os elementos abstratos separadamente da totalidade da experiência concreta de que fazem parte". Esse movimento permitiu ao estudante escolher uma boa jogada, pois realizou duas operações importantes: "unir e separar: a síntese deve combinar-se com a análise." (Vygotski, 2005, p. 95).

A forma como Mauro se expressou chamou a atenção da turma na medida em que ele justificou com segurança e clareza o porquê daquela escolha. Dessa maneira, mesmo faltando poucas jogadas, o tempo para terminar o jogo foi maior em razão dessa nova estratégia de pensamento que os demais buscaram realizar mentalmente e expressar oralmente. Foi como se tivessem descoberto um novo "jeito" de jogar, o qual agradou ao grupo de tal forma que a maioria tentava imitá-lo. As tentativas de jogar de forma diferente foram acontecendo, mas na maioria delas era preciso auxiliar os jogadores, principalmente no momento de argumentar quanto às jogadas.

Apesar de os estudantes demonstrarem vontade de agir como Mauro, cada um ao seu modo, alguns realmente não conseguiam fazê-lo sozinhos, precisando de auxílio do colega ou da professora. Para Vygotski, "com o auxílio de uma outra pessoa, toda a criança pode fazer mais do que faria sozinha – ainda que se restringindo aos limites estabelecidos pelo grau de seu desenvolvimento." (2005, p. 129). Mesmo aqueles que tentaram, mas não conseguiram, beneficiaram-se da interação dos colegas no sentido de direcionar sua atenção para o processo e de aproximarem da compreensão do significado da ação do colega.

O jogo estava quase no final quando a professora observou Ricardo tentando explicar para um pequeno grupo qual seria a melhor jogada. Ele iniciou a fala dizendo que deveriam marcar no número 15, abaixo do número 8. Assim, os adversários marcariam entre o 15 e o 8 e o seu grupo terminaria o jogo com o 15. Em nenhum momento Ricardo pensou na soma dos pontos que a outra equipe iria marcar; simplesmente fez a previsão das jogadas sem pensar nas consequências. A professora não se manifestou e registrou o momento em que Ricardo pediu para explicar ao grupo a melhor opção, tentando proceder como Mauro; porém, teve dificuldade em usar a mesma estratégia de pensamento. Vendo a dificuldade de Ricardo e o tumulto formado, a professora interferiu para acalmar os ânimos.

A situação era a seguinte:

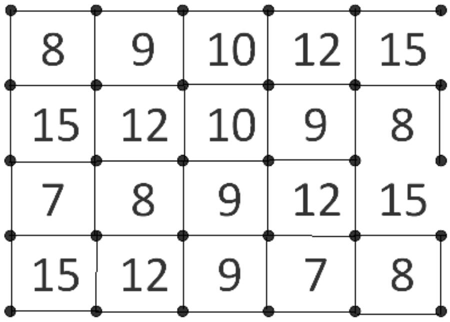


Figura 3. Situação de jogo

<u>Sequência 3</u>

1. Ricardo: Fecha o quinze de baixo!
2. Mauro: Por quê?
3. Ricardo: Se tu marcar o quinze (inferior e sinalizando verticalmente), eles vão pegar o oito... ai, não! (Ricardo, com a mão na boca, agia como se tivesse percebido somente naquele momento que não era uma boa opção. Houve risos e um pequeno tumulto.).
4. Professora: Se ele (Mauro) marcar o quinze, eles (grupo adversário) vão pegar o oito e o quinze, que era o que tu tinhas dito antes.
5. Mauro: Ó, eu vou marcar aqui (apontando para o quinze da primeira linha). Daí eles vão marcar aqui, pegam o oito e eu pego o quinze.

Mauro era o representante do grupo naquela jogada e, como não compreendeu o motivo da escolha de Ricardo, questionou o colega. O que aconteceu com Ricardo é algo comum de se observar nessas situações em que a fala não consegue expressar de imediato o pensamento. Nas situações de jogo, quando o estudante está muito envolvido e o pensamento é muito rápido, frequentemente a ajuda do professor é solicitada. Geralmente eles dizem: "Prô, eu pensei numa coisa que era certo, mas agora me perdi". A pesquisa de Vygotski permite a compreensão dessa situação:

> [...] todos os pensamentos criam uma conexão, preenchem uma função, resolvem um problema. O fluxo do pensamento não é acompanhado por uma manifestação simultânea da fala. Os dois processos não são idênticos, e não há nenhuma correspondência rígida entre as unidades do pensamento e da fala. Isso é particularmente claro quando um processo de pensamento não obtém o resultado desejado [...]. O pensamento tem a sua própria estrutura, e a transição dele para a fala não é uma coisa fácil. (2005, p. 185).

Analisando o objetivo da aula, a professora sentiu-se realizada com a atividade escolhida, pois contemplara todos os aspectos colocados no objetivo: o cálculo mental, a reflexão de procedimentos e a interação para socializar o conhecimento, principalmente no final, quando os estudantes procuravam argumentar e cuidar para que as jogadas não trouxessem consequências negativas para sua equipe, mostrando uma mudança significativa na forma de jogar. Para Oliveira,

> a interação face a face entre indivíduos particulares desempenha um papel fundamental na construção do ser humano: é através da relação interpessoal concreta com outros homens que o indivíduo vai chegar a interiorizar as formas culturalmente estabelecidas de funcionamento psicológico. (1999, p. 38).

A intenção de promover interações que permitissem a troca de informações, expressa no objetivo da aula foi fundamental para a escolha da dinâmica inicial do jogo. Com o conhecimento de que as interações têm um papel determinante no desenvolvimento dos estudantes e que, ao propor um jogo, o objetivo final deve ser o de avançar no conhecimento científico (Moura, 1991, p. 47), a atividade foi proposta novamente, mas de forma diferente. Os estudantes já apresentavam melhores condições para jogar com competência (Grando, 2004, p. 68), sem muitas intervenções da professora. Esse jogo aconteceu num outro momento, em grupos com quatro componentes, agindo em duplas, com o material apropriado para a situação.

Constatou-se um excelente resultado no sentido de proporcionar interações entre os estudantes que direcionassem o diálogo para previsões de jogadas e para a argumentação necessária a fim de convencer o colega sobre a melhor estratégia.

3.2. Episódio 2 - Jogo Contig 60®

O objetivo da professora era introduzir os símbolos de parênteses, chaves e colchetes nas expressões numéricas, além de desenvolver a habilidade de cálculo mental. Os estudantes já estavam acostumados a resolver expressões em momentos diferentes, às vezes individualmente, às vezes em duplas. Para alcançar o objetivo, escolheu-se um jogo apresentado por Grando (2004, p. 39), chamado Contig 60®[5].

O planejamento da aula e os objetivos propostos seguem como consta no plano de ensino:

a) Objetivos da aula: exercitar o cálculo mental; introduzir o uso de parênteses, chaves e colchetes em expressões; promover interações entre os componentes.
b) Disposição da turma: sete grupos com quatro componentes, sendo uma dupla contra outra.
c) Local: Sala de aula
d) Material: tabuleiro, 25 fichas de cor verde e 25 de cor lilás e três dados.

[5] Este jogo foi criado por John C. Del Regato, pertencente ao Mathematics Pentathlon do Pentathlon Institute (USA).

e) Objetivo do jogo[6]: Formar três fichas da mesma cor em linha reta.

f) Regras: Os dados devem ser lançados e o jogador deve construir uma sentença numérica usando operações matemáticas. O resultado será coberto pela ficha do jogador. Para ganhar, não poderá haver ficha de cor diferente entre as três peças colocadas na linha. (Escola..., 2008).

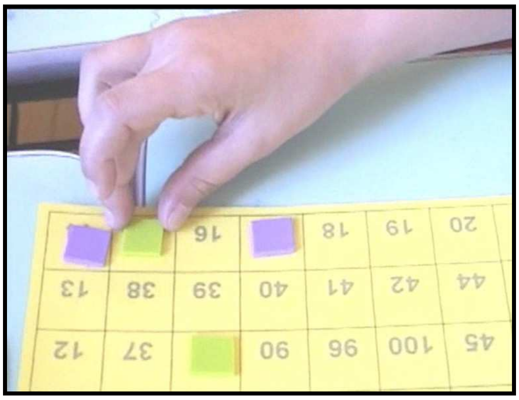


Figura 4.1 Jogada para tentar impedir formação vencedora

Num primeiro momento, para que todos compreendessem as regras, realizou-se o jogo de forma coletiva, dividindo a turma em dois grupos com um tabuleiro confeccionado em TNT[7], medindo 1m x 1m, e colocado em suporte para ser pendurado ao centro do quadro da sala, confirme figura 5, a seguir:

0	1	2	3	4	5	6	7
27	28	29	30	31	32	33	8
26	54	55	60	64	66	34	9
25	50	120	125	144	72	35	10
24	48	108	180	150	75	36	11
23	45	100	96	90	80	37	12
22	44	42	41	40	39	38	13
21	20	19	18	17	16	15	14

Figura 5. Tabuleiro do jogo

Foi um jogo bem aceito pela turma, cujas discussões mostraram a habilidade de alguns e a dificuldade de outros para o cálculo mental.

A primeira sequência mostra a discussão entre componentes de um grupo sobre um resultado divergente. Os dois meninos eram da mesma dupla e Luís

[6] O objetivo original sugeria cinco fichas, mas em razão do tempo disponível, reduziu-se para três fichas a fim de agilizar as partidas.

[7] Abreviatura para "tecido não tecido".

começou a discussão dizendo que João não estaria certo nas subtrações, porque seria impossível obter o resultado que havia encontrado utilizando somente aquela operação. A professora aproximou-se e observou que os dados lançados indicavam 1, 1 e 3[8]. João insistia em sua posição até que o colega o fez mudar de ideia, conforme se observa a seguir:

Sequência 1

1. João: Dá dois sim!
2. Luis: Que jeito! Três menos um, menos um dá um!
3. João: Mas eu fiz, tem que dá sim, quer ver? (começa a apagar algo no caderno e inicia nova escrita enquanto fala) Três, um, um. Três menos um menos um... (olha para o colega como se tivesse razão).
4. Luis: Dá um! (risos)
5. João: Ah! É que é dois menos um. Eu pensei só num menos um...

João, então, percebeu que Luis estava certo, rindo do seu erro junto com os demais colegas. Observou-se que, ao jogar os dados, João tentara fazer o cálculo mental das possibilidades de operações entre os três números, porém, sentindo dificuldade em memorizar os resultados, começou a anotar rapidamente no caderno o que havia feito, selecionando o procedimento que resultaria na resposta correta. No registro de João havia três diferentes possibilidades de ordenar os números 1 3 1, 1 1 3 e 3 1 1 mas nenhuma delas usando somente subtração resultaria no número 2 como resposta. Ele apenas havia pensado na operação, mas não fizera o seu registro. Essa passagem mostra a necessidade de visualizar a composição numérica para que pudesse perceber o que estava acontecendo. Ao iniciar esse processo (turno3), ele mesmo identificou o porquê de seu erro, justificando-se (turno5). Essa ação o levou a escrever as sequências numéricas seguintes antes de responder, utilizando os signos numéricos como auxílio para a atenção.

Num outro grupo a professora percebeu discussão semelhante à do grupo anterior. Os dados lançados por Gabriela indicavam 4, 5 e 5, e a jogadora queria marcar no tabuleiro a casa de número 25. Suas adversárias protestaram, dizendo que não seria possível aquela resposta, mas, como não estavam chegando a um consenso, a professora interferiu, conforme segue:

Sequência 2

1. Professora: O que é que saiu nos dados?
2. Gabriela: Cinco, cinco e quatro.
3. Professora: E o que é que tu vais fazer com eles, já tem ideia?
4. Gabriela: Vou fazer cinco vezes quatro menos cinco.
5. Professora: E vai dar quanto?
6. Gabriela: Vinte e cinco.
7. Professora: Põe pra mim aí, vê se vai dar mesmo. Escreve aí no papel. (Gabriela escreve e mostra para a professora, Figura 6).
8. Professora: Cinco vezes quatro?

[8] Não havia necessidade de seguir ordem crescente, decrescente, ou posicionamento de dados; a posição dos números para realizar as operações era de livre escolha.

9. Gabriela: Vinte.

10. Professora: Menos cinco?

11. Gabriela: Quinze!

Figura 6. Fotografia de situação de jogo

Portanto, não foi preciso que alguém dissesse a Gabriela que a resposta (no turno 6) estava incorreta, pois ela mesma percebeu isso ao acompanhar a professora em voz alta em cada uma das operações realizadas (turnos 9 e 11). Portanto, a intervenção da professora ocorreu no sentido de conduzir a estudante a retomar seu pensamento com mais atenção ao que estava fazendo. A professora percebeu a necessidade de auxiliá-la quanto ao que ela havia planejado mentalmente, que era: cinco vezes quatro *menos* cinco, mas a falta de atenção à fala oral impedia-a de perceber o seu erro. Segundo Vygotski, a "velocidade da fala oral não favorece um processo de formulação complexo – não deixa tempo para a deliberação e a escolha". (2005, p. 179). O que provavelmente aconteceu foi que a fala interior de Gabriela se realizou numa unidade só de pensamento, sem que houvesse uma separação dos elementos que deveriam compor a frase para expressar sua ideia. Para Vygotski, "um interlocutor em geral leva vários minutos para manifestar um pensamento. Em sua mente, o pensamento está presente em sua totalidade e num só momento, mas na fala tem que ser desenvolvido em uma sequência". (2005, p. 186). A intervenção da professora ao solicitar que a estudante escrevesse o que dizia e a leitura em voz alta, levaram a que ela própria se conscientizasse do que estava pensando.

Analisando as duas sequências deste episódio percebe-se a importância das interações no sentido de provocar verbalizações. Pelo que se conhecia dos estudantes, estava claro que eles não erravam por falta de conhecimento, mas por falta de organização do pensamento. Vygotski (2005, p. 185) faz referência a essa diferença entre o pensamento e a fala destacando que o fluxo do pensamento é diferente da manifestação da fala. Porém, foi o uso da palavra e dos signos que permitiu organizar e externar corretamente as ideias dos jogadores. Sobre essa questão Moysés sugere que "acompanhando verbalmente o tempo todo o que está sendo feito, dificilmente se chega a um resultado absurdo. Este é imediatamente corrigido pela pessoa que está calculando". (2006, p. 70). Um exemplo é o que aconteceu na sequência 1, turno 5, quando João percebeu o que havia feito e, na sequência 2, turno 11, quando Gabriela forneceu o resultado correto após verbalizar o que havia pensado. Considerando a faixa etária em que se encontram os estudantes, Vygotski indica a relevância do uso da palavra neste momento do desenvolvimento:

> O novo e significativo uso da palavra, a sua utilização *como um meio para formação de conceitos*, é a causa psicológica imediata da transformação radical por que passa o processo intelectual no limiar da adolescência. Nessa idade não aparece nenhuma função elementar nova, essencialmente diferente daquelas já presentes, mas todas as funções existentes são incorporadas a uma nova estrutura, formam uma nova síntese, tornam-se partes de um novo todo complexo; as leis que regem esse todo também determinam o destino de cada uma das partes. Aprender a direcionar os próprios processos mentais com a ajuda de palavras ou signos é uma parte integrante do processo de formação de conceitos. (2005, p. 73, grifo do autor).

Outros grupos também apresentaram situações do mesmo tipo, em que era necessário verbalizar o que estavam fazendo para corrigirem os erros cometidos pelos integrantes. Para alguns estudantes, cuja habilidade de cálculo mental não estava tão desenvolvida, foi necessário também visualizar o processo escolhido pelo jogador para que pudessem acompanhar o raciocínio utilizado.

Durante o jogo a professora também pôde observar que alguns jogadores já pensavam nas futuras possibilidades para os números desejados, como, por exemplo: “Se sair três números cinco, ou o seis, o cinco e o quatro dá o cinquenta que precisamos”. Para não esquecer, alguns chegavam, inclusive, a registrar as hipóteses num canto da folha. Esta previsão de possibilidades revela uma situação na qual

> a medida de generalidade determina não apenas a equivalência de conceitos, mas também todas as operações intelectuais possíveis com um determinado conceito.[...] À medida que se atingem níveis mais elevados de generalidade, fica mais fácil para a criança lembrar-se de pensamentos, independente das palavras. (Vygotski, 2005, p. 141).

Ainda para o autor, “a passagem para um novo tipo de percepção interior significa também a passagem para um tipo mais elevado de atividade interior, uma vez que uma nova forma de ver as coisas cria novas possibilidades de manipulá-las.” (2005, p. 114). Dessa forma, o estudante vai, gradativamente, aumentando sua liberdade intelectual (Vygotski, 2005, p. 141), como no exemplo anterior das possibilidades previstas para resultar no número de que os jogadores precisavam.

Após o jogo a professora fez uma avaliação oral da atividade, revelando a aprovação do jogo pela turma, e aproveitou a oportunidade para registrar no caderno algumas expressões que surgiram nos grupos, principalmente aquelas que geraram mais discussões. Um dos problemas foi a questão da ordem das operações, pois muitas vezes faziam primeiro o registro dos números e após colocavam os sinais, mas nem sempre estes estavam na ordem correta para a resposta desejada, por exemplo: 6, 5 e 4. Como os estudantes queriam a resposta igual a 5, anotavam nesta mesma ordem, mas sublinhavam o que queriam fazer primeiro: 6 – <u>5 – 4.</u> Este procedimento acabou levando à introdução do uso de sinais para separar as operações (parênteses, colchetes e chaves) nas expressões. Neste momento, de registro coletivo, verificou-se que vários grupos utilizaram estratégias semelhantes quando queriam destacar a operação que deveria iniciar o procedimento de cálculo. Foi um momento extremamente prazeroso de troca de ideias.

A interação entre os jogadores proporcionada pelo Contig 60® chamou a atenção para o aspecto da colaboração entre pares diferentes, o que foi muito curioso. Em alguns momentos os próprios adversários ajudavam na elaboração de possibilidades e observou-se o desejo não apenas de mostrar o quanto sabiam sobre o assunto, mas de fazer com que outros colegas também tivessem a mesma compreensão. Grando também observou essa situação em sua pesquisa;

> Durante o jogo observamos que, muitas vezes, as crianças (adversários) ajudam-se durante as jogadas, esclarecendo regras e, até mesmo, apontando melhores jogadas (estratégias). A competição fica minimizada. O objetivo torna-se a socialização do conhecimento do jogo. (2004, p. 26)

A professora avaliou que a escolha desta atividade fora extremamente feliz, pois atingiu de forma muito satisfatória o objetivo inicial da aula, que era desenvolver as habilidades do cálculo mental, introduzir o uso de símbolos nas expressões e promover interações entre os jogadores.

4. Considerações finais

O uso de jogos nas salas de aula vem fazendo parte da experiência de muitos professores. Porém, a experiência por si só não é formadora. De acordo com Nóvoa, "formadora é a reflexão sobre essa experiência, ou a pesquisa sobre essa experiência." (2001). Para Dickel "essa reflexão teórica permite mediações capazes de fortalecer convicções provenientes da reflexão na ação, mas fundamentalmente, permite criticar tais conhecimentos." (2003, p. 65).

Nesse sentido, analisou-se principalmente se houve o diálogo que permitisse o confronto de ideias e a oportunidade para desenvolver a capacidade de argumentação e formulação de estratégias para jogadas. De acordo com Vigotski, é por meio da interação que o aprendizado desperta processos internos de desenvolvimento (2007, p. 103) que irão promover o início do aprendizado de conceitos.

O jogo proporcionou uma modalidade de interação na qual os estudantes tiveram a oportunidade de trocar informações, de ouvir o colega, de expor e, sobretudo, de defender suas ideias e, assim, atribuir novo sentido a seu aprendizado. Segundo Dalbosco, o diálogo mostra uma dimensão intersubjetiva, "tendo que ocorrer entre pessoas, ele exige interação." (2007, p. 69). Assim, evidenciou-se a importância de promover momentos de interação social nos quais o diálogo se estabelece e orienta as ações dos estudantes. Ainda segundo o autor, "o diálogo é constitutivo da ação humana e tudo o que produzimos e significamos, culturalmente, brota desta nossa capacidade de dialogar com os outros e de ouvi-los." (p. 68).

Durante o jogo, aprender a escutar o outro teve um significativo valor para analisar as jogadas e as novas possibilidades de ação na partida. Ao observarem como alguns defendiam seus pontos de vista, outros estudantes tentaram fazer o mesmo. Isso possibilitou o desenvolvimento da capacidade de dialogar de forma a convencer o outro de suas ideias ou, até mesmo, de aceitar o ponto de vista do parceiro. Todavia, como refere Tudge (2002, p. 163), é preciso ter cuidado para que este ponto de vista expresse um conhecimento adequado; caso contrário, essa interação dialógica pode trazer danos ao processo de aprendizado. Para evitar que isso aconteça é necessária a devida intervenção do professor, que deve estar atenta aos movimentos e vozes à sua volta, interagindo com os estudantes.

No processo de análise foi possível estabelecer relação entre "objetivos cognitivos, que levam ao desenvolvimento de habilidades matemáticas básicas" (Brito, 2005, p. 60), e a ação no jogo, como: a) solução de problemas, ao se defrontarem com situações novas, impostas pelo jogo; b) prontidão para a racionalidade dos resultados, ao refletirem sobre os erros/enganos cometidos em jogadas; c) habilidades apropriadas de cálculo, ao se utilizarem das operações básicas e do cálculo mental; d) o uso da matemática como predição, ao realizarem previsões de resultados e jogadas.

Além do aspecto cognitivo, os jogos permitiram desenvolver maior autonomia na execução das tarefas, uma vez que a professora não ficava no centro do processo, mas estimulava os estudantes a tomarem suas próprias decisões e analisarem as consequências de suas ações. Este tipo de atitude diante da situação proposta permitiu observar que os estudantes ficaram mais atentos e interessados na atividade de estudo. Nesse sentido, Nascimento, Araújo e Migueis destacam que, no jogo, a ação do educador "dá-se menos por sua ação direta nele que por sua ação de organizar os materiais e conhecimentos sobre determinado tema para serem apropriados pelas crianças." (2010, p. 134).

O uso de jogos contribuiu também para o desenvolvimento afetivo nos momentos em que a cooperação e a solidariedade estiveram presentes e o desenvolvimento social, em razão das diversas formas de interações que se estabeleceram entre estudantes e entre estudantes e professora.

Desse modo, a questão levantada por Oliveira, sobre "quais são as modalidades de interação que podem ser consideradas legítimas promotoras de aprendizado na escola" (1999, p. 64), aponta a troca de informações e de estratégias entre estudantes como procedimento adequado, "pois pode tornar a tarefa um projeto coletivo extremamente produtivo para cada criança." (p. 64).

Fica a sugestão de que mais pesquisas possam contribuir indicando situações que venham ao encontro do que sugere Oliveira: "Qualquer modalidade de interação social, quando integrada num contexto realmente voltado para a promoção do aprendizado e do desenvolvimento, poderia ser utilizada, portanto, de forma produtiva na situação escolar." (1999, p. 64). Essa é uma forma pela qual a pesquisa acadêmica estaria contribuindo para a ação pedagógica dos professores da educação básica.

Bibliografía

Arce, A. (2004). O jogo e o desenvolvimento infantil na teoria da atividade e no pensamento educacional de Friedrich Froebel. *Cad. Cedes*, Campinas, v. 24, n. 62, 9-25.

Bonilla, M. H. S. (2005). *Escola* aprendente*: para além da sociedade da informação*. Quartet, Rio de Janeiro.

Brito, M. R. F. de (2005). Contribuições da psicologia educacional à educação matemática. In: Brito, M. R. F. de (Org). *Psicologia da educação matemática: teoria e pesquisa*. Insular, Florianópolis.

Dalbosco, C. A. (2007). *Pedagogia filosófica: cercanias de um diálogo*. São Paulo: Paulinas.

Damazio, A. (2008). Formação continuada do professor de matemática: produções pessoais. *Poiésis*, Tubarão, n. 1, v. 1, 7-19.

Dickel, A. (2003). Produção de conhecimentos na/sobre a escola: por uma aliança entre trabalho pedagógico, pesquisa e formação docente*. Revista Espaço Pedagógico,* Passo Fundo, v. 10, n. 2, 57-69.

Escola Redentorista Instituto Menino Deus. *Plano de ensino*. Passo Fundo, 2008.

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Zetetiké*, São Paulo, ano 3, n. 4, 1-37.

Fiorentini, D.; Miorim, M. Â. (1990). Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. *Boletim SBEM*-SP, ano 4, n. 7.

Freire, P. (2001). *Educação e mudança*. Paz e Terra, São Paulo.

Góes, M. C. R. (2000). *A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade*. *Cad. CEDES*, Campinas, n. 50, 9-25.

Grando, R. C. (2004). *O jogo e a matemática no contexto de sala de aula*. Paulus, São Paulo.

Moysés, L. (2006). *Aplicações de Vygotsky à educação matemática*. Papirus, Campinas.

Mortimer, E. F. (2000). *Linguagem e formação de conceitos no ensino de ciências*. Editora UFMG, Belo Horizonte.

Moura, M. O. de (1991). O *jogo e a construção do conhecimento matemático*. Disponível Em: http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf. Acesso em: 31 ago. 2007.

Nascimento, C. P.; Araújo, E. S.; Migueis, M. da R. (2010). O conteúdo e a estrutura da atividade de ensino na educação infantil: o papel do jogo. In: Moura, M. O. de. *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Liber livro, Brasília, 111-134.

Nóvoa, A. (2001). *O professor pesquisador e reflexivo*. [reportagem]13 set. Disponível em: http://www.tvebrasil.com.br/SALTO/entrevistas/antonio_novoa.htm. Acesso em: 11 jun. 2009.

Oliveira, M. K. de (1999). Vygotsky: *Aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico*. Editora Scipione, São Paulo.

Palangana, I. C. (2001). *Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky*: *A relevância do social*. Summus, São Paulo.

Smole, K. S.; Diniz, M. I.; Milani, E. (2007). *Cadernos do* Mathema: Jogos de matemática de 6º a 9º ano. Artmed, Porto Alegre.

Tudge, J. (2002). Vygotsky, a zona de desenvolvimento proximal e a colaboração entre pares: implicações para a prática em sala de aula. In: MOLL, L. C. *Vygotsky e a educação: implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica*. Artes Médicas, Porto Alegre, 151-168.

Vygotski, L. S. (2005). *Pensamento e linguagem*. Martins Fontes, São Paulo.

Vigotski, L. S. (2007). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. Martins Fontes, São Paulo.

Neiva Ignês Grando. Mestre em Psicologia Cognitiva – Universidade Federal de Pernambuco. Doutora em Educação pela Universidade Federal de Santa Catarina. Professora do Instituto de Ciências Exatas e Geociências e do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade de Passo Fundo/RS/Brasil. **neiva@upf.br**

Andréa Damasceno Raupp. Mestre em Educação pela Universidade de Passo Fundo. Professora da escola Redentorista Instituto Menino Deus – Passo Fundo/RS/Brasil. **andraupp@terra.com.br**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 67-88

Análisis del tratamiento del concepto de área en libros de texto de primaria

Fabiana Kiener, Sara Scaglia y Marcela Götte

Fecha de recepción: 10/11/2012
Fecha de aceptación: 3/05/2013

Resumen	En este artículo, presentamos los aspectos más relevantes del análisis del tratamiento del tema área en seis libros de textos de 5to y 6to grado del nivel primario del sistema educativo argentino (estudiantes de 10 y 11 años de edad aproximadamente). Focalizamos el estudio en las distintas aproximaciones al área planteadas en los textos, en el modo de presentar las fórmulas para el cálculo del área y en el tipo de actividad matemática que promueven en el alumno. Nuestro objetivo es describir las características principales de los distintos tratamientos e identificar aquellas propuestas que tengan rasgos propios del tipo de trabajo al que se aspira -aquel en el que el alumno actúa como verdadero matemático. **Palabras clave**: libros de texto – área – tratamiento.
Abstract	In this paper, we present the most relevant aspects of the analysis of treatment of the subject area in six textbooks 5th and 6th grade elementary Argentine educational system (students 10 and 11 years old or so). We focus the study on the different approaches to the area raised in the texts, how to present the formulas for calculating the area and the type of mathematical activity that promotes the student. We describe the main features of the different treatments and identify proposals that have features characteristic of the type of work to which we aspire-one in which the student acts as a true mathematician. **Keywords**: textbooks – area - treatment
Resumo	Neste artigo, apresentamos os aspectos mais relevantes da análise de tratamento da área temática em seis livros 5 e 6 ª série do sistema educacional argentino fundamental (alunos de 10 e 11 anos de idade ou mais). Focamos o estudo sobre as diferentes abordagens para a área elevada nos textos, como apresentar as fórmulas para calcular a área eo tipo de actividade matemática que promove o aluno. Nós descrevemos as principais características dos diferentes tratamentos e identificar propostas que têm características do tipo de trabalho a que aspiramos e um em que o aluno atua como um verdadeiro matemático. **Palavras-chave** livros - area- tratamento

1. Introducción

Según Chevallard, Bosch y Gascón (1997) una buena reproducción por parte del alumno de la actividad matemática supone que éste intervenga en la misma, que formule enunciados, pruebe proposiciones, construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que pueda reconocer los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar con su actividad. Estos autores reconocen la dificultad para hallar o construir una situación en la que el alumno actúe, además de como alumno, como verdadero matemático, responsabilizándose de las respuestas que da a las cuestiones que se le plantean.

Este tipo de actuación de los alumnos exige dejar de lado una tendencia clásica en la enseñanza de la matemática, según la cual recae sobre el profesor la responsabilidad de validar todas las afirmaciones y resultados que se trabajen. Por el contrario, supone el desarrollo de justificaciones por parte de los alumnos. El interés por desarrollar estas habilidades en los alumnos está también considerado en las propuestas curriculares actuales. En efecto, en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios se recomienda promover “la producción e interpretación de conjeturas y afirmaciones de carácter general y el análisis de su campo de validez, avanzando desde argumentaciones empíricas hacia otras más generales” (Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, 2006, p.16). Sin embargo, existen investigaciones que ponen de manifiesto que los alumnos suelen interpretar las demostraciones como un conjunto de reglas matemáticas desconectadas de su actividad matemática personal, en lugar de reconocerlas como una forma de establecer la validez de sus ideas (Battista y Clements, 1995).

En el nivel primario, el tratamiento de los temas perímetro, área y volumen proporcionan una de las primeras oportunidades para enfrentar a los alumnos al uso de fórmulas. El modo en que se presentan las mismas puede estar relacionado con la tendencia clásica mencionada en el párrafo anterior (por ejemplo, la presentación directa de las fórmulas por parte del docente, con o sin la justificación de las mismas) o bien, podrían plantearse de una manera alternativa, dando la posibilidad al alumno de conjeturar, validar y encontrar sentido a dichas fórmulas.

De acuerdo con Chamorro y Belmonte (1991) el tratamiento de magnitudes y sus medidas estuvo especialmente influenciado por una metodología tradicional, basada en escuchar y repetir. Un tratamiento alternativo de estos temas supone propiciar un uso comprensivo de las fórmulas, presentándolas como un último paso, como un camino más corto para alcanzar un resultado que se ha venido obteniendo por medios más laborioso como podría ser el recuento de cuadrados para calcular el área de una figura (Del Olmo, Moreno y Gil, 1993).

Consideramos interesante indagar acerca de la manera en que se aborda el estudio de las magnitudes y sus medidas en el aula, teniendo en cuenta que los distintos tratamientos de un mismo tema pueden tener consecuencias en el aprendizaje de los sujetos. En este caso particular, centraremos el análisis en el tratamiento del tema área, atendiendo principalmente a la manera de presentar las fórmulas para su cálculo y el tipo de trabajo matemático que se le propone al alumno.

Una manera de obtener información significativa acerca de cómo se aborda un concepto en el aula es el estudio de libros de texto, ya que los mismos reflejan, al menos en parte, el currículo diseñado (Villella, 2007; González Astudillo y Sierra Vázquez, 2004), constituyen uno de los factores que mayor influencia tienen en el aula (Schubring, 1987; Sessa y Cambriglia, 2007) y el soporte de circulación del saber que se considera oficialmente óptimo dentro de las instituciones (Villella, 2007). Además, el hecho de reflejar determinados aspectos de los conceptos puede influir en lo que los alumnos aprenden (qué y cómo), dado que proporcionan la mayor parte del contenido matemático que los estudiantes deben aprender y constituyen una de las principales fuentes de tareas (García y Llinares, 1995, citado en Villella, 2007).

En relación con el estudio de libros de texto, el proceso de transposición didáctica, es decir, el “conjunto de transformaciones adaptativas que sufre una obra para ser enseñada” (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p.136) adquiere especial relevancia. Al respecto, Sanz Lerma (1994) sostiene que al no encontrarse publicado en ninguna parte el saber enseñar, lo más próximo a él es el libro escolar, cuyo contenido y estructura reflejan las transformaciones efectuadas sobre el saber sabio. Según Kang y Kilpatrick (1992), la percepción del fenómeno de transposición didáctica puede ayudarnos a mejorar nuestra manera de tratar el conocimiento matemático escolar, teniendo en cuenta que el uso efectivo de los textos depende de la vigilancia epistemológica que se ejerza sobre ellos.

Considerando la significativa influencia de los libros de texto en las decisiones didácticas de un profesor y su constitución como una de las fuentes que intervienen en la elaboración del discurso docente, el estudio de los mismos ofrece información significativa acerca de cómo se aborda un concepto en el aula y permite realizar inferencias sobre las consecuencias que los distintos tipos de tratamientos pueden tener en el aprendizaje de los sujetos.

En este artículo, profundizando los estudios desarrollados en Kiener, Götte y Scaglia (2009**,** 2010), presentamos los aspectos más relevantes del análisis del tratamiento del tema área en seis libros de textos de 5to y 6to grado del nivel primario del sistema educativo argentino (estudiantes de 10 y 11 años de edad aproximadamente). Focalizamos el estudio en las distintas aproximaciones al área planteadas en los textos, en el modo de presentar las fórmulas para el cálculo del área y en el tipo de actividad matemática que promueven en el alumno. Nuestro objetivo es describir las características principales de los distintos tratamientos e identificar aquellas propuestas que tengan rasgos propios del tipo de trabajo matemático al que se aspira – aquel que describen Chevallard, Bosch y Gascón (1997) en el que el alumno actúa como verdadero matemático.

En la siguiente sección presentamos algunas cuestiones teóricas que tuvimos en cuenta para definir las categorías de análisis. A continuación, describimos la metodología de la investigación y los criterios para la selección de los textos. En la cuarta sección incluimos el estudio de seis libros de texto a partir de ciertas categorías, que resultan especialmente relevantes para caracterizar el tipo de trabajo matemático propuesto en cada uno. En la última sección presentamos las conclusiones del estudio. El artículo incluye al final un anexo con la categorización completa para el análisis del tratamiento del tema área en libros de texto.

2. Marco teórico.

Freudenthal (1983) sostiene que los conceptos matemáticos son inventados como herramientas para organizar fenómenos del mundo físico, social y mental. Durante la enseñanza propone mostrar a los sujetos los fenómenos que las nociones matemáticas organizan, tan ampliamente como sea posible. Con respecto al concepto de área, este autor sugiere tener en cuenta las siguientes aproximaciones:

a) Repartir equitativamente. Esto puede realizarse: aprovechando regularidades, por estimación o por medida.

b) Comparar y reproducir. Puede realizarse: por inclusión, por transformaciones de romper y rehacer, por estimación, por medida, por medio de funciones (por ejemplo, utilizando isometrías).

c) Medir. Puede llevarse a cabo: por exhausción[1] con unidades (para medir superficies irregulares), por acotación entre un valor superior e inferior (obteniendo medidas aproximada), por transformaciones de romper y rehacer (para deducir fórmulas), por medio de relaciones geométricas generales (medir dimensiones y aplicar fórmula).

Una de las actividades mencionadas en las aproximaciones anteriores es la estimación, es decir, la emisión de un "juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite" (Segovia, Castro, Castro y Rico 1989, p.18). Estos autores destacan el carácter educativo de la estimación y presentan dos razones fundamentales para incluirla en la escuela: por un lado, para completar la formación escolar que actualmente reciben los estudiantes, ya que potencia el desarrollo de estrategias propias, refuerza y estimula procesos correctos de resolución de problemas y evita la visión deformada de considerar la matemática como una ciencia que conduce a respuestas exactas; y por otro, por su utilidad práctica, puesto que se emplea en diversas situaciones reales.

Además, la estimación se encuentra entre las aptitudes básicas en matemáticas propuestas en distintos documentos. En los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios se propone el uso de distintos procedimientos para estimar medidas en situaciones problemáticas (Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, 2006), como una de las habilidades requeridas para la comprensión del proceso de medir. En los Estándares del NCTM (2003; p.50) se recomienda el desarrollo de la estimación de medidas: "Las actividades de estimación […] deberían centrarse en ayudar a los niños a que comprendan mejor el proceso de toma de medidas y el papel que desempeña el tamaño de la unidad que se emplee". Segovia y cols. (1989) añaden que para realizar conjeturas en cálculo y medida se precisa una formación previa, pero esas mismas conjeturas servirán para adquirir nueva formación que repercute en el perfeccionamiento de las habilidades y procesos que se utilicen para hacer futuras conjeturas. "La capacidad de estimar se revela como una herramienta conceptual potente con la que tratar el alud de información que se nos viene encima cada día" (Segovia y cols. 1989; p. 185).

Sin embargo, existe en la actualidad un sentimiento generalizado entre los expertos acerca de que el tiempo dedicado a la enseñanza de la estimación no es el que debiera y que tiene que ser aumentado (Segovia y cols., 1989; Del Olmo, Moreno y Gil, 1993). Esta realidad también se observa en la escasez o ausencia de consignas planteadas en los libros de texto referidas al desarrollo de la estimación (Del Olmo, Moreno y Gil, 1993).

La propuesta de estos especialistas no implica la introducción de un apartado en el currículo de matemática dedicado a estimar cálculos y medidas, sino que la estimación debe impregnar todo el currículo de matemática siendo tratada y

[1] Este método supone rellenar "el interior de la superficie a medir con unidades (de superficie) colocadas unas junto a otras y no superpuestas, y en aquellas partes de la superficie donde no quepan se recurre a rellenar con unidades más pequeñas" (Del Olmo, Moreno y Gil, 1993; p. 20).

considerada con aquellos tópicos que lo permitan, entre los cuales se encuentran la superficie y su medida (Segovia y cols., 1989).

Finalmente, un último aspecto relevante para este trabajo, íntimamente relacionado con los modos de hacer propios de la matemática, es la actividad argumentativa. En relación con esta temática, Balacheff (2000) proporciona algunas definiciones útiles para estudiar y caracterizar las producciones de los alumnos durante esta actividad que utilizaremos para estudiar las propuestas de los libros de texto. Este autor denomina "pruebas pragmáticas a las pruebas que recurren a la acción o a la ostensión", y "pruebas intelectuales a las pruebas que, separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones" (Balacheff, 2000, p. 22). Por otra parte, varios investigadores del campo de la didáctica coinciden en asumir una concepción amplia acerca de la demostración en matemática. Para este enfoque, la actividad demostrativa puede tener distintos objetivos entre los cuales se encuentra: verificar o justificar la validez de una afirmación, iluminar o explicar por qué una afirmación es verdadera, sistematizar los resultados en un sistema deductivo (axiomas, definiciones, teoremas aceptados, etc.), descubrir nuevos resultados, comunicar o transmitir conocimiento matemático (De Villiers, 1993).

Llanos y Otero (2009) estudian libros de texto del nivel medio correspondientes a distintos períodos con el objetivo de identificar las variaciones que se producen en torno a la argumentación a lo largo del tiempo. Estas autoras afirman que "se evidencian modificaciones en la forma en que se inicia la Argumentación, en la manera de concebir a la Matemática, en los tipos de razonamientos empleados y en el tipo de actividades o situaciones que se proponen" (Llanos y Otero, 2009; p. 38). Analizan la actividad argumentativa sin centrarse en un contenido específico, y conciben a la argumentación como una actividad discursiva caracterizada por la defensa de puntos de vista y la consideración de perspectivas contrarias. En nuestro trabajo, en cambio, se estudia la actividad argumentativa específicamente en torno a la justificación de los resultados obtenidos y de las fórmulas para el cálculo del área de figuras planas y se adopta la concepción de Balacheff (2000) sobre validación. Este autor utiliza la expresión 'proceso de validación' para referirse a la actividad de manipular información dada o adquirida para producir una nueva información, cuando tiene como fin asegurarse de la validez de una proposición y producir una explicación.

3. Metodología

3.1. Caracterización de la investigación

En este artículo presentamos parte de una investigación cuyos objetivos son caracterizar los procesos de validación desarrollados en libros de texto para el tratamiento del concepto de área y estudiar las consignas propuestas para el desarrollo del tema enfocando el análisis en los procesos de exploración, producción de conjeturas y desarrollo de demostraciones que promueven, para describir posibles implicaciones del tratamiento desarrollado por los textos en el aprendizaje del tema.

Dicho estudio se enmarca en el paradigma interpretativo dado que, entre otros aspectos, se trata de un estudio en pequeña escala en el que se busca la comprensión de los fenómenos en lugar de determinar sus causas y no se pretende generalizar los resultados hallados. Se trata de una indagación de tipo descriptiva, puesto que el objetivo está en describir un fenómeno (Bisquerra, 1989).

Según las fuentes utilizadas, la investigación es bibliográfica pues supone “la búsqueda, recopilación, organización, valoración, crítica e información bibliográfica” (Bisquerra, 1989) sobre un tema específico, a saber: la caracterización del tratamiento del concepto de área y la justificación de las fórmulas para su cálculo en libros de textos.

Desde el punto de vista metodológico, la investigación es cualitativa. Una de las técnicas que se utiliza durante el estudio de los textos es el análisis de contenido, cuyo objetivo básico es tomar un documento no cuantitativo y transformarlo en datos cuantitativos, identificando categorías y unidades de análisis apropiadas que reflejan la naturaleza del documento analizado y la finalidad de la investigación (Cohen y Manion, 1990).

3.2 Criterios de selección de los libros de texto

Con respecto a la selección de los libros de texto, la llevamos a cabo de acuerdo con los siguientes criterios:

1. Que pertenezcan a diversas editoriales.
2. Que se desarrolle el tema elegido.
3. Que posibiliten el seguimiento del tratamiento del tema a lo largo de 5° y 6° grado en cada editorial.

Cabe destacar que si bien en principio pensamos en considerar también los textos de 7º grado de cada editorial, luego decidimos prescindir de los mismos porque en ellos se omite la discusión acerca de las fórmulas para el cálculo del área de figuras planas.

