UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

NÚMERO 34 – JUNIO DE 2013

ÍNDICE

CRÉDITOS — Pág. 3

EDITORIAL — Pág. 5

FIRMA INVITADA: RICARDO LUENGO GONZÁLEZ

BREVE RESEÑA — Pág. 7

LA TEORÍA DE LOS CONCEPTOS NUCLEARES Y SU APLICACIÓN EN LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS — Pág. 9

ARTÍCULOS

LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA: EL CASO DE LA ENSEÑANZA DE LAS OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

JUAN CARLOS ÑANCUPIL POBLETE, REGINALDO FERNANDO CARNEIRO, PABLO FLORES MARTÍNEZ — Pág. 37

MATERIAIS CURRICULARES EDUCATIVOS SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA E A RECONTEXTUALIZAÇÃO PEDAGÓGICA OPERADA POR PROFESSORES INICIANTES

MAIANA SANTANA DA SILVA; JONEI CERQUEIRA BARBOSA; ANDRÉIA MARIA PEREIRA DE OLIVEIRA — Pág. 47

TRATAMIENTO DEL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL EN TEXTOS DE MATEMÁTICAS DE CUBA, FILIPINAS Y PUERTO RICO EN LA SEGUNDA MITAD DEL SIGLO XIX

MIGUEL PICADO; LUIS RICO — Pág. 69

PROBLEMÁTICA Y RECURSOS EN LA INTERPRETACIÓN DE LAS TABLAS DE CONTINGENCIA

GUSTAVO R. CAÑADAS, JOSÉ M. CONTRERAS, PEDRO ARTEAGA, MARÍA M. GEA — Pág. 85

GENERACIÓN DE MUESTRAS ARTIFICIALES DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS APLICANDO MÉTODOS ESPECIALES

CARLOS R. PRIMORAC, MARÍA V. LÓPEZ, SONIA I. MARIÑO — Pág. 97

O CONHECIMENTO DIDÁTICO DE GEOMETRIA DE DUAS PROFESSORAS DO 1.º CICLO

FLORIANO VISEU, JÚLIA ALMEIDA, JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES — Pág. 113

SECCIONES FIJAS

DINAMIZACIÓN MATEMÁTICA: ENSEÑANZA BAJO EL ENFOQUE POR COMPETENCIAS USANDO PROYECTOS HEURÍSTICOS

MARIO CALDERÓN RAMÍREZ, MARÍA TERESA VILLALÓN GUZMÁN — Pág. 131

EL RINCÓN DE LOS PROBLEMAS: VARIACIONES DE UN PROBLEMA. EL CASO DE UN PROBLEMA DE R. DOUADY

ULDARICO MALASPINA JURADO — Pág. 141

TIC: CÁLCULO SIMBÓLICO TAMBIÉN ES POSIBLE CON GEOGEBRA

AGUSTÍN CARRILLO DE ALBORNOZ TORRES — Pág. 151

IDEAS PARA ENSEÑAR: A FORMAÇÃO GEOMÉTRICA DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE A PARTIR DA REPLICAÇÃO DE QUESTÕES DO EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DE ESTUDANTES (ENADE)

REGINA DA SILVA PINA NEVES,SANDRA APARECIDA OLIVEIRA BACCARIN, JHONE CALDEIRA SILVA — PÁG. 169

LIBROS: NOTICIAS DEL CIELO. ASTRONOMÍA PARA NIÑOS

LUIS BALBUENA CASTELLANO, OSWALDO GONZÁLEZ SÁNCHEZ — Pág. 187

EDUCACIÓN EN LA RED: MATHEMATICS OF PLANET EARTH (MPE) — Pág. 191

INFORMACIÓN

FUNDACIÓN CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ — Pág. 193

CONVOCATORIAS Y EVENTOS — Pág. 207

INSTRUCCIONES PARA PUBLICAR EN UNION — Pág. 211

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 3-4

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Alicia Bruno
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García González
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés del Carmen Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio

Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo

Colaboran

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

OEI

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 5-6

Editorial

"...la matemática real, la que investiga porque no sabe,
la que es curiosa y atractiva, la que es seductora y útil.
La que hay que mostrar, la que hay que sugerir"
Adrián Paenza (2007)

Estimados colegas y amigos*:*

Una vez más nos acercamos a ustedes a través de un nuevo número de UNION, esta posibilidad que tenemos de compartir diversas experiencias, investigaciones, reportes y proyectos es importante para todos los docentes de los 15 países que integran FISEM, federación que gratamente se ha ido ampliando a lo largo de estos años.

En este número, la firma invitada es el Dr. Ricardo Luengo González, catedrático de la Universidad de Extremadura, quién nos deleita con un artículo referido a la Teoría de los Conceptos Nucleares, que ha servido de marco teórico para muchos trabajos de investigación en el campo de la investigación didáctica.

Fue mucha nuestra alegría y orgullo cuando nos enteramos que el Secretario de FISEM y colaborador incondicional de UNION, Agustín Carrillo de Albornoz Torres, fue nombrado por el Instituto GeoGebra Internacional (IGI) Embajador número 11 del programa GeoGebra, es el primer embajador del Instituto de habla hispana. Relacionado con esto, queremos mencionar que en Montevideo se celebrará el 14 de septiembre el **Día GeoGebra en Iberoamérica**, como actividad previa al evento más significativo que reúne a las sociedades que conforman la FISEM y está siendo organizado por la Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (SEMUR) junto al Comité Organizador:

VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática[1]

A realizarse en Montevideo-Uruguay,

entre los días 16 y 20 de setiembre de este año.

En los restantes artículos y en las secciones fijas se presentan diversas e interesantes temáticas y se destaca la presentación del nuevo libro *Noticias del Cielo. Astronomía para niños* de nuestro querido Luis Balbuena Castellano, uno de los promotores y fundadores de FISEM y UNION.

Como siempre nuestro más sincero y sentido agradecimiento a todos aquellos que colaboran para que sean posibles las ediciones de UNION, tenemos la certeza y somos conscientes que sin ellos este proyecto no sería viable.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

[1] http://www.cibem7.semur.edu.uy

Editorial

"... a matemática real, a que pesquisa porque não sabe,
a que é curiosa e atraente, a que é seductora e útil.
A que há que mostrar, a que há que sugerir "
Adrián Paenza (2007)

Caros Colegas e Amigos*:*

Uma vez mais acercamos-nos a vocês através de um novo número de UNION, esta possibilidade que temos de compartilhar diversas experiências, investigações, reportes e projectos é importante para todos os docentes dos 15 países que integram FISEM, federação que gratamente se foi ampliando ao longo destes anos.

Neste número, a assinatura convidada é o Dr. Ricardo Luengo González, catedrático da Universidade de Extremadura, quem nos deleita com um artigo referido à Teoria dos Conceitos Nucleares, que tem servido de marco teórico para muitos trabalhos de investigação no campo da investigação didáctica.

Foi muita nossa alegria e orgulho quando nos inteiramos que o Secretário de FISEM e colaborador incondicional de UNION, Agustín Carrillo de Albornoz Torres, foi nomeado pelo Instituto GeoGebra Internacional (IGI) Embaixador número 11 do programa GeoGebra, é o primeiro embaixador do Instituto de fala hispana. Relacionado com isto, queremos mencionar que em Montevideo celebrar-se-á o 14 de setembro no Dia GeoGebra em Iberoamérica, como actividade prévia ao evento mais significativo que reúne às sociedades que conformam a FISEM e está a ser organizado pela Sociedade de Educação Matemática Uruguaia (SEMUR) junto ao Comité Organizador:

VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática[2]

A realizar-se em Montevideo-Uruguay,

entre os dias 16 e 20 de setiembre deste ano.

Nos restantes artigos e nas secções fixas apresentam-se diversas e interessantes temáticas e destaca-se a apresentação do novo livro Notícias do Céu. Astronomia para meninos de nosso querido Luis Balbuena Castelhano, um dos promotores e fundadores de FISEM e UNION.

Como sempre nosso mais sincero e sentido agradecimento a todos aqueles que colaboram para que sejam possíveis as edições de UNION, temos a certeza e somos conscientes que sem eles este projecto não seria viável.

Um abraço fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

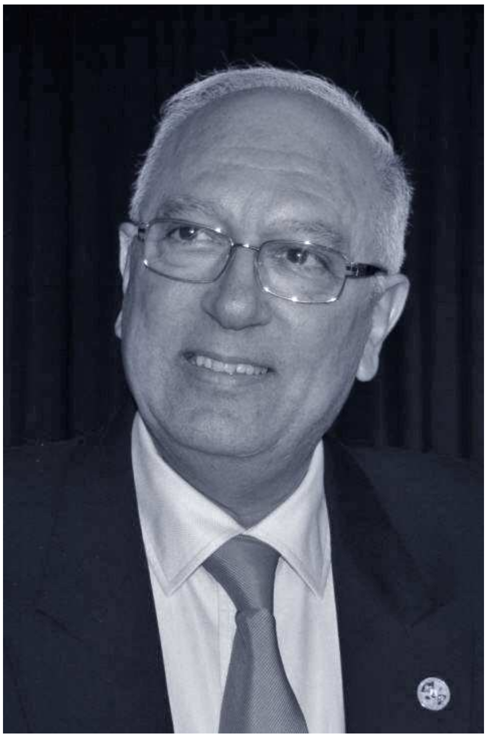
[2] http://www.cibem7.semur.edu.uy

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 7-8

Firma Invitada: Ricardo Luengo González

Breve Reseña



Es Doctor en Matemáticas y Catedrático de Universidad del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Extremadura (España).

Con amplia experiencia docente, ejerció en la Enseñanza Media y en la Universidad, donde lleva ejerciendo 40 años. Ha sido Director y/o profesor de más de 60 cursos de actualización y perfeccionamiento y Profesor de Programas de doctorado de la UEX desde 1991, donde ha dirigido 7 tesis doctorales y numerosos trabajos de investigación. Participó en una centena de congresos y jornadas didácticas y asistió a más de cuarenta cursos, habiendo sido Tribunal de varias Tesis Doctorales y oposiciones a cuerpos del estado.

Investigador reconocido por la Agencia de Evaluación Española ANECA, sus intereses investigadores se centran en las Nuevas Tecnologías y Educación Matemática.

Su línea de investigación principal se basa en la Teoría de los Conceptos Nucleares (TCN) creada por él mismo junto con el Dr. Luis M. Casas. Ha sido coautor de 15 libros y más de 60 artículos en revistas, perteneciendo a varios consejos de redacción de las mismas. Ha dictado alrededor de 25 conferencias (Buenos Aires, Caracas, Barcelona, Sevilla, Evora, Aveiro, Redondo etc.), Ponencias o conferencias plenarias en congresos y/o Jornadas y ha participado en 22 proyectos o contratos de investigación financiados, habiendo realizado otra veintena de Actividades de Investigación o Innovación.

Es miembro de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, miembro cofundador de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper" y Primer Presidente de la Sociedad desde 1990 hasta la actualidad. Miembro de la Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas de la que ha sido 3 años Vicepresidente y 4 años Presidente, siendo en la actualidad Director de su Servicio Nacional de Publicaciones.

Tiene una amplia experiencia en gestión ocupando puestos de responsabilidad en la Universidad: Jefe de División de Investigación del ICE de la UEX, en tres periodos Director de la E.U. Magisterio de Badajoz y más de 10 años miembro del Claustro y de la Junta de Gobierno de la Universidad. Ha sido Director de la Unidad de Innovación y Evaluación, adscrito al Vicerrectorado de Innovación y Calidad Educativa de la UEX, Director del Secretariado de Nuevas Tecnologías y recursos virtuales y Vicerrector de Innovación Educativa y Nuevas Tecnologías de la Universidad de Extremadura. Actualmente Dirige un Máster con Mención de Calidad adaptado al sistema Europeo de Educación Superior.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 9-36

La Teoría de los Conceptos Nucleares y su aplicación en la investigación en Didáctica de las Matemáticas

Firma Invitada: Ricardo Luengo González

Resumen	El año 2002 Casas y Luengo crean la Teoría de los Conceptos Nucleares (TCN), que ha servido de marco teórico para muchos trabajos de investigación en el campo de la investigación didáctica. En 2005 se crea el Grupo oficial de Investigación CIBERDIDACT de la Universidad de Extremadura (España) que lleva años trabajando en el conocimiento de la estructura cognitiva de los alumnos, desde el punto de vista de la TCN, constituyendo una de las líneas de investigación principales del Grupo. En este artículo pretendemos dar a conocer la TCN y sus aplicaciones, sobre todo en la Investigación en Educación y específicamente en Didáctica de la Matemática. **Palabras clave**: Teoría de los Conceptos Nucleares; Didáctica de la Matemática.
Abstract	In 2002, Casas and Luengo created the Theory of the “Nuclear Concepts" (TCN in Spanish), which served as the theoretical framework for many research works in the field of didactics investigation. In 2005 was created the official group CIBERDIDACT Research, at University of Extremadura, Spain, dedicated since then to the study of knowledge of the cognitive structure of the students, from the point of view of TNC, constituting one of the main research lines of the Group . This article aims to inform the TNC and its applications on all research in education and specifically in mathematical didactics. **Keywords**: Theory of the “Nuclear Concepts", Didactic of Mathematics.
Resumo	No ano 2002 Casas e Luengo criam a Teoria dos Conceitos Nucleares (TCN), que serviu de marco teórico para muitos trabalhos de investigação no campo da investigação em Didática. Em 2005 criou-se o grupo oficial de Investigação CIBERDIDACT da Universidad de Extremadura, Espanha, dedicando-se desde então ao estudo do conhecimento da estrutura cognitiva dos alunos, desde o ponto de vista da TCN, constituindo uma das linhas de investigação principais do Grupo. Neste artigo pretendemos dar a conhecer a TCN e as suas aplicações, sobre toda a investigação em Educação e especificamente na Didática da Matemática. **Palavras-chave** Teoria dos Conceitos Nucleares, Didática da Matemática.

1. Introducción

Agradezco a la dirección de la revista UNIÓN el honor que me hace y la oportunidad que me da, al proponerme que fuera la firma invitada en el presente número de esta prestigiosa revista.

Para mí es un honor, colaborar con la revista UNIÓN y con la Federación de Sociedades Iberoamericanas que impulsé y vi nacer allá en el año 1998, cuando asistí al CIBEM, como presidente entonces de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemática (FESPM), en el que pronuncié la conferencia inaugural del III CIBEM (Luengo,1998). Junto con otras sociedades, en aquel congreso, la Federación Española promovió y puso las bases para la formación de FISEM y de la revista UNIÓN, que cristalizaron unos años después y actualmente se encuentran ya consolidadas.

Pero también me da la oportunidad de dar a conocer una línea de investigación en la que actualmente trabajo, basada en la Teoría de los Conceptos Nucleares (en adelante TCN), que ha servido de marco teórico para muchos trabajos de investigación en el campo de la investigación didáctica y, en concreto, de la investigación en Educación Matemática.

Comenzaré diciendo que las condiciones de contorno han variado sustancialmente desde mis comienzos investigadores y han venido marcados por varias circunstancias, que han dado como resultado una consideración de la Investigación en Educación Matemática como una investigación universitaria al mismo nivel, y con el mismo reconocimiento que el de otras partes de la Matemática (Álgebra, Análisis, Cálculo, etc.) que se desarrollan en los Departamentos Universitarios.

En España, hasta el año 1984, la investigación en Didáctica de la Matemática, se consideraba como una labor de profesores, pero no de investigadores, y era muy difícil conseguir hacer una Tesis Doctoral en este campo. La polémica se zanja cuando el Ministerio de Educación promulga el Real Decreto 1888/1984, de 26-9-1984 [1], donde se establece el catálogo de Áreas de Conocimiento; por primera vez aparecen las Didácticas Específicas y en concreto la Didáctica de la Matemática.

En el año 2000 se revisa de nuevo el catálogo - BOE del 24-6-2000 [2]- y se añaden nuevas áreas de conocimiento a las existentes, manteniendo el Área de Didáctica de la Matemática, que no ha sufrido variación desde entonces. La creación de los Departamentos [3] fue un hito, junto con la definición de las “Áreas de Conocimiento”, para que nuestra área fuera considerada, desde entonces, como un Área más de la Universidad.

En mi caso concreto el caldo de cultivo que impulsaba mi investigación, estaba en mi contacto con los profesores y en mi interés por la mejora de la Enseñanza de las Matemáticas. Por ello fundé, allá en los años 80, el grupo Beta de Didáctica de las Matemática y, en 1990 la Sociedad Extremeña de Educación Matemática [4] (de la que desde entonces soy presidente), que se integró en la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) [5].

La creación de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM [6]) fue otro hito muy importante que ha contribuido decisivamente a la consolidación del Área de Didáctica de la Matemática y a mantenerla productiva. Y ello se hace a través de los muchos campos de investigación que tienen abiertos los distintos Grupos de Investigación que se integran en SEIEM, y de los trabajos tan diversos que se presentan en cada uno de ellos. En nuestro caso, ha sido fundamental pertenecer desde su creación a SEIEM y en concreto al Grupo de Geometría [7], que era el que resultaba más cercano a mis intereses en cuanto a los temas investigación en Didáctica de la Matemática.

Por último, otro hito fundamental ha sido la creación de los Grupos Oficiales reconocidos por cada Universidad. Para mí ha sido fundamental también fundar el Grupo de Investigación oficial de la UEx. “CIBERDIDACT” [8], que coordino, en el que estamos integrados profesores de diversas Áreas, pero que coincidimos en intereses investigadores. Estos intereses confluyen en dos líneas de investigación principales, que coinciden también con los dos que han determinado el desarrollo de mi labor investigadora han sido: La Didáctica de la Matemática y la Introducción de los Ordenadores en la Educación.

El esquema de la figura 1 puede ilustrar lo que ha sido mi labor investigadora y como, a partir de mis dos intereses principales y de las condiciones de contorno ha surgido, y se ha consolidado, la que es actualmente mi línea principal de investigación, la Teoría de los Conceptos Nucleares (TCN).

Las tres líneas de investigación que he desarrollado se representan en tres triángulos que encajan y recubren (junto con el central que representa los intereses personales) el triángulo grande. Las líneas de “Didáctica de la Matemática” y la de “TICs y Educación” forman la base del Proyecto y el tercer triángulo corresponde a una línea transversal, la “Teoría de los Conceptos Nucleares” (TCN), que surge y potencia a las dos anteriores; en ésta última es en la que nos estamos centrando más, en la actualidad.

Las dos líneas matrices han dado lugar a una producción científica que se traduce, por una parte, en la lectura de tesis Doctorales, DEAS, TFM, Proyectos y otros trabajos de investigación. Los resultados se han dado a conocer en libros, revistas, actas de congresos y otras publicaciones[9]. También las dos líneas han estado sustentadas por un trabajo colectivo, que en este caso he coordinado y dirigido, enmarcado en el ámbito de los Grupos de Investigación.

En el caso de la línea de “Didáctica de la Matemática” la conexión más directa ha sido con los Grupos SEIEM. Soy miembro de SEIEM desde su creación y adscrito al Grupo de Geometría. En cuanto a los Grupos Oficiales de la UEx, al ser una Universidad pequeña, no fue posible formar un grupo del Área de “Didáctica de la Matemática”. Por ello hubo que agrupar varias áreas y se formaron grupos interdisciplinares. En el caso concreto del grupo que fundé y coordino (CIBERDIDACT), se centra en mis dos intereses prioritarios y tiene dos líneas de investigación, que coinciden ser las dos líneas-base del Proyecto.

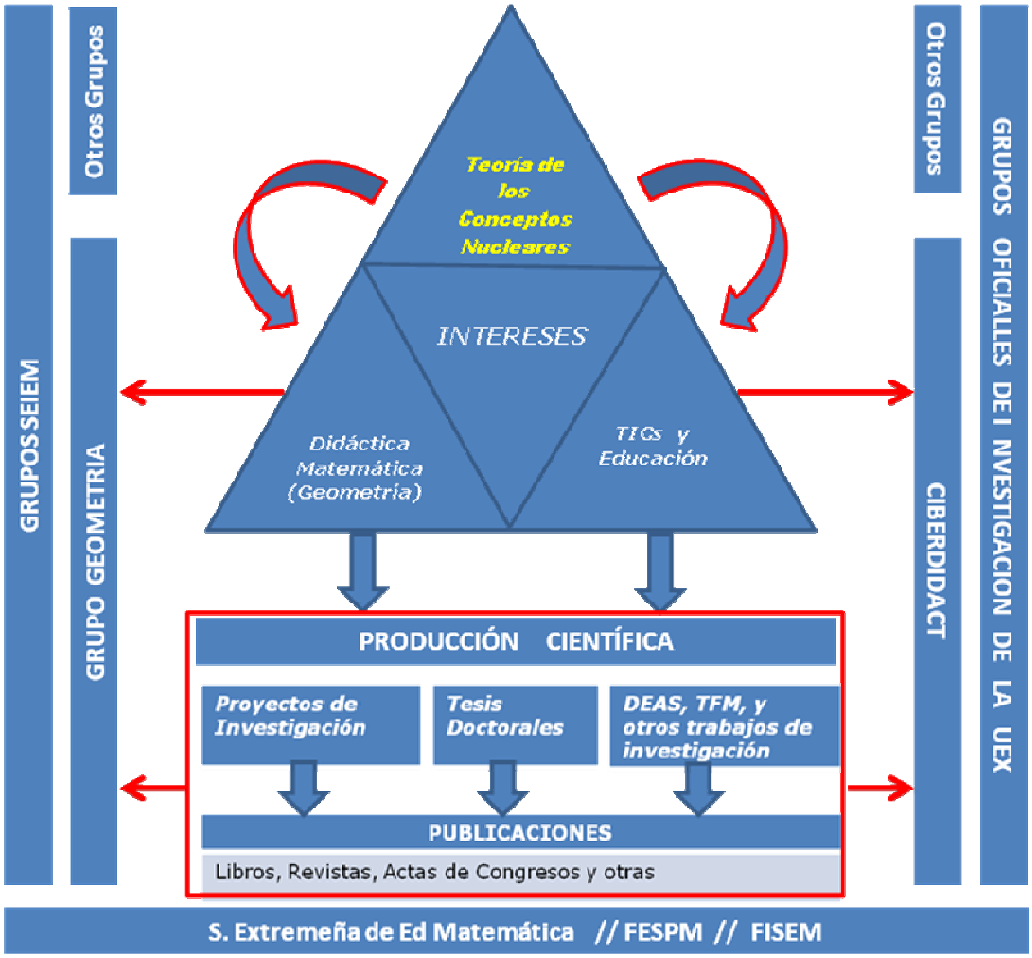


Figura 1. Desarrollo de las líneas de Investigación

La línea de la "Teoría de los Conceptos Nucleares" (TCN) es una línea de síntesis y transversal, que posee una investigación ya consolidada, por la que estamos apostando y que más vamos a desarrollar en el futuro. Por último el origen de mi interés por la investigación en Educación Matemática está en el interés por la mejora de la Enseñanza de las Matemáticas y el deseo de que los resultados de investigación sirvan también a la Práctica docente y de ahí la conexión con las sociedades de Profesores (Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper", Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y FISEM [10].

En los siguientes apartados, trataremos de exponer la TCN, la técnica asociada -Redes Asociativas Pathfinder (RAP)-, el programa GOLUCA, las aplicaciones en Investigación en educación, en concreto en Didáctica de la Matemática, y las perspectivas futuras de nuestra línea de investigación.

2. Teoría de los Conceptos Nucleares (TCN)

Sus orígenes se sitúan en el año 2002, durante la investigación de la Tesis Doctoral del Dr. Casas [11], al estudiar el concepto matemático de ángulo, desde el punto de vista de su red conceptual. Los resultados obtenidos no se podían interpretar desde los marcos teóricos consolidados, apuntando en la dirección contraria a la esperada. Ello nos llevó a crear una nueva teoría que hace una propuesta de integración, a partir de las teorías establecidas, pero que pretende aportar un enfoque innovador y que nace de la experimentación práctica: La "Teoría de los Conceptos Nucleares".

2.1. Marco Teórico previo de referencia

Los fundamentos teóricos de la TCN (Casas y Luengo, 2005) se basan en el marco teórico general de la Ciencia Cognitiva, en sintonía con (Neisser, 1976), (PIAGET, 1978), (Ausubel, Novak y Hanesian,1978) y más concretamente, con (Shavelson,1972), en cuanto a la noción de estructura cognitiva, y con muchas de las ideas de (Rumelhart, 1984), en cuanto a organización de la Memoria en base a esquemas o representaciones mentales relacionadas en la "Teoría de los Esquemas". Por último, en cuanto a la representación del conocimiento utilizamos las Redes Asociativas Pathfinder (RAP) (Schvaneveldt, 1990).

La TCN lleva además asociada una técnica que permite la representación de la estructura del conocimiento de una manera analítica y gráfica que proporciona información acerca de cómo se produce el aprendizaje en función de los cambios de la estructura cognitiva, con un procedimiento de obtención de datos no invasivo.

La reflexión sobre las formas en que el conocimiento es adquirido y almacenado en la estructura cognitiva del alumno, y cómo puede ser representado, tiene implicaciones en la enseñanza y la investigación educativa. La estructura cognitiva la definimos como un constructo hipotético que se refiere a la organización de las relaciones entre los conceptos en la memoria semántica o memoria a largo plazo (Shavelson,1972).

La TCN (Casas y Luengo, 2004 a y b) y (Casas y Luengo, 2005) ofrece un punto de vista para aproximarse a comprensión de cómo se adquiere y organiza el conocimiento y cómo se puede caracterizar la estructura cognitiva. Se trata de una nueva perspectiva para explicar cómo los procesos de aprendizaje se producen en la mente humana. Se corresponde al marco teórico general de la Ciencia Cognitiva con la que se sintoniza en muchas cuestiones, aunque como se verá más adelante también se difiere en algunas otras.

2.2. Generación de la Teoría a partir de la experimentación.

En (Casas y Luengo, 2004), se describe una investigación en la que se reflexiona sobre cómo funciona la mente del alumno y cómo se interiorizan los conceptos matemáticos básicos (y más concretamente el concepto de ángulo) y se plantean preguntas acerca de cómo representar la estructura mental del alumno referente a un tema, si podemos aprovechar estas representaciones para la investigación y si este punto de vista cognitivo puede tener un aprovechamiento didáctico. Se trabaja con una muestra de 440 alumnos de Extremadura, obtenidos en un proceso de selección multietapa y por conglomerados con estratos aleatorios por cursos y clases y se encuentran resultados extraños que no pueden ser explicados a partir de las teorías existentes, por lo que se necesita una nueva teoría que, partiendo de las anteriores, explique estos resultados (Casas y Luengo, 2013).

El esquema presentado en la Figura 2, sintetiza la generación de una Teoría que tratara de explicar estos resultados:

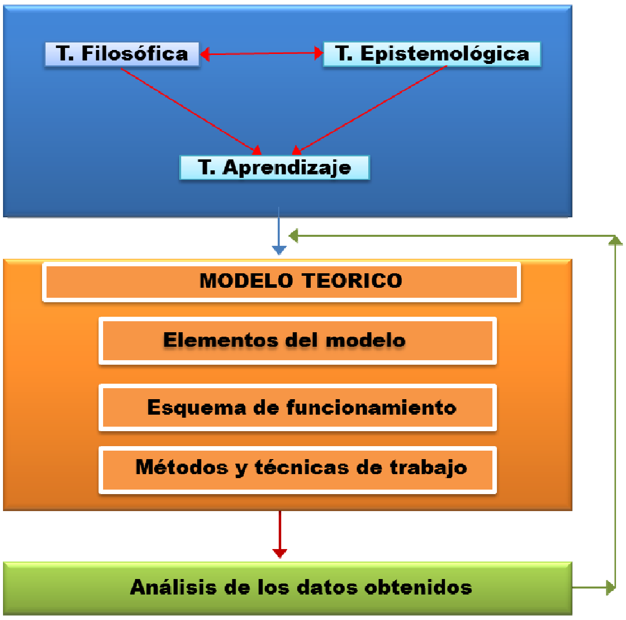


Figura 2. Generación de la Teoría

Partiendo de los marcos teóricos de referencia (Teorías Filosóficas, Epistemológicas y teorías del aprendizaje) propondremos una visión teórica que permite una comprensión de los resultados experimentales que hemos ido obteniendo en nuestras investigaciones. Abordaremos los supuestos básicos que admitimos y sobre los que fundamentamos nuestra teoría, tanto acerca de la organización del conocimiento humano como sobre los enfoques y técnicas a emplear en Investigación en Didáctica de las Matemáticas, y sobre lo que consideramos el modo de hacer Ciencia.

Posteriormente describiremos nuestro modelo teórico, sus elementos, su funcionamiento y las técnicas de obtención y análisis de datos. Por último abordaremos las posibilidades del modelo en la investigación, junto con sus alcances y limitaciones

2.3. Supuestos básicos de la TCN.

Nuestro desarrollo teórico acerca de cómo se organiza, adquiere y transmite el conocimiento se ha basado hasta ahora, en tres elementos a los que nos hemos ido refiriendo: las aportaciones de la Epistemología, las de la Psicología y las de la Pedagogía.

Estos elementos forman parte de los paradigmas actuales en Educación. Pero la Investigación, y particularmente la Investigación en la práctica, hacen modificar algunos elementos de los paradigmas, hacen surgir nuevos enfoques de los procesos de enseñanza y aprendizaje y requieren nuevas técnicas para su estudio. Esto es lo que trata de ilustrar la figura 3:

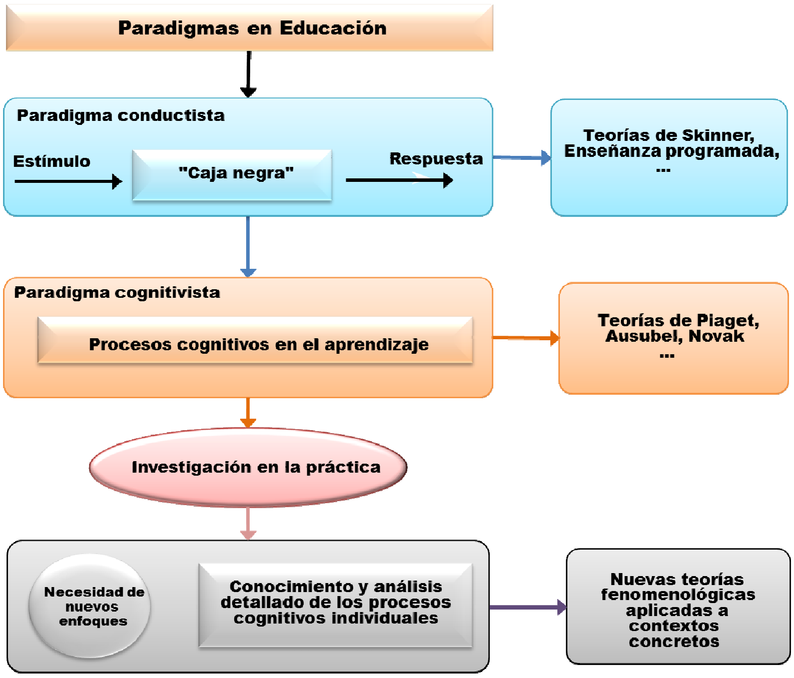


Figura 3. Nuevos enfoques y nuevas teorías

A partir de este punto resumiremos cuáles son los referentes teóricos que constituyen el marco de nuestra Línea de Investigación. Son aquellos principios que asumimos, con los que estamos de acuerdo, y de los que partiremos para presentar nuestras propias aportaciones.

2.4. Sobre la forma de organización del conocimiento humano.

Trataremos de resumir cuál es nuestro posicionamiento epistemológico, y cuáles son las ideas acerca de la forma en que se organiza el conocimiento. Los puntos de partida de la TCN respecto de la organización del conocimiento humano son los siguientes:

1. Conocimiento organizado en redes, que forman la estructura cognitiva.
2. Correspondencia biológica de estas estructuras en los circuitos neuronales, y mental en las representaciones.
3. El aprendizaje significa la modificación de la estructura cognitiva por acrecentamiento y reestructuración.
4. Cada concepto en la mente no es algo simple, sino una pequeña estructura, relativamente estable, de elementos interrelacionados.

La TCN establece que el conocimiento no se organiza de una manera lineal-secuencial, sino que más bien su estructura responde mejor a un modelo de redes, en sintonía con los modelos neuronales que utilizan los médicos neurólogos); se organiza a partir de pequeñas unidades, interrelacionadas, que forman la estructura cognitiva, cuyos elementos tienen su correspondencia cerebral en los circuitos neuronales, y mental en las representaciones llamadas esquemas.

Cada concepto en la mente no es algo simple, sino una pequeña estructura, relativamente estable, de elementos interrelacionados. Los conocimientos previos vienen representados por estas estructuras y el aprendizaje significa la modificación de la estructura cognitiva por acrecentamiento y reestructuración (asimilación y acomodación en la teoría Piagetiana).

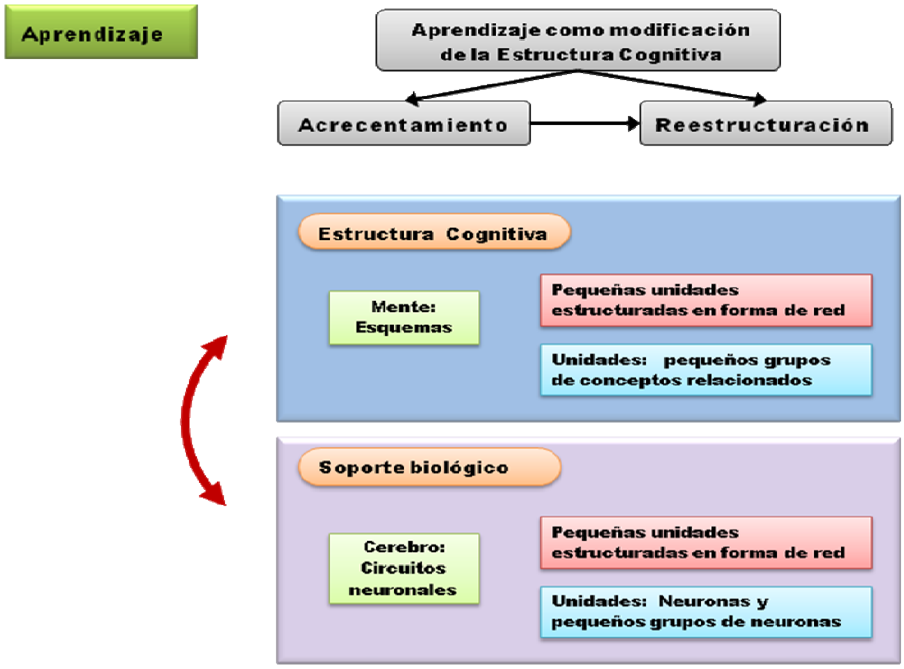


Figura 4. Organización del conocimiento y aprendizaje, según la TCN.

En el esquema que presentamos en la Figura 4, tratamos de reflejar estas ideas. Representamos dos estructuras, una la biológica y otra la estructura cognitiva. El aprendizaje dijimos que era entendido como la modificación de la estructura cognitiva, y por tanto de la estructura biológica, es decir, de los circuitos neuronales que le sirven de soporte (Casas y Luengo, 2003).

De modo intencional hemos representado de una manera muy similar ambas estructuras, indicando con ello que existe un paralelismo claro entre las dos, cuyo principal punto en común es el hecho de estar constituidas por pequeñas unidades estructuradas con pequeños elementos interrelacionados en forma de red. Los avances tanto en una ciencia como en otra tendrán influencia recíproca y como consecuencia también nuestra teoría se verá enriquecida.

2.5. El Modelo teórico.

La TCN es una "propuesta de integración". La razón es que, como hemos visto, se fundamenta en otras anteriores, particularmente las de (Piaget, 1978) o (Ausubel, Novak y Hanesian, 1978), pero basándose en muchas de sus ideas, y recogiendo aportaciones de otros campos y de los resultados de investigación, presenta modificaciones que, integrando unos y otros puntos de vista, permiten analizar y explicar hechos de una forma distinta a como lo hacen las teorías de referencia.

Por lo que se refiere a las teorías de Piaget, creemos que nuestra aportación permite un análisis muy detallado de los fenómenos que influyen en adquisición del conocimiento, como por ejemplo el de la acomodación, que Piaget utiliza, pero que no describe en profundidad. En cuanto a las de Ausubel, la TCN propone modificaciones, basándose en datos experimentales, de algunos de sus presupuestos, pero nuestra propuesta se basa en ellas y las integra aprovechando los datos experimentales y las aportaciones de otras Ciencias.

Pasamos ya a tratar de los elementos fundamentales del modelo de la TCN [12], que esquematizamos en la figura 5:

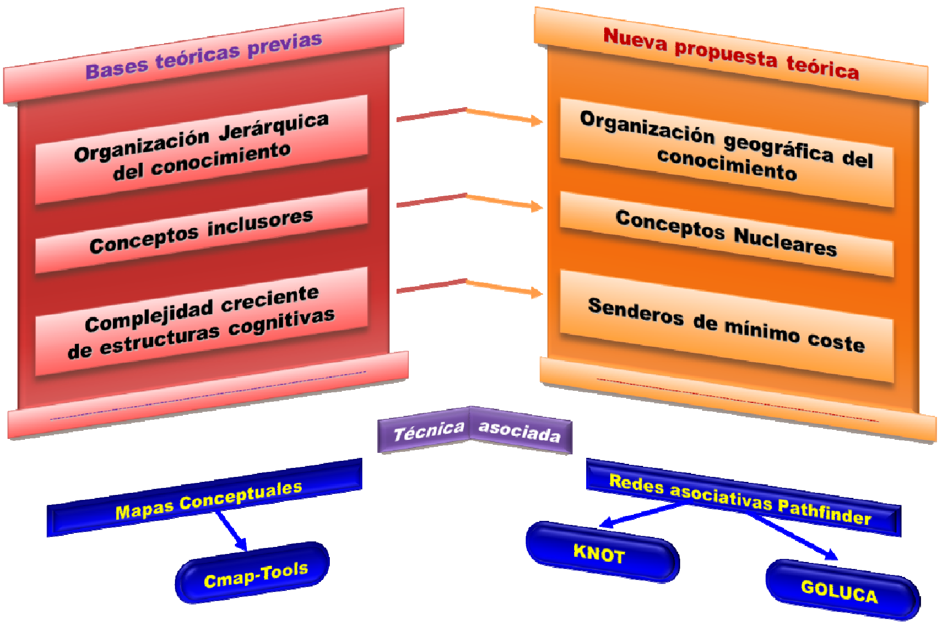


Figura 5. Elementos de la Teoría de los Conceptos Nucleares (TCN)

Aceptando, como ya hemos mencionado, muchas de las ideas de Piaget, Ausubel y Novak como bases teóricas previas, la TCN difiere sin embargo en algunos puntos proponiendo alternativas nuevas (Luengo, Casas, Mendoza y Arias, 2011):

1. No está de acuerdo en la organización jerárquica del conocimiento (por no explicar los resultados obtenidos) y se propone una organización “geográfica” del mismo.
2. Frente a los “conceptos inclusores” se presenta la alternativa de “conceptos nucleares” (como conceptos que anclan la estructura cognitiva).
3. Frente a la complejidad creciente de las estructuras cognitivas se propone un nuevo concepto denominado “senderos de mínimo coste”.

2.5.1. Conocimiento jerárquico versus conocimiento "geográfico".

En cuanto a la "organización geográfica del conocimiento” la TCN utiliza una metáfora para explicar que la estructura cognitiva de los alumnos no está organizada jerárquicamente en torno a conceptos más generales del que emergen todos los demás, sino de conceptos concretos que no son necesariamente los más generales (Casas, 2002; Casas y Luengo 2003b, 2004a, 2004b, 2005 y 2013). Se parte de una sencilla idea: la adquisición del conocimiento en general, y su almacenamiento en la estructura cognitiva sigue, de acuerdo con TCN, un proceso análogo a la adquisición del conocimiento del entorno físico, y del mismo modo que un cartógrafo elabora un mapa geográfico, las personas elaboran mapas cognitivos del entorno físico o de sus conocimientos en un área. Esta idea es, en parte, debida a un desarrollo de la propuesta que, restringida al uso de entornos multimedia, hace (Chen,1998) sobre el conocimiento estrictamente geográfico, y a la de (Martín,1985) referente a la representación espacial de los niños y sus mapas cognitivos.

Si analizamos cómo se llega a la adquisición del conocimiento de nuestro entorno físico en un sentido amplio, tal como puede ser el conocimiento de una ciudad o una región, podemos considerar que se producen tres etapas que llamaremos: conocimiento de hitos, conocimiento de rutas y conocimiento de conjunto. El conocimiento comienza por la adquisición de unos ciertos hitos sobresalientes del terreno, tales como edificios singulares, paisajes característicos o detalles que nos han llamado la atención o recordamos por alguna vivencia personal. La propia ubicación del observador se asocia con referencia a estos hitos.

La adquisición del conocimiento de una ruta es la siguiente etapa en el desarrollo de un mapa mental del entorno físico. El conocimiento de una ruta se caracteriza por la capacidad para navegar desde un punto hasta otro, utilizando el conocimiento de los hitos del territorio para tomar decisiones en cada punto acerca de los giros que habría que dar, pero sin tomar en consideración las áreas de alrededor. Si alguien con este conocimiento de la ruta se extravía fuera, le será muy difícil volver atrás por sí mismo. Fácilmente se perdería, incluso aunque pudiera comenzar de nuevo su navegación, basándose en su conocimiento de los hitos. El conocimiento de ruta no proporciona la suficiente información sobre la estructura general como para permitir a una persona optimizar dicha ruta.

El mapa cognitivo del entorno físico no está completamente desarrollado hasta que no se alcanza el conocimiento como vista de conjunto. En tal situación, se tiene una visión completa de todos los hitos integrados en rutas y éstas relacionadas entre ellas. En ese momento, la circulación por el mapa puede hacerse de diversas maneras, eligiendo en cada caso la ruta que más nos convenga, por comodidad, por seguridad o por preferencias individuales.

Este símil geográfico sirve para entender cómo en nuestra propuesta teórica se integran los elementos del modelo. Del mismo modo que cuando se trata de conocer un ámbito geográfico, cuando un alumno se encuentra en situación del aprendizaje de una nueva materia, es como si estuviera ante un nuevo territorio, y, para avanzar, recurre a los hitos que conoce. No tienen por qué ser precisamente los aspectos fundamentales de la materia sino que, como en el caso del entorno geográfico, son "hitos", en forma de conceptos que, por diversas razones, han llamado su atención y se mantienen en la memoria. Llamaremos a estos "hitos" de la memoria "conceptos nucleares" puesto que son conceptos en torno a los cuales se organizan los demás.

El siguiente paso del aprendizaje es establecer unas "rutas", como en el ámbito físico, proceso que consiste en el establecimiento o rememoración, si ya están establecidas, de las relaciones de estos conceptos con otros, que a su vez pueden ser hitos de otros mapas, y en la creación de procedimientos de trabajo para obtener los resultados buscados. El último estadio de este proceso es la adquisición de la “vista de conjunto”, momento en el cual el alumno conoce la relación de unas rutas con otras, de unos procedimientos de trabajo con otros, y elige en función de los resultados que necesite, o de los procedimientos más adecuados o simplemente de aquellos con que se encuentra más familiarizado (Casas y Luengo-204b).

Una ejemplificación del proceso que hemos descrito, mediante un análisis de tipo fenomenológico del proceso de aprendizaje de algo tan aparentemente sencillo como puede parecer la resta de números naturales en los primeros cursos de Primaria, lo podemos encontrar en (Casas y Luengo, 1999) y (Casas, 2002). En el primero de estos trabajos se hace un análisis de los principales conceptos asociados a los problemas aritméticos, y en segundo se trata la evolución, desde este punto de vista, del concepto de ángulo.

También desde este enfoque pueden analizarse las dificultades de aprendizaje, como deficiencias en el proceso de estructuración del conocimiento a partir de los hitos relevantes conocidos por el alumno, sus "conceptos nucleares". Si en un momento el alumno se pierde en un aprendizaje, la estrategia es la misma que cuando se pierde en un entorno físico: volver al principio, a los hitos que le son familiares, en los que confía. Y no siempre se produce esta "vuelta atrás" por el camino que parece más lógico, sino simplemente por aquel en el alumno se encuentra más seguro.

2.5.2. Conceptos inclusores versus conceptos nucleares.

Desde la visión teórica de la TCN, se pueden entender también algunas de las aportaciones de la Teoría del Aprendizaje Verbal Significativo de Ausubel, e incluso justificar la aparición de algunas aparentes contradicciones con esta teoría que han aparecido en el análisis experimental de nuestros trabajos (Luengo, Casas, Mendoza y Arias, 2011), como el hecho de que los conceptos más importantes en la estructura cognitiva no sean sólo los más generales o inclusivos.

Efectivamente, el aprendizaje se desarrolla con mayor facilidad en la medida en que la estructura de los conocimientos que se van adquiriendo es familiar con la estructura previa de lo ya conocido. Esto se interpretaría como que el alumno, a la hora de moverse por un nuevo "territorio de conocimiento" se encuentra más seguro cuando al menos una parte del mismo ya le resulta familiar, y explica, además, el hecho de que haya que mostrar la información nueva en pequeñas porciones, pues si se mostrara toda sería difícil de manejar y por qué hay que seleccionar cuál es la información importante, y cuál es redundante y puede ser filtrada.

Coincidimos con la idea desarrollada en sus trabajos por (Ausubel, Novak y Hanesian,1978) en que el conocimiento se construye sobre la base de lo que previamente se conoce, idea que responde al enfoque general del constructivismo, pero diferimos en la consideración acerca de la forma en que tiene lugar este proceso, y ello en vista de los resultados experimentales que encontramos en nuestras investigaciones. La teoría de estos autores propone que hay ideas de nivel superior, llamadas "inclusores" que sirven como anclaje para otras. A estas ideas es a las que se refieren al afirmar qué es necesario para lograr un mejor aprendizaje y la retención del material lógicamente significativo y cómo, dentro la estructura cognoscitiva, se dispone de ideas de afianzamiento específicamente pertinentes a un nivel de inclusividad adecuado.

A partir de esta noción, se entiende que la construcción del aprendizaje es claramente jerárquica y el tipo de aprendizaje superior es el aprendizaje subordinado, en el que las nuevas ideas son relacionadas de forma subordinada con las ideas previas, que son de mayor nivel de abstracción, generalidad e inclusividad.

Según el planteamiento de la TCN, si la existencia de los inclusores, tal como los entienden Ausubel y Novak, se confirmara, en la estructura cognitiva del alumno debieran aparecer como más destacadas estas ideas, de nivel superior. Sin embargo, esto no coincide con los datos obtenidos en la experimentación llevada a cabo por (Casas, 2002). Por ello la TCN difiere de los planteamientos aludidos y, frente a la concepción jerárquica del conocimiento, considera más bien, como hemos explicado antes, que una concepción "geográfica" explica mejor los resultados.

El aprendizaje no tiene por qué producirse en estadios de mayor a menor inclusividad, y creemos que no es esa la forma general en que se produce el aprendizaje. Los alumnos tienen un conocimiento parcial, fragmentario, y a lo largo de la escolaridad lo van construyendo y refinando. El aprendizaje, en este sentido, y como indicábamos en páginas anteriores, es un proceso de ajuste de las representaciones mentales del alumno. Pero este proceso de ajuste no supone una reestructuración total de los conocimientos anteriores, sino que siempre se construye a partir de las estructuras previas. Nuestros datos experimentales apuntan en este sentido. De acuerdo con la TCN, los conocimientos no se van organizando desde conceptos más inclusivos hasta otros más sencillos. Esto quizá ocurra al final, cuando se tiene una visión de conjunto, pero no al principio del conocimiento. Se produce, tal como hemos indicado, por un sistema de "acrecentamiento", tal como el señalado por (Rumelhart,1980): primero hitos del paisaje, después rutas y después visión general del mapa.

También según nuestra concepción, y dado que no consideramos que el aprendizaje se apoye siempre en una estructura jerárquica, no tiene por qué haber conceptos ni más importantes ni de menor nivel, sino que hay simplemente conceptos que sirven como anclaje a la estructura cognitiva del alumno.

Precisamente, como hemos observado, en la parte experimental del trabajo de (Casas, 2002), los conceptos nucleares que de una forma más continua y clara aparecen como hitos de la estructura cognitiva de los alumnos, son, en algún caso, solamente ejemplos, que según Ausubel, serían las ideas menos generales de todas. La realidad experimental como ocurre en otras circunstancias, es diferente de lo propuesto por la teoría, pero sirve para hacerla avanzar.

La cuestión clave para la práctica educativa es que quizá, en el proceso de enseñanza, el profesor no sepa cuáles son las ideas más generales en la estructura cognitiva del alumno, y pudiera estarle presentando algo que no es significativo para él. El mismo Novak, al hablar sobre el papel de los organizadores previos y su construcción, manifestaba que su elección dependía de cuáles eran los inclusores relevantes no sólo para los materiales de aprendizaje que iban a presentarse, sino para la población a la que se dirigía.

Frente a ello, parece consistente pensar que lo más interesante sería identificar cuáles son los "hitos" en el territorio de conocimiento en que se mueve el alumno, sus "conceptos nucleares". Esta es la propuesta de la TCN, que llevamos a cabo en nuestra línea de investigación.

2.5.3. Complejidad creciente versus senderos de mínimo coste.

Desde el paradigma de la Ciencia Cognitiva, el conocimiento se construye estructurándose en forma de red con una disposición jerárquica. Sin embargo, al presentar la concepción teórica de la TCN, hicimos notar que considerábamos más acorde con los diversos resultados de las investigaciones hechas por el grupo CIBERDIDACT, una concepción no jerárquica, que denominamos "geográfica", y que ya fue explicada en el epígrafe 2.5.1.

La consideración jerárquica del conocimiento parece tener como consecuencia lógica la adquisición de una mayor complejidad en la estructura cognitiva conforme aumenta la cantidad de conceptos y las relaciones entre ellos, que va produciéndose cuando se adquieren nuevos aprendizajes. Sin embargo, tal como hemos comprobado, al analizar los datos experimentales en varias de nuestras investigaciones (Casas y Luengo 1999; Casas, 2002) ya citadas, mientras mayor es la edad de los alumnos y más avanza su aprendizaje, más simples aparecen las representaciones de las relaciones entre conceptos que obtenemos. Este hecho, en apariencia paradójico, podemos interpretarlo basándonos en la teoría de (Edelman,1992) sobre la selección de los grupos neuronales, expuesta anteriormente, y su comprensión nos permite avanzar en nuestra propia concepción teórica.

En efecto, consideramos que, a pesar de que en la estructura cognitiva del alumno aparecen cada vez más elementos y más relaciones entre ellos, se utilizan subestructuras cada vez más simples. Creemos que en una situación dada que requiera utilizar los aprendizajes adquiridos y almacenados en la estructura cognitiva, en lugar de recurrir a las relaciones entre todos los conceptos presentes, en una estructura compleja, se recurre a las relaciones más simples, pero que resultan más significativas, a lo que denominamos "senderos de mínimo coste". La elección de este nombre es intencionada, pues responde, por una parte, a la propia lógica de la representación gráfica que veremos al hacer uso de las Redes Asociativas Pathfinder, y por otra, a la idea propuesta por el propio (Edelman, 1992).

Según su Teoría de la Selección de Grupos Neuronales, la activación de un mapa neuronal supone también la activación de un circuito que integran aquellos que están asociados a él, pero sólo de algunos, no de toda la estructura cerebral completa, pues esto sería muy costoso en términos energéticos. Esta consideración es muy importante, pues significa que en cada momento, al hacer uso de un aprendizaje, el sujeto sólo activa los mapas que, por el proceso previo de selección por la experiencia han resultado reforzados frente a otros que han desaparecido (o al menos no se manifiestan, por lo que no aparecen en ese momento en la estructura cognitiva). Como ocurre en otros aspectos vitales, la estructura cognitiva funciona por un principio de mínima energía.

La interacción de estos circuitos simples permite el funcionamiento de la estructura global. Tal como señalaban (Rumelhart y McLelland,1986) la inteligencia surge de las interacciones de un gran número de unidades de procesamiento simples. Esta es la misma idea que representa el funcionamiento de las redes neuronales utilizadas en Inteligencia Artificial.

A nivel psicológico, la elección de unos circuitos de conexiones u otros, o lo que es lo mismo, de distintos senderos, depende también de un proceso de selección de tipo probabilístico, el cual en función de las experiencias previas, nos aconseja elegir un enlace u otro cuando se dispone de distintas alternativas. Se escoge aquel sendero que tiene más posibilidades de éxito con menor coste.

La metáfora geográfica que venimos utilizando nos permite también entender mejor el concepto de "senderos de mínimo coste". Las personas en cada tipo de viaje que emprenden, y para cada intención, utilizan un mapa distinto: no es necesario el mismo mapa si se quiere hacer turismo y visitar localidades pintorescas, que si nuestro viaje es de trabajo y necesitamos ahorrar tiempo en el desplazamiento. En un caso se utilizará un mapa detallado, con indicaciones de todas las carreteras secundarias, mientras en el otro solamente prestaremos atención a las autopistas. En ambos casos, sin embargo, rige el mismo principio: obtener el máximo beneficio con el mínimo coste.

Efectivamente, con la edad y el conocimiento, las redes cognitivas se hacen más complejas. Este es un razonable principio del desarrollo intelectual, pero también es razonable pensar en los términos que hemos expuesto. No son principios contradictorios, sino complementarios.

Centrémonos, por ejemplo en la resolución de un problema. Tras la lectura y comprensión del enunciado, al comenzar se seleccionan los conceptos clave relacionados con él, así como los detalles relevantes para el caso y los procedimientos usualmente aplicables para su resolución. Esta información se encuentra almacenada en la estructura cognitiva en forma de esquemas mentales. Pero sólo se activan y se relacionan entre sí aquellos esquemas que son relevantes en la situación concreta de que se trate, y no otros, que resultan descartados, por un proceso de selección que está determinado en gran parte por las experiencias previas. La conexión más efectiva entre conceptos clave, detalles y procesos de resolución, forman lo que antes hemos denominado un "sendero de mínimo coste".

La Figura 6 representa de forma esquemática los distintos senderos, numerados del 1 al 5, que se pueden seguir en la resolución de un problema. Independientemente del hecho de que algunos de ellos (4 y 5) no conducen a la solución, por elegir los datos o los métodos inadecuados, queremos llamar la atención sobre la mayor longitud, el mayor coste, de unos frente a otros. (Casas, 2002)

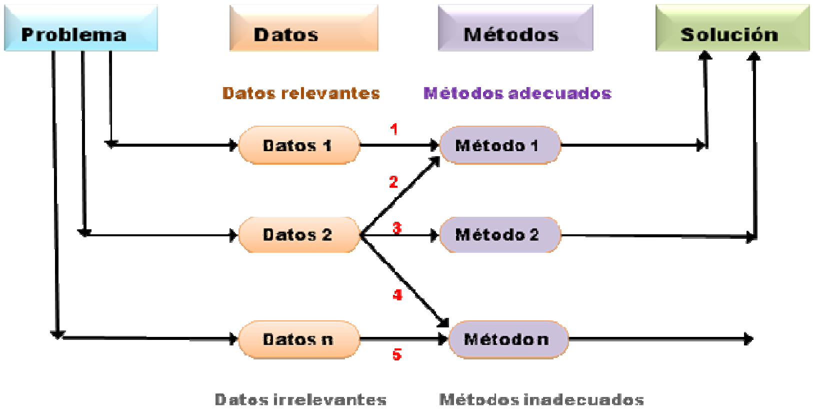


Figura 6. Distintos "senderos" en la resolución de un problema.

La capacidad de seleccionar cuáles son los senderos de mínimo coste es una característica del alumno que resuelve eficazmente los problemas, pero del mismo modo, la capacidad de escoger otros senderos, la flexibilidad para recorrer caminos no usuales, es lo que determina al alumno creativo. Tanto en uno como en otro caso la elección se rige por el mismo principio: las evaluaciones del coste y de la probabilidad de éxito, determinadas ambas por las experiencias previas.

3. La técnica asociada Redes Asociativas Pathfinder (RAP) y el programa GOLUCA.

Al igual que otras teorías, la TCN hace uso de una técnica propia, las Redes Asociativas Pathfinder (RAP) que proporciona las redes de la estructura cognitiva frente a los árboles jerárquicos que se reflejan en los mapas conceptuales. Mientras que para representar estas redes jerárquicas se dispone de programas como CMap Tools, para representar las RAP disponemos del programa KNOT [13] y del programa GOLUCA (en diversas versiones y desarrollos) [14]. Las potencialidades, similitudes, diferencias, ventajas e inconvenientes de los Mapas conceptuales de Ausubel y Novak y de las RAP las hemos puesto de manifiesto y pueden consultarse en (Torres, Luengo, Casas y Mendoza, 2012).

Vamos a tratar de mostrar cómo las RAP se adecuan a una representación del conocimiento sintónica con la TCN. Pensemos en la resolución de los problemas de matemáticas, cuando trabajamos dentro de un modelo conductista (Figura 7).

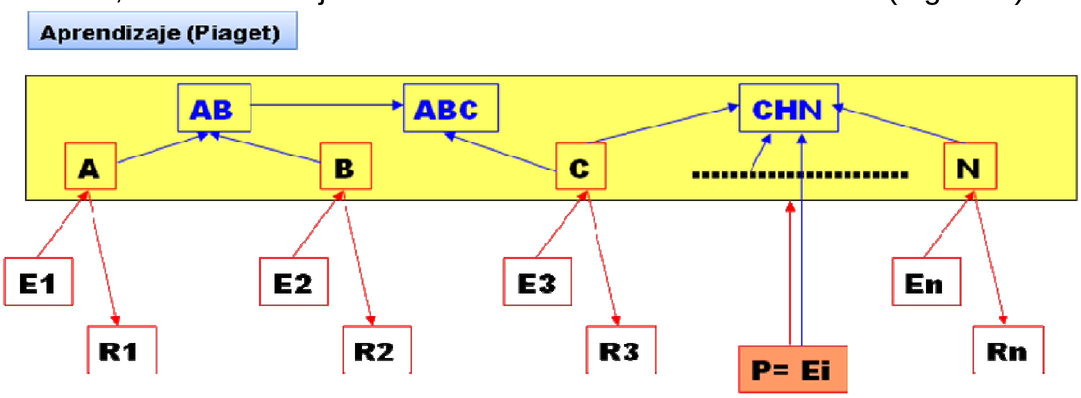


Figura 7. Aprendizaje según Piaget

Partimos de una situación inicial en la que suponemos que un alumno no sabe resolver problemas. Le ofrecemos un enunciado E1, le enseñamos cómo se resuelve R1 y como consecuencia en su mente se crea la estructura A; le proponemos otro problema E2, le enseñamos cómo se resuelve R2 y en su mente se crea la estructura B; y así sucesivamente le proponemos En, le enseñamos cómo se resuelve Rn y en su mente se crea la estructura N. Le proponemos otros problemas de los tipos enseñados en clase y en los exámenes le ponemos un problema que se corresponde con uno de los tipos vistos en clase (cambiando únicamente los valores de los datos). Ante un problema nuevo el alumno normal no sabe qué hacer porque no encuentra la estructura que ha memorizado en ninguno de los tipos de problemas. Algún alumno aventajado lo resuelve porque se le ocurrió una "feliz idea". Por ello a estos problemas se les llamó de "feliz idea".

Piaget nos dice que durante el aprendizaje hay dos procesos simultáneos: La “asimilación”, que coincide con la creación de estructuras a partir de las experiencias directas del conductismo y la “acomodación”. Este último es un proceso por el cual se crean estructuras en la mente del alumno que no son producto de experiencias directas sino de recombinación de las estructuras anteriores. En la figura 13 vemos las estructuras AB ABC y CHN que son de este tipo. El aprendizaje constructivista fomenta la creación de este tipo de estructuras. Un alumno que ha trabajado de esta manera ante un problema nuevo (P=Ei) busca en primer lugar una estructura que le permita resolverlo, pero si no la encuentra, es capaz de recombinar estructuras (en el ejemplo CHN) para resolver el problema.

La TNC admite este modelo de aprendizaje, pero llega más allá. Se plantea qué ocurre con estas estructuras a lo largo del tiempo. Es de suponer que al adquirir más experiencia, el alumno creará más estructuras y la complejidad de su red conceptual será creciente. Sin embargo los resultados de (Casas 2002) se contradicen con esta suposición. Precisamente en el CIBEM de 1998 coincidí con el profesor (Vasco, 1998) y su ponencia sobre el “archipiélago angular” me hizo pensar que sus ideas sobre “islas y puentes” podían ser aplicables a nuestro caso.

Si pudiéramos representar de alguna manera la estructura cognitiva del alumno en un momento determinado podríamos obtener una red conceptual como la que representamos en la parte superior de la Figura 8.

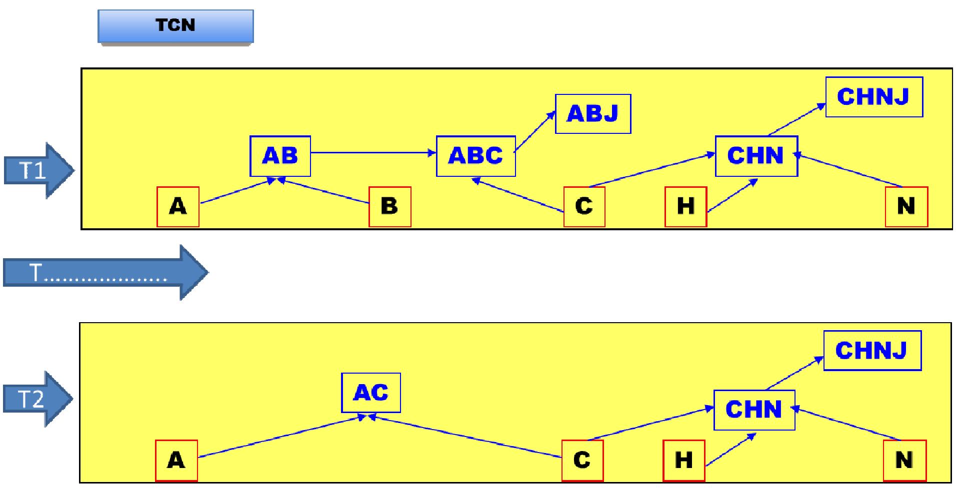


Figura 8. Aprendizaje según TCN

En dicho esquema hemos representado estructuras que proceden directamente de una experiencia (A,B,C,H y N) y otras que se han creado a partir de la recombinación de algunas de las anteriores. Pasado un tiempo lo esperado era que, producto de los procesos de acomodación, aparecieran más estructuras y la complejidad aumentase. Pero en los resultados que obtiene (Casas,2002) disminuye la complejidad, lo que nos lleva a la conclusión de que han "desaparecido" algunas estructuras (por ejemplo en la parte de debajo de la Figura 10 se observan que pasado el tiempo (T2-T1) se detectan menos estructuras y la complejidad decrece. No podemos suponer que las estructuras que faltan se hayan borrado definitivamente de la mente del alumno, las haya olvidado, pero de momento es como si no existieran. La TNC supone que, debido a la utilización de "senderos de mínimo coste" hay estructuras que no se utilizan durante un cierto tiempo y por lo tanto se olvidan o al menos no se detectan y es como si no existieran.

El modelo de representación adoptado por la TCN de Redes Asociativas Patfinder permite representar las estructuras mentales del alumno. La Red Pathfinder es una representación de la estructura mental del alumno respecto a un tema cuyos conceptos fundamentales (Figura 9) son: A, AC, C, CHN, H, N, CHNJ, y se obtiene a partir de una matriz de datos de proximidad. El primer software del que dispusimos para representar las RAP fue **KNOT** (Referencia), pero actualmente utlizamos el programa de **Go**dinho, **Lu**engo y **Ca**sas (**GOLUCA**) diseñado e implementado por nuestro propio equipo de investigación. Tanto uno como otro permiten representar las redes y efectuar los cálculos necesarios para su estudio.

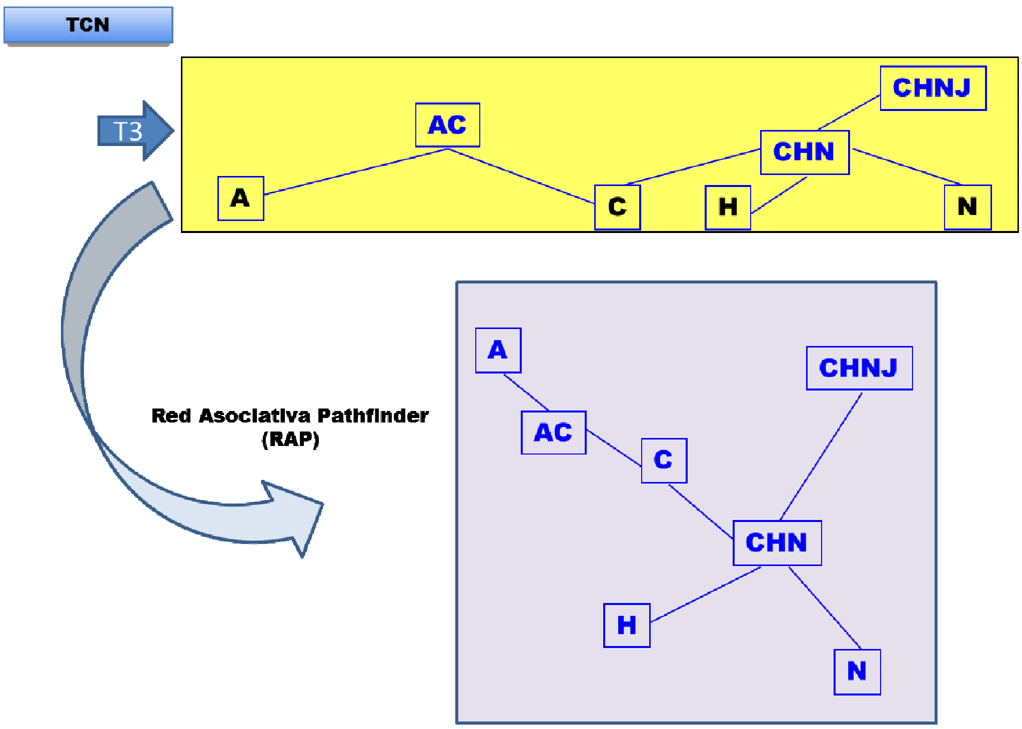


Figura 9. Representación mediante una RAP

3.1. Redes Asociativas Pathfinder

Las Redes Asociativas Pathfinder (Schvaneveldt, Durso y Dearholt, 1.985) pueden ser incluidas entre los métodos de representación del conocimiento que hacen uso de la puntuación de similaridad entre conceptos. Estos métodos asumen que se puede utilizar una representación espacial entre los conceptos, que describirá el patrón de relaciones entre ellos en la memoria. La representación se obtiene a partir de una puntuación numérica que se adjudica a la similaridad o diferencia entre los conceptos percibida por un sujeto y que corresponde a su distancia semántica. La distancia semántica pasa a ser considerada como si fuera una distancia geométrica y los conceptos semánticamente más próximos se representarán más próximos en el espacio y análogamente los más distantes. Dado que se pide al sujeto la realización de una tarea extremadamente simple y en la que no influyen la madurez o los conocimientos previos, se espera que los datos obtenidos reflejen la estructura profunda de su memoria.

Aunque existen algunas variantes, la técnica más general de puntuación de similaridad entre conceptos, comienza primeramente por la elección de conceptos que pueden ser simples o más elaborados, y después ir presentando todos los posibles pares en orden aleatorio. En ese momento se pide al alumno que, dados dos de ellos, asigne una puntuación a la similaridad o diferencia que exista. Las puntuaciones se resumen en una matriz de distancias que describe el grado de similaridad o diferencia, y que habitualmente son transformados en coeficientes de relación entre 0 y 1, de modo que los conceptos muy relacionados se puntúan con valores próximos a 1, y los que no lo están, se puntúan próximos a 0.

Las matrices de datos de puntuación o coeficientes de relación obtenidos se tratan mediante técnicas estadísticas como la de Análisis de Componentes Principales, Análisis de Cluster, Escalamiento Multidimensional o Redes Pathfinder. Estos métodos estadísticos transforman los datos de interrelación entre conceptos en distancias entre puntos en un espacio de dimensiones mínimas, de tal manera que se obtiene una representación espacial o se determina la estructura subyacente de los datos. Muchos investigadores están de acuerdo en que estos procedimientos hacen posible definir operativamente la estructura cognitiva (Fenker, 1.975; Jonassen, 1.990; Preece, 1.976; Shavelson 1.972, 1.985; Wainer y Kaye, 1.974).

Las redes Asociativas Pathfinder son representaciones en las cuales los conceptos aparecen como nodos y sus relaciones como segmentos que los unen, de mayor o menor longitud según el peso o fuerza de su proximidad semántica.

Para obtener estas Redes, como antes hemos indicado, se parte de un conjunto de conceptos seleccionados dentro de un campo de conocimiento, y se pide al sujeto que evalúe cuál es la proximidad que considera que existe entre cada par de ellos. Esto puede llevarse a cabo mediante el programa informático GOLUCA (Casas, Luengo, y Godinho, 2011), que presenta en pantalla de forma aleatoria todos los pares posibles y permite asignar el nivel de relación mediante, por ejemplo, el deslizamiento del cursor.

A partir de los datos obtenidos, el programa calcula una matriz de correlaciones que representa los “pesos” de los enlaces entre conceptos. A partir de esta matriz, y utilizando otro algoritmo (Kamada y Kawai, 1.989), ofrece una representación gráfica, como la que se muestra en la Figura 10.