4. Análisis del tratamiento del tema área en libros de texto.

En este apartado mostramos la aplicación de algunas categorías consideradas centrales para los objetivos de este trabajo a seis textos de matemática para la escuela primaria. Los textos corresponden a 5to y 6to grado de tres editoriales, denominadas genéricamente como Editorial A, Editorial B y Editorial C.

Para la descripción del análisis efectuado, combinamos en algunos casos dos o tres categorías, que mantienen estrecha relación entre sí.

Fenomenología. Aproximaciones al concepto de área utilizadas en el texto (TCA9)

Tal como se mencionó en el marco teórico, para lograr la adquisición de un concepto por parte del alumno se debe trabajar desde el inicio con diversas aproximaciones al mismo (Freudenthal, 1983). En el caso particular del área, resulta oportuno proponer tareas orientadas a distinguir esta magnitud de las restantes (por ejemplo, de la longitud) o comparar objetos respecto de la misma sin la necesidad de medirlos (Del Olmo, Moreno y Gil, 1993).

Atendiendo a este aspecto, planteamos un análisis de las distintas aproximaciones al concepto de área que se presentan en las consignas propuestas en los textos, de acuerdo con la clasificación sugerida por Freudenthal (1983).

Para ello realizamos un gráfico para los textos de 5to grado y otro para los de 6to (Gráficos 1 y 2). En cada uno de ellos, señalamos la cantidad de consignas que corresponden a cada una de las tres aproximaciones generales (*Repartir equitativamente*, *Comparar y reproducir* y *Medir*) e identificamos las sub categorías correspondientes con la letra inicial de la aproximación respectiva seguida de un numeral como se muestra a continuación:

a) Repartir equitativamente:

R1. Aprovechando regularidades.

R2. Por estimación.

R3. Por medida.

b) Comparar y reproducir.

C1. Por inclusión.

C2. Por transformaciones de romper y rehacer.

C3. Por estimación.

C4. Por medida.

C5. Por medio de funciones.

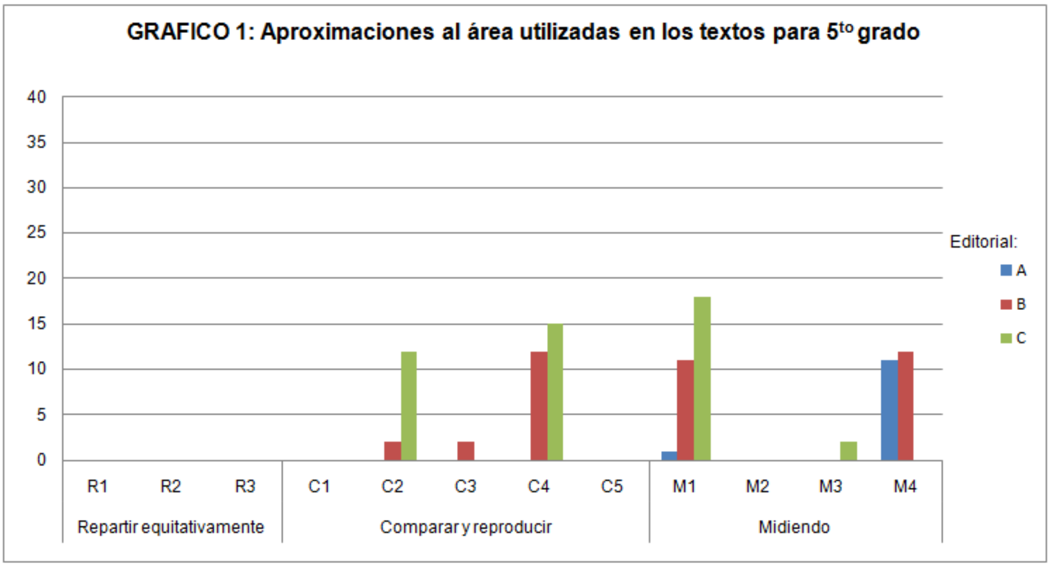
c) Medir.

M1. Por exhausción con unidades.

M2. Por acotación entre un valor superior e inferior.

M3. Por transformaciones de romper y rehacer.

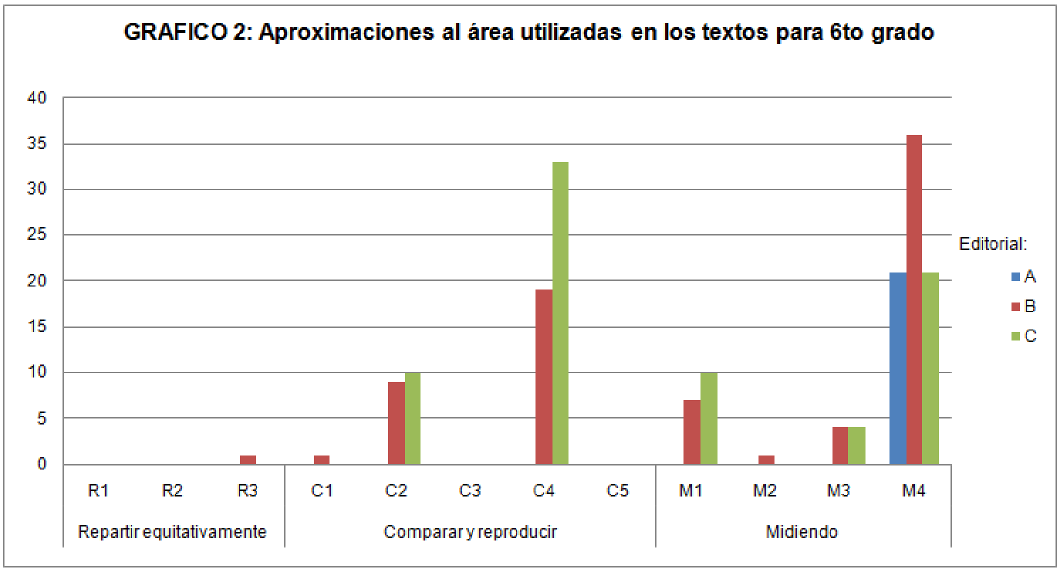
M4. Por medio de relaciones geométricas generales.



Algunas particularidades que se ponen de manifiesto en el gráfico 1 son las siguientes:

- En los textos correspondientes a quinto grado no se observan consignas que demanden el reparto equitativo.
- La segunda aproximación (comparar y reproducir) se presenta en consignas propuestas en las editoriales B y C, involucrando especialmente la comparación y reproducción de áreas a partir de la medida (subcategoría C4).
- La tercera aproximación está presente en las tres editoriales. Cabe destacar que la subcategoría M4 no se observa en el libro correspondiente a la editorial C. Ello

está en consonancia con el interés por iniciar de un modo más intuitivo el tratamiento del tema, haciendo hincapié en la construcción del concepto y posponiendo para el año siguiente el trabajo con fórmulas.



En el gráfico 2 se ponen de manifiesto las siguientes particularidades:

- En general, el reparto equitativo sigue estando ausente (aparece en una sola consigna de la editorial B).
- La distribución correspondiente a la aproximación de comparar y reproducir es similar a la observada en el gráfico 1.
- En las tres editoriales se presentan consignas que requieren medir. Las cifras más relevantes refieren al uso de fórmulas para el cálculo del área, siendo esta subcategoría la única observada en la editorial A.

Este análisis pone de manifiesto que la recomendación de trabajar el concepto área desde la amplia gama de aproximaciones mencionadas por Freudenthal (1983), es atendida en parte por los textos correspondientes a las editoriales B y C.

Respecto al desarrollo de la estimación en los alumnos, observamos que en un sólo texto se proponen consignas para comparar áreas mediante la estimación (5to grado, Editorial B) a través de comparaciones entre superficies del ambiente cotidiano del alumno y unidades convencionales para el cálculo del área. La escasa frecuencia de tareas de este tipo refleja una problemática que señalan algunos investigadores del campo de la didáctica de la matemática: si bien el proceso de la medida de una magnitud se completa con la estimación -considerando a la misma como a "la posibilidad de apreciar a ojo, sin la ayuda de instrumentos, la medida de una cantidad de magnitud" (Del Olmo, Moreno y Gil, 1993: 14) y constituye una habilidad que debe promover por su indudable valor práctico, se observa que no está suficientemente atendida en los textos y muy posiblemente, en el trabajo en el aula en la actualidad (Del Olmo, Moreno y Gil, 1993; Segovia y cols. 1989).

Clasificación de tareas propuestas en el texto durante el tratamiento del tema área (TCA10)

Clasificamos las tareas planteadas en libros de texto durante el tratamiento del concepto de área según el propósito que persiguen:

1. *Cálculo del área:* En esta categoría incluimos las tareas en las que se propone hallar el área de una figura.
2. *Comparación o reproducción de áreas:* Mencionamos aquí las tareas en las que se plantea comparar áreas de diferentes figuras o construir una figura con un área determinada.
3. *Relación entre magnitudes unidimensionales de una figura y su área:* Identificamos en este campo aquellas tareas en las que se propone el establecimiento de relaciones entre magnitudes unidimensionales de una figura – longitudes de los lados, diámetro o radio de un círculo, perímetro de una figura- y el área de la misma.

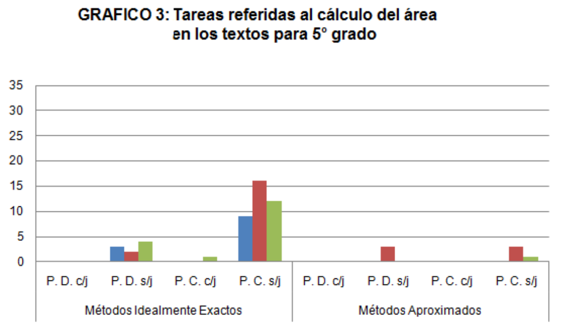
Para cada una de las categorías anteriores, identificamos las características del método utilizado para la resolución de la tarea, según las siguientes subcategorías:

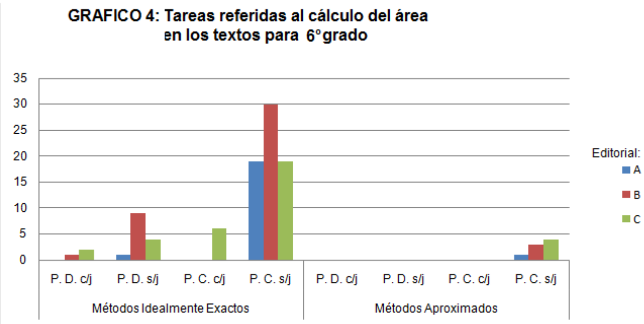
Métodos Idealmente Exactos (M.I.E.): identificamos aquellas tareas en las que se calculan, comparan o reproducen áreas recurriendo a fórmulas, propiedades o relaciones matemáticas.

Métodos Aproximados (M.A.): mencionamos aquellas tareas en las que se precisa estimar medidas de longitud o de área para el cálculo, comparación o reproducción de áreas.

Distinguimos además las tareas que requieren procedimientos ya conocidos por el alumno (*P.C.*) teniendo como base las consignas previas del texto, de aquellas en las cuales se debe crear un procedimiento para resolverlas (*P.D*). Asimismo, diferenciamos las tareas en las que se propone explícitamente una justificación por parte del alumno (*c/j*) acerca de las conclusiones arribadas, de aquellas en las que no se pide explícitamente el desarrollo de una justificación (*s/j*).

Para organizar el análisis de las tareas elaboramos dos gráficos: uno de ellos correspondiente a los textos de 5^{to} grado y otro, para los de 6^{to} grado para cada una de las tres categorías generales: *Cálculo del área* (Gráficos 3 y 4), *Comparación o reproducción del área* (Gráficos 5 y 6) y *Establecimiento de relaciones entre magnitudes lineales de una figura y su área* (Gráficos 7 y 8). .

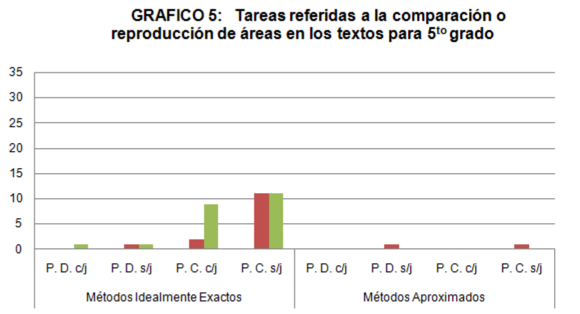


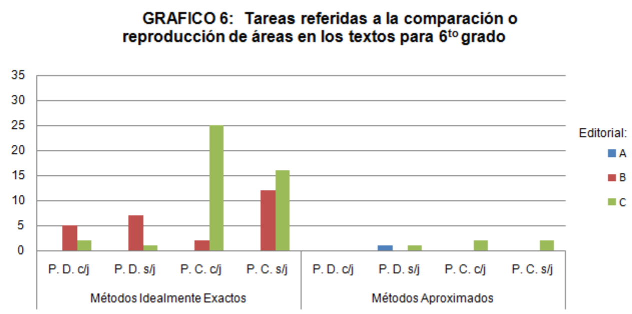


Nos interesa destacar de la observación de los gráficos 3 y 4 las siguientes cuestiones:

- Existe una clara predominancia en las tres editoriales de tareas referidas al cálculo del área mediante procedimientos conocidos que no requieren de algún tipo de justificación (P. C. s/j).

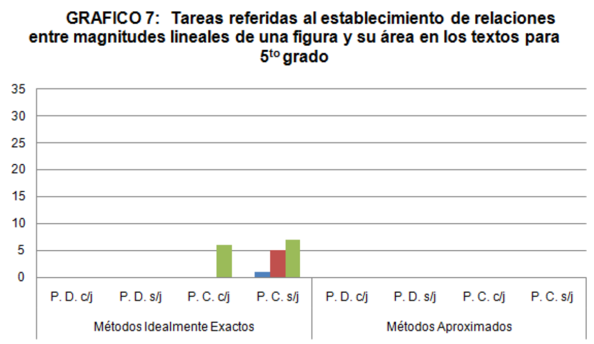
- Los métodos aproximados para el cálculo de área se presentan muy escasamente, y en ningún caso se solicita una justificación.
- La editorial C es la única- excepto por una tarea en el texto de 6to de la editorial B- que solicita justificacar algunos resultados.

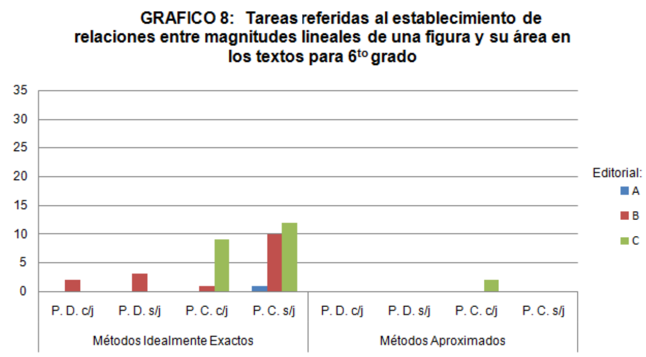




En los gráficos 5 y 6 advertimos principalmente las siguientes particularidades:

- Las editoriales B y C presentan un mayor número de tareas referidas a la comparación o reproducción de áreas en los textos de 5to y 6to grado, en relación con las destinadas al cálculo del área. Por el contrario, la editorial A plantea una única tarea para comparar o reproducir áreas, en el texto de 6to grado.
- Si bien en los textos para 5to se sigue manifestando predominancia de tareas que requieran procedimientos idealmente exactos y conocidos y sin solicitud de justificación; en los textos de 6to grado, la editorial C se distingue en las tareas del tipo descripto anteriormente, pero con el pedido explícito de una justificación.
- La editorial B incrementa el número de tareas (respecto a los gráficos analizados anteriormente) que solicitan una justificación por parte del alumno de los procedimientos desarrollados y/o conclusiones arribadas.
- Los métodos aproximados aparecen en los textos analizados, pero en notable menor proporción respecto a los métodos idealmente exactos.





A partir de los gráficos 7 y 8, podemos resaltar los aspectos detallados a continuación:

- Es prácticamente nula la presencia de tareas que requieran métodos aproximados, excepto por dos consignas planteadas en el texto de 6to de la Editorial C.
- Los libros de la editorial A sólo plantean tareas para el establecimiento de relaciones entre magnitudes lineales de una figura y su área que precisen de

métodos idealmente exactos y conocidos para su resolución, sin la solicitud justificación.

- La creación de un procedimiento que posibilite resolver determinada tarea es una habilidad que se fomenta únicamente en el texto de 6to grado de la Editorial B.
- El pedido de una justificación por parte del alumno de los procedimientos y conclusiones que obtiene aparece con mayor predominancia en los textos de la Editorial C.

Identificación del tamaño del espacio con el cual el sujeto entra en interacción en cada tarea propuesta en el texto (TCA11).

Gálvez (1985, citado en Berthelot y Salin, 1992) propone tres categorías para clasificar el tamaño del espacio con el cual el sujeto entra en interacción en determinada tarea. El micro-espacio constituye el espacio ligado a la manipulación de los objetos pequeños; el meso-espacio es el espacio del desplazamiento del sujeto en un dominio controlado por la vista, los objetos están fijos y miden entre 0,5 y 50 veces el tamaño del sujeto; el macro-espacio corresponde a un sector del espacio cuya dimensión es tal que se puede abarcar solamente por intermedio de una sucesión de visiones locales, separadas entre ellas por los desplazamientos del sujeto en la superficie terrestre.

A partir de las definiciones anteriores clasificamos las tareas planteadas en los textos y realizamos los siguientes gráficos (Gráficos 9 y 10).

GRÁFICO 9: Identificación del espacio con el que interactúa el sujeto en textos para 5to grado

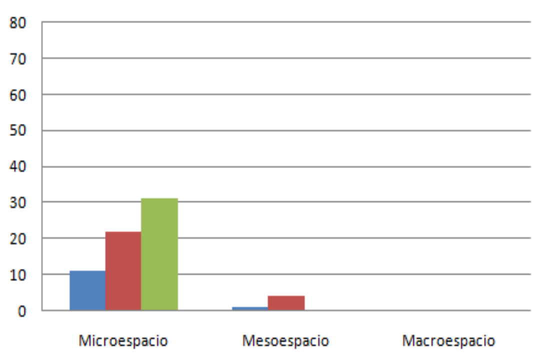
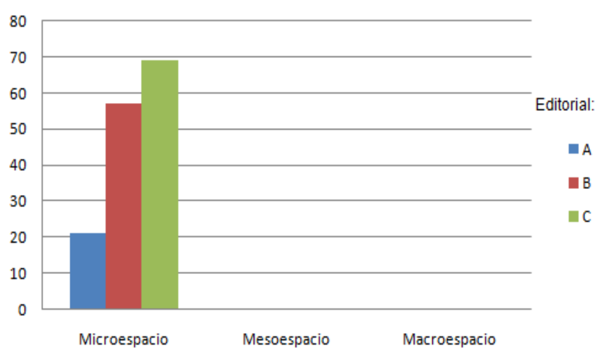


GRÁFICO 10: Identificación del espacio con el que interactúa el sujeto en textos para 6to grado



Tal como puede apreciarse en ambos gráficos, en los seis textos analizados predominan las tareas que requieren de la manipulación de objetos pequeños (microespacio).

Además, aparecen cinco consignas en total (una en el texto de 5to grado de la Editorial A y cuatro en el correspondiente al mismo grado de la Editorial B) que plantean la interacción y el desplazamiento del sujeto en un dominio controlado por su vista (mesoespacio).

La ausencia de tareas en el macroespacio, podría estar indicando que para las editoriales seleccionadas no se considera relevante el desarrollo de interacciones del sujeto con espacios que exceden a su vista o que no lo consideran apropiado de acuerdo con la edad de los destinatarios.

Identificación de tareas en las que se establecen relaciones entre el perímetro y el área, durante el tratamiento del tema área (TCA12).

Resulta relevante identificar aquellas tareas en las que se pide al alumno el establecimiento de relaciones entre el valor del área y el perímetro de una figura teniendo en cuenta que “para la constitución de una magnitud es preciso que se confronte con otras. En el caso del área, la posibilidad de confusión con el perímetro de las figuras es un hecho ampliamente constatado porque el niño puede, erróneamente, juzgar el área de una figura por sus dimensiones lineales.” (Del Olmo, Moreno y Gil, 1993: 57). Por este motivo, se precisa trabajar vinculando los conceptos de área y perímetro para que el alumno sepa distinguir uno del otro.

De acuerdo con los Gráficos 11 y 12 que se muestran a continuación, los textos de la Editorial A no presentan tareas del tipo antes descripto. Por el contrario, los libros de las Editoriales B y C parecen preocuparse por desarrollar en los alumnos la independencia del área respecto del perímetro, discutiendo en varias tareas esta cuestión.

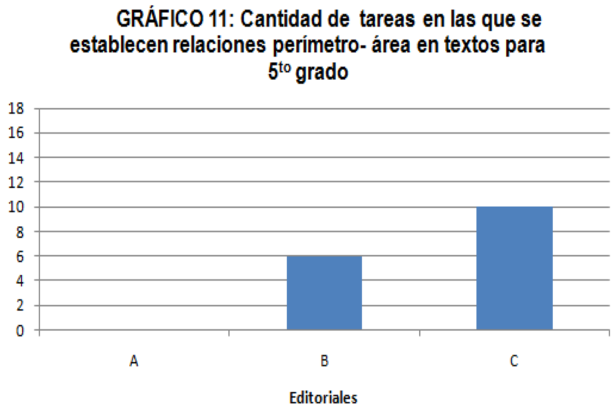


GRÁFICO 11: Cantidad de tareas en las que se establecen relaciones perímetro- área en textos para 5to grado

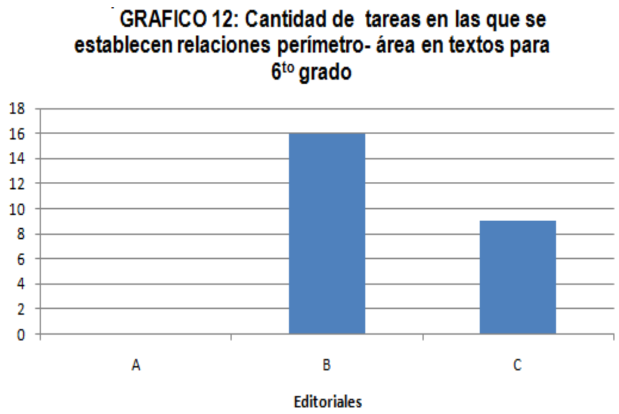


GRAFICO 12: Cantidad de tareas en las que se establecen relaciones perímetro- área en textos para 6to grado

Consideramos adecuadas las propuestas de las Editoriales B y C en cuanto al planteo de tareas tendientes a superar o evitar la confusión entre la noción de área y perímetro, puesto que éste es un error bastante frecuente que puede tener sus raíces en la ausencia de tareas de recorte, de pegado, coloreado, utilización de hilos, lanas, etc., que manifiesten claramente las diferencias entre los dos conceptos (Del Olmo, Moreno y Gil, 1993).

Tipo y función de las justificaciones para las fórmulas del área (JFA2, JFA4). Aproximación al área utilizada en cada justificación (JFA6).

En este caso, para determinar el tipo de justificación presentada para cada fórmula consideramos la clasificación en pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales dadas por Balacheff (2000). Siguiendo a De Villiers (1993), planteamos un análisis de los fines de las justificaciones presentes en los libros de texto seleccionados, identificando también si se explicitan o no tales fines. Además, mencionamos la aproximación al área utilizada en la justificación considerando las planteadas por Freudenthal (1983).

Para ejemplificar la aplicación de las categorías JFA2, JFA4 y JFA6 que caracterizan las justificaciones de las fórmulas presentadas en los textos, consideramos las fórmulas para el cálculo del área del rectángulo y del triángulo. El análisis efectuado se sintetiza en la Tabla Nº 1 que mostramos a continuación:

Tabla 1: Tipo y función de las justificaciones para las fórmulas del área

	Editorial	Justificación de la fórmula para el área del rectángulo			Justificación de la fórmula para el área del triángulo		
		Tipo	**Función**	**Aproximación**	**Tipo**	**Función**	**Aproximación**
5to grado	**A**	No hay justificación			No hay justificación		
	B	Prueba pragmática.	Explicación / verificación (implícito)	Medición por exhausción de unidades.	No se presenta la fórmula.		
	C	No se presenta fórmula para el cálculo del área.					
6to grado	**A**	No hay justificación.			Prueba pragmática	Explicación (implícito)	Transformaciones de romper y rehacer.
	B	No se presenta la fórmula.			Prueba pragmática	Explicación / verificación (implícito)	Transformaciones de romper y rehacer.
	C	No hay justificación.			Prueba pragmática	Explicación / verificación (implícito)	Transformaciones de romper y rehacer.

Como puede apreciarse en la tabla anterior, la discusión sobre al área del rectángulo se presenta en dos textos en 5to grado (Editorial A y B) y en otro en 6to (Editorial C). El momento de introducción de una noción matemática es una decisión que requiere del análisis cuidadoso de las limitaciones y posibilidades que conllevan cada elección. A priori podría suponerse que un tratamiento más temprano tendría exigencias cognitivas de menor complejidad.

Sin embargo, si comparamos los dos textos de 5° que presentan la fórmula para el cálculo del área del rectángulo, vemos diferencias cualitativas en el modo de introducirla: mientras que en el texto de 5º de la Editorial B se presenta una justificación pragmática que recurre al método de exhausción con unidades (ver Figura 1), en el de 5° de la Editorial A no se presenta justificación. En cambio, en el de 6º de la Editorial C se plantean distintas aproximaciones a la aplicación de la fórmula, pero se omite la justificación explícita de la misma.

La segunda elección (5°, Editorial A) nos resulta menos adecuada. En primer lugar, porque limita la posibilidad de los alumnos de construir el sentido de la fórmula. En segundo lugar, porque aún tratándose de una justificación pragmática la observada en el primer ejemplo, permite poner de manifiesto algunas de las funciones de la demostración mencionadas por De Villiers (1993): verificar o

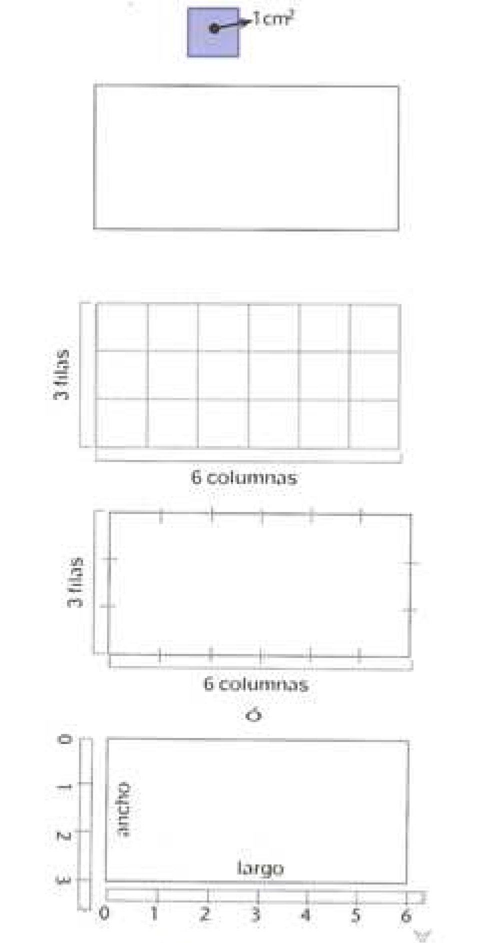


Figura 1. Área del rectángulo.
Libro de Texto para 5° año. Editorial B.

Figura 1

justificar la validez de una afirmación e iluminar o explicar por qué una afirmación es verdadera. Por otra parte, si bien en el tercer ejemplo no se explicita justificación, la introducción paulatina de la fórmula mediante situaciones particulares que ponen en juego el método de exhausción con unidades conocido por los alumnos, posibilita también un aprendizaje constructivo de dicha fórmula.

En lo que respecta a la fórmula para el cálculo del área del triángulo, como puede observarse en la Tabla Nº 1, está ausente en los textos para 5to grado de las Editoriales B y C, mientras que se incluye (sin justificación) en el correspondiente a la Editorial A. En los libros para 6to grado de las tres editoriales se presenta la fórmula mencionada a través de transformaciones de romper y rehacer y se hace notar el hecho de que el área de un triángulo es la mitad del área de un rectángulo. En la descripción de la siguiente categoría presentamos algunas diferencias relacionadas con la interacción del estudiante con el texto. En este punto sólo hacemos notar que, mientras que en el texto de la editorial A se presenta como ejemplo un triángulo isósceles, en los restantes se propone trabajar con otros tipos de triángulos (cuatro triángulos escalenos en el texto de la Editorial B, y dos triángulos rectángulos y uno escaleno no rectángulo en el texto correspondiente a la Editorial C).

Las justificaciones pragmáticas aportadas en estos textos permiten visualizar y comprender el significado de la fórmula para el cálculo del área del triángulo, por lo que manifiestan la función de explicación definida por De Villiers (1993).

Consideramos oportuna la propuesta de las Editoriales B y C. Omitir la fórmula en el texto de 5to grado e introducir y discutir la misma en el de 6to mediante una justificación pragmática, constituye una decisión que está en sintonía con la búsqueda de un tratamiento de la matemática que trascienda el conocimiento memorístico de hechos y que posibilite al alumno actuar como matemático, que es una de las aspiraciones señaladas en el marco teórico. Además, si bien no se desarrolla una demostración formal de la fórmula para el cálculo del área del triángulo, resulta apropiada la elección de triángulos con distintas características para verificar dicha fórmula, puesto que otorga un mayor grado de generalidad a dicha justificación (aunque sean pruebas pragmáticas las que se realizan).

Interacción del estudiante con el texto durante el proceso demostrativo (JFA9).

En relación con el análisis anterior, identificamos el tipo de interacción del estudiante con el texto durante el proceso demostrativo (activo o pasivo).

Tal como puede observarse en las Tablas Nº 2 y 3, sólo dos textos (correspondientes a 6to grado de las Editoriales B y C) dan oportunidad al estudiante de involucrarse activamente en la construcción de la justificación para la fórmula del área del triángulo

Tabla 2:interacción del estudiante con el texto durante el proceso demostrativo de la fórmula del área del rectángulo.

<table>
<tr><th></th><th>Editorial</th><th>Pasivo</th><th>Activo</th></tr>
<tr><td rowspan="3">5to grado</td><td>A</td><td colspan="2">No hay justificación.</td></tr>
<tr><td>B</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td colspan="2">No se presenta fórmula.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">6to grado</td><td>A</td><td colspan="2">No hay justificación.</td></tr>
<tr><td>B</td><td colspan="2">No se presenta la fórmula.</td></tr>
<tr><td>C</td><td colspan="2">No hay justificación.</td></tr>
</table>

Tabla 3: interacción del estudiante con el texto durante el proceso demostrativo de la fórmula del área del triángulo.

	Editorial	Pasivo	Activo
5^to^ grado	**A**	No hay justificación.	
	B	No se presenta la fórmula.	
	C	No se presenta la fórmula.	
6^to^ grado	**A**	X	
	B		X
	C		X

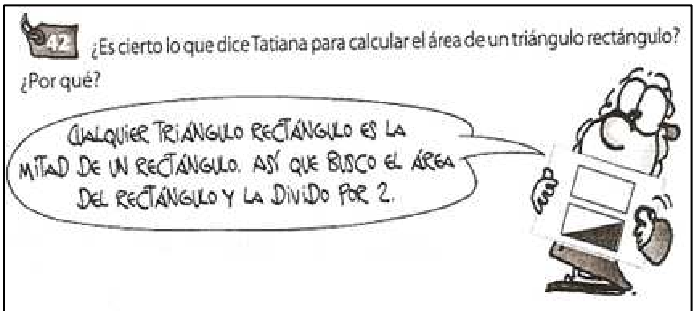


Figura 2. Área del triángulo.

Libro de Texto para 6° año. Editorial C.

Figura 2

Cabe destacar que aunque en los dos textos mencionados se promueve la participación del alumno, en cada uno de ellos la propuesta es diferente.

Mientras que en el texto de la Editorial C se sugiere al alumno analizar la validez de la afirmación "Cualquier triángulo rectángulo es la mitad de un rectángulo. Así busco el área del rectángulo y la divido por 2" (ver Figura 2) para luego aplicar lo obtenido al cálculo del área de triángulos rectángulos particulares y después, a triángulos no rectángulos; en el texto de la Editorial B (ver Figura 3) se parte de un triángulo particular y se invita al alumno a averiguar la relación que existe entre el área de ese triángulo y un rectángulo de igual base y altura. Posteriormente, se lo incentiva a encontrar los rectángulos correspondientes a distintos triángulos dados, tales que el área de los primeros sea igual al doble del área de los segundos.

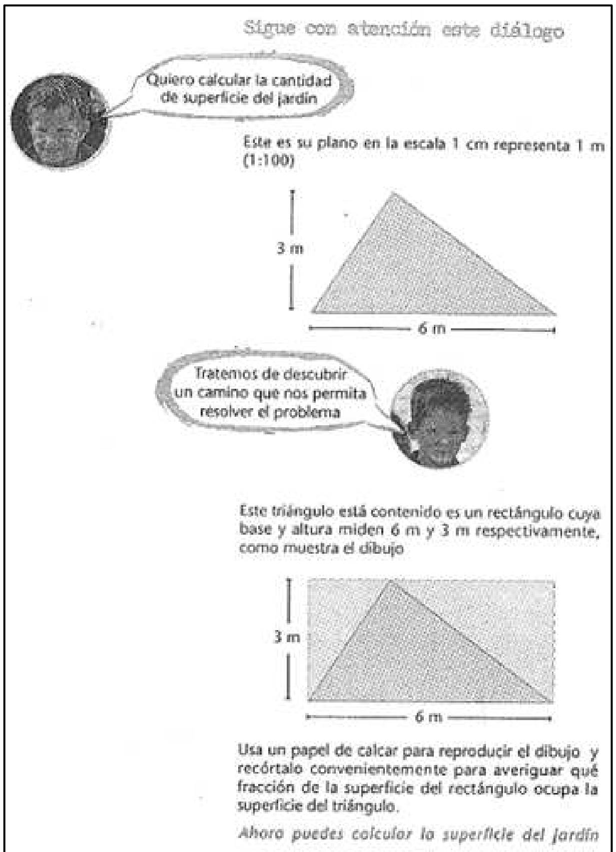


Figura 3. Área del triángulo.

Libro de Texto para 6° año. Editorial B.

Figura 3

5. Reflexiones finales

En primer lugar, consideramos que las categorías seleccionadas para el análisis de los textos presentado permite describir de manera amplia y detallada el tratamiento del concepto de área desarrollado en los libros seleccionados, focalizando el estudio en las distintas aproximaciones al área propuestas, el modo de presentar las fórmulas para el cálculo del área y el tipo de trabajo matemático que se le plantea al estudiante. Además, posibilita comparar los abordajes del tema propuestos en cada uno de los textos y realizar inferencias acerca de posibles derivaciones de los distintos tratamientos en el aprendizaje de los sujetos.

Atendiendo a la importancia de propiciar en el aula la oportunidad de que los alumnos actúen como matemáticos, es decir, que resuelvan problemas, conjeturen y validen, entre otras actividades, pensamos que los textos correspondientes a las editoriales B y C responden en parte a este enfoque. De hecho, proponen al alumno explorar, deducir y justificar la fórmula para el cálculo del área del triángulo. Asimismo, ofrecen la posibilidad de trabajar con distintos tipos de triángulos, de modo de poner de manifiesto la generalidad de la relación que se estudia. Durante el aprendizaje de la demostración, es importante que los alumnos reconozcan la importancia de encontrar argumentos generales, que trasciendan las particularidades de un dibujo o situación específica.

Además, estas dos editoriales mostraron preocupación por distinguir entre perímetro y área, intentando superar errores frecuentes con la confusión de estas magnitudes y su medida, que son señalados por los investigadores (Del Olmo, Moreno y Gil, 1993).

Por otro lado, creemos importante mencionar que en los libros de texto analizados observamos escasas tareas en el mesoespacio y ninguna en el macroespacio. El planteo de propuestas didácticas que exijan la interrelación del alumno con un espacio que excede la hoja de la carpeta o cuaderno, se asemeja más a las situaciones problemáticas que el alumno puede encontrar en la vida diaria e incrementa, por lo tanto, el sentido que el mismo pueda otorgarle al contenido matemático que se esté desarrollando.

Otros aspectos reconocidos en algunos documentos curriculares vigentes, que consideramos deben fomentarse durante el tratamiento del tema área son: el desarrollo de métodos aproximados para el cálculo o comparación de áreas (Freudenthal,1983; Del Olmo, Moreno y Gil, 1993), el incentivo a la realización de estimaciones (Segovia y cols, 1989; Del Olmo, Moreno y Gil, 1993) y de justificaciones en las actividades propuestas (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

El análisis realizado posibilita por un lado, identificar las aproximaciones al concepto de área que promueven un abordaje significativo, fomentando la construcción del sentido de las nociones implicadas. Por otro lado, el estudio de los libros de texto permite caracterizarlos en función de la presencia o ausencia de estas aproximaciones. Algunos investigadores del campo de la didáctica de la matemática sostienen la necesidad de ofrecer a los docentes “herramientas de lectura que les permitan criticar los libros que seleccionan y usan para el trabajo con sus alumnos en las aulas” (Villella, 2007, p. 70). En virtud de lo observado en este estudio, consideramos que la indagación realizada proporciona al docente herramientas para reflexionar sobre un tratamiento significativo del concepto de área.

Bibliografía

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Una empresa docente, Universidad de los Andes, Bogotá.

Battista, T. y Clements, D. (1995). *Geometry and Proof. Mathematics Teacher*, 88(1), 48-54.

Berthelot, R. Y Salin, M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géometrie dans la scolarité obligatoire*. Tesis doctoral. Université Bordeaux 1.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa. Guía práctica*. Ediciones CEAC, SA., Barcelona.

Chamorro Plaza M. C. y Belmonte Gómez J. (1991). *Problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales.* Síntesis, Madrid.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* ICE/Horsori, Barcelona.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla, Madrid.

De Villiers, M. (1993). *El papel y la función de la demostración en Matemáticas. Epsilon*, 26, 15-30.

Del Olmo M. A., Moreno M. F., Gil F. (1993). *Superficie y Volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Síntesis, Madrid.

Freudenthal, H. (1983). *Didactic Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, Reidel Pub. Co.

González Astudillo, M. T. y Sierra Vázquez, M. (2004). *Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. Enseñanza de las ciencias*, 22(3), 389–408.

Kang W., Kilpatrick J. (1992). *Didactic Transposition in Mathematics Textbooks. For the Learning of Mathematics*, 12 (1), 2-7.

Kiener, F., Götte, M. y Scaglia, S. (2009) *El tratamiento del concepto de área en libros de texto. Actas de III Congreso Internacional de Educación* (Santa Fe, Argentina). Recuperado el 10 de noviembre de 2012 de: http://www.unam.edu.ar/2008/educacion/trabajos/Eje%203/332%20-kiener.pdf

Kiener, F., Scaglia, S. y Götte, M. (2010) *¿Cómo se justifican las fórmulas para el área en libros de texto? Actas de la VIII Conferencia Argentina de Educación Matemática*, pp. 67-74. Recuperado el 10 de noviembre de 2012 de: http://www.soarem.org.ar/Documentos/CAREMVIII%20-%202010.pdf

Llanos, V. C. y Otero M. R. (2009). *Argumentación matemática en los libros de la Enseñanza Secundaria: un análisis descriptivo de las características de los libros de texto y de la argumentación*. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC), 4 (1), 37-50. Recuperado el 10 de noviembre de 2012 de http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/

Maz Machado A. (2005). *Números negativos en los siglos XVII y XIX.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (2006). *Núcleos de Aprendizaje Prioritarios. 3º Ciclo EGB/Nivel Medio 7º, 8º y 9º años*. Recuperado el 10 de noviembre de 2012 de http://www.me.gov.ar/curriform/nap.html

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla.

Sanz Lerma I. (1995). *La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos*. Tesis doctoral. Universidad del País Vasco.
Schubring G. (1987). *On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Autor. For the Learning of Mathematics-An International Journal of Mathematics Education*, 7 (3), 41-51.
Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis, Madrid.
Sessa, C. y Cambriglia, V. (2007). *La validación de procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones. Yupana*, 4, 11-24.
Sierra Vázquez M.; González Astudillo M. T. y López Esteban C. (1999). *Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. Enseñanza de las Ciencias*, 17(3) 463-478. Recuperado el 10 de noviembre de 2012 de http://ddd.uab.es/pub/edlc/02124521v17n3p463.pdf
Villela J. (2007). *Matemática escolar y libros de texto. Un estudio desde la Didáctica de la Matemática*. Miño y Dávila, Buenos Aires.

Libros de texto analizados

Buschiazzo, N., Filipputti, S., Lagreca, L., Lagreca, N. y Strazziuso, S. (2002). *Matemática 5. Aprender haciendo matemática*. Grupo P.R.E.M. UNR editora, Rosario.
Buschiazzo, N., Filipputti, S., Lagreca, L., Lagreca, N. y Strazziuso, S. (2001). *Matemática 6. Aprendo haciendo matemática*. Grupo P.R.E.M. UNR editora, Rosario.
Equipo didáctico de la editorial Kapeluz (1985). *Manual Kapeluz 5*. Editorial Kapeluz, Buenos Aires.
Equipo didáctico de la editorial Kapeluz (1985). *Manual Kapeluz 6*. Editorial Kapeluz, Buenos Aires.
Itzcovich, H. (coord.) Becerril, M. B., Ponce, H., Urquiza, M. G. (2007). *Matemática 5*. Primaria. Tinta Fresca, Buenos Aires.
Itzcovich, H. (coord.) Becerril, M. B., Ponce, H., Urquiza, M. G. (2007). *Matemática 6.* Primaria. Tinta Fresca, Buenos Aires.

Fabiana Kiener, Sara Scaglia y Marcela Götte. son profesoras de matemática e investigadoras en educación matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina). Han participado en diversas publicaciones referidas a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. **fkiener@gmail.com, sbscaglia@gmail.com, marcelagotte@gmail.com**

Anexo: Categorías para el análisis de los libros de texto

En este apartado presentamos los criterios para realizar un análisis de contenido de los libros de texto. Por el carácter descriptivo y cualitativo de esta investigación, no definimos variables independientes y siguiendo a Maz Machado (2005) determinamos los siguientes puntos de interés para caracterizar los textos: Estructura de la obra, Contenido sobre el Área y Justificaciones de las Fórmulas. Con el objetivo de llevar a cabo una adecuada sistematización del trabajo, definimos campos de análisis para cada punto de interés.

Para el estudio de la Estructura de la obra establecimos seis campos, agrupados en dos categorías genéricas denominadas: Caracterización General de la Obra (CGO) y Caracterización del Contenido de la Obra (CCO). Para el foco de atención centrado en el Contenido sobre el Área, definimos catorce campos de caracterización llamados genéricamente: Tratamiento del Concepto de Área (TCA). Para el punto de interés centrado en el estudio de las justificaciones de la fórmula, determinamos diez campos denominados genéricamente Justificación de las Fórmulas de Área (JFA).

Identificamos cada campo de análisis con las iniciales de la denominación genérica a la que pertenece, seguida de un numeral. A continuación describimos cada una de las categorías y campos definidos para el estudio de los libros de texto:

1. *Caracterización de la estructura de la obra*.

Este punto está dirigido a la obtención de una visión general de la estructura de cada obra, para poder identificar luego las peculiaridades o variaciones en la presentación de los contenidos matemáticos.

Los campos de la primera categoría definida para este foco de estudio hacen referencia a información general del texto. En cambio, los tres correspondientes a la segunda categoría, “tienen que ver con una parte más específicamente relacionada con el contenido sobre ideas y conceptos básicos en la matemática” (Maz, 2005: 99). Veamos los campos elegidos para caracterizar la estructura de la obra:

1.1. Caracterización General de la Obra

CGO1: Indicamos el año de edición y el lugar donde se imprimió el texto.

CGO2: Señalamos el número de páginas, la forma como está dividido el texto y la distribución de sus contenidos.

CGO3: Indicamos los objetivos, intenciones o deseos explícitos que señala el autor.

1.2. Caracterización del Contenido de la Obra

CCO1: Señalamos la parte del texto dedicada al tratamiento del concepto de área. Indicamos también el tema previo y el posterior al desarrollo de dicho concepto.

CCO2: Señalamos aquellas situaciones en las que se utiliza el concepto de área durante el tratamiento de otros temas.

CCO3: Incluimos aspectos relacionados con el tema área que llaman la atención del texto, pero que no son considerados bajo los campos definidos anteriormente.

2. *Caracterización del tratamiento del concepto de área*.

En este punto de interés sistematizamos la información hallada en el texto concerniente al tema área: presentación, ejemplos, ejercitación, tipo de problemas, contextos y fenómenos. Esto permitirá apreciar los diversos tratamientos por los que se opta en cada texto. Los campos determinados para esta categoría, agrupados bajo el nombre Tratamiento del Concepto Área, son:

TCA1: Detallamos la manera de organizar el tratamiento del tema elegido, si se fragmenta en distintas secciones (introducción, sección de teoría, sección de práctica, ejercicios integrados) o si se combinan estas secciones.

TCA2: Caracterizamos la forma de introducir este concepto por primera vez en el texto.

TCA3: Señalamos el tipo de definición explícita involucrada durante el tratamiento del tema.

TCA4: Indicamos el o los términos utilizado/s en las tareas para referirse al concepto de área.

TCA5: Observamos en este campo el modo en que se establecen las fórmulas para el cálculo de las distintas áreas.

TCA6: Señalamos los tipos de figuras que aparecen en el texto para el tratamiento del área, clasificándolas en cóncavas y convexas. A su vez, cada una de estas categorías se dividen en sub-grupos de figuras con alguna característica en común (por ejemplo, las figuras cóncavas se clasifican en figuras con y sin agujeros y figuras con lados rectos y curvos).

TCA7: Explicitamos las distintas unidades que propone el texto para el cálculo o comparación de áreas. Este campo se clasifica en “convencional” (1 cm^2, 1 dm^2, etc.) y “no convencional” (por ejemplo, una baldosa).

TCA8: Mencionamos los materiales propuestos en el texto durante el tratamiento del área con el número de tareas en que se empleó cada uno.

TCA9: Analizamos el aspecto fenomenológico a partir de las aproximaciones al concepto de área propuestas por Freudenthal (1983) incluidas en el marco teórico.

TCA10: Clasificamos las tareas planteadas en libros de texto durante el tratamiento del concepto de área. Para ello, diferenciamos primeramente las tareas según el propósito que persigan:

1. Cálculo del área: En esta categoría incluimos las tareas en las que se propone hallar el área de una figura.

2. Comparación o reproducción de áreas: Mencionamos aquí las tareas en las que se plantea comparar áreas de diferentes figuras o construir una figura con un área determinada.

3. Relación entre magnitudes unidimensionales de una figura y su área: Identificamos en este campo aquellas tareas en las que se propone el establecimiento de relaciones entre magnitudes unidimensionales de una figura –longitudes de los lados, diámetro o radio de un círculo, perímetro de una figura- y el área de la misma.

En todos los casos, realizamos una clasificación de acuerdo con las características del método utilizado para la resolución de la tarea, a saber:

- Métodos Idealmente Exactos (M.I.E.): identificamos aquellas tareas en las que se calculan, comparan o reproducen áreas recurriendo a fórmulas, propiedades o relaciones matemáticas.

- Métodos Aproximados (M.A.): mencionamos aquellas tareas en las que se precisa estimar medidas de longitud o de área para el cálculo, comparación o reproducción de áreas.

Distinguimos además las tareas que requieren procedimientos ya conocidos por el alumno (P.C.) teniendo como base las consignas previas del texto, de aquellas en las cuales se debe crear un procedimiento para poder resolverlas (P.D). Asimismo, diferenciamos las tareas en las que se propone explícitamente una justificación por parte del alumno (c/j) acerca de las conclusiones arribadas, de aquellas en las que no se pide explícitamente el desarrollo de una justificación (s/j).

TCA11: Establecemos el tamaño del espacio con el cual el sujeto entra en interacción en cada tarea, siguiendo a Gálvez (1985, citado en Berthelot y Salin, 1992).

TCA12: Mencionamos el número de tareas en las que se pide al alumno el establecimiento de relaciones entre el área y el perímetro de una figura.

TCA13: Señalamos el conjunto numérico (naturales, enteros, racionales,…) utilizado en las distintas tareas, a lo largo del tratamiento del tema elegido.

TCA14: Incluimos cuestiones de interés que no se consideran en los campos anteriores.

3. *Estudio de las justificaciones para las fórmulas de área en libros de texto*

Con el objetivo de llevar a cabo una adecuada sistematización del trabajo, definimos campos de análisis para el estudio de las justificaciones. Para el establecimiento de dichos campos, tuvimos en cuenta los aportes de Balacheff (2000) y de Freudenthal (1983) mencionados en el marco teórico.

A continuación describimos los campos definidos para el estudio:

JFA1: Citamos fragmentos del texto y describimos la manera en que se introduce determinada fórmula para el cálculo de superficies.

JFA2: Determinamos el tipo de justificación presentada para cada fórmula. Consideramos la clasificación en pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales dadas por Balacheff (2000).

JFA3: Explicitamos el lugar que ocupa el tratamiento de cada fórmula durante el desarrollo del tema área, es decir, qué cuestiones le preceden y le siguen.

JFA4: Siguiendo a De Villiers (1993), planteamos un análisis de los fines de las justificaciones presentes en los libros de texto seleccionados, identificando también si se explicitan o no tales fines.

JFA5: Identificamos las expresiones utilizadas durante la justificación de una fórmula. El interés de este campo radica en determinar si aparecen expresiones del tipo si… entonces, hipótesis, tesis, etc. (Ibañes y Ortega, 2004) que caracterizan las deducciones lógicas; o del tipo: observa, fíjate, en la figura se puede ver, si recortamos, etc. que caracterizan a las pruebas pragmáticas, ya que hacen referencia a aspectos sensoriales.

JFA6: Mencionamos la aproximación al área utilizada en la justificación considerando las planteadas por Freudenthal (1983).

JFA7: Identificamos las reflexiones, si es que existen, sobre cada justificación particular, sobre el tipo de razonamiento que se hace, sus características, efectos y distinciones con respecto a otras posibles justificaciones (Ibañes y Ortega, 2004).

JFA8: Identificamos las explicaciones, si es que existen, sobre el proceso de demostrar, sobre su significado, la distinción entre el enunciado y la justificación, y si en el texto se señalan otras posibles vías de justificación (Ibañes y Ortega, 2004).

JFA9: Describimos el rol del estudiante en la interacción con el texto durante la presentación y/o justificación de las fórmulas (pasivo o activo).

JFA10: Señalamos cuestiones que no se consideraron en los campos anteriores y que merecen ser mencionadas.

Nota: Cabe destacar que las categorías establecidas no resultan mutuamente excluyentes.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 89-107

Un experimento de enseñanza sobre el límite de una función. Factores determinantes en una trayectoria de aprendizaje

Mauro Mira López, Julia Valls González, Salvador Llinares

Fecha de recepción: 25/08/2011
Fecha de aceptación: 14/06/2013

Resumen	El objetivo del estudio fue identificar características de la construcción del significado de límite de una función en estudiantes de bachillerato (16-17 años). Se diseñó un experimento de enseñanza utilizando una descomposición genética (APOE) del concepto de límite de una función integrando recursos informáticos. Se usó el constructo "Reflexión sobre la Relación Actividad-Efecto" (Simon, Tzur, Heinz y Kinzel, 2004) como una particularización de la abstracción reflexiva para identificar factores que configuran la Trayectoria de Aprendizaje. Los resultados indican que la trayectoria está determinada por la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en diferentes tipos de funciones. **Palabras clave**: Límite de una función, experimento enseñanza, recursos tecnológicos.
Abstract	The goal of this study is to identify characteristics of post-secondary students' construction of meaning of function limit. We design a teaching experiment drew upon a genetic decomposition (APOS) of the concept of limit of function integrating technologics resources. Using "reflection on relation activity-effect" construct (Simon, Tzur, Heinz y Kinzel, 2004) derivated from Piaget's reflective abstraction notion we identify factors in the learning trajectory arose. The findings indicate that the different learning trajectories that emerge were determined by how coordination between approximations in rage and domain were set in different functions. **Keywords**: Function limit, teaching experiment, technologics resources.
Resumo	O objetivo deste estudo é identificar as características da construção do significado de limite de uma função no pós-secundário estudantes em obrigatória (16-17 anos). Nós projetamos uma experiência de ensino, considerando uma análise genética (APOS) do conceito de limite de uma função com a integração de recursos de tecnologia. Usamos el constructo "reflexão sobre a atividade-efeito" (Simon, Tzur, Heinz e Kinzel, 2004) como uma particularização da abstração reflexiva (Piaget) para identificar os fatores que moldam a trajetória de aprendizagem. Os resultados indicam que o trajectória de aprendizagem é determinada pela coordenação das tendencias in intervalos em diferentes tipos de funções. **Palavras-chave:** Limite de uma função, experiência de ensino, recursos de tecnologia.

1. Introducción

El aprendizaje del concepto de límite plantea dificultades a los estudiantes tal como confirman desde hace algún tiempo las investigaciones (Cornu, 1991; Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas y Vidakovic, 1996; Sierra, 2000; Blázquez y Ortega, 2001; Elia, Gagatsssi, Panaoura, Zachariades & Zoulinaki, 2009; Valls, Pons y Llinares, 2011). Los resultados de estas investigaciones indican que el concepto de límite de una función es difícil de comprender. En particular, Orton (1980) señala que los estudiantes tienen dificultades en la conceptualización de los procesos de límite que sustentan el concepto de derivada y en la utilización apropiada de las representaciones gráficas, mientras que Cornu (1991) indica que estas dificultades están vinculadas a que el concepto de límite es uno de los primeros en el que las matemáticas no están restringidas a un cómputo finito.

Artigue (1995) organizan las dificultades de los estudiantes con las ideas del cálculo en tres grupos, (a) la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo, (b) la conceptualización y formalización de la noción de límite y a su tratamiento en la enseñanza, y (c) la distancia entre el pensamiento analítico y el algebraico. En relación a la conceptualización y formalización de la noción de límite y a su tratamiento en la enseñanza, Hardy (2009) indica que hay diferencias entre las percepciones de los profesores en relación al concepto de límite generadas desde las praxeologías puestas en funcionamiento en las instituciones de enseñanza y las percepciones de los estudiantes generadas a partir de las estrategias y creadas de manera espontánea para superar los exámenes. Finalmente, la influencia de los diferentes modos de representación en el desarrollo de la comprensión del significado de límite de una función muestra la distancia entre el pensamiento analítico y el algebraico en el aprendizaje de este concepto (Blázquez y Ortega, 2000; Elia et al., 2009; Moru, 2009).

En relación a la complejidad matemática del concepto de límite Freudenthal (1983), a través del análisis fenomenológico de este concepto, pone al descubierto la presencia de dos fenómenos específicos de diferente naturaleza, los fenómenos de Aproximación Intuitiva (AI) y los de Aproximación doble intuitiva (ADI). La aproximación intuitiva remite a la evolución de las variables dependiente e independiente en el caso de funciones reales de variable real con límite finito en un punto. El alumno al iniciar su aprendizaje cree que hay dos aproximaciones, la de la sucesión de valores de la variable independiente hacia un valor y la de la sucesión de valores de la variable dependiente hacia el límite; y es consciente, o no, de la conexión que la función f establece entre ambas sucesiones. Los fenómenos de Retroalimentación se manifiestan al interpretar y aplicar las acciones incluidas en la definición formal de límite desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función (ε-δ para funciones). Cada retroalimentación corresponde a un proceso de ida-vuelta: una vez establecido el entorno en el límite con el ε en el eje de ordenadas hay que coordinar con un entorno en el eje de abscisas para determinar el correspondiente δ asociado, y comprobar que las imágenes de valores correspondientes al eje de abscisas pertenecen al entorno considerado. Este fenómeno es puesto de relieve cuando se estudia el proceso de construcción del significado (Swinyard, 2011). En particular, Kidron (2010), en un estudio de casos sobre el proceso de construcción del significado de la idea de límite en la definición de la asíntota horizontal, encontró que los estudiantes, en su esfuerzo por realizar las diferentes tareas propuestas, se encontraban en una situación de conflicto entre su imagen del concepto de la asíntota horizontal y la definición del concepto. Este conflicto ponía de manifiesto la dificultad en dotar de sentido a la aproximación doble intuitiva y el papel desempeñado por el razonamiento algebraico y analítico de manera complementaria al razonamiento numérico para revisar su imagen del concepto visto desde la perspectiva teórica de la abstracción en contexto (Hershkowitz, Schwarz y Dreyfus, 2001). Por otra parte, Prezenioslo (2004), al estudiar las distintas concepciones sobre el concepto de límite de los estudiantes, indica que la más eficiente es la que se centra en la vecindad y que la concepción de límite de una función que se apoya en considerar la aproximación de sus valores es más eficiente que la idea basada en la aproximación de puntos de la gráfica. Además, Tall y Vinner (1981) indican que el proceso dinámico, es decir, cuando x se aproxima hacia "a" entonces f(x) se aproxima al límite sin alcanzarlo, entra en conflicto con la definición formal del límite, puesto que prevalece sobre ésta.

Estas investigaciones han puesto de manifiesto que en la coordinación entre las aproximaciones en el eje de abscisas y el eje de ordenadas los diferentes modos de representación desempeñan un papel relevante para poder explicar la relación entre la aproximación métrica y dinámica en el proceso de construcción del significado de límite. En particular, Duval (1998) señala que para comprender un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, pues con uno sólo no se obtiene su comprensión. Esta perspectiva ha puesto de manifiesto el papel primordial de los diferentes modos de representación y de las traslaciones y conversiones entre ellos para comprender los procesos de construcción de los significados del concepto de límite por parte de los estudiantes. En particular, Elia y sus colaboradores (2009) ha investigado los obstáculos epistemológicos que los estudiantes de matemáticas encuentran en el límite de funciones en diferentes modos de representación. Sus resultados indican que los estudiantes que habían construido una comprensión conceptual de límite fueron los que más conversiones entre límites algebraicos y geométricos lograron y al revés. Una consecuencia de estos resultados sobre las dificultades de los estudiantes con el significado del límite es la generación de implicaciones para la enseñanza que intentan superarlos (Camacho y Aguirre, 2001; Engler, Vrancken, Hecklein, Müller y Gregorini, 2007; Contreras y García, 2008). De esta manera, Fernández (2000) propone sistemas didácticos para trabajar el concepto de límite a partir de programas informáticos específicos tales como el Derive. Sin embargo, Monagham, Sun y Tall (1994) indican que el uso de la tecnología no garantiza que los estudiantes puedan superar las dificultades con el concepto de límite de una función. Esta situación plantea interrogantes sobre cuáles deben ser las características de las secuencias de enseñanza que tengan en cuenta la información reunida hasta estos momentos por las investigaciones sobre el aprendizaje del concepto de límite.

La investigación presentada aquí tiene como objetivo identificar

- características del proceso de construcción del significado del concepto de límite de una función, y
- factores de las secuencias de enseñanza que parecen influir en ese proceso de construcción.

El contexto fue un experimento de enseñanza organizado considerando una trayectoria hipotética de aprendizaje del concepto de límite. El experimento de enseñanza fue diseñado usando tareas que integraban recursos tecnológicos y considerando la concepción dinámica y métrica de límite (Blázquez y Ortega, 2002). La concepción dinámica de límite (figura 1) entendida como

- Sea "f" una función y "x" un número real
- "x" se aproxima al número "a"
- "f(x)" se aproxima a "L" cuando "x" se aproxima al número "a", sus imágenes "f(x)" se aproxima a "L"

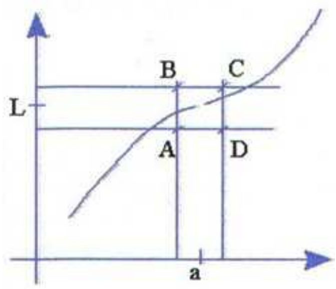


Figura 1. Representación gráfica de la concepción dinámica de límite: aproximación y coordinación
Fuente: Bláquez, Ortega, Gatica y Benegas, 2006

Y la concepción métrica de límite (figura 2) entendida como:

- Sea "f" una función y "x" un número real.
- Si se puede encontrar para cada ocasión un "x" suficientemente cerca de "a" tal que el valor de "f(x)" sea tan próximo a "L" como se desee" entonces decimos que existe límite de la función, L, en el punto a, se escribe $\lim_{x\to a} f(x) = L$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0 : \forall x \left(0 < |x - a| < \partial \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right)$$

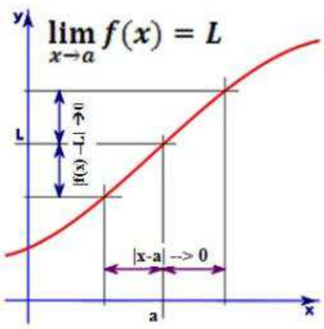


Figura 2. Representación gráfica de la concepción métrica de límite: cuantificación

2. Marco teórico

La perspectiva teórica adoptada procede de una particularización de la idea de Abstracción Reflexiva, entendida como las acciones y operaciones del sujeto y los esquemas que le conduce a construir conocimiento (Piaget y García, 1982) realizada por Simon y Tzur (2004). Estos autores señalan que las acciones de los estudiantes producen diferentes efectos que pueden ser considerados por el estudiante en el desarrollo de procesos de abstracción. Sin embargo, los estudiantes deben centrarse únicamente en aquellos efectos que son relevantes para el desarrollo del concepto matemático implicado. Simon y Tzur denominan a este proceso Reflexión sobre la Relación Actividad-Efecto para dar cuenta de cómo funciona el proceso de Abstracción Reflexiva. El mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto consiste en dos tipos de comparaciones: (a) entre el objetivo del estudiante y los efectos de la actividad, lo que lleva a una clasificación de los registros actividad-efecto y, (b) entre las diferentes situaciones que dan lugar a cada tipo de registros actividad-efecto, lo que lleva a abstraer la relación actividad-efecto como una regularidad anticipada y razonada (Tzur, 2007).

La reflexión sobre la relación actividad-efecto comienza cuando el estudiante debe resolver una determinada tarea. La demanda de resolución genera un objetivo para el estudiante (Objetivo del estudiante) que determina una serie de acciones mentales que dependen de su conocimiento previo. Para poder alcanzar su objetivo, el estudiante realiza alguna actividad o secuencia de actividades (Actividad dirigida por el objetivo) proporcionando la posibilidad de prestar atención a los efectos de la actividad realizada (Efecto de la actividad) en relación con lo que pretende conseguir. En este proceso de observación de los efectos de la actividad, el estudiante crea registros mentales (Registros de la relación Actividad-Efecto). En función del efecto obtenido y de la necesidad de alcanzar su objetivo, el estudiante realiza ajustes para aproximarse al logro del objetivo. Estas variaciones son intencionadas. Al llevar a cabo una nueva actividad (o un ajuste de la actividad inicial), ésta produce un nuevo efecto. Así, los registros mentales en los que se relaciona cada actividad con el efecto que produce son clasificados y comparados.

Esta comparación de registros mentales lleva a la identificación de estructuras y/o patrones en la relación entre actividad y efecto (Regularidad en la relación actividad-efecto). De esta forma la reflexión lleva al estudiante a la Abstracción Reflexiva de regularidades en la relación actividad-efecto. La abstracción se produce al identificar regularidades en el conjunto de relaciones registradas y es la base del nuevo concepto o estructura que forma parte del proceso de resolución de la tarea propuesta. Además, haber abstraído la regularidad en la relación actividad-efecto al realizar la comparación de las diferentes situaciones que la generaron permite al estudiante anticipar los efectos de nuevas actividades sin necesidad de llevarlas a cabo. Tzur y Simon, desde la noción de Abstracción Reflexiva de Piaget, asumen que estos procesos mentales de los estudiantes son elementos constituyentes de la comprensión de un objeto que involucra 2 fases:

- La Fase Participativa, en la que los estudiantes desarrollan diferentes actividades guiados por el objetivo de resolver la tarea y generan diferentes efectos (resultados de la actividad). La reflexión inicial sobre la relación entre la actividad y el efecto producido permite generar ideas pertinentes para la resolución de la tarea que inicialmente sólo está disponible en el contexto del tipo de tarea propuesta. Por ejemplo, el estudiante al evaluar el valor de una función f en puntos cercanos o igual a *"a"* puede generar una idea sobre la relación entre la cercanía de los puntos a a y el comportamiento de los valores de la función. Esta idea inicial es considerada como una anticipación provisional (en el sentido de no duradera) de la regularidad en la relación actividad-efecto (al evaluar f en un solo proceso en el que $f(x)$ se acerca a L como x a *"a"*).

- La Fase de Anticipación, en la que ante una determinada tarea cuya resolución involucra el uso por parte de los estudiantes de un concepto matemático y este solo tiene que considerar pertinente el uso del concepto matemático en la resolución de esta tarea. El estudiante puede hacer uso del concepto de manera adecuada independientemente del contexto o tarea. La distinción entre las dos fases surge de la observación del fracaso de los estudiantes en el uso de concepciones matemáticas que habían utilizado con éxito en ocasiones anteriores.

2.1. Trayectoria hipotética de aprendizaje

Esta forma de entender el desarrollo de las estructuras mentales por parte de los estudiantes y el aprendizaje conceptual proporciona referencias para pensar en cómo una secuencia de tareas puede promover el aprendizaje. Es decir, establecer de manera explícita relaciones entre las características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje en los estudiantes y las características de secuencias de enseñanza (identificar objetivos de aprendizaje, definir secuencias de tareas y contribuir a una evaluación detallada de las comprensiones matemáticas de los estudiantes) (Tzur, 2007; Simon y Tzur, 2004). Desde esta hipótesis inicial, se han empezado a considerar 3 tipos de tareas que pueden ayudar a los estudiantes en la construcción de un nuevo concepto entendiendo este proceso de construcción desde la perspectiva de la reflexión sobre la relación actividad-efecto (Tzur, 1999):

- Tareas iniciales: que pueden ser realizadas por los estudiantes haciendo uso de sus conocimientos previos. Estas tareas pueden usarse para que el estudiante lleve a cabo ciertas experiencias que posteriormente se convertirán en material para la reflexión y la abstracción de regularidades en la relación actividad-efecto.
- Tareas de reflexión: a partir de las actividades realizadas por los estudiantes al resolver tareas iniciales, el profesor puede proponer tareas de reflexión que dirigen a los estudiantes a centrar su atención en los registros actividad-efecto. El objetivo es que el estudiante reflexione sobre dicha relación para generar la abstracción de regularidades en la relación actividad-efecto.
- Tareas de anticipación: para llevar a cabo estas tareas es necesario hacer uso de una regularidad en la relación actividad-efecto, de forma que las tareas de anticipación sitúan al estudiante ante la necesidad de obtener información a partir del conjunto de registros. Para realizarlas es necesario que se haya producido la abstracción de la regularidad en la relación actividad-efecto.

Las tareas iniciales se usan para promover la creación y reconocimiento de ciertas experiencias, las tareas reflexivas para dirigir la atención del estudiante a la relación actividad-efecto, y las tareas de anticipación para provocar la abstracción de regularidades. En este contexto, un concepto es considerado como una relación mental dinámica entre una actividad y sus efectos.

2.2. Preguntas de investigación

Considerando la problemática de investigación inicialmente descrita, los objetivos generados y la perspectiva teórica adoptada, las preguntas que nos planteamos fueron:

- ¿Cómo se genera la coordinación entre aproximaciones en la construcción del significado del límite de una función?
- ¿Cómo identifican los estudiantes las relaciones de actividad-efecto desde las diferentes coordinaciones?

3. Método

3.1. Participantes y diseño del experimento de enseñanza

En este experimento de enseñanza participaron ocho estudiantes (cinco chicos y tres chicas) de 1º de Bachillerato de Ciencias (16 y 17 años). Estos estudiantes no habían recibido ninguna enseñanza previa en relación al concepto de límite de una función. Se diseñó una secuencia de enseñanza de 10 clases de 50 minutos. La primera clase tenía como objetivo introducir a los estudiantes al programa DERIVE y las otras nueve clases se organizaron en 3 módulos de 3 clases cada uno. Las tareas en estos módulos tenían como objetivo recordar aspectos relativos a las funciones (módulo 2), el desarrollo del significado de la idea de tendencias y aproximación (módulo 3) y el significado de límite (módulo 4) e integraban los modos algebraico, gráfico y numérico. Las tareas eran de tres tipos: (a) iniciales, (b) de reflexión y, (c) de anticipación. En cada bloque las tareas propuestas debían ser resueltas por los estudiantes en parejas. El módulo 2 (Función) estaba compuesto por 13 tareas, el módulo 3 (Tendencias y aproximaciones) por 6 tareas, y el módulo 4 (Límite por aproximación métrica) por 2 tareas.

En la primera clase los estudiantes se familiarizaron con los programas informáticos, Derive 6.0- comandos e iconos más usuales- y Camstudio- manejo del programa de grabación oral y de pantalla. La secuencia de tareas propuestas en los tres módulos (funciones, tendencias y límite) tenía en cuenta los aspectos de la trayectoria hipotética de aprendizaje del concepto de límite desde las perspectivas dinámica y métrica conjeturada previamente:

1. Aproximación a un punto “a”.
2. Coordinación entre f(x) se acerca a L como x se acerca a “a”.
3. Límite como cuantificación de distancias métricas que tienden a cero.

Las trece tareas que conformaban el módulo 2 (funciones) estaban organizadas según el esquema descrito en la figura 3. Estas tareas se formularon teniendo en cuenta los resultados de las investigaciones de Blázquez y Ortega (2002) y Robinet (1983) en el sentido de utilizar funciones sencillas, parábolas, hipérbolas, etc., más adecuadas para estas edades, intentando coordinar los valores de “x” e “y”. El objetivo de este módulo fue recordar aspectos relativos a la idea de función como un paso previo al proceso de construcción del significado de límite de una función.

Figura 3. Contenido Módulo 2 (Funciones)

En el módulo 3 (Tendencias y aproximaciones) las seis tareas propuestas estaban centradas en tendencias finitas e infinitas (figura 4). En particular, sobre tendencias laterales finitas en representación algebraica y gráfica. Los objetivos de este módulo fueron:

- Generar contextos para determinar el nivel de aceptación de la existencia de límite.
- Discriminar los límites laterales.
- Establecer relaciones entre la existencia del límite a la de los límites laterales.

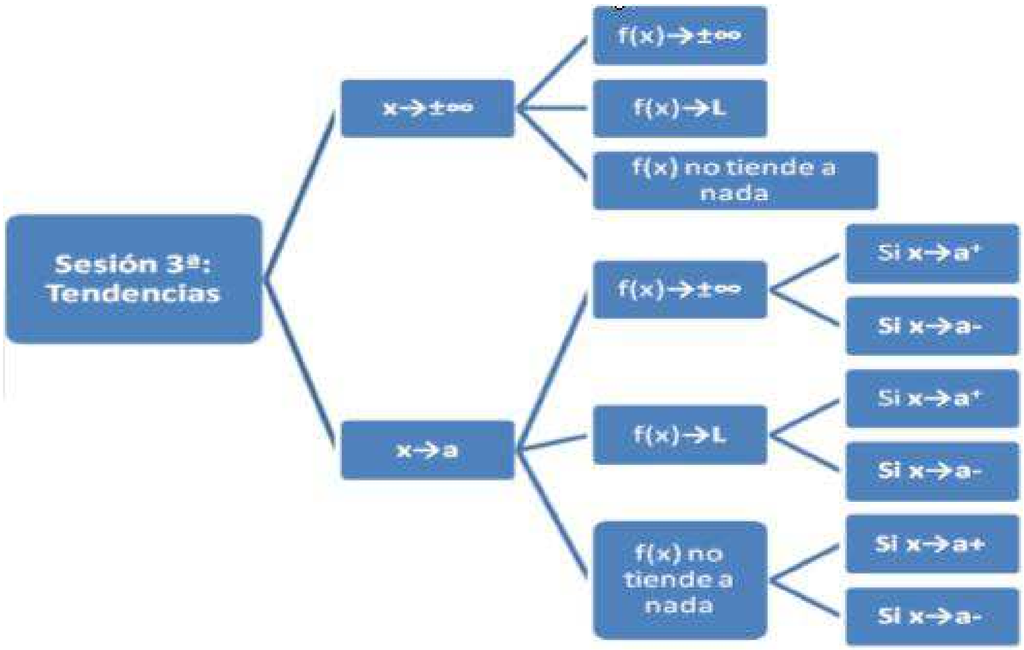


Figura 4. Contenido Módulo 3 (Tendencias y aproximaciones)

Por último, en el módulo 4, se introdujo la idea de límite de una función como aproximación métrica. El objetivo de las tareas de este módulo era apoyar a los estudiantes en la traslación desde la fase de participación a la fase de anticipación en la construcción del significado de límite de una función. Esta transición es clave en el proceso de construcción del significado del límite permitiéndonos identificar las dificultades que podrían surgir en la idea de límite a través de una función en modo de representación gráfica y que tiene un límite lateral finito y otro infinito, o a través de la tabla de una función con límites laterales distintos. El contenido del módulo 4 (límite) se muestra en la figura 5.

Figura 5. Contenido Módulo 4 (Límite por aproximación métrica: LAM)

La tabla 1 recoge ejemplos de tareas tipo propuestas en cada uno de los módulos diseñados.

Tabla 1. Algunas de las tareas propuestas en los módulos diseñados

	Ejemplo	Objetivo
Módulo 2: Funciones	*Tareas F-6.Dibujad las funciones a. f(x) = 3x b. g(x) = 3x2 + 1 (a partir del comando gráfico)*	*Analizar cómo los estudiantes relacionan el dominio y el recorrido de una función intuitiva o formalmente*
Módulo 3: Tendencias	*Tareas T-1 y T-2.-Calcula los siguientes límites y explícalos razonadamente antes de dibujarlos. Compruébalos con el ordenador, con una tabla, o desde el cursor y su gráfica.* *a)* $\lim\limits_{x\to -4}\frac{-1}{x+4}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x+6}{x+3}$	*Analizar cómo los estudiantes coordinan las aproximaciones a "x" con las respectivas tendencias de "y"*
Módulo 4: Limites	Tarea L-1. Haced una tabla de |x-a| y |f(x)-L| para ver sus tendencias, en x=3 Para ello buscad números "a" próximo a 3, para la función: f(x) = x2 – 2 Tarea L-2. Haced lo mismo con la siguiente función y concluir si hay límite y por qué $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 \; si \; x < 3 \\ 2x \; si \; x \geq 3 \end{cases}$	• Analizar si los estudiantes son capaces de observar que las distancias tienden a cero. • Analizar si los estudiantes son capaces de concluir que el hecho de qué las distancia tiendan a cero o no implica la existencia o no de límite de la función en el punto x =3

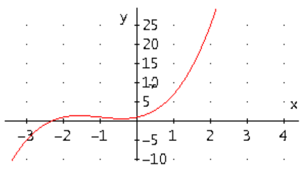
Los estudiantes realizaron las tareas por parejas en un aula de informática. Para recoger sus interacciones durante la resolución de las diferentes tareas usamos el programa Cam-Studio (http://camstudio.es/) que es un software libre que permite realizar la grabación de todo lo que sucede en el escritorio, grabando tanto la pantalla completa, como ventanas o zonas definidas, así como el audio que esté activo en ese momento, generando un fichero en el formato de vídeo AVI y utilizando el generador de SWF en formato Flash creando un fichero de peso reducido y con soporte para Streaming de vídeo sobre flash.

3.2. Datos

Los datos de esta investigación fueron las transcripciciones de las grabaciones orales (tabla 2) y de pantalla del ordenador obtenidas desde el programa Camstudio (figura 6) de cada una de las parejas participantes que fueron codificadas por las iniciales de sus nombres.

También se dispuso para esta investigación de las respuestas a un cuestionario de 9 tareas en los que se hacía referencia a aspectos de la concepción de aproximación dinámica y métrica de límite en diferentes representaciones: numérica (N), gráfica (G), tabla (T), algebraica (A), lenguaje formal (LF), lenguaje natural (LN). Los participantes en el experimento de enseñanza respondieron a este cuestionario al finalizar todas las sesiones y con el objetivo de establecer la comprensión que habían adquirido del concepto de límite como un indicador complementario de la información generada sobre el proceso de construcción.

Tabla 2. Transcripción de la pareja K-R a las respuestas orales de la tarea 1 del módulo 2

Sesión 3: 02-12-09 Tendencias	
Tarea T-1.- Dibujad la siguiente función y comprobad con el cursor y con el zoom que le ocurre a la "y" cuando la "x" aumenta mucho, es decir, ¿hacia dónde- a qué valor- se acerca la función cuando x aumenta mucho, tiene un valor muy grande? $y = x^3 + 3\cdot x^2 + 2\cdot x + 1$ 	
L1	R: bueno, vamos a dibujar una función, ehhhh…
L2	K: Mauro puedes ir un poco (no se oye bien) que veamos la otra.
L3	K: un poco para que veamos la otra.
L4	K: ¡ya!
L5	R: 2x más 1
L6	R: Bueno, pues vamos a dibujar la función.
L7	R: ¿es una pregunta? (a K)
L8	R: Vamos a ir viendo
L9	R: vamos a ver….

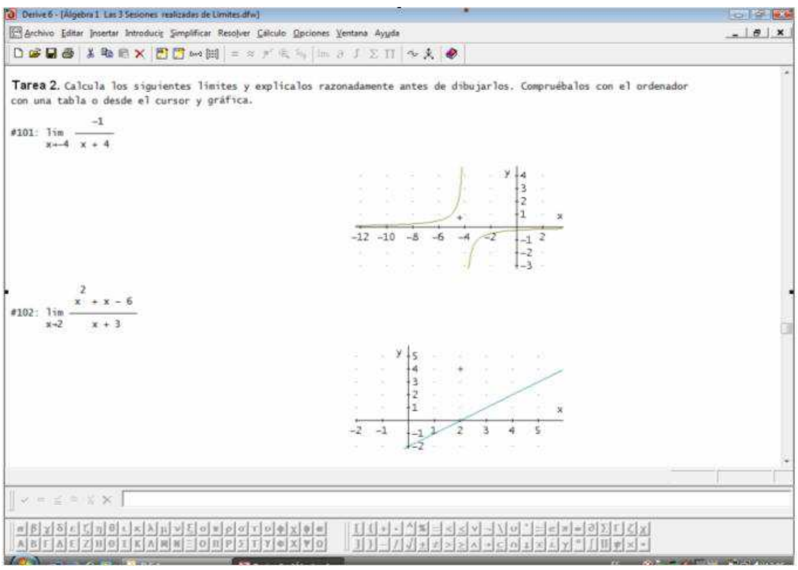


Figura 6. Pantalla del ordenador de la respuesta dada por la pareja R-K a la Tarea 2 del módulo 3

3.3. Análisis

El análisis de los datos se realizó en tres etapas:

Etapa 1. En esta etapa se hizo un análisis pre-analítico a partir de las transcripciones realizadas y de las verbalizaciones de los estudiantes y de sus interacciones al resolver las tareas. Este análisis pre-analítico tenía como objetivo identificar evidencias de relaciones entre la actividad-efecto en el contexto de la coordinación de las aproximaciones y de las diferencias en el dominio y rango.

Etapa 2. En esta etapa se trató de caracterizar la fase de participación a partir de la lectura conjunta de todos los comentarios pre-analíticos.

Etapa 3. En esta última etapa se trató de establecer si los estudiantes hacían uso del concepto al responder correctamente a tareas donde se les pedía conjeturar el límite de una función desde su expresión algebraica y gráfica, es decir, dando evidencias de encontrarse en la Fase de anticipación.

4. Resultados

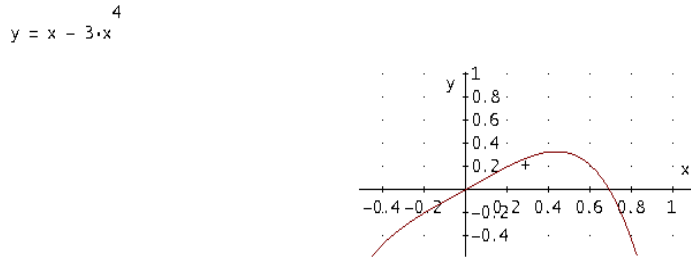
En este informe presentamos las características del proceso de construcción del significado de la idea de límite de una función en un entorno de aprendizaje que favorece la complementariedad entre las concepciones dinámicas y métricas y las relaciones entre los diferentes modos de representación usando evidencias procedentes de una de las parejas participantes (R-K). El proceso de construcción de los significados se describe considerando las fases participativas y anticipativa puestas de manifiesto por la reflexión sobre la relación actividad-efecto generadas durante la resolución de las diferentes tareas. Los resultados se muestran en función de las relaciones entre la actividad-efecto y las fases de transformación conceptual.

4.1. Relaciones entre la actividad-efecto

Hemos identificado evidencias de relaciones entre la actividad-efecto, en el contexto de la coordinación de las aproximaciones y de las diferencias en el dominio y rango de funciones. Por ejemplo, en el desarrollo de las tareas del módulo 2 sobre la idea de función, al resolver la tarea T.2 (tabla 2), centrada en el significado de la idea de función como relación entre variables, los estudiantes dibujan la gráfica de la función y prestan atención al efecto sobre la función de la modificación de los valores de la x. El diálogo entre los dos estudiantes (líneas L2 a la L5 de la tabla 2) pone de manifiesto la manera en la que el discurso sobre las representaciones gráficas generadas indica cómo estaban estableciendo la relación entre la acción de mover el cursor (cambio de los valores de la x) y el efecto producido en el comportamiento de la función (efecto de la acción). Esta actividad permite asumir que los estudiantes estaban en condiciones de crear registros mentales de lo que estaba sucediendo mientras resolvían la tarea en relación a la tendencia de la función (línea L10 de la tabla 3).

Tabla 3. Ejemplo de relación entre la actividad-efecto

Tarea T.2.- Dibujad la siguiente función y comprobad con el cursor y con el zoom que le ocurre a la "y" cuando la "x" aumenta mucho, es decir, ¿hacia dónde- a qué valor- se acerca la función cuando x aumenta mucho, tiene un valor muy grande?



L1	R: tiende (R y K murmullan pero apenas se oye)
L2	R: en la 2ª gráfica cuando “x” aumenta mucho, la “y” disminuye.
L3	K: si la “x”…
L4	R: si la “x” aum… a ver , si la “x” está aumentando la “y” aumenta, pero llega un punto que la y un tal
L5	K: disminuye
L6	R: entonces, cuando la “x” aumenta mucho
L7	K: la “y” disminuye
L8	R: la “y” disminuye… ahí mide tanto (no se oye bien)...tómatelo por F5 (no se oye bien)
L9	K: no, pero por (no se oye bien)
L10	R: más o menos un poco antes de 0,5 tiende a disminuir

4.2. Fases de transformación conceptual

Los estudiantes que forman la pareja R-K solo son capaces de adelantarse a los resultados desde la perspectiva de la conceptualización dinámica de límite, cuando están experimentando aproximaciones a un punto finito e infinito en funciones continuas a partir de sus representaciones gráficas (tabla 4).

Tabla 4. Evidencia de pertenencia a la “fase de participación” de la pareja R-K

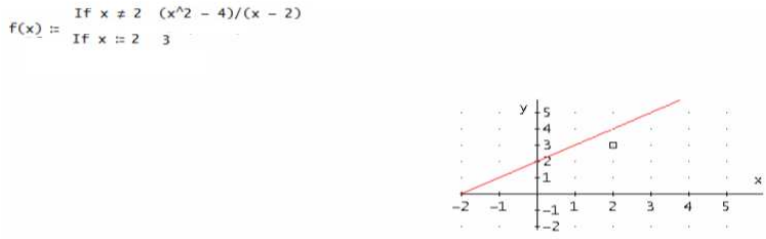
Tarea T-5.- Halla la tendencia de la función $y=\sqrt{x}$ cuando “x” se acerca a 1

L1	R: cuando x se acerca a 1 por la derecha, la “y” disminuye y, y…
L2	K: y cuando…
L3	R: y cuando se acerca por la izquierda la “y” aumenta, la “y” aumenta hasta 1, y la “y”, o sea por la derecha la “y” disminuye hasta 1 y por la izquierda la “y” aumenta hasta 1.

Sin embargo, en funciones definidas a trozos no fueron capaces de adelantarse a los resultados ya que en estos casos, por ejemplo, en la tarea T.6 asocian el límite con el valor de la función en un punto (tabla 5). Esta evidencia indica que los estudiantes se encuentran en la fase de participación en relación a la concepción dinámica de límite al ser incapaces de usar el concepto de límite desde esta perspectiva en cualquier situación.