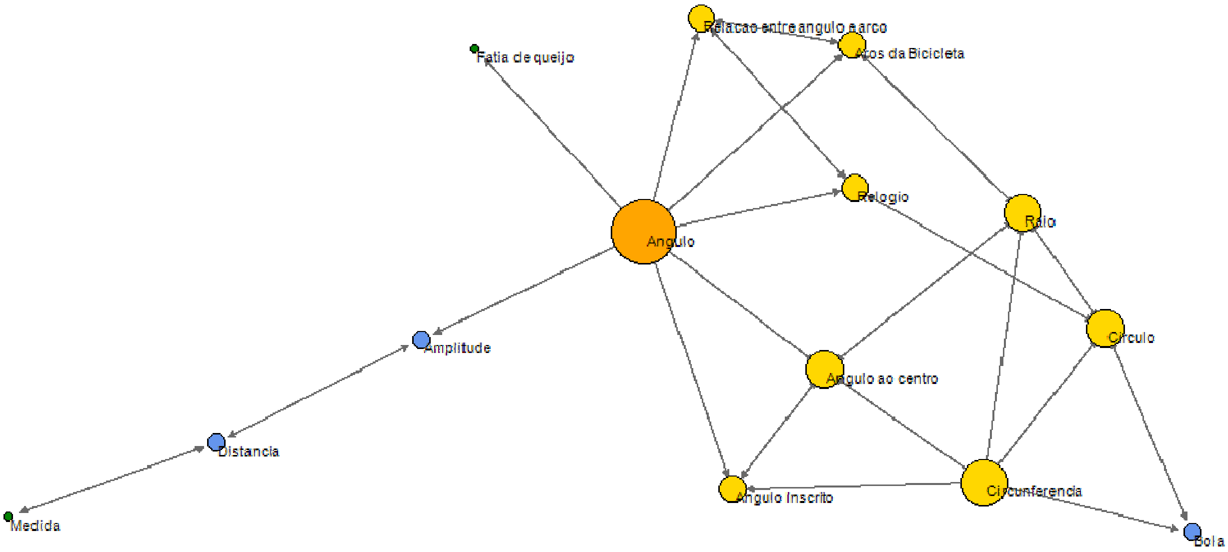


Figura 10. Red conceptual obtenida sobre un tema de Geometría (Veríssimo, 2013)

Como en la Matriz de datos todos los conceptos están relacionados en mayor o menor grado, aparecerían relacionados todos los conceptos. Pero esta red no ofrecería ninguna información útil por lo que interesa es representar los enlaces más significativos. Para determinar qué enlaces se incorporan el criterio consiste en que un enlace sólo se incorpora a la red si no existe un camino indirecto a través de otros nodos cuya suma de pesos sea menor que la de dicho enlace directo. De este modo, en la red resultante no todos los conceptos están necesariamente relacionados a todos los demás, sino que sólo se representan aquellos enlazados por senderos de peso mínimo, de manera que se representan sólo las relaciones más fuertes, y los nodos más destacados, como podemos ver en la Figura 16. Para una exposición detallada de los aspectos anteriores, puede consultarse (Schvaneveldt , 1.989) (Casas 2.002) y (Casas yLuengo, 2005).

La gran aportación que suponen las Redes Asociativas Pathfinder es que permiten crear representaciones en forma de redes de la estructura cognitiva de un sujeto a partir de datos empíricos, pudiendo ser generadas de forma no invasiva y totalmente automática.

Las Redes Asociativas Pathfinder, tienen campos de utilización muy amplios; en las Tesis Doctorales de (Casas, 2002); (Torres Carvalho, 2011) y (Veríssimo, 2013) se hacen revisiones bibliográficas detalladas de la utilización de esta técnica.

3.2. El software GOLUCA.

El primer programa informático que se utilizó para generar estas redes fue el programa KNOT (Knowledge Network Organizing Tool) da Interlink (1989) [12], desarrollado por Roger Schavaneveldt en la Universidad de Nuevo México - Estados Unidos de América. Posteriormente Godinho (2007), miembro del grupo de investigación CiberDidact, diseñó e implementó el software GOLUCA para la creación de redes asociativas Pathfinder, que añade nuevas funcionalidades que no existían en KNOT. Por ejemplo permite trabajar con imágenes y sonidos, lo que amplía grandemente su potencial de aplicación en la investigación.

El programa permite almacenar los datos en una base de datos, importar datos de otras bases, visualizar los datos por medio de representaciones de redes, organizarlos, hacer numerosos cálculos (redes medias, coherencias de redes, similaridades, análisis de nodos, nodos nucleares etc)... además de elaborar informes y exportar los datos. Para más detalles sobre el funcionamiento de GOLUCA se puede consultar (Godinho, Luengo, y Casas (2007); Casas, Luengo y Godinho, (2011).

Para obtener una RAP a través de GOLUCA el primer proceso es la obtención de datos. Para ello debemos introducir los items clave que vamos a explorar con esta técnica.

En la Figura 11 podemos ver la ventana de definición de términos u objetos; permite la definición de términos de textos (como ya hacía KNOT), de imágenes e incluso de sonidos. Una vez definida la lista de items y definidos los grupos (clases escolares por ejemplo) se procede al test (como se puede observar en dicha figura, cuadro inferior.

El programa solicita al alumno que evalúe (haciendo click en el triángulo inferior) de (-) a (+) el grado de relación entre pares de items que se le presentan de forma aleatoria.

Figura 11. Red Proceso de Obtención de datos a través de GOLUCA.

Se crea un fichero de texto que contiene una matriz triangular con la que GOLUCA efectúa los cálculos, hace una representación gráfica (con y sin "pesos") y efectua el análisis de redes solicitado (cálculo de redes medias, coeficiente de complejidad, coherencia, similaridad, nodos nucleres, etc.) (Figura 12).

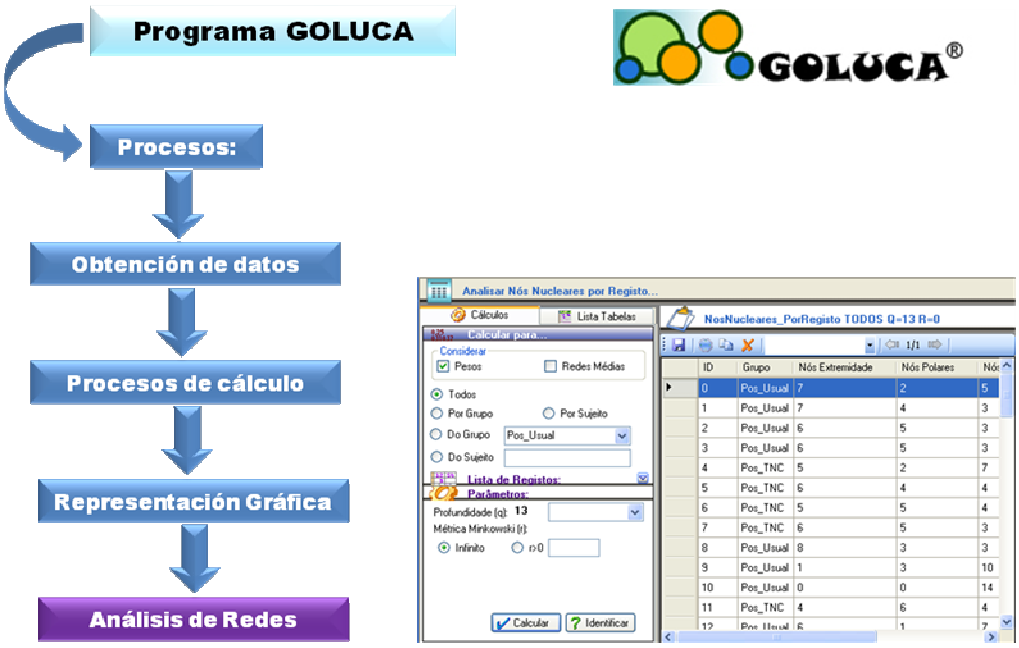


Figura 12. Representación y análisis y de RAP a través de GOLUCA

Para ilustrar someramente algunas posibilidades vamos a dar dos ejemplos: Uno que tiene que ver con las Matemáticas, y otro que no, pero que ilustra el potencial de éstas técnicas en otros campos del conocimiento.

Empecemos por el último, que es un ejemplo muy sencillo en el que se trata de detectar si el sujeto que hace el test refleja una concepción machista. Se trata de ofrecerle una serie de términos, que, en la concepción machista, van relacionados directamente con la mujer (cocina, sartén, fregona) y otros que en esta misma concepción van directamente relacionados con el hombre. Pedimos que haga el test GOLUCA a un hombre que se declara a sí mismo "machista" y a una mujer que se declara a sí misma como "feminista". Se trata de ver si GOLUCA detecta estas tendencias. La figura 13 muestra el resultado obtenido.

En cuadro superior izquierdo vemos la RAP del hombre (machista) en la que observamos que aparece un nodo nuclear "Hombre" y en torno a él (moto, boxeo y camión) y un nodo polar "mujer" ligado con los términos (cocina, sartén, fregona). En el cuadro superior derecho otra opción del programa, nos ha permitido hacer un corte de manera que eliminemos las relaciones más débiles en la representación, con lo que aparecen más claramente los dos grupos de términos: Hombre y sus tres términos relacionados y mujer y sus términos relacionados.

En el cuadro inferior izquierdo vemos la RAP de una mujer que se declara "feminista" en el que los enlaces son muy diferentes. Ya no aparecen las asociaciones anteriores y en cuadro inferior derecho, después del corte, el grupo principal, en torno al concepto nuclear "fregona" relaciona con el hombre items que no se corresponden con la concepción machista anterior. A través de GOLUCA en la investigación de estudios de género se pueden detectar estas tendencias

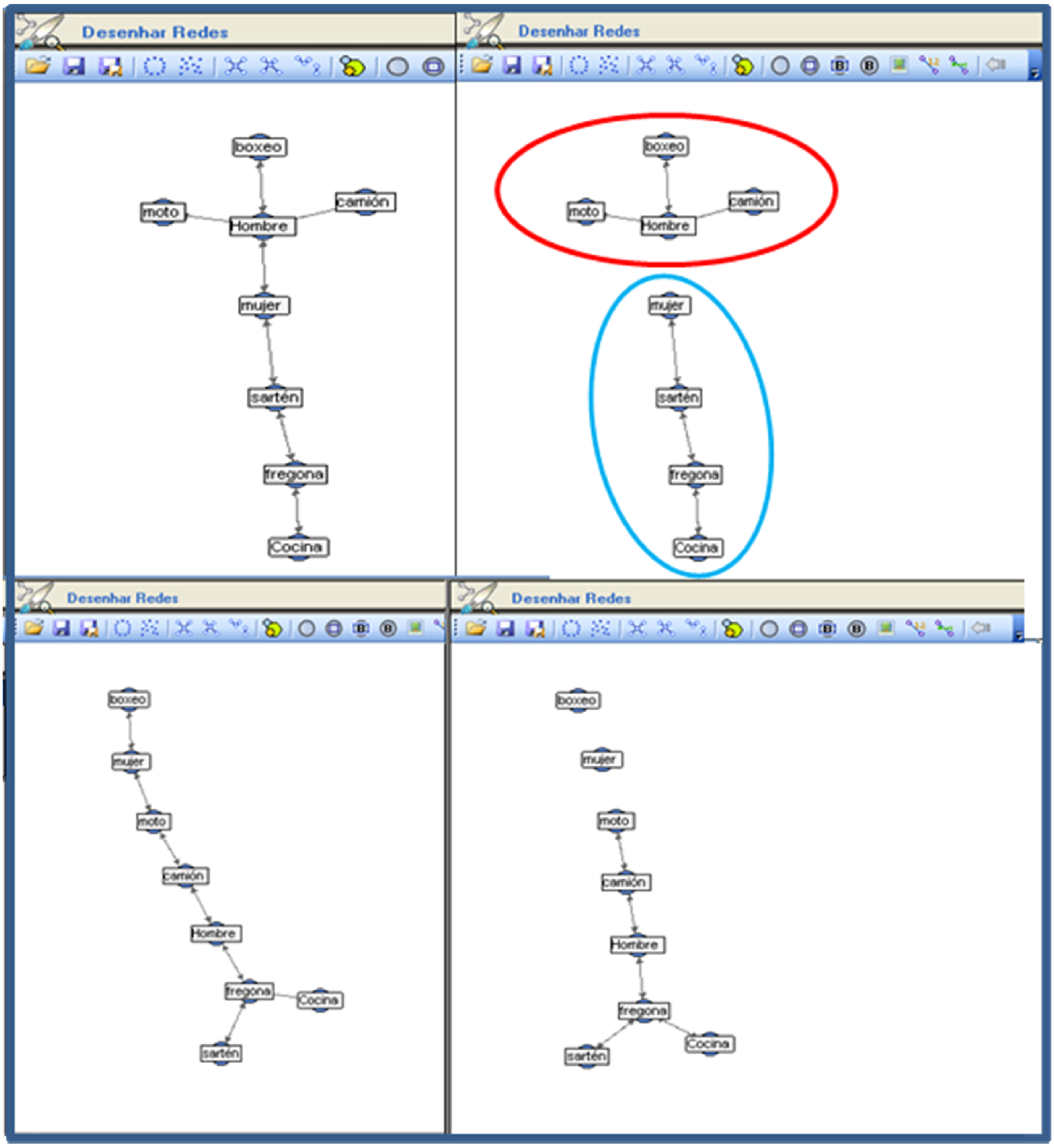


Figura 13. RAP obtenidas a través de GOLUCA (machismo-feminismo)

El otro caso que presentamos es un ejemplo sencillo de Matemáticas en el que trata de comprobar si los alumnos han interiorizado el concepto de par e impar y la proximidad de los números naturales. Ahora se le van a presentar una serie de números (1, 2, 7, 8, 9, 10, 33 y 44). Pedimos que haga el test GOLUCA a un alumno que sabemos conoce los números pares e impares y a otro que sabemos que no los tiene interiorizados. Se trata de ver si GOLUCA detecta si los alumnos tienen interiorizado el concepto de par e impar y si son capaces de asociar también la proximidad en el orden numérico de los Naturales. La figura 14 muestra el resultado obtenido.

En cuadro superior izquierdo vemos la RAP del alumno que conoce los números pares e impares. Aparecen como nodos nucleares 10 y 7. Agrupados en torno al 10 están todos los pares y en torno al 7 los impares, aunque también el 7 y el 2 están relacionados, al menos por una cierta proximidad. En el cuadro superior derecho otra opción del programa, nos ha permitido hacer un corte de manera que eliminemos las relaciones más débiles en la representación, con lo que aparecen más claramente los dos grupos de términos: El grupo de los pares (10, 2,8,44) y el de los impares (7,1,9,33). Parece que la noción de proximidad no la tiene tan clara o la ha dejado en un segundo término ya que ve más próximo el 2 al 7 que al 1.

En el cuadro inferior izquierdo vemos la RAP de un alumno que no tiene muy clara la distinción de par e impar ya que observamos enlaces erróneos (como 2 con 9) y otros que faltan (por ejemplo 2 con 8). En el cuadro inferior derecho, después del corte, aparecen grupos confusos que no atienden ni a la parida ni a la proximidad (como por ejemplo 9 y 2) y en una cadena lineal desordenada en la que no existen nodos nucleares. Como vemos mediante GOLUCA hemos detectado alumnos que no tienen interiorizados los conceptos de par e impar, y de proximidad numérica.

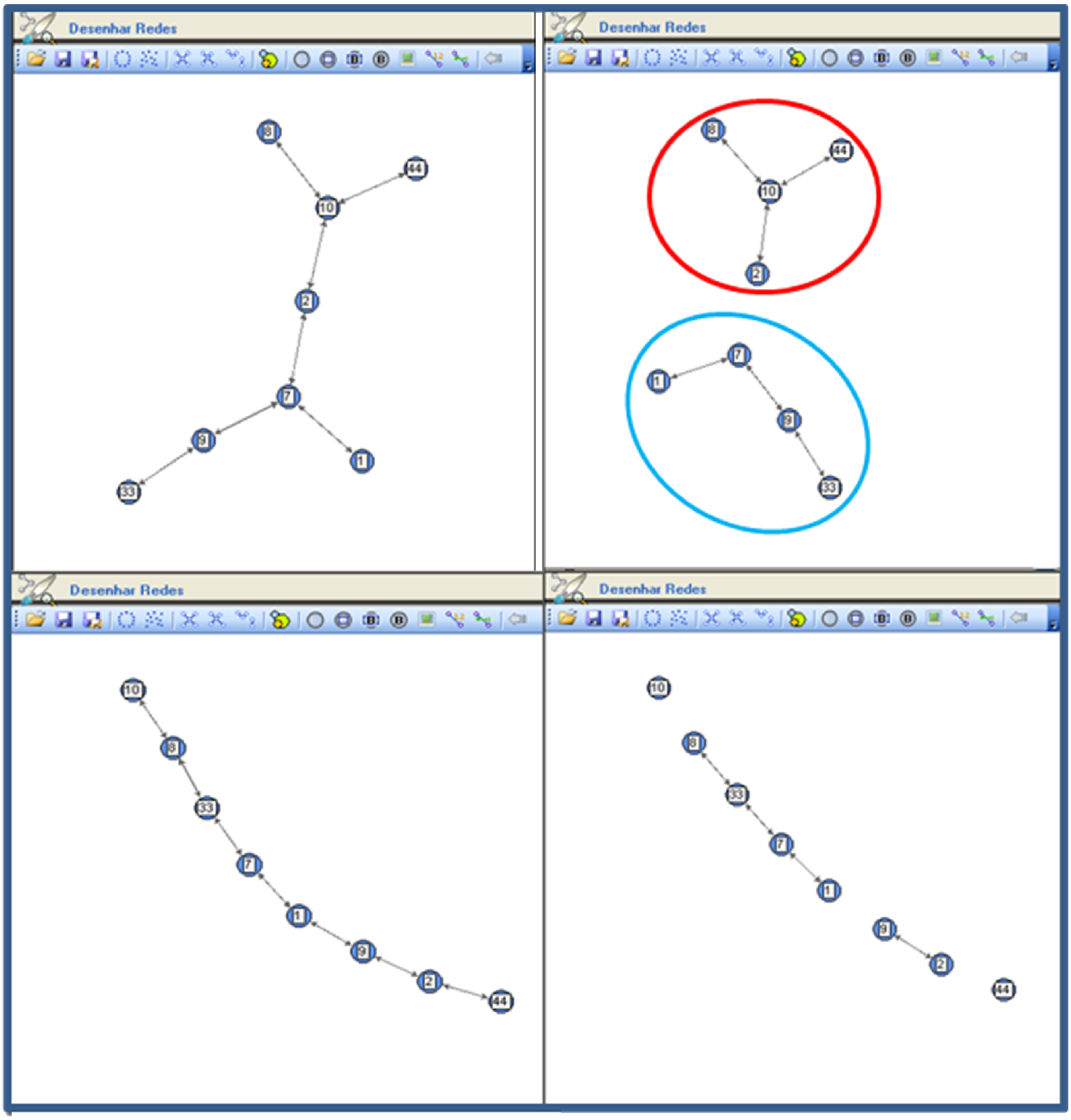


Figura 14. RAP obtenidas a través de GOLUCA (Par e Impar).

4. Aplicaciones en la Educación Matemática

La TCN y su técnica asociada (RAP) mediante GOLUCA ha sido aplicada a varios campos del conocimiento. La diversidad de aplicaciones y las representaciones y análisis puestos en juego y materializados en los numerosos trabajos del grupo Ciberdidact, permiten dar cuenta de su interés y potencialidad de esta línea de investigación. (Torres, 2011) hace una revisión de los trabajos y proyectos de investigación del grupo, indicando que la mayoría de las investigaciones están relacionadas con los trabajos de investigación de los cursos de Doctorado y las propias Tesis Doctorales. En síntesis fueron leídas y aprobadas 5 Tesis Doctorales, que utilizaron como Marco Teórico la TCN y su técnica asociada RAP a través de las distintas versiones de GOLUCA (ver tabla 1).

Nº	Tesis /año	Título	Autor	Descriptores	Directores
1	TESIS 2002	Aportaciones a la investigación sobre la estructura cognitiva de los alumnos a través de Redes Pathfinder. Un estudio en Geometría	Casas García, Luis M.	Conceptos básicos Geometría/ estructura cognitiva / Generación de la Teoría TNC / RAP	Dr. Ricardo Luengo
2	TESIS 2008	Evaluación de la calidad de Cursos Virtuales: Indicadores de Calidad y construcción de un cuestionario de medida. Aplicación al ámbito de asignaturas de Ingeniería Telemática	Arias Masa, Juan.	TNC y Red de la Ciencia / RAP / Entornos aprendizaje web/ TICs / Evaluación y calidad / Informática- Telemática- Educación Universitaria.	Dres. D. Ricardo Luengo y D. Justo Carracedo
3	2010	Análise do Domínio de Conceitos Trigonométricos: Estudo Exploratório com alunos do Ensino Básico ao Ensino Superior de Escolas de Beja	Antúnez Figueiredo, Ana	Conceptos básicos Trigonometría / Estructura cognitiva- TNC / RAP / Comparación de métodos: “Card Sorting” (Nielsen, 1995)	Dres. D Ricardo Luengo y D. Luis M. Casas
4	2011	Estudio de las posibilidades de aplicación a la enseñanza de la Matemática del entorno PmatE: Validación y aportaciones en 1º Ciclo de Enseñanza Básica	Torres Carvalho, J Luis	Conceptos básicos Aritmética/ Estructura cognitiva- TNC / RAP / Entornos aprendizaje web/	Dres. D Ricardo Luengo y D. J. Pires Ramos
5	2013	La introducción de las ideas de la Teoría de Conceptos Nucleares en la enseñanza de la Geometría y sus implicaciones	Veríssimo Catarreira, Sofía	Geometría / Circunferencia en Primaria / Didáctica Matemática / Programa de intervención en Matemáticas / TNC / RAP / Redes Pathfinder/ Unidades didácticas	Dres. D Ricardo Luengo y D. Luis M. Casas

Tabla 1. Tesis Doctorales que usan como Marco Teórico la TCN

Otros trabajos de investigación del grupo los hemos condensado en la Tabla 2; en la última columna (descriptores) podemos observar la cantidad de temas técnicas y análisis que se han empleado en nuestras investigaciones. Las mismas han dado lugar a numerosas publicaciones; algunas han sido citadas y aparecen en las referencias o la Bibliografía y todas las referencias se pueden consultar en la web del grupo Ciberdidact [9].

Nº	Trabajo /Tipo	Título	Autor	Descriptores
1	T Suf Invest (2001)	Aportaciones a la investigación. sobre la estructura. cognitiva de los alumnos a través de Redes Pathfinder. Un estudio exploratorio en Geometría	Casas García, L.M.	Conceptos básicos Geometría/ estructura cognitiva
2	DEA 2007	Implementação do software GOLUCA e aplicação à modificação de redes conceptuais".	Godinho López, V.	Redes conceptuales / "poso cultural"/ TNC / Implementación software / Video
3	TFM 2007	"Aproximación a la medida del aprendizaje a través de Redes Asociativas Pathfinder"	Hidalgo Izquierdo, V.	TNC y Red de la Ciencia / RAP / Similaridades de RAP / Unidades Didácticas
4	TFM 2008	Representación del conocimiento y percepción del proceso de formación: estudio cualitativo con personal de enfermería”.	Milagros Jiménez Adán	RAP / Relatos profesionales /Enfermería.
5	T FM 2008	Enseñanza y Aprendizaje de la función cuadrática utilizando un simulador geométrico desde el enfoque de la Teoría de los Conceptos Nucleares	Luis Javier Aguirre Contreras	Teoría de Funciones / estructura cognitiva /TNC / RAP / Unidades Didácticas
6	TFM 2009	“Integración de las TICs en el proceso de E/A y actitudes de los docentes de Matemáticas: Estudio comparativo entre profesores chilenos y españoles	Silvia Ramirez Zumelzu	Redes conceptuales /RAP / Actitudes / Competencias / TICs
7	T FM 2010	Errores conceptuales sobre Geometría: Estructura Cognitiva	Mª de los Angeles Pecero Márquez	Geometría / Errores conceptuales / estructura cognitiva / TNC / RAP
8	TFM 2011	Visión del Docente sobre la utilización del Blog en el aula. Estudio cualitativo.	Santiago M Vicente González	Redes conceptuales /RAP / TICs
9	TFM 2011	Análisis cualitativo sobre la percepción de las TICs en alumnos/as de Secundaria mediante los programas informáticos GestMagister y Goluca.	Ana Belén Molero García	Redes conceptuales /RAP / TICs / Implementación software /
10	TFM 2011	O contributo das Redes Associativas Pathfinder á avaliação das aprendizagens em Matemática: aplicação aos exames de Matemática da 1.ª chamada do 9.ºano de escolaridade do Ensino Básico Português	Cesario Paulo Lameiras De Almeida	Evaluación en Matemáticas/ Redes conceptuales /RAP /
11	TFM 2011	Acceso cualitativo sobre la percepción de los profesores acerca del uso de la Plataforma Moodle, mediante los programas GESMAGISTER y GOLUCA.	José Pablo Vargas Vargas	Redes conceptuales /RAP / TICs / Entornos virtuales
12		Análisis sobre la percepción de las TICs, en Profesorado de Educación Primaria, mediante redes asociativas pathfinder. Estudio de caso.	Antonio Manuel Maldonado	Redes conceptuales /RAP / TICs / Estudio de casos

Tabla 2. Otros trabajos de Investigación del Grupo Ciberdidact.

En síntesis, pensamos que la TCN sus técnicas asociadas tienen ya un largo recorrido y una base sólida. Nuestra Agenda de Investigación agrupa en cuatro grupos las cuestiones abiertas que aseguran el futuro de la línea y que sugieren las direcciones que debemos tomar en nuestra investigación:

1. Aportaciones al Marco TCN (cuyos objetivos son comprobar, completar y consolidar lo que ya sabemos acerca de TCN).

2. Mejorar la Técnica Goluca: Mejorar la técnica de obtención de redes, dotar al programa Goluca de nuevas funcionalidades y análisis y contrastar y triangular los resultados con otras técnicas.

3. Aplicaciones de TNC a diversos temas Matemáticos y a otras Áreas de conocimiento: Buscar nuevas estrategias y aplicaciones de TNC en la Enseñanza.

4. Mejora de los procesos de Enseñanza/Aprendizaje, de manera que los resultados encontrados, bajo TNC, influyan en la mejora de la Práctica, a través de la investigación de programas de enseñanza (y Unidades Didácticas) que aprovechen las potencialidades de los nuevos entornos virtuales.

Es cierto que ya sabemos bastantes cosas, pero tenemos más preguntas que respuestas, pues cada investigación plantea nuevos interrogantes y cuestiones abiertas que se abren y que sugieren nuevas investigaciones. Ello nos anima a seguir trabajando en la TCN y asegura el futuro de la línea de investigación.

Referencias

[1] El Real Decreto 1888/1984 /(de 26 de septiembre, BOE de 26 de octubre) regulaba los concursos para la provisión de plazas de los cuerpos docentes universitarios y estableció un catálogo de **áreas de conocimiento** entendidos como dice el artículo 2º como “aquellos campos del saber caracterizados por la homogeneidad de su objeto de conocimiento, una común tradición histórica y la existencia de comunidades de investigadores, nacionales o internacionales”. http://www.filosofia.org/mfa/e1984a.htm

[2] El BOE del 24 de junio de 2000, añade nuevas áreas de conocimientos a las existentes:http://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2000-11968 (manteniendo el Área de Didáctica de la Matemática).

[3] El R.D 2360/1984 establece la normativa actual de Departamentos a la que estamos acogidos:
http://www.boe.es/aeboe/consultas/bases_datos/doc.php?id=BOE-A-1985-732

[4] Página Web de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper": http://venturareyesproper.educarex.es/

[5] Página Web de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM): http://www.fespm.es/

[6] Página Web de la SEIEM: http://www.seiem.es/

[7] Página Web del Grupo de Geometría: http://www.uv.es/aprengeom/

[8] Página Web del Grupo CIBERDIDACT:
http://www.unex.es/investigacion/grupos/ciberdidact

[9] Publicaciones del Grupo CIBERDIDACT:
http://www.unex.es/investigacion/grupos/ciberdidact/estructura/publicaciones

[10] Página Web de la Federación Iberoamericana de Educación Matemática
http://www.fisem.org/web/index.php

[11] Tesis Doctoral del Doctor Luis M. Casas, dirigida por el Dr. D. Ricardo Luengo. Se puede encontrar en el grupo “Aprengeom” de SEIEM en:
http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Casas02a.pdf

[12] Los elementos de la TCN pueden consultarse con más detalle en (Casas,.2002), (Casas y Luengo, (2003a, 2004 a y b y 2005).

[13] Programa Knot de Interlink: http://interlinkinc.net/

[14] Programa GOLUCA, diseñado e implementado por el Grupo CIBAERDIDACT (http://www.unex.es/investigacion/grupos/ciberdidact)

Bibliografía:

Antúnez, A. (2010): Análise do Domínio de Conceitos Trigonométricos: Estudo Exploratório com alunos do Ensino Básico ao Ensino Superior de Escolas de Beja. Badajoz. Universidad de Extremadura. *Dirigida por los Dres Dr. Ricardo Luengo y Luis M. Casas.*

Arias, J. (2008): Evaluación de la calidad de Cursos Virtuales: Indicadores de Calidad y construcción de un cuestionario de medida. Aplicación al ámbito de asignaturas de Ingeniería Telemática. Badajoz. Universidad de Extremadura. *Dirigida por los Dres Ricardo Luengo y Justo Carracedo.*

Ausubel D.P, y Novak, J.D. y Hanesian, H. (1978): *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. Ed. Trillas. México (trd versión en inglés del 1978.

Carvalho, J.L. (2011): Estudio de las posibilidades de aplicación a la enseñanza de la Matemática del entorno PmatE: Validación y aportaciones en 1º Ciclo de Enseñanza Básica. Badajoz. Universidad de Extremadura. *Dirigida por los Dres Ricardo Luengo y J.L. Pires.*

Carvalho, J.L., Ramos, J.L., Casas, L. y Luengo, R. (2010) Estrutura cognitiva dos alunos e aprendizagem conceptual da Matemática: contributos para o seu conhecimento através da técnica de Redes Associativas Pathfinder. En *Educação, Formação & Tecnologias* 3 (1), 15–30.

Casas, L. (2001): Aportaciones a la investigación sobre la estructura cognitiva de los alumnos a través de Redes Pathfinder. Un estudio exploratorio en Geometría • *Trabajo de Doctorado (9 créditos) dirigido por el Dr. Ricardo Luengo.*

Casas, L.(2002): El estudio de la estructura cognitiva de alumnos a través de Redes Asociativas Pathfinder. Aplicaciones y posibilidades en Geometría *(Tesis Doctoral)*. Badajoz: Universidad de Extremadura. *Dirigida por el Dr. Ricardo Luengo.*

Casas-García, LM & Luengo-González, R. (2003a): “Redes Asociativas Pathfinder y Teoría de los Conceptos Nucleares. Aportaciones a la investigación en Didáctica de las Matemáticas” en *Investigación en Educación Matemática*.(179-188). VII S.E.I.EM. Universidad de Granada.

Casas-García, LM & Luengo-González, R. (2003b). Matematicas: Representaçao Da Estrutura Cognitiva De Alunos. En *Congresso en Neurociencias Cognitivas*. Universidade de Evora (Évora- Portugal).

Casas-García, LM & Luengo-González, R. (2004a). Teoría de los Conceptos Nucleares. Aplicación en Didáctica de las Matemáticas. En R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigación en Educación Matemática.* Badajoz: Servicio de Publicaciones FESPM.

Casas-García, LM & Luengo-González, R. (2004b). Representación del conocimiento y aprendizaje. Teoría de los Conceptos Nucleares. En *Revista Española de Pedagogía* n, 227, 59–84.

Casas, L. M., & Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. En *Enseñanza de las Ciencias*, 23(2), 201–216.

Casas, L. & Luengo, R. (2008): Técnicas de representación del conocimiento. Aplicaciones a la investigación y enseñanza en Geometría. En *Actas del XI ICME*. México.

Casas-García, LM & Luengo-González, R. (2013): The study of the pupil's cognitive structure: the concept of angle. En Eur J Psychol Educ (2013) 28:373–398. Springerc (DOI 10.1007/s10212-012-0119-4)

Casas, L., Luengo, R. y Godinho, V. (2011) Software GOLUCA: Knowledge Representation in Mental Calculation. *US-China EducationReview B,4, 592-600*

Casas, L., Luengo, R. Torres,J.L y Mendoza, M. (2011): Software para representación del conocimiento: una experiencia en Educación Infantil. En Actas SIIE 12. Andorra.

Chen, Ch. (1.998). [En línea]. Bridging the Gap: The Use of Pathfinder Networks in Visual Navigation. *Journal of Visual Languages and Computing*, 9, 267-286. Disponible en: http://www.pages.drexel.edu/~cc345/

Edelman, G. (1.992): Bright air, brilliant fire. On the matter of the mind. *New York: Basic Books.*

Fenker, R. M. (1.975). The organization of conceptual materials: A methodology for meassuring ideal and actual cognitive structures. En *Instructional Science, 4, 33-57*.

Godinho, V. (2007). Implementação do software GOLUCA e aplicação à modificação de redes conceptuais (*trabalho de DEA*). Badajoz: Universidad de Extremadura, Instituto de Ciencias de la Educación.

Godinho, V., Luengo, R. & Casas, L. (2007) Implementación del software GOLUCA y aplicación al cambio de redes conceptuales. *Report presented as part of the requirements of the "Diploma de Estudios Avanzados*". Unpublished, Department of Didactics of Experimental Sciences and Mathematics. University of Extremadura, Spain.

Jiménez, M., Casas, L. y Luengo, R. (2010) Representación del conocimiento y percepción subjetiva del proceso de aprendizaje profesional: estudio en personal de Enfermería. En *Educación Médica*, 13 (3), 163–170

Jonassen, D. H. (1.990). Semantic network elicitation: tools for structuring hypertext. En *C. Green y R. McAleese (Eds.). Hypertext: State of the Art*. Oxford: Intellect.

Luengo González, R., (1988): Una panorámica sobre la Educación Matemática en España. En *Conferencia inaugural (invitada) en el III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM).* Caracas (Venezuela). Actas publicadas DL / ASOVEMAT LF1751999510603.

Luengo, R; Casas, L.M; Mendoza,M y Arias,J (2011): Possibilities of "Nuclear Concepts Theory" on Educational Research, a Review. En *International Conference TheFuture of Education*. Florencia, 16-17 de Junio de 2011

Martín, E. (1.985): La representación espacial de los niños: Los mapas cognitivos. [CD]. *Cuadernos de Pedagogía, 125*, (sin paginar en la edición CD).

Neisser, U. (1976): *Psicología Cognoscitiva*. Máxico.Trillas / trd original inglés de 1969.

Piaget, J. (1978): La evolución intelectual entre la adolescencia y la edad adulta". En J Delval comp. *Lecturas de Psicología del niño*, V 2.

Preece, P. (1.976). Mapping cognitive structure: A comparison of methods. En *Journal of Educational Psychology, 68, 1-8.*

Rumelhart, D.E. (1.980): Schemata: The building block of cognition. En *R.J. Spiro, B.C. Bruce y W. Brewer (Eds.). Theoretical issues in reading comprehension*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rumelhart D.E. (1984): Schemata and the cognitive system. En *R.S. Wyer y T.K. Srull eds, Hanbook of social cognition*, v-1. Hillsdale, NJ:Erlbaum.

Rumelhart, D.E., y McLelland, J. (Eds.). (1.986): Parallel Distributed Processing: Explorations In The Microstructure of Cognition, vol. 1. *Cambridge, MA: MIT Press*.

Shavelson, R. (1972): Some aspects of the correspondence between content structure and cognitive structure in physics instruction*. Journal of Educational Psychology,* 63, pg 225-234.

Schvaneveldt, R.W.(Ed.).(1.989): Pathfinder Associative Networks. En *Studies in Knowledge Organization*. Norwood, NJ: Ablex

Schvaneveldt, R.W., Durso, F.T., y Dearholt, D.W. (1.985): Pathfinder: Scaling with network structures. En *Memorandum in Computer and Cognitive Science, MCCS-85-9*. Las Cruces, NM: Computing Resarch Laboratory, New Mexico State University.

Torres Carvalho, J. L. Pires Ramos J.L., Luengo González, R. y Casas García L.M. (2011): Knowledge of the Cognitive Structure of Students through Pathfinder Associative Networks Technique in the Context of PmatE En International Conference TheFuture of Education. Florencia, 16-17 de Junio de 2011.

Torres Carvalho, J. L.; Luengo González, R.; Casas García, L.M y Mendoza García, M. (2012): Estudio de la estructura cognitiva: mapas conceptuales versus redes asociativas pathfinder. En Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. A. J. Cañas, J. D. Novak, J. Vanhear, Eds.Valletta, Malta.

Vasco, C. (1998). El archipiélago angular. Memorias—*III Congreso Iberoamericano de Educacion Matemática,* Caracas (p. 74–79).

Verissimo Catarreira, S. (2013). La introducción de las ideas de la Teoría de Conceptos Nucleares en la enseñanza de la Geometría y sus implicaciones. Badajoz. Universidad de Extremadura. Dirigida por los *Dres Dr. Ricardo Luengo y Luis M. Casas.*

Wainer, H y Kaye, K. (1.974). Multidimensional scaling of concept learning in an introductory course. *En Journal of Educational Psychology, 66, 591-59*

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 37-46

La reflexión sobre la práctica del profesor de matemática: el caso de la enseñanza de las operaciones con números enteros.

Juan Carlos Ñancupil Poblete, Reginaldo Fernando Carneiro, Pablo Flores Martínez

Fecha de recepción: 17/05/2012
Fecha de aceptación: 7/04/2013

Resumen	Son innumerables las razones por las cuales los docentes deberían poner en práctica procesos reflexivos y sin duda una de las más relevantes de todas es enfrentar situaciones problemáticas que conllevan a una toma de decisiones en forma diaria que involucran y afectan a los alumnos. Este artículo describe un proceso reflexivo en el contexto de un problema surgido en la práctica de aula, relacionado con la enseñanza de la operatoria con números enteros. Para profundizar en esta experiencia de reflexión se han utilizado el ciclo de reflexión propuesto por Smyth. Así que ese modelo permitió la reflexión sobre las acciones que basaban la situación de aula y que llevó a un repensar esa práctica. **Palabras clave**: formación de profesores, reflexión, enseñanza de la matemática, números enteros.
Abstract	There are countless reasons why teachers should put into practice reflective processes and undoubtedly one of the most important of all is to confront problematic situations that involve making decisions in their everyday and that involve and affect students. This article describes a reflective process in the context of a problem arising in practice in the classroom, related to the teaching of operations with integers. To deepen this reflect experience we use the cycle of reflection proposed by Smyth. Thus this model allows the reflection about the actions that informed the situation of the classroom and that led to a rethinking of this practice. **Keywords**: teacher education, refletion, teaching mathematics, integer.
Resumo	São inúmeras as razões pelas quais os professores deveriam colocar em prática processos reflexivos e sem dúvida uma das mais relevantes de todas é enfrentar situações problemáticas que implicam na tomada de decisões em seu cotidiano e que incluem e afetam os alunos. Este artigo descreve um processo reflexivo no contexto de um problema surgido na prática de sala de aula, relacionado com o ensino das operações com números inteiros. Para aprofundar esta experiência de reflexão utilizamos o ciclo de reflexão proposto por Smyth. Dessa forma esse modelo permitiu a reflexão sobre as ações que embasavam a situação de sala de aula e que levou a um repensar dessa prática. **Palavras-chave**: formação de professores, reflexão, ensino de matemática, números inteiros..

1. Introducción

Promover la acción reflexiva en los docentes tiene un carácter de vital importancia en la educación actual ya que nos permite evaluar nuestro comportamiento y orientar nuestras prácticas de manera más eficiente. Debemos tener presente, sin embargo, que no es un proceso simple y a corto plazo. Es, en efecto, un proceso continuo de aprendizaje, dinámico, de cambios constantes que nos conduce a apropiarnos de ideas relevantes y desechar otras.

En este artículo pretendemos discutir cómo los dos primeros autores con la supervisión del tercer autor, en el contexto de una asignatura del máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, han llevado a cabo un proceso de reflexión. Para ello se ha tomado como punto de partida una situación problemática particular de aula, que nos ha generado una dificultad en nuestra práctica habitual. En nuestro caso, se refiere a la enseñanza de la suma y de la resta de números enteros para los alumnos de 12 o 13 años.

Se ha desarrollado el proceso reflexivo bajo los argumentos propuestos por el Ciclo de Reflexión de Smyth (1991), que en términos simples nos permite analizar nuestras experiencias pasadas proyectando mejoras a futuro.

Se han desarrollado todas las etapas contempladas en el ciclo sobre el problema profesional planteado, lo que conlleva por parte de los docentes, no solo plantear la situación de conflicto, sino estar consciente que qué creencias y concepciones al respecto pueden ser interpretadas de manera distinta por los demás.

La idea central de este proceso reflexivo es que el docente considere esta propuesta como una herramienta de desarrollo profesional que le permita mirar su propia practica haciendo explicita sus suposiciones y creencias en relación a sus acciones profesionales. Teniendo presente que esta mirada sea abierta y dispuesta a transformaciones que nos ayuden a restructurar nuestro actuar.

En este artículo presentamos primero el marco teórico que es la base de nuestras discusiones, en seguida describimos el Ciclo de Reflexión de Smyth (1991) y nuestras reflexiones realizadas durante la asignatura. Finalmente, discutimos algunos aspectos que ese ciclo de reflexión posibilita sobre la situación práctica de nuestro contexto profesional.

2. La reflexión sobre la práctica profesional

El profesor es un profesional que trabaja con alumnos que cambian a lo largo de su vida. Su trabajo se desempeña en unas condiciones particulares, que no pueden generalizarse. Para ello tiene que ir ganando confianza en que toma las decisiones cada vez con mayor apoyo. Pues bien, la reflexión es una importante herramienta de formación para los profesores, porque permite que piensen de forma sistemática sobre su práctica, buscando la forma de interpretar los problemas que encuentra a la luz de teorías y aportes de la didáctica de la Matemática. Para eso debe estar abierto a percibir los aportes, pero siempre y cuando le sean significativos. Para dar significado a su acción tiene que tener en cuenta sus creencias sobre su actuación docente, pues son ellas las que le llevan a estar enseñando como lo hace, a usar determinadas estrategias y materiales, a establecer la forma cómo aborda un contenido.

El proceso de reflexión debe comenzar por llevar al profesor a tener conciencia de sus creencias, acerca de la matemática y su enseñanza y aprendizaje y también a verificar si alguna de ellas está frenando o dificultando la enseñanza. Sus creencias deben ser problematizadas y, así buscar reflexionar sobre los límites de estas creencias conduce a los cambios de su forma de enseñar y, consecuentemente, en la mejora de su práctica.

El profesor puede enfrentar los problemas de su práctica reflexionando sobre ellos de forma tal que le permita buscar posibles soluciones. Flores (2007, p. 142) resalta que para Dewey la reflexión es un proceso de “resolución de conflictos, de dudas, a la vez que una actitud de disposición a revisar la actuación”. Y es que el profesor se encuentra constantemente con conflictos en su vida profesional. La actitud del profesor reflexivo se basa en una disposición a enfrentar esos conflictos, a buscar soluciones, para lo que tiene que promover una revisión de su práctica que es la finalidad de la reflexión.

Para eso, el profesor reflexivo debe tener, como destaca Flores (2007) a partir de las ideas de Perrenoud, las siguientes disposiciones: percibir situaciones de su práctica que necesiten de otra manera de actuar; distanciarse de esas situaciones para poder analizarlas; explicitar y examinar los elementos que hacen parte de la situación y también buscar cómo ellos son influenciados por sus creencias y; buscar otras formas de interpretar la situación a partir de diferentes fuentes como los compañeros de trabajo, documentos oficiales, libros de textos, investigaciones, etc.

La percepción de una situación de conflicto no siempre es simple, pues para el docente puede ser una situación normal de su trabajo o de su práctica en clase. Es muy común interpretar, por ejemplo, que si la mayoría de sus alumnos no aprenden los contenidos matemáticos es porque o no estudian o las matemáticas son difíciles y, por tanto, no es un problema suyo. Así que no se preocupará con eso porque para él no es una situación de conflicto.

Para afrontar el proceso de reflexión el profesor tiene que distanciarse de la situación para analizarla, ya que el docente es el actor y también el director, este último entendido como la persona que dice lo que está bien y que lo necesita mejorar, es decir, el profesor asume estos dos papeles cuando reflexiona sobre su práctica.

Además, debe ir aclarando los elementos que están imbricados en la situación y en sus porqués, para que pueda analizar críticamente esos elementos en la busca de explicaciones, conclusiones y soluciones.

Por fin está en condiciones de buscar otras fuentes con las cuales pueda interpretar esos elementos, lo que se propicia cuando se consideran las experiencias de otros profesores, pues pueden enfrentar la misma situación o tener ideas que lo ayuden a reflexionar sobre ella. Jaworski (1993) apunta que un proceso de reflexión crítica es difícil de ser llevado a cabo por el profesor solo y que hacen falta otras personas para que se apoyen mutuamente o en el papel se cuestionen o escuchen.

Ese proceso facilita que el profesor reconozca su propio pensamiento, al tener que exponerla a los demás, con lo que se hace consciente de la base de sus acciones y también de la toma de decisiones que, consecuentemente, podría influenciar su práctica futura (Jaworski, 1993).

La idea de profesor reflexivo proviene actualmente de las ideas de Donald Schön, quien ha desarrollado los conceptos de reflexión en la acción y reflexión sobre la acción. La reflexión en la acción es la toma de decisiones y actitudes en las diferentes situaciones en clase con las que se enfrenta el profesor y actúa basado en sus conocimientos y experiencias, es decir, para Schön (1998, p. 243) "piensa frecuentemente en lo que está haciendo en cuanto lo hace" y no hace falta el uso de palabras.

El momento de la acción, según Pérez Gómez (1992, p. 104), es un proceso de "reflexión sin rigor, la sistematización y el distanciamiento requeridos para la análisis racional, pero con la riqueza de la captación viva e inmediata de las múltiples intervinientes y con la grandeza de la improvisación y creación".

La reflexión en la acción, exige del profesor la capacidad de mirar cada alumno como un individuo único e intentar comprender lo que está pensando, es decir, sólo con la comprensión de los procesos de aprendizaje es que será posible una intervención adecuada para hacer el estudiante avanzar. El profesor al enfrentarse a una situación de conflicto en la que refleje para buscar una solución sigue algunos caminos:

> Primero, hay un momento de sorpresa en el que el profesor reflexivo se permite ser sorprendido por los hechos del alumno. En un según momento, reflexiona sobre estos hechos, es decir, piensa sobre lo que el alumno dice o hizo y, simultáneamente, busca comprender la razón por la cual fue sorprendido. Después, en el tercer momento, reformula el problema que surgió en la situación (…). En el cuarto momento, pone una nueva cuestión o establece una nueva tarea para testar su hipótesis sobre cómo está pensando el alumno (Schön,1992, p. 83).

Para Schön (1992), ese proceso depende de las múltiples representaciones del profesor y de sus experiencias, sus valores, sus juicios y su historia de vida, pues cada individuo como sujeto único y constituido de la interrelación de todos estos elementos reaccionará de una forma diferente.

El profesor tiene que comprender con la reflexión en la acción cuales (Schön, 1992) son las representaciones figurativas del alumno, es decir, las relaciones que se establecen en la mayor proximidad posible con las experiencias cotidianas para ayudar en coordinación con las representaciones formales que es el saber escolar. Esa coordinación no debe tener como finalidad el cambio del figurativo al formal, sino asociar estas diferentes representaciones.

Ello solo ocurre si hay confusión, es decir, no se aprende sin estar confuso. Según Schön (1992), un profesor reflexivo tiene la tarea de encorajar y reconocer, y al mismo tiempo valorar la confusión del alumno. Más también tiene que encorajar y valorar su propia confusión, porque sin esa confusión no podrá reconocer el problema que necesita de respuesta. Para ese autor (1998, p. 72), "cuando alguien refleja en la acción se cambia en un investigador del contexto práctico. No depende de la teoría y de las técnicas establecidas, sino que constituye una nueva teoría de un caso único".

El otro momento de la reflexión y que ocurre fuera del aula es la reflexión sobre la acción, proceso que ocurre después de la acción y que permite el análisis de la toma de decisiones y actitudes que fueran llevadas a cabo en la clase.De acuerdo con Schön (1992, p. 83), “tras la clase, el profesor puede pensar en lo que pasó, en lo que observó, en el significado y en el sentido. Reflexionar sobre la acción es una acción, una observación y una descripción, que exige el uso de palabras”.

Esa afirmación es corroborada por Pérez Gómez (1992, p. 105) que destaca que “el profesional práctico, liberto de condicionamientos de la situación práctica, puede aplicar los instrumentos conceptuales y las estrategias de análisis en el sentido de comprender y de reconstruir su práctica”.

Esos dos momentos presentados por Schön – reflexión en la acción y reflexión sobre la acción – hacen parte de un ciclo de reflexión que debe ser constante en la práctica docente, es decir, están interrelacionados y no se puede pensar en solo uno de ellos. El profesor reflexiona en su acción en cuanto interviene en la situación de clase a partir de sus actitudes y de la toma de decisiones y, después reflexiona sobre esas acciones. Esa reflexión puede promover nuevas formas de actuar y también soluciones para los conflictos que serán incorporados a acciones futuras.

3. El ciclo de reflexión de Smyth: la enseñanza de la suma y resta de enteros

Con esta idea de profesor reflexivo, en un curso de un Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en España, dedicado al conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, hemos asistido a un taller de reflexión, utilizando el ciclo de reflexión de Smyth. Este ciclo de reflexión desarrollado por Smyth (1991) tiene como objetivo la reflexión sobre una situación de conflicto de la práctica del profesor y está estructurado en cuatro momentos como podemos ver en el modelo a seguir:

Figura 1. Ciclo de Reflexión. Fuente: Smyth (1991).

El primer momento se refiere a definición de la situación que se va a analizar y, para ello, hace falta la descripción clara del contexto, del sujeto a que afecta y de la acción, es decir, quién, qué y cuándo. En el taller de reflexión, buscamos una situación de nuestra práctica de profesores de matemática que nos preocupaba, que consideráramos un incidente crítico y del que pretendíamos desarrollar un análisis más sistemático. Al principio, describimos, individualmente, el contexto, el sujeto y la acción. Para comprobar que estaba claro el escrito, intercambiamos las situaciones entre los compañeros para que ellos pudieran cuestionar cada uno de los casos y a partir de los aspectos apuntados, buscamos definir de forma clara el problema. Coincidentemente, la situación propuesta por los dos primeros autores era la misma.

Así que comienza este ciclo de reflexión con el planteamiento del problema profesional. En el contexto del trabajo de aula con alumnos de 12 o 13 años se plantea la siguiente situación: "Los alumnos de este nivel educativo tienen dificultades para operar con números enteros, pese a que el profesor utiliza múltiples y variadas estrategias para el desarrollo y comprensión de dichas operaciones". Esto nos hace proponer la siguiente cuestión: **¿Cómo conseguir/ayudar que los alumnos entiendan suma y resta de números enteros?** Al intentar buscar soluciones para esa situación también nos preguntamos: ¿Qué nuevas estrategias debemos emplear para ayudar a los alumnos a superar estas dificultades? Como se puede apreciar, el sujeto afectado por el problema es el profesor.

Así que para Smyth (1991), la descripción de ejemplos concretos de prácticas de enseñanza hizo que los profesores que participaran de su proyecto empezaran a poner en duda algunas ideas de que hay leyes universales sobre lo que sea una buena enseñanza. De la misma forma, nosotros empezamos a reflexionar sobre la manera de enseñar las operaciones con los números enteros.

El momento siguiente se refiere a información, es decir, ¿Cuál es el sentido de mi enseñanza? Para Smyth (1991, p. 282), se refiere a "teorizar sobre nuestra enseñanza en el sentido de desgranar los procesos pedagógicos más amplios que se escondían tras determinadas acciones". Para ello, en otro encuentro de la asignatura, los compañeros tuvieron que indicarnos cuáles eran, a su juicio, las creencias nuestras que estaban en la base del problema percibido. Cuando los compañeros iban describiendo "lo que ellos creían que eran nuestras creencias", no era posible replicar sobre ellas, sino que debíamos reflexionar si realmente las suscribíamos, y, sobre todo, si éramos conscientes de ellas.

Destacamos que ese momento es muy importante en el proceso de reflexión, pues por una parte nos permiten comprender algunas de nuestras acciones en las que nunca habíamos pensado o el por qué las hacíamos de esa forma. Pero, por otra parte también es muy difícil para los profesores, pues algunas creencias destacadas por los compañeros nos dejan inquietos y queremos contestar, pues a principio nos parecen ideas que no hacen parte de lo que pensábamos sobre el aprendizaje de la suma e de la resta con números enteros.

Las creencias que los compañeros destacaran fueron: "*Yo creo que Juan Carlos y Reginaldo creen que:…*

Todo alumno puede comprender y aprender a sumar y restar enteros
Si los alumnos diferencian los signos de operaciones de los signos del número los sumarán/restarán bien
El problema está en operaciones con negativos, no en la compresión
Existe metodología concreta para todos los alumnos
Proporcionar reglas sencillas de operar negativos basta
Usar tipología de problemas basta aprender manejo de signos
Alumnos no sienten necesidad de operar con enteros

Tabla 1. Creencias sobre las operaciones con enteros

Basados en esas creencias, destacamos y nos identificamos con algunas de las anteriores por su carácter de mayor pertinencia a la situación. Además de reflexionar sobre las creencias con las que nos identificamos, también buscamos las razones para rechazar las otras.

Creencias	Justificación
Todo alumno puede comprender y aprender a sumar y restar enteros	No son contenidos difíciles. Todo alumno tiene capacidad intelectual para comprender la suma y la resta de enteros.
Si los alumnos diferencian los signos de operaciones de los signos del número los sumarán/restarán bien	En la práctica de enseñanza de enteros las dificultades y errores más recurrentes aparecen en la operatoria.
El problema está en operaciones con negativos, no en la compresión de los enteros	Los alumnos comprenden los números enteros, pues pueden resolver problemas simples. No diferencian los signos de las operaciones de los signos del número.
Existe metodología concreta para todos los alumnos	En la búsqueda de alternativas creemos valida esta afirmación debido a que es posible abordar este tópico a través de variadas representaciones.
Proporcionar reglas sencillas de operar negativos basta	Es importante que los alumnos sepan las reglas, pero no es lo suficiente.
Usar tipología de problemas basta aprender manejo de signos	Los problemas ayudan mucho la comprensión de los signos.
Alumnos no sienten necesidad de operar con enteros	Hay varias situaciones en el cotidiano que en se utiliza los enteros.

Tabla 2. Creencias justificaciones

Según Smyth (1991, p. 279), ese proceso permite “distanciarnos de los hechos y situaciones que tienen lugar en el aula, lo que puede ser difícil y complejo debido al calidoscopio de hechos que hacen difícil determinar el papel interactivo que desempeñamos en su desarrollo”. Pero, por otro lado, esa búsqueda de información para acordar o rechazar las creencias nos lleva a distanciarnos de cómo enseñábamos ese contenido matemático y permite que abramos nuestra mente para aceptar y comprender algunos aportes y aspectos que otros apuntan como razones por las cuales los estudiantes no operan bien con enteros.

Asimismo, de acuerdo con Smyth (1991, p. 283), la información permite “teorizar o descubrir las razones más profundas que justifican sus acciones” en determinada situación de su práctica profesional.

El próximo momento se refiere a confrontación en la que intentamos responder a la siguiente cuestión: ¿Cómo llegué a ser de este modo? Buscamos relacionar críticamente sobre los "supuestos que subyacen tras los métodos y practicas utilizados en el aula (Smyth, 1991, p. 285).

Según el autor, la confrontación nos permite mirar la enseñanza no solo como un conjunto aislado de procedimientos técnicos sino como aspectos que se van construyendo en base a nuestros valores y actitudes. Asimismo, "el escribir nuestra biografía y escribir los factores que parecen haber determinado la construcción de nuestros valores, nos permite discernir con mayor claridad las fuerzas sociales e institucionales que han influido en nosotros (Smyth, 1991, p. 285).

Ante la dificultad mencionada se realiza la confrontación mediante la revisión de la literatura y experiencias sugeridas en relación a los números enteros, su enseñanza, su aprendizaje, creencias y obstáculos subyacentes. En esa etapa, de cuestionamiento de prácticas y teorías implícitas, los compañeros dieron sugerencias para enfrentar la situación e indicaban libros, investigaciones y otros documentos que podrían ayudarnos. Entre las sugerencias de los compañeros, destacamos: enseñar las operaciones a partir de problemas; utilizar diferentes estrategias como las analogías; empezar la enseñanza con ejemplos más simples e ir avanzando hacia los más complejos.

En conjunto, lo más significativo en este sentido es profundizar en los siguientes temas:

- Aspectos históricos en relación a la enseñanza y aceptación de los enteros.
- Creencias y concepciones erróneas que generan dificultades de aprendizajes.
- Historia de los números enteros (González et al., 1989).
- Números enteros en la escuela (Alcalá, 2002).
- Vías de acceso a los enteros y su operatoria.
- Obstáculo y generalización del concepto de entero.
- Ruptura de las ideas previas de número (Natural).
- El tratamiento didáctico y el enfoque dado a los enteros en el aula.
- Currículo de Matemática de Secundaria (Orden 2220, 2007).

Finalmente, llegamos a la etapa de reconstrucción en la que se plantea la cuestión: ¿Cómo podría hacer las cosas de otro modo? De acuerdo con Smyth (1991), de modo general, somos llevados a aceptar sin cuestionarnos la manera como enseñamos y la relación que mantenemos con los alumnos, es decir, la rutina de trabajo nos ciega, no déjanos ver los factores que están imbricados en la acciones. Por eso, buscamos otras formas de enseñar la suma y la resta de números enteros a partir de las creencias y también basados en materiales disponibles, como los documentos oficiales, las investigaciones, propuestas de enseñanza y aprendizaje, para reconstruir nuestra práctica profesional.

En esta fase de planificación de las mejoras posibles, como consecuencia del análisis reflexivo de las fases anteriores se consideran cambios importantes como los siguientes:

- Adquisición de mayores antecedentes en relación, principalmente a los obstáculos y creencias.
- La consideración de la diversidad del grupo de alumnos como premisa en la práctica habitual de enseñanza.
- Priorizar la enseñanza indirecta, es decir, alternando trabajo individual y colectivo y favoreciendo la indagación y el descubrimiento.
- El convencimiento, que en muchas ocasiones, de que la operatoria con enteros no se llega por vía experimental.
- La confirmación de que muchas veces el contexto real se convierte en obstáculo.
- La existencia de recursos y modelos que median la adquisición de concepto ricos en significado y sentido para los alumnos: desplazamiento en la recta numérica (Alcalá, 2002); consideraciones de aspectos lógicos, concediéndole por ejemplo, al signo menos el significado de negación; fichas de colores.
- Relacionar la resolución de los problemas con la resolución de las operaciones sin contextos.

- Significado y usos de las operaciones con números enteros (Orden 2220, 2007): a comprensión de los significados y de los usos son fundamentales para que puedan sumar y restar con enteros.
- Identificación de situaciones en la vida real que puedan ser representadas con los números enteros y sus operaciones (Orden 2220, 2007). Uso de diferentes estrategias para que los alumnos aprendan: analogías, juegos, problemas, etc.
- Es bueno que los alumnos tengan las reglas de los signos memorizadas, pero lo más importante es que las comprendan.

A partir de los supuestos, estamos de acuerdo con la afirmación de Alcalá (2007, p. 94) de que “las operaciones con enteros no se llega por la vía experimental, pues no son reflejos de acciones reales o ficticias con objetos o cantidades”, por eso, los materiales son importantes, pero tienen insuficiencias.

Además, replanteamos la cuestión inicial basado en que la creencia de que *los alumnos no comprenden la suma y la resta de números enteros porque no diferencian los signos de las operaciones de los signos de los números.* Entonces, el nuevo cuestionamiento es: ¿Cómo ayudar los alumnos para que diferencien los signos de las operaciones de los signos de los números?

Así que el ciclo de reflexión es un proceso continuo en el que después de la reconstrucción hay una nueva definición del problema profesional y se empieza otra vez. Sin embargo, en este caso la reflexión terminó con la reconstrucción.

4. Conclusiones

Tuvimos como objetivo en este artículo discutir el proceso de reflexión sobre una situación de la práctica profesional llevado a cabo por los autores en el contexto de una asignatura del máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. La situación elegida se refiere a la enseñanza de la suma y de la resta de números enteros para los alumnos de 12 o 13 años.

La reflexión docente es discutida por diversos investigadores (Flores, 2007; Jaworski,1993; Pérez Gómez, 1992; Schön, 1992) debido a su importancia para la práctica profesional del profesor como forma de repensarla y cambiarla. Así que se hace fundamental proponer situaciones en las que los futuros profesores tengan experiencias de reflexión en la formación inicial para que cuando estén actuando también reflexionen sobre las situaciones de conflicto que enfrenten, principalmente, en lo que se refiere a la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos.

Asimismo, como evidenciado en el estudio realizado por Smyth (1991), los profesores en sus propios contextos, es decir, en sus centros o institutos deben reflexionar sobre situaciones problemáticas de su práctica como forma de tomar conciencia del porqué enseña de la forma como hace y de las consecuencias de ese hacer. En el ejemplo discutido en este artículo, verificamos que un mismo problema práctico preocupaba a los dos autores y eso puede pasar también con diferentes profesores del centro en el que enfrentan la misma situación y hay la posibilidad de que buscaren juntos estrategias y formas para solucionarla.

Para tanto, el modelo propuesto por ese mismo investigador compuesto por los momentos de descripción, información, confrontación y reconstrucción tiene grandes potencialidades para llevar el docente a reflexionar, pues demuestra que los profesores “pueden utilizar sus propias capacidades para formular e implementar programas de cambio” (Smyth, 1991, p. 293). De acuerdo con Smyth (1991, p. 293), hace falta “develar la relación que existe entre nuestras ideas y nuestras acciones” y ese proceso no es fácil, porque el profesor tiene que buscar explicaciones y justificaciones para sus acciones y puede depararse con creencias implícitas que para él no forma parte de su sistema de creencias que subyacen su enseñanza en el aula.

Además, en ese proceso fue muy importante la participación de los compañeros indicando posibles creencias que influenciaban el problema práctico, pues fueran ellos que proyectaron las reflexiones realizadas.

Bibliografía

Alcalá, M. (2002). Los números enteros en la escuela. Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *Revista PNA*, 1(4), 139-158.

González, J., Ortiz, A., Sanz, E., Ortiz, A. (1989). *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

Jaworski, B. (1993). The Professional Development of Teachers: The Potential of Critical Reflection. *British Journal of In-Service Education*, 19(3), 37-42.

Orden ECI/2220 de 12 de julio de 2007. (2007). Por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. España. 2007. Recuperado el 05 de febrero 2012, de http://www.boe.es/boe/dias/2007/07/21/ pdfs/A31680-31828.pdf.

Pérez-Gómez, A. (1992). O pensamento prático do professor. En A. Nóvoa (Org.). *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Dom Quixote.

Schön, D. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. En A. Nóvoa (Org.). *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Dom Quixote.

Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista Educación*, 294, 275-300.

Juan Carlos Ñancupil Poblete: Profesor de Educación General Básica Mención Matemáticas y Estudiante de Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Becario de Máster para profesionales de la Educación del Gobierno de Chile (Conicyt). E-mail: **juancarlosa37@gmail.com**

Reginaldo Fernando Carneiro: Licenciado en Matemática y Doctor en Educación en la Universidad Federal de São Carlos, Brasil. Línea de investigación: Enseñanza de Ciencias y Matemática. Becario de Doctorado en el Exterior de la Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior del Ministerio de la Educación, Brasil – Proceso: 8866/11-2. E-mail: **reginaldo_carneiro@yahoo.com.br**

Pablo Flores Martínez: Doctor en Matemáticas, Profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España. Línea de investigación: Desarrollo y Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas. Autor de numerosos artículos, libros y capítulos de libros sobre recursos para la educación matemática y la formación de profesores de matemáticas, basados preferentemente en aspectos manipulativos y lúdicos. E-mail: **pflores@ugr.es**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 47-67

Materiais Curriculares Educativos sobre Modelagem Matemática e a recontextualização pedagógica operada por professores iniciantes

Maiana Santana da Silva; Jonei Cerqueira Barbosa;
Andréia Maria Pereira de Oliveira

Fecha de recepción: 15/11/12
Fecha de aceptación: 12/04/2013

Resumen	Nuestro objetivo fue analizar recontextualización de los materiales curriculares educativos sobre la modelación matemática, desarrollada por profesores principiantes, en las prácticas pedagógicas. Estos serán analizados a partir de los presupuestos teóricos de Basil Bernstein. Los datos referidos a la investigación cualitativa, fueron recolectados a través de la observación, entrevistas y análisis documental en dos contextos: Los resultados mostraron cuatro principios usados por los profesores al hacer uso de materiales curriculares educativos: *Interés y participación de los estudiantes; Contenido de la malla curricular; La estructura del material curricular y Las relaciones entre los sujetos y la práctica pedagógica.* Estos refieren a las decisiones de los profesores al implementar la modelación **Palabras clave**: materiales curriculares educativos, modelización matemática.
Abstract	In this paper, our aim was to analyze the recontextualization of educational curriculum materials on mathematical modelling operated by beginning teachers into pedagogic practices. We use concepts from the theory of Basil Bernstein. Qualitative data were collected through observation interviews and documents in two contexts. The results point out four guiding principles for teachers to address texts from educational curriculum materials on mathematical modelling: *students' interest and involvement, the curriculum contents, the structure of curriculum materials and the relationship between subjects in the classroom*. These principles base teachers' decisions to implement the modelling. **Keywords**: educational curriculum materials, mathematical modelling.
Resumo	Neste artigo, nosso objetivo foi analisar a recontextualização de materiais curriculares educativos sobre modelagem matemática operada por professores iniciantes nas práticas pedagógicas. Para analisar tal propósito, utilizamos conceitos da teoria de Basil Bernstein. Os dados referentes à pesquisa qualitativa foram coletados por meio da observação, entrevistas e analise documental em dois contextos: Os resultados apontaram quatro princípios que orientaram os professores no deslocamento dos textos dos materiais curriculares educativos sobre modelagem matemática: o *interesse e o envolvimento dos estudantes*; o *conteúdo da grade curricular*; a *estrutura do material curricular* e a *relação entre sujeitos na prática pedagógica*. Esses princípios referem-se às decisões dos professores ao implementarem o ambiente de modelagem **Palavras-chave**: materiais curriculares educativos, modelagem matemática..

1. Introdução

As discussões sobre modelagem matemática[1] têm sido crescentes na comunidade de educação matemática como uma possibilidade de gerar investigações de problemas com referência na realidade na sala de aula de matemática (Barbosa, 2007; Oliveira, 2007; Cargnin-Stieler; Bisognin, 2011). Por modelagem, compreendemos como um ambiente de aprendizagem, no qual os estudantes são convidados a investigar, utilizando a matemática, situações com referência na realidade (Barbosa, 2007). Em vista disso, argumentamos que, ao trabalhar com modelagem, os estudantes são desafiados a assumirem uma postura crítica e participativa com vistas ao exercício da cidadania (Barbosa, 2007). A expressão “ambiente de aprendizagem” é utilizada por Skovsmose (2000) para se referir às condições proporcionadas aos estudantes para desenvolverem suas ações.

No entanto, os professores podem apresentar resistências em trabalhar com a modelagem, apresentando tensões e/ou dificuldades ao tentar inserir tal ambiente na prática pedagógica em que participa (Ikeda, 2007; Oliveira, 2010). Por prática pedagógica, entendemos, no âmbito do contexto escolar, como o *lócus* onde ocorrem as relações entre professor e estudantes para ensinar e aprender determinados conteúdos (Oliveira, 2010). Ikeda (2007), por exemplo, ao investigar sobre a inserção da modelagem no contexto escolar em oito países, destacou a falta de materiais adequados e tarefas de modelagem compatíveis com os programas curriculares. Por tarefa, entendemos como o que é dado ou falado para o (a) estudante fazer/abordar. A tarefa de modelagem deve ser um problema para os estudantes e tem que ser extraída do dia-a-dia, de outras ciências (Barbosa, 2007) ou de áreas profissionais que não a matemática.

Em vista disso, buscamos, no presente estudo, focalizar o que é convencionalmente denominado como *materiais curriculares educativos* (MCE), em particular, sobre um tipo específico de materiais, aqueles que nomearemos como *materiais curriculares educativos sobre modelagem matemática* (MCEMM). Por MCEMM, assumimos como uma possibilidade de apoiar os professores na implementação do ambiente de modelagem em sala de aula. Por sua vez, os MCE são compreendidos como aqueles materiais que visam promover tanto a aprendizagem dos estudantes quanto a aprendizagem do professor (Scheneider; Krajcik, 2002; Davis; Krajcik, 2005). Não iremos discutir amplamente a expressão “aprendizagem do professor”, mas, apenas, remeter ao entendimento posto por Borko (2004) em termos de mudanças nos padrões de participação do professor na prática pedagógica.

Os *materiais curriculares* (MC) são diferentes dos MCE, pois os MC apresentam, mais visivelmente, apoio para a aprendizagem dos estudantes, mas não para a aprendizagem do professor (Davis; Krajcik, 2005). Frente a isso, os MCE precisam apresentar elementos que venham a subsidiar o fazer dos professores, que os possibilitem vislumbrar como pode ser usado determinado MC na sala de aula. Os MCE podem, por exemplo, apresentar descrições da implementação de uma tarefa, narrativas, solução dos estudantes, dentre outros aspectos (Scheneider;

---

[1] Por vezes, para evitar repetições, utilizaremos o termo *modelagem* para nos referirmos à modelagem matemática.

Krajcik, 2002). Assim, denominamos como *material curricular de modelagem* (MCMM) a uma tarefa a ser usada no ambiente de modelagem. No entanto, se juntarmos a ele elementos que retratam as experiências de um professor utilizando-o em sala de aula, denominamos material curricular educativo sobre modelagem matemática (MCEMM).

Os estudos de Costa e Oliveira (2011) e Silva, Barbosa e Oliveira (2011, 2012) abordam os MCEMM, e apresentam evidências de que eles podem apoiar o contato de professores iniciantes com a modelagem. Por professores iniciantes[2], entendemos como aqueles professores com até três anos de docência (Huberman, 1997). Estudos dão evidências de que professores iniciantes podem fazer um uso específico dos MCEMM (Costa; Oliveira, 2011; Silva, Barbosa; Oliveira, 2011, 2012).

Diante disso, estamos interessados, no presente estudo, em analisar o contato de professores iniciantes com MCEMM. Particularmente, o que acontece quando ele move os MCEMM para a prática pedagógica. Mais adiante, re-apresentaremos o objetivo do presente estudo, após circunstanciamos ele na literatura e na perspectiva teórica definida para a pesquisa.

2. Referencial Teórico

Os estudos de Costa e Oliveira (2011) e Silva, Barbosa e Oliveira (2011, 2012) sugerem que professores iniciantes, ao moverem textos dos MCE para as práticas pedagógicas, operaram um processo de seleção e organização sobre *o que* e *como* mover em termos dos textos que já circulam na prática pedagógica que eles participam. Segundo Bernstein (1990), o *texto* refere-se a qualquer representação pedagógica, falada, escrita, visual, espacial ou expressa na postura, portanto, de natureza comunicativa. O teórico argumenta que o texto ultrapassa a sua expressão material, podendo nos oferecer indicações da prática pedagógica dominante que o produz. Nas palavras de Bernstein (1990, p. 17), trata-se da "forma da relação social feita visível, palpável, material".

Para analisar os princípios de comunicação na prática pedagógica em um contexto social, Bernstein (2000) utiliza dois conceitos: classificação e enquadramento. O termo *classificação* é utilizado para se referir às relações *entre* categorias, como exemplo, entre textos (por exemplo, diferentes disciplinas) e entre sujeitos (por exemplo, estudantes e professores). A classificação refere-se ao conteúdo da comunição, ou seja, *o que pode ser dito* na comunicação entre eles. Com isso, se *o que pode ser dito* pelo professor e estudantes está mais controlado, temos uma classificação mais forte. Por outro lado, se *o que pode ser dito* está menos controlado, gerando possibilidades para que outros textos sejam trazidos para sala de aula, tem-se então uma classificação mais fraca. O parâmetro para estabelecer se o controle é maior ou menor é situacional, ou seja, a referencia é sobre o que é historicamente cristalizado em determinada prática pedagógica.

O termo *enquadramento*, por sua vez, refere-se às relações *dentro* das categorias, sendo utilizado para designar o controle sobre as regras de comunicação, representando o *como pode ser dito*. Assim, se há um controle explícito sobre a seleção, sequenciamento (a ordem das ações na prática

[2] No corpo do texto, quando utilizarmos professores sem o adjetivo "iniciantes", estamos nos referindo aos professores com mais de três anos de docência.

pedagógica), compassamento (o ritmo esperado para aquisição de conteúdos) e critérios da comunicação, para produção do texto legítimo no contexto social, temos um enquadramento mais forte; e mais fraco, quando há um menor controle sobre a forma comunicativa na prática pedagógica. O *texto legítimo* é compreendido como aquele reconhecido como apropriado para um contexto particular (Bernstein, 2000).

Como os MCE representam uma prática pedagógica, é possível identificarmos neles indícios sobre a classificação e o enquadramento. De certa forma, os professores, ao tomarem contato com os MCE, poderão reconhecer como o controle foi operado naquela prática pedagógica relatada. Assim, consideramos os MCE como um texto, o qual pode ser movido, por recontextualização pedagógica, para salas de aula. Bernstein (1990, 2000) utiliza esse termo *recontextualização pedagógica* para se referir ao processo em que textos são movidos de uma posição para outra. Nesse processo, esse teórico aponta que, ao movê-lo do seu contexto original para outro contexto, o texto original é abstraído da sua base social, posição e relações de poder (e, portanto, transformado), para ser posicionado em outra situação social e suas relações de poder.

Luna, Barbosa e Morgan (2011) apresentaram um caso em que os professores em serviço tiveram contato com a modelagem matemática em um curso de formação continuada. Nesse estudo, os autores observaram que os professores, ao operarem o deslocamento dos textos veiculados no curso de formação para sala de aula, estabeleceram regras do que deveria ser considerado como texto legítimo na prática pedagógica em que participavam e como esse texto poderia ser dito. Este estudo dá evidências do papel preponderante das regras que já operam no contexto escolar sobre o processo de recontextualização pedagógica.

Diante disso, no processo de recontextualização, os MCE, ao serem utilizados pelos professores, ou seja, levados para prática pedagógica, não serão mais os mesmos que tiveram contato, pois há um princípio que age selecionando, relocando e direcionando os textos nos materiais para os textos que já circulam na prática pedagógica. Esse princípio é denominado por Bernstein (2000) de *discurso pedagógico*. Segundo esse teórico, o discurso pedagógico é um princípio para apropriar outros textos e colocá-los em uma relação mútua entre si na prática pedagógica para construir sua própria ordem. Assim, como dito na teoria e ilustrado nos estudos citados anteriormente, podemos assumir que há diferentes discursos pedagógicos operando em diferentes contextos (Costa; Oliveira, 2011; Silva, Barbosa; Oliveira, 2011, 2012).

No estudo de Silva, Barbosa e Oliveira (2011), por exemplo, um professor iniciante adotou o MC da maneira que foi disponibilizado no MCE, mas, ao mover para sala de aula, ele adotou um sequenciamento e compassamento diferente do registrado nele, ou seja, ele agiu de acordo com as regras já presentes na prática pedagógica em que participava. Também Kieran, Tanguay e Solares (2012), ao observarem como professores interagem com MC, apontaram que esses são moldados pela prática a qual o professor participa, e que professores fazem, usando os termos dos autores, diversas adaptações, até quando utilizam os mesmos recursos, eles utilizam de formas distintas para diferentes turmas. Esses materiais curriculares eram compostos pela versão do professor e versão do estudante. A versão do professor continha todas as questões abordadas na tarefa do estudante, mais alguns detalhes, por exemplo, um possível conteúdo matemático a ser explorado, além de exemplos que ilustram como pode ser trabalhado. Em uma perspectiva bernsteiniana, podemos assumir que os professores moveram os materiais, por recontextualização, para sala de aula. Com isso, eles agiram selecionando, relocando e direcionando textos para justapor àqueles que já circulavam na prática pedagógica.

Para entender o deslocamento de textos entre contextos com diferentes funções, Bernstein (2000) identificou três campos. O primeiro é o *campo de produção*, o qual envolve a produção de novos conhecimentos científicos e teorias. O segundo é o *campo de recontextualização* que envolve a apropriação do texto do campo de produção e a transformação em texto pedagógico. É nesse campo que os MCE são produzidos, pois os elaboradores movem textos do campo de produção para o campo de recontextualização com o propósito de caracterizar e apoiar a implementação de algum ambiente de aprendizagem e/ou conteúdo na prática pedagógica. Por fim, temos o *campo de reprodução,* que diz respeito a como ocorre à prática pedagógica escolar, nas quais os textos são recontextualizados. Nesse campo, pode ocorrer a utilização pelo professor do MCE. Assim, os MCEMM são movidos do campo de recontextualização, onde são produzidos, para a prática pedagógica por agentes recontextualizadores, no caso, os professores.

A partir dos conceitos apresentados, reescrevemos nosso objetivo nos seguintes termos: *compreender como professores iniciantes operam a recontextualização pedagógica de materiais curriculares educativos sobre modelagem matemática nas práticas pedagógicas*. O presente estudo pode trazer contribuições para área da Educação Matemática, em particular, no que se refere a aspectos da prática pedagógica escolar, quando os professores decidem levar textos presentes nos materiais para sala de aula. Além disso, compreender o modo como professores iniciantes operam a recontextualização pedagógica de MCEMM, trará elementos para potencializar a produção de MCE. Frente ao objetivo proposto, foi primordial a coleta de dados junto a professores iniciantes que utilizaram os MCEMM. Assim, apresentamos na próxima seção os contextos em que os dados foram coletados.

3. Contexto

Os participantes da pesquisa foram dois professores iniciantes, *Hugo* e *Erik*, nomeados com pseudônimos[3] escolhidos por eles, que implementaram o ambiente de modelagem em sala de aula a partir do contato com MCEMM. Hugo, no período da coleta de dados, tinha um ano e três meses de docência e desenvolveu o ambiente de modelagem em uma turma de 9º ano do ensino fundamental (no sistema brasileiro, refere-se aos estudantes com idade esperada de 14 anos) durante duas aulas consecutivas de cinquenta minutos cada. Erik tinha três meses de docência e desenvolveu o ambiente de modelagem em uma turma do programa intitulado *Mais Educação*, referente ao 8º e 9º anos do ensino fundamental (no sistema brasileiro, refere-se aos estudantes com idades esperada de 13 e 14 anos, respectivamente), durante duas aulas consecutivas de cinquenta minutos cada. O *Mais Educação* é um programa do governo brasileiro, criado pela Portaria Interministerial nº 17/2007, que visa aumentar a oferta educativa nas escolas públicas por meio de atividades optativas (Brasil, 2007).

[3] Os (as) estudantes também estão nomeados (as) com pseudôminos para preservar a identidade deles (as).

Ambos os contextos estavam localizados na cidade de Feira de Santana, no nordeste do Brasil. Essa escolha de diferentes contextos deve-se ao fato de que eles podem revelar diferentes processos de recontextualização operados pelos professores. Nesse período, Hugo e Erik estavam ainda cursando uma disciplina da graduação intitulada Instrumentalização para o Ensino da Matemática VIII (INEM VIII), em uma universidade pública, no curso de Licenciatura em Matemática, o qual abordava o tema modelagem matemática. Apesar de estarem cursando a graduação em Licenciatura em Matemática, não os consideramos como futuros professores, mas como professores iniciantes, conforme definição adota neste estudo, por já estarem atuando como professores por menos de três anos.

Nessa disciplina, os participantes da pesquisa tiveram contato com MCEMM, disponibilizados em um *website* denominado *Colaboração ONLINE em Modelagem Matemática*[4] (COMMa). A professora da disciplina apresentou os MCEMM aos estudantes e solicitou que eles escolhessem um deles, dentre os disponíveis no *website*, para desenvolver o ambiente de modelagem em sala de aula. A professora, ao verificar que, na turma, existiam estudantes que já lecionavam, estabeleceu que eles trabalhassem em duplas e que em cada uma delas tivesse pelo menos um dos estudantes que já lecionava. Assim, Hugo desenvolveu o ambiente de modelagem juntamente com a colega Adriana; e Erik, com a colega Lisian.

Os MCE, mencionados neste estudo, são compostos por um MCMM; um planejamento; uma narrativa de um professor que já implementou o MCMM em sala de aula, descrevendo sua experiência; uma possível solução feita pelo professor; registros das respostas dos estudantes e vídeos mostrando alguns momentos da experiência do professor em sala de aula; e, por fim, um fórum de discussão, no qual os usuários cadastrados no *website* podem fazer perguntas e/ou relatar suas experiências.

No período da coleta de dados, tinha disponível no *website* quatro MCEMM, com os seguintes temas: alimentação, trabalho infantil, água e programa habitacional Minha Casa Minha Vida[5]. Dentre esses, focamos, neste estudo, nos MCEMM com os temas alimentação, escolhido por Hugo, e do programa habitacional, escolhido por Erik.

O MCMM presente no material sobre alimentação apresenta um texto informativo sobre a importância da alimentação saudável, tabelas que indicam a quantidade de calorias indicada pela agência brasileira de regulação sanitária como ideal para ser consumida diariamente, de acordo com o grupo alimentício e relacionado com o sexo, idade, peso e altura. Por fim, apresenta as seguintes questões:

1. *Faça uma lista da sua alimentação do dia anterior*.
2. *Organize os alimentos em grupos de acordo com a tabela*.
3. *Calcule as calorias por grupo, por meio da tabela de calorias em anexo*.
4. *Compare sua alimentação com a indicada*.

[4] Home: www.uefs.br/comma
[5] O programa habitacional “Minha Casa, Minha Vida”, lançado pelo governo brasileiro em março de 2009, prevê investimentos de R$ 34 bilhões para a construção de 1 milhão de moradias para famílias com renda de até 10 salários mínimos, em parceria com estados, municípios e iniciativa privada.

Para tanto, segundo o MCEMM, foi entregue aos estudantes uma tabela elaborada por nutricionistas que indicava a quantidade de calorias presentes em alguns alimentos.
No MCMM sobre o programa habitacional, há um texto informativo sobre o programa "Minha casa, minha vida", um gráfico que ilustra, em porcentagem, a distribuição das moradias para as faixas salariais, uma tabela indicando a quantidade de moradias por faixa salarial, e as seguintes questões são abordadas:

1. *Qual será o valor mensal das prestações a serem pagas pelo beneficiário em relação ao seu salário?*
2. *Com base na figura 1 e dando preferência aos cidadãos com menor renda, como poderiam ser distribuídas as moradias?*

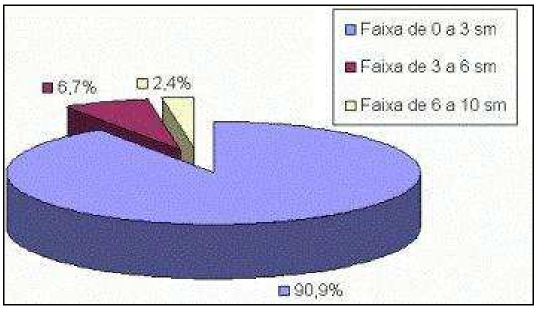


Figura 1: "Figura 1" presente no MCMM sobre o programa habitacional

4. Procedimentos

A pesquisa foi de natureza qualitativa (Denzin; Lincoln, 2005), pois a intenção foi analisar a recontextualização de MCEMM operada por professores iniciantes nas práticas pedagógicas. Denzin e Lincoln (2005) apontam que pesquisadores qualitativos estudam o fenômeno no *lócus* natural, buscando compreendê-lo em termos dos significados que as pessoas atribuem para eles. Em vista disso, a primeira autora observou os professores iniciantes durante as aulas em que implementaram o ambiente de modelagem a partir do contato com os MCEMM, e durante as aulas da graduação quando discutiram sobre o uso dos materiais, sendo a observação operacionalizada por uma filmadora. Além disso, foram feitas entrevistas para compreender aspectos da observação, nas quais a filmadora foi utilizada apenas para capturar o áudio.

A observação foi de natureza não estruturada, pois os comportamentos observados não foram predeterminados, mas observados e relatados da maneira como ocorreram pela pesquisadora encarregada para realizar a coleta de dados (Alves-Mazzotti, 1998). Ela aconteceu nos momentos em que os professores estavam no ambiente natural, no caso, nas salas de aula.

A entrevista teve como propósito capturar, por meio dos textos dos professores, as explicações para o modo como eles operaram a recontextualização dos MCE nas práticas pedagógicas. Para tanto, foi organizado um roteiro, podendo a pesquisadora elaborar outras questões não previstas inicialmente. Essa estratégia está em consonância com o entendimento de Fontana e Frey (2005), os quais concebem a entrevista como um texto negociado, construído tanto pelo entrevistado, como também pelo entrevistador e configurado pelo contexto e pela situação em que a entrevista ocorre.

Como focamos na recontextualização dos MCEMM operada pelos professores iniciantes, fez-se necessário analisar elementos presentes nos MCEMM, a saber, as narrativas, os vídeos, entre outros. Segundo Alves-Mazzotti (1998), é considerado documento qualquer registro escrito que possa ser usado como fonte de informação, os quais podem ser a única fonte de dados ou pode ser combinado com outras técnicas.

A análise dos dados foi inspirada em procedimentos analíticos da *Grounded Theory* (Charmaz, 2006), o que não significa nosso comprometimento paradigmático com ela. Foi feita uma leitura linha a linha das transcrições das observações e entrevistas, uma descrição destas, sendo organizadas em trechos, a fim de auxiliar na compreensão do objeto de estudo, para discuti-los à luz da revisão da literatura e da teoria.

5. Apresentação dos dados

Nesta seção, os recortes dos dados apresentados referem-se aos textos dos professores Hugo e Erik e dos estudantes da turma deles, durante o desenvolvimento do ambiente de modelagem, e dos textos dos professores nas entrevistas. Para discutir o objetivo do artigo, primeiro apresentamos os dados do professor Hugo, e, em seguida, os dados do professor Erik. Em alguns momentos, para facilitar o processo de localização, quando apresentamos trechos da observação da aula do professor Hugo, os textos foram numerados e identificados com [Hxy], sendo o “xy” referente à numeração do texto produzido por ele.

5.1. Professor Hugo

O tema do material escolhido por Hugo foi *alimentação*. Essa escolha teve relação com o contexto social da turma e com o conteúdo que tinha sido trabalhado com os estudantes, como foi explicado por Hugo:

> “Como eu conheço a turma assim, então eles... Acho que seria um tema interessante pra eles, acho que eles se identificariam bastante e seria algo que eu podia trabalhar o conteúdo que eu já estou trabalhando com eles que é razão e proporção” (OBSERVAÇÃO).

Hugo apontou que a seleção do material atendeu a um ordenamento já em andamento na prática pedagógica que participa, isto é, deu continuidade a abordagem do conteúdo que havia sido apresentado aos estudantes.

No desenvolvimento do ambiente de modelagem, identificamos o seguinte sequenciamento adotado por Hugo: apresentação e questionamento sobre um vídeo; entrega da tarefa; leitura da tarefa; organização dos estudantes em grupos e orientação da tarefa; acompanhamento da resolução da tarefa; e socialização das respostas.

Na apresentação do tema, Hugo exibiu um vídeo sobre a importância da alimentação saudável, conservação e higiene dos alimentos. Esse vídeo utilizado por Hugo não fazia parte do material disponível no *website*, sendo um recurso que ele acrescentou “para que houvesse discussão”, uma vez que o “vídeo já fazia alusões a alguma coisa que tinha no material” (Entrevista). Neste momento, Hugo buscou envolver os estudantes na discussão sobre o tema a partir das informações apresentadas no vídeo, o qual informou que “sempre estava se remetendo àquilo que passou no vídeo, para não deixar como um recurso isolado” (Entrevista). Assim, ao levar um vídeo para sala de aula, Hugo fez relação com outra experiência realizada na prática pedagógica: “Sim, de experiências em sala de aula. Já levei sim quando fui trabalhar com eles notação científica. Eu levei um vídeo sobre formação da terra, e tal. Então, foi de outras experiências” (Entrevista).

Em continuidade ao desenvolvimento do ambiente de modelagem, após a discussão acerca do vídeo, foi entregue aos estudantes a tarefa impressa. Essa tarefa, disponível no *website* do COMMa, continha uma situação-problema a ser abordada, a qual foi adotada pelo professor sem fazer alterações. Hugo justificou que “não viu necessidade de mudança”, pois o MC “se adaptava direitinho” (Entrevista) ao conteúdo matemático que tinha sido abordado em sala de aula.

Após a entrega da tarefa, foi feita a leitura dela. Nesse momento, Hugo buscou envolver os estudantes na leitura, para que eles ficassem atentos às informações presentes na tarefa, sendo uma justificativa similar à registrada no material. Porém, ao questioná-lo sobre este momento, ele não relacionou ao material, mas a “[algo] pessoal para poder ajudar os meninos [estudantes], para eles se envolverem” (Entrevista). Ele informou que teve inspirações em suas ações anteriores:

> “A minha didática, a minha forma de trabalhar, é desse jeito, entendeu? Todas as vezes que vou fazer, quando eles mesmos não fazem, quando eu tiver fazendo a leitura, eu farei de uma forma, para que não fique aquela leitura quadrada, ler aquilo e acabou, mas fazer uma leitura para envolver eles naquilo que a gente está fazendo” (Entrevista).

Ao dar prosseguimento ao desenvolvimento do ambiente de modelagem, Hugo organizou os estudantes em grupo e os orientou que deveriam apresentar respostas individuais. Ele explicou que “foi sugestão da atividade do COMMa, foi aquilo que a atividade sugeriu” (ENTREVISTA), e complementou:

> “Além de ver lá [no website do COMMa], a gente queria saber de cada pessoa, porque a formação dos grupos era mesmo para ajudar realmente nos cálculos, não era para que você desse um percentual calórico do que cada um consumiu do grupo, era do individual, porque cada pessoa tem um hábito alimentar diferente, então por essa diferença dos hábitos alimentares cada pessoa teria que dar a sua resposta” (ENTREVISTA).

Assim, ele justificou ter organizado os estudantes dessa forma devido ao contato com o material, e salientou que, além do contato com o material, a sua opção em solicitar respostas individuais teve relação ao que a tarefa solicitava, para que os estudantes se auxiliassem nos cálculos.

Durante o acompanhamento da resolução da tarefa, identificamos momentos em que Hugo mostrou preocupação em delimitar cada passo a ser desenvolvido pelos estudantes durante a resolução da tarefa. Ou seja, ele demarcou o momento em que os estudantes deveriam responder cada questão proposta na tarefa. Os trechos a seguir ilustram isso:

[H01] Hugo: Na hora que a gente estava falando sobre os conjuntos numéricos e tal, uma aluna falou: “eu não lembro nem o que eu comi ontem”. Aí, eu falei: Não, você vai ter que lembrar. Eu falei isso, porque, para esse primeiro momento, a primeira coisa que eu vou pedir para vocês fazerem é que vocês façam uma lista daquilo que vocês comeram ontem. Certo?

[...]

[H02] Hugo: Agora, vocês já completaram o que comeram no dia de ontem, não é? Aí, agora, o que é que vocês vão fazer? Vocês vão separar os alimentos, olhando isso aqui oh (aponta para o texto) pelos grupos. Aí, eu vou botar assim, grupo 1, o que é que foi que eu comi ontem? Ah, eu comi arroz e macarrão. Grupo 2, o que é que foi que eu comi? Ah, eu comi é.... Alface e tomate, certo? E eu quero que vocês coloquem a quantidade também. Do mesmo jeito que vocês fizeram.

[...]

[H03] Hugo: Pronto. A gente já acabou agora. Já dividiu por grupo. Já sabe o que a gente comeu em cada grupo e agora Adriana vai entregar para vocês uma tabelinha, pois agora é que vai precisar dos nossos conhecimentos matemáticos para resolver. Por quê? Nessa tabelinha que vocês estão recebendo, aí agora, tem a quantidade de cada coisa, a caloria de cada coisa, pequenas quantidades, por exemplo, aí em baixo, quase lá em baixo (Observação).

Em [H01], Hugo referiu-se à primeira questão proposta na tarefa, assim como em [H02], à segunda questão e em [H03] à terceira questão. Assim, observamos que Hugo delimitou cada passo a ser realizado pelos estudantes no ambiente de modelagem, apesar dos estudantes estarem com a situação-problema impressa. Ele relatou o motivo de ter conduzido assim a aula e apontou em que se inspirou:

> "Por causa das minhas experiências também. Porque a gente precisa planejar aquilo que a gente vai dar na aula, não é? Se a gente vai dar tantas questões na aula, e eu perder tempo demais na primeira questão. E as outras? Vai ficar aonde? Vai jogar para próxima aula? Então, vai ser uma bola de neve, não é? Vai está sempre atrasando os conteúdos futuros. Então, por causa das minhas experiências, daquilo que eu já vivenciei. Então, realmente, tenho que está dosando, até mesmo para forçar que eles se empenhem a fazer a atividade. Porque se eu deixar eles a vontade, do jeito que quiserem, possa ser que eles emperrem. Por motivo de conversa, dispersos de alguma forma e deixem de fazer alguma coisa, pulem etapas. Então, mesmo para forçar eles a fazerem a atividade, para controlar o tempo também. Foi por experiência minha mesmo, que eu trabalho desse jeito assim" (Entrevista).

Hugo ressaltou que sua postura em sala de aula, em delimitar cada passo para os estudantes desenvolverem o ambiente de modelagem, está relacionada ao que ele faz comumente na prática pedagógica. Hugo também demonstrou preocupação em desenvolver a MC no tempo previsto (duas aulas), para que não atrasasse a programação feita por ele, sinalizando assim, preocupação com o cumprimento do conteúdo e com o entendimento dos estudantes sobre a tarefa de modelagem para que pudessem realizá-la.

Dando continuidade à discussão do trecho apresentado anteriormente, Hugo apresentou um exemplo de como os estudantes deveriam resolver a terceira questão proposta na tarefa:

[H04] Hugo: A aluna Ana disse que comeu um chocolate em barra, uma barra de chocolate inteira. Está aqui... Um tablete é 163 calorias, mas a aluna não comeu apenas um tablete. A barra tinha quantos tabletes Ana?
[H05] Ana: 2.
[H06] Adriana: Dois? Impossível.
[H07] Hugo: Dois tabletes só?
[H08] Ana: Aquela barra da pequena assim [mostra com a mão].
[H09] Hugo: Comeu duas da pequena. Então, foi quanto?
[H10] Hugo: Então foram dois tabletes, porque foi daquela menor.
[H11] Ana: Foi.
[H12] Hugo: Então você comeu dois tabletes. Certo? Ah, então agora a gente vai fazer o quê? Aquilo que eu estava falando para vocês semana passada e ontem. A gente vai fazer a chamada regra de ...
[H13] Amada: Três (Observação).

Hugo explicou o que os estudantes deveriam fazer na terceira questão e utilizou, para exemplificar, uma informação dada por um dos estudantes. Apesar de existir outras formas de resolução, Hugo, em [H12], sinalizou o conteúdo matemático que seria utilizado pelos estudantes. Observemos a explicação de Hugo sobre isso:

> "A gente estava trabalhando teorema de Tales, razão e proporção [em paralelo]. Aí, eu falei sobre regra de três. Como eu tinha dito isso, para a gente não chegar aqui e pegar uma atividade do nada e jogar para eles. Então, eu quis fazer um *link* com aquilo que a gente estava estudando. Se a gente estava estudando sobre isso, então, eu preferi utilizar esta estratégia para que eles pudessem resolver a atividade" (Entrevista).

Hugo apontou o uso da regra de três por ser um conteúdo trabalhado com os estudantes. No último momento que apontamos, no sequenciamento adotado por Hugo, a socialização das respostas, sua estratégia foi diferente da registrada no material. Nesse, a saber, a professora registrou na lousa um gráfico por meio de uma semirreta paralela ao eixo Ox, a quantidade de calorias indicada pela ANVISA como ideal para o consumo diário e solicitou que os estudantes indicassem o seu resultado no gráfico que tinha esboçado. Ao identificarmos que ele também teve o momento da socialização dos resultados, perguntamos em que ele se inspirou, o qual apontou:

> "Não. Para ser sincero, eu não assisti ao vídeo. [...] Sempre eu faço, porque eu gosto que os alunos participem. Como eu falei, eles são participantes da aula, eles não são meras peças, eles são participantes. Então, independente se for uma atividade de modelagem ou não, se for de matemática pura ou não, eu gosto que eles estejam mostrando o que eles fizeram. Como eles encontraram, como eles chegaram" (Entrevista).

No trecho anterior, Hugo relatou mais uma vez ter tido inspiração na prática pedagógica que ele participa. Além disso, apontou que não assistiu ao vídeo disponível no material, ou seja, ele apontou que não olhou todo o material, como esperado, talvez, pelos elaboradores.

5.2. Professor Erik

O tema do material escolhido por Erik foi o *programa habitacional* intitulado "Minha Casa, Minha Vida". A escolha do tema teve relação com o contexto social da turma como relatado por Erik:

> "De início eu fiz a leitura do primeiro tema que é trabalho infantil. Porém, assim que eu fiz a leitura da introdução do trabalho e depois fiz a leitura também da introdução do "Minha Casa, Minha Vida" e percebi que ela tem mais um quê de contextualização nas vidas dos alunos. Porque a maioria do pessoal investigou a respeito desse programa, "Minha Casa, Minha Vida", para poder ver se inscrevia. Então, eu, por dedução, acredito que esse segundo tema vai ser mais significativo para o aluno. Ele vai ter mais envolvimento. [...] Vai trazer mais consequências positivas porque eles podem auxiliar os pais na decisão de participar ou não do projeto. Então, eu acredito que a tarefa "Minha Casa, Minha Vida" vai ter mais significado, vai trazer mais competência para o aluno" (Entrevista).
>
> "Então, pensamos em uma atividade que vai esta trazendo uma relação social com a família mesmo. O filho está se envolvendo com as decisões, e já mostra que ele é um cidadão" (Observação).

Na seleção do material, ele levou em consideração o contexto social dos estudantes, demonstrou preocupação em desenvolver a formação crítica deles, para que pudessem participar das decisões na sociedade em que participam, em particular, em poder auxiliar os pais na decisão de participar ou não do projeto do governo federal.

Erik sequenciou o ambiente de modelagem da seguinte maneira: levantamento de informações sobre o tema; apresentação de um vídeo; organização dos estudantes em grupo; entrega da tarefa; leitura da tarefa; e acompanhamento da resolução da tarefa.

Ele iniciou a aula questionando os estudantes sobre o programa intitulado Minha Casa, Minha Vida: “Quem sabe alguma coisa sobre o Minha Casa, Minha Vida?; Você sabe alguma coisa sobre o Minha casa, Minha vida? Alguém adquiriu aí alguma casa?” (Observação) Os estudantes começaram a participar apresentando respostas para os questionamentos do professor. Dentre as respostas: “Tem que pagar 50,00. Dois quartos, uma sala. Professor, a minha avó mora lá professor” (Observação). Como os estudantes começaram a falar todos juntos, o professor solicitou que falassem um de cada vez.

Erik iniciou a aula de maneira similar ao que foi registrado no material, no qual o professor relatou ter iniciado a aula a partir de discussões sobre o tema, convidando os estudantes a participarem. Ele explicou que tentou “ver quem estava inserido neste processo na sala, quem já tem essa experiência”, justificando que isso “faz com que enriqueça mais a tarefa” (Entrevista). Neste momento, ele apontou que “a tarefa do COMMa foi [o seu] plano de aula”, uma vez que a partir dela, ele decidiu que iria “trabalhar assim também”, e afirmou o seguinte: “vou fazer algumas mudanças, mas já sei mais ou menos como vou seguir a minha aula, a gente tinha mais ou menos uma sequência para se trabalhar ali” (Entrevista).

Por outro lado, por vezes, como ele apontou acima, foi feito mudanças ao que foi registrado no material. Dentre essas, verificamos a introdução de um vídeo que trazia informações sobre o programa do governo federal. Com a utilização do vídeo, Erik não fez uso da cartilha que fazia parte do material curricular educativo escolhido por ele. Neste momento, ele relatou que “com a cartilha os alunos não iam ficar tão motivados”, então “trouxe um recurso a mais” para “chamar a atenção deles [estudantes]”, no caso, o vídeo. Esse “já estava trazendo informações que pretendia trabalhar na tarefa” (Entrevista).

Erik deixou de utilizar uma parte do material, para inserir um recurso que ele acreditava ser mais interessante para os estudantes. Ele apontou ter tido inspirações em outras experiências realizadas em sala de aula ao afirmar o seguinte: “eu já levei vários vídeos” e “eu já trabalho com vídeos, eu vi que, no site do COMMa, existia” (Entrevista).

Após a apresentação do vídeo, Erik organizou os estudantes em grupo. Ele apontou que esta disposição de organizar os estudantes já fazia parte da prática pedagógica:

> “Nas minhas experiências de vida, na minha prática já na sala de aula, que eu já trabalho com esta dinâmica de dividir a sala sempre em grupos, é minha experiência. A prática já acontecia e a partir dela até da própria referência do site do COMMa, fez com que a gente tomasse também esta decisão” (Entrevista).

Erik mais uma vez ressaltou ter tido inspirações no que já fazia na prática pedagógica, tendo ressonância com os registros presente no material, no qual o professor também relatou ter desenvolvido a tarefa com os estudantes em grupo.

Ao prosseguir com o ambiente de modelagem, Erik entregou aos estudantes a tarefa impressa que continha a situação-problema a ser abordada por eles. Erik afirmou que fez alterações na tarefa, a saber: ele indicou a faixa salarial que seria considerada para serem realizados os cálculos, uma vez que os estudantes da turma não trabalhavam, consequentemente não tinham renda mensal. Assim, ele solicitou que os estudantes calculassem para as rendas de um a dez salários mínimos:

> "Como a tarefa foi realizada pelo autor numa turma da EJA[6], e os alunos iam analisar seu próprio salário, para saber quanto é que eles iriam pagar, e daí, eles fizeram isso. No nosso caso, aqui, não deu para encaixar porque é uma turma de 7ª e 8ª série [8º e 9º anos], e na prática, e teoricamente, eu acredito que eles não trabalham. Então, para poder trazer a tarefa para a realidade deles [...] A própria tarefa já dá subsídios para a gente fazer uma investigação parecida, não vai dar tanto significado quanto a pessoa falar quanto ela ganha e ver se vai ser uma boa opção ou não participar do programa. Porém, vai dar subsídios para analisar o valor, entendeu? E discutir com a família, às vezes, no diálogo com os pais, ele possa opinar. 'Vamos calcular aqui pai que eu aprendi na aula de matemática como calcular para saber quanto vai pagar. Aí, o senhor analisa se vai ser uma boa opção ou não comprar uma casa financiada pela construtora ou financiar uma casa pelo governo, pelo programa Minha Casa, Minha Vida'" (Entrevista).

Neste momento, Erik observou o contexto da turma, na qual desenvolveu o ambiente de modelagem registrado no material, e a partir de então, fez alterações na tarefa proposta no material para atender ao contexto da sua turma, já que os estudantes não trabalhavam.

Após a entrega da tarefa, foi feita a leitura com a participação dos estudantes. Neste momento, Erik solicitou que, pelo menos, um estudante de cada grupo fizesse a leitura da tarefa. No trecho a seguir, ele explicou em que se inspirou:

> "Assim, como gostamos da forma que o autor da tarefa sugeriu na programação do planejamento, eu gostei também da ideia de socializar a leitura em voz alta. Então, como a turma estava dividida em grupos, pensamos em dividir a leitura também nos grupos, e escolher um aluno do grupo para fazer esta leitura, para poder focar mais, para chamar atenção na própria leitura do texto" (Entrevista).

Erik, apesar de ter apresentado uma dinâmica diferente da registrada no material para a organização da leitura, no qual o professor solicitou que apenas duas estudantes da turma fizesse a leitura, apontou ter tido inspirações no material.

No acompanhamento da resolução da tarefa, observamos que Erik fez exemplos no quadro para explicar aos estudantes como resolver a tarefa. Na verdade, os exemplos feitos já faziam parte da resolução, uma vez que ele solicitou que os estudantes encontrassem o valor da parcela a ser paga de um até dez salários mínimos, e resolveu na lousa dois destes casos, para um e dois salários mínimos. Essa estratégia de Erik foi diferente da registrada no material, no qual o professor interferiu na resolução quando solicitado pelos estudantes "para orientar as ideias apresentadas e discutidas pelos grupos, bem como discutir conteúdos matemáticos (representação de intervalos de conjuntos e cálculos de porcentagem)" (Narrativa). Erik explicou porque fez assim:

> "Porque este é um momento de dificuldade de entender a leitura que eles fizeram. Então, eu, para poder fazer uma ligação com a pergunta e o que foi lido, eu dei um exemplo. Um exemplo inicial para poder analisar e fazer a relação, entender a proposta e dar continuidade a tarefa. Aí, eu pensei em um salário, dois salários

[6] A educação de jovens e adultos (EJA) é uma modalidade de ensino nas etapas dos ensinos fundamental e médio que recebe os jovens e adultos que não completaram os anos da educação básica em idade apropriada.

> porque como se fosse tipo um exemplo da tarefa. [...] Tipo um exemplo para ele dar continuidade [...] Então, eu percebi que era necessário pelo menos trazer os exemplos, para poder dar aquele primeiro empurrão para a tarefa sair" (Entrevista).

Erik apontou que iniciou a resolução da tarefa, porque iria facilitar para os estudantes darem continuidade a resolução. Além disso, Erik acompanhou o andamento da tarefa em cada grupo, sempre convidando os estudantes a resolverem a situação-problema proposta. Nesse momento, quando ele alcançava seu objetivo em um grupo, ou seja, conseguia envolver os estudantes na tarefa, dirigia-se a outro. A seguir, Erik relatou em que se inspirou:

> "Eu tentei convidar os alunos para a proposta, fazer o convite, tirar as dúvidas, como o próprio autor da tarefa faz, não é? Ele sempre está lá indo nos grupos para saber qual é a pessoa que está com dúvida, para poder tirar essa dúvida e eles prosseguirem [fazendo] a tarefa" (Entrevista).

Erik indicou que acompanhou os grupos durante a resolução da tarefa para buscar envolver os estudantes, tendo como referencia o material, no qual o professor relatou ter sido solicitado pelos estudantes algumas vezes.

6. Discussão

O objetivo do estudo foi analisar a recontextualização de materiais curriculares educativos sobre modelagem matemática operada por professores iniciantes nas práticas pedagógicas. Na seção anterior, descrevemos o desenvolvimento do ambiente de modelagem por dois professores a partir do contato com os MCEMM, apontando momentos em que há similaridades e diferenças ao que foi registrado neles.

Nos momentos em que identificamos *similaridades*, observamos que ambos os professores iniciantes buscaram o *envolvimento dos estudantes,* solicitando a participação deles na leitura da tarefa. Além disso, o professor Erik especificou que buscou o *envolvimento dos estudantes* em mais dois momentos do desenvolvimento do ambiente de modelagem: na introdução da tarefa, ao fazer o levantamento de informações sobre o tema, e no acompanhamento da resolução da tarefa nos grupos. Outro aspecto semelhante ao registrado nos MCEMM, observado nas turmas de Hugo e Erik foi a *organização dos estudantes em grupos* para a realização da tarefa. Além disso, na turma do professor Hugo, ele justificou que manteve o MC, não fazendo modificações nele, pois atendia ao *conteúdo programático* que havia sido trabalhado em aulas anteriores.

Nos momentos em que identificamos *diferenças*, também observamos que ambos os professores buscaram o *envolvimento dos estudantes* na introdução da tarefa ao apresentarem um vídeo sobre o tema. A utilização do vídeo teve a intenção de engajar os estudantes na apresentação do tema da tarefa. Outro aspecto que foi diferente aos MCEMM, observado apenas na aula de Hugo, foi que ele indicou o *conteúdo matemático* a ser utilizado durante a resolução da tarefa. Neste momento, ele fez alguns exemplos utilizando o conteúdo de regra de três que foi trabalhado em aula anterior, apesar de existir outra maneira de resolver a situação-problema proposta. Na aula de Erik, por sua vez, houve a *modificação do MC* para atender as especificidades do contexto escolar. Ou seja, as alterações no MC tiveram a intenção de indicar aos estudantes que eles trabalhassem com os valores de um a dez salários mínimos, pois eles não trabalhavam e poderiam não saber a renda da família.

Desta análise, podemos identificar que a recontextualização pedagógica operada por Hugo e Erik sobre os textos dos MCEMM parecem ter sido baseadas, pelo menos, em quatro princípios específicos, os quais sintetizaremos nos seguintes termos:

- O *interesse e envolvimento dos estudantes*;
- O *conteúdo da grade curricular*;
- A *estrutura do material curricular;*
- A *relação entre sujeitos na prática pedagógica*.

O princípio do *interesse e envolvimento dos estudantes* refere-se aos momentos em que os professores mantiveram ou modificaram textos do MCE, a fim de propiciar o envolvimento dos estudantes no ambiente de modelagem matemática. Ele se reflete na seleção do tema, julgado pelos professores como de maior interesse pelos estudantes ou como uma maneira de revisar conteúdos trabalhados. Outros estudos também mostraram que professores se preocupam em selecionar temas que possivelmente são de interesses dos estudantes (Barbosa, 2002; Almeida; Brito, 2005; Herminio; Borba, 2010; Oliveria; Barbosa, 2011). Por outro lado, estudos apontam a possibilidade de professores escolherem o tema com o propósito de trabalhar conteúdos da grade curricular (BIENBENGUT, 2003; Santos Júnior; Maclyne, 2007). Ao que parece, este princípio também é operacionalizado por meio da seleção de estratégias pedagógicas já utilizadas pelos professores e que, no julgamento deles, funcionaram positivamente em sala de aula. Podemos observar que as justificativas de Erik e Hugo para o uso do vídeo foram pautadas em experiências anteriores.

A ocorrência deste princípio sugere que a recontextualização pedagógica, apesar de operada pelos professores (Bernstein, 2000), sofre certo controle dos estudantes. Eles estão posicionados na prática pedagógica, operando também a regulação sobre os textos que lá circulam. Os agentes de recontextualização, no caso, os professores, portanto, parecem tomar em conta possíveis reações dos estudantes. Este resultado sugere o papel regulativo dos estudantes sobre a recontextualização pedagógica operada pelos professores.

O princípio do *conteúdo da grade curricular* refere-se às ações do professor na prática pedagógica ao indicar os conteúdos matemáticos a serem utilizado na resolução da tarefa. No caso de Hugo, ele operou a seleção de conteúdos na expectativa de revisar aqueles já estudados em aulas anteriores. Na literatura, há indícios de professores que, ao decidir inserir modelagem na prática pedagógica, buscaram relacionar com conteúdos já estudados na grade curricular (Haliski; Rutz; Pilatti, 2009; Oliveira, 2010). Além disso, é possível que os professores desenvolvam o ambiente de modelagem matemática para introduzir novos conteúdos matemáticos, ainda não estudados na grade curricular (Bassanezi, 2002; Oliveira, 2010). Ainda é documentado na literatura o caso em que o professor não prever claramente os conteúdos matemáticos a serem abordados no ambiente de modelagem (Barbosa, 2001), podendo constituir um dilema para eles Antonius et al., 2007; Oliveira, 2010) decidirem em qual momento da implementação da tarefa abordarem um determinado conteúdo matemático.

Assim, o princípio do conteúdo da grade curricular está no âmbito do que Bernstein (2000) denomina de classificação. Este envolve a seleção de que (quais) conteúdos matemáticos devem ser trabalhados com os estudantes. Este princípio pode ou não pré-definir os conteúdos matemáticos atrelados à tarefa de modelagem, o que implica, respectivamente, em uma variação no controle, podendo ser mais ou menos forte. Como apontado acima, no caso de uma pré-definição dos conteúdos, é possível que o professor opere o princípio em termos de retomada de conteúdos já estudados ou introdução de novos.

O princípio da *estrutura do material curricular* refere-se às modificações feitas no MC, a fim de atender as especificidades do contexto escolar. Como apontado por Kieran, Tanguay e Solares (2012), professores podem fazer modificações nos MC e essas modificações são enquadradas pelas especificidades da prática a qual eles participam. Notemos que Erik, ao indicar os valores a serem abordados na tarefa, modificou uma questão aberta, a ser explorada pelos estudantes com possibilidades de gerar respostas e discussões diferentes, em uma questão fechada, na qual todos os estudantes encontraram uma única resposta. Por questões abertas, entendemos como aquelas em que as respostas dependem das hipóteses e critérios considerados pelos estudantes, havendo a possibilidade de respostas distintas. Por sua vez, questões fechadas são questões que fornecem os dados necessários para obtenção de uma única resposta (Sant’ana; Sant’ana, 2009). É possível identificarmos um *continuum* de possibilidades entre o que denominamos de questões abertas e questões fechadas.

Neste princípio, podemos observar que a recontextualização pedagógica operada pelos professores (Bersntein, 2000) sofre certo controle dos contextos escolares. Isso mostra que o discurso pedagógico repercutiu na estruturação do MC e no controle sobre a descrição da situação-problema e as questões sobre as quais os estudantes se debruçaram na tarefa.

O princípio da *relação entre sujeitos na prática pedagógica* refere-se ao espaço de negociação entre sujeitos no ambiente de modelagem. Nas práticas pedagógicas observadas, notamos que a organização dos estudantes em grupo foi predominante. Estudos apontam que a disposição dos estudantes em grupos é frequente no ambiente de modelagem (Barbosa, 2001; Antonius et al., 2007; Ferreira; Jacobini, 2010). Assim, observamos que as justificativas dos professores para tal organização foi o fato de eles terem visto nos MCEMM ou porque já era uma estratégia comum utilizada na prática pedagógica. Podemos, portanto, inferir que professores podem mover a disposição em grupos dos estudantes expressa nos MCEMM para as práticas pedagógicas que participam. Porém, não podemos dizer ao certo se isto ocorre por não se constituir em uma afronta aos princípios já presentes nas práticas pedagógicas. No estudo de Bisognin, Bisognin e Isaia (2009), por exemplo, há indícios de que os estudantes apresentaram uma resistência inicial ao participarem do ambiente de modelagem, pois eles tiveram dificuldades para trabalhar nesse ambiente, dentre elas, o trabalho em grupo e o abandono das aulas expositivas. Assim, neste estudo, embora os estudantes observados tenham apresentado interação entre eles no decorrer do ambiente, parece-nos que o trabalho em grupo não era comum na prática pedagógica em que participavam.

A ocorrência deste princípio sugere que a recontextualização pedagógica operada pelos professores (Bernstein, 2000), apresenta certo controle da prática pedagógica no ambiente de modelagem, nesse caso, na organização dos estudantes em grupos para desenvolver a tarefa. No caso de Hugo e Erik, o discurso pedagógico operou dando continuidade a uma estratégia comum utilizada nas práticas pedagógicas que eles participam.

A Figura 2, a seguir, esquematiza quatro princípios que podem ser agendados no processo de recontextualização dos MCEMM operada pelos professores. No esquema, sugerimos a imagem de um segmento de reta para sinalizar diferentes possibilidades. Por exemplo, no caso do princípio do interesse e o envolvimento dos estudantes, ele se desdobra em dois subprincípios: o tema e a estratégia didática. Assim, observemos que o tema está associado a um *continuum* de possibilidades entre ele está voltado para o interesse dos estudantes ou para o interesse no programa curricular pré-estabelecido. No primeiro caso, o controle é mais fraco, pois o professor pode não ter tanto controle sobre os temas de interesse dos estudantes e, consequentemente, sobre os conteúdos matemáticos estudados; no segundo caso, o controle é mais forte, pois o tema deve se adequar ao conteúdo que se quer explorar, tal como mostrado em Biembengut (2003) e em Santos Júnior e Maclyne (2007). De maneira análoga, outro subprincípio e os demais princípios estão representados na Figura 2.

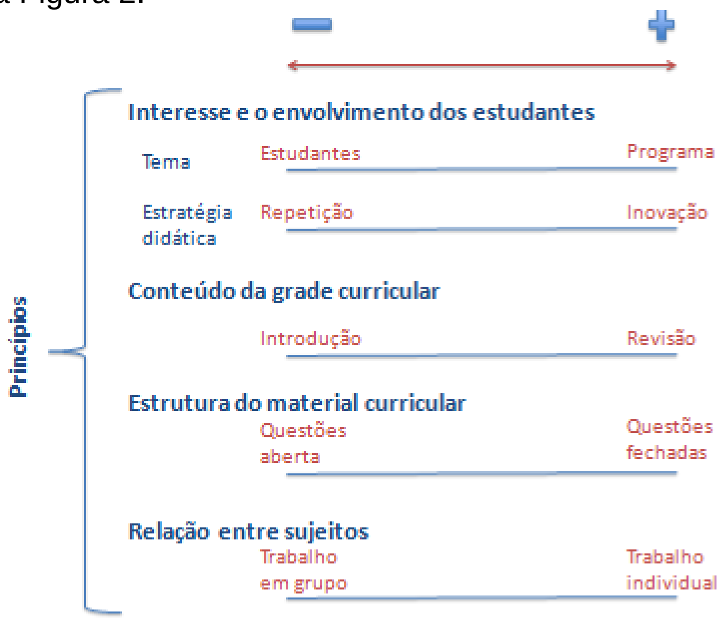


Figura 2: Princípios operados na recontextualização pedagógica

Assim, a Figura 2 sintetiza diferentes possibilidades para os princípios de recontextualização que identificamos neste estudo. A seta na parte superior do esquema indica o sentido em que o controle ocorre de maneira mais forte ou mais fraca. Os professores podem decidir por agendar o princípio do conteúdo da grade curricular por meio de um controle mais fraco, se, neste caso, objetiva introduzir novos conteúdos do programa curricular; por outro lado, um controle mais forte, se objetiva revisar conteúdos já trabalhados. Portanto, mesma variação pode acontecer nos demais princípios, podendo ainda ser híbrido.

Os agentes posicionados na prática pedagógica escolar repercutiram na recontextualização pedagógica operada pelos professores. Nesta, os professores assumiram um controle mais fraco, pois possibilitou a discussão entre estudantes e entre professor e estudantes. Porém, apesar de não serem comuns estudos documentando sobre o trabalho individual em modelagem, estudantes podem trabalhar individualmente, no qual o professor pode assumir um controle mais forte sobre a comunicação na prática pedagógica.

Diante disso, a forma como o professor pode agendar os princípios esquematizados na figura 2 depende do que o professor seleciona nos MCE para ser movido para a prática pedagógica, os quais dependem das regras que já circulam nela. Assim, o agendamento de tais princípios é uma repercussão dos princípios do discurso pedagógico.

7. Conclusões e implicações

O presente artigo teve como propósito compreender como professores iniciantes operam a recontextualização pedagógica de materiais curriculares educativos sobre modelagem matemática nas práticas pedagógicas. Assim, identificamos quatro princípios agendados pelos professores ao moverem os MCEMM para as práticas pedagógicas: o *interesse e o envolvimento dos estudantes*; o *conteúdo da grade curricular*; a *estrutura do material curricular* e a *relação entre sujeitos na prática pedagógica*. Esses princípios referem-se às decisões dos professores ao implementarem o ambiente de modelagem em sala de aula a partir do contato com MCEMM.

Os resultados sugerem que a ação do professor ao agendarem esses princípios em sala de aula depende das regras já existentes na prática pedagógica, ou seja, é uma repercussão dos princípios do discurso pedagógico (Bernstein, 2000). Apesar dos princípios descritos neste artigo se referirem aos MCEMM, podemos inferir que esses princípios podem ser aplicados a outros contextos no campo de recontextualização, como por exemplo, os programas de formação baseados em modelagem matemática, uma vez que professores irão ter contato com textos e poderão trazê-los para as práticas pedagógicas as quais participam.

Sendo assim, esse estudo pode trazer contribuições para professores que decidirem implementar o ambiente de modelagem a partir do contato com os MCEMM, pois a partir da identificação desses princípios eles terão a possibilidade de decidir quais desses princípios pretendem agendar na prática pedagógica em que participam ao utilizar os MCEMM. Também, pode contribuir para entendermos o que acontece quando professores movem os MCEMM para as práticas pedagógicas, sendo um processo em que eles modificam os MCE para posicioná-los as regras existentes na prática pedagógica.

Por outro lado, os resultados desse estudo podem contribuir com pesquisas que envolvem materiais curriculares educativos na área de Ensino de Ciências e também, podem contribuir com elaboradores de materiais curriculares educativos, uma vez que professores podem agendar diferentes princípios ao utilizá-los, possibilitando que os elaboradores tenham inspirações para melhor apoiar professores.

Bibliografía

Alves-Mazzotti, A. J. (1998). *O método nas ciências sociais*. En Alves-Mazzotti A. J.; Gewandsznajder, F. O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa, 107-188. Pioneira Thomson: São Paulo.

Almeida, L. M. W.; Brito, D. S. (2005). *Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem atribuir*? *Ciência & Educação*, v. 11, n. 3, 483-498.

Antonius, S. et al. (2007). *Classroom activities and the teacher*. En Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.; Niss, M. (Ed.). Modelling and Applications in Mathematics Education: the 14th ICMI study, 295-308. Springer: New York.

Barbosa, J. C. (2001). Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. *Reunião anual da ANPED*, 24. Caxambu. Anais... Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

Barbosa, J. C. (2002). Modelagem Matemática e os futuros professores. *Reunião anual da* ANPED, 25. Caxambu. Anais... Caxambu: ANPED, 2002. 1 CD-ROM.

Barbosa, J. C. (2007). A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. En Barbosa, J. C., Caldeira, A. D.; Araújo, J. L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.* 161-174. SBEM: Recife.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Contexto: São Paulo.

Bernstein, B. (1990). *Class, Codes and Control, volume IV: the structuring of pedagogic discourse.* Routledge: London.

Bernstein, B. (2000). Pedagogy, symbolic control and identify: theory, research, critique. Rowman & Littlefield Publishers: Lanham.

Biembengut, M. S.; Hein, N. (2003). *Modelagem Matemática no ensino*. Contexto: São Paulo.

Bisognin, E.; Bisognin, V.; Isaia, S. M. A. (2009). *A sala de aula e a modelagem matemática: contribuições possíveis em diferentes níveis de ensino. Horizontes*, v. 27, n.1, jan./jun, 79-89.

Borko, H. (2004). *Professional Development and Teacher Learning*: Mapping the Terrain. Educational Researcher, v. 33, n. 8, 3-15.

Brasil. (2007). Programa Mais Educação: Passo a Passo. Ministério da Educação: Brasília/D.F. http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/passoapasso_maiseducacao.pdf (acessado em 14/10/2012)

Cargnin-Stieler, M; Bisognin, V. (2011). Modelagem Matemática: experiência com alunos de cursos de formação de professores. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN*. Volumen. 28. Acessado em 14/10/2012, de http://www.fisem.org/web/union/images/stories/28/archivo_14_volumen_28.pdf

Charmaz, K. (2006). *Constructing Grounded Theory: a practical guide through qualitative analysis.* SAGE Publications: Thousand Oaks.

Costa, W. O.; Oliveira, A. M. P. (2011). O Uso dos Materiais Curriculares Educativos sobre Modelagem Matemática nas Práticas Pedagógicas dos Professores. Conferência Nacional sobre modelagem na educação matemática, 7, Belém. Anais**...** Belém: UFPA, 1 CD-ROM.

Davis, E. A.; Krajcik, J. S. (2005). *Designing Educative Curriculum Materials to PromoteTeacher Learning*. Educational Researcher, v. 34, n. 3, 3-14.

Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. (2005). *Introduction: the discipline and the practice of qualitative research*. En Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. (Ed.) Handbook of Qualitative Research, 1-32. 3. ed. Sage: Thousand Oaks.

Fontana, A.; Frey, J. H. (2005). *The interview: from neutral stance to political involvement.* En Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. (Ed.) Handbook of Qualitative Research, 695-727. 3. ed. Sage: Thousand Oaks.

Ferreira, D. H. L.; Jacobini, O. R. (2010). *Modelagem Matemática e ambiente de trabalho: uma combinação pedagógica voltada para a aprendizagem*. REnCiMa, v. 1, n. 1, p. 9-26.

Haliski, A. M.; Rutz, S. C.; Pilatti, L. A.; (2009). *Uma experiência com a essência da modelagem matemática através da construção de maquete*. I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia. UTFPR: Ponta Grossa, v. 01. 1194-1209.

Herminio, M. H. G. B.; Borba, M. C. (2010). *A Noção de Interesse em Projetos de Modelagem Matemática. Educação Matemática Pesquisa*: São Paulo, v.12, n.1, 111-127.

Huberman, M. (1997). *O ciclo de vida profissional dos professores*. En Nóvoa, A. (Org.). Vidas de Professores. Porto Editora: Porto, n.4.

Ikeda, T. (2007). Possibilities for, and obstacles to teaching applications and modelling in the lower secondary levels. En Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.; Niss, M. (Ed.). *Modelling and Applications in Mathematics Education*: the 14th ICMI study, 457-462. Springer: New York.

Kieran, C.; Tanguay, D.; Solares, A. (2012). *Researcher-designed resources and their adaptation within classroom teaching practice: shaping Both the Implicit*. En Gueudet, G.; Pepin, B.; Trouche, L. (Ed.). From text to 'Lived' resources. Springer: New York.

Luna, A.V.A.; Barbosa, J. C.; Morgan, C. (2011). *Mathematical Modelling and Pedagogical Recontextualisation of In-Service Teachers*. In: 15th Internacional Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications, ICTMA 15, Australian. *Anais...* Australian: Australian Catholic University. 1CDROM.

Oliveira, A. M. P. (2007). *As análises dos futuros professores sobre suas primeiras experiências com Modelagem Matemática*. En Barbosa, J. C., Caldeira, A. D.; Araújo, J. L. (Org.). Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. 233-251. SBEM: Recife.

Oliveira, A. M. P. (2010). *Modelagem matemática e as tensões nos discursos dos professores.* TESE (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Instituto de Física/Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana: Salvador.

Oliveira, A. M. P.; Barbosa, J. C. (2011). *Modelagem Matemática e Situações de Tensão na Prática Pedagógica dos Professores*. Bolema. Boletim de Educação Matemática. UNESP: Rio Claro, v. 24, p. 265-296.

Sant'ana, A. A.; Sant'ana, M. F. (2009). *Uma experiência com a elaboração de perguntas em Modelagem Matemática.* Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, 6, Londrina. **Anais...** Paraná: SBEM, 1 CD-ROM.

Santos Jr., C.P ; Maclyne, D. (2007). *A Modelagem Matemática como estratégia no ensino aprendizagem.* IX Encontro Nacional de Educação Matemática: Belo Horizonte.

Schneider, R. M.; Krajcik, J. (2002). *Supporting science teacher learning: the role of educative curriculum materials*. Journal of Science Teacher Education, v. 13, n. 3, 221-245.

Silva, M. S.; Barbosa, J. C.; Oliveira, A. M. P. (2011). *O Sequenciamento do Ambiente de Modelagem por Professores Iniciantes a partir do Contato com Materiais Curriculares Educativos*. Em Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática, 7, Belém. Anais... Belém: UFPA, 1 CD-ROM.

Silva, M. S.; Barbosa, J. C.; Oliveira, A. M. P. (2012). *O Sequenciamento do Ambiente de Modelagem Matemática a partir do contato com Materiais Curriculares Educativos.* Acta Scientiae (ULBRA), v. 14, 240-259.

Skovsmose, O. (2000). *Cenários para Investigação*. Bolema: Boletim de Educação Matemática: Rio Claro, n. 14, 66-91.

Maiana Santana da Silva. Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana. Atualmente é mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. Os interesses de pesquisa centram-se na modelagem matemática e materiais curriculares educativos. Possui artigos e comunicações na área de Educação Matemática. E-mail: **maai.san@gmail.com**

Jonei Cerqueira Barbosa. Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Atualmente, é professor adjunto da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia. É docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal da Bahia e no Programa Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da UFBA da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. Os interesses de pesquisa envolvem modelagem matemática, formação de professores de matemática e desenvolvimento de tarefas. Possui artigos na área de Educação Matemática. E-mail: **jonei.cerqueira@ufba.br**

Andréia Maria Pereira de Oliveira. Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. Atualmente é professora adjunta do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana. É docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana e do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Feira de Santana. Os interesses de pesquisa centram-se na Educação Matemática, mais especificamente, na formação e prática de professores de Matemática, modelagem matemática e materiais curriculares educativos. Possui artigos na área de Educação Matemática. E-mail: **ampodeinha@gmail.com**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 69-83

www.fisem.org/web/union

Tratamiento del Sistema Métrico Decimal en textos de matemáticas de Cuba, Filipinas y Puerto Rico en la segunda mitad del siglo XIX

Miguel Picado, Luis Rico

Fecha de recepción: 19/11/2011
Fecha de aceptación: 27/05/2013

Resumen	El artículo muestra los resultados de un estudio histórico sobre el tratamiento dado al Sistema Métrico Decimal en textos de matemáticas publicados en Cuba, Puerto Rico y Filipinas en la segunda mitad del siglo XIX. Este estudio se desprende de un trabajo previo realizado en 2009 sobre la misma temática, contextualizado en España, del que se derivaron nuevos conocimientos sobre el proceso de difusión de este sistema métrico y de su inclusión en textos de matemáticas para diversos ámbitos sociales. **Palabras clave**: Análisis de textos; Sistema Métrico Decimal; Textos de matemáticas.
Abstract	The paper presents the findings of a historic study on the treatment of the Metric System in math texts published in Cuba, Puerto Rico and the Philippines in the second half of the nineteenth century. This study follows a previous work conducted in 2009 on the same topic contextualized in Spain and claims that arose from the diffusion process of this system and inclusion in mathematical textbooks for various levels of society. **Keywords**: Texts analysis; Mathematics textbooks; Metric System.
Resumo	O artigo mostra os resultados de um estudo histórico sobre o tratamento dado ao sistema metrico decimal em textos de matemática publicados em Cuba, Porto Rico e nas Filipinas durante a segunda metade do século XIX. Este estudo dá continuidade a um trabalho anterior realizado em 2009 sobre o mesmo tema, contextualizado na Espanha, do qual foram derivados novos conhecimientos sobre o processo de difusão deste sistema e a sua inclusão em libros didácticos de matemática para diversos extratos sociais. **Palavras-chave**: Análise de textos; Sistema Metrico; Textos de matemática

1. Introducción

El estudio que se presenta corresponde a una ampliación del trabajo previo (Picado, 2009) realizado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada sobre el tratamiento del Sistema Métrico Decimal (SMD) en textos de matemáticas en España durante el período 1849-1892. Esta delimitación temporal se define a partir de dos momentos específicos en la historia de la implantación del SMD en España: la promulgación de la Ley de Pesas y Medidas de 19 de Julio de 1849, que establece un único sistema de pesas y medidas, y la Ley de 8 de Julio de 1892 que declara la obligatoriedad en cuanto al uso del sistema y pone fin a una extensa etapa de transición legal entre las medidas de Castilla y las métrico-decimales.

El estudio preliminar incluye la selección, revisión y análisis de textos de matemáticas editados en España entre 1849-1892 con el fin de lograr una aproximación a las formas de presentar, representar y tratar las unidades de pesas y medidas del que fuera un nuevo sistema metrológico, acompañado de una descripción de las fuentes y los procedimientos que caracterizan la introducción del SMD, una caracterización del proceso de divulgación y de las dificultades que se presentaron ante las nuevas unidades de pesas y medidas, y de las contribuciones de matemáticos españoles al proceso de unificación metrológica en España.

Metodológicamente, se toma como referencia una síntesis de los planteamientos sobre el método histórico realizados por Aróstegui (1995), Ruíz (1997), Salkind (1999), Cardoso (2000), González y Sierra (2003). Se definen cinco fases para le investigación:

1. *Planteamiento*, que abarca el tipo de investigación y la presentación del problema, objetivos y conjeturas definidos
2. *Búsqueda, localización y selección* de las fuentes documentales y proceso de crítica histórica
3. *Análisis de las fuentes seleccionadas* mediante categorías previamente definidas
4. *Integración e interpretación* de los datos y verificación de las conjeturas y
5. *Exposición* de resultados

Durante la fase de búsqueda, localización y selección de los documentos se identifican textos que muestran los conceptos, representaciones, situaciones, procedimientos y tareas con que se introduce el SMD en las colonias españolas de Ultramar en el siglo XIX: Cuba, Filipinas y Puerto Rico, que a raíz de la delimitación del tema y los criterios de selección quedan excluidos del estudio preliminar.

En esta oportunidad se presenta el análisis de esos textos y sus resultados como complemento al estudio del 2009 y como aporte a la historia metrológica de estas tres naciones. El vínculo político, educativo y social entre España y sus colonias de Ultramar en el siglo XIX nos conducen a un propósito particular: estudiar y caracterizar el tratamiento que se da al SMD en Cuba, Filipinas y Puerto Rico a partir del análisis de textos de matemáticas editados en la segunda mitad del siglo XIX (1849-1899). Textos que han surgido durante el proceso de selección del estudio preliminar y que se analizan mediante la aplicación de las técnicas de análisis: análisis de contenido y análisis didáctico.

2. Selección y análisis de los textos

La selección de los textos inició con la búsqueda y localización de obras en la Biblioteca General de la Universidad de Granada y la Biblioteca Nacional de España. Esta actividad condujo al registro de una lista considerable de documentos relacionados con la enseñanza y difusión del SMD. La selección razonada y justificada de los textos requirió la definición de criterios. Entre ellos, la inclusión de la denominación SMD en el título de la obra; la fecha y el lugar de publicación; y la disponibilidad y originalidad del ejemplar como criterios iniciales.

La segunda fase de selección contó con criterios como la representatividad de la obra en el proceso de implantación del SMD, a partir del reconocimiento y la definición de tres etapas históricas; la finalidad y estilo; y, la profesión y relevancia del autor en la época. Las etapas históricas definidas —correspondientes a uno de los resultados del estudio— permiten una organización de los textos según acontecimientos relevantes en el proceso de implantación del SMD en la sociedad española (Picado y Rico, 2011b). Estas se han nombrado: etapa de promulgación e inserción estatal (1849-1867), etapa de generalización (1868-1879) y etapa de legalización y obligatoriedad (1880-1892).

La técnica de selección utilizada produjo un listado de 92 documentos en la primera fase y doce en la segunda que, finalmente, fueron los textos analizados en el estudio previo (Picado y Rico, 2011b). El estudio actual incluye seis manuales. Estos son:

- *Tratado sobre el Sistema Métrico Decimal de Pesos y Medidas, sus equivalencias con las españolas y de estas con las extranjeras, puesto al alcance de todos, con varias cuestiones* de José María García de Haro (1852) publicado en La Habana, Cuba, por la Imprenta y Librería de Graupera.
- *Prontuario del Sistema Legal de Pesas, Medidas y Monedas, o sea el Sistema Métrico Decimal mandado observar por la Ley de 19 de Julio de 1849 y el nuevo sistema monetario por la de 15 de abril de 1848 con un apéndice que comprende varias tablas para la reducción de las medidas nuevas en las antiguas y estas en aquellas* de Pelayo González de los Ríos (1862). Habana: Imprenta de Gobierno y Capitanía General por S. M.
- *El Contador ó Tablas de Reducción de las Pesas y Medidas legales de Castilla y demás que están en uso en las Islas Filipinas a las del Nuevo Sistema Métrico Decimal y recíprocamente, como del Sistema Monetario* de Juan de la Cavada (1865) publicado en Manila, Filipinas por el Establecimiento Tipográfico de Amigos del País.
- *Sistema Métrico Decimal de Pesas y Medidas* de Ramón Irureta (1893). Manila: Tipografía A. del país.
- *Catecismo del Sistema Métrico Decimal ó teoría de las nuevas pesas, medidas y monedas legales que deben regir en todos los dominios españoles desde 1° de Enero de 1860. Aumentado con tablas de las medidas del sistema antiguo y sus equivalencias con las decimales y vice-versa* de Pascacio Sancérrit (1860) publicado en Puerto Rico por la Imprenta de Acosta.
- *Elementos de Sistema Métrico Decimal acompañado de Tablas de Equivalencias de dicho sistema al Antiguo de Pesas y Medidas* de Luis Alvarado (1883). Puerto Rico: Imprenta de José González Font.

Para el análisis de los textos se utilizan las técnicas Análisis de Contenido (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008) y Análisis Didáctico (Lupiáñez, 2009; Gómez, 2002) mediante la aplicación de los focos, categorías y unidades de análisis definidos en Maz (2000). Los focos de análisis incluyen la caracterización del autor, de la estructura y del contenido del texto. Esta organización responde a la aplicación de la técnica de análisis de contenido propuesta, considerando los textos como unidades didácticas finalizadas, no en elaboración, propuestas curriculares para la enseñanza de la matemática (Picado y Rico, 2011a). El análisis didáctico, centrado en el estudio de las tareas —definido como análisis de instrucción— permite un acercamiento a los aspectos sobre la enseñanza del sistema.

La caracterización del autor se realiza mediante dos categorías: información personal e información profesional. La caracterización de la estructura incluye una serie de unidades de análisis sobre la forma y organización del documento. A su vez, la caracterización del contenido, al que se da mayor realce en este estudio, se compone de tres dominios: generalidades, contenido matemático y principios didácticos. El segundo se organiza a partir de las categorías: conceptos, representaciones y contextos para la presentación conceptual, procedimental y técnica —utilidad— del SMD. Los principios didácticos siguen la clasificación de Maz y Rico (2011). Del análisis se obtiene una serie de datos sobre la presencia del SMD en los textos seleccionados. Las tablas 1 y 2 muestran parte de la información sobre la profesión de los autores y la estructura de los textos.

Autor	Profesión
Cuba	
José María García de Haro Pelayo González de los Ríos	N. E Director de centros educativos. Secretario de la Comisión de pesas y medidas decimales de la Isla, é individuo de varias corporaciones
Filipinas	
José de la Cavada Ramón Irureta Goyena	Contador Capitán de ingenieros. Profesor de la Academia Preparatoria Militar
Puerto Rico	
Luis Alvarado y González Pascacio P. Sancérrit	N. E Profesor de Instrucción Primaria

Nota. N. E = no especifica

Tabla 1. Profesión de los autores

La información sobre los aspectos personales y laborales de los autores es escasa. Los textos sólo muestran datos puntuales acerca de su profesión y oficio.

Población diana	Finalidad y objetivo	Tipo de texto	Estilo de presentación
Texto de García de Haro			
General	N. E	Tratado	Narrativo
Texto de González de los Ríos			
General	Enseñanza del SMD y facilitar cálculos de reducción	Prontuario	Narrativo
Texto de De la Cavada			
General	Contribuir al desarrollo del SMD mandado por S. M. en estas islas. Formar tablas de reducción. Simplificar las operaciones aritméticas con la presentación de tablas	Tablas y catecismo	Pregunta-respuesta

Texto de Irureta Goyena			
Escolares de primaria	Exponer el SMD y el monetario para que el niño aprenda sin esfuerzo y el adulto recuerde y consulte sin dificultades. Enseñar el SMD	Explicación y tablas	Narrativo
Texto de Alvarado y González			
Escolares de primaria	Propagar el SMD y facilitar su planteamiento	Elementos	Pregunta-respuesta
Texto de Sancérrit			
Escolares de primaria	Mejorar la instrucción primaria. Generalizar el conocimiento del SMD	Catecismo	Pregunta-respuesta

Nota. N. E = no especifica; SMD = Sistema Métrico Decimal

Tabla 2. Estructura del texto

En la tabla 2 se han omitido aspectos como el año y el lugar que han sido presentados con anterioridad, así como la edición y referencias de las que no se han obtenido dato alguno. En cuanto a la extensión y distribución de los contenidos se hará referencia en el apartado de resultados. La caracterización del contenido representa el mayor cúmulo de datos para el análisis, se sintetizan en la tabla 3.

Magnitudes	SMD	Procedimientos
Texto de García de Haro		
L, Su, V, P	Conjunto de nuevas unidades de pesas, medidas y monedas en un sistema decimal	Para realizar conversiones a partir de situaciones matemáticas
Texto de González de los Ríos		
L, Su, V, P	Conjunto de arreglos en las medidas a partir del metro	Para medir superficies, realizar reducciones; leer y escribir medidas decimales; mostrar la utilidad y uso de las tablas de reducción
Texto de De la Cavada		
L, Su, So, C, P	Se infiere como un conjunto de nuevas unidades de medida basadas en el sistema decimal	Para denotar diferencias entre múltiplos y divisores de las distintas magnitudes
Texto de Irureta Goyena		
L, Su, V, C, P, D, T	El de pesas y medidas que tiene por base el metro	N. E
Texto de Alvarado y González		
L, Su, So, C, P, T, Pr	Conjunto de medidas que tiene por fundamento el metro	Para la escritura de números métricos
Texto de Sancérrit		
L, Su, V, C, P	Sistema o cjto. de medidas que sirve de origen y base el metro	Para realizar reducciones; para el uso de tablas

Nota. L = longitud; Su = superficie; So = solidez; V = volumen; C = capacidad; P = peso; T = tiempo; Pr = precio; D = dinero; N. E = no especifica

Tabla 3. Caracterización del contenido: del conocimiento

3. Resultados

Los datos obtenidos permiten realizar algunas afirmaciones acerca del tratamiento dado al SMD en textos de matemáticas en las posesiones españolas de Ultramar en la segunda mitad del siglo XIX. Estas se organizan por entidades político-administrativas y según las características propias de las categorías de análisis. Las etapas históricas definidas no se consideran en la organización de los resultados siguientes debido al escaso número de textos analizados. Este estudio permite establecer una relación con las obras analizadas en Picado (2009) a partir de los resultados y las conclusiones expuestas en este estudio.