Tabla 5. Evidencia de no pertenencia a la “fase de anticipación” de la pareja R-K

Tarea T-6. ¿Cuál es la tendencia de la función cuando hacemos aproximaciones laterales? ¿Cuál es el valor de la función en x=2? Primero con el cursor, nos acercamos lateralmente. y luego nos hacemos una tabla.

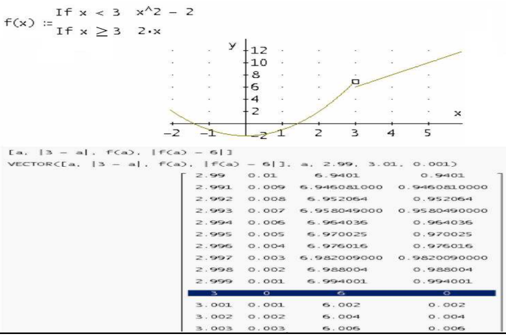


…	…
L6	K: pon la ventana, cuando “x” tiende a 2 por su izquierda, izquierda,
L7	R: “x” aumenta muy despacio
L8	K: “y” da el salto a 3 (no se oye bien). Cuando llega a 2 hay un bajón hasta 3 (leve silencio) y 2? lo normal sería que fuera 2 punto 4 (2, 4), pero en esta función el punto es (2, 3) (leve silencio) no entendemos por qué pero la función hace ese recorrido (parece que R y K hablan a la vez) (Teclean el teclado) yyyy…..cuando se acerca a dos por su derecha, “x” aumenta muy poco, va disminuyendo hasta que llega a 2 que “y” disminuye a 3. Por la izquierda… se va acercando a 4
L9	K: y justo en 4, da un salto hasta 3
L10	R: pero… da salto a 3… y por la derecha “x” se va acercando a 3, se va acercando a 4 … y da un salto (silencio)
L11	K: ¿no?
L12	R: Se supone que debería ser 4 pero en la otra opción hemos visto que era 3
L13	K: ¡claro!
L14	R: si es la misma función
L15	K: tiene que ser el mismo valor
L16	R: tiene que ser el mismo valor….
L17	K: Concluido.

Desde la conceptualización métrica de límite, estos estudiantes no coordinan las tendencias a cero de los intervalos en el dominio (|x-a|→0) y en el rango ((|f(x)-l|→0). Por ejemplo, en la tarea 4.2 (tabla 6) calculan las distancias en el dominio y en el rango adecuadamente pero no identifican que en la columna |f(a)-6|, este intervalo no tiende a 0, cuando se acercan a 3 por la izquierda, y en consecuencia no concluyen que no existe límite.

Tabla 6. Evidencia de no pertenencia a la “fase de anticipación” de la pareja R-K

Tarea 4.2. Dibuja la función $\begin{cases} x^2-2 \ si \ x<3 \\ 2x, \quad si \ x \geq 3 \end{cases}$, haz una tabla con |x-a| y |f(x)-L| para ver sus tendencias, en x=3 e indica si la función tiene límite o no.


f(x) := If x < 3 x^2 − 2
If x ≥ 3 2·x

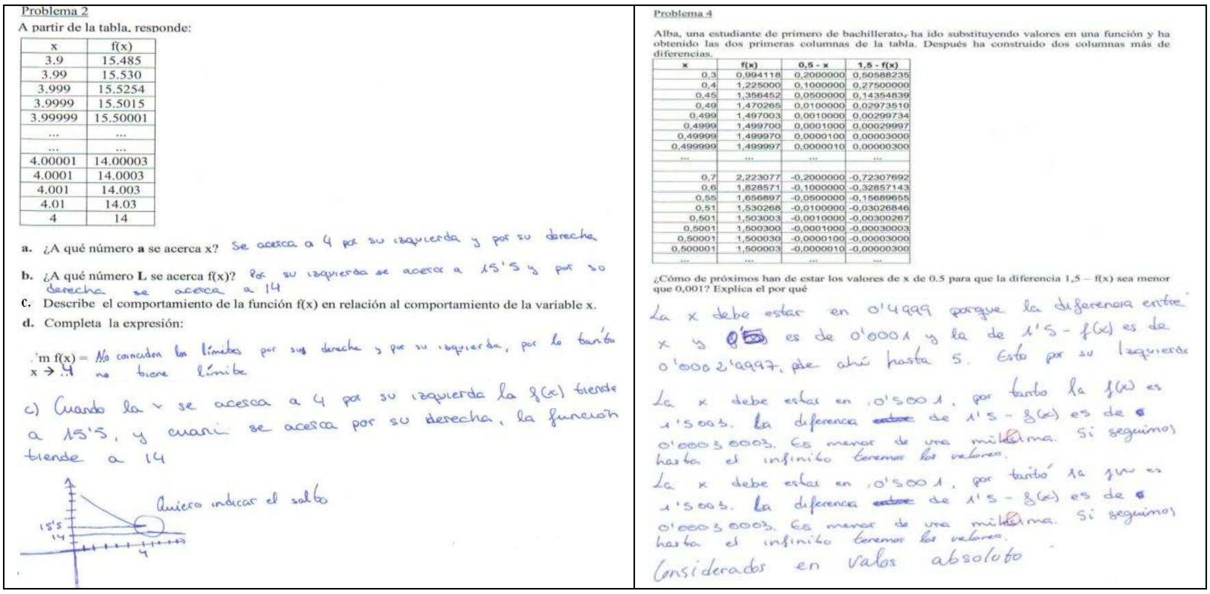
[a, |3 − a|, f(a), |f(a) − 6|]
VECTOR([a, |3 − a|, f(a), |f(a) − 6|], a, 2.99, 3.01, 0.001)

2.99	0.01	6.9401	0.9401
2.991	0.009	6.946081000	0.9460810000
2.992	0.008	6.952064	0.952064
2.993	0.007	6.958049000	0.9580490000
2.994	0.006	6.964036	0.964036
2.995	0.005	6.970025	0.970025
2.996	0.004	6.976016	0.976016
2.997	0.003	6.982009000	0.9820090000
2.998	0.002	6.988004	0.988004
2.999	0.001	6.994001	0.994001
3	0	6	0
3.001	0.001	6.002	0.002
3.002	0.002	6.004	0.004
3.003	0.003	6.006	0.006

L1	K: tenemos que poner valores de x cada vez más próximos a
L2	K: tenemos que hacer valores cada vez más próximos a “a”.
L3	K: vale, ¿sabes que vamos a coger?

L4	R: Aquí no
L5	K: no, ya está
L6	R: Vamos tenemos ya valores. Vamos a salir por la izquierda
L7	K: por su derecha
L8	R: estamos viendo lo que vale a… la función tiende a seis cuando "x" vale tres
L9	K: ahora tenemos que ver la diferencia
L10	K: ahora tenemos que ver la diferencia, sí al aproximarse…a 3. Sí, si al aproximarse a 3. Esa es la distancia que hay al aproximarse por su izquierda desde su derecha, esto ya está hecho, no?, bájalo, bájalo, ahora lo hacemos por la derecha, es que aquí por la izquierda y por su derecha Por esto, no ves ,
L11	R: ahora tú, tenemos que poner el valor absoluto de las diferencias
L12	K: contando ya la función positiva, la función positiva, tres menos a, tres con 29 a tres con uno (no se oye bien)
L13	K: Vale
L14	R: ya tenemos valores en positivo (no se oye bien) para arriba, tenemos uno… que sería con seis, (le responde al profesor) sí, claro es lo que se dice, (no se oye bien) f(a) coma…….2,99
L15	K: sí... atchisssssssss (estornuda)
L16	R: Jesússs, (se queda en silencio) la diferencia , 6
L17	R: vale, en la 1ª columna podemos ver, podemos apreciar el punto de cómo acercarnos por la izquierda a 3, podemos ver la diferencia, podemos ver la tendencia de la función y comprobar el 6 es el límite de la función en el punto 3.

No obstante, Roberto uno de los componentes de la pareja R-K, al responder a las cuestiones del problema 2 del cuestionario propuesto para analizar la compresión del concepto de límite de una función, reconoce, a partir de una tabla, que no hay límite y hace una gráfica para mostrar su conclusión (figura 7). Esta forma de actuar pone de manifiesto su capacidad de coordinar las aproximaciones en el dominio y rango de la función- concepción dinámica de límite. Igualmente, en el problema 4 del cuestionario en relación a la concepción métrica del concepto de límite es capaz de ver que los intervalos |x-a| y |f(x)-L| tendían a cero, poniendo de manifiesto su capacidad de coordinarlos (figura 7).


Problema 2

A partir de la tabla, responde:

x	f(x)
3.9	15.485
3.99	15.530
3.999	15.5254
3.9999	15.5015
3.99999	15.50001
...	...
...	...
4.00001	14.00003
4.0001	14.0003
4.001	14.003
4.01	14.03
4	14

a. ¿A qué número **a** se acerca x? Se acerca a 4 por su izquierda y por su derecha

b. ¿A qué número **L** se acerca f(x)? Por su izquierda se acerca a 15'5 y por su derecha se acerca a 14

c. Describe el comportamiento de la función f(x) en relación al comportamiento de la variable x.

d. Completa la expresión:

$\lim_{x \to 4} f(x) =$ No coinciden los límites por sus derecha y por su izquierda, por lo tanto no tiene límite

c) Cuando la x se acerca a 4 por su izquierda la f(x) tiende a 15'5, y cuando se acerca por su derecha, la función tiende a 14

Problema 4

Alba, una estudiante de primero de bachillerato, ha ido substituyendo valores en una función y ha obtenido las dos primeras columnas de la tabla. Después ha construido dos columnas más de diferencias.

x	f(x)	0,5 - x	1,5 - f(x)
0,3	0,994118	0,2000000	0,50588235
0,4	1,225000	0,1000000	0,27500000
0,45	1,356452	0,0500000	0,14354839
0,49	1,470265	0,0100000	0,02973510
0,499	1,497003	0,0010000	0,00299734
0,4999	1,499700	0,0001000	0,00029997
0,49999	1,499970	0,0000100	0,00003000
0,499999	1,499997	0,0000010	0,00000300
...	...	...	...
0,7	2,223077	-0,2000000	-0,72307692
0,6	1,828571	-0,1000000	-0,32857143
0,55	1,656897	-0,0500000	-0,15689655
0,51	1,530268	-0,0100000	-0,03026846
0,501	1,503003	-0,0010000	-0,00300267
0,5001	1,500300	-0,0001000	-0,00030003
0,50001	1,500030	-0,0000100	-0,00003000
0,500001	1,500003	-0,0000010	-0,00000300
...	...	...	...

¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 0.5 para que la diferencia 1,5 – f(x) sea menor que 0,001? Explica el por qué

La x debe estar en 0'4999 porque la diferencia entre x y 0'5 es de 0'0001 y la de 1'5 - f(x) es de 0'0002'9997, de ahí hasta 5. Esto por su Izquierda

La x debe estar en 0'5001, por tanto la f(x) es 1'5003. La diferencia ~~entre~~ de 1'5 - f(x) es de 0'0003 0003. Es menor de una milésima. Si seguimos hasta el infinito tenemos los valores.

La x debe estar en 0'5001, por tanto la f(x) es 1'5003. La diferencia ~~entre~~ de 1'5 - f(x) es de 0'0003 0003. Es menor de una milésima. Si seguimos hasta el infinito tenemos los valores.

Considerados en valor absoluto

Figura 7. Respuesta de Roberto al problema 2 y 4 del cuestionario

5. Conclusiones

La investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el cálculo está abriendo la posibilidad de nuevas propuestas didácticas fundamentadas en el análisis de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje (Pons, Valls y Llinares, 2011; Boigues, Llinares y Estruch, 2010; García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2010; Sánchez-matamoros, García y Llinares, 2008). En particular, se hace énfasis en la posibilidad de introducir asistentes digitales en el desarrollo de secuencias de enseñanza que tengan en cuenta las características del proceso de construcción de los significados por parte de los estudiantes (Camacho y Depool, 2003a, b). En este estudio identificamos algunas caracteristicas de la trayectoria de aprendizaje desde la perspectiva teórica de la abstracción reflexiva del concepto de límite en una pareja de estudiantes al realizar una secuencia de tareas que integraban recursos informáticos. El desarrollo de las diferentes tareas mostró que inicialmente el conocimiento de los estudiantes era parcialmente construido (Ron, Dreyfus y Hershkowitz, 2010) en el sentido de la construcción de significado vinculado a contextos específicos. Este hecho se ponía de manifiesto por las dificultades de los estudiantes en coordinar las aproximaciones y las diferencias en el dominio y rango de funciones en el sentido de la aproximación doble intuitiva en diferentes tipos de funciones. Este fue puesto de manifiesto en el caso de las funciones definidas a trozos en las que los estudiantes no fueron capaces de adelantarse a los resultados al asociar el límite con el valor de la función en un punto.

El proceso de construcción del significado del concepto de límite en la pareja de estudiantes mostró que la comprensión inicial del proceso de Aproximación Intuitiva aplicada al dominio y al rango puede ser interpretada como comportamientos que muestran los intentos iniciales de establecer relaciones a partir de la clasificación de los registros de la relación actividad-efecto. Estas relaciones se evidencian al mover los estudiantes el cursor sobre el eje de abscisas y viendo el comportamiento de los valores de la función f(x) en cada caso (tendencias y coordinación). Esta acciones iniciales se pueden considerar parte constituyentes de la fase de participación en la construcción del conocimiento (Simon et al. 2004; Tzur y Simon, 2004). En el caso de la pareja de estudiantes analizada solo cuando tuvieron la posibilidad de usar la conceptualización dinámica de límite en diferentes tipos de funciones podríamos considerar que se iniciaba una coordinación que podía llevar a la construcción del significado del concepto de límite en la fase de anticipación local. Pero esta coordinación solo se dio en algunos casos ya que estaba vinculada a las características de las funciones usadas en las tareas.

La descripción realizada en esta investigación parece indicar que la dificultad de muchos estudiantes en evolucionar hacia una comprensión de la definición del concepto de límite (considerando su significado métrico) puede estar vinculada a la necesaria construcción del significado de cuantificación a partir de la concepción dinámica. En este sentido, este proceso de cuantificación vinculado al desarrollo del significado dinámico parece que podría ser apoyado mediante tareas que tenga por objetivos explícito ayudar a los estudiantes a iniciar la coordinación de las aproximaciones a “x” con las respectivas tendencias de “y” como se propuso en módulo 3 de la secuencia de enseñanza diseñada. En este caso, la construcción de los estudiantes del significado de cuantificación vinculado a la doble aproximación intuitiva posiblemente favorezca la construcción del significado del concepto de límite en la fase de anticipación. En este sentido, las evidencias reunidas parecen apoyar la conjetura de que es el requerimiento de construir un esquema implicando la coordinación de dos procesos junto con la necesidad de un uso sofisticado de la idea de cuantificación el que dificulta el proceso de construcción del significado de límite (Cottrill et al., 1996). En relación al papel de la cuantificación en el proceso de construcción del significado del límite, Swinyard (2011) señala que los dos estudiantes en su estudio pudieron reinventar la definición de límite reflejando la estructura de cuantificación compleja que representa la definición métrica $\varepsilon - \delta$ cuando se implicaban en tareas diseñadas con este propósito. Un aspecto clave en este proceso de construcción fue la manera de usar la notación de valor absoluto para indicar proximidad. Estos resultados sugiere que la habilidad para emplear una aproximación dinámica en el eje de abcisas con una perspectiva de proximidad (métrica) en el eje de ordenadas de manera flexible favorece el desarrollo de una comprensión fuerte del concepto de límite y su definición formal

El proceso de construcción descrito en esta investigación proporciona una descripción fina de la manera en la que dos estudiantes empezaban a coordinar las dos aproximaciones intuitivas que ayudan a constituir el significado del concepto de límite, y de qué manera los estudiantes intentaban compatibilizar el significado métrico del concepto de límite de una función derivada de la definición $\varepsilon - \delta$ con el significado dinámico del concepto. El esquema teórico de las fases de construcción del conocimiento, derivado de una particularización de la idea de la abstracción reflexiva, usado en el análisis del proceso de construcción del significado de la idea de límite en los dos estudiantes analizados ha permitido de manera adicional mostrar cómo el uso de instrumentos tecnológicos pueden hacer más explícito el papel de los modos de representación. En particular, la manera en la que la complementariedad entre lo gráfico, lo numérico y lo algébrico, puesto de manifiesto por el software utilizado, ayudó a desarrollar los procesos de coordinación. De esta manera la descripción del proceso de construcción seguido por los dos estudiantes ha permitido relacionar aspectos de la particularización de la idea de la abstracción reflexiva con reflexiones derivadas del papel de los modos de representación en la construcción del conocimiento.

Bibliografía

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática,* (97-140). México: *Grupo* Editorial Iberoamérica.

Blázquez, S., Ortega, T. (2000). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol.* 4(3), 219-236.

Blázquez, S., Ortega, T. (2001). El concepto de límite en la educación secundaria. En S. Blázquez y T. Ortega (eds.), *El futuro del cálculo infinitesimal.* (125-157). México: Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V.

Blázquez, S., Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30,* 67-82.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica S., Benegas J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(2), 189-209

Boigues, F.J., Llinares, S., Estruch, V. D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingeniería relacionadas con las ciencias de la naturaleza. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(3), 255-282.

Camacho, A., Aguirre, M. (2001): Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 4(3), 237-265.

Camacho, M., Depool, R. (2003a). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la Integral Definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) Derive. *Educación Matemática, 15*(3), 119-140.

Camacho, M., Depool, R. (2003b). Using Derive to understand the concept of definite integral. *International journal for Mathematics Teaching and learning, 5*, 1-16.

Contreras, A., García, M. (2008). La trayectoria instruccional de un proceso de estudio sobre el límite de una función. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (eds.), *Investigación en Educación Matemática XII*, (391-402). SEIEM: Badajoz.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* (25-41). Dordrecht: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167–192.

Duval R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana and V.Villani (eds.) *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (37-51). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Elia, I., Gagatsssi, A., Panaoura, A., Zachariades, T., Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of “limit” and the impact of the “didactic contract”. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 7, 765-790.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D., Gregorini, M. I. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *Revista Iberoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11, 113-132.

Fernández, M.B. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 3(2), 171-187.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Matematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados.* México CINVESTAV, 2001.

García, M., Llinares, S., Sánchez-Matamoros, G. (2010). Charaterizing Thematized derivative Schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9(5), 1023-1045(23).*

Hardy, N. (2009). Students’ perceptions of institutional practices: the case of limits of functions in college level Calculus courses. *Educational Studies Mathematics* 72, 341–358.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic Actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 195-222.

Kidron, I. (2010). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, DOI: 10.1007/s10763-010-9258-8.

Monagham, J. Sun, S., Tall, D. (1994). Construction of the limit concept whit a computer algebra system. In J. da Ponte y J.F. Matos (eds.), *18th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3* (279-286). Lisboa, Portugal.

Moru, E. K. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: A case from the National University of Lesotho. *International Journal of Science and mathematics Education, 7*, 431-454.

Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults.* Tesis doctoral. University of Leed.

Piaget, J., García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Siglo XXI editores. México.

Pons, J., Valls, J., Llinares, S. (2011). Coordination of aproximation in secondary school students' understanding of limit concept. In *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Ankara, Turkey: PME.

Prezenioslo, M. (2004). Images of the Limit of Function Formed in the Course of Mathematical Studies at the University. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 103 – 132.

Robinet, J. (1983). Un experience d'ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **4**(3), 223-292.

Ron, G., Dreyfus, T., Hershkowitz, R. (2010). Partially correct constructs illuminate students' inconsistent answers. *Educational Studies in Mathematics, 75,* 65–87.

Sánchez-matamoros, G., García, M., Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Simon, M., Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Simon, M.A., Tzur, R., Heinz, K., Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 305-329.

Sierra, M. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y C.O.U. sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 3(1), 71-85.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: the case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(2), 93-114

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.*

Tzur, R. (1999). An Integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (4), 390-416.

Tzur, R. (2007). Fine grain assessment of students' mathematical understanding: participatory and anticipatory stages in learning a new mathematical concept. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 273-291.

Tzur, R., Simon, M.A. (2004). Distinguishing two stages of mathematical conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2,* 287-304.

Valls, J., Pons, J., Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 325-338

Mauro Mira López. Profesor de Enseñanza secundaria durante mucho tiempo y actualmente está realizando trabajos de investigación en educación matemática**.** mml52@alu.ua.es

Julia Valls González. Catedrática de Escuela Universitaria en la Universidad de Alicante e investigadora en Educación Matemática**.** juliavalls@ua.es

Salvador Llinares Ciscar. Catedrático de Universidad en la Universidad de Alicante e investigador en Educación Matemática. Sllinares@ua.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 109-121

Dinamización Matemática:

Los números que los pitagóricos ocultaron

Fabio Nelson Zapata Grajales

Resumen

Se hace un estudio matemático detallado de los Números Trapecios Isósceles, los cuales provienen de un postulado que llamaremos Postulado Pitagórico, el cual, debieron históricamente tener los Pitagóricos dentro de su construcción teórica sobre aritmética geométrica. El Postulado: “Comenzando después del número uno, entre cada par de números enteros positivos 2n, existe un número cuadrado n^2. Con n perteneciente a los números enteros positivos.” Y es desde aquí como se construyen los Números Trapecios Isósceles que se obtienen a partir de la suma de cada par de números naturales que están entre cada número cuadrado. También se hace un breve recorrido histórico alrededor de estos números y se expone su relación con la Espiral Pitagórica construida por Teodoro de Cirene. Todo ello, para proponer un ejercicio pedagógico que orienta a los docentes y estudiantes hacia procesos de modelación matemática.

Palabras clave: postulado pitagórico, espiral pitagórica.

Abstract

It makes a detailed mathematical analysis of the Isosceles Trapezoids Numbers, which come from a postulate that are calls Pythagorean Postulate, which, have historically had the Pythagoreans within his theoretical construction on his arithmetic geometry. The postulate is: "Starting after of number one, between each pair of positive integers 2n, there is a square number n^2. With “n” that belonging to the positive integers." It is from here that are constructed the Isosceles Trapezoids Numbers obtained from the sum of each pair of natural numbers that are between each square number. It also gives a brief history about these numbers and is exposed his relationship with the Pythagorean Spiral built by Teodoro de Cirene. All this, to propose a pedagogical exercise that guides teachers and students to mathematical modeling processes.

Keywords: Pythagorean Postulate, Pythagorean Spiral.

Resumo

Ele faz uma análise matemática detalhada dos números isósceles trapézios, que vêm de Postulado de Pitágoras, que, historicamente, tiveram os pitagóricos dentro de sua construção teórica em sua geometria aritmética. O postulado é: "Iniciando após o número um, entre cada par de números inteiros positivos 2n, há um número n2 quadrados. Com n pertencente aos números inteiros positivos." É a partir daqui são construídos e Números trapézios isósceles obtidos a partir da soma de cada par de números naturais que se encontram entre cada número de quadrados. Ele também dá uma breve história sobre estes números e expôs sua relação com a espiral de Pitágoras construído por Theodore de Cirene. Tudo isso, para propor um exercício pedagógico que orienta os professores e alunos para os processos de modelagem matemática.

Palavras-chave: postulado pitagórico, espiral pitagórica

1. Introducción

Este artículo, pretende dar a conocer un vacío histórico en las matemáticas que tuvo la escuela pitagórica, con respecto, a unos números figúrales especiales que debieron haber descubierto pero que, por su obviedad o los historiadores de las matemáticas no consideraron o los Pitagóricos ocultaron y no se difundió, estando en uno de los textos perdidos esperando el llamado hacia la luz o, quizá, sería Teodoro de Cirene quien los ocultó en su famosa Espiral.

Lo cierto es que estos números figúrales que en este artículo se llamarán Trapecios Isósceles, son números llamativos que son importantes dejar en un sitio privilegiado del que gozan los otros números atribuidos a la escuela pitagórica. Y esto se utiliza con pretexto para realizar un ejercicio pedagógico que permita evidencia como la enseñanza de las matemáticas también puede ser desde procesos de modelación y descubrimiento.

Durante el desarrollo de este artículo se mostrará su origen haciendo un recorrido por la historia de la escuela pitagórica. Además explicándose cómo se construyen, y qué fórmula logra modelarlos junto con lo que se deriva matemáticamente de este estudio. También invita a investigar en los documentos históricos dónde los Pitagóricos ocultaron sus misterios o si los documentos o textos que hablaban sobre ellos se perdieron o sencillamente fueron olvidados y estas últimas ideas es lo que motiva a escribir sobre ellos.

2. La escuela pitagórica: jugando con las formas de los números

2.1. Pitágoras

Sobre Pitágoras se posee poca información veraz, y la que se tiene es de terceros, por lo que actualmente se considera en entredicho sus aportes y descubrimientos en las matemáticas, que parecieron haber sido hechos por sus discípulos; pero lo cierto es que en la Escuela Pitagórica tuvo que haber un líder quien organizara las reuniones de esta sociedad religiosa y científica y, ese líder, tuvo que haber sido Pitágoras.

Para ubicar al lector y contextualizarlo sobre la vida y obra de este personaje se realizará una breve bibliografía acerca del origen de este emblemático matemático desde los aportes de Sánchez (2011) y Guzmán (1986).

Pitágoras nació en Samos, junto a la isla de Mileto, su fecha de nacimiento exacta no es clara. Abandona secretamente esta isla y se hospeda en Lesbos recibiendo enseñanzas de Tales de Mileto y se creé, que, allí también conoció al filósofo Anaximandro, con ellos estudió astronomía, física y matemáticas.

Fue encarcelado en Egipto de donde aprendió varios conocimientos y llevado a Babilonia donde aprende de esta cultura y de otras más, logrando ampliar su visión del mundo y de su conocimiento. Luego vuelve a Samos donde comienza a enseñar pero con poco éxito y fue en Crotona donde funda su escuela Los Pitagóricos logrando alcanzar gran reconocimiento. Tiempo después fue expulsado a Metaponto donde muere

2.2. Los Pitagóricos

La escuela pitagórica se conoce comúnmente por redescubrir el famoso teorema de Pitágoras, quizá el teorema más famoso que se les atribuye. Además se sabe que es el teorema que más formas distintas de demostración tiene; como afirma González (2008), el Teorema de Pitágoras tiene un carácter simbólico y cultural responsable de la aparición de la Geometría racional en la Escuela Pitagórica y por tanto forma parte esencial de la naturaleza de las matemáticas.

Esta escuela también dejó otros legados importantes para la historia de las matemáticas y es su trabajo en teoría de números o aritmética: "todo es número" reza el adagio atribuido a Pitágoras, la cual elevaron por encima de las necesidades de los mercaderes y que por supuesto también emparentaron con la geometría; pues por medio de puntos los Pitagóricos mostraron como se pueden dibujar triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos…, y es desde aquí sobre lo que descansa este artículo, debido a que el origen de los Números Trapecios Isósceles también está asociados a esta relación.

Para lo Pitagóricos, el número y su relación con la forma indica, que todo objeto tiene un número característico, como lo afirma Sepúlveda (2012, pág. 7) Pitágoras parece haber pensado que los números son el "material" básico del cual están hechas las cosas. Esta armonía entre los números y los Pitagóricos pareció verse afectada por el descubrimiento de lo inconmensurables, esto ayudó según Sepúlveda (2012) a la disolución de la escuela.

A continuación se describe cómo estaba organizada su aritmética o teoría de números y cuál es el enunciado que se incluirá en esta teoría, y que da origen a los Números Trapecios Isósceles. La pregunta que queda en el aire es ¿Dónde está la información acerca de estos números?, ya que si la información sobre esta escuela posee pocos datos originales, sobre estos números casi que hay información nula.

2.3 Clasificación de los Números Enteros

Los Pitagóricos, asociaron a los números un carácter muy especial y es el de suponer que a partir de estos, el conocimiento del mundo iba a ser revelado. Usando sólo los números enteros positivos los cuales representaban una de las esencias de la armonía cósmica.

La aritmética Pitagórica se creé que está incluida o se refleja en algunos apartes de los libros VII y VIII de los Elementos de Euclides, según Guzmán (1986) es en el libro VII donde procede la aritmética conocida hoy de los Pitagóricos. Y es principalmente de la obra la Introducción a la Aritmética de Nicómaco de Gerasa (a.C. 50-150 d. de C.), según Guzmán (1986, pág. 27) de donde procede mayormente la aritmética Pitagórica, según este autor esta obra se extendió extraordinariamente a juzgar por el gran número de manuscritos (44) que de ella se conservan. En este trabajo aparecen por extenso la teoría figurativa de los números, los números triangulares, cuadrados rectangulares, pentagonales, etc. Y se habla de las fabulosas y místicas propiedades de ciertos números en concreto.

Los pitagóricos clasificaron a los números enteros en pares e impares con relación a sus formas asociadas. A continuación se dan a conocer sus definiciones de acuerdo con Sepúlveda (2012, pág. 5) y con base en estas definiciones se propone una proposición que en este articulo se llamará Postulado Pitagórico el cual permitirá explicar que son los números Trapecios Isósceles, objetivo principal de este escrito:

- Un número que es el producto de dos factores desiguales es rectangular.
- Un número que es producto de dos factores iguales es cuadrado.
- La suma de los primeros "n" números impares es el cuadrado n-ésimos.
- La suma de los primeros "n" números se llama triangular n-ésimo.
- Dos números triangulares sucesivos forman un número cuadrado.
- Un número que sea el producto de tres factores se llama sólido. Si los tres factores son iguales, el número es cubico.
- Número piramidal es la suma de una serie sucesiva de números cuadrados.
- **Postulado Pitagórico:** "*En los números enteros positivos, existe un número cuadrado entre cada par de números naturales. Si se parte después del primer número cuadrado uno.*"

Y bajo este último, que parece muy obvio, es desde donde se partirá para la construcción de los Números Trapecios Isósceles.

3. Postulado pitagórico: origen de los números trapecios isósceles (TI)

A continuación se explica de una forma detallada en qué cosiste el Postulado Pitagórico explicando su relación con los Números Trapecios Isósceles.

Es claro y casi obvio, aunque increíblemente que a nivel histórico pareciera no tener ninguna relevancia o ser objeto de estudio, el Postulado Pitagórico: En los números enteros positivos, existe un número cuadrado entre cada par de números enteros si se parte después del primer número cuadrado uno:

Consideremos los primeros cien números enteros positivos: **1**, 2, 3, **4**, 5, 6, 7, 8, **9**, 10, 11, 12, 13, 14, 15, **16**, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, **25**, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, **36**, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, **49**, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, **64**, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, **81**, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **100**…

Es claro que, entre los números cuadrados **1** y **4**, existan *2* números enteros positivos el 2 y el 3, entre el **4** y el **9** existen *4* números enteros positivos 5, 6, 7, 8, entre los números cuadrados **9** y **16** existen *6* números enteros positivos el 10, 11, 12, 13, 14, 15, entre los números cuadrados **16** y **25** se encuentran *8* números enteros positivos el 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, entre los números cuadrados **25** y **36** existen *10* números enteros positivos el 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, entre los números cuadrados **36** y **49** existen *12* números enteros positivos el 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, entre los números cuadrados **49** y **64** existen *14* números enteros positivos el 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, entre los números cuadrados **64** y **81** existen *16* números enteros positivos el 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, y por último entre los números cuadrados **81** y **100** existen *18* números enteros positivos el 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99. Así sucesivamente hasta existir entre el enésimo cuadrado y su siguiente un número enésimo $2n$. Entonces el postulado reza de la siguiente forma:

"Comenzando después del número uno, entre cada par de números enteros positivos 2n, existe un número cuadrado n^2. Con n perteneciente a los números enteros positivos"

Según lo anterior entonces de ¿dónde vienen los Números Trapecios Isósceles? A continuación la respuesta.

4. Los números trapecios isósceles

Partiendo de lo anterior, es como se construyen los Números Trapecios Isósceles, de la suma de los números enteros positivos que están entre un número cuadrado y otro. Veamos para los primeros cien números enteros positivos:

2 + 3 = **5**, siendo el cinco el primer Número Trapecio Isósceles. Al sumar los números 5 + 6 + 7 + 8 = **26**, se obtiene el segundo Número Trapecio Isósceles. Al sumar los números 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = **75**, se obtiene el tercero Número Trapecio Isósceles. Al sumar los números 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 = **164**, se obtiene el cuarto Número Trapecio Isósceles. Al sumar los números 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 = **305** se obtiene el quinto Número Trapecio Isósceles. Al sumar los números 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 + 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 = **510,** se obtiene el sexto Número Trapecio Isósceles. Al sumar los números 50 + 51 + 52 + 53 + 54 + 55 + 56 + 57 + 58 + 59 + 60 + 61 + 62 + 63 = **791,** se obtiene el séptimo Número Trapecio Isósceles. Al sumar los números 65 + 66 + 67 + 68 + 69 + 70 + 71 + 72 + 73 + 74 + 75 + 76 + 77 + 78 + 79 + 80 = **1160**, se obtiene el octavo Número Trapecio Isósceles. Y por último al sumar los números 82 + 83 + 84 + 85 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 = **1629** se obtiene el noveno Número Trapecio Isósceles y así sucesivamente se puede continuar.

En resumen los cien primeros Números Trapecios Isósceles son: 5, 26, 75, 164, 305, 510, 791, 1160, 1629, 2210, 2915, 3756, 4745, 5894, 7215, 8720, 10421, 12330, 14459, 16820, 19425, 22286, 25415, 28824, 32525, 36530, 40851, 45500, 50489, 55830, 61535, 67616, 74085, 80954, 88235, 95940, 104081, 112670, 121719, 131240, 141245, 151746, 162755, 174284, 186345, 198950, 212111, 225840, 240149, 255050, 270555, 286676, 303425, 320814, 338855, 357560, 376941, 39701, 417779, 439260, 461465, 484406, 508095, 532544, 557765, 583770, 610571, 638180, 666609, 695870, 725975, 756936, 788765, 821474, 855075, 889580, 925001, 961350, 998639, 1036880, 1076085, 1116266, 1157435, 1199604, 1242785, 1286990, 1332231, 1378520, 1425869, 1474290, 1523795, 1574396, 1626105, 1678934, 1732895, 1788000, 1844261, 1901690, 1960299, 2020100…

Y como predicción pitagórica estos números están organizados como impar y par, obsérvese que empiezan con un impar **5**, luego un par **26**, seguido de un impar **75**, luego un par **164**, y seguido un impar **305** y así sucesivamente intercalándose entre impar y par. Cosa muy curiosa, ya que, históricamente para los pitagóricos este orden numérico era importante. Otra de las curiosidades es comenzar en cinco, ya que, para los Pitagóricos este número es el primero en tener par e impar 2 + 3 = **5**, por lo que representa según Sepúlveda (2012) la unión entre los masculino (impar) y lo femenino (par) y por ello para los pitagóricos es el signo de la reproducción y el matrimonio.

Además es el menor número cuyo cuadrado es suma de cuadrados $3^2 + 4^2 = \mathbf{5}^2$ en relación con el teorema de Pitágoras y simboliza los cinco sólidos platónicos y el Pentalfa (estrella de cinco puntas) adoptada por Pitágoras como símbolo de su secta. En definitiva, los Números Trapecios Isosceles son importantes porque son la suma de cada par de números naturales que están entre cada número cuadrado. A continuación veamos cómo se modelan estos números y que consecuencias trae este proceso matemático en relación con la trigonometria y el algebra.

4.1 Aritmética de los Números Trapecios Isósceles

Para construir la fórmula que modele estos números es necesario considerar los siguientes Aspectos:

A. Cado uno de los Números Trapecios Isósceles, tienen relación con la posición en la cual se encuentran, por ejemplo, para los primeros diez se puede notar que el **5** es divisible por uno, la cual es su posición por ser el primer número, el **26** es divisible por dos, la cual es su posición por ser el segundo número, el **75** es divisible por tres, **164** es divisible por cuatro, el **305** es divisible por cinco, el **510** es divisible por seis, el **791** es divisible por siete, el **1160** es divisible por ocho, el **1629** es divisible por nueve y por último el **2210** es divisible por diez y así sucesivamente se cumple para los demás números Trapecios Isósceles:

Tabla 1. Relación de los números Trapecios Isósceles con sus posiciones

Posición del Número Trapecio Isósceles (n)	Números Trapecios Isósceles	Relación con la posición
1	5	$\frac{5}{1}=5$
2	26	$\frac{26}{2}=13$
3	75	$\frac{75}{3}=25$
4	164	$\frac{164}{4}=41$
5	305	$\frac{305}{5}=61$
6	510	$\frac{510}{6}=85$
7	791	$\frac{791}{7}=113$
8	1160	$\frac{1160}{8}=145$
9	1629	$\frac{1629}{9}=181$
10	2210	$\frac{2210}{10}=221$

Estos nuevos números 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221, se obtienen fácilmente a partir del primer razonamiento $(4n+a_{n-1})n$. Donde n es la posición de cada Número Trapecio Isósceles a_{n-1} es el número anterior que se obtiene de la relación entre el Número Trapecio Isósceles y sus posición.

Tabla 2. Razonamiento inicial para encontrar la fórmula de los números Trapecios Isósceles

Posición del Número Trapecio Isósceles (n)	Razonamiento inicial $(4n + a_{n-1})n$.	Resultado de la operación anterior: Los Números Trapecios Isósceles
1	(4(1)+1) = 5(1)	5
2	(4(2)+5) = 13(2)	26
3	(4(3)+13) = 25(3)	75
4	(4(4)+25) = 41(4)	164
5	(4(5)+41) = 61(5)	305
6	(4(6)+61) = 85(6)	510
7	(4(7)+85) = 113(7)	791
8	(4(8)+113) = 145(8)	1160
9	(4(9)+145) = 181(9)	1629
10	(4(10)+181) = 221(10)	2210

B. Los números 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221, increíblemente se pueden descomponer en dos números cuadrados de la forma $n^2 + (n-1)^2$ que es el segundo razonamiento y que satisface de una mejor forma el modelo, quedando $(4(n) + (n^2 + (n-1)^2)n$ como fórmula definitiva:

Tabla 3. Segundo Razonamiento y término enésimo de los números Trapecios Isósceles

Posición del Número Trapecio Isósceles (n)	Segundo razonamiento y termino enésimo $(4(n) + (n^2 + (n-1)^2)n$	Resultado de la operación anterior: Los Números Trapecios Isósceles
1	$(4(1) + (1^2 + (1-1)^2)1$	5
2	$(4(2) + (2^2 + (2-1)^2)2$	26
3	$(4(3) + (3^2 + (3-1)^2)3$	75
4	$(4(4) + (4^2 + (4-1)^2)4$	164
5	$(4(5) + (5^2 + (5-1)^2)5$	305
6	$(4(6) + (6^2 + (6-1)^2)6$	510
7	$(4(7) + (7^2 + (6-1)^2)7$	791
8	$(4(8) + (8^2 + (8-1)^2)8$	1160
9	$(4(9) + (9^2 + (9-1)^2)9$	1629
10	$(4(10) + (10^2 + (10-1)^2)10$	2210

C. Simplificando el modelo: $(4(n) + (n^2 + (n-1)^2)n$ se obtiene la ecuación cúbica y fórmula de los Números Trapecios Isósceles: $TI = 2n^3 + 2n^2 + n$:

$$\boxed{2n^3+2n^2+n}$$

Figura 1. Término enésimo o fórmula que modela los números Trapecios Isósceles (TI).

Por otro lado, para saber cuál es el número Trapecio Isósceles que se encuentra entre un número cuadrado y otro se procede de la siguiente manera: por ejemplo si se quiere saber cuál número esta antes del cuadrado 14641 se procede sacándole la raíz cuadrada que es $\sqrt[2]{14641} = 121$, y a este resultado se le resta uno $121 - 1 = 120$, el cual es la posición n, $n = 120$, sustituyendo en el modelo hallado se obtiene 3484920 que es la suma de los números naturales que están entre el número cuadrado 14400 y el número cuadrado 14641. El número cuadrado anterior (14400) al solicitado, se obtiene elevando al cuadrado el resultado de la posición n.

4.2. Geometría de los Números Trapecios Isósceles

Es ahora, el turno de responder a qué se debe el nombre de Números Trapecios Isósceles estos números se pueden representar de la siguiente forma (figura 2)

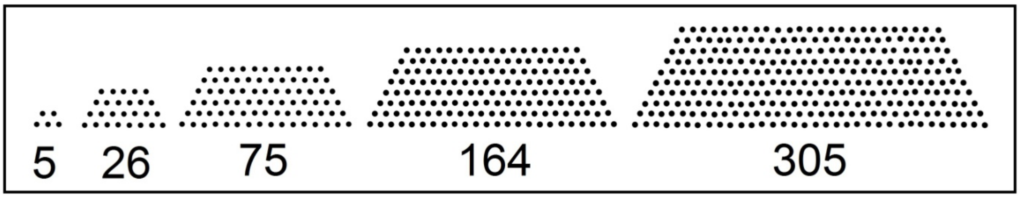


Figura 2. Representación gráfica de los Números Trapecios Isósceles.

La figura muestra claramente como los números 5, 26, 75, 164, 305… se pueden dibujar como un Trapecio Isósceles, de allí, el nombre que los caracteriza.

Ahora analicemos qué tipo de triángulos posee cada una de estas figuras y cómo estos números también están emparentados con la espiral Pitagórica de Teodoro de Cirene.

Es claro que el Trapecio Isósceles se puede dividir en tres partes: dos triángulos rectángulos y un rectángulo. Para el caso de los Números Trapecios Isósceles en sus triángulos rectángulos existe una relación importante digna del análisis matemático. Se ejemplifica lo anterior con los primeros cinco:

Para el primer Número Trapecio Isósceles el cinco, se observa (figura 3) como la hipotenusa de sus triángulos rectángulos escalenos mide dos. Número par que, antecede al próximo número cuadrado el cuatro, es decir existen dos números entre el cuadrado uno y el cuadrado cuatro que son el dos y el tres, como ya se ha explicado en el Postulado pitagórico, para estos figúrales sigue cumpliéndose.

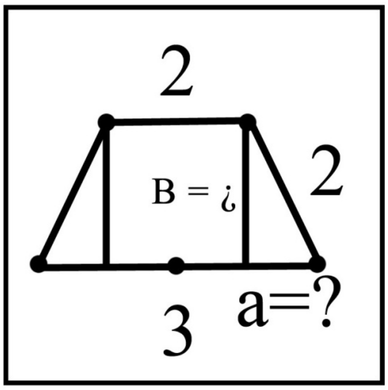


Figura 3. Representación gráfica del primer Número Trapecios Isósceles.