3.1. Los textos de matemáticas sobre el SMD en Cuba

Los autores cubanos ejemplifican la figura del profesor, el maestro o el administrador educativo como autor de textos para la difusión del nuevo sistema en todo el territorio de la corona española. Los textos se editan como instrumentos para la propagación general del SMD; si bien pueden utilizarse en la enseñanza escolar y en el aprendizaje autodidacta, también pueden ser usados en diferentes actividades cotidianas. Esta cualidad hace reconocer una diversidad en cuanto a los tipos y estilos de los textos, que varían tanto en extensión como en la manera de presentar las ideas.

La presentación de aspectos legales e históricos sobre el SMD es variable en los textos. En González de los Ríos (1862) se incluyen una serie de ideas sobre el origen y desarrollo del SMD, junto con menciones sobre la colaboración española a ese proceso de definición y recalcando el legalismo que respalda y oficializa su introducción.

3.1.1. Del contenido matemático: los conceptos y procedimientos

La ausencia de conceptos como el de número, magnitud, cantidad y unidad es común en ambos textos; no obstante, se reconoce una coincidencia en la presentación de los tipos de magnitudes sobre las cuales se erige el nuevo sistema de pesas y medidas: longitud, superficie, volumen y peso, concebido como un conjunto de arreglos en las medidas y las pesas a partir del metro y regido por la "Ley Decimal".

Al igual que en Picado (2009), se reconocen fundamentalmente tres tipos de definiciones de metro: una de carácter científico y técnico, como la diez millonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre y unidad fundamental del sistema; etimológica, que lo asocia con el vocablo griego μετρον; y otra instrumental, como el objeto material para efectuar mediciones de longitud.

Existe una uniformidad en la presentación de las unidades de medida para las diversas especies. Así, se presentan el metro para longitudes, el metro cuadrado y el área para superficies, el metro cúbico, el estéreo y el litro para las de solidez y capacidad y el gramo para las ponderales. La unidad monetaria presenta una singularidad pues en ambos textos se inicia con la mención del franco como la unidad principal francesa, reconociendo a Francia como origen del SMD; seguido el real como la unidad española que regirá también en Cuba. La organización de los múltiplos y submúltiplos parte de la especificación del empleo de vocablos griegos y latinos para su formación literaria y del uso del sistema decimal para su valoración.

Se aprecia una dicotomía en los aspectos procedimentales. En el caso de González (1862) se reconocen una serie de indicaciones para la medición de superficies, la lectura y escritura de medidas decimales y la forma de realizar reducciones. “Para medir una superficie cualquiera se busca cuantas veces contiene la superficie de un cuadrado, tomado por unidad de medida” (p. 9). “Si el cuadrado tiene un metro de lado su superficie será igual á un metro de base multiplicado por un metro de altura: es decir 1x1=1 metro cuadrado” (p. 10).

Es destacable la insistencia con que se muestra en este texto la relación entre el SMD y el Sistema Decimal.

> *41.—Siendo pues, la numeración decimal la usada en estas medidas, el valor de la expresión depende del lugar que ocupa la coma; (‘) porque en efecto, esta separa las unidades exactas de las partes de la unidad; es decir que los números escritos antes de la coma son enteros, y los que quedan á la derecha ó después de ella son fracciones relativas á la unidad de la denominación que expresa la cantidad…* (González, 1862, p. 16)

Por su parte García de Haro (1852) opta por la presentación de ideas teóricas y la explicación de cómo efectuar reducciones.

3.1.2. Sistemas de representación

La presentación de conceptos se realiza mediante los modos textual, tabular y numérico. “CENTIAREA.—Es un cuadrado que tiene un metro por cada lado, y por lo tanto es 1 metro cuadrado; es decir la centésima parte del área” (González, 1862, p. 11). La Figura 1 muestra una representación numérica.

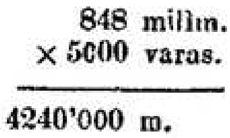
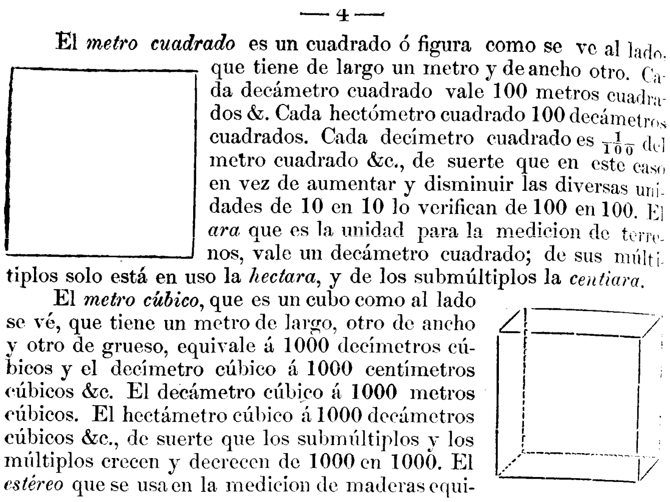

848 milim.
× 5000 varas.
4240'000 m.

Figura 1. Representación numérica.
Fuente: González (1862).

Las representaciones gráficas también se emplean como medios para la presentación concreta de conceptos y algunos instrumentos de medida como el metro, el litro y la moneda (Figura 2).


— 4 —

El *metro cuadrado* es un cuadrado ó figura como se ve al lado, que tiene de largo un metro y de ancho otro. Cada decámetro cuadrado vale 100 metros cuadrados &. Cada hectómetro cuadrado 100 decámetros cuadrados. Cada decímetro cuadrado es $\frac{1}{100}$ del metro cuadrado &c., de suerte que en este caso en vez de aumentar y disminuir las diversas unidades de 10 en 10 lo verifican de 100 en 100. El *ara* que es la unidad para la medicion de terrenos, vale un decámetro cuadrado; de sus múltiplos solo está en uso la *hectara*, y de los submúltiplos la *centiara*.

El *metro cúbico*, que es un cubo como al lado se vé, que tiene un metro de largo, otro de ancho y otro de grueso, equivale á 1000 decímetros cúbicos y el decímetro cúbico á 1000 centímetros cúbicos &c. El decámetro cúbico á 1000 metros cúbicos. El hectámetro cúbico á 1000 decámetros cúbicos &c., de suerte que los submúltiplos y los múltiplos crecen y decrecen de 1000 en 1000. El *estéreo* que se usa en la medicion de maderas equi-

Figura 2. Representación del metro cuadrado y cúbico.
Fuente: García de Haro (1852).

3.1.3. Contextos y situaciones

Son reconocibles diversas situaciones numéricas para la introducción del SMD que identifican el contexto matemático como el predominante en la presentación de conceptos. A diferencia de los resultados establecidos en el estudio previo, los textos cubanos analizados no dan énfasis a las situaciones de tipo mercantil o comercial, salvo el natural en el que se ubica la definición del gramo a partir de situaciones físico-naturales.

- "¿Cuántos kilómetros son 3846'8 metros?" (González, 1862, p. 18).

- "Problema 1. ¿Cuántos metros son 5000 varas cubanas?" (González, 1862, p. 19).

- "Se quieren reducir 11686 varas, 1 pié, 2 pulgadas y 2 líneas de Burgos, á kilómetros, hectómetros, &c." (García de Haro, 1865, p. 31).

Esto llama sumamente la atención pues se le otorga a las nuevas unidades de medida un carácter más matemático que comercial que conduce a considerar el SMD como una estructura matemática concordante con las definiciones mostradas.

> *El conjunto de este arreglo de medidas se dijo Sistema métrico decimal: sistema, por ser un conjunto ordenado y completo; métrico, por ser de medidas; y decimal, porque todas las que contiene se dividen y componen de diez en diez*. (González, 1862, pp. 6-7)

3.1.4. Principios didácticos

En cuanto al dominio didáctico, las recomendaciones para su enseñanza y aprendizaje están ausentes en estos textos.

3.2. Los textos de matemáticas sobre el SMD en Filipinas

Los textos seleccionados editados en Manila presentan la peculiaridad de no proceder de la sociedad civil debido a que sus autores realizan oficios distintos a la enseñanza tradicional de las matemáticas y tienen formación militar que ejercen profesionalmente. No obstante, los textos se destinan a la enseñanza primaria y la formación general de los individuos para un aprendizaje temprano del SMD y un apoyo a las distintas actividades de medición entre los ciudadanos.

Los textos siguen una estructura tabular y textual incluyendo tablas de reducción y equivalencias con ciertas explicaciones teóricas sobre el sistema o bien en una exposición de los aspectos teóricos para la compresión de las nuevas unidades de pesas y medidas que excluyen de tipo histórico y una especificación de los conocimientos requeridos para tal entendimiento.

3.2.1. Del contenido matemático: los conceptos y procedimientos

Los conceptos de número, magnitud, cantidad, medida y unidad son omitidos casi por completo en la presentación del SMD en los textos analizados. En Irureta (1893) se incluye una breve referencia a la magnitud caracterizada como aquello que puede resultar medible y enlazada a la concepción de medida, a su vez es asociada con la concepción de unidad. Los demás conceptos no aparecen.

Ambos textos presentan el SMD a partir de su relación con el sistema decimal. Si bien se asocia este sistema con aspectos legales de la época y con un nuevo conjunto de pesas y medidas en uno de los textos (Irureta, 1893) sobresale el sistema decimal que, en ambas obras, se identifica para su presentación.

En cuanto al metro, las unidades básicas, los múltiplos y submúltiplos estos se presentan con ciertas similitudes. El metro desde una perspectiva científica; las unidades básicas corresponden a las magnitudes longitud, superficie, solidez, capacidad y peso, a las que se incluyen el tiempo y el dinero (Irureta, 1893); y los múltiplos y submúltiplos se derivan del sistema decimal y sus nombres de la utilización de prefijos griegos y latinos. Los procedimientos son sumamente escasos en los textos. A pesar de que se incluyen algunas tablas de equivalencias, éstas no se complementan con indicaciones para su aplicación y empleo.

3.2.2. Sistemas de representación

Los autores hacen uso de la representación textual, simbólica, numérica y tabular para la exposición de conceptos. Esta última se intensifica en el texto de De la Cavada (1865) en la que se aprecia una cantidad considerable de tablas de reducción y correspondencias.

A diferencia de los textos editados en Cuba, el modo gráfico no se emplea, esto a pesar de las especificaciones sobre instrumentos de medida que bien podrían reforzarse con algunas ilustraciones. “I.° de hierro colado, de forma piramidal truncada, habiéndolos desde 20 a 50 kilogramos…” (Irureta, 1893, p. 21); “El litro es una medida de cabida igual á un decímetro cúbico” (De la Cavada, 1865, p. 20).

3.2.3. Contextos y situaciones

En cuanto a los tipos de contextos utilizados en la presentación de situaciones que enmarcan las nuevas unidades de pesas y medidas se identifican ciertas divergencias.

Definiciones como la del gramo y el kilogramo incluyen fenómenos físico-naturales para su presentación; sin embargo esta es la única semejanza en este sentido, puesto que situaciones cotidianas de tipo comercial como la medición de líquidos como el agua, la leche, el aceite y el vino, y de áridos como la harina y el arroz, así como de tipo matemático —como la presentación de las unidades de tiempo— son empleadas únicamente en uno de los textos (Irureta, 1893).

3.2.4. Principios didácticos

Es en este mismo texto en el que se aprecian algunas indicaciones para la enseñanza del SMD como la utilización de dos tamaños de letra para diferenciar los contenidos para la enseñanza primaria y su complemento para la secundaria y estrategias didácticas como el empleo de materiales concretos para la verificación de equivalencias entre unidades.

En síntesis, en Filipinas las divergencias y ausencias en la presentación de conceptos relacionados al SMD, su representación y las situaciones utilizadas para su presentación y aplicación en la vida cotidiana permiten aseverar que la presentación del SMD se hace como un conjunto de unidades de pesas y medidas implantadas y respaldadas por dictámenes legales que han de ser del conocimiento de los pobladores del archipiélago y no como una estructura matemática.

3.3. Los textos de matemáticas sobre el SMD en Puerto Rico

En el caso de los textos de Puerto Rico se mantiene el patrón en cuanto a la autoría de las obras, los autores se vinculan con los procesos educativos como la instrucción primaria en el caso de Pascacio Sancérrit. Los textos son editados para uso de los establecimientos educativos, específicamente los de enseñanza primaria. Su estructura sigue las características del catecismo, enfatizando la presentación de los contenidos mediante una serie de cuestiones con su respectiva respuesta que fomentan su aprendizaje memorístico.

Es fácil de identificar cómo las operaciones aritméticas y el sistema decimal de numeración se requieren como conocimientos previos al estudio de los escritos.

El análisis permite reconocer una relación entre el texto de Sancérrit (1860) y las obras de autores como Cortázar, Cirodde y Melitón García editadas para su uso en la España peninsular. Este vínculo es reconocido también con la presentación histórica que de la metrología española se realiza al inicio de la obra, así como de los aspectos legales y las ventajas que acarrea su adopción; características que lo convierte en un texto completo en este tipo de aspectos.

3.3.1. Del contenido matemático: los conceptos y procedimientos

Los conceptos de número, magnitud, cantidad y unidad están ausentes en los textos. Los autores enfatizan en la concepción de medida y de las distintas magnitudes medibles, aunque la presentación de estas últimas se realiza de manera implícita y no detallada. En el primero de los casos, la medida es concebida de manera instrumental, como “una cantidad que se elije para servir de término de comparación de las cantidades de su especie” (Alvarado, 1883, p. 5); por su parte las magnitudes reconocibles corresponden a longitud, superficie, volumen, capacidad y peso, a las que en uno de los casos se agregan el tiempo y el precio (Alvarado, 1883).

El SMD corresponde a un conjunto de unidades de pesas y medidas derivadas del metro, presentado científica y técnicamente como la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre: unidad fundamental del sistema del que se desprenden la unidades básicas para las medidas de longitud, superficie, capacidad, volumen y peso, cuyos múltiplo y submúltiplos siguen el sistema decimal y la formación de vocablos a partir de prefijos griegos y latinos. Los textos divergen en la definición de la unidad monetaria que varía entre el real y la peseta justificada por las correspondientes legislaciones sobre el sistema monetario en España.

Aunque los procedimientos forman parte de la presentación de conceptos, estos varían según los textos enfocando los procesos para la escritura de números métricos o la reducción de medidas antiguas a las métrico-decimales y el uso de tablas de equivalencias.

> *Búsquese por partes la equivalencia del número de varas, piés & en la tabla correspondiente, colóquense unas debajo de otras de modo que la coma ó signo decimal forme columna, súmense estas cantidades colocando el signo decimal en la suma debajo de los de los sumandos y dicha suma expresará la equivalencia pedida. v. g.* (Sancérrit, 1860, p. 33)

> *¿Cómo se escriben? Representando los hectómetros unidades diez veces menores que los kilómetros, es preciso que la cifra que los represente esté un lugar á la derecha de la que represente los kilómetros, escribiéndose por tanto:* $5^{km}, 8''$ (Alvarado, 1883, p. 14).

3.3.2. Sistemas de representación

Los modos de representación de conceptos mayormente utilizados en estos documentos son el textual, el numérico y el tabular; el modo gráfico aparece en menor grado para la representación de unidades de medida como el decímetro y el metro cuadrado con algunos de sus divisores como el decímetro y el centímetro cuadrado (Figura 3).

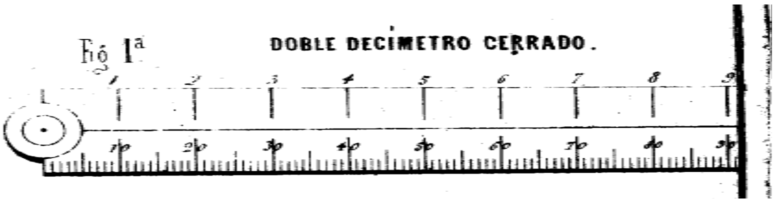


Figura 3. Doble decímetro.
Fuente: Sancérrit (1860).

Ambos textos incluyen una descripción del litro como instrumento de medida y, en Sancérrit (1860), de algunas pesas y las formas geométricas de éstas. “El litro es una medida cuyo contenido es igual á un decímetro cúbico figura 3ª. Se le da la forma de jarro redondo por ser más cómodo para los usos comunes.” (p. 13).

> *En la práctica se usan dos clases de pesas según que sean para grandes ó pequeños pesos. Las primeras son de hierro con un anillo en la parte superior para manejarlas, tienen la figura de un cono o pirámide truncada y se afinan poniéndoles plomo en la parte inferior.* (Sancérrtit, 1860, p. 17)

Con los sistemas de representación se procura una relación con los usos comunes que se dan a las unidades de pesas y medidas. Una manera de hacer “visibles” los nuevos conceptos que han de ser aprehendidos y aplicados por los puertorriqueños.

3.3.3. Contextos y situaciones

Los fenómenos que caracterizan a contextos como el natural, el matemático y el comercial, utilizados en los textos, se reconocen en situaciones físico-naturales como la definición del gramo: “El peso en el vacío de un centímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de 4 grados del termómetro centígrado” (Alvarado, 1883, p. 13); geométricas y aritméticas como las representaciones con figuras planas o cuerpos espaciales y la aplicación de operaciones: “es un cubo de un metro de lado, es decir. Que cada una de sus caras es un metro cuadrado” (Sancérrit, 1860, p. 11); y comerciales como la medida de productos de consumo común: “Para medir los líquidos como el vino, agua, etc., y también para los áridos como la sal, maíz y toda especie de granos cuando no se aprecian por el peso” (Sancérrit, 1860, p. 13).

3.3.4. Principios didácticos

No se aprecian en los textos.

4. Conclusiones

Los textos de matemáticas utilizados en Cuba, Filipinas y Puerto Rico para la difusión del SMD presentan similitudes con los textos editados en la España peninsular en la segunda mitad del siglo XIX, así como ciertas particularidades que los diferencian (tabla 4).

Indiscutiblemente la autoría de los textos corresponde en su mayoría a personas vinculados al sistema escolar, que conocen los procesos de enseñanza de las matemáticas y la enseñanza en general. Así, en España —tanto en la Península como las posesiones de Ultramar: Cuba, Filipinas y Puerto Rico— la presencia de profesores en la edición de textos de matemáticas marca una particularidad en el proceso de difusión del SMD entre los pobladores: se refleja la responsabilidad del maestro o profesor en los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos y estructuras matemáticas y su papel como agente para el cambio dentro del Sistema Educativo español[1]. Los manuales se dirigen, prioritariamente a los escolares de primaria. Su finalidad es alfabetizar a los ciudadanos mediante una modernización de sus conocimientos y un inicio temprano en su aprendizaje.

En cuanto a los textos, propiamente su estructura y contenido, se identifican como estilos predominantes para la presentación del SMD textos pequeños, de pregunta-respuesta o de narración teórica breve, que fomentan un aprendizaje memorístico, en los que las tablas toman un papel significativo para la presentación de equivalencias entre sistemas metrológicos.

La inclusión del SMD en textos de matemáticas se realiza de dos formas distintas: como un apartado anexo a determinados textos de aritmética para la enseñanza primaria o como el único contenido abordado en el escrito. En varios de los textos peninsulares analizados se identifica como el SMD se incluye como un apartado anexo a los textos de aritmética; por su parte, los documentos pertenecientes a la España de Ultramar se dedican exclusivamente a la presentación del SMD y las equivalencias con las pesas y medidas de los antiguos sistemas. La finalidad de estos textos se centra entonces en la difusión de las nuevas unidades de pesas y medidas mediante su inclusión en el sistema educativo de cada una de las islas y el uso generalizado de los textos y no en la inclusión de este sistema como parte de los contenidos propios de la enseñanza matemática en los primeros niveles educativos.

Peninsulares	**Cuba**	**Filipinas**	**Puerto Rico**
Autor			
Profesores; algunos comerciantes	Profesores	Militares y Oficios variados	Profesores
Estructura del texto			
Pocas páginas; SMD parte de Aritmética. Mayor extensión a final de siglo	Pequeños y extensos	Tablas y Explicación. Extensión diversa	Textos pequeños
Finalidad y objetivo			
Difusión del SMD para usos comunes	Difusión del SMD	Difusión del SMD	Uso en establecimientos educativos
Conceptos			
Escasos **Magnitudes:** L, Su, V, C, So, P **SMD**: sistema legal para los usos comunes	Escasos **Magnitudes:** L, Su, V, P **SMD**: conjunto de arreglos a partir del metro, ley decimal	Omisión **Magnitudes:** L, Su, So, C, P, T, D **SMD**: vinculado al sistema decimal, legal	Omisión **Magnitudes:** L, Su, V, C, P, T, Pr **SMD:** conjunto de pesas y medidas derivadas del metro

[1] La organización del Sistema Educativo español en la segunda mitad del siglo XIX presenta un antes y después de la Ley Moyano de 1857. Con esta ley la enseñanza comprende la primera enseñanza, dividida en elemental y superior; la segunda enseñanza organizada en estudios generales (dos períodos: dos y cuatro años) y estudios de aplicación a las profesiones industriales; y la enseñanza superior y profesional.

Metro: definición instrumental, etimológica y técnico-científica **Unidades de medida**: comercio (metro, litro, kilogramo) **Múltiplos y submúltiplos**: omitidos o ampliemente presentados (prefijos griegos y latinos) **Sistema monetario**: dicotomía en la definición de la unidad básica hasta 1868	**Metro**: técnico-científico; etimológica, instrumental **U. de medida**: m, m^2, a, m^3, e, l, g. Presentación uniforme **Múltiplos y submúltiplos**: prefijos griegos y latinos, sistema decimal. Recalca la relación entre sistemas **Sistema monetario:** el real español. Mención del franco francés	**Metro**: perspectiva científica **U. de medida:** m, m^2, a, m^3, l, kg, d, peso fuerte (de Filipinas) **Múltiplos y submúltiplos**: derivados del sistema decimal y formados por prefijos griegos y latinos **Sistema monetario:** el peso fuerte de Filipinas; el real español en la Península	**Metro:** Técnico-científico **U. de medida:** m, m^2, a, m^3, l, g **Múltiplos y submúltiplos:** siguen el sistema decimal, prefijos griegos y latinos **Sistema monetario:** real y peseta
Procedimientos			
Desarrollo de destrezas: lectura y escritura de números métricos, uso de tablas de equivalencias, aplicación de operaciones con decimales	Desarrollo de destrezas.	Para la aplicación de operaciones sencillas. No muestran incentivar el desarrollo de varias destrezas	Desarrollo de destrezas: lectura y escritura, reducción de medidas y uso de tablas
Representaciones			
Textual, tabular, numérico. Simbólico y gráfico en menor grado	Textual, tabular y numérico. Pocas representaciones gráficas. Algunos instrumentos de medida	Tabular y textual. Simbólica y numérica. Algunos instrumentos de medida	Textual: numérico y tabular. Gráfico en menor grado. Algunos instrumentos de medida
Contextos y situaciones			
Contextos: matemáticos, naturales, mercantiles	Matemático y natural	Naturales y comerciales	Natural, matemático y comercial
Principios didácticos			
Son escasos; se aprecian en algunos textos	No se aprecian	Se incluyen con claridad	No se aprecian

Nota. SMD = Sistema Métrico Decimal; L = longitud; Su = superficie; V = volumen; C = capacidad; So = solidez; P = peso; D = dinero; T = tiempo; Pr = precio, m = metro, m^2 = metro cuadrado; m^3 = metro cúbico; a = área; e = estéreo; l = litro; g = gramo; kg = kilogramo; d = día.

Tabla 4. Datos obtenidos de las unidades de análisis

Si bien en todos los textos pueden reconocerse aspectos comunes en la presentación del SMD, como estructura matemática éste se reconoce sólo en los textos editados en Cuba. Estos enfatizan en la presentación de conceptos propios del sistema y en mostrar situaciones meramente matemáticas para ilustrar su utilidad y aplicaciones. Los textos restantes, incluidos los peninsulares, procuran mostrar la cualidad instrumental del SMD; es decir, presentarlo en asociación con la realidad cotidiana ejemplificándola con situaciones comunes como el comercio de productos de consumo tradicional.

Los aspectos procedimentales sufren una ruptura en el caso de los textos de Filipinas. El desarrollo de destrezas como la lectura y escritura de medidas métrico-decimales, la reducción de medidas y el uso de tablas no corresponden a procedimientos identificables en los textos de esta isla, en los que se enfatiza la multiplicidad decimal entre múltiplos y submúltiplos; situación que contrariamente ocurre en los otros documentos, pero que está acorde con la forma estructural en que matemáticamente se presenta el sistema en estos textos.

Los modos de presentación de los conceptos mantienen una línea general en todo el territorio de la corona española. Las representaciones textuales, numéricas y tabulares marcan la semejanza entre los textos, mientras que las gráficas no son utilizadas en los textos cubanos.

Finalmente, la exposición de principios o actividades didácticas para una adecuada inclusión del SMD en los procesos de enseñanza y aprendizaje no parece ser objetivo de los autores, a excepción de los textos editados en Filipinas en los que es posible reconocer diversos propósitos didácticos tomados en consideración en la elaboración de las obras.

Tal como sucede con el estudio previo (Picado, 2009) el análisis permite una descripción de la forma en que se presenta el SMD en textos de matemáticas en un contexto y época específicos. De igual forma, propicia futuras investigaciones sobre los cambios y las directrices que la adopción del SMD produjo en los diferentes sistemas educativos de cada una de las posesiones españolas en el siglo XIX y un estudio de las reformas curriculares que estos cambios pudieron haber originado.

5. Agradecimientos

El estudio ha contado con el apoyo y financiación de la Junta de Becas de la Universidad Nacional y el Fondo de Incentivos del Consejo Nacional para Investigaciones Científicas y Tecnológicas del Ministerio de Ciencia y Tecnología de la República de Costa Rica.

Se ha realizado dentro del Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico (FQM-193), del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación, con sede en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Bibliografía

Aróstegui, J. (1995). *La investigación histórica: teoría y método*. Crítica. Barcelona, España.

Cardoso, C. (1989). *Introducción al trabajo de la investigación histórica: conocimiento, método e historia*. Crítica. Barcelona, España.

Gómez, P. (2002). *Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. EMA, 7*(3), 251-292.

González, M. T. y Sierra, M. (2003, julio). El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. En Castro, E. (Coord.), *Investigación en*

Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 109-130). Universidad de Granada. España.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* Tesis doctoral, Universidad de Granada.España.

Maz, A. (2000). *Tratamiento de los números negativos en textos de matemáticas publicados en España en los siglos XVIII y XIX.* Tesis de máster. Universidad de Granada. España.

Maz, A. y Rico, L. (2011). *Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX*. Universidad de Granada. España. Documento no publicado.

Picado, M. (2009). *Tratamiento del Sistema Métrico Decimal en textos de matemáticas en España en el período 1849-1892*. Tesis de máster. Universidad de Granada, España.

Picado, M. y Rico, L. (2011a). *Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. PNA 6*(1), 11-27*.*

Picado, M. y Rico, L. (2011b). *La selección de textos en la investigación histórica. EPSILON, 28*(1), 99-112.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). *Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales*. *Suma*, *58*, 7-23.

Ruiz, J. (1997). El método histórico en la investigación histórico-educativa. En N. De Gabriel y A. Viñao (Eds.), *La investigación histórico-educativa.* Ronsel. Barcelona, España.

Salkind, N. J. (1999). *Métodos de investigación*. Prentice-Hall. México, D.F., México.

Este trabajo fue originalmente presentado como Picado, M. y Rico, L. (2011, Junio). El sistema métrico decimal en textos de matemáticas en Cuba, Puerto Rico y Filipinas en la segunda mitad del siglo XIX. En A. Gitirana, F. Bellemain, W. Branco, G. Lisboa, G. Guimarães, F. Gomes, et al. (Eds.), *Actas de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recife, Brasil: Laboratório de Educação Matemática e Tecnológica.

Miguel Picado: Doctor y máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Licenciado en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad Nacional de Costa RicaProfesor e investigador en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. Sus estudios se centran en la Historia de la Educación Matemática, con énfasis en el Sistema Métrico Decimal, y la formación de profesores. Editor de la revista PNA. **miguepicado@hotmail.com**

Luis Rico: Doctor en Matemáticas. Catedrático y Director del Departamento de Didáctica de la Matemática de la universidad de Granada. Miembro del Grupo Internacional de Expertos en Matemáticas para el Proyecto PISA 2003 de la OCDE, (2000- 2004). Spanish National Research Coordinator of the Teachers Education Study in Mathematics (TEDS-M), International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) (2006-2011). Investigador principal del Equipo “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico”, FQM-193. I, II y III Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI) de la Junta de Andalucía (1988-2011). **lrico@ugr.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 85-96

Problemática y recursos en la interpretación de las tablas de contingencia

Gustavo R. Cañadas, José M. Contreras, Pedro Arteaga, María M. Gea

Fecha de recepción: 13/12/2011
Fecha de aceptación: 20/12/2012

Resumen	Las tablas de contingencia aparecen diariamente en la prensa y el trabajo profesional, pero se les presta poca atención en la enseñanza. En este trabajo resumimos las investigaciones sobre errores en su lectura y describimos algunas medidas de asociación que pueden ayudar a interpretar correctamente la asociación de las variables en dicha tabla y podrían ser incluidos al final de la Educación Secundaria Obligatoria o del Bachillerato. **Palabras clave**: Tablas de contingencia, asociación y dificultades de interpretación.
Abstract	Contingency tables are frequent in daily press and professional work, but receive little attention in education. In this paper we summarize research on reading errors in these tables and describe some association coefficients that can help interpret correctly the association between variables represented in a contingency table. These tolos may be included at the end of Secondary Education or in High School levels. **Keywords**: Contingency table, association and interpretation difficulties.
Resumo	Las Tabelas de contingência aparecem diariamente nos jornais e trabalho profissional, mas recebem pouca atenção na educação. Este artigo resume a pesquisa sobre erros de leitura e descrevem algumas medidas de associação que podem ajudar a interpretar corretamente a associação das variáveis na tabela e poderian ser incluídas no final do ensino secundário obrigatório ou ensino médio. **Palavras-chave:** Tabelas de contingência, associação e dificuldades de interpretação.

1. Introducción

En la actualidad, cada vez es más habitual valorar la importancia de analizar críticamente la información estadística, como herramienta valiosa para conocer y analizar mejor la realidad. Una de las formas más comunes de presentación de la información en los medios de comunicación ó incluso Internet es mediante el formato de tabla de doble entrada o tabla de contingencia, tema al que se presta poca atención en la enseñanza, suponiendo que su lectura e interpretación es sencilla.

Las tablas se pueden utilizar para comunicar información y como instrumento de análisis de datos, así como para retener en la memoria una gran cantidad de información en forma eficiente (Cazorla, 2002). Tienen un papel esencial en la organización, descripción y análisis de datos, al ser un instrumento de transnumeración, forma básica de razonamiento estadístico que proporciona nueva información, al cambiar de un sistema de representación a otro (Wild y Pfannkuch, 1999). En la enseñanza, este formato de presentación de la información ayuda a visualizar conceptos y relaciones abstractas difíciles de comprender (Postigo y Pozo, 2000). Sin embargo, a pesar de su supuesta simplicidad no es un tema tan sencillo como aparenta, incluso en el caso elemental en que la tabla sólo tiene dos filas y dos columnas (tabla 2x2).

En este trabajo se hace un breve resumen de los resultados de la investigación en Psicología y Didáctica de la Matemática sobre el tema. Seguidamente se describen algunos procedimientos sencillos que ayudan a identificar el tipo de asociación en las tablas 2x2. La finalidad es informar al profesor de Educación Secundaria y Bachillerato, quien podría incluir el estudio de estos procedimientos en la enseñanza de la estadística.

2. Dificultades de interpretación en las tablas de contingencia

Estas investigaciones las inician Inhelder y Piaget (1955), quienes pensaban que la comprensión de la asociación sería el último paso en el desarrollo del razonamiento sobre probabilidad. Los autores describen las estrategias en los juicios de asociación siguiendo el esquema de la Tabla 1. Cuando se pide estudiar la posible asociación entre las variables *A* y *B* a partir de los datos de la tabla, los sujetos al alcanzar la adolescencia comienzan usando sólo la celda *a* para juzgar la asociación; es decir consideran que hay asociación sólo si el número de casos en que se presentan a la vez *A* y *B* es suficientemente elevado.

	B	**No B**	**Total**
A	**A**	**B**	**a + b**
No A	**C**	**D**	**c + d**
Total	**a + c**	**b + d**	**a + b + c + d**

Tabla 1. Esquema de una tabla de contingencia 2x2

Entre los 12-15 años, los alumnos solamente comparan celdas dos a dos (por ejemplo comparan a con *b*), sin entender que *a* y *d* tienen el mismo peso en relación a la asociación. Otro nivel posterior sería comprender cuales son los casos favorables (*a* y *d*) y desfavorables (*b* y *c*) de la asociación, sin compararlos. Finalmente, se establecen las relaciones diagonales (*a* y *d* serían favorables a la asociación, mientras que *b* y *c* serían contrarias), comparándolas entre sí o con el total (*a*+*b*+*c*+*d*).

Jenkins y Ward (1965) indican que la estrategia de comparar las diagonales sólo se puede usar con frecuencias marginales iguales para la variable independiente y proponen para casos generales como estrategia correcta comparar la diferencia entre las probabilidades *P(B/A)* y *P(B/noA)*. Otros autores han estudiado la influencia de las teorías previas en el contexto del problema en los juicios de asociación (Jennings, Amabile y Ross, 1982; Wright y Murphy, 1984; Alloy y Tabachnik, 1984). En términos generales se puede decir, que cuando los datos no reflejan los resultados esperados por estas teorías, aparece en los sujetos un conflicto cognitivo. Más recientemente Estepa (1993) estudia las concepciones que muestran los sujetos respecto a la asociación, describiendo las siguientes:

1. *Concepción causal:* Este término se emplea cuando el sujeto sólo considera la asociación entre variables si puede adjudicarse a la presencia de una relación causal entre las mismas.
2. *Concepción determinista:* Este término describe el caso en que los sujetos no admiten el caso de excepciones, implicando esto que a cada valor de la variable independiente le corresponde un solo valor de la variable dependiente, es decir, esperan una dependencia funcional de tipo determinista. En el caso de la tabla 2x2, este caso se presenta cuando los sujetos afirman que no hay correspondencia por el hecho de que en la tabla hay casos en las celdas *b* o/y *c*. Otro ejemplo sería el caso en que el sujeto exige la existencia de una expresión algebraica que relacione las variables.
3. *Concepción unidireccional:* En este caso el estudiante no admite la asociación inversa, considerándose la intensidad de la asociación, pero no su signo. Presentándose casos en los que se considera la asociación inversa como independencia.
4. *Concepción local:* Esta concepción se presenta cuando los sujetos, dan su solución mirando únicamente algunos casos aislados. Por ejemplo, cuando sólo se tienen en cuenta los casos que confirman la asociación, observando una sola distribución condicional o fijándose en la celda de máxima frecuencia.

En lo que sigue utilizamos un ejemplo sencillo, para analizar posibles estrategias correctas para evaluar la asociación en una tabla 2x2 e introducimos algunas medidas de asociación, sencillas, que se podrían estudiar al final de la educación secundaria o Bachillerato para ayudar a los alumnos a establecer un juicio de asociación correcto en una tabla 2x2, superando los sesgos descritos.

3. Frecuencias en una tabla 2x2

La tabla de contingencia nos proporciona una forma resumida de representar datos de dos variables que se quieren estudiar, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Problemas de una enfermedad. Supongamos que en un hospital se comparan dos fármacos, uno nuevo y uno antiguo, en 300 pacientes clasificados en dos tipos de niveles de una cierta enfermedad (altos y bajos). Tras la recogida de datos se obtienen los que se incluyen en la Tabla 2. ¿Cómo podemos ver si el tratamiento nuevo es preferible al anterior?

Tipo de tratamiento(X)	**Problemas neuronales (Y)**	
	Altos(y1)	**Bajos(y2)**
Antiguo(x1)	**40**	**60**
Nuevo(x2)	**70**	**130**

Tabla 2. Resultados de un estudio clínico

Para analizar esta situación se consideran dos variables: la variable X que representa el tratamiento, con dos valores (x_1, x_2), y la variable Y, que se refiere a los problemas (y_1, y_2). Usualmente f_{ij} indica la frecuencia absoluta de cada celda (con que aparece el par (x_i, y_j)) y h_{ij} la frecuencia relativa del par de valores (x_i, y_j), verificándose la relación siguiente.

$$h_{ij}=f_{ij}/n$$

Una posible representación gráfica de esta tabla sería el diagrama de barras apilado (Figura 1), que también podría representarse en porcentajes, bien absolutos (respecto al total de la tabla), bien relativos (respecto a cada valor de la variable *X*).

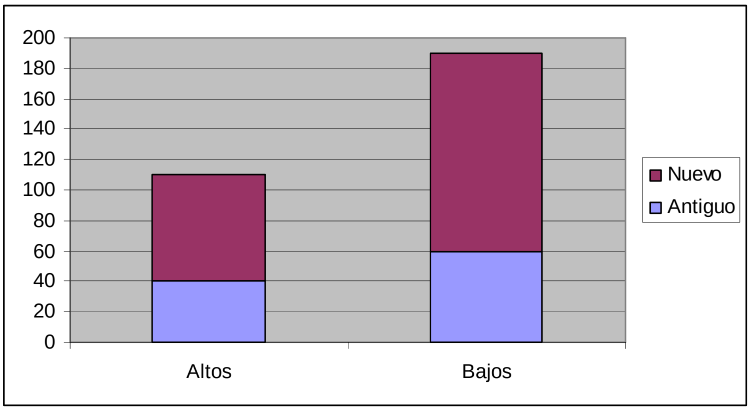


Figura 1. Datos del experimento

A partir de la tabla de contingencia (bidimensional) se pueden obtener diferentes distribuciones de una variable (unidimensional). Si en la tabla de frecuencias se suman las frecuencias por columnas, se obtiene en cada columna j, el número de individuos $f_{.j}$ con un valor de la variable $Y=y_j$, independientemente del valor *X*. A la distribución así obtenida se le conoce como distribución marginal de la variable *Y*. De forma análoga podemos definir la distribución marginal de la variable *X*. En el ejemplo hay 110 pacientes con problemas con un nivel alto y 190 pacientes con problemas con un nivel bajo, 100 pacientes con el tratamiento antiguo y 200 pacientes con el tratamiento nuevo, y 300 pacientes en total.

Es posible que el interés sea focalizar solamente en una parte de los pacientes, por ejemplo en los pacientes con el tratamiento nuevo. Para ello se calculan distribuciones condicionales. Si representamos por $h(x_i|y_j)$ la frecuencia relativa condicional del valor x_i entre los individuos que presentan el carácter y_j, obtenemos la tabla 3, donde observamos que el porcentaje de enfermos con problemas altos y bajos es aproximadamente el mismo (pero no exactamente) en los dos tratamientos y que las frecuencias condicionales por filas suman 1. Igualmente se calcularían las distribuciones condicionales por columna.

$$h(x_i|y_j) = \frac{f_{i,j}}{f_{.j}} = \frac{h_{i,j}}{h_{.j}}$$

Tipo de tratamiento(X)	Problemas neuronales (Y)		
	Altos(y1)	**Bajos(y2)**	**Total**
Antiguo(x1)	**0,4**	**0,60**	**1**
Nuevo(x2)	**0,35**	**0,65**	**1**

Tabla 3. Distribuciones condicionales por fila

4. El concepto de asociación

En general, cuanto tenemos una tabla de contingencia estamos interesados en ver si las variables en filas y columnas están relacionadas entre sí. Hablaremos en este caso de asociación, para diferenciar del concepto de correlación, que se refiere a variables numéricas (mientras que, generalmente las variables en una tabla de contingencia son cualitativas). En lo que sigue tratamos de proporcionar instrumentos para contestar a las preguntas siguientes (Batanero y Díaz, 2008):

1. ¿Cómo podemos determinar si hay o no asociación entre las variables en una tabla de contingencia?
2. ¿Podría medir la intensidad de esta relación mediante un coeficiente (coeficiente de asociación)? ¿Se puede medir el signo en algunos casos?
3. ¿Cómo interpretar estos coeficientes?

a) Independencia total					b) Asociación parcial					c) Asociación perfecta				
	Y_1	Y_2	Y_3	T		Y_1	Y_2	Y_3	T		Y_1	Y_2	Y_3	T
X_1	10	20	70	100	X_1	10	80	10	100	X_1	100			100
X_2	20	40	140	200	X_2	80	20	100	200	X_3			200	200
T	30	60	210	300	T	90	100	110	300	X_3		100		100

Figura 2. Diferentes tipos de asociación (T=Total)

Para deducir si las dos variables que forman una tabla de contingencia están o no asociadas se requiere un proceso de cálculo a partir de las frecuencias de la tabla. Podemos encontrar una variedad de situaciones (ver Figura 2)

- En el caso c) observamos que a cada valor de la variable *X* corresponde un solo valor de la variable *Y* y viceversa. Es claro que en este caso las variables están asociadas, y más aún se trataría de una asociación perfecta pues con toda seguridad podemos predecir el valor que tomara *Y* sabiendo el valor de *X* y viceversa.
- En el caso a) independencia, observamos que las frecuencias absolutas dobles de los valores de Y_1, Y_2, Y_3 son proporcionales en X_1 y X_2. Es decir, las frecuencias relativas condicionales de los valores de Y_1, Y_2, Y_3 son iguales en X_1 y X_2. Diremos que las variables son independientes pues las frecuencias relativas condicionales de una de ellas no dependen del valor de la otra.
- Los casos a) y c) tienen solo interés teórico pues lo más frecuente es encontrarse en el caso b) donde hay una asociación parcial en los datos, que sería el caso correspondiente al ejemplo, En este caso las frecuencias absolutas dobles de los valores de Y_1, Y_2, Y_3 no son proporcionales en X_1 y X_2. Es decir, las frecuencias relativas condicionales de los valores de Y_1, Y_2, Y_3 son diferentes en X_1 y X_2. Lo que nos va interesar desde el punto de vista estadístico es saber cuando esta relación seria estadísticamente significativa y cuál sería la intensidad de esta relación.

5. Independencia

Como hemos visto, un método para estudiar la posible asociación o independencia entre dos variables es mediante el estudio de las distribuciones condicionales. Pero hay otras propiedades que nos pueden informar de la independencia (Batanero y Díaz, 2008). Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo 2. Práctica deportiva. Un investigador quiere estudiar si hay asociación entre la práctica deportiva y la sensación de bienestar. Extrae una muestra aleatoria de 250 sujetos. Los datos aparecen a continuación en la Tabla 4.

Sensación de bienestar	Práctica deportiva		Total
	Sí	No	
sí	90	60	150
no	60	40	100
Total	150	100	250

Tabla 4. Práctica deportiva

Al proponer este ejercicio a los estudiantes, muchos podrían pensar que las variables están relacionadas, pues la celda donde hay mayor frecuencia es en las personas que tienen sensación de bienestar y practica deporte. ¡Pero sería un error basar el juicio de asociación en los datos de una sola celda de la tabla! Para analizar la asociación podemos comparar la proporción de personas con sensación de bienestar entre los que practican deporte y los que no. Obtendríamos la tabla de frecuencias relativas condicionales por columnas (Tabla 5), donde observamos que la proporción de personas con y sin sensación de bienestar es la misma entre los que practican deporte y los que no. Es decir frecuencias relativas condicionales por columnas son iguales. Por otro lado, estas frecuencias relativas condicionales por columnas son también iguales a las frecuencias relativas marginales por filas, es decir a la proporción de personas con y sin insomnio en el total de la muestra o lo que es lo mismo, la distribución de *X* no cambia cuando se condiciona por un valor de *Y*.

Sensación de bienestar	Práctica deportiva		Total
	Sí	No	
sí	90/150=0,6	60/100=0,6	150/250=0,6
no	60/150=0,4	40/100=0,4	100/250=0,4
Total	150	100	250

Tabla 5. Frecuencias relativas condicionales por columnas

En consecuencia, una primera propiedad es que la variable *X* es independiente de *Y* si todas las distribuciones de frecuencias relativas que se obtienen al condicionar *X* por diferentes valores de $Y= y_j$ son iguales entre si e iguales a la distribución marginal de la variable *X*, es decir, cuando se verifica para todo par de valores i, j.

$$h(x_i|y_j)= h_i.$$

En el caso de independencia, se cumplen, además, las propiedades siguientes, que podemos comprobar en el ejemplo:

- La frecuencia relativa marginal de cualquier valor de *Y* condicionada por un valor de *X*, es igual para todos los valores de *X*, es decir *Y* no depende de *X*: $h(y_j|x_i)= h_{.j}$,
- La frecuencia relativa doble es igual al producto de las frecuencias relativas marginales de su fila y su columna: $h_{ij}= h_{i.}\, h_{.j}$, para todo i, j.

Esta última propiedad nos da un método de cálculo de las frecuencias teóricas en caso de independencia.

Para ello, desarrollamos la fórmula anterior: $h_{ij}= h_{i.}\ h_{.j}$; $\frac{f_{ij}}{n} = \frac{f_{i.}}{n} \times \frac{f_{.j}}{n}$ y simplificando, obtenemos: $f_{ij} = \frac{f_{i.} \times f_{.j}}{n}$

El valor $e_{ij} = \frac{f_{i.} \times f_{.j}}{n}$ se denomina frecuencias esperadas en caso de independencia; calculadas para el ejemplo tendremos la Tabla 6, donde podemos comprobar que, para este caso, las frecuencias observadas son iguales a las frecuencias esperadas, y por tanto corresponde al caso de independencia.

Sensación de bienestar	Práctica deportiva	
	sí (y_1)	no (y_2)
sí (x_1)	90 (e_{11})	60 (e_{12})
no (x_2)	60 (e_{21})	40 (e_{22})

Tabla 6. Frecuencias esperadas en caso de independencia

6. Signo de la asociación en tablas 2x2

En las tablas 2x2 podemos diferenciar entre dependencia directa y dependencia inversa y algunas celdas nos informan del signo de la asociación en este caso, como podemos comprobar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Alergia (Estepa, 1993). Se quiere saber si sufrir o no de alergia tiene relación con llevar una vida sedentaria (llevar una vida sin realizar ningún tipo de ejercicio físico). Los datos de 300 sujetos se presentan en la Tabla 7, donde observamos que hay 130 personas con alergia y vida sedentaria, es decir con los dos caracteres al mismo tiempo y asimismo, 120 personas sin alergia y con vida no sedentaria. En total 250 de las 300 personas de la muestra o tienen a la vez los dos caracteres o no tienen ninguno. Estas dos celdas (presencia-presencia y ausencia-ausencia) informan que la asociación en la tabla es directa (Tabla 8).

Forma de vida	Sufre alergia	No sufre alergia
Sedentaria	130	30
No sedentaria	20	120

Tabla 7. Frecuencias absolutas dobles

Forma de vida	Sufre alergia	No sufre alergia
Sedentaria	Dep. directa	Dep. inversa
No sedentaria	Dep. inversa	Dep. directa

Tabla 8. Significados de las celdas en una tabla 2x2

Por el contrario en las otras dos celdas, se da un solo carácter y el otro no y serían las celdas favorables a una asociación inversa. En el ejemplo hay solo 50 casos en estas dos celdas y deducimos, en consecuencia que la asociación es directa.

7. Medidas de asociación en tablas 2x2

En el ejemplo anterior rechazamos la independencia de las variables, pues no se cumplen ninguna de las propiedades vistas para el caso de independencia. Para poder juzgar si la asociación es alta o baja, el siguiente paso sería calcular algún valor que mida la intensidad de la asociación. A continuación vamos a mostrar algunos coeficientes que sirven para medir esta intensidad, así como el signo de la asociación y tienen una interpretación sencilla (Ato y López, 1996):

- Si el coeficiente es positivo la asociación es directa, es decir, *A* y *B* suelen suceder juntos. Por tanto, si se da *A* suele darse *B*; por tanto habrá muchos casos en la celda f_{11}. Por otro lado, si no se da *A*, lo más frecuente es que tampoco se de B, por tanto habrá muchos casos en la celda f_{22}. Por ejemplo "ser rubio" y "ojos claros" tendría asociación directa, pues habrá muchos casos de rubios con ojos claros y también de morenos con ojos oscuros.

- Si el coeficiente es negativo la asociación es inversa, es decir, si se da *A* no suele ocurrir *B* y si se da *B* no suele ocurrir *A*. Habría mayor frecuencia en las celdas f_{21} y f_{12}. Por ejemplo, "hacer deporte habitualmente" tendría una asociación negativa con la variable "estar obeso".
- Si el coeficiente es nulo no existe asociación, es decir, son independientes. No se encuentra un patrón en las diferentes celdas.

A continuación calculamos e interpretamos algunos de estos coeficientes, usando el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4. Placebo. Un grupo de 230 personas aquejadas de insomnio fue dividido aleatoriamente en dos subgrupos. Al primer grupo se ofreció unas píldoras realmente somníferas para que tomaran una cada noche antes de acostarse, y al otro se ofreció un placebo (médicamente sin efecto somnífero). Al cabo de un mes fueron interrogados sobre la eficacia de las pastillas tomadas, con el resultado mostrado en la tabla 9:

	Dicen ser eficaces	Dicen no ser eficaces	Total
Píldoras somníferas	**80**	**15**	**95**
Placebo	**56**	**79**	**135**
Total	**136**	**94**	**230**

Tabla 9. Personas aquejadas de insomnio

7.1. Riesgo relativo

Este coeficiente se puede calcular por filas y columnas. El riesgo relativo por columnas indica cuanto más probable es la presencia de *A* cuando se da *B* que entre aquellos casos en los que no se da *B*, y se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$RR_{columnas} = \frac{P(A/B)}{P(A/noB)} = \frac{f_{11}/f_{.1}}{f_{12}/f_{.2}} = \frac{f_{11}f_{.2}}{f_{.1}f_{12}}$$

En el ejemplo tendríamos:

$$RR_{columnas} = \frac{P(Eficaces/somnífero)}{P(Eficaces/Placebo)} = \frac{80x94}{136x15} = 3{,}68$$

El $RR_{columnas} > 1$, nos dice que es 3,68 veces más probable sentir un efecto con el somnífero que con el placebo. Por tanto indica una asociación positiva y fuerte entre el medicamento y el efecto.

El riesgo relativo por filas indica cuanto más probable es la presencia de *B* con *A* que entre aquellos que no pose en *A* y en nuestro ejemplo se obtendría el siguiente valor:

$$RR_{filas} = \frac{P(somnífero/Eficaces)}{P(Placebo/NoEficaces)} = \frac{80x135}{56x95} = \frac{10800}{5320} = 2{,}03$$

El $RR_{filas} > 1$, nos dice que existe asociación positiva y que es 2,03 veces más fácil haber tomado píldoras somníferas entre las personas que consiguieron el efecto somnífero y por tanto las consideraron eficaces que entre las que no consideraron eficaces las píldoras tomadas.

Como vemos en el ejemplo, los riesgos relativos por filas y columnas pueden no coincidir. Esto es debido a que estamos considerando una de las dos variables como dependiente de la otra; por tanto la fórmula varía dependiendo de cuál sea la variable que se considere independiente (es una medida de asociación asimétrica). En general, obtenemos la siguiente interpretación

- El $RR = 1$, informa que no hay asociación entre las variables.
- El $RR > 1$, nos dice que existe asociación positiva. Es lo que ocurre en el ejemplo mostrado.
- El $RR < 1$, indica que existe una asociación negativa.

7.2. Razón de productos cruzados

Este coeficiente, como su nombre indica, es el cociente entre el producto de las celdas favorables a la asociación positiva y las favorables a la asociación negativa y se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$RC = \frac{f_{11} f_{22}}{f_{12} f_{21}} = \frac{f_{11} / f_{21}}{f_{12} / f_{22}} = \frac{C_1}{C_2}$$

Como vemos, la razón de productos cruzados es razón entre dos cocientes: C_1 es la razón de casos en que se presenta *A* y los que no se presenta *A* cuando está presente *B*. C_2 es la razón de casos *A* y no *A* cuando no está presente el factor *B*. En el ejemplo anterior tenemos la siguiente razón de productos cruzados:

$$RC = \frac{f_{11} f_{22}}{f_{12} f_{21}} = \frac{80x79}{15x56} = \frac{6320}{840} = 7{,}52$$

La interpretación de este valor es que entre los pacientes que encontraron eficaz el medicamento, hay 80 que tomaron píldoras somníferas por cada 56 que tomaron placebo. Por otro lado, entre los pacientes que no sintieron efecto hay 15 pacientes con píldoras somníferas por cada 79 con placebo. Se ve en el ejemplo que el somnífero fue mucho más eficaz que el placebo.

Conviene observar que la Razón de productos cruzados es también una medida asimétrica, es decir, *A* es la variable dependiente y *B* la independiente y si cambiamos la variable dependiente e independiente cambiará su valor. Se interpreta en la siguiente manera:

- El $RC = 1$, implica que las razones entre los casos en que aparecen *A* y no *A*, cuando está *B*, y los casos de *A* y no *A* cuando no está presente *B*, son iguales. Las variables serían independientes.
- El $RC < 1$, implica que la razón de casos en que aparece *A* y no *A*, cuando está presente *B* es menor que la de casos de *A* y no *A* cuando no está presente *B*. Hay una asociación inversa.
- De forma similar se interpreta cuando $RC > 1$ que implica una asociación directa.

7.3. Coeficiente Phi de Pearson

Las medidas anteriores son muy intuitivas y no requieren de procedimientos de inferencia, de modo que su comprensión está al alcance de los estudiantes de secundaria. Para el último curso de Bachillerato, donde los estudiantes de ciencias sociales han estudiado el contraste de hipótesis, podríamos también introducirles, en primer lugar, el coeficiente Phi de Pearson. Dicho coeficiente está basado en el valor Chi-cuadrado, el cual trata de calcular la distancia entre las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas en caso de independencia. Se obtiene el valor 0 en caso de que las frecuencias observadas sean todas iguales a las esperadas, que, como vimos, ocurre sólo si las variables son independientes

$$\chi^2_{\exp} = \sum_i \sum_j \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} .$$

Al ser este coeficiente una suma, cuantos más sumandos tengamos, mayor es el valor que toma, esto quiere decir que al aumentar el número de filas o columnas aparecerán más sumandos. Por otro lado, al depender de las frecuencias observadas y esperadas, es decir, será mayor al aumentar el valor n del tamaño de la muestra; es decir, el coeficiente depende del tamaño de la muestra. Para conseguir un coeficiente que no dependa del tamaño de la muestra se define el coeficiente Phi, que toma valores entre -1 y 1: de la forma siguiente:

$$\Phi = \sqrt{\chi^2 / n}$$

En el caso de tablas 2x2, se puede demostrar fácilmente que la formula quedaría de la siguiente forma:

$$\Phi = \frac{f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}}{\sqrt{f_{1\cdot} f_{\cdot 1} f_{2\cdot} f_{\cdot 2}}}$$

- Cuando la dependencia es directa y perfecta, todos los casos están en las celdas f_{11} y f_{22}, por tanto el coeficiente toma el valor 1. En general, si el coeficiente es positivo, la dependencia es directa y más alta cuanto más se acerque a 1.
- Cuando la dependencia es inversa y perfecta, todos los casos están en las celdas f_{12} y f_{21} y por tanto se obtiene un valor (-1). Si el coeficiente es negativo, la dependencia es inversa y más alta cuanto más se acerque a -1.
- El valor 0 se obtiene cuando hay independencia.

Para aplicar este coeficiente al ejemplo 4, comenzamos calculando las frecuencias esperadas (Tabla 10).

	Dicen ser eficaces	**Dicen no ser eficaces**
Píldoras somníferas	**(95x136)/230=56,17**	**(95x94)/230=38,83**
Placebo	**(135x136)/230=79,83**	**(135x94)/230=55,17**

Tabla 10. Frecuencias esperadas

A partir de ellas obtenemos el valor Chi-cuadrado, que es distinto de 0 y por tanto, los datos no son independientes. Para una evaluación más exacta calculamos el valor Phi de Pearson:

$$\chi^2_{\exp} = \sum_i \sum_j \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = \frac{(80-56{,}17)^2}{56{,}174} + \frac{(15-38{,}83)^2}{38{,}83} + \frac{(56-79{,}83)^2}{79{,}826} + \frac{(79-55{,}17)^2}{55{,}17} = 42{,}13$$

$$\Phi = \sqrt{\chi^2 / n} = \sqrt{42{,}13 / 230} = 0{,}44$$

Observamos que el valor es positivo (dependencia directa, moderada) y, en efecto, aparecen más datos en la diagonal principal f_{11} y f_{22} que en la otra diagonal.

8. Conclusiones

Los ejemplos y coeficientes presentados están al alcance de la comprensión de los estudiantes de los últimos cursos de secundaria excepto quizás el coeficiente Phi, pero este podría ser fácilmente comprensible por los estudiantes de Bachillerato, especialmente en el caso de los de ciencias sociales en el segundo curso, puesto que, una vez estudiado el contraste de hipótesis podría también enseñárseles el contraste Chi- cuadrado.

Pensamos que el resto de las estrategias mostradas (como comparar frecuencias condicionales entre sí o con las marginales, comparar frecuencias observadas con las esperadas en caso de independencia o bien el cálculo de los riesgos relativos y razón de productos cruzados son recursos muy interesantes para evitar a los alumnos los sesgos de razonamiento sobre las tablas 2x2 que se describieron en los antecedentes.

Actualmente hay a disposición de los ciudadanos (por ejemplo en Internet) toda clase de datos, lo que requiere la necesidad de desarrollar una mejor comunicación entre los productores de estadísticas y los consumidores. Muchas de dichas informaciones son presentadas en forma de tablas de contingencia, por lo que una persona estadísticamente culta debiera ser capaz de comprender e interpretar este objeto matemático, que es considerado como sencillo, y consideramos que no recibe la importancia que merece. El currículo escolar ha ofrecido hasta ahora pocas posibilidades para trabajar con este tipo de datos, pues la enseñanza de la estadística usualmente se reduce al estudio de variables cuantitativas. Esperamos que nuestro trabajo contribuya a soslayar este olvido.

Agradecimientos: Proyecto EDU2010-14947 y becas FPU AP2009-2807 y FPI BES-2011-044684 (MCINN-FEDER) y Grupo FQM16 (Junta de Andalucía).

Bibliografía

Alloy, L.B. y Tabachnik, N. (1984). *Assessment of covariation by humans and animals: The joint influence of prior expectations and current situational information*. *Psychological Review, 91,* 112-149.

Ato, M. y López, J.J. (1996). *Análisis estadístico para datos categóricos.* Sintesis Psicología, Madrid.

Batanero, C. y Díaz, C. (2008). *Análisis de datos con Statgraphics.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada.

Cazorla, I. (2002). *A relaçao entre a habilidades viso-pictóricas e o dominio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tesis Doctoral. Universidad de Campinas.

Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent*. Presses Universitaires de France, París.

Jenkins, H. M. y Ward, W.C. (1965). *Judgment of the contingency between responses and outcomes*, *Psychological Monographs,* 79, 1-17.

Jennings, D. L., Amabile, T. M. y Ross, L. (1982). *Informal covariation assessment: Data-based versus theory-based judgments*. En: D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases,* 211-230. Cambridge University Press, Nueva York.

Postigo, Y. y Pozo, J.I. (2000). *Cuando una gráfica vale más que 1000 datos: la interpretación de gráficas por alumnos adolescentes. Revista Infancia y Aprendizaje*, 90, 89 - 110.

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). *Statistical thinking in empirical enquiry (con discusión). International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

Wright, J. C. y Murphy, G.L. (1984). *The utility of theories in intuitive statistics: the robustness of theory-based judgments*. *Journal of Experimental Psychology General,* 113(2), 301-322.

Gustavo R. Cañadas. Lic. en c.c. y t.t. Estadísticas (Universidad de Granada), Master en Metodología (UNED), Master y Doctorado en Didáctica de la Matemática (Universidad de Granada). Fue becado en el Plan de Formación del Profesorado Universitario (2009). Ha publicado trabajos relacionados con las tablas de contingencia.

Email: **grcanadas@ugr.es**

José M. Contreras García. Profesor ayudante doctor de la universidad de Granada. Lic. en ciencias matemáticas, lic. en c.c. y t.t. estadísticas, diploma de estudios avanzados en Estadística e I.O., máster en didáctica de la matemática, máster en estadística aplicada y doctor en didáctica de la matemática. Publicaciones en didáctica de la probabilidad. **jmcontreras@ugr.es**

Pedro Arteaga. Lic. en Matemáticas (Universidad Complutense), Master y doctorado europeo en Didáctica de las Matemáticas (Universidad de Granada). Fue becado en el Plan de Formación del Profesorado Universitario (2007). Ha publicado trabajos relacionados con la comprensión de gráficos y el trabajo con proyectos estadísticos

María Magdalena Gea. Lic. en Matemáticas, Lic. en Ciencias y Técnicas Estadísticas, Máster en Estadística Aplicada y el Diploma de estudios avanzados. Su investigación se desarrolla en torno a la enseñanza y aprendizaje de la asociación estadística (correlación y regresión) en el marco del Plan de Formación de Personal Investigador (2011)

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 97-112

Generación de Muestras Artificiales de Variables Aleatorias Continuas aplicando Métodos Especiales

Carlos R. Primorac, María V. López, Sonia I. Mariño

Fecha de recepción: 19/08/2011
Fecha de aceptación: 18/04/2013

Resumen	Se describe una librería de métodos especiales para la generación de muestras artificiales de variables aleatorias con distribuciones de probabilidad continuas, programada en Octave. Este producto se encuentra incorporado al Entorno Virtual de Enseñanza-Aprendizaje (EVEA) de la asignatura "Modelos y Simulación" de la carrera de Licenciatura en Sistemas de Información de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste (FACENA-UNNE) en Corrientes, Argentina. El mismo apoya el proceso de enseñanza–aprendizaje de los alumnos, propiciando prácticas interactivas y la realización de experimentos con fines comparativos y didácticos **Palabras clave**: entorno virtual, modelos, simulación.
Abstract	This paper describes a special methods library for generating artificial samples of random variables with continuous probability distributions, programmed in Octave. This product has been incorporated into the Virtual Learning Environment (VLE) of "Modelos y Simulación", a subject in the curriculum of the career Licenciatura en Sistemas de Información from the Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (Universidad Nacional del Nordeste) in Corrientes, Argentina. This virtual environment supports the teaching-learning process of students, enabling interactive practices and conducting experiments for comparison and learning. **Keywords**: Virtual Learning Environment, models, simulation
Resumo	Descrevemos uma biblioteca de métodos especiais para a geração de amostras artificiais de variáveis aleatórias com distribuir de probabilidades contínuas, programada em Octave. Este produto encontra-se incorporado ao ambiente virtual de Ensino - Aprendizagem (EVEA) do curso de "Modelos e Simulação" do curso de Licenciatura em Sistemas de Informações da Faculdade de Ciências Exatas e Naturais e Agrimensura da Universidade Nacional do Nordeste (FACENA - UNNE) em Corrientes, Argentina. O mesmo apóia o procésso de Ensino - Aprendizagem dos alunos, proporcionando práticas interativas e também a realização de experimentos com fins comparativos e didáticos. **Palavras-chave:** ambiente virtual de Ensino,modelagem, Simulação.

Introducción

"Modelos y Simulación", contexto en donde se encuadra el presente trabajo, es una asignatura optativa del Plan de estudios de la carrera de Licenciatura en Sistemas de Información, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste (FACENA-UNNE), en Corrientes, Argentina.

El objetivo general de la asignatura es proporcionar una formación sólida en el manejo de los conceptos y técnicas utilizadas en la simulación de sistemas mediante el procesamiento digital de modelos matemáticos. Se enfatizan la búsqueda y la solución de problemas científicos y profesionales aplicando técnicas específicas.

En Primorac et al. (2010) se comentó el régimen de regularización de la asignatura. La Tabla 1 ilustra el número de alumnos inscriptos (AI), regulares (AR) y promocionales (AP) en los ciclos lectivos 2005 a 2010 de la asignatura.

Año	Inscriptos	Regulares	Promocionales
2005	24	1	16
2007	37	2	18
2008	58	3	22
2009	34	2	19
2010	24	1	16

Tabla 1. Alumnos inscriptos, regulares y promocionales en los años 2005-2010 de la asignatura "Modelos y Simulación" (Fuente: elaboración propia)

La asignatura se compone de cuatro grandes ejes temáticos o disciplinares. El primero comprende las unidades donde se introducen los temas de sistemas, modelos, simulación y metodología de un estudio de simulación. El segundo eje aborda la generación de series de números pseudoaleatorios. El tercer eje temático trata la construcción de muestras artificiales representativas de distintas distribuciones de probabilidad, discretas y continuas. El cuarto eje integra los conceptos teóricos y prácticos vistos anteriormente, plasmados en la construcción de modelos de simulación. Este último integra todos los contenidos teóricos prácticos abordados en la asignatura, mediante la modelización y construcción de simulaciones representativas de casos reales.

Es indudable la importancia adquirida por las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la sociedad y, en particular, en el ámbito de la Educación Superior, donde han introducido nuevas formas de trabajo, relación, e incluso cambios en los métodos pedagógicos con los que se superan los métodos tradicionales de difusión de la documentación por parte del profesor (Area Moreira, 2000).

Por ello, como lo expresan Hadad Salomón y Buabud (2010), "es prioritario que las instituciones educativas se adapten a los recursos que los estudiantes utilizan para brindar una educación contemporánea y adecuada", lo que se logra con el fortalecimiento de los recursos proporcionados por las TIC.

Por otra parte, la introducción de las TIC en las aulas de educación superior abrió nuevas posibilidades, facilitando la introducción de la modalidad de blended-learning, enseñanza combinada o mixta.

Se coincide con Totter y Raichman (2009) quienes expresan que “la propuesta diseñada en esta modalidad de blended-learning, tiene por objetivo lograr un incremento en la comprensión e internalización de los conceptos por parte de los estudiantes, brindando nuevas posibilidades de acceso al conocimiento y tendiendo puentes por medio de la utilización de las nuevas tecnologías, hacia una mejor visualización de aquellos conceptos de difícil o imposible representación en clases presenciales de aula”.

El b-learning es una alternativa viable en la actual educación superior. En Totter y Raichman (2010) se comenta además que “la integración a la práctica educativa de las TIC genera nuevos procesos de comunicación a partir de su utilización, permitiendo que los estudiantes los empleen creativamente por medio del trabajo con las actividades específicamente elaboradas o diseñadas para las instancias presenciales”.

En la asignatura “Modelos y Simulación”, desde el año 2005, se aplica la modalidad de aprendizaje combinado o blended learning caracterizada en (Mariño y López, 2007; Mariño y López, 2007b). Desde el año 1999 se difunden numerosos trabajos elaborados por las autoras que incluyen desde el diseño y desarrollo de diversas innovaciones educativas, hasta la elaboración de una metodología para el desarrollo de sistemas de información aplicando el modelado y la simulación (Mariño y López, 2009).

Este trabajo está enmarcado en las acciones de docencia, extensión e investigación impulsadas desde la mencionada asignatura (Mariño y López, 2008b; Mariño y López, 2010). Entre ellas se pueden mencionar: la incorporación de recursos humanos de grado a fin de afianzar y propiciar un ámbito de formación continua en temas específicos de la asignatura, la aplicación de las tecnologías de la información y comunicación plasmadas en innovaciones pedagógicas, la elaboración de materiales didácticos en diversos formatos y la integración de temas abordados en la asignatura con otras disciplinas, otros dominios del conocimiento y la práctica profesional.

Los Entornos Virtuales de Enseñanza y Aprendizaje (EVEA) son aplicaciones informáticas desarrolladas com fines pedagógicos (Ferreira Szpiniak y Sanz, 2007). En trabajos previos (Mariño y López, 2007b; López y Mariño, 2008) se describieron las funcionalidades del EVEA diseñado y desarrollado para esta asignatura, el cual ha evolucionado desde el año 1999. Además, se han publicado artículos donde se detallaron componentes de software creados para la generación de números pseudoaleatorios y su validación (López et al., 1999; Carrillo et al., 2008; Mariño y López 2008; Perez et al., 2009) accesibles desde este EVEA.

Martins et al. (2010) comentan que “la técnica de modelado y simulación de sistemas permite crear ambientes virtuales que imitan el comportamiento de prácticamente cualquier tipo de sistema, a efectos de evaluar su desempeño minimizando los costos de la toma de decisiones”.

En los problemas de simulación frecuentemente se presenta la necesidad de trabajar con variables aleatorias de función de densidad de probabilidad diferente de la uniforme. Por lo tanto, es necesario construir sucesiones de números a partir del conocimiento estadístico de la variable aleatoria en cuestión y haciendo intervenir las tablas de números al azar. Las sucesiones así obtenidas reciben el nombre genérico de muestras artificiales.

Existen distintos métodos para generar muestras artificiales, los que se clasifican en: métodos manuales, métodos generales y métodos especiales.

Los métodos manuales son absolutamente aleatorios, y tienen un interés pedagógico. Tienen como desventajas su lentitud y la imposibilidad de ser reproducidos. Como ejemplo, puede mencionarse un disco dividido en tantos sectores circulares como sucesos elementales o casos posibles tenga el fenómeno aleatorio que se quiere reproducir. Cada ángulo será proporcional a los porcentajes de la ley de probabilidad que rige el fenómeno, asignando a cada uno de ellos el valor numérico que adopta la variable aleatoria.

Los métodos generales son técnicas para generar, mediante una computadora, valores de variables aleatorias a partir de cualquier distribución de probabilidad empírica, por ejemplo, provenientes de relevamientos estadísticos, tales como censos, encuestas o muestreos. Resultan útiles para construir muestras artificiales de variables aleatorias que no se ajustan adecuadamente a ninguna distribución de probabilidades en particular, es decir, que no pueden ser descriptas por alguna distribución de probabilidades teórica clásica tales como la Normal, Binomial, Beta, Poisson, etc. Dentro de esta categoría se encuentran: el método de los Números Índice, el método de la Transformación Inversa y el método del Rechazo.

Los métodos especiales, objeto de estudio del presente trabajo, se utilizan en los casos en que las muestras artificiales que se deben generar tienen una distribución de probabilidades que se ajusta a alguna de las distribuciones clásicas tales como normal, binomial, etc. Resultan más veloces, precisos y fáciles de programar (Primorac et al., 2010b).

Se coincide con Insunza et al. (2009) quienes expresan que “a pesar del crecimiento que ha venido experimentando la producción de software para la enseñanza de las matemáticas en los últimos años, el software para la enseñanza de la probabilidad es aún escaso”.

En (Ascheri y Pizarro, 2007) se describió una librería para generar muestras artificiales de variables aleatorias discretas. En este trabajo, se describe una innovación plasmada en el desarrollo de una librería para la construcción de muestras artificiales de variables aleatorias que siguen distribuciones probabilísticas continuas, y el test de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov, que permite validar las muestras artificiales obtenidas. Esta librería fue programada empleando software libre, en particular el lenguaje Octave, y es incorporada al EVEA de la asignatura.

Octave es un lenguaje de programación basado en la filosofía del software libre. Este lenguaje permite abordar numerosos problemas del campo de las ciencias y de la ingeniería: cálculo numérico, estadística, procesamiento de señales y de imagen, entre otros.

Chance et al. (2007) identifican diversas formas en las cuales las TIC pueden apoyar el aprendizaje de los alumnos: i) automatizando cálculos y gráficas, ii) en la exploración de los datos, iii) en la visualización de conceptos abstractos, iv) en la simulación de fenómenos aleatorios, v) en la investigación de problemas reales; vi) proporcionando herramientas de colaboración entre estudiantes. En este trabajo el desarrollo del software que se describe contribuye en numerosos aspectos mencionados previamente. En los aspectos i) y ii) permite validar la distribución de números aleatorios, respecto al item iii) debido a que los informáticos experimentan con fórmulas matemáticas que muchas veces están lejanas a sus prácticas cotidianas, iv) y v) justifican su empleo al proporcionar una herramienta inicial para la validación del insumo para los modelos de simulación, es decir, la serie de números que permiten predecir el comportamiento de problemas reales abstraidos y simulados. En referencia al último aspecto este paquete facilita la práctica y la experimentación en el aula.

El uso en las clases de laboratorio de la asignatura de esta librería persigue los siguientes objetivos particulares:

1. Integrar los contenidos abordados en el desarrollo de la asignatura, ya que el uso de la misma implica la vinculación del segundo y tercer eje temático y sus aplicaciones prácticas codificadas en Octave (Perez et al., 2009).
2. Aplicar los principios teóricos de la construcción de muestras artificiales mediante su implementación en computadora.
3. Por lo expuesto, en este trabajo se abordan contenidos vinculados con el segundo y tercer ejes temáticos, previamente mencionados.
4. Este artículo se compone de cuatro secciones. En esta primera sección se caracterizó la asignatura objeto de estudio y su modalidad de dictado. En la segunda sección se describe la metodología adoptada en la construcción de la librería en Octave. En la tercera sección se sintetizan los resultados obtenidos. Finalmente, se comentan algunas conclusiones y futuros trabajos.

Metodología

En esta sección se expone la metodología elaborada ad-hoc que se ha adoptado en el diseño y construcción de un software de enseñanza-aprendizaje, que consiste en una librería que incluye métodos especiales para la generación de muestras artificiales de variables aleatorias que siguen distribuciones de probabilidad continuas, aplicable en el ámbito de la asignatura “Modelos y Simulación” (Mariño y López, 2009). La misma comprende las siguientes etapas:

1. <u>Estudio de factibilidad</u>

Consiste en una estimación de recursos necesarios y escenarios posibles. Permite establecer claramente los límites del software y su integración con otros entornos similares aplicables en la asignatura. Primeramente como paso fundamental y previo a la etapa de selección de la herramienta, se observaron las necesidades del sistema y qué aplicabilidad tendría, para luego acotar más el espectro que definiría los posibles lenguajes o herramientas que serían utilizados a tal efecto. Las necesidades requeridas por el sistema a desarrollar son de tipo educativo con el objetivo de desarrollar uno o varios complementos para apoyar el proceso de aprendizaje de la asignatura Modelos y Simulación.

2. <u>Definición de los destinatarios</u>

Al diseñar un software, un interrogante muy importante que se debe plantear es: ¿Quiénes utilizarán el software que se va a diseñar? Los destinatarios de este software interactivo son los alumnos de la asignatura "Modelos y Simulación" de la carrera de Licenciatura en Sistemas de Información de la FACENA - UNNE. Realizada la delimitación geográfica, se puede decir que el software podrá ser utilizado en los laboratorios de informática de la institución, como así también en los domicilios de los alumnos, convirtiéndose de esta manera en una herramienta de apoyo fuera del horario del cursado de la asignatura.

3. Identificación de los requerimientos

En esta etapa de la construcción del software, se establece de manera clara y precisa el conjunto de requisitos que debe satisfacer. Desde el punto de vista del rendimiento, éste debe generar series de números pseudoaleatorios y muestras artificiales de variables aleatorias en lapsos muy breves de tiempo. Para brindar una visión más clarificadora de los requerimientos del sistema, se recurre a técnicas de modelado UML (Unified Modeling Language).

4. Definición de la arquitectura general o infraestructura

Desde el punto de vista de la arquitectura o infraestructura sobre la cual se ejecuta el software, en general se requiere una computadora con sistema operativo instalado. En este caso, los procedimientos requieren además de la instalación del producto Octave.

5. Selección del medio de distribución

Se deben tener en cuenta las características del desarrollo, respecto a la forma de ejecución y tamaño, a la hora de decidir el medio en el cual será distribuido.

6. Análisis del Software

Luego de realizar el estudio de los aspectos fundamentales del software educativo, se logra una visión más clara del entorno que éste debe presentar.

7. Diseño del Software

Se contemplan características como: i) Interactividad, ii) Integración de contenidos en múltiples formatos, iii) Definición del objetivo de implementación. En el diseño de las interfaces se deben considerar la navegabilidad, accesibilidad y comunicación.

8. Selección y evaluación de herramientas

El análisis de las herramientas de software permite obtener una visión más concreta de las funcionalidades y características más importantes de las mismas, e identificar cuáles de ellas posibilitan dar un enfoque más sencillo y práctico de los problemas de simulación abordados. Para la construcción del software, se consideraron una diversidad de herramientas de programación como Flash, MatLab, Visual Basic, Java, Mathematica, Octave, entre otros, seleccionándose finalmente el lenguaje Octave. La librería desarrollada será integrada al EVEA de la asignatura, distribuible desde diversos medios, ya sea vía web o en dispositivos digitales como cd-rom o dvd-rom.

9. Selección y preparación de contenidos

Los contenidos incorporados al entorno virtual tienen como finalidad facilitar y complementar el desarrollo de las clases presenciales de la asignatura. El mismo tiene como objetivo integrar los conceptos abordados, así como facilitar y complementar el desarrollo de las clases presenciales de la asignatura (Mariño y López, 2007b). En este caso en particular, se incorporaron al EVEA las librerías de métodos especiales de distribuciones continuas codificadas en Octave y basadas en textos disciplinares. Se programaron los métodos especiales para generar muestras artificiales que siguen la distribución Uniforme Continua, la distribución Normal y la distribución Exponencial (Castellaro yAlberto, 2009). Asimismo se programó el test de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov, que permite validar los valores simulados de las variables aleatoria (Mantienga Gonzales y Pérez de Vargas, 2009; (Sheskin, 2000; Coss Bu, 1991 y Ross, 2006).

10. Desarrollo del Software

Se programaron en lenguaje Octave los procedimientos que implementan métodos especiales para simular muestras artificiales de variables aleatorias que siguen distribuciones probabilísticas continuas y el procedimiento que implementa el test de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov. Luego se requirió la incorporación de una opción dentro del EVEA de la asignatura, desde la cual sean accesibles los métodos especiales abordados.

11. Validaciones

Finalizado el desarrollo, se verificó el correcto funcionamiento del sistema y el acceso a los contenidos. Con respecto al funcionamiento se comprobó: i) Mapa de navegación. Buena estructuración que permite acceder bien a los contenidos, actividades, niveles y prestaciones en general. ii) Sistema de navegación. Entorno transparente que permite al usuario tener el control. iii) Velocidad entre el usuario y el programa (animaciones, lectura de datos, etc.). iv) Ejecución de los programas incluidos para actuar como simuladores de los problemas abordados.

Resultados

Se ha desarrollado una librería compuesta por una serie de funciones programadas en el lenguaje Octave, para generar muestras artificiales que siguen las distribuciones continuas mencionadas, empleando métodos especiales (Primorac et al., 2010b) y el test de bondad de de Ajuste de Kolmogorov – Smirnov para muestras artificiales de variables aleatorias continuas.

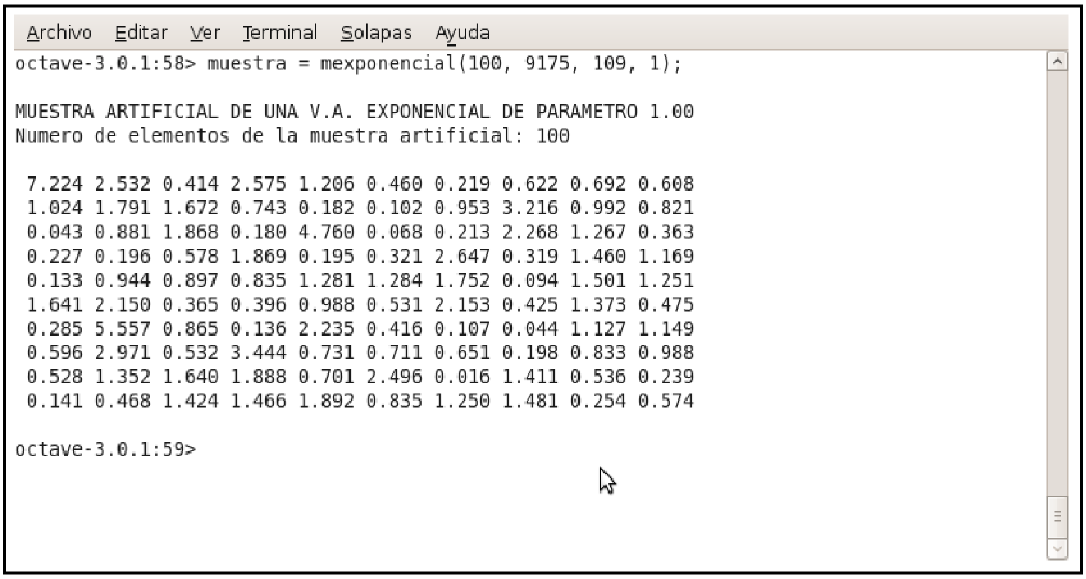
Se generaron tres funciones para obtener muestras artificiales de las distribuciones de probabilidad Uniforme continua, Normal y Exponencial respectivamente. Estas funciones utilizan internamente un procedimiento escrito en Octave, que implementa el Método Multiplicativo de Congruencias para generar números pseudoaleatorios, el cual fue desarrollado previamente (Perez et al., 2009). Además se codificó una función para aplicar el mencionado test de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov.

El aporte de este trabajo a la asignatura “Modelos y Simulación” consiste en la descripción de las salidas generadas por las funciones de la librería desarrollada, que permiten visualizar los elementos de las muestras artificiales y los resultados de los test de hipótesis aplicadas a las mismas. Además, se han llevado a cabo varios experimentos, a través de los cuales se compararan la calidad de las muestras artificiales generadas empleando diferentes parámetros iniciales (tercer eje temático de la asignatura), con el objeto de una posterior inclusión de la librería en un modelo de simulación representativo de situaciones reales, (tema abordado en el cuarto eje temático de la asignatura).

1. Implementación en Octave de un método especial para la generación de muestras artificiales de variables aleatorias con distribución Uniforme Continua

   La función *muniforme()* genera una muestra artificial de una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo *(a, b),* implementando un método especial. Los parámetros que necesita para su ejecución son: el tamaño de la muestra artificial que se desea obtener *(n),* el valor inicial de la semilla *(s)* y el valor del parámetro a *(pa)* del método generador de números pseudoaleatorios y los parámetros de la distribución uniforme *(a)* y *(b)* que representan el intervalo en el cual la variable aleatoria asume valores.

   La función devuelve una lista con los elementos que componen la muestra artificial de la distribución considerada, permitiendo también además visualizar los mismos. La Figura 1 ilustra el comando que invoca a la función, ejecutada desde la línea de comandos interactiva de Octave, y la salida obtenida.



```
Archivo  Editar  Ver  Terminal  Solapas  Ayuda
octave-3.0.1:58> muestra = mexponencial(100, 9175, 109, 1);

MUESTRA ARTIFICIAL DE UNA V.A. EXPONENCIAL DE PARAMETRO 1.00
Numero de elementos de la muestra artificial: 100

 7.224 2.532 0.414 2.575 1.206 0.460 0.219 0.622 0.692 0.608
 1.024 1.791 1.672 0.743 0.182 0.102 0.953 3.216 0.992 0.821
 0.043 0.881 1.868 0.180 4.760 0.068 0.213 2.268 1.267 0.363
 0.227 0.196 0.578 1.869 0.195 0.321 2.647 0.319 1.460 1.169
 0.133 0.944 0.897 0.835 1.281 1.284 1.752 0.094 1.501 1.251
 1.641 2.150 0.365 0.396 0.988 0.531 2.153 0.425 1.373 0.475
 0.285 5.557 0.865 0.136 2.235 0.416 0.107 0.044 1.127 1.149
 0.596 2.971 0.532 3.444 0.731 0.711 0.651 0.198 0.833 0.988
 0.528 1.352 1.640 1.888 0.701 2.496 0.016 1.411 0.536 0.239
 0.141 0.468 1.424 1.466 1.892 0.835 1.250 1.481 0.254 0.574

octave-3.0.1:59>
```

Figura 1. Muestra artificial de una variable aleatoria uniforme en el intervalo (0, 1)

2. Implementación en Octave de un método especial para la generación de muestras artificiales de variables aleatorias con distribución normal general.

   La función *mnormal()* permite obtener una muestra artificial de una variable aleatoria con distribución normal general, cuyos parámetros son la *media* y la *desviación estándar*.

   Los parámetros que necesita para su ejecución son el tamaño de la muestra artificial que se desea obtener *(n),* el valor inicial de la semilla *(s)*, el valor del parámetro a *(pa)* del método generador de números pseudoaleatorios, y los parámetros de la distribución normal *(m)* y *(sigma)* que representan la media y la desviación típica de la distribución normal.

   La función devuelve una lista con los elementos que componen la muestra artificial de la distribución considerada, permitiendo también además visualizar los mismos. La Figura 2 ilustra el comando que invoca a la función, ejecutada desde la línea de comandos de Octave, y la salida obtenida.

```
Archivo  Editar  Ver  Terminal  Solapas  Ayuda
octave-3.0.1:52> muestra = mnormal(100, 2371, 11, 80, 6);

MUESTRA ARTIFICIAL DE UNA V.A. NORMAL DE MEDIA 80.00 DESVIO ESTANDAR 6.00
Numero de elementos de la muestra artificial: 100

 75.406 81.588 77.499 77.297 90.344 85.198 85.620 68.571 84.209 87.896
 78.190 84.852 66.843 74.321 80.648 66.382 79.284 90.315 71.633 80.600
 85.774 92.916 78.987 76.145 81.752 82.366 89.748 92.859 87.857 84.104
 80.158 75.780 77.931 76.769 93.656 85.150 75.012 94.203 78.881 80.408
 79.342 81.444 75.675 76.193 80.360 80.734 71.076 76.347 74.705 81.512
 77.326 61.908 78.219 74.417 77.864 93.118 77.940 87.291 87.329 81.416
 80.110 71.172 79.563 71.441 80.168 74.302 77.604 79.035 74.753 86.120
 75.694 85.236 79.707 73.265 75.272 78.286 64.068 81.579 78.977 77.624
 82.078 86.100 90.651 79.889 81.176 87.070 79.332 88.923 82.001 79.928
 81.262 79.764 76.395 79.313 85.880 76.654 93.396 77.067 77.825 81.032

octave-3.0.1:53>
```

Figura 2. Muestra artificial de una variable aleatoria Normal General de media 80 y desviación estándar 6

3. Implementación en Octave de un método especial para la generación de muestras artificiales de variables aleatorias con distribución exponencial.

   La función *mexponencial()* construye una muestra artificial de una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro ʎ > 0

   Los parámetros requeridos para su ejecución son el tamaño de la muestra artificial que se desea obtener *(n)*, el valor inicial de la semilla *(s)*, el valor del parámetro a *(pa)* del método generador de números pseudoaleatorios y el parámetro de la distribución exponencial (ʎ).

   La función devuelve una lista con los elementos que componen la muestra artificial de la distribución considerada, permitiendo también además visualizar los mismos. La Figura 3 ilustra el comando que invoca a la función, ejecutada desde la línea de comandos interactiva de Octave, y la salida obtenida.

```
Archivo  Editar  Ver  Terminal  Solapas  Ayuda
octave-3.0.1:58> muestra = mexponencial(100, 9175, 109, 1);

MUESTRA ARTIFICIAL DE UNA V.A. EXPONENCIAL DE PARAMETRO 1.00
Numero de elementos de la muestra artificial: 100

 7.224 2.532 0.414 2.575 1.206 0.460 0.219 0.622 0.692 0.608
 1.024 1.791 1.672 0.743 0.182 0.102 0.953 3.216 0.992 0.821
 0.043 0.881 1.868 0.180 4.760 0.068 0.213 2.268 1.267 0.363
 0.227 0.196 0.578 1.869 0.195 0.321 2.647 0.319 1.460 1.169
 0.133 0.944 0.897 0.835 1.281 1.284 1.752 0.094 1.501 1.251
 1.641 2.150 0.365 0.396 0.988 0.531 2.153 0.425 1.373 0.475
 0.285 5.557 0.865 0.136 2.235 0.416 0.107 0.044 1.127 1.149
 0.596 2.971 0.532 3.444 0.731 0.711 0.651 0.198 0.833 0.988
 0.528 1.352 1.640 1.888 0.701 2.496 0.016 1.411 0.536 0.239
 0.141 0.468 1.424 1.466 1.892 0.835 1.250 1.481 0.254 0.574

octave-3.0.1:59>
```

Figura 3. Muestra artificial de una variable aleatoria exponencial de parámetro 1.

4. Implementación en Octave del Test de Bondad de Ajuste de Kolmogorov – Smirnov para muestras artificiales de variables aleatorias continuas

La función *kstest()*, implementa el test de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov, se emplea para validar las muestras artificiales generadas.

Los parámetros requeridos para su ejecución son el vector con la muestra artificial obtenida con algunos de los procedimientos mencionados, los parámetros de la distribución con la cual se obtuvo la muestra artificial y una parámetro adicional que especifica la distribución a contrastar. La función devuelve el estadístico D_n que se compara con el valor D_n, $D_{n,\alpha}$, que se obtiene de la tabla de valores críticos del Kolmogorov-Smirnov en función del tamaño de la muestra y el nivel de significación. Si para los datos es D_n, $D_{n,\alpha}$, se acepta la hipótesis de que la muestra artificial proviene de la distribución considerada.

La Figura 4 ilustra la salida de una muestra artificial de tamaño n = 10 de una variable aleatoria normal de media 80 y desviación estándar 6, obtenida mediante un método especial, y la aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov a esta muestra para determinar la bondad del ajuste. La Figura 5 muestra la función de distribución empírica y la función de distribución teórica.

Las Figuras 6 y 7 ilustran el comando que invoca a la función, ejecutada desde la línea de comandos interactiva de Octave, para validar una muestra artificial de tamaño n = 10 de una distribución uniforme en el intervalo (0, 1), y el gráfico de las distribuciones empírica y teórica, respectivamente.

Las Figuras 8 y 9 ilustran el comando que invoca a la funciónpara validar una muestra artificial de tamaño n = 10, de una distribución exponencial de parámetro 1, y el gráfico de las distribuciones empírica y teórica, respectivamente.

```
Archivo  Editar  Ver  Terminal  Solapas  Ayuda
octave-3.0.1:36> muestra = mnormal(10, 2371, 11, 80, 6);

MUESTRA ARTIFICIAL DE UNA V.A. NORMAL DE MEDIA 80.00 DESVIO ESTANDAR 6.00
Numero de elementos de la muestra artificial: 10

 75.406 81.588 77.499 77.297 90.344 85.198 85.620 68.571 84.209 87.896

octave-3.0.1:37> [Dd, Di] = kstest('n', muestra, 80, 6);

        ----------------------------------------------------
        i       Muestra Z       Fn      Fo      D+      D-
        ----------------------------------------------------
        1       68.571  -1.90   0.100   0.028   0.072   0.028
        2       75.406  -0.77   0.200   0.222   0.022   0.122
        3       77.297  -0.45   0.300   0.326   0.026   0.126
        4       77.499  -0.42   0.400   0.338   0.062   0.038
        5       81.588  0.26    0.500   0.604   0.104   0.204
        6       84.209  0.70    0.600   0.759   0.1[illegible]  0.259
        7       85.198  0.87    0.700   0.807   0.107   0.207
        8       85.620  0.94    0.800   0.826   0.026   0.126
        9       87.896  1.32    0.900   0.906   0.006   0.106
        10      90.344  1.72    1.000   0.958   0.042   0.058
        ----------------------------------------------------

        Dn = [0.259, 0.159]
octave-3.0.1:38>
```

Figura 4. Aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov a una muestra artificial de una variable aleatoria normal con media 80 y desviación estándar 6.

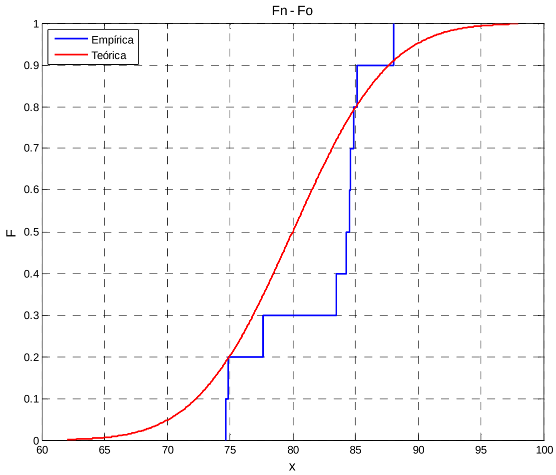
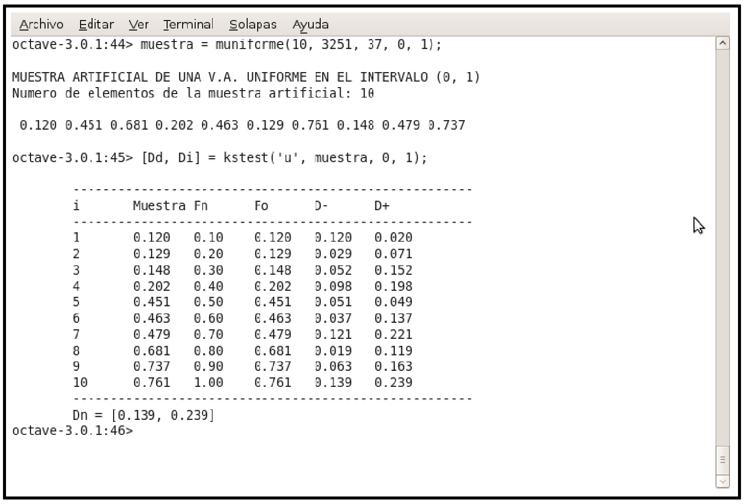


Figura 5. Función de distribución empírica de las observaciones (F_n) y función de distribución normal (F_0)



```
Archivo  Editar  Ver  Terminal  Solapas  Ayuda
octave-3.0.1:44> muestra = muniforme(10, 3251, 37, 0, 1);

MUESTRA ARTIFICIAL DE UNA V.A. UNIFORME EN EL INTERVALO (0, 1)
Numero de elementos de la muestra artificial: 10

 0.120 0.451 0.681 0.202 0.463 0.129 0.761 0.148 0.479 0.737

octave-3.0.1:45> [Dd, Di] = kstest('u', muestra, 0, 1);

        ----------------------------------------------------
        i       Muestra Fn      Fo      D-      D+
        ----------------------------------------------------
        1       0.120   0.10    0.120   0.120   0.020
        2       0.129   0.20    0.129   0.029   0.071
        3       0.148   0.30    0.148   0.052   0.152
        4       0.202   0.40    0.202   0.098   0.198
        5       0.451   0.50    0.451   0.051   0.049
        6       0.463   0.60    0.463   0.037   0.137
        7       0.479   0.70    0.479   0.121   0.221
        8       0.681   0.80    0.681   0.019   0.119
        9       0.737   0.90    0.737   0.063   0.163
        10      0.761   1.00    0.761   0.139   0.239
        ----------------------------------------------------
        Dn = [0.139, 0.239]
octave-3.0.1:46>
```

Figura 6. Aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov a una muestra artificial de una variable aleatoria uniforme continua en el intervalo (0,1)

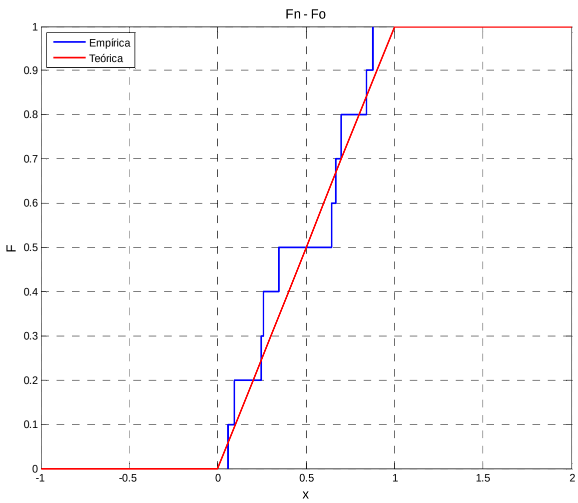
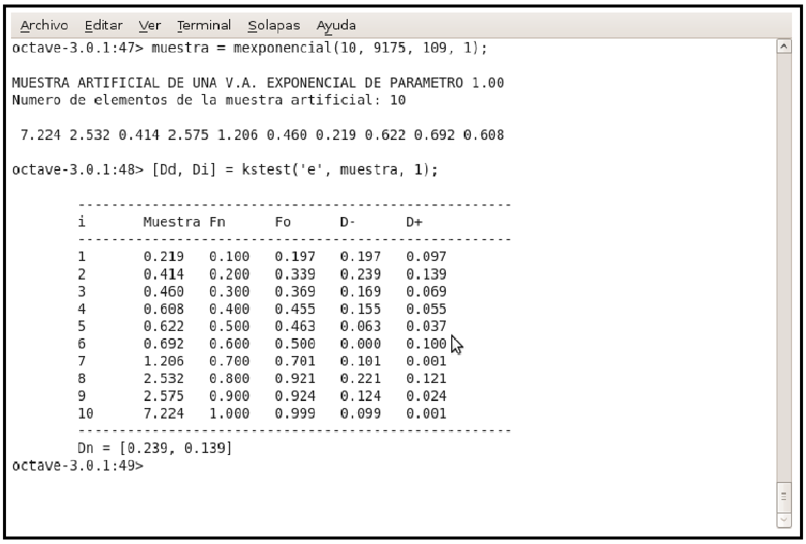


Figura 7. Función de distribución empírica de las observaciones (F_n) y función de distribución uniforme continua (F_0)



```
Archivo  Editar  Ver  Terminal  Solapas  Ayuda
octave-3.0.1:47> muestra = mexponencial(10, 9175, 109, 1);

MUESTRA ARTIFICIAL DE UNA V.A. EXPONENCIAL DE PARAMETRO 1.00
Numero de elementos de la muestra artificial: 10

 7.224 2.532 0.414 2.575 1.206 0.460 0.219 0.622 0.692 0.608

octave-3.0.1:48> [Dd, Di] = kstest('e', muestra, 1);

        ----------------------------------------------------
        i       Muestra Fn      Fo      D-      D+
        ----------------------------------------------------
        1       0.219   0.100   0.197   0.197   0.097
        2       0.414   0.200   0.339   0.239   0.139
        3       0.460   0.300   0.369   0.169   0.069
        4       0.608   0.400   0.455   0.155   0.055
        5       0.622   0.500   0.463   0.063   0.037
        6       0.692   0.600   0.500   0.000   0.100
        7       1.206   0.700   0.701   0.101   0.001
        8       2.532   0.800   0.921   0.221   0.121
        9       2.575   0.900   0.924   0.124   0.024
        10      7.224   1.000   0.999   0.099   0.001
        ----------------------------------------------------
        Dn = [0.239, 0.139]
octave-3.0.1:49>
```

Figura 8. Aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov a una muestra artificial de una variable aleatoria exponencial de parámetro 1

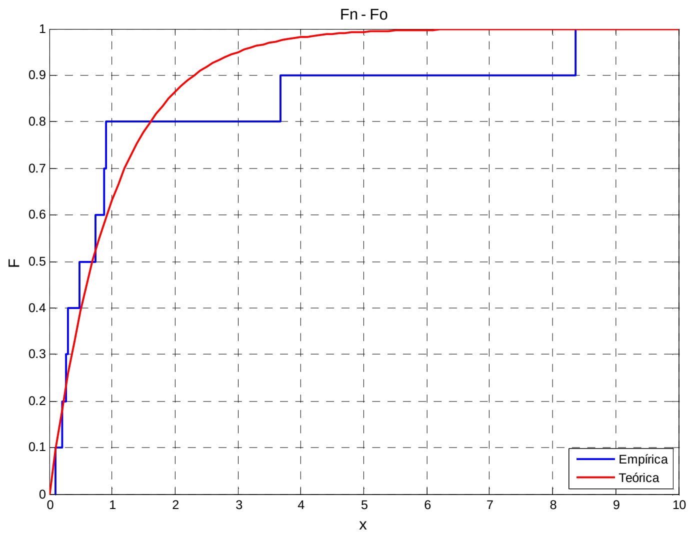


Figura 9. Función de distribución empírica de las observaciones (F_n) y función de distribución exponencial(F_0)

5. Análisis comparativo de los métodos y test desarrollados

Se han efectuado diferentes ejecuciones de los métodos especiales para la generación de muestras artificiales descriptas, asignando en cada caso diferentes valores a los parámetros iniciales de los mismos y aplicando el test de bondad de ajuste. La Tabla 1 resume algunos resultados de los experimentos.

El empleo y manipulación de los métodos especiales de generación de muestras artificiales incluidos en la librería desarrollada, permitirán a los estudiantes afianzar los conocimientos adquiridos a medida que avanzan en la lectura y estudio de los contenidos teóricos, y efectuar auto-evaluaciones del aprendizaje de manera continua.

El empleo de esta librería de funciones permitirá al alumno:

- Emplear las computadoras en el tratamiento de problemas reales.

- Disponer de una herramienta complementaria para afianzar conocimientos de uno de los ejes temáticos de la modelación y simulación.
- Implementar procedimientos interactivos para la generación de números pseudoaleatorios, muestras artificiales y la aplicación de pruebas de hipótesis.
- Experimentar con diferentes ejercicios que simulen problemas reales.
- Repasar conceptos fundamentales de la asignatura.
- Diseñar experimentos a fin de evaluar el rendimiento de los resultados proporcionados por los diferentes métodos especiales programados en Octave, y su comportamiento con respecto a otros similares programados en otros lenguajes de programación, como Mathematica (Mariño y López 2008) u Octave (Perez et al., 2009).
- Utilizar la librería en modelos de simulación representativos de situaciones reales.

Finalmente, se adhiere a Mantiega Gonzales y Pérez de Vargas (2009) quienes expresan que “la aplicación de estas herramientas complementarias también generan en los alumnos capacidades de aprendizaje diferentes y competencias nuevas, entre ellas las de validación y valorización de los instrumentos”.

Distribución	**Tamaño de la Muestra (n)**	**Parámetros del generador de Números Pseudaleatorios**		**Test de Kolmogorov-Smirnov**		
		Semilla	**Parámetro a**	**D_n**	$D_{n,0.05}$	**Decisión** D_n, $D_{n,\alpha}$
U(0, 1)	50	9157	11	0.112	0.188	Aceptar
U(0, 1)	100	9157	11	0.081	0.134	Aceptar
U(0, 1)	250	9157	11	0.044	0.087	Aceptar
U(0, 1)	500	9257	11	0.049	0.061	Aceptar
U(5, 25)	50	3251	237	0.199	0.188	Rechazar
U(5, 25)	100	3251	237	0.078	0.134	Aceptar
U(5, 25)	250	3251	237	0.053	0.087	Aceptar
U(5, 25)	500	3251	237	0.056	0.061	Aceptar
Exp(1)	50	5791	61	0.084	0.188	Aceptar
Exp(1)	100	5791	61	0.061	0.134	Aceptar
Exp(1)	250	5791	61	0.054	0.087	Aceptar
Exp(1)	500	5791	61	0.045	0.061	Aceptar
N(80, 6)	50	1154	83	0.090	0.188	Aceptar
N(80, 6)	100	1154	83	0.082	0.134	Aceptar
N(80, 6)	250	1154	83	0.033	0.087	Aceptar
N(80, 6)	500	1154	83	0.022	0.061	Aceptar

Tabla 1. Resumen de Experimentos

Conclusiones

En este trabajo se han programado un conjunto de métodos especiales para generar muestras artificiales de distribuciones probabilísticas continuas en el lenguaje Octave y las correspondientes pruebas de Kolmogorov – Smirnov para la validación de las mismas, con el fin de integrarlos al EVEA de la asignatura, recurso didáctico para afianzar integralmente el aprendizaje de los temas abordados.

Esta librería de funciones constituye una herramienta valiosa, que permitirá que los alumnos desarrollen las habilidades y conocimientos adquiridos en la asignatura Modelos y Simulación de la FACENA (UNNE), facilitando la apropiación de estos contenidos. Además, esta herramienta interactiva posibilitará que los estudiantes observen cómo la modificación de un determinado parámetro en un método, se ve reflejada de forma inmediata en los resultados obtenidos.

La implementación de este software en el aula se llevará a cabo en el próximo cuatrimestre.

De este modo, se intenta crear un ámbito de formación continua en temas específicos de la mencionada asignatura, mediante la implementación de innovaciones pedagógicas, la elaboración de materiales didácticos en diversos formatos y el tratamiento interdisciplinario de los diversos temas del programa de la asignatura.

Por otra parte, en concordancia con la política institucional de la Universidad y la Facultad de promover el acceso y el desarrollo de cátedras desde la plataforma UNNE-Virtual, se prevé incorporar el recurso didáctico descripto como una herramienta más disponible desde el espacio virtual asignado a la asignatura "Modelos y Simulación".

Referencias

Area Moreira, M. (2000). *¿Qué aporta Internet al cambio pedagógico en la Educación Superior?.* Redes multimedia y diseños virtuales Actas del III Congreso Internacional de Comunicación, Tecnología y Educación. Universidad de Oviedo. Septiembre de 2000.

Ascheri, M. E., Pizarro R. A. (2007). *Propuesta sobre la enseñanza del lenguaje Octave*. Anales del II Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología.

Carrillo, C., Mariño, S. I., López M. V. (2008). *Software Interactivo para el aprendizaje de números pseudoaleatorios y prueba de hipótesis (SIANP)*. Anales del XIV Congreso Argentino de Ciencias de la Computación. CACIC 2008. Chilecito. Argentina.

Castellaro, M., Alberto, M. (2009). *Aportes desde la articulación e integración de cátedras a la formación experimental.* Anales del IV Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología.

Coss Bu, R. (1991). *Simulación. Un efoque práctico*. Limusa: Noriega Editores.

Chance, B. Ben-Zvi, D. Garfield, J. Medina, E. (2007). *The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics*. Technology Innovations in Statistics Education: . Extraído el 05 de Agosto de 2011, de http://repositories.cdlib.org/uclastat/cts/tise/vol1/iss1/art2.

Ferreira Szpiniak, A., Sanz, C. (2007). *Hacia un modelo de evaluación de entornos virtuales de enseñanza y aprendizaje. La importancia de la usabilidad*. Anales del XIII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación. CACIC 2007.

Hadad Salomón, R.; Buabud, J. (2010). *Incorporación de tecnologías educativas en la UTN-FRT*. Anales del V Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología.

Insunza S., Gastélum, D. A., Anselmo, A. (2009). *Desarrollo de software para El aprendizaje y razonamiento probabilístico: El caso de SIMULAPROB*. Revista UNION. Junio de 2009. Número 18, pp. 135-149.ISSN: 1815-0640

López, M. V.; Mariño, S. I. (2008). *Desarrollo de software instruccional interactivo en la asignatura Modelos y Simulación*. Anales del III Encuentro Internacional BTM 2008. Educación, Formación y Nuevas Tecnologías. Punta del Este. Uruguay. 1-4.

López, M. V.; Mariño, S. I., Petris, R. H. (1999). *Un análisis de generadores de números pseudo-aleatorios en Mathematica 3.0.* FACENA Vol. 15. 119-136. ISSN: 0325-4216. Edita: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura. UNNE. Argentina.

Mantiega Gonzalez, M., T. PerezDe Vargas, A. (2009). *Estadística Aplicada. Una visión instrumental*. Ediciones: Dias de Santo.

Mariño, S. I., López, M. V. (2010). *Avances del proyecto de docencia, extensión e investigación en la asignatura Modelos y Simulación*. Anales XII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación. XII WICC, pp. 682-686.

Mariño, S. I., López. M. V. (2007b). *Aplicación del modelo b-learning en la asignatura Modelos y Simulación de las carreras de sistemas de la FACENA - UNNE.* EDUTEC: Revista Electrónica de Tecnología Educativa. España. ISSN: 1135-9250. Número 23. Recuperado el 5 de Agiosto de 2011, de http://edutec.rediris.es/Revelec2/revelec23/revelec23.html.

Mariño, S. I., López. M. V. (2008). *Generadores de números aleatorios.* Editorial: Moglia. ISBN: 978-987-05-5025-0.

Mariño, S. I., López. M. V. (2008b). *Un proyecto de docencia, extensión e investigación en la asignatura Modelos y Simulación.* Anales del X Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación.

Mariño, S. I., López. M. V. (2009). *Propuesta metodológica para la construcción de software educativo en la asignatura Modelos y Simulación.* Anales de XXII ENDIO y XX EPIO.

Mariño, S. I.; Lopez, M. V (2007). *La simulación de sistemas en un entorno integrado de b-learning.* Anales del Encuentro Internacional BTM 2007 Educación, formación y nuevas tecnologías. UtemVirtual. Universidad Tecnológica Metropolitana. Punta del Este. Uruguay.

Martins A., Fracchia C. C., Allan C., Parra, S. (2010). *Simulación y métodos numéricos en ciencias de la computación: uso de TICs.* Anales XII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación. XII WICC, pp. 739-744.

Perez, C., Mariño, S. I., López, M. V. (2009). *Desarrollo de generadores de números pseudoaleaorios en Octave.* Anales del IV Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología.Universidad Nacional de la Plata.

Primorac, C, R., Mariño, S. I. y López, M. V. (2010). *Simuladores para afianzar conceptos de modelos de existencias. Un caso de estudio.*Anales de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología.

Primorac, C, R., Mariño, S. I. Y López, M. V. (2010b). *Programación en Octave de una librería de métodos especiales para generar muestras artificiales de variables aleatorias discretas.* Anales del Congreso EPIO 2010.

Ross, S. M. (2006). *Simulation.* Elsevier: Academic Press.

Sheskin, D J. (2000*). Handbook of Parametric and No Parametric Statistical Procedures.* Chapman & Hall/CRC.

Totter, E., Raichman, S. (2009). *Creación de espacios virtuales de aprendizaje en el área ciencias básicas en carreras de ingeniería.* Anales del IV Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología. Universidad Nacional de la Plata.

Totter, E., Raichman, S. (2010). *Diseño y validación de material educativo en entornos virtuales.* Una experiencia en geometría analítica. Anales del V Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología.

Carlos R. Primorac: Departamento de Informática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura. Universidad Nacional del Nordeste. Corrientes Argentina.

E-mail: **carlosprimorac@gmail.com**

María V. López: Departamento de Informática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura. Universidad Nacional del Nordeste. Corrientes. Argentina. Facultad de Humanidades. Universidad Nacional del Nordeste. Resistencia. Argentina
E-mail: **mvlopez@exa.unne.edu.ar**

Sonia I. Mariño: Departamento de Informática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura. Universidad Nacional del Nordeste. Corrientes. Argentina. Facultad de Humanidades. Universidad Nacional del Nordeste. Resistencia. Argentina
E-mail: **simarinio@yahoo.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 113-130

O conhecimento didático de Geometria de duas professoras do 1.º ciclo

Floriano Viseu, Júlia Almeida, José António Fernandes

Fecha de recepción: 28/09/2012
Fecha de aceptación: 21/03/2013

Resumen

Las orientaciones metodológicas de los actuales programas de Matemáticas valorizan la actividad del alumno en su aprendizaje. El tema Geometría, por su naturaleza experimental, refleja este presupuesto. Por diversas razones, muchos docentes de Primaria se tienen que enfrentar a sugerencias metodológicas a las que su formación no siempre da la respuesta adecuada, sobre todo en lo referente al conocimiento de contenidos. La importancia que tiene este conocimiento en las formas de volverlo comprensible para los alumnos nos llevó a indagar sobre el conocimiento didáctico de dos profesoras de Primaria sobre tópicos de Geometría y la relación entre este conocimiento y su formación. Se constató que las profesoras no dominan algunos contenidos geométricos, fruto de una formación limitada en el ámbito de la Geometría, y son conscientes de que estas carencias inciden sobre su enseñanza.
Palabras clave: geometría, tópicos geométricos, formación docente.

Abstract

The methodological guidelines of current Mathematics school programs value the activity of the students in their own learning. The theme of Geometry, due to its experimental nature, reflects this assumption. For various reasons, many primary school teachers find themselves confronted with methodological suggestions to which their education does not always give proper response, especially with regard to the content knowledge. The importance of this knowledge in making contents understandable to students, led us to investigate the knowledge of two primary school teachers on topics of Geometry and the relationship between this knowledge and their education. Through our investigation, we discovered that the teachers do not master some geometric contents, due to a limited education in the scope of Geometry, and are aware that these gaps influence their teaching.
Keywords: Geometry, geometric topics, teacher training.

Resumo

As orientações metodológicas dos programas atuais de Matemática valorizam a atividade do aluno na sua aprendizagem. O tema de Geometria, pela sua natureza experimental, reflete este pressuposto. Por razões várias, muitos docentes do 1.º ciclo veem-se confrontados com sugestões metodológicas a que a sua formação nem sempre dá a devida resposta, principalmente no que diz respeito ao conhecimento de conteúdos de Geometria. A importância que este conhecimento tem nas formas de o tornar compreensível aos alunos levou-nos a averiguar o conhecimento didático de duas professoras do 1.º ciclo sobre tópicos de Geometria e a relação entre esse conhecimento e a sua formação. Constatámos que as professoras não dominam alguns conteúdos geométricos, fruto de uma formação limitada no âmbito da Geometria, e têm consciência de que estas lacunas influenciam o seu ensino.
Palavras-chave: geometria, temas geométricos, formação de professores.

1. Introdução

A informação matemática está cada vez mais presente nas mais variadas atividades do dia-a-dia, o que faz com que a escola desempenhe um papel preponderante na formação dos seus alunos para uma cidadania responsável, informada e crítica. Porém, ainda persiste um distanciamento entre o que se ensina e a utilidade do que se ensina. Este distanciamento faz com que o NCTM (1991) defenda um ensino da matemática escolar, em particular da Geometria, inserido e voltado para a vida prática, em que os alunos "devem desenvolver hábitos de pensamento matemático e compreender e apreciar o papel da matemática na vida da humanidade" (p. 6).

A Geometria é uma componente importante do currículo de matemática, porque o conhecimento, as relações e as ideias geométricas, por um lado, são úteis em situações de todos os dias e, por outro, estão relacionados com outros tópicos matemáticos e com outras temáticas escolares (NCTM, 2007). A importância que a Geometria tem no currículo escolar deve-se, segundo Abrantes (1999), a ser um tema que desenvolve a capacidade de raciocínio do aluno, a sensibilidade para a compreensão de fenómenos do mundo real e a utilização de ideias geométricas em diversas situações.

Nas reformulações dos programas escolares atuais, os professores são os "protagonistas na mudança dos processos pelos quais a Matemática é ensinada e aprendida nas escolas" (NCTM, 1994, p. 2). Por várias razões, essas reformulações nem sempre são interpretadas de igual modo por todos os professores. Por exemplo, a formação adquirida pode contribuir para a existência de dificuldades e de lacunas nos conhecimentos dos professores, que não ajudam a concretizar as recomendações metodológicas para o ensino da Geometria. O historial de cada professor de Matemática marca e determina, como defende Monteiro (1992), o modo como age na sua prática de ensino. Para Ponte (1999), essa prática evidencia o conhecimento didático que o professor desenvolve ao longo da sua formação, inicial e contínua, que desempenha um papel fulcral na orientação da sua prática pedagógica.

Considerando que o conhecimento didático determina a forma como o professor atende às orientações metodológicas preconizadas pelos programas escolares, procuramos analisar o conhecimento didático de duas professoras do 1.º ciclo sobre tópicos de Geometria e a relação entre esse conhecimento e a sua formação.

2. A Geometria no currículo de Matemática do 1.º ciclo

Apesar das orientações atuais para o ensino da Geometria privilegiarem o significado, o ensino deste tema é ainda, frequentemente, desenvolvido de um ponto de vista meramente abstrato, enfatizando um sistema lógico onde os resultados derivam rigorosamente de definições e axiomas e em que, por vezes, se dá mais ênfase à memorização de definições e de técnicas de cálculo (Gomes & Ralha, 2005).

Durante o século passado sucederam-se grandes transformações na abordagem educacional da Geometria, das quais se destaca a reforma do ensino da matemática dos anos sessenta, apoiada nas teorias estruturalistas e construtivistas de Piaget e Bruner, que influenciaram a forma de conceber e de ensinar os conteúdos matemáticos. Esta nova perspetiva de conceber e pôr em prática a educação matemática − denominada de matemática moderna − relegou para segundo plano o tema da Geometria. Como consequência desta reforma, em Portugal, no ensino básico, quase desapareceram os aspetos relacionados com a observação, a experimentação e a construção. Para Veloso (1998), gerações de alunos, muitos deles atuais professores de matemática, "atravessaram o ensino de matemática tendo como únicos contactos com a geometria elementar o teorema de Pitágoras e algumas fórmulas para o cálculo de áreas e volumes" (p. 23).

Só mais tarde, nos anos setenta do século XX, se recomeçou a valorizar a Geometria escolar e, particularmente, na última década prosseguiram as discussões sobre uma crescente aproximação entre a Matemática, e em particular a Geometria, e a realidade. Apelando à concretização e à visualização e recorrendo, de modo sistemático, à manipulação de materiais, a aprendizagem da Geometria resulta, desde os níveis escolares mais elementares, como defende Abrantes (1999), da construção de conhecimentos pela descoberta e resolução de problemas.

Nas últimas décadas tem-se reconhecido a necessidade de redefinir o lugar da Geometria nos currículos escolares. As discussões em torno do currículo e das metodologias no ensino da Matemática estenderam-se aos diversos níveis de ensino. Novas propostas metodológicas foram equacionadas paulatinamente no currículo do 1.º ciclo do ensino básico nas diversas reformulações dos programas escolares. Por exemplo, o programa de 1990 (Ministério da Educação, 1990), depois reformulado em 1998 (Ministério da Educação, 1998), valoriza o ensino da Geometria e o recurso a estratégias centradas na resolução de problemas, no trabalho de grupo, no debate de ideias, na utilização de materiais manipuláveis e no uso da calculadora e do computador. Reforça-se, também, a ideia de que a exploração do espaço e das formas, a manipulação dos objetos, a observação, a utilização de materiais e instrumentos na construção e desenho de modelos geométricos concorrem para a descoberta e o desenvolvimento na criança das capacidades de relacionar, classificar, transformar, interpretar e compreender o mundo das formas que a rodeia e as noções elementares de Geometria.

No entanto, para Ponte et al. (1998), estas alterações não terão sido suficientes, ou não terão chegado ao currículo real, existindo "uma convicção generalizada que a Geometria não é lecionada ou é tratada de um modo muito superficial, com uma grande ênfase nos procedimentos e na terminologia" (p. 164).

O atual programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007) recomenda que as atividades de ensino e aprendizagem da Geometria contemplem a exploração, manipulação e experimentação através de objetos do mundo real e outros materiais específicos. Pretende-se, assim, que o professor envolva o aluno na realização de observações, descrições e representações de objetos, configurações e trajetos, assim como o estimule a agir, prever, ver e explicar o que se passa no espaço que perceciona.

No 1.º ciclo, a Geometria, aparece associada à Medida, tema rico do ponto de vista das conexões entre os temas matemáticos e situações não matemáticas. Na sequência dessas experiências concretas, amplia-se progressivamente o conhecimento das grandezas e a introdução das medidas convencionais do Sistema Internacional de Unidades.

Os conceitos de área, perímetro e volume, de acordo com o novo programa de Matemática (Ministério da Educação, 2007), surgem como transversais aos diversos anos de escolaridade e também aos vários ciclos de ensino, pelo que são alvo de um aprofundamento sucessivo. No que respeita aos primeiros anos, a ênfase é dada ao conceito de área. Após a exploração desse conceito, recorrendo a instrumentos de medição e materiais manipuláveis, entre outros, é proposta a formalização da área do quadrado, do retângulo, bem como o cálculo da área da superfície de alguns poliedros cujas faces são quadrados e retângulos. Relativamente ao conceito de perímetro, nos dois primeiros anos, é pedido aos alunos para estabelecerem relações de grandeza entre objetos a fim de os comparar e de os ordenar segundo os comprimentos. Posteriormente, no 3.º ano, é pedido ao aluno para calcular o perímetro de polígonos. Finalmente, no 4.º ano, pretende-se que o aluno desenhe, com a ajuda de papel quadriculado, quadrados e polígonos com um dado perímetro, sendo propostas medições de perímetros de objetos de base circular. A introdução do conceito de volume, no 1º ciclo, segue a mesma estratégia adotada para a introdução dos conceitos de área e perímetro.

3. Conhecimento didático

A partir da posição crítica de Shulman (1986), sobre a tendência da investigação para se preocupar mais com o conhecimento dos aspetos pedagógicos do que com o conhecimento do conteúdo, a investigação tem dado um destaque especial ao conhecimento que o professor precisa para ensinar. Para este autor, um professor precisa de um conhecimento específico para ensinar, que o organiza em conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico geral, conhecimento do currículo e conhecimento pedagógico do conteúdo. Destes conhecimentos, Shulman dá especial destaque ao conhecimento pedagógico do conteúdo, que consiste nas formas de representar e formular o conteúdo de modo a torná-lo compreensível ao aluno. Este conhecimento abarca não apenas os saberes que os professores detêm sobre os conteúdos matemáticos a lecionar, mas também os procedimentos pedagógicos suscetíveis de potenciar o processo de ensino e aprendizagem. O interesse por este tipo de conhecimento deriva da ligação que se estabelece entre o conhecimento do conteúdo e a prática de ensino, o que significa que as discussões sobre o conteúdo devem ser relevantes para o ensino e que as discussões sobre o ensino devem garantir que se dê atenção ao conteúdo (Ball, Thames & Phelps, 2005).

Há autores que apresentam algumas críticas à noção que Shulman dá ao conhecimento pedagógico do conteúdo. Por exemplo, Ponte e Chapman (2006) consideram que na definição deste conhecimento Shulman remete mais para uma conceção declarativa do conhecimento do professor do que para uma conceção de conhecimento orientado para a ação ou inserido na prática. Azcárate (1999) e Ball e Bass (2000) consideram que o conhecimento necessário para o professor poder ensinar integra outros elementos para além do conhecimento do conteúdo e do conhecimento pedagógico. Por vezes, este conhecimento é designado por "conhecimento didático" do professor, que para Ponte (1999) é um conhecimento essencialmente orientado para a ação e se desdobra por quatro domínios fundamentais:

(1) O conhecimento dos conteúdos de ensino, incluindo as suas inter-relações internas e com outras disciplinas e as suas formas de raciocínio, de argumentação e de validação;

(2) O conhecimento do currículo, incluindo as grandes finalidades e objetivos e a sua articulação vertical e horizontal;

(3) O conhecimento do aluno, dos seus processos de aprendizagem, dos seus interesses, das suas necessidades e dificuldades mais frequentes, bem como dos aspetos culturais e sociais que podem interferir positiva ou negativamente no seu desempenho escolar;

(4) O conhecimento do processo instrucional, no que se refere à preparação, condução e avaliação da sua prática letiva. (p. 60-61)

Determinadas tarefas de ensino dependem, sobretudo, do conhecimento do conteúdo matemático. Tomar decisões sobre como e quando abordar um dado tópico matemático, orientar os alunos no que têm que fazer, ouvir e comentar as suas ideias, determinar a validade de um argumento matemático ou a adequação das representações matemáticas e estabelecer conexões entre os tópicos abordados, quer noutras disciplinas quer na própria Matemática, são exemplos de tarefas em relação às quais o conhecimento do conteúdo é determinante (Ball et al., 2005).

O conhecimento que o professor tem dos programas da sua área disciplinar, da variedade de materiais que pode utilizar no seu ensino e das vantagens e desvantagens do uso desses programas e materiais na sala de aula caracteriza, segundo Shulman (1986), o conhecimento do currículo. Para Canavarro (2003), o conhecimento do currículo integra também o conhecimento que articula os conteúdos matemáticos, as recomendações metodológicas, as finalidades e objetivos e as indicações sobre a avaliação das aprendizagens dos alunos. Para esta articulação se tornar eficiente, a autora considera que o professor precisa de conhecer o teor dos programas, de os interpretar e de os adaptar ao contexto onde exerce a sua profissão docente.

O conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem abrange o conhecimento dos seus interesses, das suas formas habituais de reagir, das suas referências culturais (Santos & Ponte, 2002) e das formas como aprendem e desenvolvem as suas ideias matemáticas (Kilpatrick, Swafford & Findell,, 2001). Desde a planificação até à concretização dos planos de aula, o professor precisa de atender ao que os alunos conhecem, saber como responder às suas questões ou afirmações e tomar decisões sobre o que fazer com as diferentes ideias que os alunos apresentam (Kilpatrick et al., 2001). O professor desempenha, assim, um papel de facilitador da aprendizagem dos alunos e não de transmissor de conceitos, factos ou técnicas.

O conhecimento instrucional é o conhecimento que o professor utiliza na sua prática letiva, mais propriamente nas fases de planificação, condução da aula e avaliação do processo de ensino-aprendizagem. Para Canavarro (2003), planificar uma aula consiste em ordenar o sentido que o professor pretende dar à sua ação, articulando um conjunto de conhecimentos, ideias e experiências que servem de apoio conceptual e justificação do que decide. O papel do professor torna-se fundamental no desenvolvimento das atividades, pela influência que as suas decisões podem ter para ajudar os alunos a construírem o conhecimento pretendido. Nessa construção, para além da natureza das tarefas, é importante o contexto em que as tarefas se desenvolvem, envolvendo não só os aspetos organizacionais mas também as interações entre os diferentes intervenientes na sala de aula. A diversidade de estratégias, tipos de tarefa, abordagens e recursos que o professor pode escolher influencia a dinâmica das atividades da sala de aula e aumenta o grau de imprevisibilidade do que pode ocorrer.

4. Formação e desenvolvimento profissional do professor

A especificidade da sociedade contemporânea reflete-se no reequacionar da escola e da ação educativa e também da educação matemática, especialmente, como refere Loureiro (2004), porque as metodologias e programas curriculares sofreram, nas últimas décadas, alterações muito significativas. Segundo Gomes e Ralha (2005), as novas exigências metodológicas, que derivam das alterações dos programas escolares, geram dificuldades que parecem agudizar-se quando encontramos uma deficiente formação docente relativa aos conteúdos matemáticos. Para estes autores, a formação inicial não se torna suficiente, sendo necessária uma renovação permanente ao longo da atividade profissional do professor.

Pereira, Carolino e Lopes (2007) defendem que a profissionalização dos professores deve ser assegurada através de cursos de formação que considerem um leque de competências em consonância com as orientações curriculares atuais e as funções que os professores desempenham nas escolas e que incluam todas as componentes necessárias à formação científica, pedagógica e didática e uma componente significativa de prática profissional e de reflexão sobre essa prática.

Gomes e Ralha (2005), ao estudarem o ensino da Geometria no 1.º ciclo, envolvendo docentes e também futuros professores, identificam "um desconhecimento no mínimo preocupante ao nível do seu conhecimento científico na área de Geometria dita elementar" (p. 19). No mesmo sentido se pronuncia o Relatório Matemática 2001 (APM, 1998), evidenciando a deficiente formação inicial dos professores de 1.º ciclo no que concerne à Matemática, sobretudo os docentes que fizeram a sua formação profissional em contexto de Magistério Primário[1], os quais "tiveram uma formação inicial muito precária em Matemática, em questões de educação e em didática da Matemática (...) seguindo planos de estudo com uma componente nula ou muito reduzida" (p. 70).

Outro estudo realizado por Fonseca, Lopes, Barbosa, Gomes e Dayrell (2002) evidencia uma clara discrepância do nível de conhecimentos de docentes relativamente a conteúdos de Geometria. Quanto aos docentes que fizeram a sua formação nas atuais Escolas Superiores de Educação, a situação pode não ser muito diferente, pois a possibilidade de optarem por variantes que não incluem a Matemática — Educação Física, Inglês, Português, ... — reduz as oportunidades de formação na área da Matemática (APM, 1998).

O estudo de Matos (1985) corrobora as lacunas de futuros professores em competências geométricas à luz da teoria de van Hiele. Nesse estudo refere-se que uma boa parte dos participantes não atingiu ou não ultrapassou o nível 2. Segundo Ponte et al. (1998), "o nível 2 seria suficiente para ensinar de forma "mecanizada" os conteúdos geométricos do currículo português do 1.º ciclo, enquanto o nível 3 seria necessário para um ensino responsável desses mesmos conteúdos" (p. 163).

[1]Estes profissionais entraram para o Magistério Primário com 11 anos de escolaridade e no Magistério completaram mais 3 anos de escolaridade, orientados para a docência no ensino primário, correspondente ao atual 1.º ciclo do ensino básico (alunos dos 6 aos 10 anos).

Quanto à formação contínua, também ela era escassa e dispersa até 2005 e, em certos casos, segundo Blanco e Mellado (1999), até contraproducente, porque “a metodologia tradicional utilizada em centros de formação reforça as crenças e papéis dos professores” (p. 19). Estas mesmas conclusões são mencionadas pela APM (1998), reportando-se, concretamente, à formação contínua dos professores do 1.º ciclo, para referir que a maioria dos professores desse nível não havia frequentado nenhuma ação de formação relativa ao atual programa de matemática. Também é salientado que a formação contínua disponível não tinha, na altura, na maior parte dos casos, qualquer utilidade ou interesse para os professores, os quais, aparentemente, só as frequentavam com o intuito de obter os créditos necessários à sua progressão na carreira.

Outra questão que se coloca ao processo de formação, quer inicial quer contínua, passa pela herança escolar dos docentes e da sua própria individualidade. Convém não esquecer que os professores tiveram um longo período de escolarização como alunos de Matemática nos ensinos básicos e secundário e ainda como estudantes para professores, desenvolvendo neles crenças e imagens sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, que podem condicionar a aprendizagem dos alunos.

Fonseca et al. (2002) realçam a preocupação do desfasamento entre as propostas apresentadas nas ações de formação e as práticas docentes subsequentes, referindo que “apesar de certo entusiasmo demonstrado pelos professores em relação às novas metodologias, as repercussões em sala de aula não se fazem sentir prontamente” (p. 50). As autoras afirmam a necessidade de que a formação vá para além da mera sugestão de atividades e estratégias inovadoras, preocupando-se com a reflexão e o questionamento acerca das conceções dos docentes, advogando “um repensar das conceções desse ensino, do conteúdo a ser abordado e da intencionalidade e viabilidade de aplicação dos recursos didáticos à sua disposição” (p. 51). Também Loureiro (2004) se debruçou sobre esta questão. Nas conclusões do seu estudo sobre formação de professores, esta investigadora refere-se às expetativas dos docentes quanto à formação que realizam, salientando que eles pretendem sugestões e propostas que possam acomodar às suas próprias conceções metodológicas, mas, na generalidade, não estão abertos à mudança, ou ao questionamento das suas conceções pessoais acerca do processo de ensino e de aprendizagem.

De facto, embora o aprofundamento e a reflexão sejam inerentes ao profissional que se dedica, que investiga e que reflete, os tempos atuais recontextualizam a formação e o desenvolvimento profissional, contribuindo para uma maior consciência da necessidade de permanente atualização de conhecimentos, renovação e mudança nos saberes instituídos e, sobretudo, do seu questionamento. Como assinala Ribeiro (1993), a importância de uma continuidade no processo de formação é tal que leva a concebê-la como um estado de permanência, sendo a formação inicial e contínua momentos de um todo indissociável.

5. Metodologia de investigação

Neste estudo analisa-se o conhecimento didático de duas professoras do 1.º ciclo sobre tópicos de Geometria tratados neste nível escolar e a relação entre esse conhecimento e a sua formação. Com este objetivo desenvolvemos um estudo de caso com as professoras Ana e Inês. Estas docentes foram selecionadas por lecionarem na mesma escola em turmas compostas por dois anos de escolaridade distintos. Ana lecionou o 1.º e o 2.º anos de escolaridade e Inês o 3.º e o 4.º anos. Ambas lecionam há mais de vinte anos, realizaram um curso de complemento de formação, respetivamente Expressões e Orientação Educativa, e à data da realização do estudo frequentavam o Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

O estudo segue uma metodologia qualitativa e interpretativa, tendo por propósito compreender os significados que as professoras dão às ações em que se envolvem (Bogdan & Biklen, 1994). A abordagem interpretativa procura compreender e explicar uma dada realidade com base na análise de um conjunto concreto e específico de informações, sendo determinante o "papel pessoal do investigador" (Gómez, Flores & Jiménez, 1999, p. 34). Como a subjetividade do investigador pode colocar em causa a credibilidade da informação recolhida, no sentido de a tornar menos subjetiva, este tipo de abordagem socorre-se de um conjunto de medidas, tais como o recurso a uma descrição detalhada suscetível de possibilitar a "particularidade das situações, permitindo uma descrição exaustiva e densa da realidade concreta objeto da investigação" (p. 35).

Os dados foram recolhidos através de quatro observações de aulas a cada uma das docentes ($OA_i, i \in \{1,2,3,4\}$) e duas entrevistas semiestruturadas individuais a cada uma das professoras. A observação de aulas é entendida por Yin (2001) como uma técnica de recolha de dados que permite reunir informações diretas sobre os comportamentos dos participantes. No nosso caso, tratou-se de reunir informações acerca da prática docente e inferir aspetos do conhecimento didático das professoras envolvidas em relação a conteúdos da Geometria. A primeira entrevista (E1) foi focada em questões sobre tópicos de Geometria do atual programa de matemática do 1.º ciclo do ensino básico e a segunda entrevista (E2) incidiu sobre as aulas observadas. Neste texto, tendo por referência os domínios do conhecimento didático de Ponte (1999), analisamos o conhecimento do conteúdo de Geometria, o conhecimento do currículo sobre Geometria e o conhecimento instrucional de Ana e Inês relativamente ao tema de Geometria do 1.º ciclo.

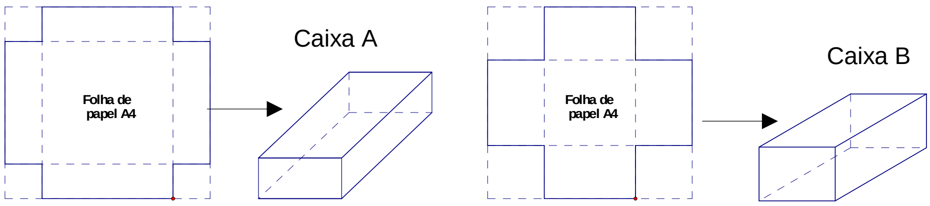
6. Apresentação de resultados

6.1. O conhecimento do conteúdo de Geometria de Ana e Inês

Ana e Inês revelam ter conhecimentos consistentes de alguns conteúdos de Geometria que lecionam, mas também revelam algumas dificuldades em relacionar os significados de conceitos. Ana não aprecia as estimativas e a resolução de problemas sobre áreas e volumes, como exemplifica a forma como compara o volume de dois cilindros obtidos a partir do enrolamento de uma folha A4 segundo cada um dos seus lados. Considera que os cilindros "vão levar a mesma quantidade de líquido, a folha é a mesma" (E1). Assim, a mesma superfície da folha de papel original implica volumes iguais, ignorando-se o impacto diferente do raio da base e da altura do cilindro no seu volume. Na sua resposta, Ana recorre à regra intuitiva mesmo A — mesmo B, que afirma que a igualdade de quantidades de uma grandeza A implica a igualdade de quantidades de uma grandeza B (Tirosh & Stavy, 1999).

Ana estabelece um raciocínio similar na comparação de volumes de caixas obtidas a partir de cortes de quadrados iguais nos cantos de uma mesma folha A4, como se mostra na Figura 1.

A uma folha de papel A4 foram retirados quatro pequenos quadrados em cada um dos seus quatro cantos, obtendo-se por dobragem a caixa A, conforme se mostra na figura seguinte. Seguidamente, numa outra folha de papel A4, foram retirados quatro quadrados maiores em cada um dos seus quatro cantos, obtendo-se por dobragem a caixa B, conforme se mostra na figura seguinte.



Os volumes das caixas A e B são **iguais** ou **diferentes**? Porquê?

Figura 1. Construção das caixas A e B a partir de uma folha A4.

Para Ana, os volumes das caixas “são diferentes, embora tenha dificuldades em justificar, penso que a caixa A é maior do que a caixa B, porque se cortou mais papel à B” (E1). Neste caso, a professora adota a estratégia intuitiva mais A — mais B, que afirma que a maior de quantidade de uma grandeza A implica a maior quantidade de uma grandeza B (Tirosh & Stavy, 1999).

A professora tem consciência de que as dificuldades que tem em alguns conteúdos influenciam o seu ensino. Por exemplo, a dificuldade que tem sobre a noção de volume leva-a a afirmar: “não gosto muito de dar volumes, os alunos não entendem, é muito abstrato” (E2).

Inês também manifesta algumas dificuldades com os volumes. Relativamente ao volume dos cilindros, considera que “a folha está delineada pela mesma superfície, para mim o volume é sempre igual” (E1). Sobre os volumes das caixas afirma que “são diferentes, a superfície utilizada na caixa A é maior que a superfície utilizada na caixa B, porque se estamos a tirar mais papel à B, estamos a tirar também no volume interno dessa caixa” (E1). Tal como Ana, também Inês recorre às regras intuitivas mesmo A — mesmo B e mais A — mais B.

Inês também tem consciência que as dificuldades que sente nos conteúdos de Geometria influenciam as suas aulas, dizendo: “na Geometria tenho lacunas de conhecimentos, torna-se complicado explicar aos alunos, eu tenho que perceber as coisas para fixar” (E2).

Para além das dificuldades que revelam em noções tridimensionais, as professoras também revelam dificuldades em noções bidimensionais, como se verificou na pavimentação da Figura 2.

Na seguinte figura, delimite a unidade padrão e refira como se obtém a pavimentação.

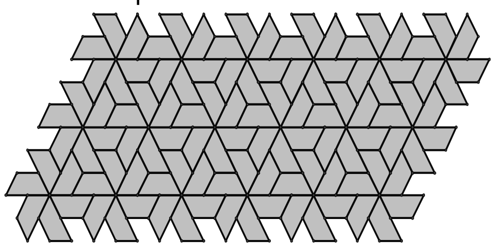


Figura 2: Pavimentação do plano.

Ana identifica como "unidade padrão o triângulo" (E1), mas não explicita as transformações que permitem pavimentar o plano a partir desta figura. Inês considera que "a unidade padrão é o hexágono e a pavimentação é só repetir a mesma figura" (E1).

Numa outra questão, em que se pedia para determinar a melhor posição para a construção de uma bomba de gasolina equidistante a duas localidades, as professoras revelam dificuldades de raciocínio espacial.

Limitaram-se a identificar a posição correspondente ao ponto médio do segmento que une essas localidades: "desenho as vilas, uno-as com uma linha e depois divide-se ao meio, é aí que deve ser construída a bomba" (Inês, E1); "depois de sabermos qual a distância entre as vilas é só dividir ao meio" (Ana, E1).

Já numa questão, em que se pedia a estimativa da área de uma superfície, as docentes apresentaram resoluções em que a medida da área é o resultado da aplicação de fórmulas da área de figuras geométricas das quais se conhecem as dimensões dos seus lados.

Pretende-se **estimar** a área da Antártida. Explique como determinaria uma estimativa dessa área?

Figura 3: Estimar a área da Antártida.

Ana afirma que esta "questão é difícil de perceber, não me senti à-vontade para responder" (E1), enquanto Inês refere que "é possível dividir em dois retângulos para calcular a área da Antártida, porque sei achar essa área" (E1).

Numa outra questão sobre a relação entre perímetros e áreas de retângulos semelhantes, as docentes, embora refiram ter recorrido à representação pictorial, valorizam a aplicação das respetivas fórmulas:

> Como o perímetro é a soma de todos os lados, o retângulo B tinha que ter um perímetro 3 vezes maior do que o A. Na área já é diferente, porque tem que se pensar bem na fórmula lado vezes lado. Eu fiz as contas com a fórmula. (Ana, E1)
>
> Normalmente fazemos com os alunos, olhamos para o comprimento dos lados, é só achar os perímetros e as áreas e depois comparar (…) dei exemplos, desenhando as figuras, e depois é só aplicar as fórmulas, tanto para achar os perímetros como para achar as áreas. (Inês, E1)

Ao justificarem a atribuição de valores às dimensões dos retângulos, para poder aplicar tais fórmulas, as professoras parecem não ter presente a relação que existe entre os perímetros e as áreas de figuras semelhantes.