Para hallar los otros componentes se procede de la siguiente forma 3 – 2a = 2, despejando se tiene que a = $\frac{1}{2}$, y utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene que: B = $\frac{\sqrt[2]{15}}{2}$. Con un razonamiento similar se obtienen los componentes que aquí llamamos a y B en los demás Números Trapecios Isósceles. A continuación se resume en la siguiente tabla para los primeros cinco Números Trapecios Isósceles:

Tabla 4. Estudio del Triángulo Rectángulo Escaleno en los Números Trapecios Isósceles.

Números Trapecios Isósceles	**Componentes del Triangulo Rectángulo Escaleno**
5	**Hipotenusa (h) = 2, Lado a=** $\frac{1}{2}$ **y Lado B=** $\frac{\sqrt[2]{15}}{2}$
26	**Hipotenusa (h) = 4, Lado a=** $\frac{3}{2}$ **y Lado B=** $\frac{\sqrt[2]{55}}{2}$
75	**Hipotenusa (h) = 6, Lado a=** $\frac{5}{2}$ **y Lado B=** $\frac{\sqrt[2]{119}}{2}$
164	**Hipotenusa (h)= 8, Lado a=** $\frac{7}{2}$ **y Lado B=** $\frac{\sqrt[2]{207}}{2}$
305	**Hipotenusa (h) = 10, Lado a=** $\frac{9}{2}$ **y Lado B=** $\frac{\sqrt[2]{319}}{2}$

Es sorprendente que en los lados de los triángulos rectángulos escalenos también exista la relación entre par e impar como se observa (Tabla 4) la hipotenusa (par) y el lado a (impar en su numerador), relación que persigue a este tipo de números figúrales.

De la Tabla 4, se desprende algo más importante, ya que se observa una regularidad característica y esto nos permite llegar al término enésimo de cada componente, el cual es para la Hipotenusa $h = 2n$, para el lado a, $a = \frac{2n-1}{2}$ y por último para el lado B, $B = \frac{\sqrt[2]{12n^2+4n-1}}{2}$ siendo "n" la posición en la cual está cada uno de los Números Trapecios Isósceles. Simplificando aún más estos términos se obtiene que: $h = 4n$, $a = 2n - 1$ y que $B = \sqrt[2]{12n^2 + 4n - 1}$

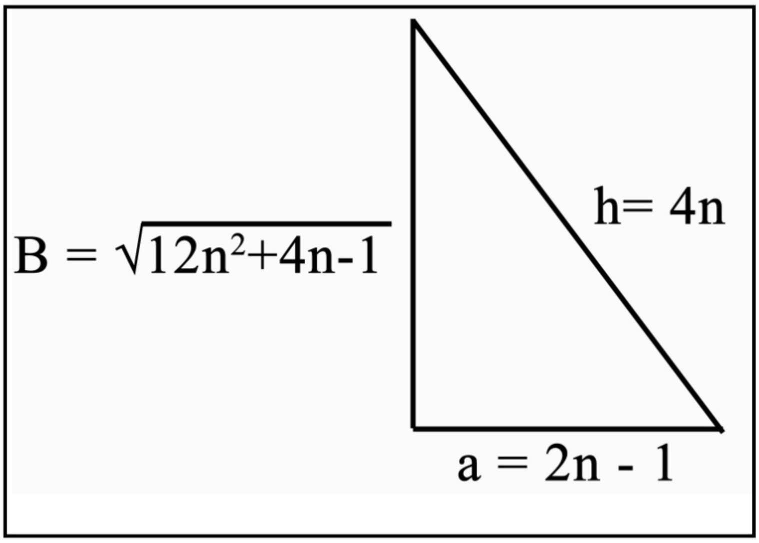


Figura 4. Representación gráfica del Triángulo Rectángulo Escaleno que subyace de la representación grafica de cado uno de los Números Trapecios Isósceles.

Al sustituir "n" por uno, se obtiene un Triangulo Rectángulo Escaleno muy especial, ya que, este triángulo se encuentra también en la Espiral Pitagórica que se le atribuye a otro pitagórico Teodoro de Cirene, siendo un Triangulo Rectángulo Escaleno de componentes $h = \sqrt[2]{16} = 4$, $a = 1$ y que $B = \sqrt[2]{15}$ (Figura 5), el cual hace parte de la construcción de la espiral pitagórica.

4.3. La Espiral Pitagórica y los Números Trapecios Isósceles.

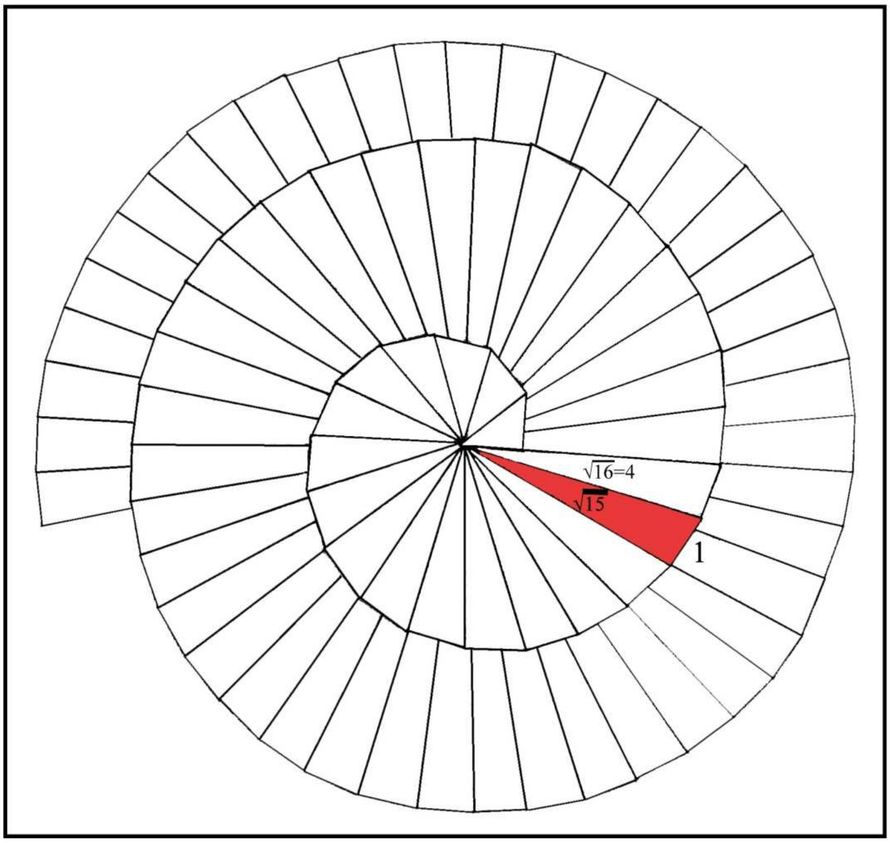


Figura 5. Espiral Pitagórica de Teodoro de Cirene. Triangulo común que comparte la representación geométrica del primer número Trapecio Isósceles con uno de los triángulos de la Espiral.

La Espiral Pitagórica se le atribuye a Teodoro de Cirene, que se dice fue maestro de Platón y el cual en sus diálogos da algunos aportes de su maestro; según González (2008, p. 112) Teodoro de Cirene demuestra la irracionalidad de los números naturales que no tienen raíz cuadrada exacta hasta el número 17, siendo este su mayor aporte en la historia de las matemáticas.

La espiral pitagórica no sólo comparte uno de sus triángulos con los Números Trapecios Isósceles (Figura 5) sino que, además, comparte con ellos el postulado que da su origen, aunque en una nueva versión. Es claro que esta contiene en cada hipotenusa de los triángulos rectángulos escalenos la raíz cuadrada de cada uno de los números enteros positivos. Apareciendo de nuevo el Postulado Pitagórico:

"Comenzando después del número raíz de uno, entre cada par de las raíces cuadradas de los números enteros positivos 2n, existe un número cuadrado cuya raíz es exacta. Con n perteneciente a los números enteros positivos."

Por otro lado, si se construye (haciendo gala de la imaginación griega) un triángulo que una cada tres triángulos con hipotenusa raíz exacta en esta espiral, aparecen unos triángulos muy especiales que llamaremos desde acá triángulos cuadráticos (Figura 6) que significa que se obtienen de juntar el centro del lado uno de cada triángulo cuya hipotenusa es raíz cuadrada exacta. Estos triángulos se sugiere podrían ser semejantes, ya le queda al lector comprobarlo. El triángulo mayor une los triángulos rectángulos escalenos con hipotenusa: $\sqrt[2]{441}$, $\sqrt[2]{484}$ y $\sqrt[2]{529}$

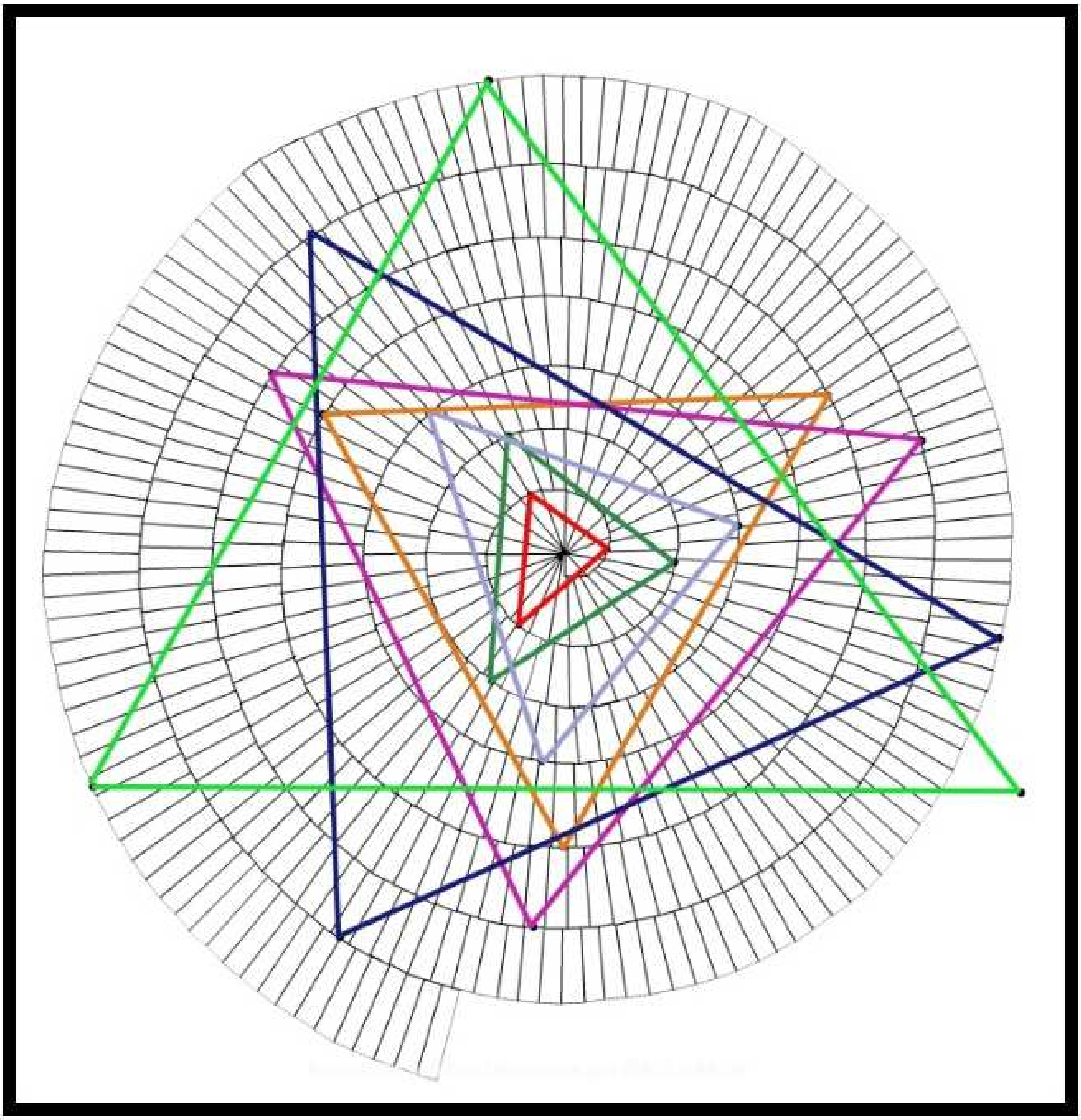


Figura 6. Espiral Pitagórica de Teodoro de Cirene. Cada triángulo se construyó uniendo el centro de lado uno de cada triángulo con hipotenusa cuya raíz cuadrada es exacta.

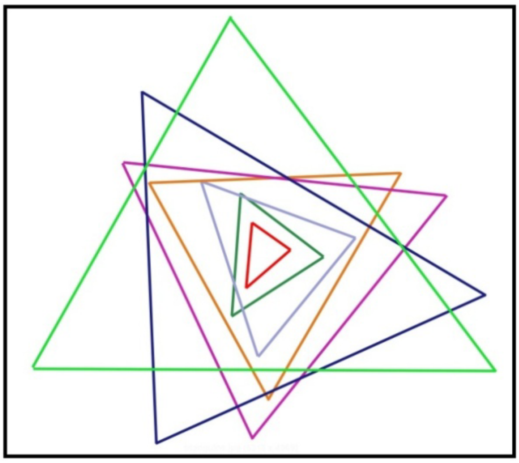


Figura 7. Triángulos cuadráticos

5. Conclusiones

Este artículo es una invitación para los amantes de la aritmética y la geometría que quieren entretenerse un rato conociendo unos números dignos de reconocerse y apreciarse.

La importancia de los Números Trapecios Isósceles radica, en que son un aporte a la teoría de números que quizá los Pitagóricos descubrieron pero que, por razones desconocidas no fueron difundidos o quizá no fueron objeto de estudio por esta comunidad y los pasaron por alto. Lo cierto es que merecen un espacio de análisis y estudio como se ha hecho con otros números figúrales como los números triangulares, oblongos, pentagonales…

Además es un llamado para que docentes y estudiantes, hagan énfasis en la búsqueda y construcción de modelos matemáticos; ya que los estudiantes aprenden matemáticas, haciendo matemáticas, lo que supone resolver una problemática o hacer un modelo. Este sería un ejemplo de lo que se puede lograr hacer.

El Postulado Pitagórico, parecen obvio, quizá por ello no se le ha dado mayor relevancia dentro del estudio de la aritmética.

Se aclara que, desde las posibilidades del autor de este artículo y tras consultar varias fuentes no se encontró ninguna referencia que hiciera alusión a este postulado o a los Números Trapecios Isósceles, razón por la cual queda abierta la posibilidad de seguir indagando sobre las fuentes y cubrir un vacío histórico en la historia de la matemáticas, valga la redundancia.

Bibliografía

Guzmán, M. (1986), [En línea]. Los Pitagóricos. Universidad Complutense. 1 – 33. [Consultada en Octubre de 2012]. Disponible en:http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/sites/default/files/mguzman/03alfondo/aspectoseticos/pitagoricos/lospitagoricos.html.

Sánchez, J. M. (2001). [En línea]. Historias de Matemáticas Las Escuelas Jónica y Pitagórica. Madrid. *Pensamiento Matemático. 1- 24.* [Consultada en Octubre de 2012]. Disponible en: http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_1/las_escuelas_jonica_y_pitagorica.pdf.

González Urbaneja, P. M. (2008).). [En línea]. La solución de Eudoxo a la crisis de los Inconmensurables: La teoría de la proporción y el método de exhaución. Barcelona. *Suma 33: 102 – 129.* [Consultada en Octubre de 2012]. Disponible en: http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_33/8_solucion_eudoxo_33.pdf.

Sepúlveda A. (2012), *Los conceptos de la Física. Evolución Histórica.* Editorial Universidad de Antioquia, Colombia. pp: 4 – 56

Fabio Nelson Zapata Grajales. Estudiante de Maestría en Enseñanza de la Ciencias: Universidad Nacional (Medellín – Colombia), especialista en didáctica de las ciencias: Matemáticas y física de la Universidad Pontificia Bolivariana (Medellín –Colombia) y licenciado en Matemáticas de la Universidad De Antioquia (Medellín –Colombia). Docente de la Institución Educativa Pedregal (Medellín – Colombia). **yoytatela@yahoo.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 123-130

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Variaciones de un problema isoperimétrico, conjeturas y teoremas

Problema

¿Cuál es la figura plana, que encierre la mayor área, que se puede formar con una cuerda de 22 cm de longitud?

En el presente artículo narramos y hacemos comentarios y reflexiones sobre experiencias muy interesantes al resolver y crear problemas en talleres con profesores de secundaria. Llegamos a este problema, luego de generalizaciones y conjeturas, partiendo del siguiente episodio de una clase:

El profesor Vásquez, de cuarto año de media, propone el siguiente problema a sus alumnos:
Hallar las dimensiones del rectángulo cuyo perímetro sea 22 cm y que tenga la mayor área posible.
Después de unos minutos:

- La mayoría dice que tales dimensiones son: largo 6 cm y ancho 5 cm.
- Algunos siguen pensando.
- Julia dice que las dimensiones son: largo 5,5 cm y ancho igual (5,5 cm).

Ya manifestamos en el número anterior, que parte de la estrategia que proponemos para estimular el desarrollo de la capacidad de crear problemas de matemáticas en los profesores, es desarrollar talleres en los que se les presenta episodios de clases en torno a un problema y se les invita a: i) resolver el problema; ii) proponer un problema que facilite la resolución del problema dado y ayude a aclarar las reacciones descritas de los alumnos (un “problema pre”); y iii) proponer un problema que desafíe al alumno más allá de la solución correcta del problema dado (un “problema pos”). Todo esto en forma inicialmente individual y luego grupal, con el apoyo de quien (o quienes) conduce(n) el taller.

El problema del episodio es conocido y está entre los llamados problemas isoperimétricos, cuya presencia en la historia la encontramos ya en los escritos de Virgilio, hace más de 21 siglos, cuando narra la intervención de la princesa Dido en los inicios de la ciudad de Cartago.

Comentamos algunos pasajes de lo trabajado en los talleres con profesores.

Solución del problema del episodio:

Pasajes interesantes e ilustrativos de la solución los mostramos en el apéndice de este artículo. Invitamos al lector a resolver el problema, antes de leer tal apéndice.

Algunos problemas creados

Problema Pre-1 (Individual)

Completa la siguiente tabla

l	a	$2l + 2a$	Área
10		22	
	2	22	
		22	
5,5		22	

¿Cuánto debería tener el rectángulo de largo y de ancho para que tenga la mayor área?

Problema Pre-2 (Grupal)

En una hoja cuadriculada, dibuja tres rectángulos de perímetro 22 y halla el área de cada uno de ellos.

Comentarios 1

1.1. Ambos problemas se perciben bastante orientadores para facilitar la comprensión y solución del problema del episodio. El Problema Pre-1 no modifica la información ni el requerimiento del problema del episodio, pero hace una presentación que induce a explicitar dimensiones de rectángulos de perímetro 22 y áreas diferentes, lo cual es básico para resolver el problema.

1.2. Al socializar el Problema Pre-1, se comentó que sería preferible que el cuadro tenga una fila más con el dato de una de las dimensiones con un número decimal – por ejemplo 5,3 – para afianzar la consideración de dimensiones que no sean en números enteros. También se comentó que la pregunta ya no debería hacerse, puesto que eso corresponde ya al problema del episodio y el problema pre debe ser preparatorio de tal problema.

1.3. El Problema Pre-2 modifica el requerimiento del problema del episodio y ofrece bastante libertad al alumno para realizar lo pedido. El requerimiento es construir libremente un conjunto de rectángulos que tengan la propiedad indicada (perímetro 22) y hallar el área de cada rectángulo construido por el propio alumno. Se induce a descubrir que existen rectángulos con el mismo perímetro y con áreas diferentes.

Aunque lo usual es considerarlo de esa manera, debería explicitarse en el enunciado del problema que la unidad de longitud debe ser tomada considerando la longitud de cada lado de un cuadradito del papel cuadriculado y la unidad de área debe ser tomada considerando un cuadradito del papel cuadriculado. Ciertamente, no necesariamente el cuadradito más pequeño.

Habría que orientar adecuadamente a los alumnos para que no se refuerce la tendencia a considerar solo dimensiones con números enteros.

El rol orientador del profesor es muy importante para explotar las posibilidades matemáticas y didácticas de esta actividad. A manera de problemas pos, en relación a este problema, pueden proponerse preguntas adicionales como:

- *¿Cómo haces para dibujar un rectángulo de perímetro 22 que tenga uno de sus lados de longitud 4,5?*
- *¿Qué pasa si el perímetro es un número impar?*
- *¿Qué pasa si adoptas como unidad de longitud el doble de la longitud del cuadradito más pequeño del papel cuadriculado?*
- *¿Cómo dibujarías un rectángulo en el que sea evidente que la unidad de longitud adoptada es la longitud de la diagonal del cuadradito más pequeño del papel cuadriculado? Dibuja uno de ellos y escribe su perímetro.*

<u>Problema Pos-1 (Individual)</u>

El perímetro de una gigantografía rectangular debe ser de 14 metros. José cobra S/. 20,00 el metro cuadrado por colocar un aviso publicitario en ella. ¿Cuál es la máxima cantidad de dinero que podría recibir José por un aviso en esa gigantografía?

<u>Problema Pos-2 (Grupal)</u>

Se quiere cercar un terreno rectangular que colinda con un cerro. Si se cuenta con 40 metros de cerca metálica ¿cuál será el área máxima posible a cercar sin considerar el lado del cerro? Observar la figura.

Comentarios 2

2.1. En ambos problemas se ha pasado a un entorno extramatemático y tienen un nivel de dificultad ligeramente mayor que el problema del episodio. Se perciben como posibles de ser afrontados con éxito por quienes comprendieron y resolvieron el problema del episodio, con el mismo entorno matemático.

2.2. En el Problema Pos-1, el contexto extramatemático está en un marco urbano interesante, poco usual en este tipo de problemas. Es claro que la información ha sido modificada y se ha añadido un precio por metro cuadrado; así, el requerimiento, siendo esencialmente el mismo, tiene una presentación diferente, con una connotación económica.

2.3. El Problema Pos-2 tiene también contexto extramatemático, inclusive la presentación está referida a un terreno, pero la información está modificada en lo cuantitativo y en lo relacional. El requerimiento no ha sido modificado.

En conversaciones con algunos participantes del taller, comentamos la posibilidad de crear nuevos problemas pos, considerando otra figura geométrica, manteniendo el contexto intramatemático. Así, planteamos las siguientes preguntas

- *¿Qué pasaría si en el problema del episodio se considera el perímetro de un triángulo en lugar del perímetro de un rectángulo?*
- *¿Qué pasaría si en el problema del episodio se considera el perímetro de un polígono de n lados en lugar del perímetro de un rectángulo?*

Uno de los participantes preguntó:

- *¿Y si damos como parte de la información la longitud de alguno de los lados?*

A lo cual otro añadió:

- *Tendría que ser en el caso de un triángulo o de un polígono de cinco o más lados, porque si en un rectángulo conoces uno de los lados y el perímetro, ya conoces todo.*

Aprovechamos la situación para preguntar:

- *¿Si se conocen las longitudes de los cuatro lados de un cuadrilátero, el cuadrilátero queda determinado?*

Se generó una discusión con ejemplos concretos y se llegó a un consenso favorable a que el cuadrilátero no queda determinado. Hicimos notar que un caso particular es que hay infinitos rombos cuyos lados son, por ejemplo de longitud 5 cm.

- *¿Cómo usar este resultado para crear nuevos problemas pos en relación al problema del episodio?*

Luego de algunas propuestas y ajustes, propusieron el siguiente problema:

Problema Pos-3

Determinar el cuadrilátero de área máxima cuyos lados son de longitudes 3 cm, 5 cm, 6 cm y 2 cm.

Aplaudimos la idea y sugerimos posponer la solución del problema para continuar en la onda creativa de problemas.

Inmediatamente propusieron cambiar en el problema anterior la información del cuadrilátero por algún otro polígono con longitudes especificadas de sus lados.

(¡Cuidado! Para tener realmente un problema, el polígono no puede ser un triángulo.)

Sugerimos desprendernos de los polígonos.

Luego de unos instantes de silencio y desconcierto, surgió la idea de dar como información solo el perímetro de la figura y como requerimiento encontrar la figura de área máxima con tal perímetro. Así llegamos al siguiente problema, que es el propuesto al inicio de este artículo.

Problema Pos-4

¿Cuál es la figura plana, que encierre la mayor área, que se puede formar con una cuerda de 22 cm de longitud?

Hubo satisfacción al llegar a este problema, y el convencimiento de que su solución tendría que usar el cálculo diferencial. Comentamos que no. Que este viejo problema – recordamos la leyenda de la Princesa Dido – fue resuelto por Steiner en 1836, asumiendo la existencia de tal figura plana.

Comentarios 3

3.1. Con el diálogo, sugerencias y preguntas, se llegó a proponer problemas sumamente interesantes, que llevan a hacer figuras y cálculos para trabajar el ensayo y error, a reforzar el aprendizaje de conceptos geométricos y a intuir conjeturas cuyas demostraciones o rechazos pueden estar en un entorno matemático que excede lo que usualmente se considera en la secundaria. Por ejemplo, un tema interesante e importante, no tocado en la discusión, pero inherente a los problemas isoperimétricos, es el de la convexidad.

3.2. Observar y demostrar que de todos los rombos cuyos lados miden 5 cm, el cuadrado es el que tiene área máxima, es un buen punto de partida para conjeturar que de todos los polígonos de *n* lados, con perímetro dado, el de área máxima es el polígono regular. Ciertamente, este es un teorema.

3.3. El Problema Pos-3 lleva a preguntarse si existe tal cuadrilátero y, de manera más general, si dados 4 números positivos cualesquiera, siempre existe el cuadrilátero cuyos lados tengan tales longitudes. Son preguntas que llevan a investigar y a avivar la curiosidad científica, tan importante en los profesores de matemática, para que a su vez la contagien a sus estudiantes. El uso de software como GeoGebra, Cabri o Mathematica puede ayudar a fortalecer o descartar las conjeturas que se vayan haciendo.

3.4. Un teorema importante, relacionado con el Problema Pos-3, cuya demostración no requiere cálculo diferencial es:

Teorema: Un cuadrilátero inscrito en una circunferencia tiene área mayor que cualquier otro cuadrilátero con lados de las mismas longitudes en el mismo orden[1].

3.5. También en el libro citado de Niven (pp. 82, 83 y 231) se encuentra demostrado el teorema alusivo al Problema Pos-4:

Teorema: Entre todas las curvas planas simples cerradas de un perímetro dado, el círculo encierra la mayor área.

Ante la inquietud sobre el uso del cálculo diferencial para estos problemas, hicimos notar que en los problemas de optimización que se afrontan con el cálculo diferencial, el objeto optimizante es un número o un vector (se busca un número o un vector que dé el valor máximo o mínimo de una función); en cambio en el Problema Pos-4 el objeto optimizante es una curva. Puede reformularse considerando como objeto optimizante una función (buscar una función que maximice una función área, que en este caso se suele llamar funcional, por ser su variable una función) y estamos así en el *cálculo de variaciones,* creado por Euler con posterioridad al cálculo diferencial.

[1] En Niven, I. (1981). *Maxima and minima without calculus*. USA: Mathematical Association of America, se encuentran las demostraciones de éste (p. 53) y del teorema mencionado en el comentario 3.2 (p. 81). Se encuentran también numerosos problemas y resultados importantes de optimización.

Comentario final

Estímulos adecuados conducen a desarrollar la capacidad de crear problemas y se puede llegar a proponer problemas muy interesantes y que amplían el horizonte matemático, al plantear dificultades que requieren el manejo de conceptos o resultados en un entorno matemático más avanzado que el del problema de un episodio inicial.

Para desarrollar la capacidad de crear problemas en los profesores, consideramos muy importante una fase de "entrenamiento" con mucha libertad a partir de un episodio dado, cuidadosamente presentado; sin embargo, considerando que tal capacidad de los profesores debe usarse para favorecer el aprendizaje de sus alumnos, es fundamental una segunda fase en la que se considere la creación de problemas en el marco del diseño de una clase, con temas específicos. Ciertamente, la libertad es fundamental en toda actividad creativa y será el conocimiento matemático y la experiencia didáctica del orientador los que permitan encontrar el equilibrio adecuado, tanto en un taller con profesores, como en una clase con alumnos de secundaria o primaria.

Apéndice

Resolviendo el problema del episodio

Hallar las dimensiones del rectángulo cuyo perímetro sea 22 cm y que tenga la mayor área posible.

Resumimos parte de las conversaciones con grupos de trabajo de profesores de matemáticas de secundaria, al resolver el problema.

Todos llegaron a una ecuación como $x + y = 11$, donde x e y representan las dimensiones del rectángulo.

Por ensayo y error – y en algunos casos haciendo una pequeña tabla como la que mostramos a continuación – varios consideraron que las dimensiones que maximizan el área del rectángulo (o sea el producto xy), son 6 cm y 5 cm.

x	y	xy
1	10	10
2	9	18
3	8	24
4	7	28
5	6	30
6	5	30
7	4	28
8	3	24

En la tabla mostraron que, con los valores que van dando a las variables, el producto más alto que se alcanza es 30.

Ante la sugerencia de tener en cuenta la respuesta de Julia en el episodio mostrado ($x = y = 5{,}5$) unos la descartaron inmediatamente porque en el problema se pide un rectángulo y la solución de Julia es con un cuadrado. Otros hicieron el producto y al obtener 30,25 – que evidentemente es mayor que 30 – se detuvieron a pensar en tal posibilidad.

Se les sugirió recordar las definiciones de rectángulo y cuadrado y examinar sus relaciones. Luego de discusiones grupales, se concluyó que los cuadrados son casos particulares de los rectángulos (rectángulos cuyo largo y ancho tienen la misma longitud) y que entonces Julia tiene razón. Así, se afirmó que la solución es el cuadrado cuyos lados miden 5,5 cm.

Se les preguntó entonces

- *¿Cómo están seguros de que 30,25 cm^2 es la mayor área de un rectángulo de perímetro 22 cm?*

Usando la calculadora algunos hicieron otras multiplicaciones:

5,6 x 5,4 = 30,24

5, 58 x 5,42 = 30,2436

Se reafirmaron en que 30,25 es el valor máximo.

Reflexionamos sobre la importancia de tener un argumento contundente, más allá de los cálculos de casos particulares y del apoyo de la tecnología.

Algunos profesores definieron la función área: $A(x; y) = xy$

Un profesor, usando la ecuación $x + y = 11$ obtuvo la función área en términos de una sola variable:

$$f(x) = x(11 - x) = 11x - x^2$$

y usando cálculo diferencial obtuvo

$$f'(x) = 11 - 2x$$

Luego de igualar a cero, concluyó que $x = 5{,}5$ da el valor máximo.

Ante la pregunta ¿por qué?, otro colega le recuerdó el criterio de la segunda derivada: como $f''(x) = -2 < 0$, el valor obtenido da un máximo.

Al invitarlos a pensar en una solución que no requiera cálculo diferencial, algunos profesores escribieron la función f completando cuadrados:

$$f(x) = \frac{121}{4} - (x - \frac{11}{2})^2$$

O sea:

$$f(x) = 30{,}25 - (x - 5{,}5)^2$$

De esta expresión concluyeron que la gráfica de la función es una parábola que se abre hacia abajo y que tiene su vértice en el punto $(\frac{11}{2} ; \frac{121}{4})$. En consecuencia, el valor máximo de la función es $\frac{121}{4}$ (o sea 30,25), que se obtiene cuando $x = \frac{11}{2}$. Todo esto coincide con los cálculos hechos anteriormente.

Una nueva pregunta:

- *¿Será indispensable usar el criterio gráfico para concluir que* $30{,}25$ *es el valor máximo que obtiene f? ¿Se puede usar un argumento en el registro algebraico?*

Después de varios comentarios sueltos, planteamos nuevas preguntas:

- *¿Cuál es el signo de toda expresión algebraica elevada al cuadrado?*
- *¿Qué relación tienen con* $\frac{121}{4}$ *los valores que se obtienen de f(*x*) para diversos valores de* x*?*

Las respuestas a las preguntas hicieron concluir que, para cada valor de x, siempre se le resta algún número no negativo a $\frac{121}{4}$ y, en consecuencia, el valor máximo que alcanza f(x) es cuando se le resta el número cero; es decir, el valor máximo es $\frac{121}{4}$, cuando $x = \frac{11}{2}$.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 131-144
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): Las competencias matemáticas a partir de una estrategia didáctica en un ambiente de geometría dinámica

Nilda Etcheverry, Marisa Reid, Rosana Botta Gioda

Resumen	Se presenta una experiencia desarrollada en el contexto de la asignatura Práctica Educativa II del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional del La Pampa. Dicha asignatura tiene entre sus objetivos la adquisición de competencias para diseñar unidades didácticas sobre los distintos contenidos curriculares de Matemática. La experiencia está centrada en la resolución de problemas con uso de tecnología, vivenciada por los futuros profesores para su posterior planificación y transferencia al ciclo básico de la educación secundaria. En particular se trabajó en el diseño de una actividad para la enseñanza de conceptos geométricos usando tecnología, con una mirada reflexiva al modo de plantear relaciones entre Álgebra y Geometría.
Abstract	We presented a developed experience in the course of Educational Practice II context for Math Teachers in the University of La Pampa. This subject, has among its objectives the acquisition of skills to design units on teaching of Mathematics Curriculum with different contents. Focused on addressing to problem-resolving with using technology experienced by future teachers for further transfer from Basic Education to Secondary School. In particular, working in the design of an activity, based on teaching with technology using geometric concepts, with a reflexive look at how to raise a relation between Algebra and Geometry.
Resumo	Apresenta-se uma experiência desenvolvida no contexto da matéria Prática Educativa II do Profesorado em Matemática da Faculdade de Ciências Exactas e Naturais da Universidade Nacional do A Pampa. Dita matéria tem entre seus objectivos a aquisição de concorrências para desenhar unidades didácticas sobre os diferentes conteúdos curriculares de Matemática. A experiência está centrada na resolução de problemas com uso de tecnologia, vivenciada pelos futuros professores para seu posterior planejamento e transferência ao ciclo básico da educação secundária. Em particular trabalhou-se no desenho de uma actividade para o ensino de conceitos geométricos usando tecnologia, com uma mirada reflexiva ao modo de propor relações entre Álgebra e Geometria.

1. Introducción

Como docentes formadores de profesores de Matemática, nos hemos propuesto desde la asignatura Práctica Educativa II del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La

Pampa (UNLPam), un objetivo macro que consiste en profundizar en el conocimiento profesional del profesor de Matemática con el objeto de incidir en su formación profesional.

Uno de los objetivos generales de la asignatura Práctica Educativa II, es que los futuros profesores adquieran las competencias para diseñar unidades didácticas sobre los distintos contenidos curriculares de Matemática.

Para cumplir con este propósito nos interesamos por:

- El diseño y planificación de un tema que incluya, de manera coherente y fundamentada, un procedimiento de planificación y análisis del aprendizaje escolar con la presencia de recursos tecnológicos,
- La búsqueda de características que deben tener las oportunidades de aprendizaje diseñadas para dar respuestas a las preguntas ¿cuáles deben ser las competencias del profesor de Matemática? ¿cómo las adquieren?

Se trabajó en el diseño de una actividad para la enseñanza de conceptos geométricos usando tecnología, dentro de un modelo didáctico amplio, flexible, riguroso y sistemático.

2. Acerca del diseño de la actividad

Los aspectos que hemos tenido en cuenta para el diseño de la secuencia didáctica son:

- las competencias que el profesor desea desarrollar en sus estudiantes mediante un tema matemático concreto,
- la tecnología como estrategia de intervención para contribuir al desarrollo de capacidades complejas y competencias matemáticas.

Por un lado se ha considerado la noción de competencias pues el uso de este término está presente en el discurso de la Educación Matemática, especialmente en el ámbito del desarrollo curricular de la práctica de la enseñanza y de la evaluación, donde se considera la posibilidad de "enseñar por competencias".

Perrenoud (2007) define competencia como “la facultad de movilizar un conjunto de recursos (saberes, capacidades, informaciones, etcétera) para solucionar con eficacia una serie de situaciones conectadas a contextos culturales, profesionales y condiciones sociales”.

Los ocho tipos de competencias matemáticas explicitadas en el proyecto PISA son:

- ✓ Pensar y Razonar;
- ✓ Argumentar;
- ✓ Comunicar;
- ✓ Construir modelos;
- ✓ Plantear y resolver problemas;
- ✓ Representar;
- ✓ Utilizar un lenguaje simbólico, formal y técnico;

- ✓ Utilizar herramientas de apoyo (por ejemplo, TIC).

El desarrollo de estas competencias pueden lograrse a partir de:

- o Identificar, analizar y evaluar los componentes de una situación problemática para anticipar su solución como resultado de la aplicación de relaciones matemáticas.
- o Confiar en las propias posibilidades para resolver problemas, formularse interrogantes, comparar las producciones realizadas, su validación y adecuación a la situación planteada, interpretando las diferentes formas de presentar la información, pudiendo pasar de una representación a otra.
- o Considerar ideas y opiniones propias y de otros, debatir y elaborar conjeturas, afirmaciones y conclusiones, avanzando desde argumentaciones empíricas hacia otras más generales, aceptando que el error es propio de todo proceso de aprendizaje.
- o Reflexionar sobre el propio proceso de aprendizaje para reconocer y relacionar los saberes adquiridos.
- o Implicarse en propuestas pedagógicas colectivas desde un rol activo y protagónico.

Cada una de las competencias contiene un conjunto extenso de elementos y admite diferentes niveles de profundidad. Los expertos del proyecto PISA consideran tres niveles de complejidad en los problemas matemáticos y en las competencias demandadas por los mismos:

<u>Primer nivel</u>: Reproducción y procedimientos rutinarios.

En este nivel se engloban aquellos ejercicios que son relativamente familiares y que exigen básicamente la reiteración de los conocimientos practicados, como son las representaciones de hechos y problemas comunes, recuerdo de objetos y propiedades matemáticas familiares, reconocimiento de equivalencias, utilización de procesos rutinarios, aplicación de algoritmos, manejo de expresiones con símbolos y fórmulas familiares, o la realización de operaciones sencillas. Un ejemplo de ejercicio propio de este nivel es la resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita.

<u>Segundo nivel</u>: Conexiones e integración para resolver problemas estándar.

El nivel de conexiones permite resolver problemas que no son simplemente rutinarios, pero que están situados en contextos familiares o cercanos. Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos con el fin de alcanzar una solución.

Un ejemplo de problema ajustado a este nivel es el siguiente: Lucía vive a 2 km de su colegio y Pablo a 5km. ¿A qué distancia vive uno de otro?

<u>Tercer nivel</u>: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

Este nivel moviliza competencias que requieren cierta comprensión y reflexión por parte del alumno, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distintas procedencias. Las tareas de este nivel requieren competencias más complejas, implican un mayor número de elementos, exigen análisis de diferentes estrategias posibles, invención de sistemas de representación no usuales, generalización y explicación o justificación de los resultados.

Parte del proceso de diseño de una unidad didáctica, consiste en establecer qué espera el profesor que aprendan sus alumnos acerca del tema que está planificando, qué puede interferir en ese proceso de aprendizaje y cómo puede favorecer que sus estudiantes logren aprender.

Por otro lado se sabe de la potencialidad de la tecnología, aunque no nos debemos quedar con que es la solución a todos los problemas educativos, siendo necesario planificar con detalle qué objetivos y competencias podemos desarrollar en los alumnos, qué tareas podemos diseñar con esos materiales y recursos para conseguirlo y cuál será la evaluación que pondremos en práctica para monitorear ese aprendizaje.

Los procesos de aprendizaje son sumamente complejos, y el docente debe necesariamente reflexionar sobre su propia práctica docente para enseñar Matemática con Tecnología.

Adoptando estas perspectivas, para iniciar la planificación de una actividad con el uso de tecnología, los docentes debemos plantearnos los siguientes interrogantes:

- ¿Qué competencias han desarrollado nuestros alumnos en años anteriores?
- ¿Qué competencias esperamos que desarrollen a partir de las actividades que van a realizar?
- ¿Qué obstáculos y dificultades prevemos que los alumnos pueden presentar cuando abordan el conocimiento que queremos enseñar con la actividad a planificar?
- De las características y potencialidades de los recursos informáticos disponibles, ¿cuáles de ellos son específicos a las competencias que se quieren desarrollar?

En esta experiencia se tuvo en cuenta que el docente debe poner la tecnología al servicio del desarrollo de las capacidades de los alumnos, proporcionarles los instrumentos concretos para acercarse de otra manera al conocimiento, rediseñar actividades y rever la metodología de los contenidos curriculares al tener como recurso las tecnologías informáticas, sin dejar de lado que los resultados no dependerán directamente de su potencialidad y carga tecnológica, sino de la interacción.

En un enfoque funcional del currículo de Matemática, la resolución de problemas ocupa un lugar predominante ya que, como hemos argumentado, la educación matemática persigue que los alumnos sean capaces de usar su conocimiento matemático para dar respuesta a problemas y necesidades que surgen en una amplia variedad de situaciones y contextos. Queremos destacar la importancia de la incorporación de problemas y tareas de modelización en el diseño y selección de tareas realizadas por el profesor.

Las tareas de modelización son un caso concreto de problemas que están enunciados en un contexto real, que deben ser reformulados en términos matemáticos para su resolución. El paso posterior en la resolución del problema implica interpretar los resultados en el contexto original. Esta lectura simplificada del proceso de modelización se puede ampliar en el trabajo de Ortiz (2002), quién hizo operativa esa noción en el marco del trabajo con futuros profesores.

La cuestión del diseño de tareas en los programas de formación de profesores es la consideración de la idea de competencia docente entendida como el uso del conocimiento para resolver los problemas profesionales de la práctica de enseñar matemáticas (Llinares, 2009). Las tareas en los programas de formación son implementadas para promover el desarrollo de competencias especificas y por tanto el aprendizaje y desarrollo de conocimiento y destrezas vinculadas a contextos-problemas específicos. Algunos de los contextos–problemas específicos vinculados a la enseñanza de las matemáticas y que constituyen un sistema de actividad para el profesor de matemáticas en el que se encuadra la práctica de enseñar matemáticas viene dado por:

- Analizar las producciones de los estudiantes.
- Organizar el contenido matemático para su enseñanza.
- Gestionar la comunicación matemática en el aula.

3. Experiencia

Se llevó a cabo con alumnos del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, en la asignatura Práctica Educativa II. La actividad planteada fue enmarcada en los contenidos curriculares: triángulos, puntos notables del triángulo y semejanza de triángulos. Se decidió abordar estos temas dado que en las observaciones de clases que realizan los alumnos en los colegios secundarios surgieron expresiones del tipo ¿Para qué me sirve la semejanza de triángulos? ¿Dónde se usa semejanza de triángulos en la vida cotidiana? ¿Para qué usamos las medianas, las alturas, las mediatrices y las bisectrices? Estas cuestiones no se pueden desaprovechar para analizar con los futuros profesores, por ello se presenta una actividad contextualizada e integrada al currículo para:

- Desarrollar los elementos de competencia que acompañan a los problemas que favorecerán la adquisición por parte de los alumnos de competencias de tercer nivel.
- Constituir un entorno de aprendizaje que considere la utilidad de las TIC, al mismo tiempo que destaque su valor informativo, formativo, comunicativo y motivador.
- Alentar al autoaprendizaje, la reflexión en y sobre la acción, y el trabajo colaborativo.

4. Situación a resolver

La propuesta combina el empleo del software de geometría dinámica GeoGebra, de uso libre, que puede obtenerse del sitio www.geogebra.org, con la resolución de una situación problemática y el desarrollo de competencias matemáticas.

Esteban tiene una chacra de forma triangular de 126,4 ha y debe repartirla entre sus dos hijos, de manera que ambos reciban regiones de igual área. ¿Puedes ayudarlo para encontrar la línea divisoria que le solucione el problema?

Una parte muy importante de la estrategia de enseñanza es la planificación de los tiempos de aula: los momentos de apropiación de la consigna, búsqueda de datos, diseño, intercambio de ideas y de actividad constructiva. Hemos destacado las instancias principales del trabajo de los alumnos y las intervenciones de los docentes formadores, con la intención de hacer explícita la metodología que los futuros profesores deben vivenciar.

Todos comienzan a trabajar dibujando un triángulo con el GeoGebra, los comentarios o preguntas que hacen los alumnos se refieren tanto a consideraciones del enunciado como de uso del software:

- ¿Cuáles son las medidas de los lados?
- Hay muchos triángulos que tienen el área dada.
- ¿Con cuál de los triángulos nos quedamos?
- ¿El triángulo puede ser equilátero?
- ¿Las dos regiones tiene que ser triangulares?
- Si quiero que tenga el área dada, se me va de la pantalla el triángulo, ¿cómo utilizo la escala en el software?

Dada la dificultad de visualizar toda la figura en la pantalla, el docente sugirió la posibilidad de trabajar a escala y utilizar la herramienta zoom con la que cuenta el software utilizado.

Un grupo, con la ayuda de las herramientas que ofrece el software moviendo uno de los puntos ubicados sobre los lados, fue encontrando regiones que se iban aproximando a las condiciones pedidas, pero no pudieron encontrar exactamente dos regiones equivalentes en área.

Otro grupo hizo un triángulo equilátero y expresaron que con la base media podían dividir al triángulo en partes iguales, esa idea errónea les permitió seguir probando con paralelas a uno de los lados.

En cuanto a la asunción de suposiciones, los profesores en formación, procedieron a *plantear casos particulares* para resolver el problema.

El docente intervino para aclararles que pueden construir cualquier triángulo que responda al dato dado, el área en este caso, para permitir empezar a hablar de generalización de la construcción.

Los alumnos empezaron a dividir el triángulo en dos partes y movieron los puntos hasta obtener dos áreas iguales, acción que no fue nada económica en tiempo, y sólo dos grupos lo lograron. (Figura 1)

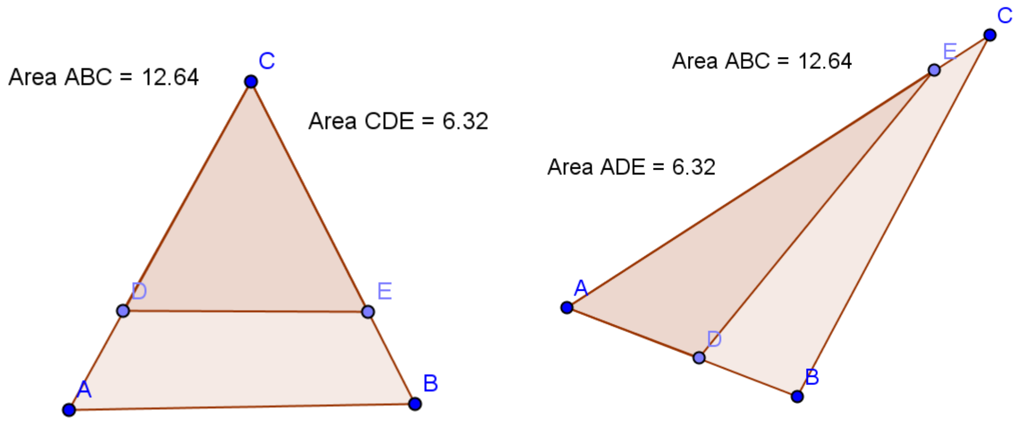


Figura 1: exploración de las áreas de los polígonos obtenidos al dividir el triángulo por un segmento de recta.

Estas construcciones hicieron ver, que el programa de geometría dinámica permite mover un punto y observar cómo se modifican los demás elementos. Los alumnos no lograron en primera instancia justificar, ni argumentar cómo encontrar los puntos que no sea por “tanteo” con ayuda del software.

Al no surgir la argumentación para esta situación, es el docente quien guió para que aparezca alguna propiedad que permita explicar porqué en el triángulo ABC, la única recta que pasa por el vértice A y que divide al triángulo en dos partes de igual área, es la que contiene a una mediana. Para ello puede inducir a partir de las distintas iniciativas de los alumnos, que consideraron:

Caso 1. La recta que contiene a uno de los vértices.

En este caso los alumnos apelaron a los puntos notables y sus propiedades. A partir de la consideración de la propiedad "Cada mediana de un triángulo divide a éste en dos triángulos de igual área", los grupos realizan construcciones como la que se muestra en la Figura 2.

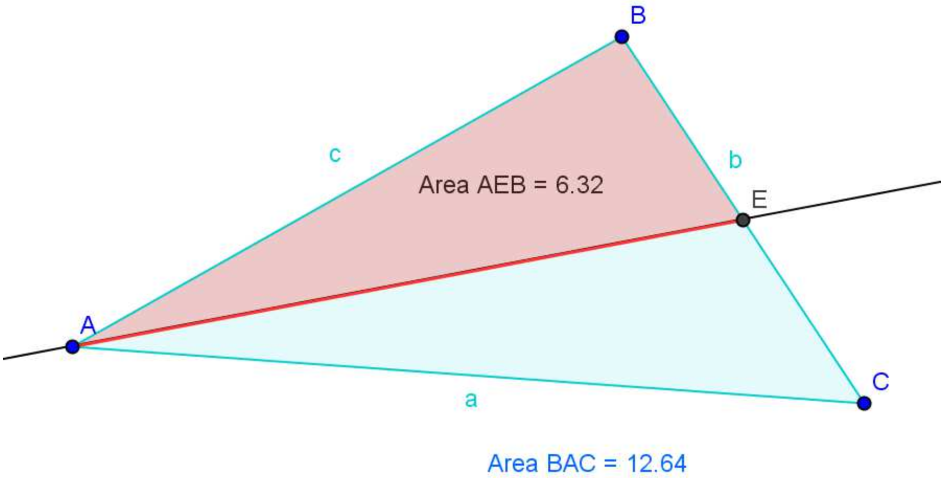


Figura 2: recta que contiene al vértice A

Con ayuda del software observaron que el área de los dos triángulos en que la mediana correspondiente al vértice A divide al triángulo ABC es la misma, y se debe a que los dos triángulos tienen la misma base y la misma altura.

Los alumnos también realizaron las construcciones para las medianas correspondientes a los otros vértices del triángulo ABC.

Caso 2: La recta divisoria es paralela a uno de los lados

El grupo formado por Sofía y Paula aclaró que el triángulo más chico que se forma debe ser la mitad del dado. El docente corroboró la deducción.

Los alumnos construyeron en sus computadoras un triángulo ABC, trazaron una recta paralela a uno de los lados, EG, obtuvieron las áreas de los triángulos BAC y BEG y luego deslizaron el punto E hasta que en sus pantallas apareció una construcción como la que se muestra en la Figura 3.

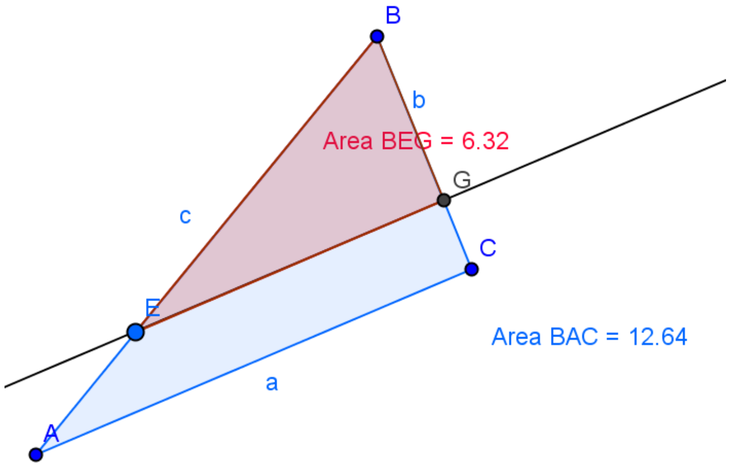


Figura 3: construcción recta paralela al lado AC

El mismo grupo se preguntó: *¿Cómo podemos encontrar exactamente el punto por el cual hay que trazar la paralela*?

Otro grupo dijo: *pero si dejamos la paralela tenemos dos triángulos semejantes*.

La docente intervino: *no se olviden de cómo trabajaron cuando no usaron software*, *anímense a escribir las relaciones que conocen de los lados, perímetro y áreas de triángulos semejantes, los puntos notables del triángulo y las propiedades de cada uno de ellos, para ver que pueden deducir*.

La situación amerita tener en cuenta que la complejidad del conocimiento geométrico radica en la dialéctica entre la experimentación y la demostración, para lo cual el docente no debe dejar que sus alumnos descuiden el vínculo entre la visualización, la exploración, comparación, manipulación y comprobación, impulsados por el uso de la tecnología.

Caso 3: Posibilidades y justificación de las construcciones.

Retomando la consideración del grupo que conjeturó que un triángulo debe ser la mitad del otro, el docente indicó que consideren el campo algebraico escribiendo las relaciones conocidas para triángulos semejantes. Aparecen las relaciones:

$\dfrac{\text{Área } ABC}{\text{Área } EAG} = 2$ entonces $\dfrac{Long\ AB}{Long\ AE} = \sqrt{2}$ y como hay que averiguar la posición del punto E, se despeja y se racionaliza en la ecuación anterior obteniendo $Long\ AE = \dfrac{Long\ AB \times \sqrt{2}}{2}$.

La docente preguntó y ¿cómo se visualiza esta relación en el campo geométrico? Es decir, ¿cómo harían para marcar exactamente en un gráfico ese punto?

Después de varios intentos e intervenciones del docente, surgió la construcción correcta, a partir de la representación de $\sqrt{2}$ sobre un segmento, utilizando su conocimiento previo acerca de la representación de dicho número en la recta numérica (Figura 4).

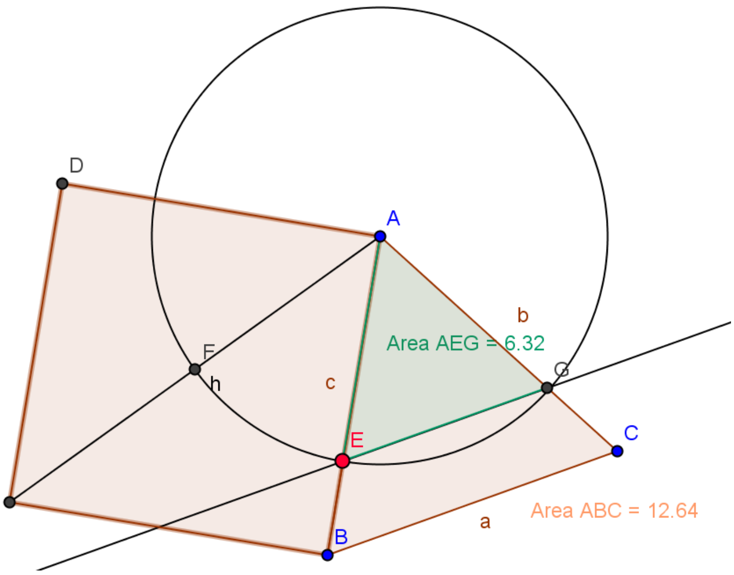


Figura 4: construcción geométrica del punto E.

Es la instancia de anticipación la que permitirá al docente estudiar las diversas estrategias de resolución que pueden surgir en los problemas, las diferentes representaciones que pueden utilizar los alumnos, los acuerdos a los que se pretende arribar, entre otros aspectos que de no ser tenidos en cuenta, seguramente estarán lejos de la construcción del sentido de los conocimientos por parte de los alumnos.

Desde la didáctica, se propicia el juego de marcos (Douady, 1984) en la búsqueda de soluciones para un problema, los diferentes marcos y sus sistemas de representación asociados, serían disparadores de la construcción de los conocimientos matemáticos. Es importante que el docente contemple este aspecto, también constitutivo del sentido de un conocimiento

Esta instancia muestra el papel que juega la posibilidad de analizar un problema como un trabajo de interacciones entre los dominios Álgebra- Geometría o viceversa y no una traducción de uno a otro.

Caso 4: Una recta cualquiera que pasa por un punto sobre el lado AB y otro sobre CB

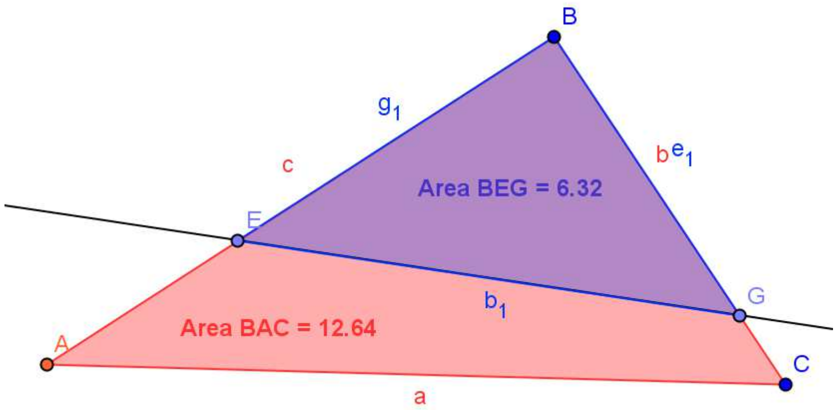


Figura 5: la recta divide al triángulo ABC en dos partes de igual área.

El docente pregunta ¿Cómo justificarían esta construcción?

El grupo formado por Laura y Luis a partir de su construcción (Figura 6) presentó la siguiente argumentación:

Dado D sobre AC queremos encontrar F, sabiendo que debe estar sobre CB. Para encontrar F de tal forma que el triángulo quede dividido en dos figuras de la misma área, observamos (Figura 6) que debe ser:

$$\text{Área (DCF)} = \frac{1}{2}\ \text{área (ABC)}\ (1)$$

usando otro marco, trigonometría, se puede escribir:

$$\text{Área (ABC)}= \frac{1}{2}\ \mathrm{AC} \cdot BC \cdot sen\ \hat{C}$$

reemplazando en (1) y simplificando, obtenemos

$$\frac{1}{2}\ DC \cdot CF \cdot sen\ \hat{C} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \mathrm{AC} \cdot BC \cdot sen\ \hat{C}$$

$$DC \cdot CF = \frac{1}{2}\ \mathrm{AC} \cdot BC$$

Si queremos encontrar F geométricamente, podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$DC \cdot CF = \mathrm{CE} \cdot BC\ \ (2)$$

siendo E el punto medio del segmento AC.

Usando semejanza de triángulos y siendo $\hat{C}$ *el ángulo común, la ecuación (2) es equivalente a la semejanza de los triángulos CEF y CDB, y por lo tanto podemos construir F como intersección de la paralela a DB que pasa por E (punto medio de AC), como se indica en la Figura 6.*

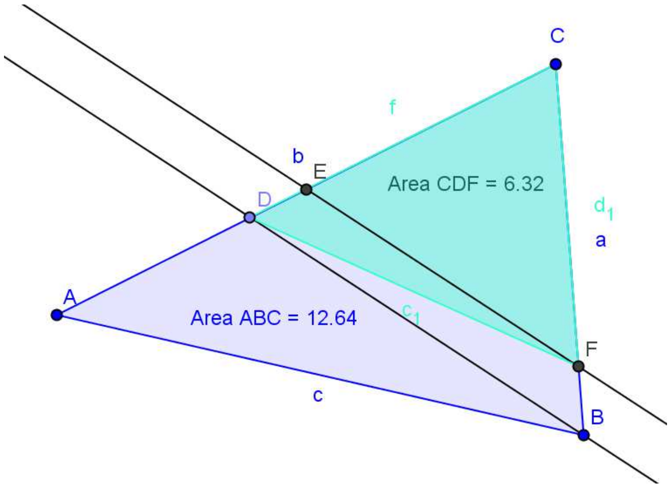


Figura 6: construcción geométrica de F conociendo D.

Pero no siempre la recta cortará a los lados AC y BC. Para estudiar un poco este problema con ayuda del software mostraron la manipulación de la recta, observando las distintas posiciones de D sobre AC y F sobre CB (Figura 7).

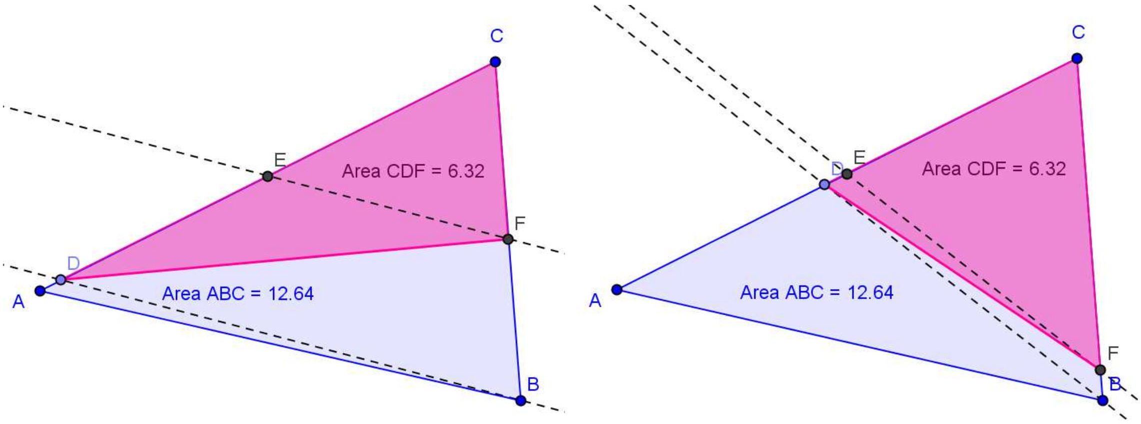


Figura 7: distintas posiciones de DF.

Vemos que a medida que D se va acercando a A, F se va acercando hacia el punto medio de BC. Es decir, para tener D sobre AC y F sobre BC, pasamos de la posición extrema donde DF es la mediana por A a la otra posición extrema donde DF es la mediana por B.

Llegó así el momento de la institucionalización y de dar una respuesta a Esteban de acuerdo a las construcciones obtenidas. Le queda a Esteban decidir a qué lado será paralela la línea divisoria en el segundo caso, o cuál de las tres medianas considerará, teniendo en cuenta otro tipo de factores o consideraciones importante para los hijos como rendimiento o bienes que quedan en cada región, etc. Y finalmente decidir qué parte le toca o corresponde a cada uno de sus hijos.

5. Conclusiones

En primer término, es de destacar que los alumnos en su primera actividad utilizando tecnología, tendieron a responder desde lo visual usando las bondades del software en ese sentido.

A través de la gestión del docente terminan resolviendo la situación:

- Identificando, analizando y evaluando los componentes de una situación problemática para anticipar su solución como resultado de la aplicación de relaciones matemáticas.
- Confiando en las propias posibilidades para resolver problemas, formulando interrogantes, comparando producciones realizadas, su validación y adecuación a la situación planteada, interpretando las diferentes formas de presentar la información, pudiendo pasar de una representación a otra.
- Considerando ideas y opiniones propias y de otros, elaborando conjeturas, afirmaciones y conclusiones, avanzando desde argumentaciones empíricas hacia otras más generales, aceptando que el error es propio de todo proceso de aprendizaje.
- Reflexionando sobre el propio proceso de aprendizaje para reconocer y relacionar los saberes adquiridos.

Se observó que estuvieron presentes distintos niveles de complejidad en la resolución del problema:

Primer nivel: Reproducción y procedimientos rutinarios.

Segundo nivel: Conexiones e integración para resolver problemas estándar.

Tercer nivel: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

Este nivel moviliza competencias que requieren cierta comprensión y reflexión por parte del alumno, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distintas procedencias. Las tareas de este nivel requieren competencias más complejas, implican un mayor número de elementos, exigen análisis de diferentes estrategias posibles, invención de sistemas de representación no usuales, generalización y explicación o justificación de los resultados.

Es interesante señalar que en todo proceso de mediación tecnológica se pueden distinguir las interacciones sujeto-instrumento, instrumento-objeto y sujeto-objeto (mediada por el instrumento). Al examinar en detalle cualquiera de las actividades de los alumnos, desde los primeros intentos de resolución hasta la respuesta final, en las diferentes etapas sobresale una de esas interacciones, pero sin independencia total de las otras dos. Por otra parte, en todas estas actividades subyacen las concepciones, creencias y conocimientos previos de los estudiantes, que se hace necesario explicitar y evolucionar.

Con esta actividad se logra que los alumnos indaguen, identifiquen y reconozcan propiedades del triángulo que impacta en un proceso intelectual que permite hacer explícitas las características y propiedades del objeto en estudio más allá de las construcciones y del uso del software.

De esta manera, los alumnos tienen las herramientas necesarias para continuar con el proceso deductivo, para el despliegue de prácticas argumentativas hacia la producción de demostraciones.

Es decir aquí los alumnos disponen de la experiencia de la construcción, con ayuda del software que les permite visualizar las distintas posibilidades, con el consecuente reconocimiento de la generalización y de esa manera ir preparando al alumno a la entrada de un trabajo más argumentativo.

El trabajo en las siguientes clases continuó con la propuesta de actividades alternativas o situaciones problemáticas sin olvidar que bajo el enfoque por competencias no se busca que el estudiante adquiera ciertos contenidos, como fin único, sino que sepa para qué sirven y ver su utilidad en algún contexto, en este caso responder de alguna manera a Esteban.

Con este tipo de propuestas nos seguimos preparando para enfrentar los nuevos paradigmas educativos con apoyo de la tecnología, a través de la formación inicial y permanente de los docentes en la adquisición de nuevas competencias que les permitan su uso en la enseñanza.

Bibliografia

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. Educational Studies in Mathematics, 47, 125-143.

Brousseau, G. (1998). Théorie des Situations Didactiques. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Douady R. (1984) Relación enseñanza – aprendizaje, Dialéctica Instrumento Objeto, Juego de marcos, en Revista de Didáctica Nº 3, Universidad de París 7, Francia.

Hitt, F. (2004). “Une comparaison entre deux approches”, enseignement des mathématiques sans ou avec logiciels et calculatrices symboliques. In Giménez J., Fitz Simons G. and Hahn Corine (2004) Actes de la CIEAEM- 54, Vilanova i la Geltrú. Spain.

Itzcovich, H. (2005). Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones. Libros del Zorzal.

Materiales Curriculares Matemática Educación Secundaria -Ciclo Básico- 2009. Ministerio de Cultura y Educación. Gobierno de la provincia de La Pampa.

OCDE (2003): The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. París: OCDE.

OCDE (2005). Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana. Madrid: Santillana.

Ortiz, J. (2002). Modelización y Calculadora Gráfica en Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. Granada , España: Universidad de Granada.

Perrenoud, P. (2007). Diez nuevas competencias para enseñar, 4a. ed., Graó, Barcelona.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. PNA, 1(2), 47-66.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. ICE/Horsori, Barcelona.España.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad. Revista SUMA, 26,11-21.

Nilda Etcheverry. Nació en Santa Rosa (Provincia de La Pampa, 1954). Es Magíster en Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional de Río Cuarto. Es docente en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). nildae@exactas.unlpam.edu.ar

Marisa Reid. Nació en Sansinena (Provincia de Buenos. Aires, 1966). Es Licenciada en Matemática, Universidad Nacional de La Pampa. Es docente en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa (Argentina).
mareid@exactas.unlpam.edu.ar

Rosana G. Botta Gioda. Nació en Rafaela (Provincia de Santa Fe, Argentina, 1975). Es Profesora en Matemática y Computación, Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). Es docente en nivel Secundario y en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). **rosanabotta@exactas.unlpam.edu.ar**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 145-163

Ideas para enseñar:

Propuestas para la enseñanza de las probabilidades: Un ejemplo basado en la educación media chilena.

Manuel Alejandro González Navarrete

Fecha de recepción:28/11/11
Fecha de aceptación:15/08/13

Resumen	En este trabajo presentamos propuestas para enseñar probabilidades a estudiantes de educación media, en el caso chileno, alumno de 14 a 17 años. La gran motivación es alejarnos de las tradicionales formas basadas en juegos de azar y/o lanzamientos de dados o monedas. Las actividades propuestas buscan relacionar los conceptos inmersos en el estudio de las probabilidades con el quehacer cotidiano de los estudiantes. Comenzando desde las nociones de azar, presentando las propiedades básicas de la teoría de conjuntos y hasta llegar al concepto de probabilidad clásica dado por Laplace **Palabras clave**: probabilidades, probabilidad clásica, Laplace.
Abstract	We present suggestions for teaching probability to secundary school students in the Chilean case, students 14 to 17 years. The main motivation is to move away from traditional forms of education based on gambling and / or flips of dice or coins. The proposed activities seek to relate the concepts involved in studying the odds with the daily lives of students. Starting from the notions of chance, presenting the basic properties of the set theory and up to the classical concept of probability given by Laplace **Keywords**: probability, classical concept of probability, Laplace.
Resumo	Neste trabalho propomos atividades para ensinar probabilidades aos estudantes do ensino medio, no caso do Chile, alunos entre os 14 aos 17 anos. A grande motivaçao é abandonar as tradicionais formas de ensino baseadas nos jogos de azar e nos lançamentos de dados ou moedas. As atividades propostas procuram relacionar os conceitos probabilisticos com o dia a dia dos estudantes. Começando com as noçoes de acaso, apresentando as propriedades básicas da teoria dos conjuntos e chegando ao conceito de probabilidade clásica dado por Laplace. **Palavras-chave:** probabilidades, probabilidade clásica, Laplace.

1. Introducción

Iniciando este trabajo, es necesario dar cuenta que el desarrollo de la teoría de la probabilidad no ha estado exento de controversias. Para muchos teóricos matemáticos, la estadística y la probabilidad con sus imprecisiones o manejo de los errores, dejan de poseer el fundamento característico de la matemática, ese indiscutible rigor axiomático que ha permitido construir las relaciones entre los conceptos manejados por esta misma. Todo lo que hasta ahora ha permitido que la matemática tenga un lugar privilegiado dentro de las ciencias. Para De León (2006) la razón es clara: las matemáticas mantienen desde hace ya milenios una bien ganada fama de fiabilidad, fama bien ganada porque constituyen el más sólido edificio conceptual construido por la humanidad. En esta línea, y haciendo un recorrido histórico, muchos autores reconocen que el cálculo de probabilidades comienza con los primeros estudios sobre los juegos de azar, plasmados en la correspondencia epistolar entre Pascal y Fermat, originada por el famoso problema planteado por el Caballero de Meré. De hecho, entre los primeros títulos referentes al estudio del concepto de probabilidad; encontramos obras que más parecen manuales para apostadores; ya que en palabras de Ugochukwu (2004) el libro escrito por Cardano[1] trató acerca de la probabilidad en las apuestas de dinero, dando consejos, basado en su experiencia, sobre cómo hacer trampa.

Para Autor (1997), un importante libro sobre probabilidad fue el trabajo de Christian Huygens (1629-1695), publicado en el año 1657. En él (*el razonamiento en los juegos de azar*), se explora la noción de esperanza matemática. Esto permite el cálculo de ganancias o pérdidas que un jugador puede esperar, conociendo las probabilidades involucradas en el juego. Sin embargo, aún hasta estas épocas el tratamiento de los fenómenos aleatorios eran vistos como casos particulares.

Como exponen Levin y Rubin (2004), en el siglo XIX, Pierre Simon, marqués de Laplace (1749-1827), unificó todas estas ideas y compiló la primera teoría general de probabilidad. Laplace desde 1774 escribió muchos artículos sobre el tema de la probabilidad. En 1812 publicó en París su *Théorie Analytique des Probabilités,* donde hace un desarrollo riguroso de la teoría de probabilidad con aplicación a problemas demográficos, jurídicos, sociales y además astronómicos. De acuerdo a Obagi (2003), esta teoría, aparte de ser la primera exposición sistemática del cálculo de probabilidades, también presenta un análisis, que hasta entonces sólo empleaba los recursos de la aritmética, de esta forma Laplace pone el cálculo de probabilidades sobre una base moderna y general.

Sin embargo, especial interés requieren las palabras del doctor David Hilbert, durante el Segundo Congreso Internacional de Matemática realizado en París, quién señaló como uno de los problemas matemáticos más importantes: la necesidad de una rigurosa fundamentación de los conceptos básicos del cálculo de probabilidades. A pesar que muchos matemáticos se preocuparon de esta tarea, fue solamente en 1933, cuando el matemático soviético Andréi Kolmogórov propuso los llamados axiomas de probabilidad, basados en la teoría de conjuntos y en la teoría de la medida, desarrollada años antes por Lebesgue, Borel y Frechet entre otros. Este modelo matemático es lo que dio forma a lo que hoy en día conocemos como teoría de probabilidades. Esta aproximación axiomática que vino a generalizar lo hasta ahora conocido como probabilidad clásica, permitió dar la rigurosidad necesaria a muchos argumentos ya utilizados, así como permitió el estudio de problemas fuera de los marcos clásicos y aclarar las aparentes paradojas existentes. Dando paso a un desarrollo tanto cuantitativo como cualitativo de los conceptos y las aplicaciones relacionadas con las más diversas áreas de conocimiento.

Un aspecto importante que se desprende de la reciente formalización de la teoría de la probabilidad es que lentamente el tratamiento académico de esta misma se ha venido observando en los sistemas educativos; en las últimas décadas del

[1] *Liber de Ludo Aleae* (El Libro de los Juegos de Azar).

siglo XX se comienzan a tratar en las reformas educacionales los tópicos de estadística y probabilidad, tal como ha ocurrido en el sistema educacional chileno. Al respecto Santaló (1999) apuntaba que la teoría de las probabilidades se fue desarrollando por cuenta separada, también por matemáticos, pero fuera de los claustros académicos, sin que figurara en los planes de estudio de las carreras universitarias, mucho menos en los de la enseñanza elemental y media.

Esta emergente relevancia que ha adquirido esta teoría hace que cada vez más autores respalden su importancia y la trascendencia de ésta en el futuro de los sistemas educacionales, entre ellos Dacunha-Castelle (1996), que ha propuesto la necesidad de que todo ciudadano posea una base sólida en probabilidad y estadística, que le permita comprender, juzgar y criticar la avalancha de información que los medios de comunicación le brindan día a día. De manera similar, Andradas (2002) opina que la probabilidad es capaz de predecir el comportamiento de fenómenos de masas con una precisión extraordinaria, de ahí la importancia de que los individuos se familiaricen con estos conceptos para comprender y predecir mucho mejor el mundo en que vivimos. Es claro que en la actualidad los ciudadanos tienen el derecho y el deber de dudar sobre lo que se les está informando, de lo contrario podrían ser víctimas de las intenciones de manipulación, que un determinado estudio sobre algún tema en particular tiene como finalidad.

Por estas razones como plantean Jiménez y Jiménez (2005): la sociedad se ve inevitablemente obligada a adaptar y reestructurar su sistema educativo, para cumplir con su compromiso de formar a los individuos que la componen. La educación, por tanto requiere entender que una persona que vive en esta sociedad moderna debe tener un mejor manejo de aquellas situaciones de carácter aleatorio, porque también a los procesos dependientes de la casualidad le son inherentes ciertas regularidades, ya que la casualidad no significa ausencia total de reglas ni menos aún caos.

Como señalaban Núñez, Sanabria y García (2004), para el caso de Costa Rica el hecho de que hace falta un análisis profundo de posibles metodologías del trato de la incertidumbre en la enseñanza secundaria. No es antojadizo. El cuestionamiento de los contenidos plantea toda una profundización en los temas que se van a desarrollar.

De forma complementaria a las ideas anteriormente propuestas, es importante recurrir al concepto de numeralismo; el cual de acuerdo a Ochsenius (1999), dice relación con la adecuada utilización de conceptos y modos de razonar propios de la matemática en el complejo proceso de adaptación de los seres humanos al mundo en que se desenvuelven. Lo que en cierto modo se refiere a la habilidad de las personas para usar la matemática al resolver problemas prácticos en la cotidianidad.

En esta línea Ochsenius (1999), basándose en los contenidos y objetivos propuestos por los planes y programas de los doce años de estudio, del sistema educativo chileno, propone que el adulto numeralista debe ser capaz de: reconocer eventos equiprobables y calcular su probabilidad; reconocer que si dos sucesos son independientes, entonces el resultado de uno de ellos no influye en la probabilidad del otro; estimar aproximadamente la probabilidad de ganar en juegos de azar sencillos; y utilizar adecuadamente la ley de los grandes números en la toma de decisiones en la vida cotidiana.

Importante se vuelven por tanto las bien conocidas palabras de Vygostky quien afirma que “la enseñanza directa de conceptos es tarea vana e imposible” ya que de esta manera sólo se obtendrán “verbalismos vacíos, que solo simulan conocimiento” (1975, p. 83). Así como también lo propuso Gardner (1996), refiriéndose a que el sistema educativo ha privilegiado los procedimientos mecánicos, dejando de lado la comprensión; encontrándonos con que la destreza en resolver problemas es puesta en equivalencia con el dominio de la materia en estudio. Ya que sólo se preguntan los típicos problemas, enunciados y ejercitados repetitivamente. Lo que Ochsenius reafirma proponiendo:

> *Los problemas de la vida cotidiana constituyen una clara violación de este acuerdo; no son susceptibles de ser resueltos por aplicación mecánica de algoritmos pues la realidad plantea cada vez situaciones diferentes, son preguntas que rara vez tienen un enunciado explícito donde se encuentre cómodamente la información necesaria y precisa para contestarlas. (1999, p. 33)*

2. Justificación de la propuesta

Actualmente en el sistema educativo chileno, los contenidos de probabilidades se encuentran dentro de los que más complicaciones traen a los profesores de matemática a la hora de enseñarlos; ya sea por la dificultad de abordar algunas situaciones o por el escaso material didáctico disponible para su enseñanza. Motivo por el cual en muchos establecimientos es común que los docentes de la especialidad prefieran enseñar dichos contenidos de escasa manera, y al mismo tiempo de una forma poco contextualizada; inclusive, en el peor de los casos, los educadores evitan trabajar dichas unidades.

Bastante común resulta encontrarnos con propuestas de enseñanza que mayoritariamente acuden a los ejemplos del lanzamiento de dados o monedas y/o extracciones de cartas desde una baraja. Es claro que el estudio de las probabilidades en sus inicios se encargó de analizar situaciones relacionadas con los juegos de azar, pero en la actualidad resulta importante poder vincular los conceptos de esta teoría a nuevas situaciones y de forma contextualizada.

El convencimiento de que esta labor es posible, se vuelve hoy en día una necesidad para que nuevas propuestas emerjan, promoviendo el cambio y el intercambio respecto del tipo de actividades y ejemplos en la enseñanza de la unidad de probabilidades. De esta manera surge la iniciativa de presentar las siguientes propuestas didácticas, orientadas a la enseñanza de la probabilidad en educación media; que buscan ser un referente para que los docentes puedan incluir en el proceso de enseñanza-aprendizaje nuevas actividades y tomen la iniciativa para construir, bajo sus propias visiones y realidades, otras propuestas que se adecuen al tipo de situaciones que ellos deseen estudiar en este contenido.

Se presenta de este modo, un conjunto de actividades que están orientadas a los contenidos introductorios de la teoría de probabilidades. En ellas son propuestas situaciones que intentan mostrar novedosas formas en que los contenidos pueden ser tratados, así como también, se contextualizan los ejemplos para una mejor comprensión por parte de los estudiantes.

3. Estructura de las actividades

Cada una de las actividades propuestas están compuestas por cuatro secciones, las que se exponen a continuación;

- **Explicación de la Actividad** en la que se dan a conocer los objetivos y las características de la actividad que se propone, además de incluir algunas definiciones, en los casos que sean necesarios.
- **Desarrollo de la Actividad** esta sección se enfoca a describir los ejemplos específicos que se plantean para la enseñanza del contenido propuesto. El desarrollo de la actividad es, en cierto modo, el relato de lo que se espera sea realizado en el aula.
- **Conclusión y Cierre de la Actividad** cada una de las actividades que se proponen incluyen algunas ideas de cómo realizar el cierre de éstas, de tal manera de poder evaluar el aprendizaje de los estudiantes y plantear otras situaciones que refuercen los contenidos tratados.
- **Sugerencias Finales** el apartado de sugerencias finales expresa algunas recomendaciones para el docente, con respecto a lo que es esperable obtener luego de la realización de la actividad; las inquietudes que deberían surgir de los estudiantes y las ideas que el docente debiera considerar para las próximas sesiones. Además se pueden encontrar algunos contenidos complementarios que permiten profundizar lo que ha sido tratado en la propuesta didáctica.

4. Actividades

4.1 El día del azar.

Una introducción al concepto de azar...

Explicación de la Actividad.

En esta actividad se intenta conseguir que los estudiantes relacionen la cotidianidad con lo que ellos entienden como azar y, específicamente la manera en que formalmente es definido tal concepto.

Por tanto se motivará a los alumnos con una historia que les contará el quehacer de un día común en la vida de un estudiante; en este trayecto irán ocurriendo situaciones en las que el azar juega un rol fundamental, dichos eventos serán relacionados indirectamente con el fin que se postula, haciendo consultas a los estudiantes sobre lo que podría ocurrir; para de ésta forma ir guiando a los alumnos a crear una idea, o bien aclarar sus ideas, sobre lo que el azar representa en situaciones diversas.

Luego de una discusión grupal, guiada por preguntas con la finalidad de que los alumnos identifiquen las características de un fenómeno azaroso; se propondrá que los estudiantes definan lo que se interpreta, con relación al concepto de azar.

Finalmente se hará una discusión general, para de esta forma, entregar una caracterización del contenido y hacer la aclaración de las dudas que pueden generarse en los alumnos.

Desarrollo de la Actividad.

Como hemos dicho, se propone la introducción al concepto de azar a través de una historia que vaya desvelando las características de los fenómenos con tal cualidad.

La historia por tanto sería la siguiente:

“...Un día cualquiera de la semana, te levantas temprano para asistir al liceo; tal como todos los días te diriges al paradero para poder tomar alguna micro que te lleve a tu destino, *¿cuál de las micros que te son útiles será la que pase primero?.* Subiéndote a dicha micro, *¿cuántos personas exactamente irán en ésta al momento de pagar tu boleto?*, ya que como es sabido si hay muchos pasajeros puede que la micro demore un poco más y quizás *¿cuántos minutos tardes, en llegar al liceo?.*

Una vez en el colegio, encuentras a tus amigos conversando sobre el programa de televisión que vieron la noche anterior, *¿de qué canal puede haber sido este programa que mantiene en discusión a tus amigos?* Luego de eso ingresa el profesor de Biología que continúa con la materia de la clase anterior, de la cual promete entregar un cuestionario, te preguntas *¿cuántas serán las preguntas que contenga?.* Aunque lo único que tienes claro es que deseas salir a recreo lo antes posible.

Tocando el timbre, al salir a recreo vas directamente al baño; en éste *¿con cuántos amigos te encontrarás para conversar?*. Sea así o no, de todas formas igual el recreo pasará rápidamente porque hay muchas formas de entretenerse, pero pronto deberás volver a la sala.

Al entrar a la clase de historia, todos saben que el profesor elegirá a algún alumno para hacer el recuento de la materia vista en la clase anterior, entonces *¿qué posibilidades hay de que el escogido seas tú?* o peor aún, ya que vienes algo entusiasmado del recreo, *¿serás sorprendido por él cuando estés tirándole papeles a tus compañeros?*

Por suerte la mañana ha pasado rápido y ya es hora de ir al comedor del liceo para almorzar, escuchas en los pasillos que hay legumbres de almuerzo, *¿será posible predecir con exactitud qué tipo de legumbres son?*

Más tarde, luego de ese rico almuerzo de legumbres; debes rendir la prueba de lenguaje, para la cual no has estudiado y decides usar un *"torpedo"*, en el que pusiste un par de preguntas de una larga lista que contenía la guía de estudio. Por tanto, *¿cuál es la posibilidad de que al menos una de las preguntas de la prueba coincidan con las del "torpedo"?* o bien, *¿qué opción hay de que el profesor te sorprenda copiando justo la primera vez que saques el torpedo?*

Terminada la prueba tus ánimos no están de lo mejor. Más aún, luego del recreo el cansancio se comienza a notar; pero sabes que viene la clase de matemática, que tal vez sea una opción para conversar con tus amigos, porque el profesor es bastante "*latero*". Llega él y les propone trabajar en un nuevo contenido, para el cual comenzarán hablando sobre el azar y, te preguntas *¿cuál es la opción de que este profesor te entregue una guía tan poco matemática como ésta?..."*

<u>Conclusión y Cierre de la Actividad.</u>

Para poder realizar el cierre de la actividad se propone que los estudiantes hagan el análisis de las situaciones planteadas en la historia anterior. Se busca que los alumnos concluyan sobre las características de instancias en las que juegue un rol el azar. Por tanto, se sugieren preguntas como:

- ¿Puedes responder con certeza las preguntas planteadas en el desenlace de la historia?
- ¿Por qué razón crees tú que no es posible asegurar el resultado de dichas situaciones?

- ¿Es posible en cambio, poder intuir los sucesos a ocurrir en cada una de las instancias?
- ¿Qué característica común encuentras en estas situaciones?
- ¿Es posible decir que en estos ejemplos entra en juego el factor suerte?