6.2. O conhecimento do currículo sobre Geometria de Ana e Inês

Ana e Inês mostram conhecer o programa atual de Matemática do 1.º ciclo e a sua reformulação desde os tempos da sua formação inicial, altura em que o tema de Geometria era desvalorizado. Dos seus tempos de aluna, Ana recorda que no ensino "de Geometria a matéria era dada de forma rápida e pouco atrativa porque parecia não ter tanta importância como o cálculo" (E2). Inês também não tem muitas recordações do tema de Geometria, referindo que davam o nome das "figuras, áreas, perímetro e volumes com aplicação das fórmulas; no liceu raramente dávamos porque estava no fim do programa e dos livros" (E2).

Quanto às estratégias utilizadas no ensino de Geometria, as professoras reconhecem, como afirma Inês, que incidiam no que "o professor dizia e fazia" (E2) e os materiais não eram integrados nas atividades da aula, como exemplifica a afirmação de Ana: "não me recordo de utilizarmos materiais, eram só contas e contas, era do tipo de repetir e memorizar" (E2). Ao confrontarem tais estratégias de ensino com as que desenvolvem nas suas aulas, as professoras evidenciam conhecer as orientações metodológicas dos programas escolares atuais.

> Nós fazemos experiências para compreenderem e não para decorarem; eles sentem-se à vontade para perguntar coisas. (Ana, E2)
>
> Quanto a material… os livros da escola, pelo menos do género do que se usa hoje, nem pensar! Também não me recordo de fazer jogos… era treinar e treinar para aprender. (…) [Agora] fazemos jogos para que os alunos aprendam as coisas (…) Quando não entendem perguntam e eu tento explicar de outra maneira. (…) Agora a Matemática é mais concretizada, gostamos que os alunos aprendam, mas também que entendam, não é como no nosso tempo. (Inês, E2)

Embora sendo um processo complexo e moroso, que provoca um conflito mais evidente em Inês do que em Ana, nas aulas observadas foi evidente um esforço de articulação entre as suas representações pessoais e as novas diretrizes curriculares. Inês considera: "ainda tenho que me habituar aos novos métodos porque eu não tinha aprendido assim (…) já mudou muita coisa desde que andei a estudar" (E2). Percebe-se, assim, porque nas suas aulas não implementou a aprendizagem por descoberta. Por exemplo, ao trabalhar a noção de perímetro, seguiu o mesmo método nas quatro aulas, o qual consistiu em ler e explicar a definição, colocar a questão e iniciar imediatamente a resposta que, depois, os alunos completaram: "Então, de acordo com a definição, temos que o perímetro daquele polígono é igual à so… Então escreve P é igual a la…" (OA2).

Por outro lado, Inês reconhece que sente dificuldades, por exemplo, quando afirma: "quando me dizem que um quadrado é um retângulo (…) não entendo (…) torna-se complicado explicar aos outros (…) eu tenho que perceber as coisas para fixar e assimilá-las (…) e esta dos losangos serem quadrados nem a fiz! Continuo a não perceber" (E1). A professora denota não compreender a inclusão de classes dos quadriláteros, questão que se situa no nível 3 de van Hiele.

Ana e Inês mostram preocupação em adequar o desenvolvimento dos conteúdos de Geometria aos novos conhecimentos que adquiriram na formação que estavam a desenvolver. Para Inês, esta influência incide mais sobre as tarefas que propõe do que no processo de as trabalhar com os alunos, como exemplifica a afirmação: "tinha exercícios práticos que podemos desenvolver em sala de aula (…) vou experimentar alguns dos trabalhos que fizemos na formação“ (E2).

6.3. Conhecimento instrucional de Ana e Inês

No decurso das aulas observadas, constatou-se que, na generalidade, as docentes pareciam dominar os conteúdos de Geometria que trataram. Ana tratou a composição de figuras geométricas, construção de figuras simétricas e composição de figuras geométricas a partir de duas figuras (triângulo e trapézio retângulo) obtidas pela divisão de um quadrado. Inês abordou a classificação, perímetro e área de polígonos e o volume do cubo.

O tratamento de alguns conteúdos deveria merecer mais atenção por parte de Ana. Por exemplo, sobre a composição de figuras geométricas (triângulos de vários tamanhos, quadrados e paralelogramos) (OA1), a sua preocupação centrou-se na identificação do número de lados e de ângulos de cada uma das figuras. As características do paralelogramo não mereceram qualquer atenção, porque na sua perspetiva “não faz parte do programa” (E2). Sobre o conceito de eixo de simetria (OA2), Ana referiu que este divide uma figura ‘em duas partes iguais’, sem contemplar situações de eixos que dividem uma figura em partes iguais e que não são eixos de simetria. Embora seja importante trabalhar a perceção visual dos alunos na identificação de figuras e de propriedades dessas figuras, será igualmente importante apresentar exemplos e contraexemplos dos conceitos tratados e usar uma linguagem rigorosa.

Inês, ao abordar as características de alguns polígonos (OA1), permitiu que estes fossem desenhados no quadro e nas fichas de trabalho sempre na mesma posição, não considerando este atributo importante para a identificação de figuras geométricas, afirmando: “Eu aprendi assim!” (E2). Também ao explorar, com base em diferentes figuras, a noção de perímetro não mencionou como determinar perímetros sem recorrer diretamente à fórmula. Embora os modelos apresentados sugerissem a medição das figuras e aplicação posterior da fórmula, Inês refere aos alunos: “Então vamos lá calcular o perímetro dessas figuras. As continhas todas que tiverem de ser feitas fazem-nas no caderno. Não se esqueçam que é só juntar os valores dos lados” (AO2).

As duas docentes divergem na forma como dinamizam o ensino de Geometria. Ana rege a sua prática docente por abordagens abertas à participação e discussão dos alunos, usando, quando oportuno, materiais manipuláveis como “o geoplano e o tangram, para as figuras geométricas e explorar construções; faço muitos cartazes, não faço, faço-os fazer, ponho-os a recortar e compor cartazes” (E2). Esta professora valoriza o apoio individualizado na clarificação de dificuldades que os alunos manifestam, desenvolvendo neles o “à-vontade para perguntar coisas; eu gosto que todos aprendam e se um aluno tiver dificuldades, vou para junto dele apoiá-lo” (E2). Embora procure cumprir as suas planificações, dirigindo por vezes os alunos para as respostas que pretende obter, preocupa-se em criar momentos para a realização de atividades práticas que envolvam os alunos. Para isso, recorre a expressões do género: “Vamos começar a fazer” (OA1); “Se não consegues, pede ao teu companheiro que ajude” (OA2); “Se houver dúvidas, vamos verificar; vamos ver quantos conseguem encontrar” (OA4).

Apesar de proporcionar momentos de apresentação das atividades dos alunos aos colegas, com o intuito de fomentar a discussão, Ana nem sempre lhes pede para explicarem os seus raciocínios. Recorre a diferentes representações visuais "para os motivar e para aprenderem melhor; acho que aprendem melhor o que estamos a tratar, porque acho que pensam: fui eu que fiz" (E2). Valoriza também representações concretas dos conceitos, tirando partido do uso de material manipulável. Esta professora considera que os "conceitos de Geometria que não permitem trabalhar com diferentes materiais são difíceis de ensinar aos alunos, como, por exemplo, as estimativas" (E2).

Por sua vez, Inês revela ser uma professora diretiva e expositiva. Embora atribua importância aos novos métodos de ensino, por oposição aos tradicionais que tanto lhe desagradaram enquanto aluna, parece ter dificuldade em superar nas suas aulas essas representações. Os seus alunos têm poucas oportunidades para experimentar e explicar os seus raciocínios, não desenvolvendo oportunidades que lhes permita descobrir os novos conhecimentos. Mesmo quando recorre a material manipulativo, como por exemplo figuras em papel, os artefactos não exercem a sua função de levar os alunos a discutir, a fazer inferências e a apontar conclusões, como se exemplifica a seguir.

Dentro do envelope 1 têm figuras que correspondem às que estão na ficha. Devem colá-las no local adequado, está lá bem explicado. Só quando eu disser é que podem pegar no outro envelope (OA1).

Vocês vão ver daí sentadinhos. Trouxe este recipiente para verem do lugar. O que diz aí na ficha é que a água que verter corresponde ao volume do que se meter na bacia. Eu escolhi um pacote de leite escolar cheio, para verificarmos se a capacidade do pacote de leite corresponde ao volume que está aqui escrito. O volume interno do pacote é de 200 ml (OA4).

Nas suas aulas predomina a verbalização e a resolução acompanhada de fichas muito estruturadas. Os procedimentos desencadeados ao longo das aulas foram sempre os mesmos: recurso ao quadro para abordar conceitos relacionados com o conteúdo da aula; leitura e explicação das definições dos conceitos abordados; realização da ficha de trabalho passo a passo, com a leitura de um aluno e o esclarecimento da docente.

No processo comunicativo Inês deixou aos alunos um mero papel de resposta reativa aos seus apelos, centrando assim o discurso em si própria. Colocava questões e induzia as respostas, cabendo aos alunos completar frases, repetir ou terminar raciocínios por ela indiciados, como se exemplifica na seguinte afirmação: "Então olhem, vou introduzir o pacote de leite. A água que saiu corresponde ao volu…" (AO4). Por fim, Inês comunicava os resultados, sistematizando e evidenciando algumas atividades dos alunos, mas sem possibilitar aos mesmos a sua apresentação.

6.4. A formação de Ana e Inês em conteúdos de Geometria

Ao analisar o seu percurso profissional, Ana distingue os diferentes tipos de formação que vivenciou. Quanto à formação inicial, menciona que os conteúdos de Geometria foram escassos e superficiais, que eram apresentados pelos seus professores de uma forma meramente teórica e com poucas aplicações práticas. Ana considera que o curso que frequentou não lhe disponibilizou experiências nem conhecimentos para o exercício da docência, o que a leva a afirmar que "foi muito difícil começar a ensinar" (E2). Relativamente à formação contínua, salienta a formação complementar que frequentou, no âmbito do curso de equiparação à licenciatura, onde abordou alguns conceitos geométricos — "falámos de polígonos, quadriláteros, de o quadrado ser um retângulo… dantes estudávamos as figuras geométricas: quadrados, retângulos, triângulos, hexágonos (…) sem as entendermos muito bem" (E2).

Sobre a frequência de ações de formação, realça a formação em Matemática promovida pelo Ministério da Educação, com a duração de um ano letivo, que distingue de outras ações de formação que frequentou pelo seu carácter prático e centrado na ação educativa com os alunos. Ana salienta que o que "aplico com os meus alunos fui aprendendo ao longo dos anos como professora" (E2). O desenvolvimento do seu conhecimento sobre conceitos de Geometria resulta, assim, do conhecimento que acumula com a experiência adquirida na sua prática docente, sem oportunidades de trabalhar com os pares e de partilhar e discutir as situações que vivencia.

Inês faz a distinção entre os diferentes tipos de formação que vivenciou, desde a escolaridade básica e secundária até à formação contínua. Quanto à primeira, refere que atribuía pouca importância aos conteúdos de Geometria e que não ficou com grandes noções nessa altura, pois, segundo recorda, o tempo dedicado a esse tema era escasso, os conteúdos eram apresentados sempre da mesma forma pelos professores, com poucas aplicações práticas, pouco desenvolvidos e pouco consolidados.

Sobre a formação para a docência, recebida no decurso da realização dos estudos no Magistério Primário, no que diz respeito à área da Matemática, em geral, e da Geometria, em particular, Inês considera que não se articulava com a futura atividade docente: "nada relacionado com o que ia dar no 1.º ciclo" (E2). No que diz respeito ao tema da Geometria, também neste caso a memória que guarda volta a ser escassa: "não me recordo ter dado Geometria no Magistério (…) a Geometria ficava para o fim e como os programas eram extensos, raras vezes se cumpriam (…) mesmo no estágio trabalhava-se mais o cálculo e os problemas" (E2). Percebe-se que a frequência do curso não lhe disponibilizou as necessárias experiências e conhecimentos matemáticos para o exercício da docência, principalmente ao nível do tema da Geometria. A docente refere o seu esforço de colmatar essas lacunas desde a fase de formação para a docência até à atualidade, num processo de autoformação com vista ao seu desenvolvimento profissional: "Quando quero dar alguma coisa e sinto dúvidas, pesquiso e vejo vários livros para ver como estão apresentados… para eu ver a maneira mais fácil, ou melhor, que me tornem mais claros os conteúdos" (E2).

Inês refere, também, a formação contínua e realça a formação complementar que frequentou, no âmbito do curso de equiparação à licenciatura em Orientação Educativa. Este curso não incluía conteúdos de Matemática, tendo-o realizado com o intuito de "voltar ao estabelecimento de ensino para adquirir novos dados sobre o estudo e a pesquisa, que vamos perdendo aos poucos, à medida que o tempo passa" (E2). Quanto a ações de formação, refere a frequência de várias, também elas não relacionadas com a Matemática, porque "não eram facultadas a todos ações nesta área" (E2). A única ação de formação dedicada à Matemática foi a ação promovida pelo Ministério da Educação, que se revestiu de muito interesse, foi dirigida às carências que sentia e assumiu um carácter prático e centrado na ação educativa.

Tinha exercícios práticos que podemos desenvolver em sala de aula. Também me chamou a atenção para alguns conhecimentos, como por exemplo o hexágono e o pentágono. Aprendi aqueles que se ensinam aos alunos, um polígono que tenha seis lados é um hexágono, mas o que normalmente aparece nos livros é o regular, os outros são irregulares… ainda tenho que me habituar porque não me ensinaram assim. (E2)

Ainda no âmbito do seu desenvolvimento profissional, embora Inês reconheça ser importante a troca de experiências e saberes com os colegas, na prática, acaba por trabalhar individualmente, referindo: "eu faço as minhas coisas sozinha, cada um tem os seus alunos" (E2).

7. Conclusão

Em relação à Geometria, as docentes revelam um periclitante conhecimento dos conteúdos deste tema que são abordados no 1.º ciclo, salientando-se o recurso a regras intuitivas (erradas) para comparar volumes, que também Martins e Fernandes (2009) observaram em alunos do ensino básico, a não compreensão da inclusão de classes dos quadriláteros, dificuldades no cálculo aproximado de áreas e não reconhecimento das relações entre áreas e perímetros de figuras semelhantes.

As professoras apresentam um conhecimento estruturado com base em definições, fórmulas e cálculos, que parece resultar de uma aprendizagem baseada na repetição e na assimilação acrítica de conceitos. Consequentemente, o conhecimento de conteúdos de Geometria parece ficar muito aquém do que é esperado para que um professor os possa ensinar. Gomes e Ralha (2005) consideram que ninguém pode ensinar aquilo que não sabe e não basta ter um conhecimento superficial de matemática elementar.

Relativamente ao conhecimento do currículo, Ana e Inês manifestam conhecer os conteúdos de Geometria presentes nos programas deste ciclo de ensino, os objetivos de aprendizagem e os materiais didáticos a integrar nas estratégias de ensino e aprendizagem. Esta perceção torna-se explícita no destaque dado pelas professoras à evolução ocorrida nas orientações metodológicas dos programas desde a sua formação inicial.

Embora tanto Ana como Inês indiciem conhecer as orientações curriculares para o ensino da Geometria, a sua formação limitada tende a condicionar as tarefas que planificam e a forma como as trabalham na sala de aula. A experiência adquirida no seu percurso profissional, como refere Inês, tende a "colmatar algumas lacunas da minha formação" (E2), principalmente em relação às representações que usam para tornar compreensíveis os conteúdos que ensinam.

Na dinamização das estratégias de ensino, Inês enfatiza a atividade do professor e a repetição de exercícios, procurando que os alunos imitem o que ela faz, valorizando sobretudo a memorização e a aplicação acrítica de fórmulas. Diferentemente, Ana valoriza mais a participação dos alunos, atende às suas respostas, recorre a desenhos que produz no quadro para evidenciar o significado dos conteúdos abordados e usa material para favorecer a descoberta pelos alunos.

Porém, nem sempre parte das respostas dos alunos, orientando-os para o que pretende que aconteça.

No presente estudo verifica-se que as imagens que são desenvolvidas ao longo da formação inicial (desde os primeiros anos de escolarização) sobre o ato educativo tendem a condicionar a inovação da prática pedagógica. Nem sempre o conhecimento das orientações metodológicas dos programas escolares e a formação contínua que se desenvolve é garante de uma modificação ou transferência automática para a prática de sala de aula desses conhecimentos, confirmando-se assim as teses de Fonseca et al. (2002) e Loureiro (2004).

No sentido de ultrapassar alguns obstáculos no ensino de matemática, será importante que a formação docente de base reflita as orientações metodológicas atuais através da experimentação e da concretização. É essencial que os professores se envolvam na exploração de tarefas matemáticas da mesma forma que se espera que o façam com os seus alunos, questionando e discutindo ideias com outros docentes. Um exemplo do trabalho entre pares, desenvolvido num outro estudo (Almeida, 2010), foi a presente investigação em que as duas docentes tiveram oportunidade para refletir sobre a sua prática profissional, permitiu-lhes consciencializarem-se da importância de reformularem as suas opções metodológicas e operacionalizarem os seus conhecimentos quanto à forma de abordar os conteúdos de Geometria com os seus alunos.

Bibliografía

Abrantes, P. (1999) Investigação em geometria na sala de aula. In Veloso, E., Fonseca, H., Ponte, J. P. & Abrantes, P. (org.), *Ensino da geometria no virar do milénio*, 51-62. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Almeida, J. F. (2010). *Representações e conhecimentos de docentes do 1.º ciclo do ensino básico relativamente à geometria: um estudo em torno da sua influência na abordagem com os alunos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

APM (ed.) (1998). *Matemática 2001 – Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática. Relatório preliminar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Azcárate, P. (1999). El conocimiento profesional: naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante*, 8, 111-137.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: knowing and using mathematics. In Boaler, J. (ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*, 83-104. Westport, CT: Ablex.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2005). *Articulating domains of mathematical knowledge of teaching*. Paper presented at the American Education Research Association Conference.

Blanco, L. J. & Mellado, V. (1999). Novos desafios na formação dos professores de Matemática. *Revista de Educação*, 8(2), 15-24.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos*. Tese de Doutoramento em Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Fonseca, M. C., Lopes, M. P., Barbosa, M. G., Gomes, M. L., & Dayrell, M. M. (2002). *O ensino de geometria na escola fundamental: Três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais*. Belo Horizonte: Autêntica.

Gomes, A. & Ralha, E. (2005). Sobre o ensino superior da matemática: a geometria e os professores do 1º Ciclo. Novos desafios velhas deficiências. *Boletim da SPM*, 54, 1-25.

Gómez, G. R., Flores, J. G. & Jiménez, E. G. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (eds.) (2001). *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, D. C.: National Academy Press.

Loureiro, C. (2004). Que formação Matemática para os professores do 1º Ciclo e para os educadores de infância? In Borralho, A., Monteiro, C. & Espadeiro, R. (orgs.), *A Matemática na formação do professor*, 89-123. Lisboa: Secção de educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Martins, I. A. & Fernandes, J. A. (2009). Estratégias usadas por alunos do ensino básico em tarefas envolvendo relações entre os conceitos de perímetro, área e volume. In Gomes, A. (ed.), *EME 2008 – Elementary Mathematics Education*, 303-312. Braga: Universidade do Minho e Associação para a Educação Matemática Elementar.

Matos, J. M. (1985) Os conceitos de geometria dos futuros professores primários e educadores de infância: Uma investigação baseada no modelo de van Hiele. In *Atas do ProfMat* 85, 130-145. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ministério da Educação (1990). *Reforma educativa: Ensino Básico -Programa do 1º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação -DGEBS.

Ministério da Educação (1998). *Organização curricular e programas: Ensino Básico-1.º Ciclo*. Ministério da Educação -Departamento de Educação Básica.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Monteiro, C. (1992). Mudam-se conceções, mudam-se práticas In Brown, M., Fernandes, D., Matos, J. F. & Ponte, J. P. (eds.), *Educação e Matemática*, 241-247. Lisboa: IIE Secção de educação e matemática da SPCE.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática/Instituto de Inovação Educacional.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática/Instituto de Inovação Educacional.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pereira, F., Carolino, A. M. & Lopes, A. (2007). A formação inicial de professores do 1.º CEB nas últimas três décadas do séc. XX: transformações curriculares, conceptualização educativa e profissionalização docente. *Revista Portuguesa de Educação*, 20(1), 191-219.

Ponte, J. P. (1999). Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional. In Tavares, J., Pereira, A., Pedro, A. P. & Sá, H. A. (eds.), *Investigar e formar em educação: Atas do IV Congresso da SPCE*, 59-72. Porto: SPCE.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação Matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In Gutierrez, A. & Boero, P. (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 461-494. Roterdham: Sense.

Ribeiro, A. C. (1993) *Formar professores: elementos para uma teoria e prática da formação*. Lisboa: Texto Editora.

Santos, L., & Ponte, J. P. (2002). A prática letiva como atividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. *Quadrante*, 11(2), 29-54.

Shulman, L. S. (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 4-14.

Tirosh, D. & Stavy, R. (1999). Intuitive rules: a way to explain and predict student's reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 51-66.

Yin, R. (2001). *Estudo de Caso: Planejamento e Métodos*. Porto Alegre: Bookman.

Veloso, E. (1998). *Geometria: temas atuais, materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Floriano Viseu. Doutor na área de conhecimento de Didática da Matemática. Professor Auxiliar do Instituto de Educação, Universidade do Minho, Campus de Gualtar, Braga, Portugal. Email: **fviseu@ie.uminho.pt**

Júlia Almeida. Mestre em Ciências de Educação, na Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática. Professora da Escola EB 2,3 Abel Salazar, Ronfe, Guimarães, Portugal. Email: **jufatal@gmail.com**

José António Fernandes. Doutor na área de conhecimento de Metodologia do Ensino da Matemática. Professor Associado do Instituto de Educação, Universidade do Minho, Campus de Gualtar, 4710-057 Braga, Portugal. Email: **jfernandes@ie.uminho.pt**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 131-140

Dinamización Matemática:

Enseñanza bajo el enfoque por competencias usando Proyectos Heurísticos

Mario Calderón Ramírez, María Teresa Villalón Guzmán

Resumen	En el presente trabajo se exponen las experiencias del uso de la estrategia de enseñanza apoyada en el uso de proyectos, para fomentar el aprendizaje significativo en los estudiantes de primer semestre del Instituto Tecnológico de Celaya. La evaluación por competencias requiere visualizar la amplia gama de habilidades que ha adquirido un estudiante durante el curso. Al involucrar a los estudiantes en la realización de proyectos propicia que utilicen recursos que tengan a su alcance, fomentando ampliamente la creatividad. Un proyecto bien planteado y diseñado muestra varias competencias, además de creatividad, que se van manifestando durante la elaboración del proyecto. **Palabras clave**: competencias, procesos heurísticos, proyectos.
Abstract	In the present paper the experiences of the use of the strategy of teaching supported in the use of projects are exposed, to promote significant learning in the first semester students of the Technological Institute of Celaya. The evaluation by competences requires visualizing the extensive range of abilities that has acquired a student during the course. Upon involving the students in the execution of favorable projects that utilize resources that have within its reach, promoting extensively the creativity. A well presented and designed project shows several competences, besides creativity, that go declaring during the elaboration of the project. **Keywords:** competences, heuristic projects, projects.
Resumo	No presente trabalho descreve as experiências de utilização da estratégia de ensino apoiado no uso de projetos, para promover aprendizagem significativa em estudantes do primeiro semestre do Instituto Tecnológico de Celaya. A competência avaliação requer exibir a vasta gama de habilidades que um aluno tenha adquirido durante o curso. Envolver os alunos na realização de projetos conducentes à utilização recursos à sua disposição, amplamente incentivado criatividade. Um projeto bem levantado e concebido mostra várias habilidades, além de criatividade, que irá expressar durante a elaboração dos projetos. **Palavras chave:** competência, projetos de heurísticas, projetos.

1. Introducción

Es inminente la necesidad de analizar el desarrollo de las competencias que requieren aprendizajes significativos, lo cual implica que los docentes aborden los procesos cognitivos e intelectivos de manera individual dentro del proceso de formación del estudiante. Sin ello no se podrían lograr los niveles de comprensión que el estudiante necesita de los procesos desarrollados dentro del aprendizaje. Actualmente existe la necesidad de una enseñanza diferente, una enseñanza que permita a los jóvenes asimilar mucha información y utilizarla de forma eficiente. Para lograr esto, es necesario que el estudiante se involucre cognitivamente y emocionalmente en un proceso que le permita aprender y ser crítico. Para lograrlo no basta con plantear "investigaciones" a los estudiantes, esto no los estimula ni emociona por el contrario, provoca un efecto adverso.

En la enseñanza en general se conciben cuatro actividades generales, experiencias estimuladoras o "desencadenantes", actividades cortas y fértiles, trabajo auto correctivo y proyectos de investigación (La Cueva, 1997).

Los proyectos pueden ser muy variados, pero es importante que incluyan siempre tres procesos fundamentales:

- La planificación flexible del propio trabajo por parte de los estudiantes.
- El seguimiento del mismo a través de una retroalimentación continua que culmine en una evaluación objetiva y congruente con el desempeño del alumno.
- La presentación final del proyecto usando los medios disponibles y apropiados en cada caso (Exposición, Informe escrito, generación de un Video, creación de un Cuento, Página Web o Wiki, Poster, Recreación *in vivo,* etc.)

Actualmente los estudiantes están en contacto con las nuevas tecnologías y en algunas ocasiones sería conveniente que ellos mismos propusieran la forma de comunicación más conveniente para mantener un seguimiento detallado del desarrollo del proyecto.

La Cueva (1998) propone los siguientes tipos de proyectos; científicos, tecnológicos, ciudadanos y mixtos. El objetivo del primer tipo es generar conocimiento apoyándose de teorías propuestas en clase y desarrollando experimentos, principalmente corroborativos, el segundo consiste en diseñar y elaborar procesos con base teórica, explicando pasos y conceptos científicos, los proyectos del tipo ciudadanos tienen como objetivo clarificar y proponer soluciones a problemas sociales. Aunque es claro que se pueden proponer proyectos que involucren una mezcla de los anteriores.

El tipo de proyectos que se utilizan para matemáticas suele ser muy operativo. Aunque pareciera que esta ciencia es exacta, abstracta y sólo resuelve ejercicios, se pueden aplicar proyectos tecnológicos-científicos para reforzar y aplicar conocimientos. El objetivo de utilizar este tipo de proyectos conlleva a que el estudiante adquiera una unión emocional con las matemáticas, viendo aplicaciones en cualquier aspecto cotidiano en las que intervienen. Otro aspecto importante que se suele separar, es ver a las Ciencias Básicas como temas aislados. Hay estudiantes que si un problema o un caso de estudio no viene expresado en variables "x" o "y" pierden totalmente el sentido matemático, o bien en el caso consideran que si las variables son "u" o "v" se usa una fórmula diferente, sin comprender realmente su significado. Con el uso de proyectos se busca que el estudiante se dé cuenta en donde se aplican la lógica matemática así cómo su funcionamiento dentro y fuera del papel.

Hay evidencia de prácticas que estimulan mayor actividad y contribución de los estudiantes. Estas prácticas implican dejar de lado la enseñanza conductista-memorística para enfocarse en un trabajo más desafiante y completo. Se sugiere utilizar un enfoque interdisciplinario en vez de uno aislado por asignatura para estimular el trabajo cooperativo, y la mejor práctica para lograr esto es el aprendizaje por proyectos el cual incorpora estos principios (Arciniegas-González y García-Chacón, 2007).

El paradigma tradicional de la transmisión del conocimiento supone que se aprende de manera lineal, y por medio de la repetición, lo cual es útil en el aprendizaje de actividades automatizadas. Se sabe que el "*aprendizaje creativo*" es *caótico, complejo y vinculado a las emociones y la consciencia*; además de que se parte de concepciones previas para construir nuevos conceptos. Investigaciones, desde diversos enfoques, sustentan la necesidad de organizar escenarios diferentes con experiencias novedosas, para que los estudiantes puedan aplicar lo que han aprendido para ser usado en nuevos escenarios (Muñoz-Cano y Maldonado-Salazar, 2011).

La metodología de enseñanza usando proyectos así como el planteamiento de solución de problemas, se derivaron de la filosofía pragmática, la cual establece que los conceptos son entendidos a través de las consecuencias observables y por tanto, el aprendizaje implica un contacto directo con el ambiente real. El trabajar con proyectos modifica la relación maestro-estudiante, permitiendo una interacción de ideas forma enriquecedora, donde el alumno participa activamente proponiendo ideas y el profesor señalando donde aplicar el conocimiento de la materia y de los contenidos revisados en clase. Puede también reducir la competencia entre los alumnos y al permitir a los estudiantes colaborar creando un ambiente más sano de desarrollo continuo al propiciar el trabajo colaborativo. Además, los proyectos pueden cambiar el enfoque del aprendizaje, al pasar de la simple memorización de hechos a la exploración de ideas.

Se plantea la implementación de un proyecto final a los estudiantes del primer semestre de la materia de cálculo diferencial para la carrera de Ingeniería Mecánica. El proyecto está centrado en los temas de optimización y tasa de variación, con la finalidad de aplicar los contenidos desarrollados durante el semestre y deberá ser guiado constantemente por el docente principalmente porque son estudiantes que están en transición del bachillerato y necesitan una guía clara para desarrollar este tipo de actividades. La evaluación del proyecto se realizará a través de una rúbrica que permita visualizar el avance y logros obtenidos por los estudiantes.

2. Metodología

2.1. Uso de la heurística en el enfoque por competencias

Existen tres procesos verbales de un sistema de formación por el que transita un sujeto aprendedor. Inicia con educación, continúa con capacitación y termina con la experiencia. Este proceso se marca por características de educación y habilidades propias que cada individuo ha adquirido y desarrollado durante toda su vida, aquí es donde las competencias encuentran sus raíces (Climent-Bonilla, 2010). El principio de usar proyectos consiste en conjuntar todas las habilidades previas del estudiante, su capacidad de creatividad y la formación adquirida en el curso para lograr que se manifiesten a través de una experiencia educativa la cual favorezca la adquisición de competencias.

La finalidad de esta forma de aprendizaje es que el estudiante utilice sus habilidades para construir competencias, pues es necesaria la comprensión de los temas como un todo, para el desarrollo de los proyectos asignados, lo cual constituye la herramienta principal de esta estrategia de aprendizaje.

Una característica importante en el diseño y aplicación de esta herramienta de enseñanza está en la heurística (*el arte y la ciencia del descubrimiento resolviendo problemas mediante la creatividad*) para la solución de un problema que conlleva la aplicación de los temas de cálculo diferencial. De forma general se plantean a los estudiantes varias opciones de proyectos, de los cuales ellos requieren optimizar o determinar tasas de variación con ejemplos principalmente experimentales. Posteriormente, ellos mismos plantean sus proyectos y las características de los mismos pues de esta forma se pretende evitar, hasta cierto punto el plagio. Luego de realizar el experimento y las mediciones correspondientes, se desarrollan los cálculos necesarios basados en las consideraciones propuestas y finalmente se analizan los resultados.

Los estudiantes realizan el proyecto de forma autónoma, respetando en la medida de lo posible sus ideas, lo cual es fundamental, pues permite que el alumno se involucre más en el proyecto, pero aun cuando se tiene un seguimiento constante y detallado, a fin de lograr el objetivo, pues se considera que los educandos son neófitos y por lo tanto necesitan mayor supervisión.

2.2. Aplicación al Programa de Estudios de Cálculo Diferencial

El curso de Cálculo Diferencial se presta para implementar una actividad integradora al final de curso, debido a que los estudiantes de primer año inician la transición del Bachillerato a la Educación Superior. Esta situación ocasiona que no sea conveniente proponer este tipo de actividades al inicio del semestre, pues es necesario esperar el periodo de transición de los estudiantes, especialmente el periodo que involucra la adquisición de hábitos de estudio. Además se pretende que los alumnos adquieran la madurez para realizar sus proyectos completamente autónomos, lo cual es un reto en esta etapa de formación.

Barron (1998) identifica cuatro principios de diseño en la utilización de la estrategia de enseñanza basada en proyectos.

- Definir apropiadamente los objetivos que llevan a la comprensión significativa.
- Proveer todas las herramientas, ejemplos y características específicas del proyecto antes de iniciar.
- Asegurar la multiplicidad de oportunidades para la autoformación y revisión de material.
- Desarrollar estructura social para fomentar la participación y el sentido de pertenencia del proyecto.

El profesor debe usar los principios de diseño anteriormente mencionados de forma clara y metodológica ya que esto determinará el éxito de esta estrategia. Los beneficios del aprendizaje basado en proyectos consisten en que la enseñanza se enfoca en el estudiante, basándose en la investigación de problemas auténticos que estimula el desarrollo del pensamiento crítico propio (Krajcik y col, 1994) siendo esto una característica importante para el desarrollo de competencias.

Para seguir con los principios de diseño, es necesario tener temas de investigación bien definidos, en el caso de la materia de Cálculo Diferencial se postulan varios temas para desarrollarlos. En general el proyecto se divide en dos partes.

En la primera etapa se plantean ejemplos sobre tasas de variación para lograr la comprensión intuitiva de la derivada y se realizan cualquiera de los siguientes experimentos (considerando bien minuciosamente las mediciones):

Se realizan cualquiera de los siguientes experimentos (considerando bien las mediciones):

- *Caída libre.*
- *Lanzamiento horizontal.*
- *Carrito en una pista.*
- *Un cohete (globo) en una guía*
- *Una bola de billar en el pool*
- *Un corredor de pista*
- *El vaciado de un tanque o llenado constante de un recipiente irregular*
- *Inflado de un globo*
- *Cambio de temperatura de una resistencia eléctrica.*
- *Expansión de un derrame de aceite.*
- *Reacción química como bicarbonato y agua (varias concentraciones).*
- *Una pelota o carrito en un plano inclinado*
- *Tiro parabólico.*
- *Recorrido del arco de un péndulo*
- *Movimiento armónico simple provocado por resortes.*
- *Descongelado de un cubo de hielo a la intemperie.*
- *Crecimiento de un hongo en un pedazo de pan.*

A continuación se describe el desarrollo del proyecto. Usando una cámara digital se genera una tabla con valores obtenidos del experimento y otra tabla en donde se representan las variaciones promedio. Es conveniente tomar por lo menos 20 mediciones. Usando algún programa de aplicación gráfica se trazan rectas secantes representando los valores promedio con las pendientes equivalentes a su variación promedio. Y por último usar el software Curve Expert para ajustar a una función y determinar la tasa de variación de forma analítica y comentar las diferencias con la forma experimental, a través de un trabajo escrito.

Este proyecto en la primera etapa permite la comprensión a través de un experimento del concepto de la derivada de forma totalmente intuitiva, pues esta fue la forma natural en la cual fue concebida. El objetivo de esta actividad es que el estudiante experimente esa etapa de conflicto cognitivo para comprender el concepto desde su propia perspectiva y así evitar la memorización del concepto el cual olvidará en un instante. Además permite al estudiante visualizar posibles aplicaciones de lo aprendido en su curso.

En la segunda etapa se plantea la presentación de un poster con un caso de estudio de optimización, aunque esta parte es más libre que la anterior se propone los ejemplos siguientes:

- *Dimensiones optimas de una lata de alguna bebida refrescante respecto de su volumen.*
- *Dimensiones y comparativo de diferentes jabones de la misma masa pero de forma diferente.*
- *Optimización del material usado para la construcción de una caja.*
- *Optimización del material para una casa de campaña.*
- *Mejores dimensiones para los salones o laboratorios.*
- *Optimas dimensiones de las ventanas de los salones.*
- *Minimización del costo del tendido de cables.*
- *El cortado de una viga con la mayor área posible.*
- *Iluminación óptima sobre una mesa en función de la altura del foco.*
- *Optima altura de un letrero para verlo completamente.*

En esta parte del proyecto se deja el estudiante mayor libertad a fin de evaluar su capacidad de aplicación de conocimientos. Incluso se observa que los proyectos propuesto son ejemplos que se pueden encontrar en ejercicios de libros de cálculo, pero la idea al desarrollar el proyecto es la reproducción real de alguno de éstos a través de experimentos para verificar la confiabilidad de los cálculos matemáticos y comprender el significado de los cálculos realizados, lo cual permite una mayor empatía con la materia. Se opta por la presentación de los resultados obtenidos a través de un poster para fomentar la creatividad y capacidad de los estudiantes para plasmar resultados de forma rápida y eficiente.

2.3. Estrategia Didáctica

Los proyectos anteriormente propuestos deben pasar por una etapa fundamental, la evaluación, es decir, la parte donde se analizan las competencias desarrolladas y se miden los indicadores que se expresan como un valor numérico, las competencias generales y específicas buscadas corresponden a las propuestas en los programas de educación oficial y el objetivo de usar proyectos es desarrollar varias competencias, es decir el proyecto como una actividad integradora.

2.4. Evaluación

La primer parte del proyecto se pide por escrito, plasmando en forma de texto el experimento y sus frutos, y la segunda parte se pide en poster y una presentación mostrando la capacidad de comunicación e inventiva para presentar resultados, estas actividades abarcar competencias genéricas fundamentales en cualquier área laboral. A continuación se presenta la lista de cotejo para la evaluación de esta segunda actividad.

DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN			
Nombre(s) del alumno(s) y/o Equipo:			
Producto:	**Nombre del PROYECTO:**		**Fecha:**
Asignatura:		**Grupo:**	**Periodo:**
Nombre del Docente:			
INSTRUCCIONES			
Revisar las características que se solicitan y califique en la columna "Valor Obtenido" el valor asignado con respecto al "Valor del Reactivo". En la columna "OBSERVACIONES" haga las indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas.			

Valor del reactivo	***Característica a cumplir (Reactivo)***	***Valor Obtenido***	***Observaciones***
5%	Es entregado puntualmente. Hora y fecha solicitada (indispensable)		
10%	Presentación y Limpieza del Poster		
5%	Ortografía		
	Desarrollo		
5%	Planteamiento del problema y justificación		
5%	Determinación del los objetivos tanto general como específicos y desarrollo de los mismos.		
20%	Lógica de desarrollo del proyecto y congruencia con los objetivos		
10%	El problema presenta un caso de *optimización o tasa de cambio usando derivadas*. Con una **comparación adecuada con <u>resultados reales</u>**		
20%	Originalidad del problema propuesto.		
15%	Cálculos, Resultados y Conclusiones		
5%	Bibliografía. Anexos y referencias		
100%	***CALIFICACIÓN TOTAL:***		

3. Resultados y discusión

3.1. Presentación de proyectos

En la **Figura 1** se muestra el ejemplo de un poster presentado por estudiantes de la carrera de Ingeniería Mecánica en el ciclo escolar Enero-Junio 2011. Durante el desarrollo del poster se presentaron propuestas previas cada semana durante las últimas tres semanas de curso, desde la concepción del problema a desarrollar hasta terminarlo; orientando a los estudiantes para que logren desarrollar un proyecto aceptable, momento en el cual se les pide que lo impriman en grande y expliquen su caso de estudio en una sesión exclusivamente para eso.

Figura 1. Poster presentado por estudiantes de Ingeniería Mecánica en el ciclo Enero-Junio 2011, Titulado "OPTIMIZACION DE UNA LATA/BOTELLA".

La evaluación utilizando esta estrategia conlleva tiempo y requiere semanas de preparación, pero el fruto principal de esta experiencia es que el estudiante pueda relacionar el uso de las matemáticas en un entorno real, lo cual le permite involucrarse en su aprendizaje. Se considera que el proyecto no debe ser la única forma de evaluación, pues éste debe ir acompañado de otras actividades tales como: tareas, ejercicios y un examen escrito, generalmente un examen que permita ver si el uso de proyectos favorece la comprensión y el estudio autónomo, los exámenes indican principalmente la preparación que se ha realizado para este, mostrando otro tipo de competencias, por lo tanto se deja a discreción del docente los porcentajes de cada actividad en base a su criterio.

3.2. Experiencias al evaluar de esta forma

Usar esta estrategia permite al docente utilizar una forma alterna o complementaria de evaluación diferente al tradicional examen, el cual por desgracia evidencia una gama limitada de competencias. Por lo tanto, utilizar otras formas de evaluación permitirá detectar otras competencias adquiridas por los estudiantes.

En el trabajo futuro, fuera de la institución educativa, el egresado deberá afrontar retos muy diversos, por tanto es importante que visualice que las herramientas obtenidas durante sus estudios de educación superior son mayores que el simple conocimiento de información o la resolución de ejercicios de libros, al involucrar el uso de toda su experiencia adquirida para plantear soluciones y precisamente eso significa tener competencia.

En general los estudiantes mostraron mayor interés en el desarrollo de proyectos que en las estrategias tradicionales, lo cual concuerda con el objetivo buscado. Sin embargo se observa confusión en la etapa de planteamiento del proyecto y la realización de los cálculos, lo cual requiere de mucha atención y tiempo de supervisión por parte del docente para que el estudiante realmente utilice las herramientas aprendidas en el curso de Cálculo Diferencial. Es notoria la tendencia a resolver el problema con estrategias lo más alejadas del nuevo tema aprendido, lo cual es el efecto opuesto a lo buscado debido a que el objetivo es integrar el nuevo conocimiento, aunque es normal la presencia de este fenómeno en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, debido a la escasa experiencia de los estudiantes en el desarrollo de proyectos.

4. Conclusiones

El uso de la estrategia de Proyectos para el aprendizaje heurístico permite formar y evaluar competencias de una forma más amplia que si se utilizara solo el clásico examen. El uso de de esta estrategia no debería se exclusivo, pues la forma tradicional de evaluación sigue aportando al estudiante otras competencias importantes, por lo tanto se debe procurar complementar las actividades más que sustituirlas.

Los proyectos permiten centrar la enseñanza en los alumnos permitiéndoles un auto-aprendizaje clave para su formación, pues aun cuando el docente dicte una cátedra excelente, el estudiante aprenderá cuando el mismo haga parte de su aprendizaje. Así que hay que permitirle desarrollarse autonomía, pero con una supervisión y guía para evitar que no logre los objetivos buscados.

Personalmente consideramos que el uso de proyectos debería ser por excelencia la herramienta de evaluación en el enfoque por competencias, pues permite simular situaciones de su entorno y asociar conocimientos múltiples que permiten al estudiante desarrollar sus capacidades y descubrir aptitudes y habilidades que posiblemente desconozcan.

Bibliografia

Arciniegas-González, D. y García-Chacón, G. (2007). Metodología para la planificación de proyectos pedagógicos de aula en la educación inicial, *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*. Vol. 7 (1), pp. 1-37.

Amat, O. (1998). Aprender a enseñar. Editorial Gestión 2000, Barcelona, España.

Barron, B.J.S. (1998). Doing With Understanding: Lessons From Research on Problem-and Project-Based Learning, *The Journal of the Learning Sciences*, 7(3&4) pp. 271-311

Climent-Bonilla, J.B. (2010). Reflexiones sobre la educación Basada en competencias. *Revista complutense de Educación*. Vol. 21 (1), pp. 91-106.

Krajcik, J.S.; Blumenfeld, P.C. ; Marx, R.W. and Soloway, E. (1994). A collaborative Model for Helping Middle Grade Science Teachers Learn Project-based Instruction. *The Elementary School Journal*. Vol. 95(5), pp. 483-497.

La Cueva, A. (1997). Retos y Propuestas para una Didáctica contextualizada y Crítica, *Revista de Educación y Pedagogía*. Vol. IX (18).

La Cueva, A. (1998). La enseñanza por proyectos: ¿Mito o reto?, *Revista Iberoamericana de Educación*, Vol. 16, pp. 165-187.

Muñoz-Cano, J.M. y Maldonado-Salazar, T. (2011). Aprendizaje con base en proyectos para desarrollar capacidades en problematización en educación superior. *Actualidades Investigativas en Educación*. Vol. 11 (1), pp. 1-19.

Mario Calderón Ramírez. Originario de Morelia, Michoacán, México, Estudió la licenciatura en Ingeniería Bioquímica en el Tecnológico de Morelia, Realizó los estudios de posgrado en el Tecnológico de Celaya donde radica como docente del Departamento de Ciencias Básicas. Email: **cmario@itc.mx**

María Teresa Villalón Guzmán. Estudió la licenciatura en Ingeniería Química y los estudios de posgrado en el Tecnológico de Celaya, Actualmente realiza estudios de Doctorado. Es Profesor de Tiempo Completo en el Departamento de Ciencias básicas de esta misma institución. Email: **teresa.villalon@itcelaya.edu.mx**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 141-149

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Variaciones de un problema. El caso de un problema de R. Douady

Problema

Si la función h está definida por $h(x) = f(x)\ g(x)$, siendo f y g funciones reales continuas, cuyos dominios son todos los números reales, ¿siempre ocurrirá que algunos puntos de los gráficos de f y de g son también puntos del gráfico de h?

Este problema (al que nos referiremos como *Problema 2*) fue propuesto como la segunda de tres partes de un problema, a profesores de matemática en ejercicio docente, en el primer curso de Análisis de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP.

La primera parte de la cuestión fue el siguiente problema (al que nos referiremos como *Problema 1*):

> En la figura se muestran representaciones gráficas de las funciones u y v.
>
> Marcar algunos puntos de las gráficas mostradas que son también puntos de la gráfica de la función w definida por $w(x) = u(x)\ v(x)\ \forall x \in Dom\ u \cap Dom\ v$.
>
> Usar Q_1, Q_2, …,Q_n para representar tales puntos y explicar cómo obtuvo cada uno de ellos.

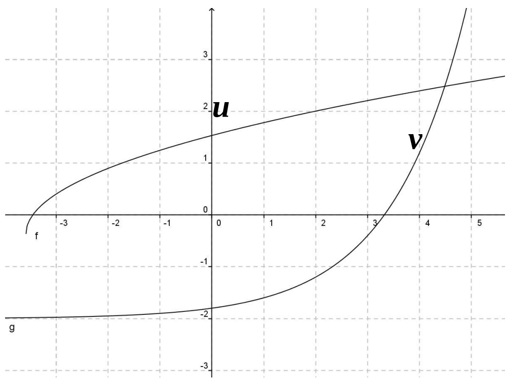


Figura 1

Y en la tercera parte se pidió crear un problema inspirado en las dos partes anteriores.

La primera parte (*Problema* 1) es una variación sencilla de un problema ideado por Régine Douady (1998)[1] que la Dra. María José Ferreyra Da Silva lo mostró y

[1] Esta referencia la da María Cristina S. de Maranhão, en Anna Franchi et al (2012). *Educação Matemática: uma (nova) introdução*. São Paulo: EDUC

comentó en una exposición que hizo en un seminario desarrollado en Julio del 2012 en la Pontificia Universidad Católica del Perú, en el marco del VI Congreso IBEROCABRI. El problema que presentó la Dra. Ferreyra Da Silva, al que llamaremos *Problema de Douady,* es el siguiente:

A continuación se representan los gráficos de las funciones f y g en un plano cartesiano. Marque, sobre el mismo plano cartesiano, seis puntos que correspondan al gráfico de la función h definida por $h(x) = f(x)\,g(x)$.

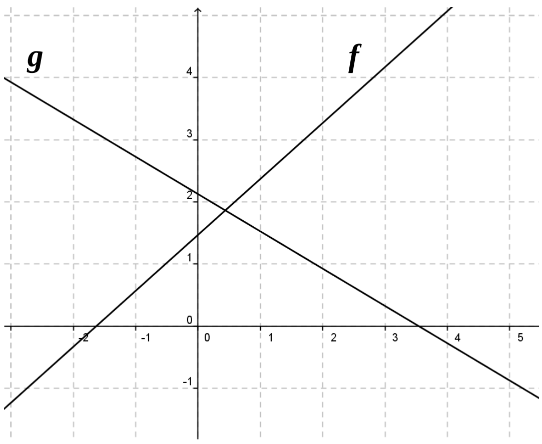


Figura 2

(La Dra. Ferreyra aclaró que la idea era obtener tales puntos **sin hacer cálculos aritméticos aproximados**)

Como se puede ver, el *Problema 2* también es una variación del problema de Douady. Precisamente, el propósito de este artículo es brindar elementos de análisis y reflexión sobre la variación de problemas dados, teniendo como marco que variar problemas es también una manera de crear problemas[2]. Más aún, posiblemente es la manera más frecuente usada por los profesores para crear problemas, sobre todo para evaluaciones.

Una mirada general

Para referirnos en general a las variaciones de los problemas matemáticos, consideremos que éstos tienen cuatro elementos fundamentales:

Información

Requerimiento

Contexto

Entorno matemático

Parece claro lo que se considera en la información y en el requerimiento y pasaremos a aclarar más los otros elementos.

[2] Varios autores y en particular Silver(1994), al referirse a la creación de problemas aluden tanto a la generación de nuevos problemas como a la reformulación de problemas dados.

Suele llamarse “problema contextualizado” a aquel que está relacionado con alguna situación real, con la vida cotidiana; sin embargo, acá consideraremos que el contexto también puede ser formal o estrictamente matemático. En ese sentido, podemos afirmar que en un problema, el *contexto* puede ser *intra matemático* o *extra matemático*, refiriéndonos con estos últimos a aquellos más vinculados a situaciones reales. Los primeros, como su nombre lo indica se circunscriben a lo matemático (Por ejemplo, el problema de hallar el dominio de una función, de graficar una ecuación de dos variables, de hallar los factores primos de un número natural, etc.).

El elemento *entorno matemático* se refiere a los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema. Ciertamente esto es relativo, pues depende del camino que se siga para resolver el problema. En todo caso, como estamos adoptando estos elementos para modificar un problema, un paso fundamental previo a la variación es la solución o intento de solución del problema y allí se precisa el entorno matemático. Es claro que puede ocurrir que el problema no se resuelva precisamente por no encontrar el entorno matemático adecuado (como ocurrió durante mucho tiempo con algunos problemas famosos – quizás el más conocido es el de la conjetura de Fermat), pero quien resuelve un problema o intenta resolverlo, se apoya en un conjunto de conceptos matemáticos al que llamaremos *entorno matemático*.

> *Diremos entonces, que se tiene una* ***variación de un problema*** *dado, si se ha modificado la información, el requerimiento, el contexto o el entorno matemático de tal problema. Es decir, si se modifica uno o más de estos cuatro elementos considerados en el problema.*

Ciertamente, lo interesante desde el punto de vista matemático y didáctico está en el desafío a la creatividad para hacer modificaciones que lleven a la formulación de un nuevo problema que sea matemática y didácticamente valioso. Habría que precisar lo que esto último significa para atenuar la apreciación subjetiva, pero por ahora dejémoslo a ese nivel, teniendo en cuenta que estos criterios lindan con la belleza de la matemática y sobre esto se ha escrito mucho y hay diversos puntos de vista[3]

Volvamos al problema de Douady

Resolvamos el problema, como paso previo para comentar las variaciones hechas y las que se pudieran hacer. Para no romper la secuencia de las reflexiones y comentarios sobre la variación de problemas como una forma de crear problemas, en el apéndice de este artículo hacemos una exposición detallada de una solución **sin hacer cálculos aritméticos aproximados, lo cual incluye no intentar expresiones algebraicas de las funciones.** En verdad, esa es la novedad y el atractivo de este problema. Otra razón para poner la solución en el apéndice es contribuir a que el lector resuelva por cuenta propia el problema antes de continuar con la lectura de este artículo.

[3] Un resumen de puntos de vista interesantes y de criterios para considerar la belleza de las matemáticas lo encontramos en Wells, D (1990). Are these the most beautiful? *The mathematical intelligencer, 12(3)*, 37-41.

Veamos entonces los elementos de este problema.

La información:

- Los gráficos de dos funciones, *f* y *g*, presentados en un mismo plano cartesiano. Los gráficos se intersecan y parecen corresponder a funciones afines, la *f* se muestra creciente y la *g* decreciente.
- La definición de una función *h*, como el producto de las funciones *f* y *g*.

El requerimiento:

- Marcar, sobre el mismo plano cartesiano, seis puntos que correspondan al gráfico de la función *h*. Indicación expresa de no hacer cálculos aritméticos aproximados.

El contexto:

- Intra matemático

El entorno matemático:

- Funciones, rectas como gráfico de funciones, determinación de puntos del gráfico de una función conociendo sus respectivas ordenadas, determinación de puntos del gráfico de una función conociendo sus respectivas abscisas, multiplicación de funciones, propiedades de la multiplicación de números reales.

El Problema 1 como variación del Problema de Douady

La Información:

- Los gráficos de dos funciones, *u* y *v*, presentados en un mismo plano cartesiano, ambas crecientes. Los gráficos no corresponden a funciones afines. Los gráficos se intersecan en un punto. El 0 y el 1 pertenecen a los rangos de ambas funciones.
- La definición de una función *w*, como el producto de las funciones *u* y *v*.

Se percibe claramente que hay modificaciones en la información. La más importante es considerar funciones que no son afines, lo cual le da un carácter más general al problema y tiene la ventaja de no invitar a encontrar expresiones algebraicas para las funciones *u* y *v*.

El requerimiento:

- Encontrar algunos puntos de los gráficos mostrados, que también sean puntos del gráfico de la función *w*.

Hay también modificaciones en el requerimiento, pues no se pide explícitamente seis puntos y se especifica que los puntos a encontrar sean puntos de los gráficos mostrados. Esto rescata lo esencial del problema de Douady y evita la obtención de puntos usando la simetría respecto al eje de abscisas, que ya requiere el uso de una forma de medir distancias o de hacer aproximaciones.

El contexto:

- Intra matemático

No hay variación.

El entorno matemático:

- Funciones, gráfico de funciones, determinación de puntos del gráfico de una función conociendo sus respectivas ordenadas, determinación de puntos del gráfico de una función conociendo sus respectivas abscisas, multiplicación de funciones, propiedades de la multiplicación de números reales.

El entorno matemático se ha ampliado al considerar funciones cuyos gráficos no son rectas.

El Problema 2 como variación del Problema de Douady

La información

- Dos funciones reales de variable real, *f* y *g*, de las que solo se conoce que son continuas y tienen como dominio es todo R.
- La definición de una función *h*, como el producto de las funciones *f* y *g*.

La variación es clara, pues ya no se da información gráfica.

El requerimiento:

- Examinar si siempre ocurrirá que algunos puntos de los gráficos de *f* y de *g* son también puntos del gráfico de *h.*

La variación es evidente. Recogiendo la idea básica del Problema de Douady, se pasa a hacer un análisis de carácter general. A pensar en una demostración si se conjetura una respuesta afirmativa, o a imaginar posibles gráficos de *f* y de *g*, buscando un (contra)ejemplo, si se conjetura una respuesta negativa.

El contexto:

- Intra matemático

El entorno matemático:

- Funciones reales de variable real y continuas, cuyos dominios son todos los números reales, gráficos de tales funciones, determinación de puntos del gráfico de una función conociendo sus respectivas ordenadas, determinación de puntos del gráfico de una función conociendo sus respectivas abscisas, multiplicación de funciones, propiedades de la multiplicación de números reales.

El entorno matemático se ha ampliado. Se requiere más conocimientos sobre funciones para resolver el problema.

Comentarios

1. Es muy importante no perder de vista que los problemas 1 y 2 conforman una secuencia en un mismo problema de tres partes. En ese sentido, resolver el *Problema 1* prepara para resolver el *Problema 2*.
2. Resolver ambos problemas brinda experiencias de análisis que contribuyen a tener elementos para responder a la tercera parte, que – como ya se dijo – es la creación de un problema inspirado en las partes anteriores. De los 9 profesores a

los que se les propuso esta secuencia en tres partes, 7 de ellos crearon problemas. Al analizas tales nuevos problemas como variaciones del Problema 1, observamos que todos modificaron la información y 3 de ellos (los participantes 1, 8 y 9) modificaron también el requerimiento. El participante 1 pidió no solo encontrar algunos puntos del gráfico de una función suma, siendo los sumandos funciones afines, sino pidió además “trazar la gráfica de la función suma”; el participante 9 pidió también encontrar puntos del gráfico de una función suma, siendo los sumandos funciones no afines, y el participante 8 hizo requerimientos usando expresiones algebraicas de las funciones.

3. Quienes no crearon un problema, fueron los que no resolvieron adecuadamente las partes primera y segunda.

4. Sería materia de otro artículo analizar las soluciones de los problemas, tanto de los propuestos como de los que ellos mismos crearon; sin embargo detengámonos un poco en las soluciones del problema de la segunda parte, o sea del *Problema 2*, que es el planteado al inicio del artículo.

   Los participantes 3 y 9 lo resolvieron muy bien (respuesta y justificación); el participante 1 respondió bien y dio dos buenas razones y una razón no pertinente; los participantes 6 y 7 respondieron bien pero no justificaron correctamente; y cuatro participantes respondieron que sí y pretendieron justificar.

   Quienes lo resolvieron muy bien, respondieron que no y dieron respectivos ejemplos. El participante 9 dio como ejemplos $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ y $g(x) = -1$ (constante). Como ninguna de estas funciones tiene gráfico que interseca a las rectas y = 0 e y = 1 (el rango de *f* es el intervalo]0; ½] y el de *g* es el número -1), es imposible que su producto tenga un gráfico con algunos puntos coincidentes con puntos de los gráficos de *f* ó de *g*. El participante 3 dio ejemplos muy sencillos: *f* y *g* funciones constantes, con $f(x) = 2$ y $g(x) = 3$. Es claro que la función *h*, producto de ambas, es la función constante $h(x) = 6$ y ningún punto de su gráfico es punto del gráfico de alguna de las funciones *f* ó *g*.

5. El problema creado por el participante 1, usando funciones afines, fue propuesto a alumnas de primer ciclo universitario de profesorado de educación inicial y primaria, como parte de una secuencia de problemas sobre gráficos de funciones afines, y encontramos reacciones positivas. Cabe mencionar que una de las soluciones del problema fue más sencilla que la solución que dio el participante 1.

Reflexiones finales

a) Para concluir, destaco una vez más la importancia de crear problemas y del reto que tenemos los que enseñamos matemáticas, de estimular a nuestros alumnos a desarrollar esta habilidad. Es particularmente importante en los cursos de formación de futuros docentes o de docentes en ejercicio, como una manera de potenciar sus competencias didácticas y matemáticas.

b) Los análisis hechos en relación a los problemas creados a partir del Problema de Douady, nos ilustran la estrecha relación que hay entre resolver problemas y crear problemas.

c) Al considerar la información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático de un problema, estamos proponiendo un esquema de análisis para los problemas nuevos obtenidos por variación de problemas dados, que también sirve de pauta para construir estos nuevos problemas. Es evidente que la creatividad, el conocimiento matemático, el propósito con el que se pretende crear el problema y el criterio didáctico para su aplicación, juegan un papel sumamente importante y la interrelación entre ellos, que se irá fortaleciendo con la experiencia, la reflexión y el análisis individual y en grupos, llevará a construir problemas con gran belleza matemática y gran potencialidad didáctica.

d) En este problema y sus modificaciones el contexto se ha mantenido como intra matemático y tiene una gran riqueza para la profundización en el manejo de conceptos matemáticos relacionados con las funciones y las propiedades de las operaciones con números reales. Es un reto encontrar contextos extra matemáticos relacionados con estos problemas.

Apéndice

Solución del Problema de Douady

Ante la indicación de no hacer cálculos aritméticos aproximados – y esa es la novedad del problema – debemos encontrar los seis puntos sin hacer estimaciones para hallar las ecuaciones de las rectas que se representan en la Figura 2.

Como se debe encontrar puntos del plano cartesiano cuyas coordenadas son $(x;f(x)g(x))$, es decir, cuya ordenada es el producto de las ordenadas de puntos que ya están representados, identifiquemos puntos de los gráficos de f y de g cuyas ordenadas son números reales particularmente importantes en la multiplicación. Evidentemente uno de ellos es el 0, por la propiedad

$$a \text{ x } 0 = 0 \text{ x } a = 0 \quad \text{para todo número real } a. \qquad (1)$$

Otro número a tener en cuenta es el 1, por la propiedad

$$a \text{ x } 1 = 1 \text{ x } a = a \quad \text{para todo número real } a. \qquad (2)$$

Los puntos de los gráficos de f y de g que tienen ordenada 0, son los puntos de intersección con el eje X (recta de ecuación $y = 0$) y entonces, por aplicación de la propiedad (1), estos puntos también serán puntos del gráfico de h (**A** y **B** en la Figura A)

Punto A: Intersección del gráfico de f con el eje X, pues en ese punto, de abscisa x_1, se tiene $f(x_1) = 0$, y en consecuencia

$$h(x_1) = 0.\ g(x_1) = 0 = f(x_1).$$

Así, **A** es el punto de la gráfica de h cuyas coordenadas son

$$(x_1;\ h(x_1)) = (x_1;\ 0).$$

Punto B: Intersección del gráfico de g con el eje X, pues en ese punto, de abscisa x_2, se tiene $g(x_2) = 0$ y en consecuencia

$$h(x_2) = f(x_2).0 = 0 = g(x_2).$$

Así, **B** es el punto de la gráfica de h cuyas coordenadas son

$$(x_2;\ h(x_2)) = (x_2;\ 0).$$

Por otra parte, los puntos de los gráficos de f y de g que tienen ordenada 1, son los puntos de intersección con la recta de ecuación $y = 1$ (M, de coordenadas (r; g(r)) en el gráfico de g y N, de coordenadas (s; f(s)) en el gráfico de f, en la Figura A) y por aplicación de la propiedad (2), estos puntos, nos sirven para determinar, respectivamente, los puntos **C** en el gráfico de f y **D** en el gráfico de g, que son puntos del gráfico de h.

Punto C: Punto (r, f(r)), del gráfico de f, donde r es tal que g(r) = 1, pues en tal punto

$$h(r) = f(r).1 = f(r).$$

Así, **C** es el punto de la gráfica de h cuyas coordenadas son (r; h(r)) = (r; f(r)).

Punto D: Punto (s, g(s)), del gráfico de g, donde s es tal que f(s) = 1, pues en tal punto

$$h(s) = 1.\ g(s) = g(s).$$

Así, **D** es el punto de la gráfica de h cuyas coordenadas son (s; h(s)) = (s; g(s)).

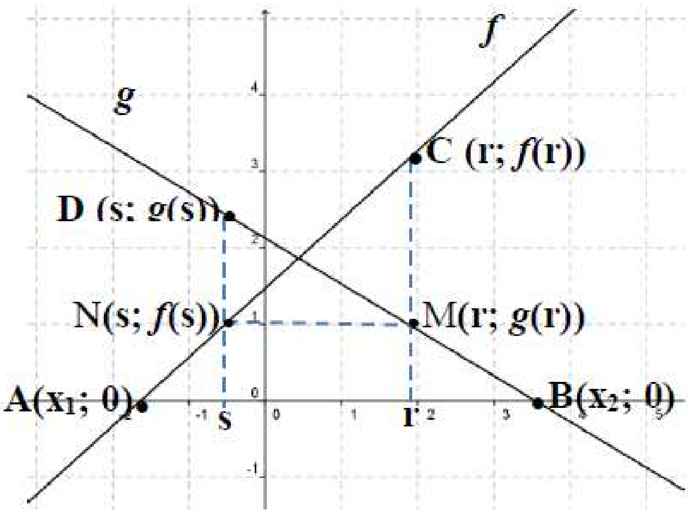


Figura A

Tenemos ya cuatro puntos del gráfico de h. Para los otros dos que pide el problema, requerimos otro número particularmente importante en la multiplicación y recordamos al **-1**, por la propiedad

$$a \times (-1) = (-1) \times a = -a \quad \textbf{para todo número real } a. \qquad (3)$$

Recordamos también que en la recta real, los números a y $-a$ están representados en puntos simétricos respecto al punto que representa al 0.

Los puntos de los gráficos de f y de g que tienen ordenada -1, son los puntos de intersección de estos gráficos con la recta de ecuación *y* = -1 (P, de coordenadas (k;g(k)) en el gráfico de g y Q, de coordenadas (z; f(z)) en el gráfico de f, en la Figura B) y por aplicación de la propiedad (3), estos puntos, nos sirven para determinar, respectivamente, los puntos **E** de coordenadas (k; -f(k)) y **J** de coordenadas (z; -g(z)), que son puntos del gráfico de h.

Punto E: Punto (k, -f(k)), donde k es tal que g(k) = -1, pues tal punto es el simétrico respecto al eje X del punto S del gráfico de f cuyas coordenadas son (k; f(k)). Así, las coordenadas de **E** son

$$(k, -f(k)) = (k; f(k)\,(-1)) = (k; f(k)\,g(k)) = (k;\; h(k))$$

Y en consecuencia es un punto del gráfico de la función h.

Punto J: Punto (z, -g(z)), donde z es tal que f(z) = -1, pues tal punto es el simétrico, respecto al eje X, del punto T del gráfico de g cuyas coordenadas son (z; g(z)). Así, las coordenadas de **J** son

$$(z, -g(z)) = (z; (-1)g(z)) = (z; f(z)g(z)) = (z;\; h(z))$$

Y en consecuencia es un punto del gráfico de la función h.

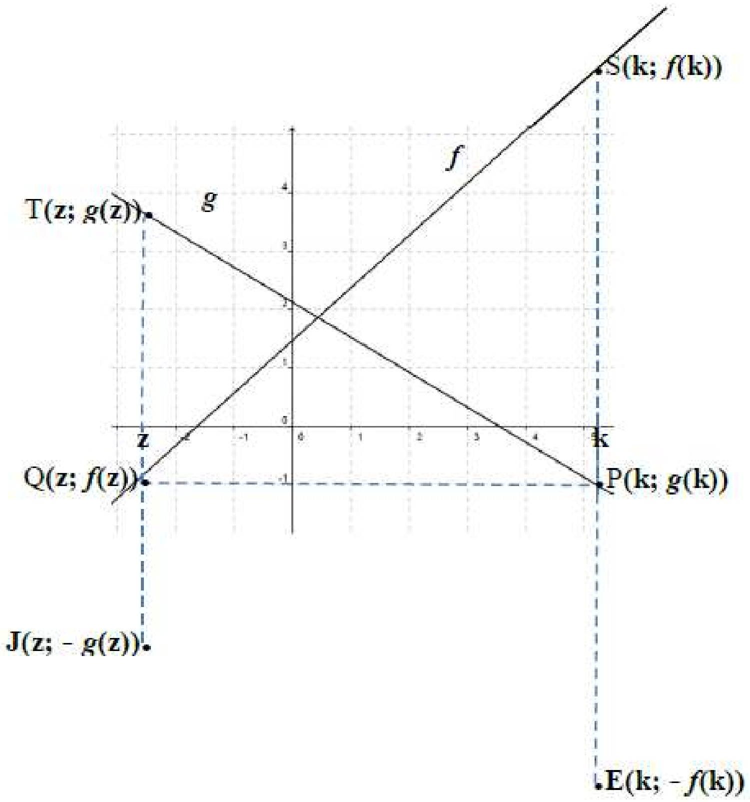


Figura B

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

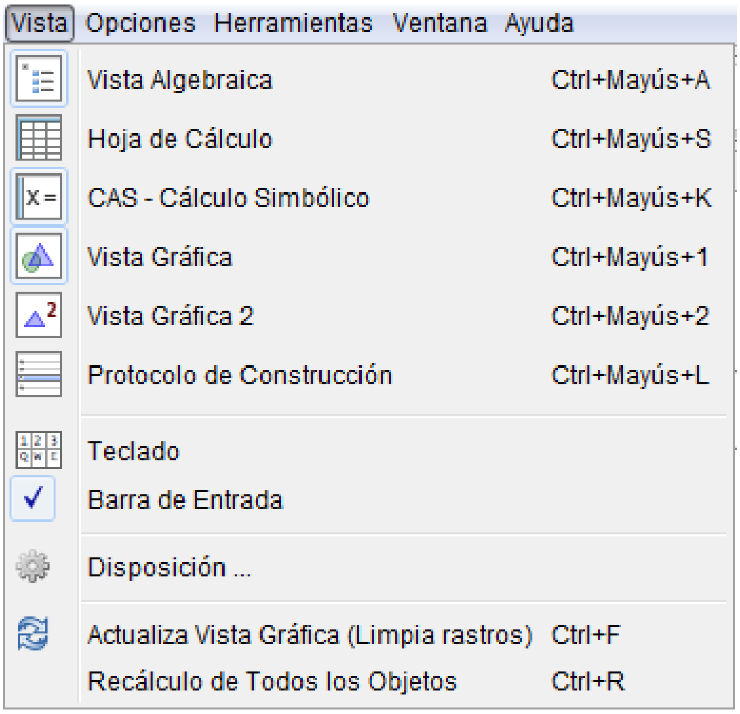
ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 151-167
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Cálculo Simbólico también es posible con GeoGebra

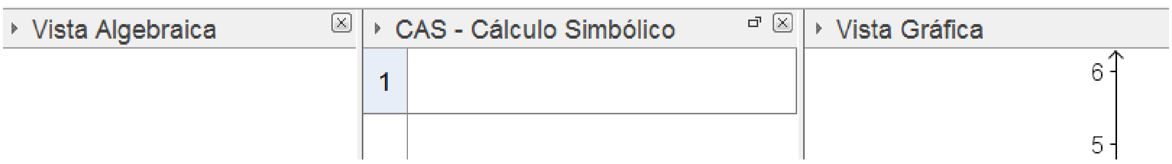
Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Antes de exponer las posibilidades que ofrece las nuevas opciones que GeoGebra ha incorporado a través de su vista de cálculo simbólico, recordaré lo que podíamos realizar hasta la aparición de la última versión, para valorar las mejoras.

Para las opciones que ofrece la versión 4.2 de GeoGebra disponemos de una nueva vista, la vista CAS, a la que se accede de manera similar al resto de vistas disponibles en GeoGebra.



Al abrir esta vista observaremos que aparecerá una línea en blanco, con el número 1 a la izquierda.