Preguntas de este tipo, pueden ayudar a los alumnos a aclarar sus ideas con respecto a lo que se conoce como azar; procurando como docentes guiar las discusiones grupales, es importante que sea finalmente consensuada una definición del concepto de azar.

A la vez, se sugiere que los ejemplos planteados sean revisados, encontrando los llamados espacios muestrales; sin necesidad de utilizar estos conceptos que aún los alumnos no son capaces de manejar.

Relevante resulta el hecho de aclarar a los estudiantes que muchas situaciones de la vida están relacionadas con el azar. Pero no toda la cotidianidad se basa en modelos aleatorios; ya que también es posible responder, con exactitud, a inquietudes que surgen de fenómenos que son regidos por leyes científicas.

Sugerencias Finales.

Bajo el supuesto de realizar esta actividad como introducción a la unidad de probabilidades, es importante que el profesor utilice dinamismo y complemente la actividad con situaciones azarosas propuestas por los estudiantes, de esta forma mantener motivados a los estudiantes; no dando instancias para que ellos se distraigan. También es necesario vislumbrar actividades similares a éstas para los siguientes contenidos de la unidad; esto porque no sirve de nada una introducción motivadora para luego terminar utilizando estrategias tradicionales para la enseñanza de los contenidos matemáticos.

4.2 Experimentando en lo cotidiano.

Estudio de los Conceptos de Experimentos Aleatorios, Espacio Muestral y Sucesos.

Explicación de la Actividad.

La presente actividad se enmarca en el concepto de Experimento Aleatorio y las ideas implicadas en este. Se busca que los estudiantes caractericen las nociones de Experimento y, específicamente, aquellos que se presentan de modo aleatorio.

En el transcurso de la actividad, el docente irá conduciendo las deducciones a través de ejemplos; los que en primer lugar permiten diferenciar entre situaciones deterministas y aleatorias.

Se debe mostrar, de forma similar a lo que se hizo con la historia introductoria, que en la cotidianidad se encuentran bastantes situaciones que proponen un modelo aleatorio, en las cuales es viable adelantar las posibles respuestas que podrían suceder. Sin embargo, no se tendrá la certeza de asegurar cuál será el desenlace exacto.

Se mostrará a los alumnos las posibles preguntas a las situaciones aleatorias que se plantean en estudios experimentales; como las respuestas a alguna encuesta sobre un tema de interés o los flujos periódicos de personas u objetos en ciertos lugares o circunstancias.

Una vez que los jóvenes logren identificar las particularidades de los Experimentos Aleatorios, procederán a analizar los conceptos de Espacio Muestral y Sucesos, determinando algunos de ellos. Finalmente, se concluirá la actividad dando formalmente las definiciones de los conceptos tratados; lo que dará paso a las futuras propuestas que se adentran en las propiedades del cálculo de probabilidades.

Desarrollo de la Actividad.

Se comienza dando ejemplos de situaciones cotidianas que corresponden a modelos determinísticos, de ellos se asegura el resultado final. Este tipo de experimentos serán comparados con aquellos de tipo aleatorio, para finalmente proponer una definición de los últimos. Se desea que el docente plantee situaciones como,

a) Un árbol (de hojas caduca) es estudiado al comenzar el otoño, ¿qué pasará con sus hojas en ésta estación? Si el próximo año se pregunta lo mismo, ¿cuál será la respuesta a aquello?
b) Si hay una luz encendida, y presionas su interruptor, ¿qué ocurrirá con la ampolleta?.
c) Al lanzar una piedra al aire (sin existir algo que obstaculice su trayecto), ¿qué ocurrirá con la piedra luego de alcanzar su altura máxima?
d) Una niña tiene 4 monedas de $100, le pide a su papá 2 monedas, del mismo valor, ¿cuánto dinero posee ahora la pequeña?

Debe resultar un consenso, el hecho de que las respuestas a cada una de las interrogantes son indiscutibles; no habrá otra opción para cada uno de los experimentos, esto debido a que cada uno de ellos responde a leyes o principios científicos (biológicos, físicos, matemáticos, entre otros). Serán por tanto, denotados como experimentos determinísticos, ya que independientemente de las veces que se vuelvan a repetir (bajo similares condiciones), los resultados serán siempre los mismos.

Posterior a esto, el profesor podrá proponer situaciones en las que no es posible determinar con exactitud el resultado final o desenlace; dichas situaciones se complementarán con algunas preguntas que acompañen la idea de la incertidumbre presente en los experimentos. Se aclara que el tipo de situaciones se separarán en dos bloques; el primero de ellos intenta ilustrar, únicamente, el concepto de experimento aleatorio, para analizar sus características. Luego de esto, con el segundo grupo de situaciones, se conducirá a los estudiantes a comprender los conceptos de Espacio Muestral y de sucesos, mediante otro tipo de preguntas; las que permitirán a los alumnos visualizar los posibles resultados, ellos podrán identificarlos en distintos experimentos y luego pasar a dar una definición formal de éstos mismos.

El tipo de situaciones a plantear, para el primer grupo, serán como las que siguen,

a) Si se contabiliza el número de vehículos que transitan por la esquina del liceo durante el día. Podrías adelantarte a asegurar, ¿cuántos autos pasarán entre las 13 y las 14 horas?

b) En un partido cualquiera de la selección, se analiza la cantidad de tiros que ataja el arquero chileno durante el transcurso del juego. ¿Cuál será el total de tapadas?, ¿puedes responder con exactitud antes del partido?

c) Tienes la posibilidad de revisar tu correo electrónico solamente los días Domingo, ¿cuántos correos encontrarás en tu bandeja de entrada cada vez que lo revises?

d) En una frutería escoges tres naranjas para pesarlas y luego cancelar, ¿serías capaz de asegurar cuánto pesan exactamente las naranjas seleccionadas?

e) Cada vez que vas al supermercado, te encuentras en las cajas con colas de distinto tamaño. En un día cualquiera, ¿cuántas personas exactamente pasarán por las cajas en el transcurso de tu espera?. O bien, ¿cuántos de ellos cancelan con tarjeta de crédito?

f) Para una tarea de lenguaje debes realizar una entrevista a algún personaje de la ciudad, ¿cuánto crees que será la duración de la grabación?

g) De acuerdo a lo que caminas diariamente dentro del liceo. Con exactitud, ¿cuántos pasos darás en un día cualquiera?, ¿a cuántos metros equivaldrán estos?

Las situaciones antes propuestas buscan la comprensión del concepto de Experimento Aleatorio. Las preguntas planteadas pueden ser complementadas por otras que el docente estime convenientes. Cada ejemplo debe ser aprovechado para representar además, sin tanta profundidad, los conceptos de Variable Aleatoria. Considerando que cada situación se acompaña de un valor a estudiar; esta variable puede ser también analizada, bajo las características de los valores posibles que tomará, siendo éstos continuos (medir algo, como en el ejemplo d) y f)) o discretos (contar, como en a), b), c) y e)). En algunos casos, un mismo experimento puede ser analizado bajo variables continuas o discretas, dependiendo de lo requerido, tal como ocurre en el ejemplo g); donde la cantidad de pasos es un valor discreto, pero los metros a los que equivalen éstos, corresponde a una variable continua.

Otro aspecto importante es la relevancia del análisis de estas distintas situaciones, las que resultarán de utilidad en algunos estudios estadísticos. Tal como se contabiliza el flujo de vehículos en las intersecciones de algunas calles, para estudiar la instalación de un semáforo; así como se analiza la cantidad de clientes en un supermercado, para mejorar u optimizar el servicio. O bien, simplemente preocupa el número de tapadas de un arquero, para determinar su nivel como jugador.

En la siguiente parte, es considerado el segundo grupo de situaciones,

h) Si estás jugando al *“cachipún”* con un amigo, ¿podrías asegurarte de ganar en el primer intento?, ¿qué tipo de resultados pueden darse? (Espacio Muestral)

i) De una alcancía tratas de sacar unas monedas, solamente puedes retirar 2 monedas cualquiera, ¿tendrás certeza de cuánto suman ambas?, ¿qué posibles resultados pueden darse?

j) Para la tarea de biología, el profesor decide sortear las parejas que trabajarán en ella. ¿De que género (sexo) será tu compañero de tarea?, ¿qué posibilidades existen?

k) Conociendo a un nuevo compañero, le consultas si su equipo favorito es el mismo que el tuyo, ¿qué posibles respuestas podrías obtener? ¿te adelantarías a asegurar lo que responderá?

l) Si lanzas un dado al aire, y estudias el número resultante en la cara superior ¿qué posibles resultados existen?

m) Cada mañana, para asistir al liceo, tomas la primera micro (que llegue a tu colegio) que pase por el paradero, ¿cuál será el último dígito en la patente de la micro que tomes en un día cualquiera?, ¿qué posibles resultados existen?

Estas situaciones, acompañadas por preguntas que ayuden a los estudiantes a comprender el concepto de Espacio Muestral; requieren que el docente caracterice dichas ideas y proponga finalmente una definición al concepto. Se visualiza que los ejemplos permiten encontrar con facilidad los posibles resultados. De igual modo, se deben identificar en las situaciones algunos sucesos, para que los alumnos comiencen a manejar todos los conceptos requeridos para el estudio formal de la teoría de la probabilidad.

En el ejemplo h), puede consultarse a los estudiante sobre los resultados que permiten que se gane el juego; o bien, aquellos que favorezcan al oponente, vislumbrando de ésta forma algunas ideas sobre lo que sería un suceso. También se puede referenciar el ejemplo i), explicando que un grupo de resultados, tales como los pares de monedas que suman más de $100, será considerado como un suceso; del cuál a futuro se verán otras características más específicas.

<u>Conclusión y Cierre de la Actividad.</u>

Para finalizar la actividad se propone que el docente se apoye de las definiciones de Espacio Muestral y Suceso, de ésta manera son formalizadas las ideas que los estudiantes construyeron con los ejemplos, respecto a las particularidades de dichos conceptos.

El docente también podrá presentar otros ejemplos y pedir a los estudiantes que determinen los Espacios Muestrales, proponiendo con palabras algunos sucesos, para luego ser identificados en concreto, de acuerdo a los elementos del Espacio Muestral. Por ejemplo, para la situación de la patente de la micro, puede proponerse el evento o suceso de que el dígito final corresponda a un número impar, un número primo o un número mayor que 5, entre otros.

<u>Sugerencias Finales.</u>

Hasta ahora las actividades que han sido propuestas representan una introducción a los conceptos requerido para el estudio de la teoría de probabilidad. Importante es verificar que los estudiantes comprendan las ideas referidas a este contenido. Por tanto, se debe procurar una constante evaluación de los aprendizajes de los alumnos, consultando a la mayoría y haciéndolos participes de las actividades en el aula.

En lo sucesivo, las actividades venideras se adentran en propiedades que permiten ir concretando los elementos requeridos para el cálculo de probabilidades. Encontrándose formalizaciones matemáticas más teóricas, que requerirán de un mayor trabajo en clases, para procurar el aprendizaje de los estudiantes.

4.3 Un conjunto de propiedades

Estudio de las Propiedades de la
Teoría de Conjuntos útiles en Probabilidades.

<u>Explicación de la Actividad.</u>

En estos momentos los estudiantes ya manejan los conceptos básicos asociados a la teoría de la probabilidad. En más, para la presente actividad se requiere que sean formalizadas las nociones de Espacio Muestral y Suceso. Se aclara que el Espacio Muestral es denotado por la letra griega Ω (omega mayúscula); y algún suceso o evento de éste, es asignado por una letra mayúscula de nuestro alfabeto (A, B, C, …).

Los objetivos de esta actividad, son entonces, poder enunciar eventos, mediante palabras y desarrollarlo por extensión, enumerando los elementos de éstos. Se tratarán además las nociones de complemento, intersección y unión entre sucesos. Caracterizándolas mediante ejemplos que permitirán visualizar los elementos que le van conformando en diversas situaciones.

Para finalizar, se trabaja el concepto de cardinalidad, determinando en algunos Espacios Muestrales y sucesos, el valor de aquello. Y se deducirán las propiedades básicas asociadas a la cardinalidad del complemento de un suceso y la unión entre dos eventos.

<u>Desarrollo de la Actividad.</u>

Comienza el trabajo de la actividad con un ejemplo que venga a reforzar las ideas de la notación de un suceso y del Espacio Muestral. Es importante decir que, en la mayoría de los experimentos aleatorios es necesario buscar los posibles resultados. No obstante, para ejemplificar de mejor manera, serán utilizadas algunas situaciones en que el Espacio Muestral es propuesto inicialmente.

El ejemplo introductorio será;

a) Un niño tiene el día Lunes clases de Matemática, Música, Lenguaje, Historia y Artes. Su madre ha forrado todos sus cuadernos del mismo color. En cierto momento, el niño saca un cuaderno al azar desde su mochila, ¿a qué asignatura corresponderá el seleccionado?

Se tiene para esto, el Espacio Muestral dado por,

Ω = {Música, Matemática, Artes, Historia, Lenguaje}.

El que es posible denotar por: Ω = Todos los cuadernos dentro de la mochila.

Surge ahora la pregunta, ¿qué cuadernos **no** utilizará en la asignatura de Lenguaje?. Los que consisten en un grupo del total de los que están en la mochila. A saber, un grupo que forma parte del Espacio Muestral, se denominará subconjunto de Ω. Es posible ahora resumir dicho grupo, denotándolo con un letra A, y concluir que A = {Música, Matemática, Artes, Historia}. Hágase notar que todos los elementos de A están en Ω, particularidad de ser un subconjunto (A □ Ω).

El suceso A en palabras será:

A = Cuadernos dentro de la mochila que **no** son de Lenguaje.

Otro ejemplo de subconjuntos (suceso), sería considerar los cuadernos de las asignaturas que terminan con la “letra a”. Será llamado B, en esta situación, B = {Música, Matemática, Historia}, y en palabras se escribirá,

B = Cuadernos de las asignaturas que terminan con la “letra a”.

Se sugiere por ejemplo, preguntar a algún alumno o alumna, cuáles asignaturas le agradan, le desagradan o en cuáles tiene mejores calificaciones. De esta manera se definirán otros subconjuntos.

C = Cuadernos de las asignaturas que le gustan a Carolina.

D = Cuadernos de las asignaturas en que Arantzazú tiene un promedio superior a 6.

En el momento en que el docente se asegura que los ejemplos han sido comprendidos; procede a caracterizar los conceptos de complemento, intersección y unión entre conjuntos. Para aquello, una opción es mantener el mismo ejemplo de los cuadernos, o bien proponer una nueva situación.

Para representar las siguientes propiedades, un ejemplo de utilidad sería:

b) Un grupo de 8 amigos se encuentran descansando en la plaza de Temuco (José, Yanira, Luís, María, Manuel, Verónica, Nicolás y Javiera). De ellos se sabe que solamente María, Javiera y Nicolás son de Temuco. Un turista los encuentra y pregunta a uno de ellos (al azar) por una dirección dentro de la ciudad.

La situación se plantea bajo la lógica de un Experimento Aleatorio, por lo que,

Ω = Los 8 amigos que descansan en la plaza.

De ésta situación se toman los sucesos.

A = El consultado es de Temuco.

B = El consultado es una mujer.

Obteniendo que,

A = {Javiera, María, Nicolás} y

B = {Yanira, Verónica, Javiera, María}

El docente podrá preguntar por aquellos jóvenes que **no** son de Temuco, se dirá que ellos son: José, Yanira, Luís, Manuel y Verónica. Quienes por dicha particularidad se podrán identificar como el suceso,

A^c = el consultado **no** es de Temuco.

Usando esa notación, porque al comparar los integrantes de A^c, se asegura que éstos son los amigos que **no** son parte de los elementos de A. De otra forma, son los jóvenes que le faltan a A para “completar” todo el grupo de amigos. De esta manera, A^c es llamado el complemento de A. Osea A y A^c se “complementan” para formar el total. De forma similar, se puede ver que B^c, serían los amigos que NO cumplen con B, es decir

B^c = el consultado es un hombre.

Se supondrá ahora que al turista “le gustaría” ser ayudado por una persona que sea de Temuco “o” por una mujer; para esa condición los jóvenes que pueden ayudar al turista son: Javiera, María, Nicolás, Verónica y Yanira.

Resulta importante que el alumno visualice la idea de que estos jóvenes cumplen con pertenecer a A “o” pertenecen a B. De esta forma, ellos serán considerados como integrantes del suceso A U B, que se refiere a la unión de los conjuntos A y B (compuesto por los elementos que pertenecen a A ``o'' que pertenecen a B).

Posteriormente, se planteará a los estudiantes que por las intenciones del turista, es lógico que lo que realmente le conviene a él, es ser ayudado por una mujer que sea de Temuco. Es decir, una persona que cumpla las condiciones de ser de la ciudad (A) “y” de ser mujer (B). Las niñas que ayudarán de mejor forma al turista serán Javiera y María; ellas cumplen con la condición A y B, al mismo tiempo.

Se llamará ésta idea la intersección entre A y B, denotado por $A \cap B$ y formado por los elementos que tienen en común A y B.

Una vez que se han visto estas ideas, el docente comentará el concepto de cardinalidad de un conjunto, explicándolo como el número de elementos presentes en éste. Así, encontrar la cardinalidad del Espacio Muestral, denotado por $\#\Omega$, contar los posibles resultados del Experimento Aleatorio. Una observación importante, es que la cardinalidad será siempre un número Natural (porque se está contando) y particularmente, $\#(\Omega) \geq 2$; ya que si se refiere a un Experimento Aleatorio, el Espacio Muestral deberá poseer, al menos, dos opciones (para reafirmar la idea de incertidumbre).

Del ejemplo a), se obtiene que $\#(\Omega) = 5$, en el caso de la situación en b), $\#(\Omega)=8$. Se intenta de esto, poder reconocer algunas propiedades; en consideración del ejemplo b). Si de dicha situación se busca $\#(A)$, la que es igual a 3. Al mismo tiempo, $\#(A^c) = 5$. Para el suceso B, se dirá que $\#(B) = 4$ y $\#(B^c) = 4$. La conclusión que se debe considerar es que si A^c está conformado por los elementos que no están en A, se cumplirá siempre que:

$$\#(A) + \#(A^c) = \#(\Omega)$$

Finalmente, se consulta a los estudiantes sobre cómo calcular $\#(A \cup B)$. Una posible respuesta es la idea de que se conocen los integrantes de $A \cup B$, los que son Verónica, Yanira, Javiera, María y Nicolás; por lo que $\#(A \cup B) = 5$. No obstante, es posible proponer la opción de contabilizar los elementos de A y los elementos de B, pero al sumar éstas cantidades, se estarán contando dos veces algunos integrantes. Ya que si $\#(A) = 3$ y $\#(B) = 4$, es claro que se cuenta a Javiera y María en ambos casos. Se debe recordar, que éstas dos niñas cumplían con A y con B, al mismo tiempo, lo que fue llamado $A \cap B$.

Por tanto, para considerar $\#(A \cup B)$, se tomará $\#(A)$ y $\#(B)$, pero se deberá quitar los elementos repetidos, que fueron encontrados con $\#(A \cap B)$. Es decir:

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

Conclusión y Cierre de la Actividad.

Un detalle importante al cierre es proponer ejemplos en los que la intersección de los conjuntos no existe, y de ésta forma mostrar que esos casos la manera de calcular la cardinalidad de la unión será dada por

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$$

Se comentará que estas nociones de contar, hasta ahora serán vistas bajo la lógica de que las cardinalidades requerirán de enumerar los elementos de cada conjunto. Mas, en actividades relacionadas a los conceptos de combinatoria, se deberá indicar que es posible encontrar las cardinalidades utilizando métodos más rápidos y precisos.

Sugerencias Finales.

Recomendable puede resultar ejemplificar las situaciones mediante diagramas de Venn, para que los alumnos identifiquen los conceptos de intersección y unión de manera más gráfica. Más aún, se pueden entregar algunos datos, en alguna situación, para que ellos efectúen el diagrama de Venn y hagan coincidir las cardinalidades implicadas en el problema.

4.4 Lo clásico en probabilidades

Desarrollo del Concepto de Probabilidad Clásica
y la Fórmula de Laplace para el Cálculo de Probabilidades.

Explicación de la Actividad.

La actividad propuesta para este contenido busca guiar a los estudiantes en concluir la necesidad, en la que se basa la teoría de la probabilidad clásica, de suponer cierto tipo de experimentos como sucesos equiprobables. De este modo se analizan las características y propiedades de dichos eventos.

Se trabajarán experimentos aleatorios (particularmente con sucesos equiprobables), los que serán abordados de modo que se irán planteando preguntas que guiarán a los estudiantes para que deduzcan ellos mismos, situaciones en las que se encuentran ante sucesos con igual probabilidad. Avanzando de esta forma en la actividad, se busca que los estudiantes comprendan el por qué se plantea que el cálculo de la probabilidad clásica, implica considerar la cantidad de casos posibles y la cantidad de casos favorables, para con ello aplicar la proporción y obtener la probabilidad de cierto suceso.

El objetivo de la actividad, por tanto, es que el docente vaya guiando a los alumnos para que ellos identifiquen la fórmula de probabilidad clásica como una noción matemática, que nace de la deducción humana; surgida por el análisis de situaciones similares a las que los estudiantes revisarán en esta parte del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Como ya se han manejado los conceptos de Espacio Muestral, Suceso y otros necesarios para la comprensión de las propiedades de la probabilidad clásica; es de esperar que simplemente baste un repaso mediante ejemplos, que retraten de la forma más sencilla y concreta a los alumnos, las características propias de estos. Sin embargo, se hace hincapié que algunas notaciones necesarias para esta parte de la unidad deben ser vistas en estos momentos, tales como la *probabilidad de un suceso A*, denotado por *P(A)*.

Desarrollo de la Actividad.

Progresivamente el docente irá situando a los estudiantes ante experimentos aleatorios con distintas características, la particularidad de ellos es la equiprobabilidad de sus sucesos, lo que permitirá deducir de ésta forma, la fórmula del cálculo de probabilidad clásica dada por Laplace.

Se proponen a continuación algunas situaciones, en el orden progresivo que se busca, las que se complementan con preguntas que favorecen las conclusiones de los estudiantes.

a) En una caja oscura, se sabe que hay 100 bolitas, de éstas hay 90 bolitas azules, 5 bolitas verdes y 5 bolitas rojas. Se extrae una bolita al azar.

- ¿Qué es más probable, extraer una bolita azul o una roja?
- ¿Qué color de bolitas tiene más posibilidades de salir?
- ¿Crees que es más probable sacar una bolita roja que una verde? ¿Por qué?

Observación: Este tipo de ejemplos hará en el estudiante crearse la idea de que hay situaciones en que los sucesos estudiados no poseen iguales posibilidades de ocurrir, lo que más adelante se le darán a conocer como sucesos no equiprobables.

b) Suponer la situación en que un equipo de fútbol está 5 puntos por debajo del puntero del torneo, quedando solamente un partido. De acuerdo a los posibles resultados del último partido que dispute el equipo.

- ¿Cuáles son los posibles resultados del encuentro?
- ¿Cuántas opciones hacen que el equipo sobrepase al puntero?
- ¿Qué probabilidad posee el equipo de salir campeón?

Observación: En esta situación se busca que el estudiante identifique que es “imposible” que el equipo sobrepase al líder, que en otras palabras de dice que tiene “cero” posibilidades (probabilidad) de salir campeón.

c) Si dentro del curso se selecciona un estudiante, ¿Qué posibilidades existen de que el alumno o la alumna tenga menos de 20 años de edad?

- ¿Se tendrá la certeza de que eso ocurrirá? ¿Por qué?
- Del total de estudiantes de la clase, ¿cuántos de ellos tienen menos de 20 años de edad?

Observación: Con el ejemplo mencionado se intentará que los estudiantes utilicen la idea de que están completamente seguros de que el suceso ocurrirá. Es decir, que expresen que están “cien por ciento seguros” de que la situación ocurrirá al realizar el experimento. Lo que será complementado más adelante, cuando sea denotado con el valor 1.

d) Del ejemplo planteado en el capítulo anterior, referente al *cachipún*, se había intentado deducir que dicho juego era equitativo, ya que las posibilidades de ganar, empatar o perder eran las mismas para ambos jugadores.

- Se vuelve a preguntar ¿cuántas opciones dan como ganador al segundo niño?
- Si el primer niño saca Tijera, ¿cuántas opciones tiene su contrincante para ganar?

Observación: Este ejemplo proporciona las bases para poder deducir la equiprobabilidad en situaciones sencillas, es claro que ningún jugador tiene más opciones de ganar.

e) Lanzar una moneda al aire

- Qué opción presenta más posibilidades de salir, ¿cara o sello?
- ¿Por qué razón crees, que en los partidos de fútbol, el árbitro arroja una moneda al aire para que los capitanes escojan el lado en que desean jugar?
- ¿Podrán los futbolistas asegurar que una opción (cara o sello) tiene más opciones, para tener certeza de que ganarán el sorteo?

Observación: Finalmente ejemplos como estos intentan que el estudiante deduzca las características de sucesos equiprobables y también comprendan que en ocasiones, convenientemente se definen distintos sucesos como equiprobables; lo que suele suceder cuando no se tiene la certeza de afirmar lo contrario.

Para continuar la actividad se explicará a los estudiantes la forma en que las probabilidades se reparten equitativamente entre sucesos equiprobables, para así hacer comprender que las probabilidades se van conformando como la relación existente entre los casos favorables y los casos posibles.

Un detalle importante es que una fórmula requerida para determinar las probabilidades, debe tener la característica de que un suceso con más elementos, tiene una mayor probabilidad de ocurrir, ya que la razón su cardinalidad es más grande. También es necesario reconocer que la probabilidad de un suceso seguro, debe ser la máxima probabilidad que pueda alcanzar cualquier suceso. Y un suceso imposible debe resultar en una probabilidad cero.

Agregando la idea de que es claro que en el ejemplo a), es más probable obtener una bolita azul que una roja (porque hay más bolitas de color azul), así como en el ejemplo d) la probabilidad de que gane el primer niño es igual a la probabilidad de que gane el segundo, porque la cantidad de situaciones que favorecen a ambos son las mismas.

Entonces, de acuerdo a las características de la primera situación, es posible preguntarse, tal como Laplace pudo haberse cuestionado; *¿cuántas bolitas hay en la urna?, ¿de un total de cuántas?*, pudiendo por tanto proponer una razón entre las cantidades, dada por:

$$\frac{\text{número de bolitas azules}}{\text{número total de bolitas}} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Esta expresión (razón) posee la característica importante de que al considerar el número de casos favorables en el numerador de la razón, se deduce por tanto que el valor resultante de un suceso con más elementos, será mayor al de un suceso con menos elementos.

Así entonces, como ocurre en el caso c), si todos los estudiantes cumplen con la condición pedida, se verifica que la razón propuesta terminará con un valor correspondiente a 1; ya que el número de casos favorables es igual al número de casos posibles. Esta idea es reafirmada con el capítulo referente a las nociones de la teoría de conjuntos; donde se dijo que cualquier evento no puede tener más elemento que el espacio muestral; por lo que la probabilidad no será mayor que 1.

También se puede afirmar, que para el ejemplo b), la probabilidad de ganar el campeonato, que se asigna al equipo es 0, ya que de las opciones totales (casos posibles) ninguna de ellas le permite resultar campeón (casos favorables).

De otra forma la razón entre la cantidad de elementos de un suceso (casos favorables) y la cantidad de elementos del Espacio Muestral (casos posibles), que se ha visto considera la necesidad de asignar mayor probabilidad a algún suceso con más elementos favorables. Y toma valores que están entre 0 (para un suceso imposible) y 1 (para un suceso seguro). Lo que será definido como probabilidad clásica:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} \qquad P(A) = \frac{(A)}{\Omega}$$

Teniendo definida esta fórmula, se analizan las propiedades relacionadas al cálculo de la probabilidad clásica. Para ello es necesario referenciar las características vistas en el capítulo sobre la teoría de conjuntos.

i) Recordando que un suceso A, se define como un subconjunto del Espacio Muestral Ω. Y como #(A) se refiere a contar los elementos de A, se afirma que 0≤#(A), de forma similar 2 ≤ #(Ω) (ya se vio que el Espacio Muestral deberá poseer a lo menos dos posibilidades). También es sabido que la cantidad de elementos de un conjunto no puede ser inferior a la cantidad de elementos de alguno de sus subconjuntos. Lo que permite asegurar,

$$0 \leq \#(A) \leq \#(\Omega)$$

Por tanto, si se divide todo por $\#(\Omega) > 0$.

$$\frac{0}{(\Omega)} \leq \frac{(A)}{(\Omega)} \leq \frac{(\Omega)}{(\Omega)} \quad \text{y} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

ii) Como también se ha visto, $\#(A) + \#(A^c) = \#(\Omega)$

De la misma forma, al dividir todo por $\#(\Omega) > 0$ $\frac{(A)}{(\Omega)} + \frac{(A^c)}{(\Omega)} = \frac{(\Omega)}{(\Omega)}$

esto es, $P(A) + P(A^c) = 1$

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

iii) Otra propiedad importante, se refiere al cálculo de la probabilidad de la unión de dos eventos,

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

Dividiendo por $\#(\Omega) > 0$.

$$\frac{(A \cup B)}{(\Omega)} = \frac{(A)}{(\Omega)} + \frac{(B)}{(\Omega)} - \frac{(A \cap B)}{(\Omega)}$$

así, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Resumiendo, se tienen las propiedades:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) = 1 - P(A^c)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Estas propiedades serán de gran utilidad a la hora de resolver problemas de probabilidad en situaciones cotidianas y, específicamente, en las futuras actividades propuestas por este trabajo.

<u>Conclusión y Cierre de la Actividad.</u>

Al realizar el cierre de la actividad, el docente debe plantear situaciones sencillas en las que sea necesario calcular probabilidades, considerando cautelosamente, el espacio muestral y los casos favorables para cada una de las situaciones. Se busca entonces comprobar el aprendizaje de los alumnos con respecto a la llamada fórmula de Laplace.

Se deberá considerar constantemente las dudas que surjan de los estudiantes, para asegurarse de que la metodología utilizada ha sido efectiva; en caso contrario es necesario rescatar otros ejemplos que motiven a los estudiantes y cumplan con los objetivos que se vean más débiles.

Sugerencias Finales.

Los ejemplos considerados en la actividad deben ser analizados detalladamente, adelantándose a las posibles respuestas y deducciones de los estudiantes, para que no ocurra que algún ejemplo destinado a cumplir cierto objetivo, termine desviándose y no cumpla la labor correspondiente. Es importante también rescatar situaciones que a los propios estudiantes les surjan como propuestas para ciertos ejemplos, con lo que se puede complementar las nociones que el docente posee, y desea que los alumnos conozcan, con la visión propia de los estudiantes.

Conclusiones

Debemos reconocer que las actividades propuestas por el autor no serán las que mejoren los aprendizajes de todos los alumnos (lo que tampoco es su intención). Sin embargo, es *bastante probable* que la inclusión de situaciones de este tipo permita una mejor recepción de los contenidos por parte de los estudiantes.

Pensamos importante que para la enseñanza de la probabilidad sean manejados los principales conceptos, desde los más básicos como el concepto de azar; además de las propiedades de la teoría de conjuntos: como también se desea el conocimiento de los métodos de conteo aportados por la teoría combinatoria; particularmente el principio de la multiplicación, potente herramienta para determinar las cardinalidades de los Espacios Muestrales y de algunos Sucesos. Las actividades desarrolladas, que fortalecen lo mencionado antes, permitirán a los estudiantes poseer una base importante para el desarrollo de los futuros contenidos de probabilidades. Al mismo tiempo, éstas propuestas servirán de base para el entendimiento posterior de los principios básicos de la estadística descriptiva e inferencial.

Esperamos con este trabajo poder motivar la creación de nuevas propuestas para la enseñanza de los contenidos de la unidad de probabilidades. Y resaltar la necesidad de cambio y del intercambio respecto del tipo de actividades y ejemplos en la enseñanza de esta unidad, mostrando situaciones que *intentan dejar de lado* el típico lanzamiento del dado y la moneda.

Finalmente convocamos al desarrollo de una nueva academia, y particularmente un impulso que surja en primera instancia de los futuros educadores, para de esta forma, poder renovar las propuestas de enseñanza de esta ciencia, que cada vez más y con mayor fuerza va tomando posición en el desarrollo científico, tecnológico y práctico de nuestra sociedad.

Reconocimiento

Trabajo que forma parte de la tesina de pregrado del autor, bajo la supervisión del profesor Dr. Antonio Sanhueza Campos en la Universidad de La Frontera, Temuco, Chile.

Bibliografía

Andradas, C. (2000). Lo que usted estudió y nunca debió olvidar en matemáticas. Acento, Madrid. España.

Autor, M. (1997). Precálculo. Pearson Educación, D.F. México.

Dacunha-Castelle, D. (1996). Les Chemins de l'Aléatoire. (Primera Edición). Flammarion, Paris. Francia.

De León, M. (2006, 30 de Enero). La importancia de las Matemáticas. El País, opinión. Recuperado el 16 de Octubre de 2007, de www.elmundo.com

Gardner, H. (1997). La mente no escolarizada. Paidós Ibérica. Barcelona. España.

Jiménez, L., Jiménez, J. R. (2005). Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué?. Revista Virtual Matemática, Educación e Internet, 6(1).

Nuñez, F., Sanabria, G., García, P. (2004). Sobre la probabilidad, lo aleatorio y su pedagogía. Revista Virtual Matemática, Educación e Internet, 5(1).

Obagi, J. (2003). Elementos de teoría de probabilidad para ingenieros. Bogotá: Centro Editorial Javeriano.

Ochsenius, M. (1999). Diseño y elaboración de un instrumento para evaluar innumeralismo en adultos. Tesis de Magíster, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago: Chile.

Santaló, L. (1999). Hacia una didáctica humanista de la matemática. Troquel S.A. Buenos Aires. Argentina.

Ugochukwu, L. (2004). Matemáticas amenas. Universidad de Antioquia. Medellín. Colombia.

Vygotsky, L.S. (1962). Thought and language. Cambridge, MA: MIT Press.

Manuel Alejandro González Navarrete: es profesor de estado en matemática, Universidad de La Frontera, Chile (2008). Posee el título de magíster en estadística por la Universidade de Sao Paulo, Brasil (2011). Actualmente es alumno del programa de doctorado en estadística de la misma institución. Su área de investigación son los sistemas de partículas interactuantes y tiene especial interés en la educación estadística. **manuelg@ime.usp.br** y **www.ime.usp.br/~manuelg**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 165-177
Coordinada por Fredy González

Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica:

Factores condicionantes del desarrollo de la Educación Matemática como campo científico en Venezuela: 1975-2007

Sandra Malizia; Fredy González

Resumen	En Venezuela, la Educación Matemática (E.M.) como campo para la producción profesional de saberes, está en proceso de desarrollo; por ello, existe la necesidad de examinar la producción investigativa generada hasta el momento. Una de las interrogantes con respuesta pendiente es, entre otras, ¿cuáles son los factores que han condicionado el desarrollo de la Educación Matemática como un campo científico en Venezuela?; este asunto puede ser asumido desde tres perspectivas: (a) Sociológica: tomando en cuenta lo planteado por Pierre Bourdieu (2000) acerca de la noción de Campo Científico; (b) Sistémica: asumiendo el planteamiento de Sistema de la E. M. en Venezuela (SEMV) establecido por Beyer (2001) y (c) Epistemológica: Basada en el Evolucionismo Conceptual que plantea Toulmin. Este estudio tuvo carácter descriptivo, y se apoyó en un análisis cuantitativo y cualitativo del contenido de fuentes documentales, bibliográficas y hemerográficas.
Abstract	In Venezuela, Mathematics Education (M.E.) as a field for professional production of knowledge, is in the process of development, which is why there is a need to examine the research output generated so far. One of the questions pending answer is, among others, what are the factors that have influenced the development of mathematics education as a scientific field in Venezuela are, this issue can be taken from three perspectives: (a) Sociological : considering the issues raised by Pierre Bourdieu (2000) on the notion of Scientific Field, (b) Systemic: assuming the system approach of M. E. in Venezuela (SEMV) established by Beyer (2001) and (c) Epistemological : Based on the Conceptual Evolution posed Toulmin. This study was descriptive, and leaned on a quantitative and qualitative content analysis of documentary literature and newspaper sources.
Resumo	Na Venezuela, a Educação Matemática (E.M.) como um campo de produção profissional de conhecimento, está em processo de desenvolvimento, que é por isso que existe a necessidade de se examinar a saída investigação produzida até agora. Uma das questões pendentes resposta é, entre outros, quais são os fatores que influenciaram o desenvolvimento da educação matemática como um campo científico na Venezuela estão, esta questão pode ser tomada a partir de 3 (três) pontos de vista: (a) Sociological : considerando-se as questões levantadas por Pierre Bourdieu (2000) sobre a noção de campo científico, (b) sistêmica: assumindo a abordagem do sistema de E.M. na Venezuela (SEMV) estabelecido por Beyer (2001) e (c) Epistemological : Com base na evolução conceitual posou Toulmin. Este estudo foi descritivo, e inclinou-se em uma análise de conteúdo quantitativa e qualitativa da literatura e do jornal fontes documentais.

Introducción

El estudio que aquí se reporta, ofrece una visión panorámica del desenvolvimiento de la Educación Matemática en Venezuela, desde una perspectiva socio-cultural; forma parte de una pesquisa más amplia intitulada *Historia Social de la Educación Matemática en Venezuela* (González, 2013), mediante el cual se procura examinar multifactorialmente la trayectoria que ha seguido el desarrollo, como campo científico, de la Educación Matemática en Venezuela. Para ello se asumió la visión sistémica propuesta por Beyer (2001), quien considera que en la Educación Matemática puede ser percibido un sistema constituido por eventos, publicaciones, cursos de postgrado e investigaciones; este autor afirma que es en las instituciones donde se despliega la participación de los actores de la Educación Matemática; éstos son quienes hacen las investigaciones y presentan sus resultados en eventos, dictan clases en los programas de postgrados donde dirigen las tesis y los trabajos de grado; y, además, publican libros y artículos en revistas y editan memorias de eventos.

La visión sistémica sugerida por Beyer, fue complementada con lo planteado por Bourdieu (2000), quien privilegia el trabajo protagónico de las personas en la conformación de los campos científicos (Pérez, 2003); por ello, examinando las acciones desplegadas por los actores se puede obtener información relativa al proceso de desenvolvimiento del campo científico donde ellos despliegan su accionar, y, con ello, se puede reconstruir la historia de dicho campo.

La realización de eéste estudio, de carácter descriptivo, se apoyó en el análisis del contenido de variadas fuentes (documentales, bibliográficas, hemerográficas, entre otras), lo cual permitió hacer un examen longitudinal de múltiples situaciones asociadas con la Educación Matemática en Venezuela durante el lapso comprendido entre 1975 (cuando en Caracas se llevó a cabo la IV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, IV CIAEM) y 2007 (cuando fue realizado el VI Congreso Venezolano de Educación Matemática, VI COVEM); con ello se pretendió identificar tendencias y trayectorias, cuyo examen permitiera develar algunos de los factores que han coadyuvado al desenvolvimiento, como campo científico, de la Educación Matemática en Venezuela.

El propósito de este estudio fue referir las acciones que han contribuido a definir a la Educación Matemática en Venezuela, destacando a quienes las han impulsado, así como también mostrando parte de la producción científica que se ha generado en el país en este campo.

Planteamiento del Asunto de Interés Indagatorio

La interacción entre investigadores interesados en consolidar el conocimiento en sus respectivas áreas, coadyuva a la conformación de comunidades académicas; es así como muchos profesionales se sienten motivados a participar conjuntamente en indagaciones que den paso a la construcción de conocimientos que han de ser heredados por las futuras generaciones. Los hallazgos de estas investigaciones, sus objetivos, teorías y metodologías, así como también las diversas problemáticas sociales abordadas, pasarán a formar parte del conglomerado de hechos o situaciones de importancia, que, en conjunto, constituirán un campo disciplinario que albergará los correspondientes asuntos de interés indagatorio para los investigadores implicados en las pesquisas.

En el caso específico de la Educación Matemática, se puede constatar que ésta tiene un manifiesto y significativo desarrollo en el ámbito académico latinoamericano, lo cual se hace patente en los eventos donde se comparten actividades de investigación; entre los eventos de rango internacional que se llevan a cabo en nuestra región se pueden mencionar: Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM) y el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM); Además de estos eventos que congregan a educadores matemáticos de diferentes países, dentro de cada uno de éstos tienen lugar eventos de carácter nacional, tales como jornadas, encuentros y congresos.

La Educación Matemática, con el pasar del tiempo, ha generado respuestas a situaciones asociadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática mediante investigaciones de diferente tipo; ello confiere un notable enriquecimiento al conocimiento científico en el campo al cual le da espíritu, cuerpo y forma de disciplina científica. Este panorama invita a reflexionar sobre su desarrollo histórico, examinar la continuidad de circunstancias académicas que lo han hecho posible, así como también identificar las condiciones de acuerdo con las cuales se ha dado este progreso, y los esfuerzos que en cada país han realizado las respectivas comunidades de investigadores.

En este trabajo se hace énfasis en el caso venezolano; por cuanto, de acuerdo con opiniones autorizadas como la de Parra (2002), la Educación Matemática en Venezuela como disciplina científica, "es ya una realidad" (p.14). Sin embargo, es preciso preguntarse: ¿Cuál es el alcance de esta afirmación? ¿Cómo se ha llegado a constituir tal disciplina científica? ¿Qué factores han coadyuvado a su desarrollo? ¿En qué punto de este desarrollo se encuentra actualmente? Las respuestas a estas interrogantes permitirán develar los factores condicionantes del desenvolvimiento de la Educación Matemática que, en Venezuela, han contribuido a su constitución como un campo científico.

En este estudio, se asume la premisa según la cual "*los campos disciplinarios se constituyen mediante las acciones de quienes lo practican, esto, de alguna forma, es una posición diferente al planteamiento convencional de desarrollo de las ciencias basado en Paradigmas como lo plantea Thomas Kuhn*" (Fredy González, Disertación en el Seminario Permanente de Investigación en Educación Matemática, Junio 03, 2008), y se adopta la perspectiva social de la Historia de la Ciencia. Se pretende así evidenciar lo que ha sucedido con las personas que se autorreconocen como participantes activos del campo de la Educación Matemática.