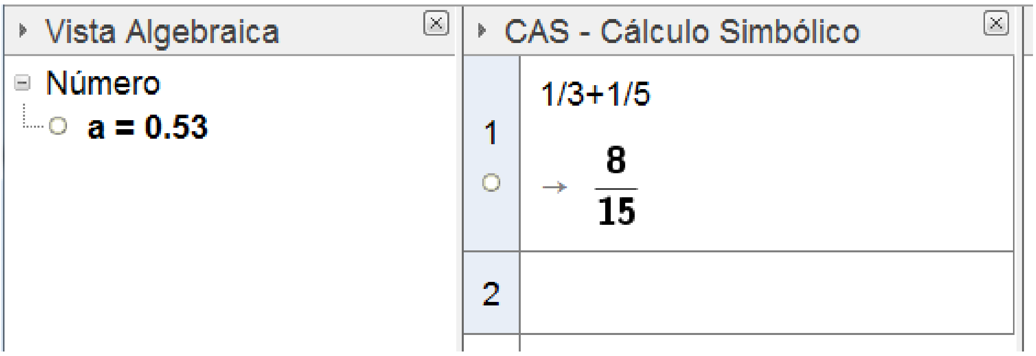


La forma de trabajar de esta vista es similar a la utilizada en la mayoría de programas de cálculo simbólico.

Todas las entradas aparecen numeradas de forma correlativa y a cada entrada corresponderá una expresión de salida o resultado.

Repasemos lo que hasta ahora podíamos hacer con las versiones anteriores de GeoGebra.

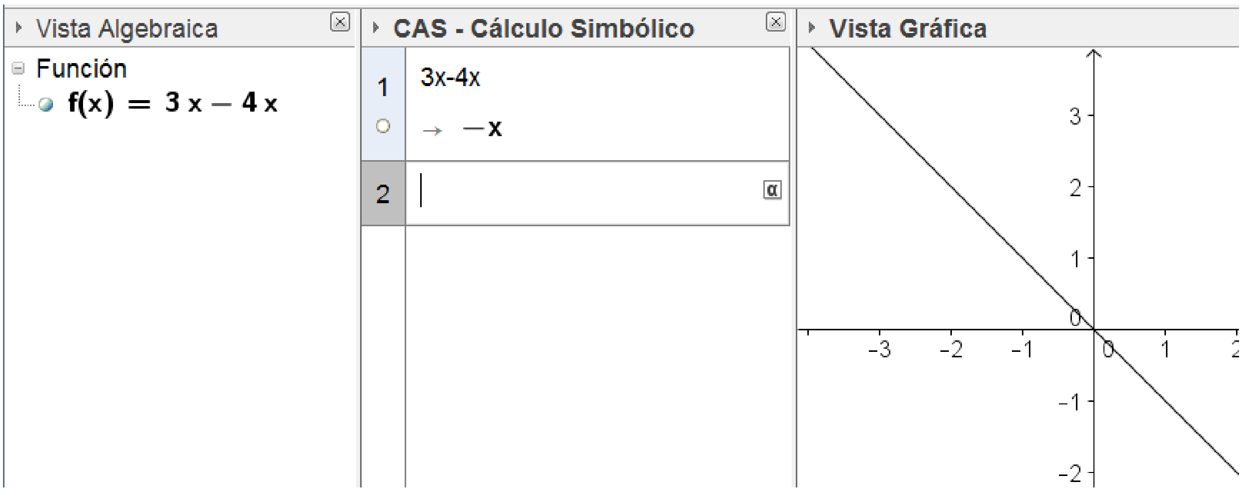
Al efectuar cualquier operación numérica a través de la línea de entrada, los resultados aparecerán en la vista algebraica, expresados en forma aproximada. Por ejemplo, al introducir en la línea de entrada la expresión 1/3+1/5; el resultado que aparecerá en la vista algebraica será el valor a=0.53, mientras que si efectuamos esta misma operación a través de la vista CAS, el resultado será 8/15, expresado en forma exacta.



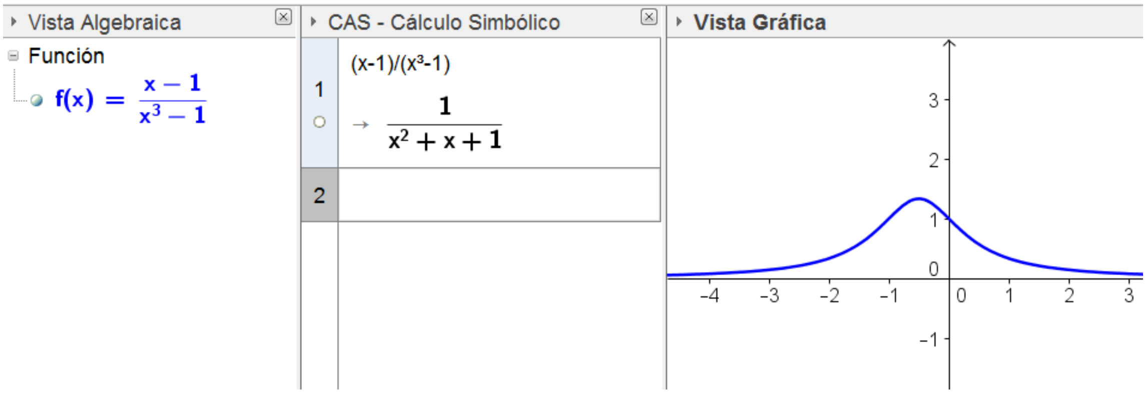
Si en lugar de una expresión numérica, introducimos una expresión simbólica en la línea de entrada ¿qué ocurre? Por ejemplo si escribimos 3x-4x, en la vista algebraica aparecerá la definición de una función:

f(x)=3x-4x

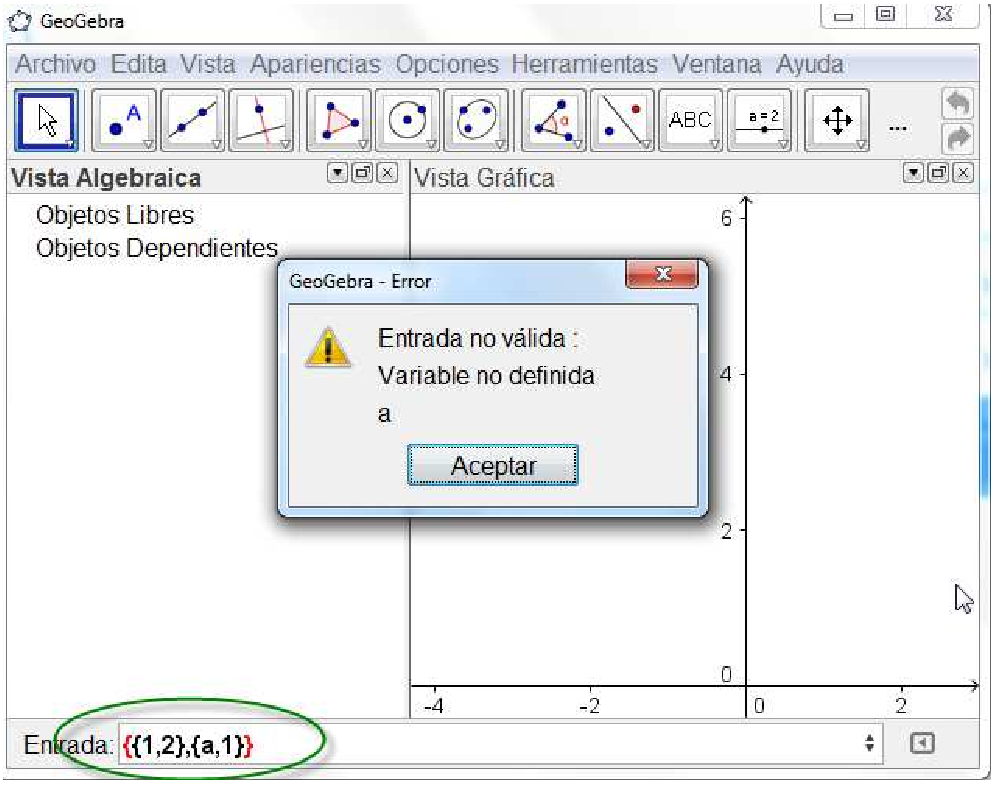
De manera automática, en la vista gráfica aparecerá la representación de la función anterior, en este caso de la función f(x)=-x, aunque como podemos observar no ha efectuado las operaciones en la vista algebraica y por tanto, la expresión no aparece simplificada; lo que si ocurrirá al introducir la expresión en la vista CAS.



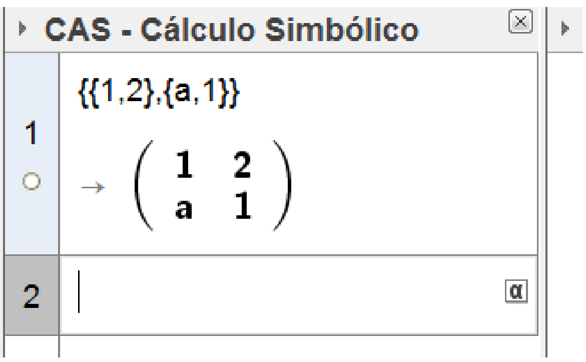
Lo mismo ocurrirá con cualquier otra expresión que sea susceptible de simplificación, tal como aparece en la imagen siguiente al introducir la expresión $\frac{x-1}{x^3-1}$.



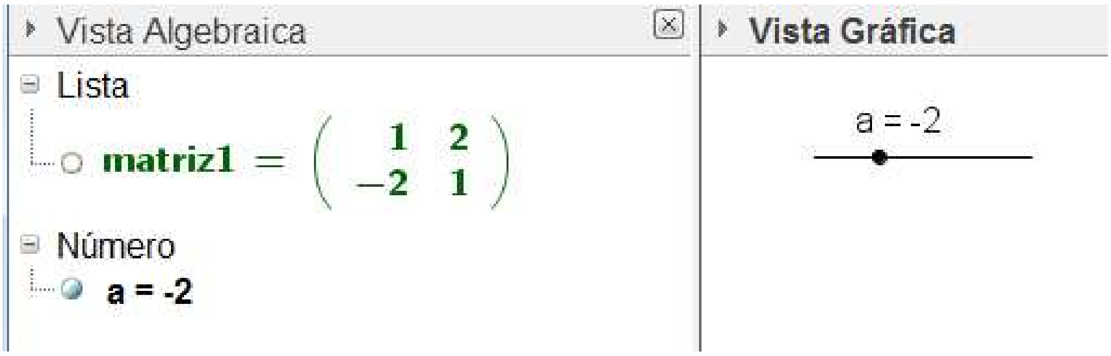
Si ahora introducimos una expresión con más de una variable nos llevaremos alguna sorpresa. Por ejemplo, para que todo no sean funciones, al introducir los elementos de una matriz {{1,2},{a,1}} aparecerá un mensaje de error para indicarnos que queremos utilizar una variable previamente no definida.



Sin embargo, la misma expresión será correcta cuando se introduce en una de las filas de la vista CAS.

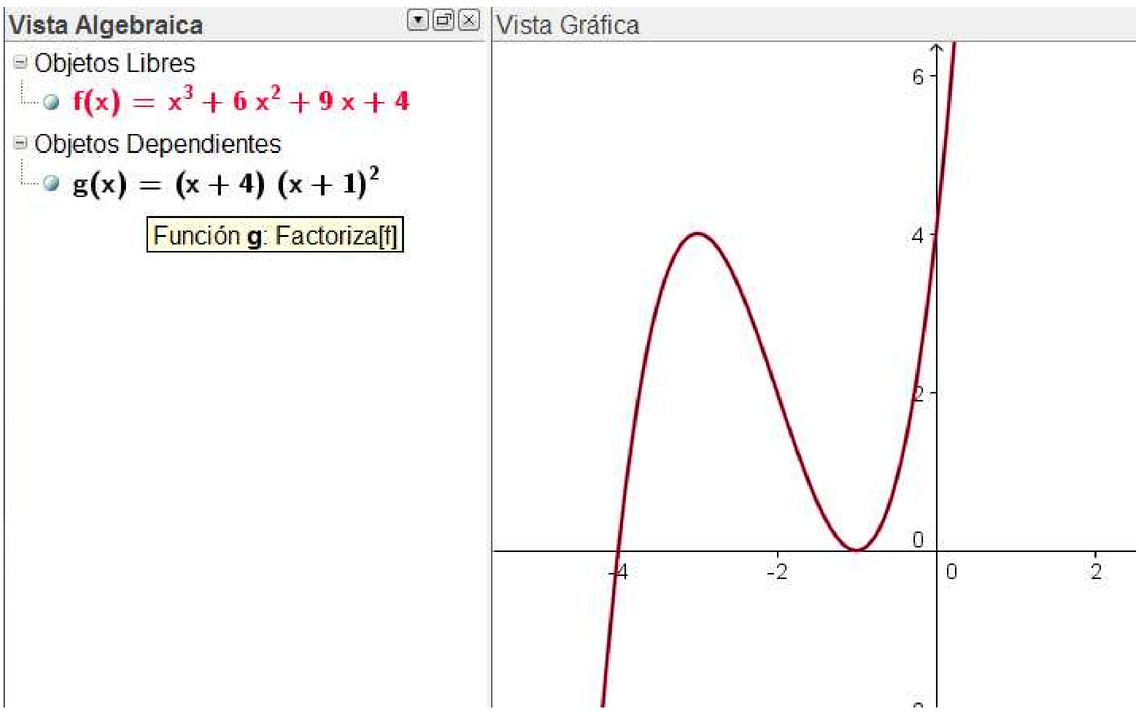


La opción que nos queda, si deseamos utilizar esta matriz en la vista algebraica será definir previamente la variable a como un deslizador.

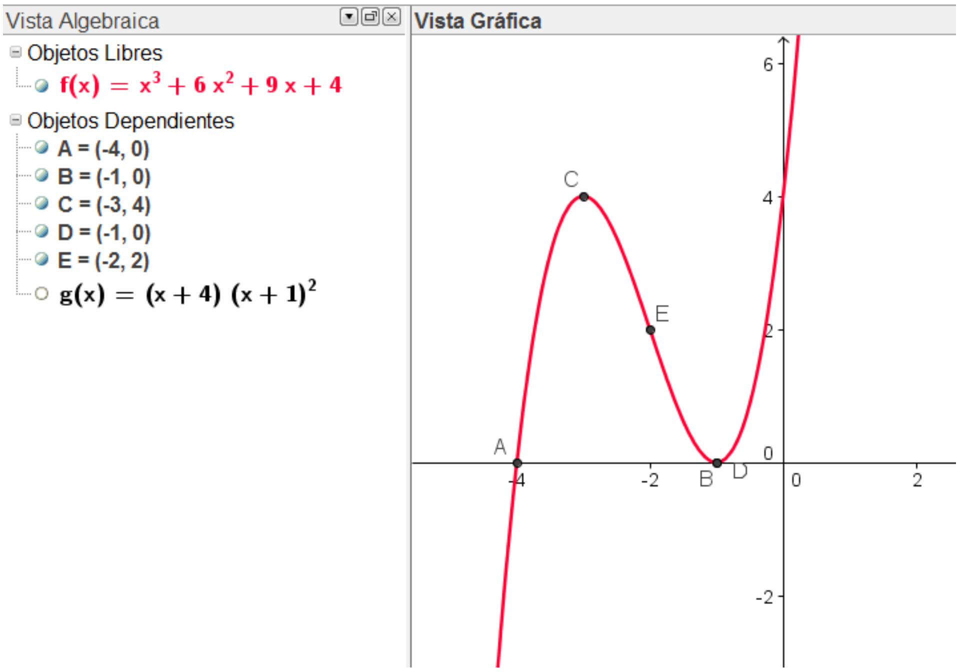


Otras de las tareas que teníamos resueltas con las versiones anteriores de GeoGebra era el estudio de funciones, aunque limitado a funciones polinómicas.

Así, de un polinomio se podría obtener su descomposición en factores utilizando el comando **Factoriza**.

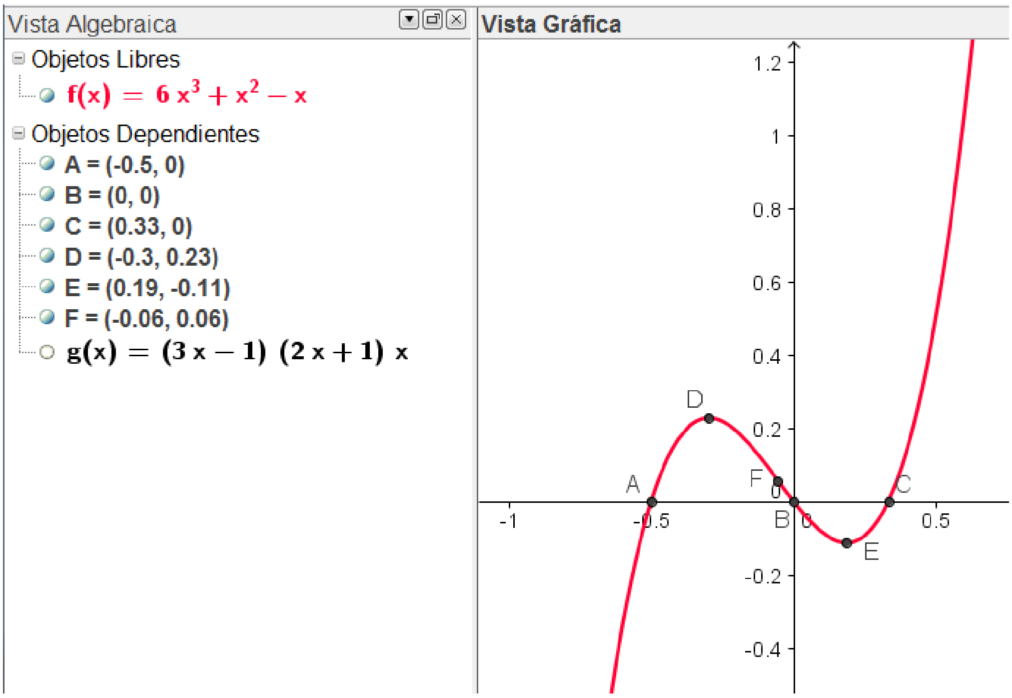


Una vez representada también se podrán obtener los valores que corresponden a puntos críticos: raíces, extremos y puntos de inflexión, utilizando los comando correspondientes: **Raíz**, **Extremo** y **PuntoInflexión**, respectivamente.



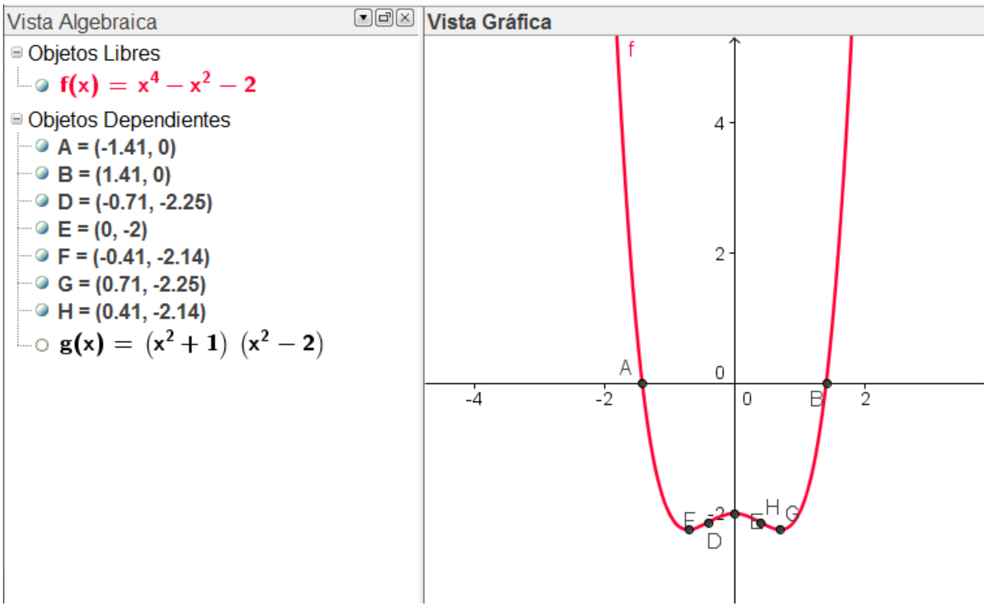
Veamos qué ocurre si realizamos los mismos procesos para la función $f(x) = 6x^3 + x^2 - x$.

Al igual que en el ejemplo anterior, obtendremos la descomposición en factores y el resto de valores, aunque en este caso, expresados en forma aproximada.



Probemos con otro polinomio, con $f(x) = x^4 - x^2 - 2$.

Los resultados que obtenemos también aparecen en forma aproximada y en la descomposición en factores no mostrará aquellos que corresponden a raíces irracionales y mucho menos, las que resulten de valores complejos.



Las opciones y comandos que ofrece la incorporación del cálculo simbólico a partir de la versión 4.2 de GeoGebra, no solo resuelven las incidencias anteriores, sino que además amplían las posibilidades de GeoGebra, que permitirán su uso en otros bloques de contenidos; lo que hace que poco a poco GeoGebra se convierta en un recurso imprescindible y sobre todo casi único, para el profesorado interesado en incorporar las TIC a su aula.

El cálculo simbólico en GeoGebra

Si comparamos GeoGebra con otros programas de CAS existentes en el mercado, quizás nos pueda parecer que le queda mucho por hacer; pero como ya he comentado, solo hay que darle tiempo a GeoGebra.

En esta comparación a favor de GeoGebra siempre estará su característica de software libre (por ejemplo, al compararlo con Derive) y si la comparación la realizamos con otros mucho más potentes, por ejemplo con Maple o Mathematica, además de la característica anterior hay que tener en cuenta que para ciertos niveles educativos más que potencia se requieren otras características como sencillez, intuición o dinamismo, por lo que GeoGebra es suficiente para el desarrollo de la mayoría de los contenidos.

A modo de resumen, las opciones que ofrece la vista CAS de GeoGebra nos permite trabajar los siguientes contenidos:

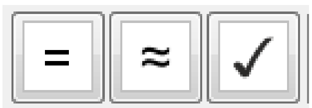
- Factorización de números y polinomios.
- Operaciones con fracciones algebraicas
- Resolución de ecuaciones.
- Resolución de sistemas de ecuaciones.
- Discusión de sistemas.
- Cálculo diferencial.
- Cálculo integral.
- Cálculo de límites.
- Sumas y productos de series.

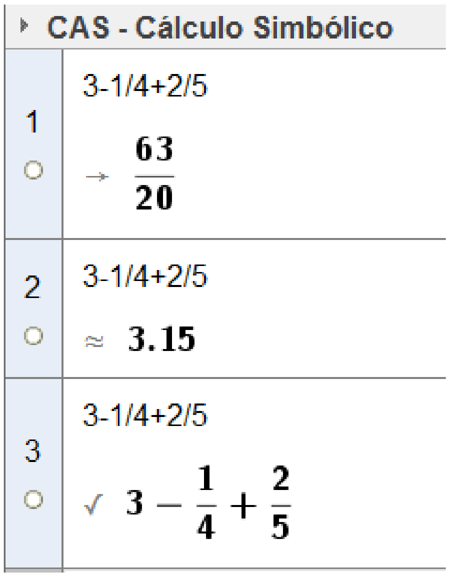
- Simplificación de expresiones trigonométricas.
- Vectores y matrices.
- Resolución de ecuaciones diferenciales.

La vista CAS

Como ocurre con el resto de vistas disponibles en GeoGebra, la vista CAS dispone de una barra de herramientas propia.

Como ya hemos observado en los ejemplos iniciales, podemos realizar sencillas operaciones numéricas o simbólicas en esta vista, obteniendo los resultados de forma directa. Si nos fijamos en los tres primeros botones de la barra de herramientas, tendremos las opciones necesarias para obtener un resultado en forma exacta, en forma aproximada o dejarlo si realizar ninguna operación.

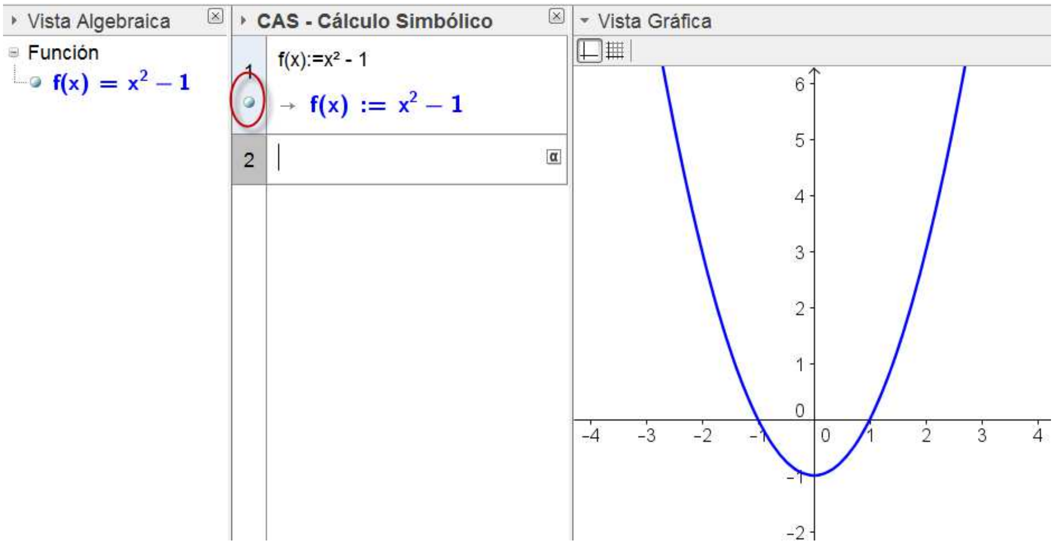




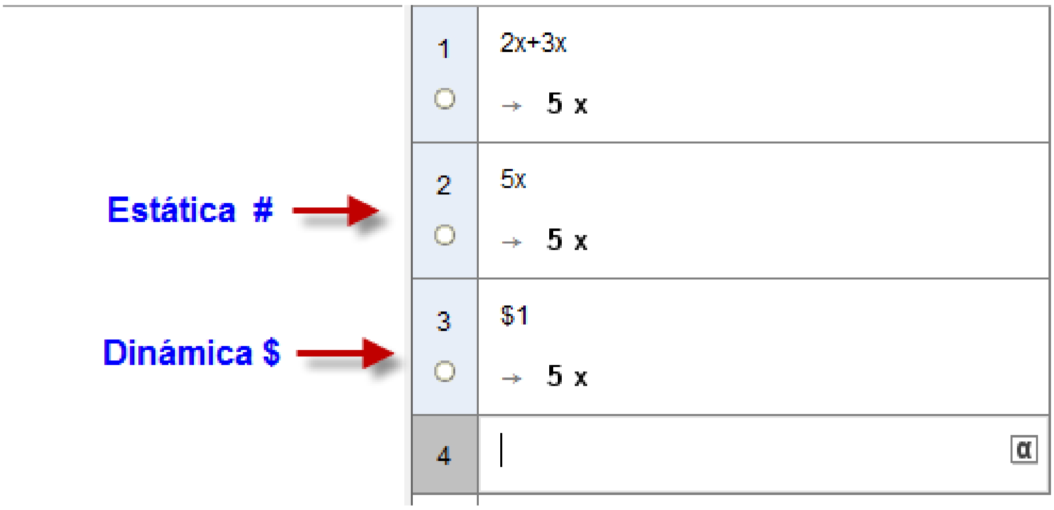
Como era de esperar, disponemos de las opciones necesarias para facilitar la edición de cualquier expresión contenida en cualquiera de las filas, sin olvidar que podemos pulsar directamente sobre una expresión de entrada, para modificarla y por tanto, para obtener los nuevos resultados.

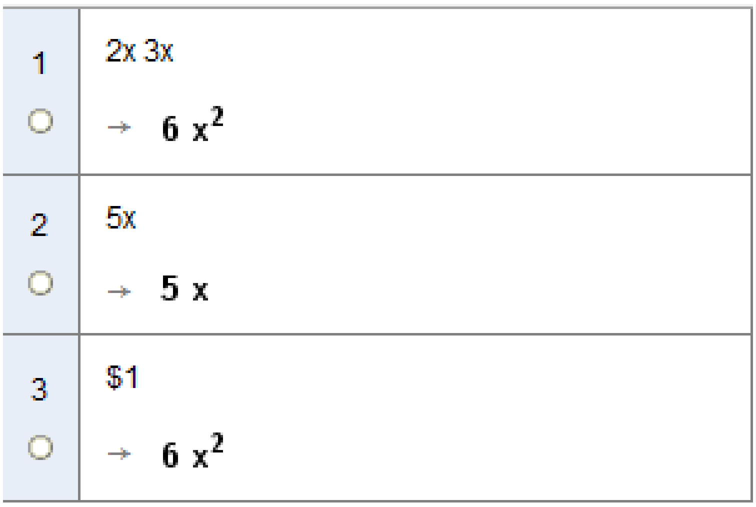
Las distintas vistas están relacionadas, de manera que cualquier valor contenido en una de ellas se podrá utilizar en otra de las vistas disponibles en GeoGebra.

Por ejemplo, si escribimos una expresión simbólica (cuya variable sea x) en la vista CAS, bastará con marcar el círculo (Ocultar/Mostrar) para obtener la definición de la función en la vista algebraica y su representación en la vista gráfica.



Además, entre las expresiones contenidas en las filas se podrán establecer relaciones que serán estáticas o dinámicas, de manera que al cambiar los valores de las celdas iniciales, no cambien o cambien, según el caso, todas las celdas relacionadas.

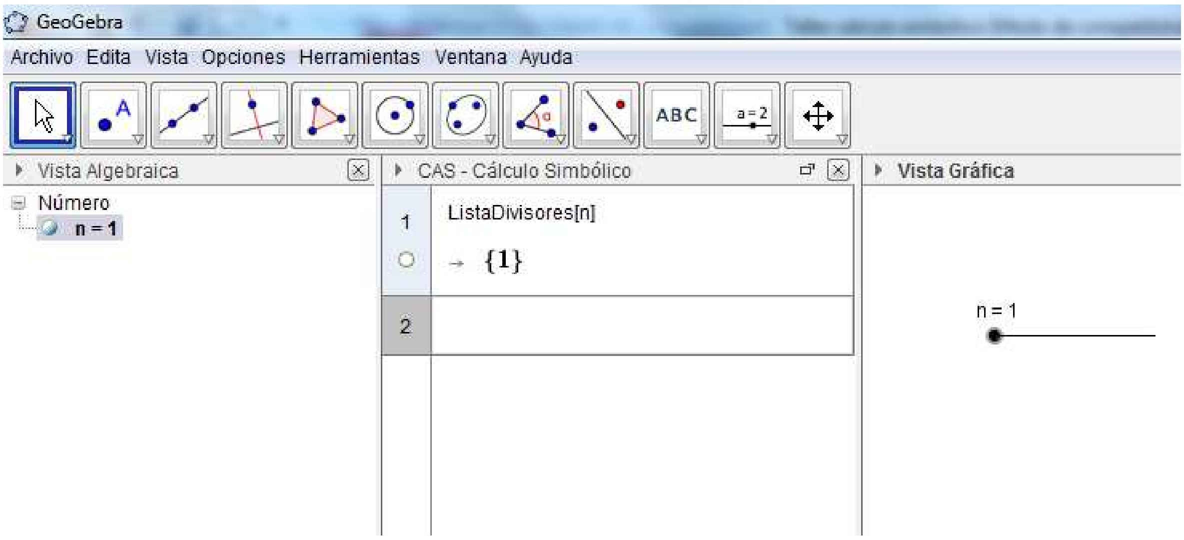




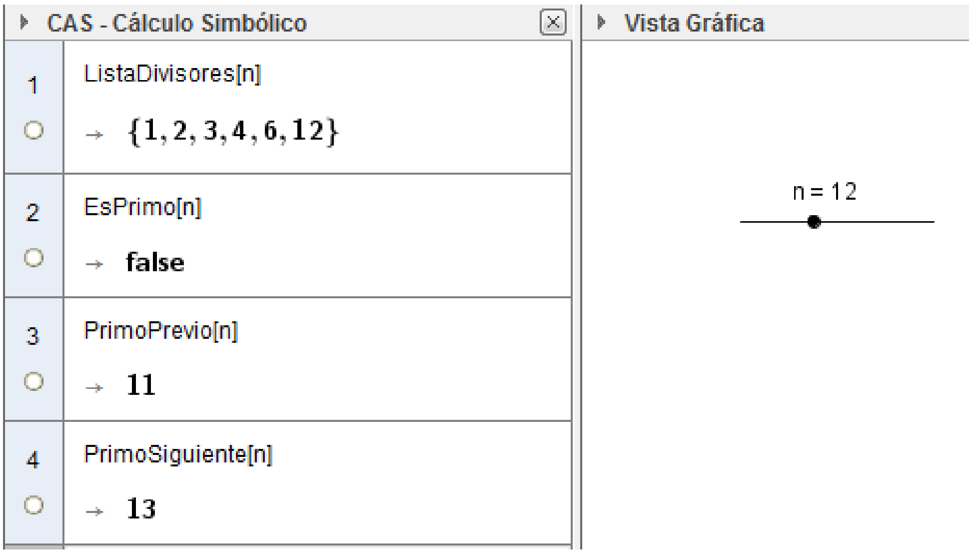
Continuando con los distintos botones disponibles en la barra de herramientas, el siguiente botón permite descomponer en factores números o polinomios. Este botón, corresponde por tanto, al comando **Factoriza**. Realicemos un ejemplo sencillo sobre números primos.

Actividad

Con ayuda de un deslizador, determina la lista de divisores de los números menores que 100 para establecer cuáles son primos y cuáles no.



Esta actividad se puede completar con otros comandos y funciones disponibles para trabajar con números primos.



Continuamos con los dos siguientes botones que encontramos en la barra de herramientas que facilitan el desarrollo de una expresión o la sustitución de un valor o expresión en una expresión dada.

Lo mejor es comprobar su utilidad con un ejemplo.

Actividad

Comprobar que a es una raíz del polinomio p(x).

$$\mathrm{a} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \qquad p(x) = x^8 - 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576$$

CAS - Cálculo Simbólico	
1	$x^8-40x^6+352x^4-960x^2+576$ Sustituye, x=a: **0**
2	a:=sqrt(2)+sqrt(3)+sqrt(5) $\rightarrow \mathbf{a} := \sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$

Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Entre las actividades que permiten las nuevas opciones de Geogebra se encuentran la resolución de ecuaciones, en su sentido más amplío, lo que supone que no estarán reducidas a ecuaciones polinómicas.

Como sabemos, en la vista algebraica disponemos de los comandos **Raíz** y **RaízCompleja** para obtener las raíces de un polinomio, según el tipo y según lo valores, el resultado aparecerá en forma exacta o aproximada.

Al utilizar en la vista CAS los comandos **Soluciones** o **Resuelve**, que corresponde al siguiente botón de la barra de herramientas, obtendremos, siempre que sea posible, las raíces en forma exacta de una ecuación que puede ser polinómica o no, como ocurre en los ejemplos siguientes.

Hasta ahora, todas las raíces obtenidas han sido reales, ¿qué haremos para hallar las raíces complejas?

Para obtener los factores complejos disponemos del comando **FactorC** (como complemento a **Factoriza**) y **SolucionesC** o **ResoluciónC**, como complemento a los comandos **Soluciones** o **Resuelve**.

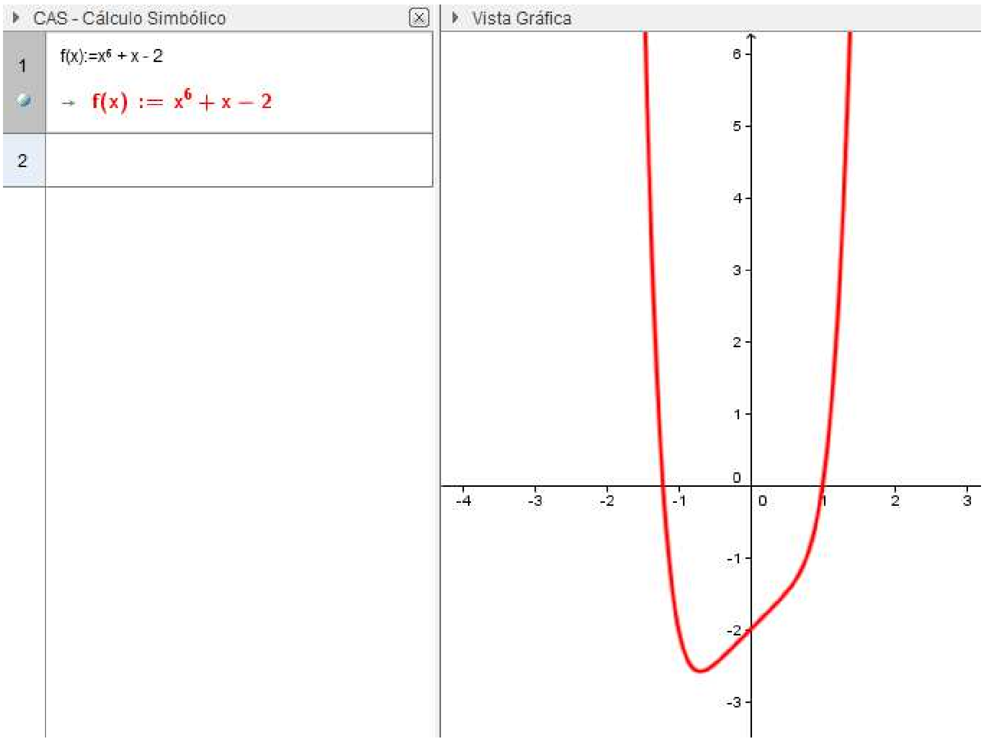
14	Soluciones[x^4+3x^2-4] $\rightarrow \{1,-1\}$
15	SolucionesC[x^4+3x^2-4] $\rightarrow \{2\,i,-2\,i,1,-1\}$

1	ResoluciónC[$x^3+2x^2+5x+10$] $\rightarrow \left\{x = i\,\sqrt{5}, x = -i\,\sqrt{5}, x = -2\right\}$

Intentemos ahora resolver la ecuación polinómica $x^6+x-2=0$.

Utilizando los comandos ya conocidos, obtenemos como soluciones la lista de valores **{ ?, 1}**.

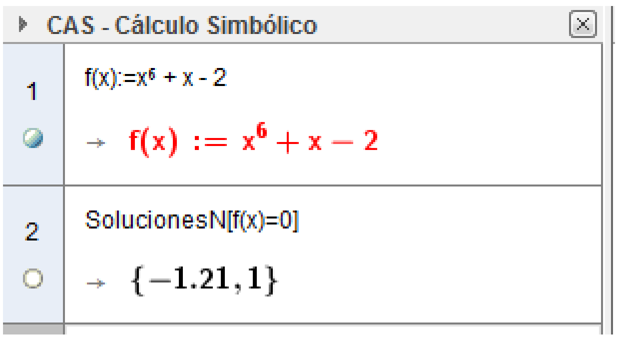
Al tratarse de un polinomio de grado seis y tener una raíz real (x=1), supone que al menos tendrá otra raíz también real que GeoGebra no es capaz de hallar de forma exacta y por tanto, representa con el signo "?". Podemos comprobar su existencia aprovechando la facilidad que el programa nos ofrece para representar cualquier función.



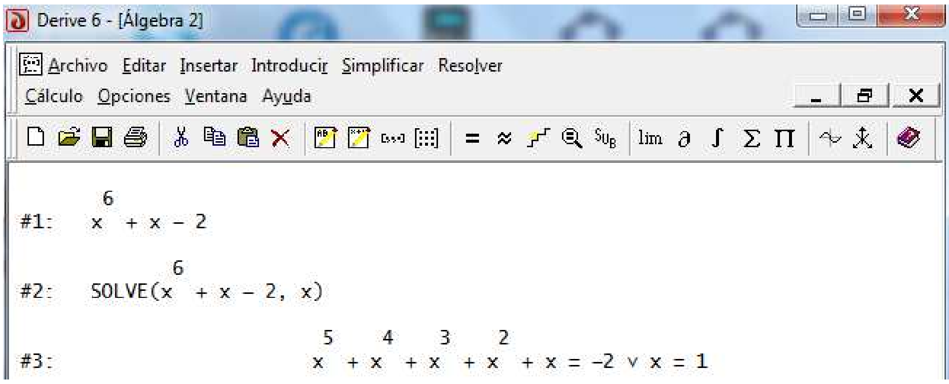
Por tanto, solo nos queda resolver de forma aproximada la ecuación anterior para obtener la raíza que falta que observamos existe en el intervalo [-2, -1].

Además, podemos determinar, a partir de la gráfica de la función, que el resto de raíces de esta ecuación son complejas, aunque por ahora GeoGebra no es capaz de obtener una aproximación.

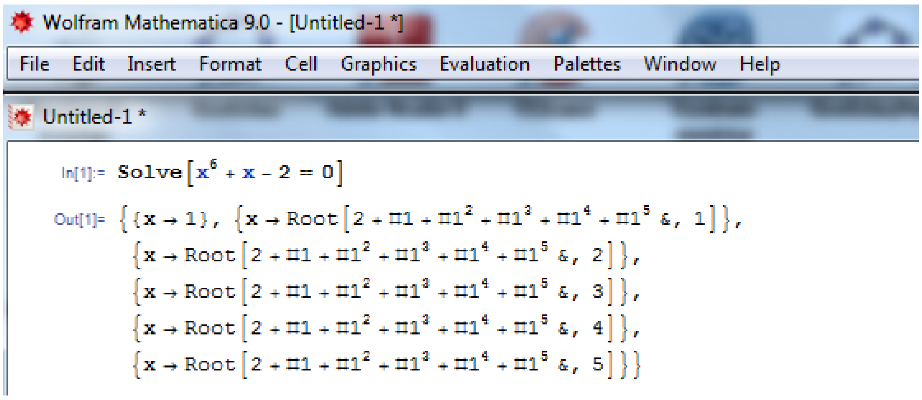
Para hallar la raíz real es necesario recurrir a los comandos **SolucionesN** o **ResuelveN** y como alternativa al botón correspondiente disponible en la barra de herramientas.



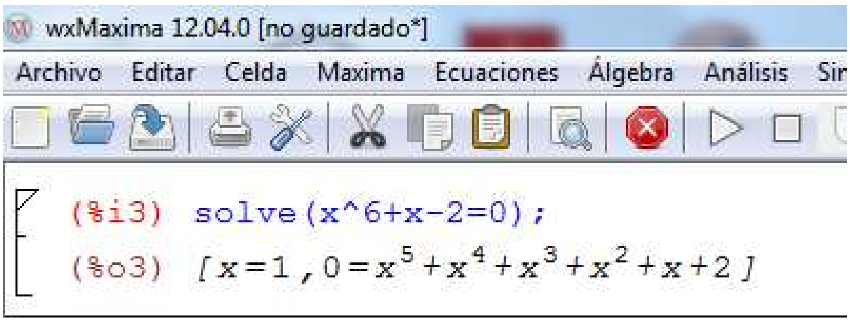
Los cálculos anteriores no debemos considerarlos que están por debajo de los que se obtendrán con otros programas, como podemos ver en las imágenes siguientes:



Derive



Mathematica



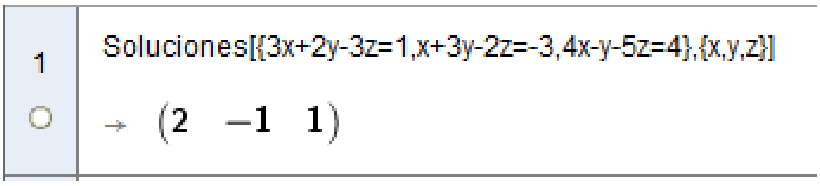
WxMaxima

Los comandos anteriores utilizados en la resolución de ecuaciones permitirán resolver un sistema de ecuaciones lineales o no, en los que la dificultad estará en la notación ya que es necesario escribir tanto las ecuaciones como incógnitas utilizando estructuras del tipo listas (valores entre llaves separados por comas), aunque como alternativa, puede ser de utilidad las referencias a otras filas de la vista CAS a través de los símbolos **$** y **#**.

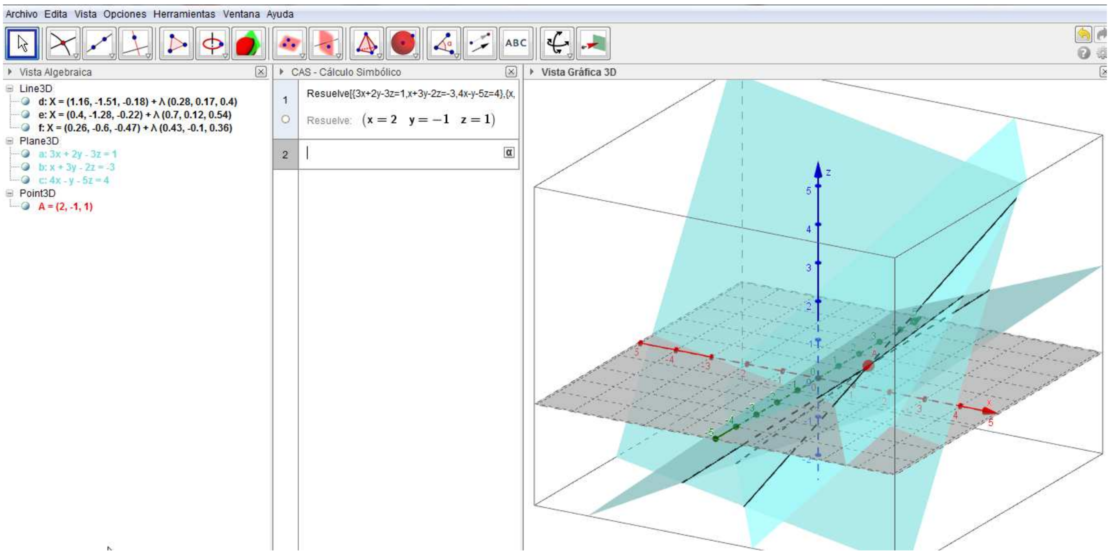
Actividad

Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-3z=1 \\ x+3y-2z=-3 \\ 4x-y-5z=4 \end{array}\right\}$$



Para un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas, la versión 5 beta de GeoGebra ofrece la posibilidad de representar los planos para encontrar la solución de manera gráfica y por tanto, también algebraica, aunque sea de forma aproximada.



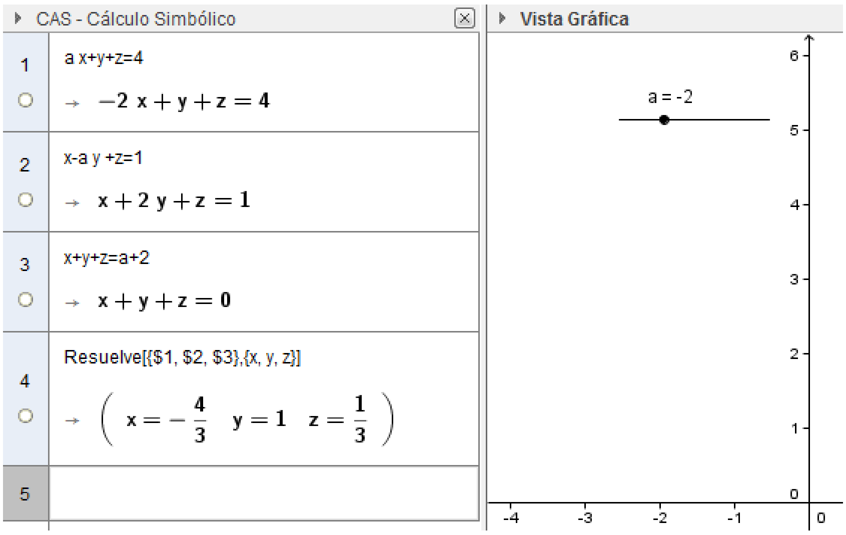
De manera similar, se realizará la discusión de un sistema de ecuaciones con parámetros.

Además, si el parámetro se crea previamente como un deslizador, permitirá observar los cambios que se producirán en el sistema de ecuaciones al variar el parámetro.

Actividad

Discutir y resolver, según los valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} a\,x+y+z=4 \\ x-a\,y+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{array}\right\}$$



Cálculo diferencial e integral

Pasemos a otro bloque de contenidos y para ello, nos fijamos en el siguiente bloque de botones, los dedicados al cálculo diferencia y al integral.

Para estas dos tareas apenas hay diferencias con las opciones disponibles en versiones anteriores ya que desde la línea de entrada, a través de la vista algebraica era posible derivar e integral, aunque en este último caso, al devolver el resultado de una integral definida, este aparecerá expresado en forma exacta al realizarlo desde la vista CAS.

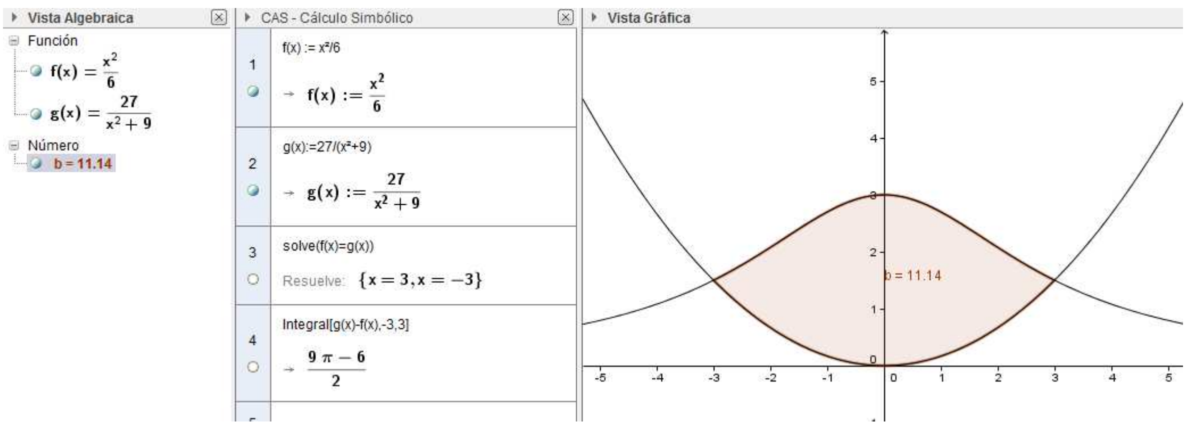
Evidentemente, hay que pensar que las opciones de CAS han incrementado la potencia de GeoGebra al menos en cuanto al cálculo integral.

Como en otros cálculos expuestos anteriormente, la diferencia entre la vista CAS y la algebraica está en la forma de representación de los resultados, en forma exacta en la primera y aproximada en la segunda, como podemos comprobar en la siguiente actividad:

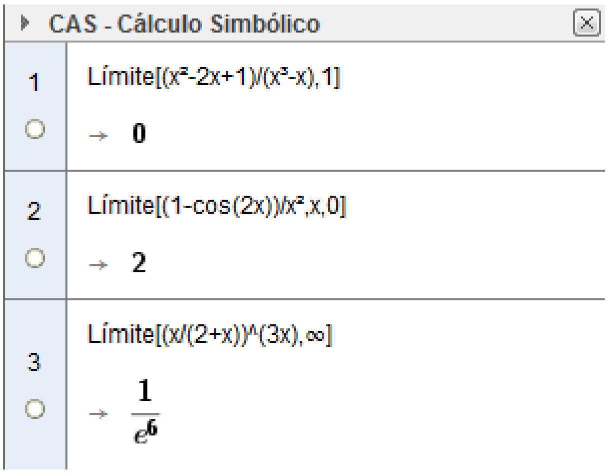
Actividad

Hallar el área encerrada entre las dos curvas siguientes:

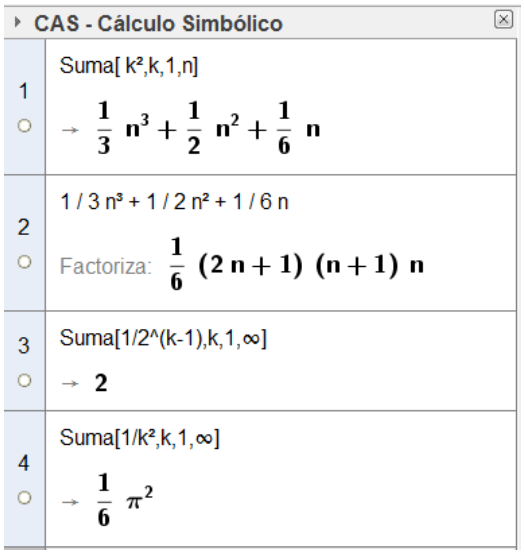
$$y=\frac{x^2}{6} \qquad y=\frac{27}{x^2+9}$$



Lo que sí ha incorporado la versión 4.2 de GeoGebra han sido las opciones para el cálculo de límites, para las que disponemos de los comandos **Límite**, **LímiteInferior** y **LímiteSuperior**, estos dos últimos para obtener los límites laterales.



También ha incorporado los comandos necesarios para obtener sumas y productos de series, tanto finitas como infinitas, a través de los comandos **Suma** y **Producto**, respectivamente.



Álgebra matricial

Para completar la exposición de las opciones que ofrece la nueva versión de GeoGebra para trabajar el cálculo simbólico, veremos los comandos disponibles para trabajar con vectores y matrices.

Como indiqué al comienzo de mi intervención, aparecerá un mensaje de error al definir un vector o una matriz que tenga un elemento simbólico, salvo que previamente se haya creado como un deslizador.

Esto no ocurrirá en la vista CAS en la que tanto vectores como matrices podrán tener elementos numéricos o simbólicos sin necesidad de definiciones previas.

A las operaciones básicas con vectores y matrices ya disponibles desde la vista algebraica, la nueva versión le añade, además de ofrecer los resultados en forma exacta, como ya sabemos, la posibilidad de trabajar con elementos simbólicos en matrices y vectores, como queda reflejado en la actividad siguiente:

Actividad

Dados los vectores a y b.

Hallar k para que sean perpendiculares.

$$\vec{a} = (1, k, 3) \qquad \vec{b} = (-2, 2, 1-k)$$

CAS - Cálculo Simbólico

1	a:=(1,k,3) → $\mathbf{a := (1, k, 3)}$
2	b:=(-2,2,1-k) → $\mathbf{b := (-2, 2, -k+1)}$
3	ProductoEscalar[a,b] → $\mathbf{-k+1}$
4	-k + 1 Resuelve: $\mathbf{\{k = 1\}}$

De manera análoga se realizarán los cálculos con matrices, en las que para definirlas en la vista CAS hay que tener en cuenta utilizar los símbolos **:=**.

Actividad

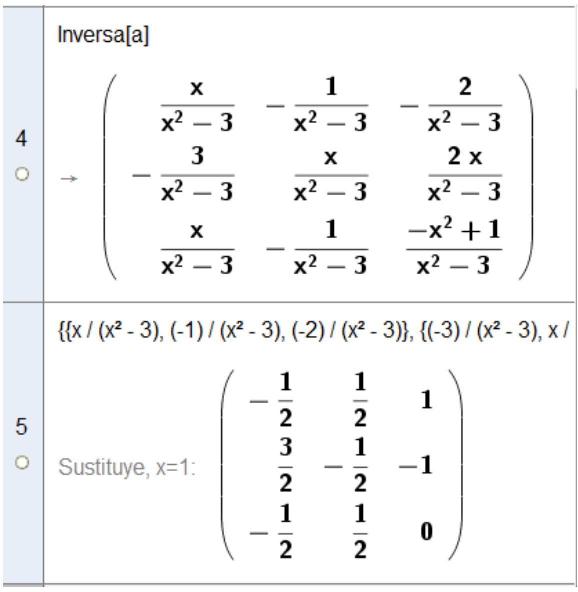
Determina los valores de x para los cuales la matriz A es singular.

Halla la matriz inversa para x =1.

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

CAS - Cálculo Simbólico

1	a:={{x,1,0},{1,x,2},{1,0,-1}} → $\mathbf{a := \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$
2	Determinante[a] → $\mathbf{-x^2 + 3}$
3	-x² + 3 Resuelve: $\mathbf{\left\{x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}\right\}}$



Para trabajar con matrices, además de los comandos **Determinante** e **Inversa**, utilizados anteriormente, disponemos de otros como **Dimensión**, **Identidad[n]**, **Traspone** o **RangoMatriz**, cuyo significado es evidente.

Y como en ejemplos anteriores, también para realizar operaciones con matrices y vectores podemos definir los elementos simbólicos como deslizadores para estudiar qué ocurre al cambiar su valor y de esta forma aprovechar las características dinámicas de GeoGebra, de modo que la manipulación de los objetos, algo habitual en GeoGebra, faciliten la experimentación y la investigación y por tanto, el aprendizaje por descubrimiento para lo que este programa es uno de los mejores recursos que podemos utilizar, sino el mejor, al menos para los que desde hace años estamos ilusionados con el uso de las TIC.

La vista CAS ofrece más opciones que os animo a descubrir.

En mi intervención he intentado mostrar aquello que considero de más utilidad esperando que estéis de acuerdo conmigo en que podemos concluir que el cálculo simbólico también es posible con GeoGebra.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 169-186

Ideas para enseñar

A formação geométrica de Licenciandos em Matemática: uma análise a partir da replicação de questões do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE)

Regina da Silva Pina Neves, Sandra Aparecida Oliveira Baccarin
Jhone Caldeira Silva

Resumen	Este estudio analiza la formación geométrica de egresados de Licenciatura en Matemáticas de una institución privada de Brasil a través de la replicación de dos problemas del Examen Nacional do Enseñanza Superior (ENADE-BRASIL). Los resultados sugieren el mantenimiento de las dificultades de aprendizaje de estos conceptos entre los estudiantes y docentes y la falta de experiencia con las demostraciones matemáticas; también sugieren que el tiempo actualmente asignado a las asignaturas sobre geometría y al grado en Licenciatura no contribuye con el cambio de esta situación; muestran la relevancia del uso de preguntas abiertas para la comprensión de las habilidades desarrolladas por los estudiantes. **Palabras clave**: formación geométrica; licenciatura en Matemáticas; ENADE-BRASIL.
Abstract	This study analyzes the geometric formation of undergraduate students majoring in Mathematics from a private institution in Brazil based on the replication of two problems of the Exame Nacional do Ensino Superior (ENADE-BRASIL). The results suggest the maintenance of the learning difficulties of geometrical concepts among students and teachers and the lack of experience with mathematical proofs; complain that the time devoted to the subjects of geometry and to the major in Mathematics itself, currently, does not contribute in changing this situation and shows the relevance of using open questions to understand the skills and conceptual difficulties of the students. **Keywords**: geometric formation; majoring in Mathematics; ENADE-BRASIL
Resumo	Este estudo analisa a formação geométrica de concluintes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição privada brasileira a partir da replicação de duas questões do Exame Nacional do Ensino Superior (ENADE-BRASIL). Os resultados sugerem a manutenção das dificuldades de aprendizagem destes conceitos entre estudantes e professores e a falta de experiência com demonstrações; denunciam que o tempo destinado às disciplinas de geometria e ao próprio curso, na atualidade, não contribui para a alteração desse quadro; mostram a pertinência do uso de questões abertas para a compreensão de competências desenvolvidas pelos estudantes. **Palavras-chave:** formação geométrica, licenciatura em Matemática; ENADE-BRASIL.

1. Introdução

A Formação inicial do professor de matemática tem inquietado a comunidade de educadores matemáticos e tem sido amplamente investigada nas últimas duas décadas do século passado e na primeira deste, gerando debates e muitas publicações tanto no Brasil quanto em outros países. Os estudos de D'ambrósio (1993), Fiorentini (1994), Ponte (1998), Fiorentini & Cristovão (2006) exemplificam este movimento e contribuem para o entendimento das possibilidades e dificuldades relacionadas a esta formação.

Muitas das possibilidades preconizadas nesses estudos, e em muitos outros, têm contribuído, sobremaneira, para a melhoria da formação do professor de matemática. Como exemplo, podemos citar as investigações que buscam a (re) significação de discursos e/ou construção de novas práticas a partir da análise de casos de ensino, de aulas ministradas e de práticas de ensino como nos apresentou Borba (2006), em análise a respeito de tendências internacionais ou as diversas experiências de formação inicial socializadas durante o X Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), realizado em julho de 2010 na cidade de Salvador, Bahia. Os diferentes estudos apresentados na XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), realizada em junho de 2011, na cidade de Recife, Pernambuco. Ou ainda, os estudos apresentados no V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (V SIPEM), realizado em novembro de 2012, na cidade de Petrópolis, Rio de Janeiro.

Entretanto, apesar das experiências exitosas, ainda enfrentamos dificuldades nos e para os processos de formação inicial do professor de matemática e, de modo bem geral, os estudos têm relatado como dificuldades - ainda atuais, o modo como os cursos de licenciatura em matemática estão organizados em termos de projeto político pedagógico/matriz curricular e como são de fato geridos e executados. A não superação do modelo de licenciatura segundo a fórmula "3+1" em muitas instituições, e mesmo naquelas que já alteraram essa fórmula os avanços são lentos devido ao isolamento entre as diferentes áreas de conhecimento. Ademais, muitos cursos optaram por supervalorizar os conhecimentos provenientes da prática, presos ao paradigma da racionalidade prática, como já alertava Duarte (2003).

Em função de tudo isso, estes mesmos autores, afirmam que, na maioria dos cursos, ainda percebe-se a falta de articulação entre teoria e prática, entre os saberes específicos e pedagógicos e a falta de preparo dos formadores de professores para empreender essas articulações, como já salientava Fiorentini (1994). E são unânimes em indicar, para a superação desse quadro, a reflexão, o trabalho colaborativo e uma relação mais equilibrada e harmoniosa entre teoria e prática. Ademais, enfatizam a necessidade de estudos empíricos a partir de novos construtos teóricos que deem conta não só da complexidade cognitiva e afetiva, como também das concepções, crenças e atitudes dos professores/futuros professores (Fiorentini & Lorenzato, 2006; Pina Neves & Fávero, 2009).

Nesse contexto, observamos que os relatos de dificuldades relacionadas ao ensino de geometria são recorrentes no cenário educacional brasileiro. Muitos estudos referem-se a ele a partir de termos como *omissão* e/ou *abandono.* Ver, por exemplo, Pavanello (1989); Pavanello (1993); Perez (1995); Pais (1999) e Pina Neves (2002).

Vários são os argumentos que explicam tal situação, entre eles: a falta de preparo dos professores para trabalhar a geometria a partir das transformações geométricas, como defendia o Movimento da Matemática Moderna (Pavanello, 1989); a omissão diretamente relacionada às condições de ensino e aprendizagem da geometria no Ensino Fundamental e Médio e nos cursos de formação de professores (Perez, 1991); a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1.º e 2.º Grau em 1971, que possibilitou que cada professor elaborasse seu programa de ensino de acordo com as necessidades dos estudantes. Tal abertura aliada às dificuldades conceituais dos professores abriu o precedente para que pouca geometria fosse ensinada (Pavanello, 1993). Os professores sem a formação necessária para o ensino da geometria tendem a não ensiná-la e, quando a ensinam, fazem-no exclusivamente a partir do uso acrítico do livro didático (Lorenzato, 1995). Essas práticas de omissão e/ou de simplificação dos conceitos geométricos em sala de aula nos diferentes níveis de ensino criaram o que Lorenzato chama de círculo vicioso “[...] presentemente, está estabelecido um círculo vicioso: a geração que não estudou geometria não sabe como ensiná-la” (1995, p. 4).

Desse modo, observa-se que o não rompimento do círculo vicioso revela-se na forma de dificuldades de estudantes e professores em lidar com os conceitos geométricos, como enfatizam muitos estudos: estudantes e professores apresentam dificuldades em reconhecer figuras planas e tridimensionais (Nasser, 2001); os estudantes têm acentuadas dificuldades em resolver problemas envolvendo conceitos geométricos (Pirola, 2003; Viana, 2000). Apesar das iniciativas de recuperação do ensino da geometria e da reformulação dos livros didáticos, ainda hoje, ela é pouco estudada nas escolas (Passos, 2005; Pereira, 2001); há forte resistência ao ensino da geometria, até mesmo no Ensino Superior, em que é também pouco abordada; e as dificuldades dos professores no seu ensino devem-se, em grande parte, ao fato de que tiveram pouco acesso ao estudo de tais conceitos em sua formação (Pais, 1999).

Entretanto, com o fortalecimento da Educação Matemática como área de conhecimento, observa-se a ampliação de pesquisas voltadas para a discussão da aprendizagem geométrica e para a sugestão de metodologias que promovam essa aprendizagem. Em Andrade & Nacarato (2004), por exemplo, temos uma amostra significativa dessa produção. Nesse estudo, os autores analisaram 363 trabalhos, apresentados em sete Encontros Nacionais de Educação Matemática, desde 1987, que estão relacionados às atuais tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria no Brasil. Esses estudos defendem que é possível buscar a aprendizagem geométrica para um contingente maior de pessoas e que ela é imprescindível para o desenvolvimento humano.

Nesse sentido, Fillos (2006) afirma que a geometria é fundamental para a compreensão do mundo e a participação ativa do homem na sociedade, pois facilita a resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento e desenvolve o raciocínio visual. Para Fonseca *et al*. (2001), ela é importante veículo para o desenvolvimento de habilidades e competências, tais como a percepção espacial e a resolução de problemas, pois oferece aos sujeitos oportunidades de observar, comparar, medir, inferir, validar, generalizar e abstrair. Sendo assim, defende que a reformulação do ensino de geometria não é apenas uma questão didático-pedagógica, é também epistemológica e social.

Questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da geometria são discutidas também em documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais. O documento enfatiza que a geometria é vital para "desenvolver capacidades cognitivas fundamentais" (Brasil, 1998, p. 16). Ademais, destaca que a construção do pensamento geométrico deve ocorrer ao longo da Educação Básica e que a geometria não deve ser vista como elemento separado da Matemática e, sim, como parte que ajuda a estruturar o pensamento matemático e o raciocínio dedutivo, pois permite examinar, estabelecer relações e compreender o espaço onde se vive (Brasil, 1997, 1998).

Em referência específica ao Ensino Médio, os documentos apontam que as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de geometria, para que o estudante possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. Além disso, defendem que essas competências são importantes na compreensão e na ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. Quanto ao Ensino Superior as diretrizes curriculares para os cursos de licenciatura em Matemática destacam que os cursos devem proporcionar ao licenciando estudos de fundamentos de geometria, como também de conteúdos presentes no currículo da Educação Básica.

Todos os argumentos pontuados até o momento permitem-nos algumas conclusões: o ensino de geometria é imprescindível para o desenvolvimento humano; ele é defendido por pesquisadores da área e pelos textos dos documentos oficiais; a aprendizagem geométrica é pontuada como possível, desde que o ensino e a aprendizagem de geometria sejam (re) construídos em todos os níveis de ensino. De posse desse entendimento, temos observado na literatura em Educação Matemática estudos que buscam compreender o valor das *demonstrações* matemáticas *para* e *nos* processos de ensino e aprendizagem da geometria, tanto na Educação Básica quanto no Curso de Licenciatura em Matemática. De modo especial, esses mesmos estudos avaliam métodos eficientes de utilizá-la na licenciatura de modo a favorecer o desenvolvimento de habilidades junto aos licenciandos para que eles, em sua prática docente, superem o "*ciclo vicioso*" comentado anteriormente.

Desse modo, optamos por reunir, no item seguinte, tais entendimentos e relacioná-los aos modos com os quais temos utilizado a replicação de questões do ENADE para a compreensão das competências e das dificuldades conceituais dos licenciandos e licenciados em matemática.

2. O ensino e a aprendizagem da geometria no contexto das demonstrações matemáticas

A experiência docente em matemática, em especial, no contexto das aulas de geometria, tem nos ensinado que a palavra *demonstração* gera inquietude entre os estudantes sejam eles da Educação Básica, sejam do Curso de Licenciatura em matemática. Muitos relatam que o incômodo é resultante das dificuldades relacionadas à atividade, pelo fato dela exigir alta capacidade de argumentação e linguagem própria. A verdade é que essa inquietude não fica restrita aos estudantes, estando presente também entre professores sejam eles da Educação Básica, sejam do Curso de Licenciatura em matemática. Na licenciatura, em particular, é comum presenciarmos três entendimentos em relação à presença de demonstrações nas aulas de geometria: professores que se utilizam das demonstrações em suas aulas do mesmo modo como as utilizam no curso de bacharelado; professores que se utilizam das demonstrações em suas aulas a partir de simplificações/reformulações por se tratar de um curso de Licenciatura e, professores que não as utilizam, por avaliar que elas não são pertinentes à licenciatura, argumentando que elas são mais propícias àqueles profissionais que terão a matemática científica como objeto de trabalho e não para aqueles que terão a matemática escolar.

Nesse cenário, observamos a demonstração muito mais associada à Matemática, à produção de conhecimento em Matemática do que ao ensino/aprendizagem da Matemática, à apropriação de conceitos matemáticos a partir da atividade de demonstração, seja na Educação Básica, seja no Curso de Licenciatura em Matemática. Diante disso, destacam-se as indagações: as demonstrações são pertinentes para os processos de ensino e aprendizagem de geometria? Elas devem ser usadas a partir de que entendimento e de que metodologia? Desenvolver habilidades relacionadas às demonstrações auxilia o futuro professor no desenvolvimento de competências para a docência em geometria na Educação Básica? Em quais aspectos o tratamento dado às demonstrações no Curso de Licenciatura em Matemática se diferencia do tratamento dado às demonstrações na Educação Básica? A partir dessas indagações, faz-se necessário destacar como entendemos o termo demonstração e como ela tem sido entendida pela comunidade internacional e nacional de pesquisadores em Educação Matemática.

Para Arsac & Barbin (1988), a História da Matemática nos ensina que a noção de demonstração viveu três estágios, os quais podem ser categorizados da seguinte maneira: 1/ a gênese com os gregos no século V a.C. - a demonstração é a ordem da convicção; 2/ a primeira modificação no século XVII - a demonstração tem como objetivo esclarecer antes de convencer, e os métodos de descoberta assumem papel central e, 3/ a segunda modificação no século XIX - o retorno ao rigor e o surgimento do formalismo. Ademais, nos ensina também que variados termos - nem sempre sinônimos – são usados para se referir às demonstrações, como por exemplo, demonstrações formais, demonstrações rigorosas, provas rigorosas ou apenas provas.

Em função desse processo histórico e da multiplicidade de termos, assumimos, em nossos estudos o mesmo entendimento dado por Balacheff (1988) ao termo demonstração. Para ele era necessário diferenciar explicação, prova e demonstração, tendo em vista que:

> [...] uma prova é uma explicação aceita por uma dada comunidade num dado momento, podendo ser debatida, refutada ou aceita. No interior da comunidade matemática, porém, só são aceitas como provas explicações que adota uma forma particular, um conjunto de enunciados válidos organizados segundo certas regras, sendo que um enunciado ou é reconhecido como verdadeiro ou é deduzido a partir do precedente por regras de dedução válidas e pré-fixadas, do domínio da lógica. Esse tipo particular de prova chama-se demonstração (Balacheff, 1988, p. 25).