La investigación tendrá presente lo señalado en 1992 por Kilpatrick (citado por Villarreal, 2002), quien hace "...una convocatoria para el reconocimiento de la Educación Matemática como un campo que tiene una problemática que le es propia y necesita de todos los actores que desde diversas perspectivas pueden contribuir para su desarrollo" (p. 79); por lo cual se considerarán las perspectivas sociológica, sistémica y epistemológica que, en conjunto, permiten establecer los factores que condicionan el desarrollo de la disciplina, explicitando las relaciones que se dan entre los protagonistas que conforman los sistemas, donde tiene lugar la producción científica, y los escenarios de discusión por donde circula el conocimiento producido.

Además, se aspira definir lo que es la Educación Matemática como Campo Científico en Venezuela; es decir, como señala Porlán (1998) "… definir los rasgos que caracterizan el conocimiento científico y que lo distinguen de otras formas de conocimiento." (p. 175) y así, orientar hacia las especificidades que presenta la Educación Matemática en este país.

Método

El estudio aquí reportado constituye una investigación documental ya que, como lo señala Silva (2008), "se orienta hacia el análisis de diferentes hechos o fenómenos a través del estudio riguroso de fuentes de carácter documental" (p. 20); En este sentido, teniendo en cuenta lo establecido en la UPEL (2006), con este tipo de estudio se pretende:

Ampliar y profundizar el conocimiento que se tiene acerca de la naturaleza de un ámbito determinado, con apoyo, principalmente, en trabajos previos, información y datos divulgados por medios impresos, audiovisuales o electrónicos. La originalidad del estudio se refleja en el enfoque, criterios, conceptualizaciones, reflexiones, conclusiones, recomendaciones y, en general, en el pensamiento del autor (p. 20).

El trabajo tiene carácter descriptivo ya que, como lo señalan Selltiz y Jahoda (citados en Ramírez, 2007), pretende aportar una "descripción, precisa de las características de un determinado individuo, situaciones o grupos, con o sin especificación de hipótesis iniciales acerca de la naturaleza de tales características" (p. 71); para ello, se consideraron diferentes aspectos relacionados con el desenvolvimiento de la Educación Matemática en Venezuela, especialmente situaciones sociales que han sido protagonizadas por educadores matemáticos venezolanos.

En relación con el Diseño de la Investigación, Arias (2006), expresa que: "Es la estrategia general que adopta el investigador para responder al problema planteado" (p. 26); lo que indica que guía al investigador en sus actividades para dar respuesta a las interrogantes planteadas; así que, desde el punto de vista de su diseño, este estudio ha sido no experimental, ya que como lo plantea, Kerlinger (citado en Hernández, Fernández y Baptista, 2006), se limita a "observar fenómenos tal y como se dan en su contexto natural, para después analizarlos" (p. 205); además, tuvo carácter longitudinal, porque se recolectaron datos referidos a situaciones que han ocurrido, "a través del tiempo en puntos o períodos especificados, para hacer inferencias respecto al cambio, sus determinantes y consecuencias". (Hernández, Fernández y Baptista, 2006, p. 216); también, presentó rasgos de un análisis evolutivo de grupo, debido a que se examinaron, "cambios a través del tiempo en subpoblaciones o grupos específicos" (ob.cit, p. 218) de protagonistas de la Educación Matemática en Venezuela y de los cuales se describió la trayectoria de su desenvolvimiento desde sus orígenes hasta la actualidad; además, se visualizó su prospectiva; es decir, sus actuaciones futuras.

La presente investigación se ejecutó a través de las siguientes fases:

I Fase: Exploratoria, se delimitó el tema y se establecieron las fuentes a consultar; implicó una indagación documental, exploratoria y evaluativa, basada en un análisis de contenido de las fuentes primarias y secundarias que se ubicaron.

II Fase: Analítica, el material seleccionado se analizó, cuantitativa y cualitativamente, desde el punto de vista de su contenido textual, contextual y discursivo, con el fin de identificar indicadores, formular categorías organizadoras y formular teorías descriptivas, explicativas y comprensivas, acerca de los factores que han condicionado el desenvolvimiento de la Educación Matemática en Venezuela.

III Fase: Sintética. Donde se aporta respuestas a las interrogantes que subyacen en los objetivos: general y específicos de la investigación, tal como se muestra en el siguiente cuadro.

Cuadro 1: Fase Sintética de Unidades de Análisis y Preguntas de Investigación

Pregunta de Investigación	Unidad de Análisis
¿Qué actividades han caracterizado el desarrollo de la Educación Matemática en Venezuela?	Actividades de personas y organizaciones: Formativas, Divulgativas, Investigativas.
¿Dónde se dan a conocer las producciones científicas en la Educación Matemática en Venezuela?	Revisión de Publicaciones en revistas, bibliotecas, núcleos de investigación entre otros. Ponencias, artículos, libros, otros materiales impresos o digitalizados (CD, Web, entre otros). Tabla de recolección de datos.
¿Quiénes han impulsado la Educación Matemática en Venezuela como disciplina científica?	Diferentes actores de la comunidad de educadores matemáticos de Venezuela. Tabla de recolección de datos.

Fuente: Datos de esta Investigación (2011)

Fuentes de Información

Como fuentes de información, en este estudio fueron utilizados, entre otros documentos: artículos, tesis, conferencias, ponencias, seminarios, congresos, publicaciones periódicas, programas de estudio, líneas de investigación referidos a la Educación Matemática.

En este particular, se tuvo en cuenta el SEMV planteado por Beyer (2001); por ello, se definieron como fuentes de información, las publicaciones, los postgrados, los eventos y las investigaciones; analizando su contenido, se detectó la presencia de personalidades que se han destacado en el tiempo y conforman lo que Fleck (1986), denomina círculos esotéricos y exotéricos mientras que teniendo en cuenta a Toulmin (1977), se identificaron actores de referencia y escenarios de discusión, todo ello con el fin de confirmar la existencia de un campo científico, tal como lo sugiere Bourdieu (2000).

En el Cuadro 2, se muestran los programas de postgrado considerados en este estudio, los cuales corresponden a programas de maestrías y doctorados[1].

[1] Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), Universidad de Carabobo (UC), Universidad Central de Venezuela (UCV), Universidad de Oriente (UDO), Universidad de Los Andes (ULA), Universidad Nacional Experimental "Rómulo Gallegos" (UNERG), Universidad Centro-Occidental "Lisandro Alvarado" (UCLA), Universidad del Valle de Momboy (UVM), Universidad Nacional Experimental de Guayana (UNEG), La Universidad del Zulia (LUZ), la Universidad Simón Bolívar (USB).

Cuadro 2: Programas de Postgrados, Maestrías y Doctorados

Nº	Institución	Ubicación de la Sede	Programa de Postgrado
1	UPEL	Caracas	Maestría en Educación Mención Enseñanza de la Matemática
		Barquisimeto	
		Maracay	
		Maturín	
		Maracay	Doctorado en Educación Matemática (Autorizado por el CNU, el 6 de diciembre de 2012)
2	UC	Caracas	Maestría en Educación Matemática
3	UCV	Caracas	Postgrado en Matemáticas
4	UDO	Cumaná	Postgrado en Matemáticas
			Maestría en Educación Mención Enseñanza de la Matemática Básica
5	ULA	Mérida	Maestría en Matemáticas
			Doctorado en Matemáticas
6	UNERG	Guárico San Juan de los Morros	Maestría en Educación Mención Enseñanza de la Matemática
7	UCLA	Barquisimeto	Maestría en Ciencias Mención Matemática
			Maestría en Enseñanza de la Matemática
8	UVM	Trujillo	Especialización Didáctica de las Matemáticas
9	UNEG	Bolívar Puerto Ordaz	Maestría en Ciencias de la Educación Mención Enseñanza de la Matemática
10	LUZ	Zulia	Maestría en Matemáticas Mención Docencia
			Maestría en Educación Matemática
11	USB	Miranda	Especialización en Didáctica de las Matemáticas
			Maestría en Matemáticas
			Doctorado en Matemáticas

Fuente: Datos de esta Investigación (2011)

Publicaciones examinadas

Entre las publicaciones examinadas se encuentran los **Boletines** Trazos en Matemática y Polígono; las revistas Paradigma, Educere, Pedagogía, Academia, Acción Pedagógica, Agora Trujillo, Investigación, Equisángulo, Evaluación e Investigación; y la serie de libros Temas de Educación Matemática

Entre los **Eventos** Examinados están el CIBEM, ediciones I y III; y en cuanto a los eventos nacionales se consideraron: Jornada de Educación Matemática, III Jornadas de Reflexión sobre la Enseñanza de la Matemática Región Central. II Jornada Interna Upel-Maracay, III Jornada de Investigación en Educación

Matemática y II Jornada de Investigación del Departamento de Matemática de la Upel-Maracay; VI Congreso Venezolano de Educación Matemática (VI COVEM)

Instrumentos de Recolección de Datos

El instrumento principal utilizado en este estudio fue la ficha de registro, definido por Arias (2006) como “cualquier recurso, dispositivo o formato (en papel o digital), que se utiliza para obtener, registrar o almacenar información” (p. 69); además, se diseñaron matrices de doble entrada para resumir la información recolectada. Como criterios para recaudar y organizar la información, fueron asumidos los componentes del SEMV propuesto por Beyer (2001) (ver Cuadro 3), por ello se identificaron los programas de postgrado, su estructura curricular y profesionales involucrados, las unidades de investigación vinculadas a cada uno de ellos y las respectivas líneas que orientan las investigaciones.

Cuadro 3: Elementos del SEMV

Elementos del Sistema de la Educación Matemática en Venezuela							
Programas de Postgrado (PP)		**Investigaciones (IEM)**		**Publicaciones (P)**		**Eventos (E)**	
UPEL	Otras Instituciones	Líneas de Investigación	Unidades de Investigación	Periódicas	No Periódicas	Nacionales	Extranjeros
Autores, Escenarios, Líneas y Unidades de Investigación, Temas							

Fuente: Datos de la Investigación (2011) (Basado en Beyer,2001)

A continuación, se hará referencia a información relacionada con: Los programas de postgrado, vinculados con la enseñanza de la matemática, existentes en Venezuela¸ La Investigación en Educación Matemática en Venezuela; Publicaciones Venezolanas en Educación Matemática; Los eventos de Educación Matemática realizados en Venezuela.

Los Programas de Postgrado en Educación Matemática Existentes en Venezuela

Los programas de Postgrado asociados con la EM en Venezuela, en general, tienen como propósito formar profesionales metodológicamente preparados para realizar investigaciones en temáticas relacionadas con los problemas de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, tanto desde el punto de vista científico como didáctico. Se conoce tal como lo expresan Páez, González y Villegas (2008), que en la Universidad de Carabobo, estos estudios se inician en 1970, bajo la rectoría del Dr. José Luis Bonnemaison, según consta en Acta 413 del consejo universitario de Fecha 11-08-70, con un Programa de postgrado en Matemática con fines doctorales, concretando así la iniciativa del entonces Secretario de la Universidad y epónimo de nuestra área de estudios, Dr. Freddy Mulino Betancourt (+) (p. s/n).

A partir de ese momento, el interés por ampliar los programas de postgrado crece y es entonces cuando en Venezuela se tiene el privilegio de ser el país latinoamericano donde, por primera vez, funcionó un programa de postgrado vinculado con la Educación Matemática en la región. Tal hecho ocurrió en 1974, cuando el Doctor Mauricio Orellana Chacín fundó el programa de Maestría en Enseñanza de la Matemática en el IPC (Beyer, 2001). Desde esa fecha, hasta la actualidad, han sido creados otros programas postgraduales en varios estados del país, muchos de los cuales se mantienen vigentes y activos; en el Cuadro 4, se ofrece información acerca de los programas venezolanos de postgrado, asociados con la EM.

Cuadro 4: Programas Venezolanos de Postgrado Asociados con la Educación Matemática

Nº	Institución	Ubicación de la Sede	Año de Creación	Programa de Postgrado
1	UPEL	Caracas	1974	Maestría en Educación Mención Enseñanza de la Matemática
		Barquisimeto	1983	
		Maracay	1988	
		Maturín	1990	
		Maracay	2012	Doctorado en Educación Matemática
2	UC	Caracas	1990	Maestría en Educación Matemática
3	UCV	Caracas		Postgrado en Matemáticas
4	UDO	Cumaná	1974	Postgrado en Matemáticas
				Maestría en Educación Mención Enseñanza de la Matemática Básica
5	ULA	Mérida	1977	Maestría en Matemáticas
				Doctorado en Matemáticas
6	UNERG	Guárico San Juan de los Morros	1994	Maestría en Educación Mención Enseñanza de la Matemática
7	UCLA	Barquisimeto	1998	Maestría en Ciencias Mención Matemática
			2001	Maestría en Enseñanza de la Matemática
8	UVM	Trujillo	2001	Especialización Didáctica de las Matemáticas
9	UNEG	Bolívar Puerto Ordaz	2002	Maestría en Ciencias de la Educación Mención Enseñanza de la Matemática
10	LUZ	Zulia	1987	Maestría en Matemáticas Mención Docencia
			2008	Maestría en Educación Matemática
11	USB	Miranda		Especialización en Didáctica de las Matemáticas
				Maestría en Matemáticas
				Doctorado en Matemáticas

Fuente: Datos de la Investigación (2011)

Los programas venezolanos de Postgrado, asociados con la Educación Matemática, son los que se muestran en el Cuadro 4, destacándose que sólo la Universidad del Valle de Momboy (UVM) es privada, todas las demás instituciones son públicas. Éstos constituyen espacios sociales donde se forman profesionales de la EM, cuyas prácticas e investigaciones coadyuvan a la consolidación de la disciplina.

A pesar de lo señalado por Páez, se observa que el primer programa de postgrado, del que se hace mención en el cuadro precedente, es la Maestría en Educación Mención Enseñanza de la Matemática, creado en 1974 en el Instituto Pedagógico de Caracas, siendo su primer Coordinador el Doctor Mauricio Orellana Chacín; este programa sufrió inconvenientes que afectaron la continuidad de sus actividades; así que, luego de un período de inactividad, fue reabierto en 1987 (Beyer, 2001), y se mantiene hasta la actualidad, formando profesionales en el campo de la Educación Matemática. Es importante destacar que la existencia de Programas de Postgrado en Venezuela representa un factor importante para el desarrollo de la Educación Matemática en el País, éstos permiten que los docentes en ejercicio, puedan desahogar sus debilidades, fortalezas y problemáticas que se les presentan en las aulas, además de permitir la actualización formativa de los temas abordados de interés dentro de la disciplina. Examinando el Cuadro 4, se puede apreciar lo siguiente:

1. Los estudios de postgrado en EM se inician en Venezuela en 1974 y desde esa fecha se ha incrementado constantemente la oferta postgradual en esta disciplina hasta llegar, en 2012, con la apertura de un programa de doctorado específico en EM, en la UPEL Maracay.
2. Los programas de postgrado de EM en Venezuela abarcan prácticamente toda la geografía nacional.
3. Desde el punto de vista institucional se aprecia que salvo en un caso (UVM) todos los demás programas son ofrecidos por instituciones públicas de Educación Superior (UPEL, UC, UCV, UDO, ULA, UNERG, UCLA, UNEG, LUZ, USB).
4. Existe variedad en la denominación y esto podría indicar carencia de identidad puesto que, con las excepciones de los programas de la UC y LUZ, no se asume la denominación Educación Matemática.
5. Los programas de postgrado, abarcan los tres (03) niveles: Especialización, maestría y doctorado.
6. Existen ocho (08) programas (considerando las sedes), que tienen como mención Enseñanza de la Matemática; ocho (08) programas orientados hacia la matemática como ciencia exacta; dos (02) especializaciones en Didáctica de las Matemáticas; dos (02) en Educación Matemática y un (01) doctorado en Educación Matemática en proceso de autorización del CNU. Un total de veintiún (21) programas asociados con la Educación Matemática en Venezuela.

En el Cuadro 5, se ofrecen un resumen de algunos aspectos informativos de interés acerca de los programas de postgrado en Educación Matemática en Venezuela.

Cuadro 5: Resumen de Aspectos Informativos de los programas de postgrado asociados con la EM en Venezuela

Denominación del Programa	Institución Sede	Asignaturas asociadas con la EM	Líneas de Investigación Asociadas con la EM
Maestría en Educación mención Enseñanza de la Matemática	***UPEL IPC***	-	Concepciones epistemológicas de la Educación Matemática. Ambientes y recursos didácticos en la Educación Matemática
	UPEL IPB	Epistemología de la Educación Matemática (E)	-
		Tecnología en Educación Matemática (E)	
	UPEL IPMAR	-	Educación Matemática. Perspectivas de la Neurociencia en la Educación Matemática
	UNERG	-	Evaluación de los aprendizajes en Educación Matemática
Maestría en Educación Matemática	**UC**	Epistemología de la Educación Matemática (O)	Axiología en Educación Matemática
		Procesadores de datos de Información para la Investigación en Educación Matemática (O)	Evaluación en Educación Matemática
Programa Interinstitucional Maestría en Enseñanza de la Matemática	***UCLA-UNEXPO-UPEL***	Tecnología y Educación Matemática (E)	Tecnología y Educación Matemática
		Historia de la Educación Matemática en Venezuela (E)	Historia de la Educación Matemática en Venezuela
		Teoría de la Educación Matemática en Venezuela (E)	
		Teoría de la Educación Matemática (E)	
Maestría en Ciencias de la Educación Mención Enseñanza de la Matemática	***UNEG***	Investigación en Educación Matemática (E)	Educación Matemática
		Procesamiento de la información para la investigación en Educación Matemática (E)	-
Maestría en Educación Matemática	**LUZ**	Formación Docente: área Educación Matemática (O)	-
		Filosofía de la Educación Matemática (E)	
		Conceptos claves de la Educación Matemática (E)	
		Modelos de Investigación en Educación Matemática (E)	
		Currículo en la Educación Matemática (E)	
Especialización en Didáctica de las Matemáticas en Educación Media	***USB***	Educación Matemática y Sistemas Educativos (O)	-

Fuente: Datos de la Investigación (2011)

Se puede apreciar que al identificar desde los programas de postgrado, una de las actividades que definen la Educación Matemática en Venezuela, puntualmente las asignaturas que se cursan en ellos, reflejan la evidente intencionalidad de incorporar a los interesados (estudiantes) con la Educación Matemática en el País. Otros programas que no se mencionan en el Cuadro 5, a saber, la UCV, UDO, ULA, reflejan una orientación hacia la Matemática como ciencia exacta, con la salvedad que la UVM destaca su programa hacia la Didáctica de las Matemáticas. Claro esta que de las Instituciones que se mencionan hay existencia de programas asociados con la Matemática propiamente dicha como ciencia y al igual no se mencionan.

También, es interesante mencionar en este contexto que cada programa ofrece bien asignaturas, unidades curriculares o cursos, relacionados directamente con la EM y cuyas vivencias internas del proceso de clases demuestran una práctica y reconocimientos de teorías relacionadas con la disciplina científica en estudio. En algunos programas coinciden los nombres de las asignaturas y éstas van asociadas con indagar acerca de la: Epistemología, Tecnología, Historia, Teoría, Investigación, Procesamiento de la información para la Investigación, Formación Docente, Filosofía, Conceptos Claves, Modelos de Investigación, Currículo, Sistema Educativo; todo en Educación Matemática.

Así mismo, se tienen diez (10) líneas de Investigación cuyos nombres específicos destacan la Educación Matemática, impulsando dentro de ella investigaciones relacionadas con: Concepciones Epistemológicas, Ambientes y Recursos Didácticos, Perspectivas de la Neurociencia, Evaluación de los Aprendizajes, Axiología, Tecnología e Historia; todas con la finalidad de enriquecer el conocimiento y consolidar la disciplina abarcando todas las vertientes que pudieran considerarse para el desarrollo de la misma.

Internamente, desde las unidades curriculares que se dictan en cada programa, se brinda la oportunidad de profundizar en un conocimiento y además recibir la orientación que muestra el panorama de posibilidades para abordar una investigación en EM, obviamente, aunque los nombres de algunas asignaturas y líneas no mencionen tácitamente la Educación Matemática, si la proyectan y la siembran como posibilidad investigativa, además de que los aportes de las mismas son las que enriquecen esta disciplina desde sus tópicos específicos.

Las acciones que se dan en los programas de postgrado, son de significación gracias a personas preocupadas por el crecimiento del conocimiento, además de orientar a los profesionales a brindar al mundo un mejor ser humano, calificado con todas las características idóneas para representar el conocimiento que se proyecta. Se logran identificar en el recorrido anterior algunas personas, destacando que hay muchas otras que no se mencionan y también conforman los llamados *círculos esotéricos*. Entre los destacados en el área de la Educación Matemática están: Dr. Freddy Mulino Betancourt (Fallecido), Dr. Mauricio Orellana Chacín, Dr. Fredy González, Dr. Mario Arrieche, Dr. Julián Rojas, Dr. Pedro Alson, Dr. David Mora, Dr. Walter Beyer, Dra. Lelis Páez, Dr. Hugo Parra, Dr. Darío Durán, Dra. Blanca Quevedo, Dr. José Vívenes, Prof. José Ortiz, Prof. Antonino Viviano, Prof. Martha Iglesias, Prof. Ana Rojas, Prof. Marisol Martín, Prof. Robín Ruiz, Lic. Yolanda Serres, Prof. Cipriano Cruz, Prof. Carlos Cortínez Torres, Prof. Fernando Castro, Prof. Rosa Becerra, Prof. Martín Andonegui, Lic. Ángel Miguez, Lic. Julio Mosquera, Lic. Esther Morales, Prof. Luis Gordones, Prof. Rafael Sánchez, Prof. Enrique Planchart, Los programas de postgrado, no sólo ofrecen personal calificado, unidades curriculares, asignaturas, cursos, líneas de investigación; también dan la oportunidad de involucrar a los participantes en espacios donde los *expertos* y *no expertos* discuten e interactúan creando conexiones entre los saberes propios de la disciplina y las investigaciones que pasan de ser personales a colectivas ya que hay un enriquecimiento intelectual al escuchar las opiniones e ideas de todo un conjunto de personas.

Bibliografía

Arias, F. (2006). *El Proyecto de Investigación. Introducción a la Metodología Científica* (5ª Ed.). Caracas: Episteme.

Beyer, W. (2001). Pasado, Presente y Futuro de la Educación Matemática en Venezuela. Parte I. *Revista Oficial de la Asociación Venezolana de Educación Matemática. Enseñanza de la Matemática. ASOVEMAT*, *10* (01), 23-36.

Bourdieu, P. (2000.). El campo científico. En: *Los usos sociales de la ciencia*. Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión. Cap. 1.

Fleck, L. (1986). *La génesis y el desarrollo de un hecho científico. Introducción a la teoría del estilo de pensamiento y del colectivo de pensamiento*. Madrid, Alianza Editorial (col. Alianza Universidad Ciencias, n.0 469).

González, F. (1998). *La Historia de la Educación Matemática en Venezuela. Apuntes para su Reconstrucción Histórica*. Conferencia Paralela expuesta en el III CIBEM, Caracas, Julio de 1998. Documento en Línea. Disponible en: http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/21060/2/articulo2.pdf

González, F. (1995). *La Investigación en Educación Matemática*. Serie Temas de Educación Matemática (Parte Cuatro) Copiher: Maracay, 1-41

González, F. (2013). *Historia Social de la Educación Matemática en Venezuela: Elementos para un balance*. Conferencia expuesta en el VII CIBEM (Montevideo octubre de 2013)

Hernández, S.; Fernández, C. y Baptista, L. (2006). *Metodología de la Investigación* (4ª Ed.). México: McGraw-Hill/Interamericana

Moreira, M. (2005). Una Visión Toulminiana Respecto a la Disciplina Investigación Básica en Educación en Ciencias: El Rol del Foro Institucional. Ciencia & Educaçao, 11(2), 181-190. Documento en Línea. Disponible en: http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v11n2/02.pdf

Páez, H., González, F. & Villegas, M. (2008). *Evaluación de la Producción Cognoscitiva a Nivel Doctoral en la Universidad de Carabobo*. Conferencia pronunciada en Octubre de 2008 en el marco del XX Aniversario del Doctorado en Educación de la Universidad de Carabobo. Mimeo

Parra, H. (2002). Comunidad Académica de Educación Matemática Venezolana. Ideas para el Docente, *Revista Oficial de la Asociación Venezolana de Educación Matemática. Enseñanza de la Matemática. ASOVEMAT*, *11*(2), 13-20.

Parra, H. (1998). *Libro de Resúmenes de las Jornadas de Educación Matemática.* Presentación. Maracaibo, Zulia, Venezuela.

Pérez, E. (2003). Breve Caracterización del Campo Científico. *A Parte Rei. Revista de Filosofía, Nº 29.*

Porlán, A. (1998). Pasado, Presente y Futuro de la Didáctica de las Ciencias. *Enseñanza de las Ciencias, 16(*1); 75-85.

Ramírez, T. (2007). *Cómo Hacer un Proyecto de Investigación.* Caracas: Panapo

Serres, Y. (2004, marzo). Una Visión de la Comunidad Venezolana de Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 7*(1), 79-108.

Silva, J. (2008). *Metodología de la Investigación Elementos Básicos.* Caracas: Cobo.

Toulmin, S. (1977). *La comprensión humana: El uso colectivo y la evolución de los conceptos.*. Madrid: Alianza.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador (2006). *Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales.* Caracas: Autor

Vidal, R. (2006). *Aplicación del Modelo de Toulmin al Objeto Matemático Raíz Cuadrada*

Villarreal, M. (2002.). *La Investigación en Educación Matemática: ¿Qué Ocurre en Argentina*? Conferencia expuesta en la LII Reunión de la Unión Matemática Argentina, que tuvo lugar entre el 16 y 20 de septiembre de 2002, en la ciudad de Santa Fe de la Veracruz, organizadas por la Facultad de Humanidades y Ciencias, Facultad de Ingeniería Química, de la Universidad del Litoral.

Sandra Esperanza Malizia Redondo. Profesora de Matemática, Egresada de la UPEL Maracay (2001) donde obtuvo su grado de Magister en Educación, Mención: Enseñanza de la Matemática en 2011. Actualmente es miembro del Personal Académico de la Universidad Politécnica Territorial del Estado Aragua "Federico Brito Figueroa", en la Extensión Maracay. **sandramalizia@gmail.com; sandramalizia@hotmail.com**

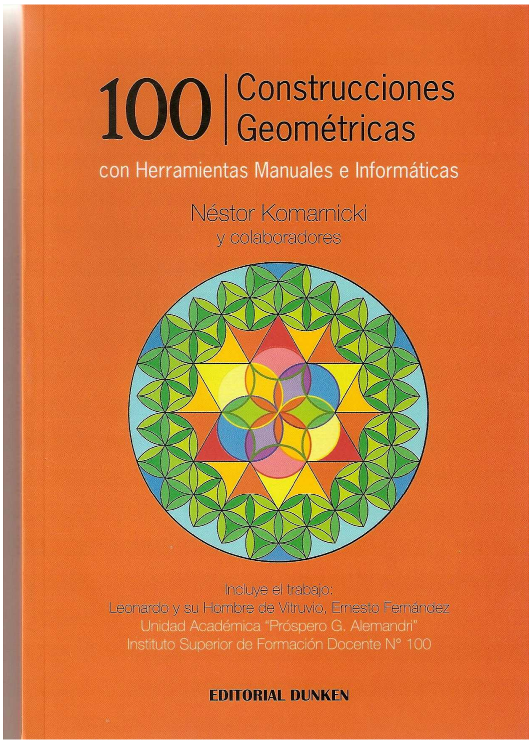
Fredy Enrique Gonzálezprofesor de matemáticas en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL Maracay) y tiene un doctorado en educación de la Universidad de Carabobo (Venezuela). Recientemente (2013) ha sido designado Coordinador del "Doctorado en Educación Matemática" de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL Maracay), el primer programa de este tipo cuyo funcionamiento ha sido autorizado por el Consejo Nacional de Universidades. Él es el fundador del Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina "(NIEM). Su interés principal es la educación matemática. Ha participado en varios proyectos destinados a mejorar la formación inicial y permanente de los profesores de Matemática que se desempeñan en los diferentes niveles del sistema educativo venezolano. **fredygonzalez1950@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 179-180

Libros



100 Construcciones Geométricas. Con Herramientas, Manuales e Informáticas.

Autores:
Néstor Komamicki y colaboradores.

Editorial: Dunken.

ISBN: 978-9870267843

Edición: Octubre de 2013.

Páginas: 216

En este trabajo se afronta el desafío de recuperar distintos saberes del campo de la geometría, una rama de la matemática que acompaña la evolución cultural y tecnológica de la sociedad, buscando relacionar viejas construcciones geométricas con conocimientos modernos, con la intención de resignificar contenidos matemáticos de variada procedencia que puedan no sólo enriquecer las clases del área sino también posibilitar dar nuevos enfoques creativos tanto en ámbitos artísticos, como artesanales y técnicos.

Las construcciones geométricas tuvieron aplicaciones trascendentes en el Mundo del arte, sobre todo en las obras de los grandes maestros del Renacimiento, pero también en artistas modernos como Salvador Dalí, Maurits Cornelis Escher, Antoni Gaudí, entre otros. Mientras que en el terreno de la técnica y la tecnología, son utilizadas para transmitir ideas de proyectos a través de diagramas y planos, siendo insustituibles en el desarrollo humano. En la actualidad la educación afronta nuevos desafíos, uno de los cuales es poder interpretar la realidad del Mundo a través de la geometría con la ayuda de las tecnologías informáticas, se ha buscado brindar un aporte a este objetivo.

El libro se compone de 11 capítulos y un anexo:

Capítulo 1: Construcciones elementales

Capítulo 2: Triángulos, construcciones y trazado de elementos característicos.

Capítulo 3: Segmento de longitud irracional, construcciones con condiciones y propiedades.

Capítulo 4: Polígonos, construcción de polígonos regulares, estrellados,etc.

Capítulo 5: Desarrollo de cuerpos, desarrollo de cuerpos regulares hasta arquimedianos.

Capítulo 6: Los 10 problemas de Apolonio

Capítulo 7: Cónicas.construcciones y análisis de propiedades.

Capítulo 8: Mosaicos y teselaciones, construcción de mosaicos regulares e irregulares, rosetas,etc.

Capítulo 9: Curiosidades y pasatiempos.

Capítulo 10: Curvas trascendentes.

Capítulo 11: Trigonometría, relaciones, funciones,etc.

Anexo: Leonardo y el Hombre del Vitruvio

Equipo Editor

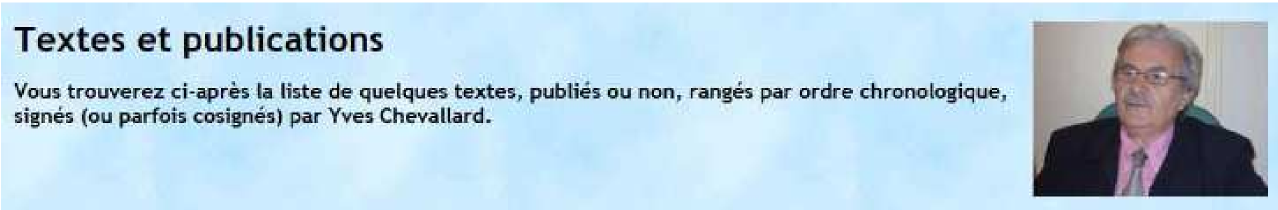
UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 181-182

Educación en la Red:

Textos y publicaciones de Yves Chevallard

http://yves.chevallard.free.fr/



En esta página se encuentran textos y publicaciones de autoría de Yves Chevallard, licenciado en Matemática, investigador y profesor emérito de la Universidad de Aix-Marsella, Francia.

El Profesor Chevallard ha desarrollado su actividad científica en el campo de investigación de la Didáctica de la Matemática y es reconocido internacionalmente por su teoría de la Transposición Didáctica. Los trabajos posteriores le permitieron desarrollar la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), de amplia difusión en el ámbito internacional.

En el margen izquierdo de la página se encuentra la siguiente tabla:

La misma permite acceder a textos y publicaciones, los que están organizados cronológicamente de acuerdo a los distintos períodos en años que se pueden observar.

Es mucho y muy valioso el material al que se puede acceder de manera totalmente gratuita, les recomendamos que entren para poder realizar este apasionante recorrido.

Equipo Editor.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 183-186

www.fisem.org/web/union

Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz

Carta del presidente de la fundación a sus socios al comenzar el nuevo año 2014

FUNDACIÓN CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ
CIF Nº G38837589
C/ El Sorondongo, Nº 22 DP 38205
La Laguna. Tenerife
Apartado de Correos nº 2005 FD
www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com
info@carlossalvadorybeatrizfundacion.com

Estimado amigo/ amiga:

Llegado este final de 2013, como Presidente del Patronato y en nombre de sus miembros es grato para mí dirigirme a Ud. con el fin de proporcionarle información sobre la institución de la que es socio y desearle un mejor 2014 con la frase de Nelson Mandela en el recuerdo reciente: **"La educación es el arma más poderosa para cambiar el mundo".**

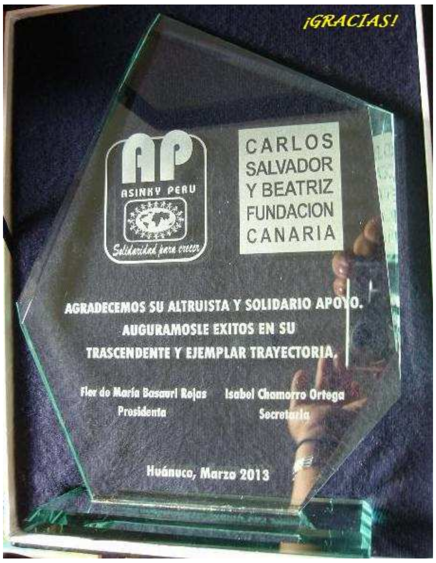
La Fundación aprobada el 24 de febrero de 2006 es una "entidad sin fines lucrativos". Sus ingresos provienen de las aportaciones voluntarias de sus socios y que pueden ser utilizadas como desgravación en el IRPF (Impuesto de la Renta de las Personas Físicas) en la declaración de Hacienda. Las frases de que *Con poco se puede hacer mucho, Contigo sumar es multiplicar y Tu ayuda llega* son el mejor resumen de una actividad entusiasta y laboriosa: no recibe ninguna ayuda, ni subvención oficial, ni tiene empleados, ni local social. Todo el trabajo lo realizan las gentes de su Patronato de forma altruista. Si desea buscar un **nuevo socio** y colaborar con cualquier cantidad, use la web, correos electrónicos, o teléfonos. Su aportación será de gran ayuda para los demás.

Queríamos enviarle el acostumbrado tríptico, el pequeño folleto, donde va explicada y resumida la vida de la Fundación durante este año pero, en esta ocasión, no será posible debido a que la convocatoria de la **III Ayudas al Estudio en Canarias para el curso 2013-2014** –cuyo plazo de presentación se cerró el 15 de noviembre de 2013- se ha visto desbordada con un gran número de solicitudes que pueden aproximarse a las **700**. La Comisión de Evaluación se sigue reuniendo para descargar las peticiones formuladas en la Base de Datos. Sí le incluimos el tradicional almanaque de bolsillo.

Le recordamos que en la anterior convocatoria de ayudas al estudio, se distribuyeron un total de **72 repartidas en 5 islas** y con presupuesto de **19.400 €.** Asimismo, los envíos de material escolar se elevan a 68 ocasiones para cuatro países americanos.

Este año fue el final del proyecto de Perú: en Incacocha, Distrito de Churabamba, Departamento de Huánuco, a 16 horas de Lima, con la construcción de un Pabellón Escolar con aula para 30 alumnos, un comedor nuevo, escaleras, tres baños nuevos y remodelación de la cocina.

El presupuesto, totalmente aportado por nuestra Fundación, ha sido de **7781,85 €**…



Incacocha, Perú

En la página web www.carlossalvadorybeatrizfundación.com hay amplia información y fotografías de todas nuestras actividades.

Le agradeceríamos diera publicidad a los fines de la Fundación a familiares, amigos y conocidos para seguir ampliando el número de socios.

Nuestro objetivo es tener una clara administración de los recursos disponibles y estar abiertos a cuantas sugerencias nos quieran hacer. Le agradecemos que haya depositado su confianza en la Fundación y esperamos no defraudarle. Hemos nacido con la idea de trabajar por la Educación y la Cultura y ese será siempre nuestro camino.

Reiterando los deseos de felicidad para usted y los suyos le saluda afectuosamente

El Presidente
Fdo: Salvador Pérez

Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz

Carta del presidente de la fundación a sus socios al comenzar el nuevo año 2014

FUNDACIÓN CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ
CIF Nº G38837589
C/ El Sorondongo, Nº 22 DP 38205
La Laguna. Tenerife
Apartado de Correos nº 2005 FD
www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com
info@carlossalvadorybeatrizfundacion.com

Estimado amigo/ amiga:

Chegado este final de 2013, como Presidente do Patronato e em nome de seus membros é grato para mim me dirigir a Ud. com o fim de lhe proporcionar informação sobre a instituição da que é sócio e lhe desejar um melhor 2014 com a frase de Nelson Mandela na lembrança recente: **"A educação é a arma mais poderosa para mudar o mundo"**

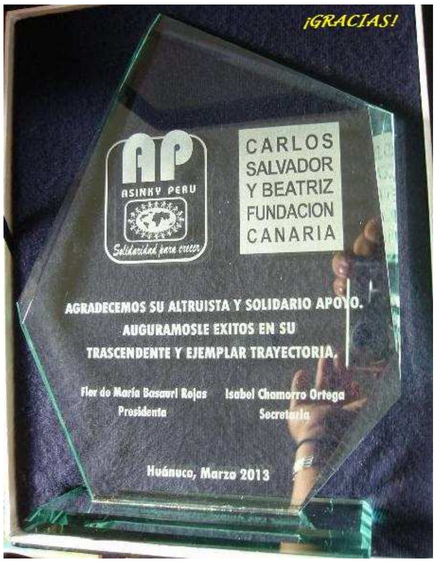
A Fundação aprovada o 24 de fevereiro de 2006 é uma "entidade sem fins lucrativos". Seus rendimentos provem das contribuições voluntárias de seus sócios e que podem ser utilizadas como desgravación no IRPF (Imposto da Renda das Pessoas Físicas) na declaração de Fazenda. As frases de que Com pouco se pode fazer muito, Contigo somar é multiplicar e Tua ajuda chega são o melhor resumem de uma actividade entusiasta e laboriosa: não recebe nenhuma ajuda, nem subvenção oficial, nem tem empregados, nem local social. Todo o trabalho o realizam as gentes de sua Patronato de forma altruísta. Se deseja procurar um novo sócio e colaborar com qualquer quantidade, use o site, correios electrónicos, ou telefones. Sua contribuição será de grande ajuda para os demais.

Queríamos enviar-lhe o acostumado tríptico, o pequeno folleto, onde vai explicada e resumida a vida da Fundação durante este ano mas, nesta ocasião, não será possível como a convocação da **III Ajudas ao Estudo em Canárias para o curso 2013-2014** – cujo prazo de apresentação se fechou o 15 de novembro de 2013- se viu desbordada com um grande número de solicitações que podem se aproximar às 700. A Comissão de Avaliação segue-se reunindo para descarregar as petições formuladas no Banco de dados. Sim incluímos-lhe o tradicional almanaque de bolsillo.

Recordamos-lhe que na anterior convocação de ajudas ao estudo, se distribuíram um total de 72 repartidas em 5 ilhas e com orçamento de 19.400 €. Assim mesmo, os envios de material escolar elevam-se a 68 ocasiões para quatro países americanos.

Neste ano foi o final do projecto de Peru: em Incacocha, Distrito de Churabamba, Departamento de Huánuco, a 16 horas de Lima, com a construção de um Pavilhão Escolar com sala para 30 alunos, um comedor novo, escadas, três banhos novos e remodelagem da cozinha.

O orçamento, totalmente contribuído por nossa Fundação, tem sido de **7781,85 €**…



Incacocha, Perú

Na página site www.carlossalvadorybeatrizfundación.com há ampla informação e fotografias de todas nossas actividades.

Agradecer-lhe-íamos desse publicidade aos fins da Fundação a familiares, amigos e conhecidos para seguir ampliando o número de sócios.

Nosso objectivo é ter uma clara administração dos recursos disponíveis e estar abertos a quantas sugestões queiram-nos fazer. Agradecemos-lhe que tenha depositado sua confiança na Fundação e esperamos não defraudarle. Temos nascido com a ideia de trabalhar pela Educação e a Cultura e esse será sempre nosso caminho.

Reiterando os desejos de felicidade para você e os seus lhe cumprimenta afectuosamente

O Presidente
Fdo: Salvador Pérez

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 187-188

Convocatorias y eventos

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

VII Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas

Convoca: IREM-Perú y Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)
Lugar: Lima, Perú
Fecha: 11 al 13 de febrero de 2014
Información: **irem@pucp.edu.pe**
http://www.pucp.edu.pe/departamento/ciencias/matematicas/irem

I Congreso Argentino de Integración de GeoGebra en la Matemática 2014 (CARIGMA)

Convocan: Instituto de GeoGebra del Golfo San Jorge, Patagonia Austral.
Lugar: Caleta Olivia, Santa Cruz, Argentina.
Fecha: 10 al 12 de marzo de 2014.
Información: **http://institutes.geogebra.org/ar-san-jorge/**

XXVII Jornada de Matemática de la Zona Sur

Organiza: Universidad Católica de Temuco.

Lugar: Temuco, Chile.

Fecha: abril de 2014.

Información: **http://www.jornadamatematicazonasur.cl**

REPEM

V Reunión Pampeana de Educación Matemática

Organiza: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa.
Lugar: Santa Rosa, La Pampa. Argentina.
Fecha: 20 al 22 de agosto de 2014.
Información: **http://repem.exactas.unlpam.edu.ar**

XI Congreso Argentino de Educación Matemática

Lugar**:** Universidad Nacional de San Juan. Argentina.
Convoca**:** Sociedad Argentina de Educación Matemática.
Fecha: 2 al 4 de octubre de 2014.
Información: **www.soarem.org.ar**

"Avanzando juntos hacia las Metas Educativas Iberoamericanas 2021"
Lugar**:** Buenos Aires. Argentina.
Convoca**:** Organización de Estados Iberoamericanos (OEI).
Fecha: 12 al 14 de noviembre de 2014.
Información: **http://www.oei.es/congreso2014**

AÑO 2015

AÑO 2017

En el mes de julio en Madrid:

VIII CIBEM

Convoca la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)

www.fisem.org

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 189-190

www.fisem.org/web/union

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@fisem.org**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “Arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Figura 1, Figura 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**
4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

Para libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista:

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de **http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php**

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a **revistaunion@fisem.org**