Assim sendo, as provas matemáticas podem ser organizadas em duas categorias: as pragmáticas e as conceituais. As primeiras se apóiam em recursos de ação como o uso de desenhos; a segunda, por sua vez, não envolve ação e sim formulação de propriedades e relações entre as mesmas. Além disso, Balacheff (1988) argumenta que elas acontecem em níveis definidos como: 1/ *empirismo* - consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos; 2/ *experimento crucial* - consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar; 3/ *exemplo genérico* - consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos; e, 4/ *experimento de pensamento* - consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos.

Muitos pesquisadores têm se dedicado ao estudo das demonstrações e sua relação com ensino de geometria, apresentando argumentos favoráveis e desfavoráveis. Todavia, todos esses estudos provocam reflexões pertinentes para a docência na Educação Básica e para os processos de formação de professores.

Como exemplo, temos nos estudos Hanna (1990) a distinção entre demonstração formal, aceitável e demonstração no contexto da matemática escolar. Ela entende que:

> [...] a demonstração formal como conceito teórico da lógica formal (ou meta-lógica); a demonstração aceitável como conceito normativo que define o que é aceitável para os matemáticos profissionais; e ensino da demonstração, como uma atividade matemática escolar que serve para esclarecer ideias que valem a pena tornar conhecidas dos alunos (Hanna, 1990, p.6).

Já Thurston (1994) argumenta que a demonstração matemática é uma atividade relacionada à construção da própria matemática e importante para gerar entendimento e compreensão. No entanto, afirma que há uma diversidade de demonstrações e defende que dentre elas é necessário identificar as compreensíveis e verificáveis para os estudantes, para então tomá-las nos processos de ensino e de aprendizagem. Hanna & Jahnke (1996) defendem que a demonstração é uma característica essencial da Matemática e, por isso, um elemento importante quando se pensa no ensino de conteúdos desta área de conhecimento.

Garnica (1996), por sua vez, discute a dificuldade dos estudantes de um curso de licenciatura nos primeiros contatos com a “prova rigorosa” e sintetiza a partir de seus estudos teóricos e empíricos que:

> 1/ a prova rigorosa é elemento fundamental, se pretendemos compreender como funciona o discurso matemático e como são engendradas as concepções que permeiam a sala de aula de Matemática. Assim é tema importante à Educação Matemática; 2/ no que se refere à questão do rigor, os estudos analisados não concebem a possibilidade de um rigor alheio à Matemática dita “formal”, desenvolvida na esfera acadêmica; 3/ é mínima a contribuição dos pesquisadores matemáticos brasileiros quanto a esta temática; 4/ o surgimento da prova, à época dos gregos, e mesmo a sua formalização, amplamente divulgada no mundo contemporâneo, carecem de estudos históricos mais apurados acerca de seu surgimento; 5/ prova rigorosa e utilizações de informática ainda são questões polêmicas, cercadas de paradoxos que focam validade, teoria e prática; 6/ várias são as contribuições que fazem referência a metodologias para o uso da prova em

> sala de aula, embora estas possam ser vistas como compartimentadas; 7/ a prova rigorosa é engendrada, executada, verificada e, finalmente,validada por processos nitidamente sociais, afirmação esta que, de certa forma, rompe com alguns aspectos do formalismo que deveriam caracterizá-las; 8/ Não existem disponíveis trabalhos que tratem especificamente da questão da prova rigorosa imersa no contexto da formação do professor de Matemática (Garnica, 1996, p.11).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental (PCNEF) já enfatizam em 1998 a importância da demonstração em matemática. O texto do documento é repleto de orientações para o estudo de teoremas pelos estudantes, com posterior demonstração, privilegiando as inferências e as relações que as vinculam com o discurso teórico, bem como, no que diz respeito aos sistemas de representação plana das figuras espaciais e as principais funções do desenho. Nota-se, nas várias passagens dedicadas ao assunto, que a demonstração em matemática é uma das competências indicadas nos PCN para o ensino fundamental e para o ensino médio como parte integrante do currículo da escola básica.

Já Villiers (2002) discute as funções da demonstração em matemática e defende que ela tem a função de: 1/ verificação - convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação; 2/ explicação - compreensão do por que uma afirmação é verdadeira; 3/ descoberta - de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura; 4/ comunicação - negociação do significado de objetos matemáticos; 5/ desafio intelectual - satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema; 6/ sistematização - organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

Nasser & Tinoco (2003) mostram que para os licenciandos em matemática, a prova formal ou demonstração é um desenvolvimento formal que parte de pressupostos (hipóteses) e, por meio de cadeias de raciocínio e de resultados já conhecidos ou de teoremas, chega-se ao resultado que se quer provar como verdadeiro (tese). O que as pesquisadoras observaram, no entanto é que grande parte dos estudantes não dominam tais habilidades durante o curso, nem quando se formam e nem durante os primeiros anos de docência. Ademais, argumentam que é preciso auxiliar os estudantes no desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo e da habilidade de argumentar. Sendo assim, defendem que a prática da demonstração deve ser considerada por estudantes e professores a partir de dois pontos: 1/ como elemento fundamental para entender a produção de conhecimento em Matemática e, 2/ como um caminho para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo.

Além desses estudos, observamos nas contribuições de Garnica (1996, 2002), Bicudo (2002) e Lourenço & Bastos (2002) que, apesar da demonstração ter sido relacionada desde a antiguidade, quanto à validação de idéias matemáticas tal associação tem sido reconstruída tendo em vista que ela não é a única possibilidade.

Nessa corrente de questionamentos, temos os estudos de Wheeler (1990) a partir dos quais ele questiona a pertinência de se usar demonstrações nos processos de ensino e aprendizagem. Para tanto, argumenta que é óbvio que a demonstração será sempre difícil na sala de aula de matemática, porque não aparece aí por nenhuma razão aparente que não seja a de imitar a atividade dos matemáticos. Nunca ninguém parou para pensar se é apropriada para a sala de aula ou, em caso afirmativo, que tipos de demonstrações seriam adequados. Assim ele afirma que: “[...] é um programa terrivelmente sofisticado. Não admira que não seja muito bem ensinado, e que todos os alunos tenham dificuldade em apanhá-lo. Nunca ninguém analisou a dificuldade disto tudo, e a maior parte dos professores não estão conscientes de todas as exigências cognitivas da demonstração (Wheeler, 1990, p. 3- 4).

Diante dos vários argumentos possibilitados pelas pesquisas descritas anteriormente, entendemos que as demonstrações foram e são instrumentos importantes para e na produção de conhecimento matemático e podem se transformar, também, em instrumentos importantes para a prática discente e docente em sala de aula seja na Educação Básica, seja na licenciatura em matemática. De modo bem geral, podemos afirmar que os estudantes ao vivenciarem situações de demonstrações desenvolvem estratégias, habilidades e competências tendo em vista que na tentativa de atribuir significados podem construir e/ou reproduzir conceitos sobre a geometria, seu ensino e aprendizagem. Por isso, assim como Garnica (2002), entendemos que a demonstração tem seu lugar nos cursos de formação de professores e deve assumir não um caráter técnico, mas uma abordagem crítica que possibilite a análise dos modos de produção do conhecimento em matemática e matemática escolar.

Contudo, sabemos que nas escolas brasileiras e nos cursos de formação de professores reina um trabalho com geometria, na maioria dos casos, centrado na preleção de conceitos, sem o uso de materiais didáticos compatíveis com as necessidades da área, pouco provocativo e desprovido de situações que estimulem argumentações e deduções. De modo geral, podemos afirmar que com isso os processos de ensino têm gerado poucas oportunidades de abstração, generalização, ensaio, erro e demonstração.

Em muitas instituições, os estudantes dos cursos de licenciatura são meros receptores de demonstrações apresentadas em livros-textos, tendo como apêndice, a explicação dos professores, assumindo uma postura de reprodução acrítica do conhecimento matemático, tornando-se mero reprodutor de uma dada verdade matemática que assim se perpetua absoluta.

Paralelamente a essas discussões e seus resultados, acompanhamos, desde 2004, as discussões em torno do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES), como também seus impactos nas instituições formadoras de professores de matemática. O SINAES é formado por três componentes principais: a avaliação das instituições, dos cursos e do desempenho dos estudantes e conta com uma série de instrumentos complementares: auto-avaliação, avaliação externa, avaliação dos cursos de graduação e instrumentos de informação (censo e cadastro) e o ENADE (Exame Nacional de Desempenho de Estudantes. O referido exame teve/tem como objetivo aferir o rendimento dos estudantes dos cursos de graduação em relação aos conteúdos programáticos, suas habilidades e competências. Para mais informações acesse (http:// www. inep.gov.br/superior/enade). No que se refere ao curso de Licenciatura em Matemática, o ciclo avaliativo teve sua primeira edição em 2005, a segunda em 2008 e a terceira, em 2011. De modo bem geral, entendemos que a maior contribuição dos resultados do ENADE foi socializar/divulgar que existem falhas nas propostas de formação dos cursos de licenciatura em matemática, o que tem provocado debates nas instituições formadores e fomentado a busca por melhorias para esta formação, em especial, nas instituições privadas, uma vez que estas são mais vulneráveis aos resultados apresentados, na maioria das vezes, alardeados pela mídia televisiva. E apesar das discussões em torno da qualidade e da pertinência das questões utilizadas nos exames, entendemos que muitas delas podem contribuir para o mapeamento das necessidades dos estudantes – sejam eles ingressantes e/ou concluintes do curso.

Diante disso, entendemos que a análise constante da aprendizagem geométrica, bem como, a presença da demonstração matemática nesse contexto tanto na Educação Básica, quanto no Ensino Superior, se faz necessária, uma vez que se busca superar o quadro de dificuldades descrito anteriormente. Para tanto, desenvolvemos dois estudos, com o intuito de analisar a aprendizagem geométrica em situações de demonstração dos concluintes do curso de licenciatura em Matemática de uma instituição particular de ensino do Distrito Federal.

De posse deste entendimento, temos explorado o potencial informativo das questões subjetivas, no que se refere às dificuldades e às competências conceituais dos concluintes a partir de sua replicação junto a estudantes de uma instituição privada da região de Taguatinga, Distrito Federal, desde 2005. De modo especial, temos nos atentado aos grandes entraves da formação do professor de matemática, como é o caso da conceituação geométrica.

3. Método

Participaram do estudo dois grupos de sujeitos. O primeiro grupo composto por 26 licenciandos em Matemática e o segundo grupo por 13 licenciandos, todos eles cursavam o último semestre do Curso de Licenciatura em Matemática na ocasião do estudo.

Dos sujeitos do grupo 1, 11 (42,3%) eram do sexo feminino, 15 (57,7%) do sexo masculino, com idades entre 19 e 50 anos, sendo que a maioria estava entre 21 e 29 anos. Quanto à escola, 20 (76,9%) cursaram o Ensino Fundamental em instituições públicas, 04 (15,4%) em instituições particulares e 02 (7,7%) não informaram esse dado. Para o Ensino Médio, 21 (80,8%) cursaram em instituições públicas, 03 (11,5%) em instituições particulares e 02 (7,7%) não o declararam. Quanto ao local de trabalho em que atuavam 07 (26,9%) declararam trabalhar em escolas, como docentes de Matemática. Dos demais, 12 (46,2%) atuavam em setores diversos, alguns em órgãos públicos como a Polícia Militar, bancos federais e comércio, esses últimos, trabalhando como vendedores, auxiliares, entre outras atividades, 06 (23,1%) não declararam sua ocupação na ocasião da pesquisa e 01 (3,8%) informou estar sem trabalho.

Dos sujeitos do grupo 2, 03 (23,1%) eram do sexo feminino, 10 (76,9%) do sexo masculino, com idades entre 23 e 47 anos, sendo que a maioria estava entre 23 e 29 anos. Quanto à escolaridade, 10 (76,9%) cursaram o Ensino Fundamental em instituições públicas, 03 (23,1%) em instituições particulares. 07 (53,8%) cursaram o Ensino Médio em instituições públicas, 06 (46,2%) em instituições particulares. Quanto ao local de trabalho em que atuavam 01 (53,8%) declararam trabalhar em escolas, como docentes de Matemática. Dos demais, 03 (23,1%) atuavam em setores diversos, alguns em órgãos públicos como bancos e comércio e 03 (23,1%) informaram estar sem trabalho.

Propusemos aos sujeitos do grupo 1 a resolução da questão discursiva de número 29 (Anexo I) da prova da área de Matemática do Exame Nacional de

Desempenho de Estudantes – ENADE (2005) e para os sujeitos do grupo 2 a resolução da questão discursiva de número 40 – item a) (Anexo II) da prova da área de Matemática do ENADE (2008). Optamos em replicar essas questões pelo fato de a prova aferir o rendimento dos acadêmicos dos cursos de graduação em relação aos conteúdos programáticos, suas habilidades e competências. Para mais esclarecimentos, acessar o sítio http: //www.inep.gov.br/superior/enade.

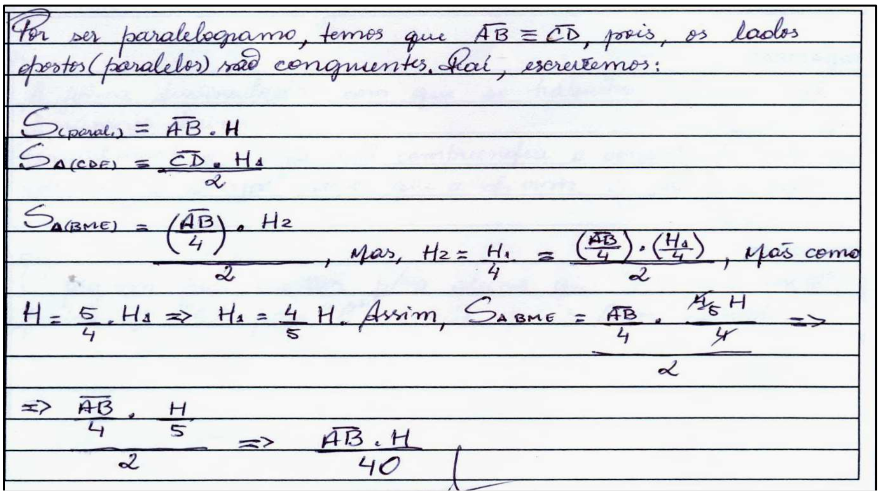
Os dois grupos de sujeitos responderam à questão individualmente, sem ajuda dos pesquisadores, com o tempo limitado de 40 minutos. As respostas foram analisadas como sugere Fávero & Trajano (1998) e Moro & Soares (2005).

4. Apresentação dos Resultados

4.1. Grupo 1

Dos 26 sujeitos do grupo 1 que participaram da pesquisa em 2005, 21 (80,8%) responderam à Questão 29, os demais (19,2%) entregaram o instrumento em branco. Dos 21 sujeitos que responderam à questão, apenas 02 (9,5%) apresentaram uma resposta condizente com o padrão esperado (Anexo II), 01 (4,8%) respondeu em parte e 18 (85,7%) apresentaram notações que indicam pouca noção conceitual.

De modo geral, as resultados mostram que 85,7% dos concluintes não responderam à questão. Suas notações apresentam esboços de resolução, tais como: informações numéricas retiradas do texto da questão, fórmulas para o cálculo de áreas, entre outras. Observamos dificuldades ligadas à leitura e à interpretação, à elaboração de um modelo matemático e quanto ao domínio da linguagem simbólica e das operações matemáticas presentes na resolução do modelo matemático. Até mesmo os estudantes que apresentaram uma resposta condizente com o padrão esperado, ainda revelaram algumas deficiências na demonstração. As notações apresentadas a seguir exemplificam tais fatos.


Por ser paralelogramo, temos que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, pois, os lados opostos (paralelos) são congruentes. Daí, escrevemos:

$S_{(paral.)} = \overline{AB} . H$

$S_{\Delta(CDE)} = \frac{\overline{CD} . H_1}{2}$

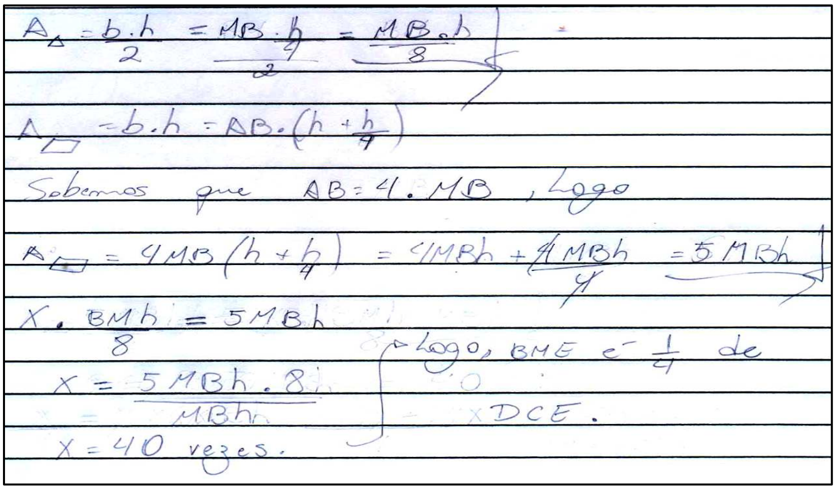
$S_{\Delta(BME)} = \frac{\left(\frac{\overline{AB}}{4}\right) . H_2}{2}$, Mas, $H_2 = \frac{H_1}{4} = \frac{\left(\frac{\overline{AB}}{4}\right) . \left(\frac{H_1}{4}\right)}{2}$, Mas como

$H = \frac{5}{4} . H_1 \Rightarrow H_1 = \frac{4}{5} H$. Assim, $S_{ABME} = \frac{\frac{\overline{AB}}{4} . \frac{\cancel{4}}{5} \frac{H}{\cancel{4}}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\frac{\overline{AB}}{4} . \frac{H}{5}}{2} \Rightarrow \frac{\overline{AB} . H}{40}$

Figura 1. Notação produzida por: homem, 26 anos, Fundamental e o Médio em instituição pública.
Fonte: Relatório de pesquisa

Observamos, na notação acima, a utilização de informações numéricas condizentes com o padrão esperado e a preocupação em justificar as etapas de resolução. Na demonstração, vemos que, apesar de o sujeito não fazer menção explícita ao fato dos triângulos *MBE* e *CDE* serem semelhantes, ele utiliza a informação de que a razão entre suas alturas é 1/4; não demonstra que a altura do triângulo *MBE* é igual a1/5 da altura do paralelogramo *ABCD* (conforme o padrão requeria) e encontra que a altura do triângulo *CDE* é igual a 4/5 da altura do paralelogramo *ABCD.*


$A_\triangle = \frac{b.h}{2} = \frac{MB.\frac{h}{4}}{2} = \frac{MB.h}{8}$

$A_{\square} = b.h = AB.(h + \frac{h}{4})$

Sabemos que $AB = 4.MB$, Logo

$A_{\square} = 4MB(h + \frac{h}{4}) = 4MBh + \frac{4MBh}{4} = 5MBh$

$X.\frac{BMh}{8} = 5MBh$

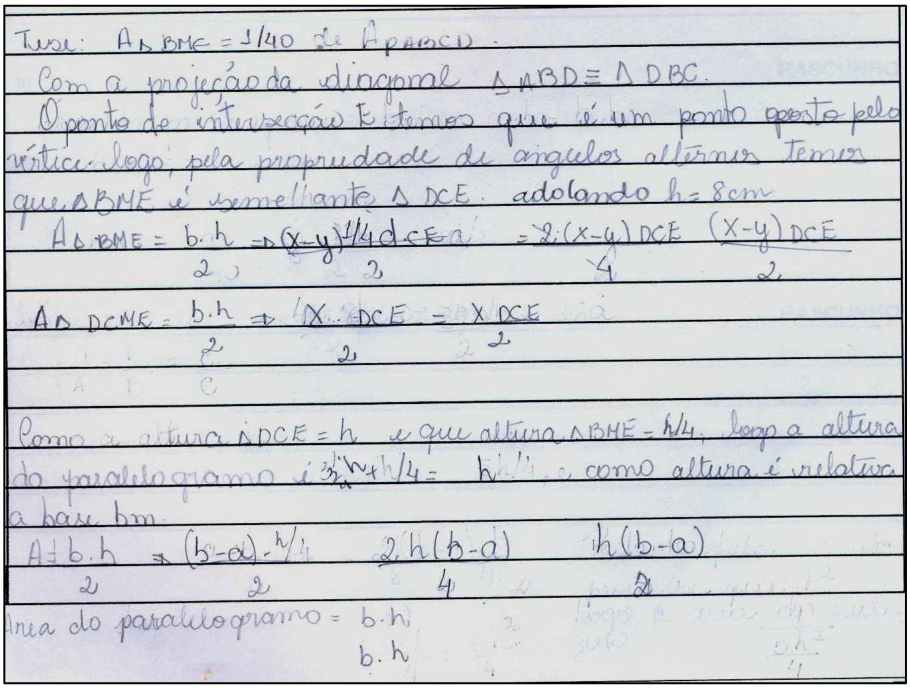
$X = \frac{5MBh.8}{MBh}$

$X = 40$ vezes.

Logo, BME é $\frac{1}{4}$ de DCE.

Figura 2. Notação produzida por: homem, 19 anos, cursou o Ensino Fundamental e o Médio em instituição particular. Fonte: relatório de pesquisa.

Observamos na notação acima que a estratégia escolhida e a resolução envolvem ideias apontadas pelo padrão de resposta, porém a argumentação não apresenta todas as etapas da demonstração sugerida. Vemos que as informações foram utilizadas sem justificativas ou menções das propriedades envolvidas.


Tese: $A_{\triangle BME} = 1/40$ de $A_{\square ABCD}$.

Com a projeção da diagonal $\triangle ABD \equiv \triangle DBC$.

O ponto de intersecção E temos que é um ponto oposto pelo vértice logo, pela propriedade de ângulos alternos temos que $\triangle BME$ é semelhante $\triangle DCE$. adotando $h = 8cm$

$A_{\triangle BME} = \frac{b.h}{2} \Rightarrow \frac{(x-y)1/4\,dce}{2} = \frac{2.(x-y)DCE}{4} \quad \frac{(X-y)DCE}{2}$

$A_{\triangle DCME} = \frac{b.h}{2} \Rightarrow \frac{X.DCE}{2} = \frac{X.DCE}{2}$

Como a altura $\triangle DCE = h$ e que altura $\triangle BME = h/4$, logo a altura do paralelogramo é $3/4h + h/4 = h$, e como altura é relativa a base bm.

$A = \frac{b.h}{2} \Rightarrow \frac{(b-a).h/4}{2} \quad \frac{2h(b-a)}{4} \quad \frac{h(b-a)}{2}$

Área do paralelogramo = b.h

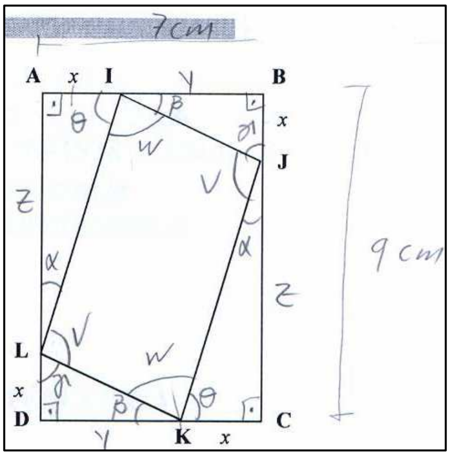
b.h

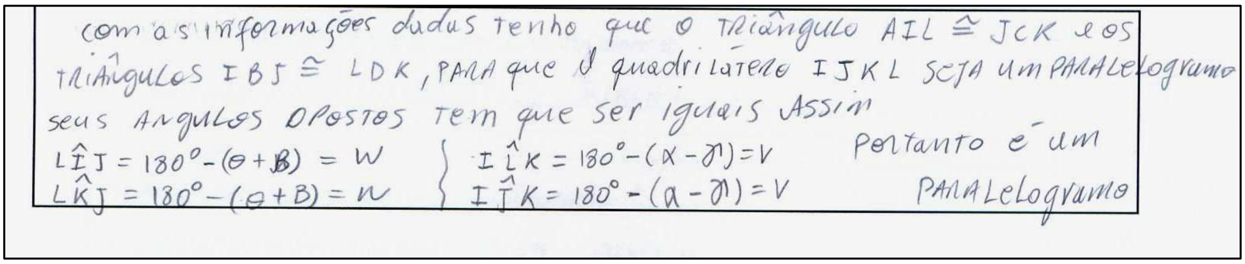
Figura 3. Notação produzida por: Mulher, 25 anos, cursou o Ensino Fundamental e o Médio em instituição pública. Fonte: relatório de pesquisa

A argumentação apresentada na notação acima possui ideias acordantes com o padrão esperado, porém mostra a dificuldade do sujeito em concluir a demonstração.

4.2. Grupo 2

Dos 13 concluintes de 2008 que participaram da pesquisa do grupo 2, 01 (7,7%) apresentou uma resposta condizente com o padrão esperado, não finalizando a argumentação, 09 (69,2%) responderam parte da questão e 03 (23,1%) apresentaram em suas notações estratégias que envolvem procedimentos ligados à questão. Em geral, o baixo índice de acerto evidencia a dificuldade dos sujeitos com os conceitos de congruência e semelhança, até mesmo com a notação considerada condizente com o padrão de resposta, como podemos observar nas notações a seguir.




com as informações dadas tenho que o triângulo AIL ≅ JCK e os triângulos IBJ ≅ LDK, para que o quadrilátero IJKL seja um paralelogramo seus ângulos opostos tem que ser iguais Assim

$L\hat{I}J = 180° - (\theta + \beta) = w$ | $I\hat{L}K = 180° - (\alpha - \gamma) = v$ | Portanto é um
$L\hat{K}J = 180° - (\theta + B) = w$ | $I\hat{J}K = 180° - (\alpha - \gamma) = v$ | paralelogramo

Figura 4. Notações produzidas por: homem, 27 anos, cursou o Ensino Fundamental e o Médio em instituição pública. Fonte: relatório de pesquisa.

Observamos que a argumentação apresentada envolve as ideias apresentadas no padrão esperado, porém o sujeito erra na notação matemática de congruências de triângulos, ao escrever que os triângulos IBJ e LDK são congruentes e que os triângulos AIL e JCK são congruentes. Além disso, não indica o caso de congruência.

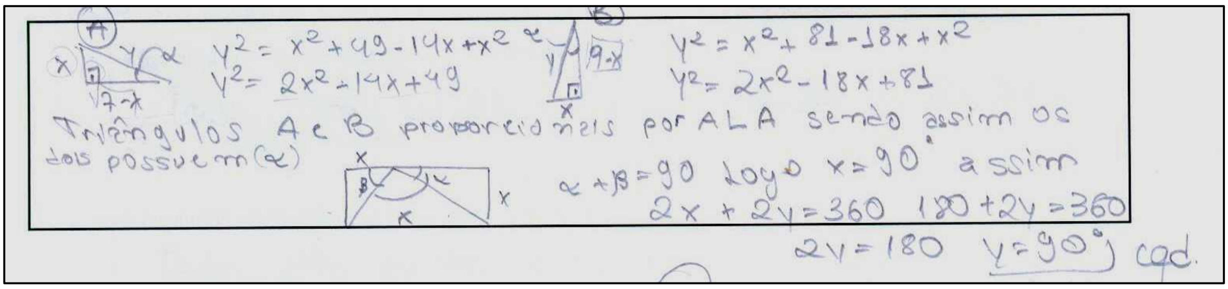

(A) $y^2 = x^2 + 49 - 14x + x^2$
$y^2 = 2x^2 - 14x + 49$
(B) $y^2 = x^2 + 81 - 18x + x^2$
$y^2 = 2x^2 - 18x + 81$
Triângulos A e B proporcionais por ALA sendo assim os dois possuem (α)
$\alpha + \beta = 90$ logo $x = 90°$ assim
$2x + 2y = 360$ $180 + 2y = 360$
$2y = 180$ $y = 90°$ cqd.

Figura 5. Notação produzida por: homem, 25 anos, cursou o Ensino Fundamental e o Médio em instituição pública. Fonte: relatório de pesquisa.

A notação acima apresenta estratégia distante daquela apontada pelo padrão esperado. Há uma menção ao caso de congruência de triângulos ALA, mas não é possível identificar a que objetos geométricos esta informação se refere. O sujeito usou a mesma notação para lados e ângulos, por exemplo, no retângulo vemos a escrita *x* para indicar segmento e ângulo. Além disso, usou o termo “cqd” (que indica “como queríamos demonstrar”) ao referir-se aos resultados *x* e *y* iguais a 90º, o que sinaliza dificuldades conceituais. Uma vez que é verdade que se os ângulos internos de um quadrilátero medem cada um 90º, então temos um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo possui apenas ângulos internos retos. Desta forma, a estratégia de resolução “para demonstrar que um quadrilátero é um paralelogramo, basta demonstrarmos que seus ângulos internos são retos” é questionável.

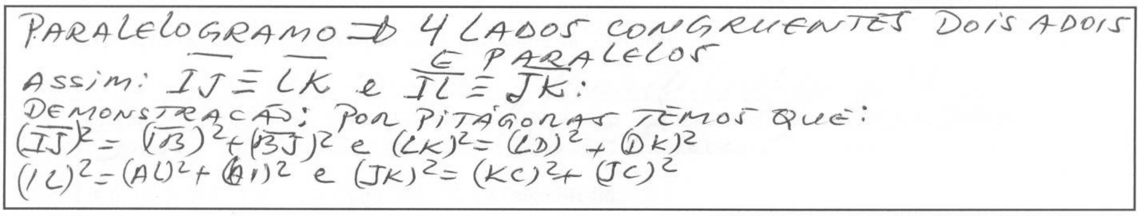

PARALELOGRAMO ⇒ 4 LADOS CONGRUENTES DOIS A DOIS E PARALELOS
ASSIM: $\overline{IJ} \equiv \overline{LK}$ e $\overline{IL} \equiv \overline{JK}$:
DEMONSTRAÇÃO: POR PITÁGORAS TEMOS QUE:
$(IJ)^2 = (IB)^2 + (BJ)^2$ e $(LK)^2 = (LD)^2 + (DK)^2$
$(IL)^2 = (AL)^2 + (AI)^2$ e $(JK)^2 = (KC)^2 + (JC)^2$

Figura 6. Notação produzida por: homem, 47 anos, cursou o Ensino Fundamental e o Médio em instituição pública. Fonte: relatório de pesquisa.

Na notação, observamos que o sujeito conhece a definição de paralelogramo e os cálculos associados ao Teorema de Pitágoras, contudo não conseguiu criar uma estratégia para realizar uma demonstração.

5. Análise dos resultados

Os resultados apresentados pelos dois grupos são similares em termos de escrita matemática e organização de estratégias e muito nos informam a respeito da formação de conceitos geométricos dos sujeitos que participaram do estudo. Em geral, podemos dizer que os dois grupos apresentaram dificuldades relacionadas à argumentação, à distinção entre definições e teoremas; ao reconhecimento de hipóteses e conclusão de uma propriedade, ao entendimento dos conceitos de desenho/figura geométrica, à decisão se utilizavam a linguagem natural ou matemática; à organização da prova e redação da demonstração.

Além disso, as notações produzidas indicam que os sujeitos não estão acostumados a justificar suas afirmações, tampouco a demonstrar teoremas. Tal dificuldade confirma que aprender a demonstrar consiste em se apropriar de um discurso diferente do praticado usualmente pelos acadêmicos e requer o domínio de um conjunto de conceitos – campo conceitual. Além disso, mostra que demonstrar envolve compreender a figura e todos os conceitos a ela relacionados, as definições e os teoremas; as hipóteses (dados do problema) e a conclusão (ou tese). Como também é necessário saber utilizar as representações e apropriar-se do raciocínio lógico-dedutivo.

Os resultados permitem-nos inferir que, durante a Educação Básica, os sujeitos não vivenciaram situações de ensino e aprendizagem em geometria que considerasse: 1/ as diferentes apreensões das figuras geométricas – perceptiva, discursiva, operatória e sequencial; 2/ a *demonstração* como parte integrante dos processos de aprendizagem e ensino dos conceitos geométricos; 3/ a importância de se trabalhar a representação (desenho/figura geométrica, linguagem natural, linguagem matemática). Assim como, no transcorrer do curso de Licenciatura a maioria não conseguiu adquirir essas competências.

Desta forma, entendemos que essa discussão é urgente nos cursos de formação de professores, pois a capacidade de elaborar argumentações é essencial para os processos em provas matemáticas e fazem parte do saber do professor, como já apontava Pavanello (1993) e Lorenzato (1995).

Por fim, os resultados mostram que, pelo menos no âmbito de abrangência do estudo em questão, a situação permanece inalterada, "o círculo vicioso" permanece. Com todas as dificuldades aqui relatadas, como será a prática pedagógica em geometria do licenciado (na ocasião da pesquisa, concluinte) em Matemática? Como ele selecionará e organizará conteúdos dos programas curriculares? Como criará as novas e criativas situações de aprendizagem? Como produzirá material de apoio? Como selecionará instrumentos de avaliação? Como interpretará as notações de seus estudantes?

6. Considerações Finais

Essa pequena amostra que embasou a análise do presente artigo revelou-nos resultados que apontam que os dois grupos analisados apresentaram dificuldades conceituais, não havendo diferenças significativas entre eles.

Tais resultados sugerem a manutenção das dificuldades de aprendizagem dos conceitos geométricos entre estudantes da Educação Básica, Ensino Superior e professores. Além disso, denunciam que o tempo destinado às disciplinas de geometria e ao próprio curso de licenciatura em Matemática, na atualidade, não contribui para a alteração desse quadro e ainda persiste a necessidade de se pensarem em novas metodologias de ensino que contemplem o aprendizado de um conceito de forma que os sujeitos realmente apropriem-se dele.

Por meio da análise das notações, pudemos observar a falta de articulações entre as representações que poderiam ser utilizadas nas resoluções, as quais evidenciam a necessidade de um trabalho que seja mais investigativo, no qual o sujeito seja colocado em contato com múltiplas representações: figuras, números, letras, tabelas, gráficos, língua materna, assim como desenvolvido em Baccarin (2008). É preciso proporcionar aos estudantes da Educação Básica e Superior situações em que eles interpretem e produzam objetos matemáticos em diferentes campos conceituais.

Finalmente, este estudo subsidiou a nossa ideia inicial na qual apontamos falhas no ensino da geometria que perpassam todos os níveis desde o Fundamental até o Universitário e, dessa forma, acabam, como aponta Lorenzato (1995), por perpetuar o que chama de círculo vicioso: se esta geração de licenciandos não estudou geometria também não saberá como ensiná-la.

O que se espera é que este estudo venha somar-se a outras pesquisas que apontem aos profissionais atuantes nessa área a necessidade de uma reflexão e análise crítica de sua prática pedagógica, contribuindo, assim, para uma real aprendizagem da geometria, que possa então vir a quebrar esse círculo vicioso.

Bibliografia

Andrade, J. A. A. & Nacarato, A. M. (2004). *Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs*. Educação Matemática em Revista, Recife, v. 11, n. 17, p. 61-70.

Baccarin, S. A. O. (2008). *Investigação matemática: uma análise da sua contribuição na construção de conceitos algébricos*. Dissertação de mestrado. Brasília: Universidade de Brasília.

Brasil, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília, DF.

Brasil. Ministério de Educação e do Desporto. Conselho Nacional de Educação. (2001). *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena*. Brasília, DF: MEC/CNE.

Fávero, M. H. & Trajano, A. A. (1998). A leitura do adolescente: mediação semiótica e compreensão textual. *Psicologia: Teoria e Pesquisa,* n. 1, p. 131-136.

Fillos, L. M. (2006). *O ensino da geometria: depoimentos de professores que fizeram história*. *In*: *EBRAPEM*, Belo Horizonte. Acesso em: 18 fev. 2009, <http://www.fae.ufmg.br:8080/ebrapem/completos/05-11.pdf>.

Fonseca, M.C.F.R. *et al*. (2001). *O ensino de geometria na escola fundamental*. Autêntica: Belo Horizonte.

Lorenzato, S. (1995) Por que não ensinar geometria? *Educação Matemática em Revista – SBEM*, n. 4, p. 3-13.

Moro, M.L.F. & Soares, M.T.C. (2005). *Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola*. Curitiba: Ed. da UFPR.

Muniz, C.A.; Autor X1 & Nascimento, A.M.P. do. (2009) Entre o olhar, o esquema e a intervenção psicopedagógica na produção matemática da criança. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 1, p. 79-110.

Nasser, L. & Tinoco, L.(2001). *Argumentações e provas no ensino de matemática*. Projeto Fundão, IM-UFRJ, 109p.

Oliveira, H.; Segurado, M. I. & Ponte, J. P. (1998). Tarefas de investigação em matemática: histórias da sala de aula. *Atas do VI Encontro de Investigação em Educação Matemática*, Portugal. p. 107-125. Acesso em: 08 fev. 2009, <http://ia.fc.ul.pt/textos/p189-206.PDF>.

Pais, L. C. (1999). *Transposição didática*. In: S. D. A, Machado (Ed.). *Educação matemática: uma introdução*. (pp. 13-42). São Paulo: EDUC.

Pais, L. C. (2001). *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica.

Passos, C. L. B. (2005). *Que Geometria acontece na sala de aula?* In: M. da G. N. Mizukami & A. M. M. R Reali. *Processos formativos da docência: conteúdos e práticas*. (p. 16-44). São Carlos: EDUFSCar.

Pavanello, M. R. (1993). *O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências.* Revista Zetetiké, ano 1, n. 1, p. 7-17.

Pavanello, M. R. (1989). *O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica*. Dissertação de Mestrado. Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

Pereira, M. R. O. (2001). *A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o seu abandono*. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica.

Perez, G. (1991). *Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicos da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares.* Tese de Doutorado. Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

Perez, G. (1995). A realidade sobre o ensino de geometria no 1º. e 2.º grau, no estado de São Paulo. *A Educação Matemática em Revista*. Blumenau, SBEM, ano III, n. 4.

Pina Neves, R. da S. (2002). (2002). *A formação de conceitos geométricos no contexto dos projetos de trabalho mediada pelo CABRI GÉOMÈTRE*. Dissertação de Mestrado. Brasília: Universidade de Brasília.

Pirola, N. A. (2003). *Solução de problemas geométricos: dificuldades perspectivas.* Dissertação de Mestrado. Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

Vergnaud, G. (1988). *Multiplicative structures*. *In*: H. Hiebert & M. Behr (eds.). *Research agenda in mathematics education.* Number Concepts and Operations in the Middle Grades. (p. 141-161). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Viana, O. A. (2000). *O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceito*. Dissertação de Mestrado. Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas.

Regina da Silva Pina Neves. Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG), Mestre em Educação e Doutora em Psicologia pela Universidade de Brasília. Atua no Ensino Superior e na pós-graduação em Cursos de Licenciatura em Matemática, Pedagogia e psicopedagogia. Desenvolve consultorias nas áreas de formação de professores e avaliação educacional em orgãos públicos e privados. Email: **reginapina@gmail.com**

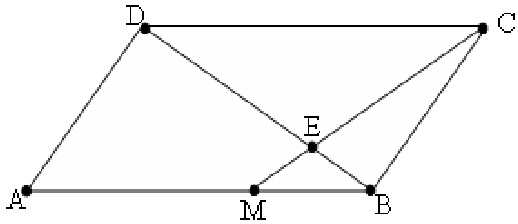
Sandra Aparecida Oliveira Baccarin. Licenciada em Matemática pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Itapetininga-SP, Especialista em Administração Escolar (Universidade Salgado Oliveira) e Mestre em Educação (Universidade de Brasília). Atuou como professora da Educação básica e superior e coordenou curso de Licenciatura em Matemática; trabalha em desenvolvimento projetos de tecnologia educacional e cursos *on line*. Email. **sandrabaccarin@gmail.com**

Jhone Caldeira Silva. Licenciado em Matemática (Universidade Federal de Viçosa), Mestre e Doutor em Matemática (Universidade de Brasília, com Doutorado Sandwich na Universidad Autónoma de Madrid). Já atuou como Professor Substituto na Universidade de Brasília e em Instituições do DF e de GO; é Professor Adjunto da Universidade Federal de Goiás. É autor de um livro e de alguns artigos direcionados à questão da Licenciatura. Email: **jhone@mat.ufg.br**

Anexo I

Questão discursiva de número 29. ENADE 2005

Em um paralelogramo ABCD, considere M o ponto da base AB tal que $\overline{MB} = \frac{1}{4}\overline{AB}$ e o ponto de interseção do segmento CM com a diagonal BD, conforme figura a seguir.



Prove, detalhadamente e de forma organizada, que a área do triângulo BME é igual a 1/40 da área do paralelogramo ABCD.

No desenvolvimento de sua demonstração, utilize os seguintes fatos, justificando-os:

< os triângulos BME e DCE são semelhantes;

< a altura do triângulo BME, relativa à base BM, é igual a 1/4da altura do triângulo DCE relativa à base DC.

<u>Padrão de resposta esperado</u>

O padrão de resposta esperado elaborado pela comissão assessora de avaliação da área de Matemática do ENADE (2005) indica que:

a) Pela figura, usando o fato de que duas paralelas cortadas por uma transversal determinam ângulos correspondentes iguais, concluir que o ângulo *EMB* é igual ao ângulo *DCE*. Valor atribuído ao item: 1,50 ponto, com conceitos 0 e 1.

b) Concluir que o ângulo *MEB* é igual ao ângulo *DEC*, usando o fato de que são opostos pelo vértice. Valor atribuído ao item: 1,00 ponto, com conceitos 0 e 1.

c) Concluir, a partir dos itens a) e b), que os triângulos *MBE* e *CDE* são semelhantes, justificando sua resposta. Valor atribuído ao item: 1,00 ponto, com conceitos de 0 a 2.

d) Usando o fato de que *MB* 1/4= *AB*, concluir que a razão de semelhança entre os triângulos citados no item c) é igual a 1/4 e que a altura *h* do triângulo *MBE* é igual a 1/4 da altura do triângulo *CDE*. Valor atribuído ao item: 3,00 pontos, com conceitos de 0 a 2.

e) Demonstrar que a altura *h* do triângulo *MBE* é igual a 1/5 da altura *H* do paralelogramo *ABCD*. Valor atribuído ao item: 1,50 ponto, com conceitos 0 e 1.

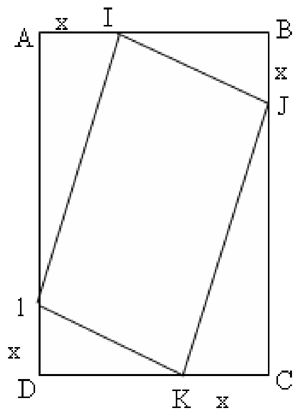
f) Utilizando os itens anteriores concluir que a área do triângulo *BEM* é igual a

Área (BEM) = MB × (h/2) = (1/4 AB) ×(H/5) ×1/2 = (1/40) AB× H = (1/40) Área (ABCD)

Anexo II

Questão 40. ENADE 2008

No retângulo ABCD ao lado, o lado AB mede 7 cm e o lado AD mede 9 cm. Os pontos I, J, K e L foram marcados sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, de modo que os segmentos AI, BJ, CK e DL são congruentes.



Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados.

Demonstre que o quadrilátero IJKL é um paralelogramo.

<u>Padrão de resposta esperado</u>

O padrão de resposta esperado elaborado pela comissão assessora de avaliação da área de Matemática do ENADE (2008) indica que:

a) Para demonstrar que IJKL é um paralelogramo o estudante pode mostrar que os triângulos IBJ e KDL são congruentes (ALA); da mesma forma o triângulo IAL é congruente ao triângulo KCJ (ALA). Em seguida, usa-se a propriedade dos paralelogramos: um quadrilátero com lados postos congruentes é um paralelogramo. Outra forma é mostrar pela definição identificando os ângulos.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 187-189

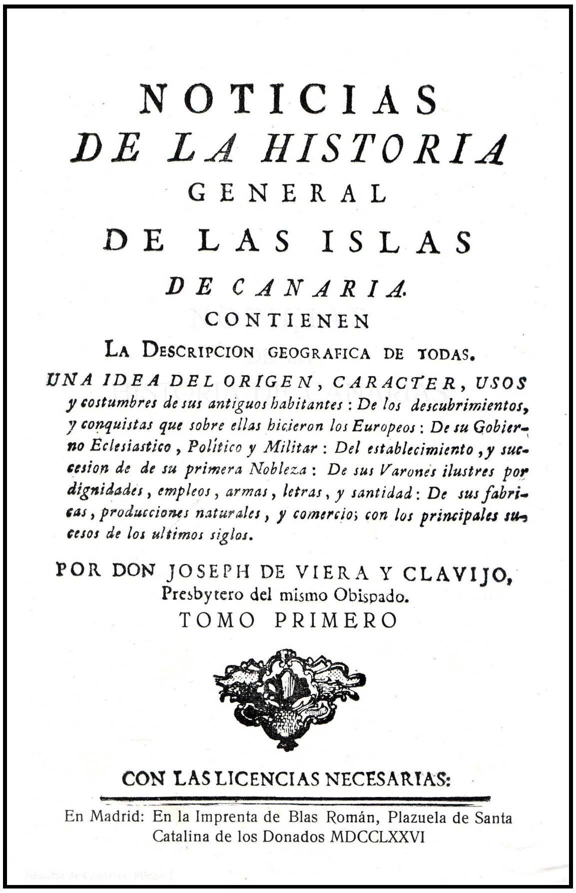
Libros

Noticias del cielo o Astronomía para niños (José de Viera y Clavijo)

Una actualización 200 años después

Autores: Luis Balbuena y Oswaldo González

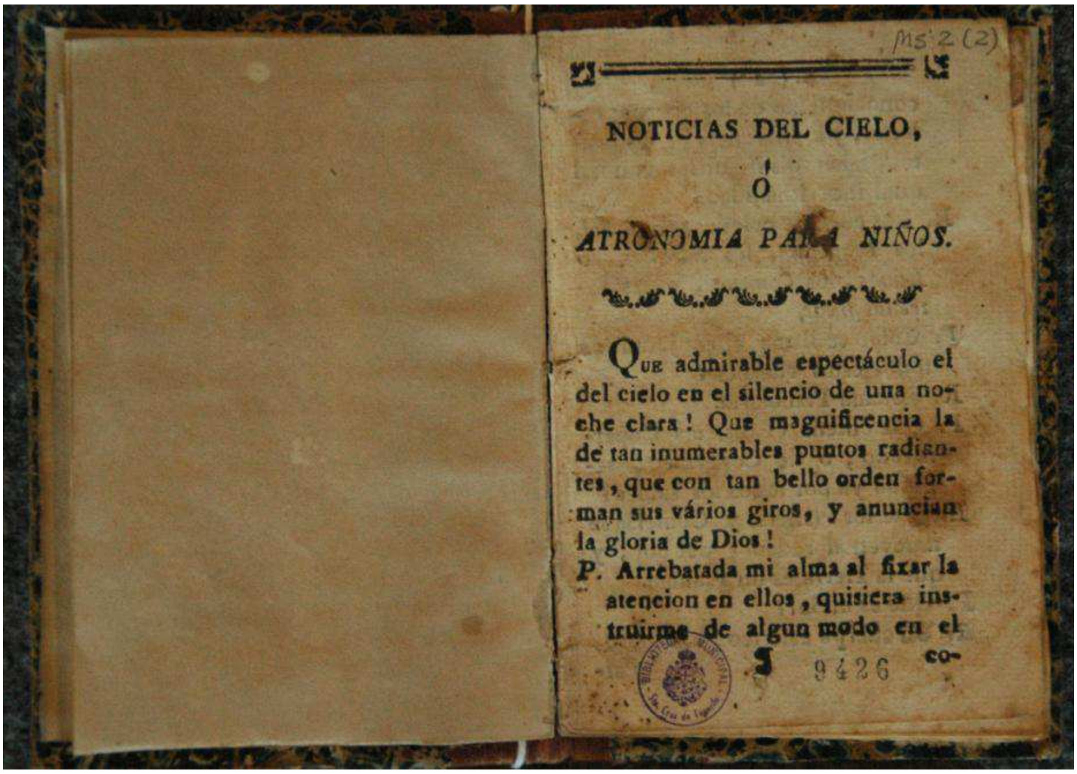
José de Viera y Clavijo (Realejos-Tenerife,1731 – Las Palmas de Gran Canaria,1813) es un clérigo que vivió intensamente la Ilustración. Su vida discurre en la isla de Tenerife hasta el año 1770 en que se traslada a Madrid. Allí entra al servicio como ayo del hijo del Marqués de Santa Cruz y consigue publicar la primera parte de su obra cumbre: *Noticias de la historia general de las Islas de Canaria*. Hace dos interesantes viajes por Europa (el primero a París y el segundo a muchas ciudades entre las que están París, Viena y Roma).



NOTICIAS
DE LA HISTORIA
GENERAL
DE LAS ISLAS
DE CANARIA.
CONTIENEN
LA DESCRIPCION GEOGRAFICA DE TODAS.
UNA IDEA DEL ORIGEN, CARACTER, USOS y costumbres de sus antiguos habitantes: De los descubrimientos, y conquistas que sobre ellas hicieron los Europeos: De su Gobierno Eclesiastico, Político y Militar: Del establecimiento, y sucesion de de su primera Nobleza: De sus Varones ilustres por dignidades, empleos, armas, letras, y santidad: De sus fabricas, producciones naturales, y comercio; con los principales sucesos de los ultimos siglos.
POR DON JOSEPH DE VIERA Y CLAVIJO,
Presbytero del mismo Obispado.
TOMO PRIMERO
CON LAS LICENCIAS NECESARIAS:
En Madrid: En la Imprenta de Blas Román, Plazuela de Santa Catalina de los Donados MDCCLXXVI

Historia de Canarias, 1776

En 1782 es nombrado arcediano de Fuerteventura por parte del Cabildo Catedralicio de la Diócesis de Canarias instalándose definitivamente en Las Palmas de Gran Canaria dos años después, desarrollando una intensa vida cultural en esta ciudad. El año 1786 funda un colegio y dedica parte de su tiempo a la docencia. En 1811 publica *Noticias del cielo* que lleva como subtítulo *Astronomía para niños*. Es un pequeño cuadernito de 14 cm de largo. El contenido está escrito en el estilo de preguntas y respuestas de forma que formula sus noticias con 79 preguntas y sus correspondientes respuestas. En ellas da información sobre aspectos de la Astronomía en un lenguaje sencillo y divulgativo. En un Taller de Astronomía que impartía en el Instituto de La Laguna que lleva precisamente el nombre de este políglota, utilicé este texto para que el alumnado se percatara de los extraordinarios avances que ha tenido esta ciencia en los doscientos años transcurridos.


Ms 2 (2)

NOTICIAS DEL CIELO,
Ó
ATRONOMIA PARA NIÑOS.

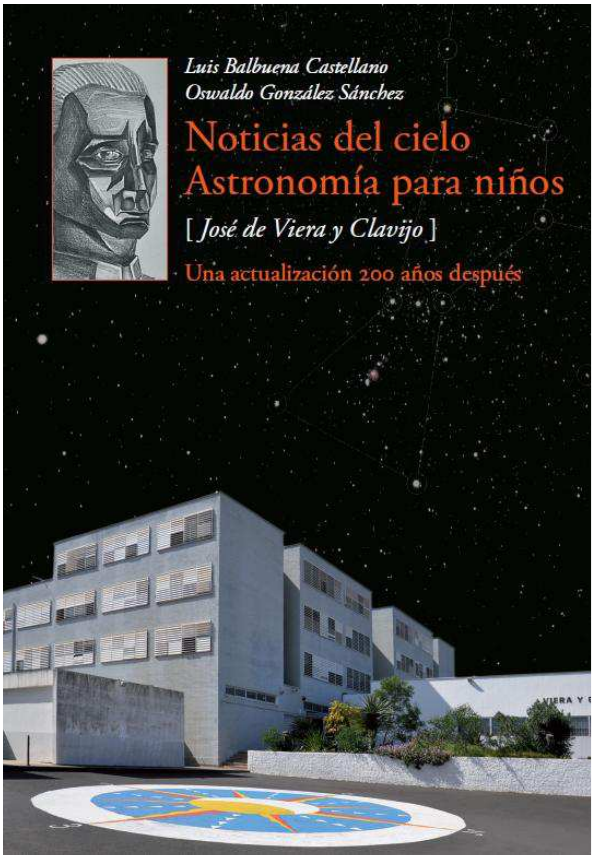
Que admirable espectáculo el del cielo en el silencio de una noche clara! Que magnificencia la de tan inumerables puntos radiantes, que con tan bello orden forman sus vários giros, y anuncian la gloria de Dios!
P. Arrebatada mi alma al fixar la atencion en ellos, quisiera instruirme de algun modo en el
co-

Noticias del cielo, original de la Biblioteca Municipal de Santa Cruz de Tenerife

Con motivo de ser 2013 el segundo centenario de su muerte, Oswaldo y yo hemos querido aportar nuestra contribución al conocimiento de la vida y obra de este personaje preparando una actualización a las preguntas que formuló Viera. Algunas preguntas tienen hoy la misma respuesta que entonces; otras han sufrido modificaciones radicales como, por ejemplo, la que pregunta *¿El Sol se mueve?* Que contesta así: *Aunque nos parezca a nosotros que se mueve, demuestran los Astrónomos, que está casi inmóvil como centro del Sistema Planetario*. En la actualización que aportamos, no solo decimos que se mueve sino que lo hace *a una velocidad de 220 km/s en compañía del resto del*

Sistema Solar. El hecho de trabajar Oswaldo en el Instituto Astrofísico de Canarias, nos ha permitido aportar datos cerrados el día antes de la entrega del original a la imprenta…

Decir, finalmente, que los estudiosos de la vida y la obra de nuestro autor dicen de él que fue, además de clérigo y arcediano, políglota, traductor, viajero, secretario de actas-periodista, profesor, ensayista, poeta ,historiador, académico de la historia, tertuliano, naturalista y, teniendo en cuenta toda la obra que nos legó, yo añado que debió ser un lector convulsivo… y un escritor convulsivo pues en aquella época no existía el “copiar y pegar”…



Una actualización doscientos años después, 2013

Pero en estos doscientos años han sucedido también algunos acontecimientos astronómicos que destacamos con unas nuevas preguntas que son las que, a nuestro juicio, consideramos más importantes. Hemos mantenido el estilo y el carácter divulgativo por lo que está adaptada no solo para niños, sino para cualquier persona que desee tener algunas noticias de ese cielo que nos rodea…

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 191-192

Educación en la Red: Mathematics of Planet Earth (MPE) http://mpe2013.org/

2013. Año de las Matemáticas en el Planeta Tierra

Más de 100 sociedades científicas, universidades, institutos de investigación y organizaciones de todo el mundo se han unido para dedicar el año 2013 como un año especial para las matemáticas del Planeta Tierra.

Los desafíos que enfrenta nuestro planeta y nuestra civilización son multidisciplinarios y multifacéticos, y las ciencias matemáticas juegan un papel central en el esfuerzo científico para comprender y hacer frente a estos desafíos.

Podemos leer en la página que la misión del Proyecto MPE es:

- Fomentar la investigación para identificar y resolver cuestiones fundamentales sobre el planeta tierra.
- Animar a los educadores de todos los niveles para comunicar los temas relacionados con el planeta tierra.
- Informar a la opinión pública sobre el papel esencial de las ciencias matemáticas para afrontar los desafíos de nuestro planeta.

El proyecto cuenta con el patrocinio de la UNESCO y es aprobado por el Consejo Internacional para la Ciencia (ICSU)**,** la Unión Matemática Internacional (IMU) y el Consejo Internacional de la Industrial and Applied Mathematics (ICIAM)**.** Los socios, los institutos sobre todo científica, asociaciones culturales, organizaciones internacionales, asociaciones de profesores se han comprometido a organizar actividades científicas y de divulgación sobre el tema, se llevarán programas a largo plazo, talleres y cursos de verano a lo largo de 2013.

MPE2013 nace de la voluntad de la comunidad matemática mundial para aprender más acerca de los desafíos que enfrenta nuestro planeta y los problemas matemáticos subyacentes, y para aumentar el esfuerzo de investigación sobre estos temas. Los matemáticos tienen una experiencia en el modelado y resolución de problemas y MPE2013 crea oportunidades excepcionales para relaciones a largo plazo, tanto dentro de las ciencias matemáticas como en otras disciplinas científicas afines. Se permitirá la formación de una nueva generación de investigadores que trabajan en los problemas científicos relacionados con el cambio climático y la sostenibilidad.

Se trabaja también en las escuelas el papel de las ciencias matemáticas para ayudar a abordar algunos de los problemas más apremiantes del mundo. Permitirá a motivar a los niños en las escuelas, proporcionando respuestas estimulantes a preguntas como "¿Qué son las matemáticas útiles para?"con el fin de crear conciencia.

Los cuatro temas de MPE2013 son:

- Un planeta para descubrir: océanos, la meteorología y el clima, los procesos del manto, los recursos naturales, los sistemas solares.
- Un planeta para sostener la vida: la ecología, la biodiversidad, la evolución.
- Un planeta organizado por los seres humanos: sistemas políticos, económicos, sociales y financieros, la organización de las redes de transporte y comunicaciones, la gestión de los recursos, la energía.
- un planeta en peligro: el cambio climático, el desarrollo sostenible, las epidemias, las especies invasoras, los desastres naturales

En esta página hay mucha información, se puede encontrar talleres, cursos, programas, escuelas de verano, coloquios, seminarios, conferencias públicas, exposiciones, concursos, asociaciones de maestros, institutos, libros, revistas científicas, recursos educativos, artículos y mucho más, todo relacionado con la matemática en nuestro planeta. Por eso los invitamos a que visiten la página y nos despedimos con la frase de Galileo:

"El Universo es un libro escrito en el lenguaje de las matemáticas..."

Equipo Editor.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 193-205

Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz
Ayudas al Estudio en Canarias: nueva convocatoria

En estos momentos estamos preparando la nueva convocatoria para el curso 2013- 2014. Esta iniciativa se ha convertido en un asunto principal para la Fundación: ayudar, en la medida de sus posibilidades, a los estudiantes de las Islas Canarias, cuya continuidad en los estudios pueda peligrar debido a la incidencia que está teniendo en muchas familias la crisis económica y los índices de paro y, además, la disminución de los recursos públicos dedicados a la enseñanza.

El programa de ayudas se inició en el curso 2011-12. En el curso 2012-13, que está a punto de terminar, hubo un incremento tanto en la cantidad asignada (que se multiplicó por tres) como en el número de beneficiarios (que se multiplicó por seis). Las ayudas fueron 72 repartidas en 5 de las 7 islas y con un presupuesto de 19.400 €. Para la asignación de las ayudas se utilizaron criterios de equidad y equilibrio teniendo en cuenta la distribución de la población y los niveles educativos para las que fueron solicitadas. Hubo un total de 397 solicitudes.

En nuestra sede se recibieron numerosos testimonios de alumnos/as y de sus familias que muestran el agradecimiento al esfuerzo de la Fundación. Entre ellos queremos dejar constancia a través de dos cartas cuyos elementos identificativos se ocultan por razones obvias:

* ***Querida Fundación Carlos Salvador y Beatriz:*** *Un año más les escribo para agradecerles el trabajo que han dedicado a sus labores por aportar un poco de felicidad a familias y como no, por volver a acordarse de canarios como yo en épocas tan difíciles. Creo que debo decir que el importe no sólo fue empleado en mí sino también en ayudar a mis hermanas.; en casa somos tres hermanas de 11, 13 y 17 años.*

Así que como me habían prestado algunos libros, compre el material que me faltaba y con lo que sobró, terminamos de comprar el de mis hermanas. Estamos muy contentas porque nuestras notas han sido las esperadas.

Espero que los proyectos que tengan para 2013 marchen por una buena senda. De más está decirle a la Fundación que pueden contar conmigo para cualquier proyecto o acto benéfico que quieran hacer. Hay muchas familias humildes castigadas injustamente de alguna manera por el tipo de sociedad que nos rodea.

**** Querida Fundación Carlos Salvador y Beatriz:** Les comunico que he recibido su carta y su generosa ayuda económica. Me gustaría darles mis más sinceros agradecimientos a todos los miembros que participan en su fundación y facilitan a tantos estudiantes como yo continuar con sus estudios.*

Su ayuda ha supuesto un gran alivio para mí y mi familia en esta difícil situación económica, por lo que también les doy las gracias en su nombre. He podido hacer frente a los gastos iniciales del curso y comenzar a pensar ya en los de mis estudios universitarios para el año que viene. Es una suerte que en tiempos como los que vivimos siga habiendo personas solidarias como las que integran esa Fundación. De nuevo les doy las gracias por confiar en mí; me siento muy afortunada y orgullosa de su ayuda.

Ayuda a la escuela argentina

El pasado mes de abril, la Fundación efectuó en Argentina su entrega de materiales didácticos que hace el número 66. En esta ocasión lo ha hecho al contar con la generosa colaboración de la profesora Norma Susana Cotic, codirectora de la revista UNIÓN. Como en todas las ocasiones, con estas entregas se persigue el objetivo de apoyar la educación en zonas carenciadas con el fin de luchar por una enseñanza de calidad para todos. Que el alumnado pueda contar con los medios necesarios para asistir a la Escuela para que esta carencia no se convierta en una limitación. La donación ha sido efectuada en la Institución Educativa Escuela primaria N 35 “Salvador Mazza”, en el Distrito Pilar, Provincia de Buenos Aires. Es un centro que cuenta con 586 alumnos. La profesora Mirta Carrizo, directora de la institución, envió una carta de agradecimiento a la Fundación.

La profesora Norma Cotic hace entrega del material mientras el alumnado escucha atentamente sus explicaciones.

Perú Incacocha: inauguración de una escuela y otras instalaciones

Por fin el ansiado proyecto de Perú pudo ser inaugurado. La fecha del 3 de mayo de 2013 se convierte así en un hito importante para la historia de nuestra Fundación. Después de ciertas vicisitudes que tuvieron que ver, especialmente, con asuntos personales de nuestra querida Flor de María y también, con el clima y las duras condiciones orográficas del lugar, por fin se procedió a la inauguración y entrega de las instalaciones.

Las nuevas instalaciones

Niño cortando la simbólica cinta

Por medio de *Asinky Perú* (*Sonríe Perú*), institución sin fines de lucro, receptora de donaciones para la mejora de la calidad de vida de personas en extrema pobreza, y con cuya presidenta, Flor de María Basauri Rojas, nos hemos entrevistado personalmente, se llegó al momento final de un ilusionado proyecto en el lugar de Incacocha, Centro Educativo Nº 32682, Distrito de Churabamba, Departamento de Huánuco, a 16 horas de Lima, la capital de Perú. Se trata de la construcción de un Pabellón Escolar con un aula para 30 alumnos de la sección de inicial, un comedor nuevo, escaleras, tres baños nuevos pues hasta ahora eran "unos pequeños cubículos de un metro sin intimidad" y la remodelación de la cocina pues la actual era "tétrica, negra e insalubre". El presupuesto de 7771,85 € y fue aportado por la Fundación íntegramente.

Flor de María Basauri en un emocionado y detallista informe enviado al presidente de la Fundación decía, entre otras cosas, lo siguiente:

Esta vez la llegada a la comunidad ha sido muy grata. En los niños y niñas se percibía la alegría de siempre pero iban vestiditos con el "uniforme único escolar" entregados por el Gobierno, ¡por fin!, algo por nuestros niños y para cubrirles un poquito de las inclemencias de su hábitat. Ellos esperaban ansiosos el gran momento de la inauguración. Los padres de familia también junto a sus hijos. Pudimos ambientar y adornar el colegio pues era un día de fiesta para todos los que nos encontramos en ese momento. Estábamos los más importantes, los protagonistas de este rato de unión, de confraternidad, de ganas de surgir y de importancia extrema: miembros de la comunidad, sus autoridades, maestros del colegio, los niños principales actores y ésta humilde mortal junto a dos mujeres de las que he recibido su ayuda en muchos momentos representando a la hacedora del cambio fundamental en la vida de muchos niños, de las madres de familia quienes acompañan cada día a sus hijos en el colegio dándoles su alimentación diaria, la FUNDACION CANARIA CARLOS SALVADOR y BEATRIZ y a ASINKY PERU procuradora de esta obra.

Hago un paréntesis para contar que al iniciar el viaje hacia Incacocha he podido comprobar las desgracias ocasionadas por la naturaleza, muchas de las *cuales no nos dejaron avanzar en varias oportunidades para llegar con los materiales hasta el lugar, casas destruidas, carreteras con pases “provisionales”, ríos desbordados que ya llevan muchos meses con ese título, cerros deslizados…*

Se inicia el acto de inauguración

Comedor

La emoción del acto de inauguración

Iniciamos el acto de inauguración. Fue el Director del colegio quien condujo la ceremonia, se cantó el Himno Nacional como corresponde al primer número, luego el Director se dirigió a la concurrencia con palabras alusivas al momento. El mismo leyó el mensaje enviado por el Presidente de la FUNDACION CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ, Salvador Pérez, muy sentido por quienes lo escuchamos. Después de ello emití unas palabras enmarcadas con la emoción del momento que básicamente han sido de agradecimiento a la FUNDACION CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ, de pedido de cuidado y mantenimiento en óptimas condiciones del pabellón entregado, a las autoridades de la comunidad, maestros, padres de familia y niños y niñas en especial. Escuchamos también las palabras del Presidente de la Comunidad, del Fiscal, del Presidente de la Asociación de Padres de Familia del Colegio, de la Profesora de Educación Inicial: cada palabra ha sido de agradecimiento y promesas de cuidado y mantenimiento de la construcción. Los niños también nos han regalado canciones en homenaje y agradecimiento a los miembros de la Fundación en español como en su idioma nativo, el quechua. Procedimos simbólicamente, como es la costumbre nuestra cortar una cinta peruana para declarar inaugurada cada una de las estructuras. La del aula de Educación Inicial fue inaugurada por un niño de esa sección y la profesora. La cocina por dos madres de familia y el comedor por el Presidente de la comunidad y así hemos querido dar ese “privilegio” a las personas de la misma comunidad y especialmente a los niños y niñas. Han sido momentos muy bonitos, emotivos, de nudos en la garganta y algunos divertidos, saltando todo “protocolo” los niños eran los que celebraban cada acto, los que corrían de un lado al otro siendo los primeros en llegar a cada puerta, abrirla y entrar a cada habitación. Terminando con la ceremonia he podido entregarles también ropa de abrigo y golosinas, pues para ellos se trataba de una fiesta y ella conlleva regalos, globos y golosinas.

Flor de María Basauri dirige unas palabras

Del otro pasado al nuevo futuro: contra viento y marea

Totalmente satisfecha con todo lo vivido este día, alegre con la alegría de los niños, feliz con la felicidad de los padres, gratamente sorprendida por que ya los niños tienen un uniforme para poder asistir a su colegio en mejores condiciones, porque ya pueden estudiar mejor, porque ya no tendrán que estudiar en un aula prestada y sin las condiciones básicas, por que las madres de familia ya no tendrán que ir al río para llevar hasta la cocina el agua para preparar los alimentos, porque ya no sufrirán o lo harán menos con el humo de la leña, porque ya tienen una cocina con luz, con un caño y un lavadero para que el menaje quede limpio sin ir hasta el río, porque los niños y en especial las niñas podrán acceder a servicios higiénicos con mayor privacidad y sin temor, porque para acceder al patio o bajar al comedor ya no irán dando tumbos o con el peligro de que alguna piedra superpuesta caiga, ahora ya tienen un aula, tienen una cocina en mejores condiciones, tienen un comedor más amplio y cómodo, tienen unas escaleras y baños decentes.

Es redundar pero las gracias a la FUNDACION CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ siempre las seguiré ofreciendo. Han hecho mucho con mis niños, nuestros niños lo que no han podido o querido hacer quienes tienen ese deber, es difícil, lo sé, más aun para nosotros que no contamos con herramientas técnicas, movilidad, obreros, maquinarias de las que podamos disponer como institución, pero LO HEMOS LOGRADO, contra viento y marea literalmente, pero la pasión, cariño, sensibilidad, compromiso, la guía que tenemos desde las estrellas, la “solidaridad para crecer” hacen que “con poco se puede hacer mucho”.

Convocatoria de ayudas al profesorado para asistir al VII CIBEM

VII CIBEM VII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz por intermedio del Comité Editor de la Revista Digital UNIÓN de la Federación Iberoamericana de Educación Matemática, convocó un conjunto de ayudas para sufragar la inscripción a la VII CIBEM que se desarrollará en Montevideo-Uruguay entre los días 16 al 20 de setiembre de 2013. En el reglamento que recogía las bases, se consideraba que tal evento es una oportunidad excelente para que los docentes puedan asistir a un encuentro que reúne a varios centenares de profesionales así como a personalidades internacionales especialistas en Educación Matemática.

Para el estudio de las solicitudes y la asignación de las ayudas se formó un Comité con poder decisorio y normativo conformado por las Directoras de la Revista UNION, Norma Cotic y Teresa Braicovich , el Vicepresidente de la Fundación , Luis Balbuena y el Secretario General de la FISEM, Agustín Carrillo. Tras el cierre del plazo para formalizar la solicitud, el Comité elevó su propuesta al Presidente de la Fundación, Salvador Pérez, quien dirigió un escrito a los designados que fueron:

Francisco Haro Laguardia.
Sociedad Thales de Andalucía-España

Mariana Gabriela Torres.
Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)

Marina García Rozoo
Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT)

Eimard Gomes Antunes do Nascimento
Instituto GeoGebra Fortaleza – IGGF.

En la carta remitida a cada uno de ellos, el Presidente, además de desear que el Congreso colme sus expectativas, les solicita un informe de la actividad que recoja sus impresiones personales.

Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz

Ajudas ao Estudo em Canárias: nova convocação

Nestes momentos estamos a preparar a nova convocação para o curso 2013- 2014. Esta iniciativa converteu-se num assunto principal para a Fundação: ajudar, na medida de suas possibilidades, aos estudantes das Ilhas Canárias, cuja continuidade nos estudos possa peligrar devido à incidência que está a ter em muitas famílias a crise económica e os índices de desemprego e, ademais, a diminuição dos recursos públicos dedicados ao ensino.

O programa de ajudas iniciou-se no curso 2011-12. No curso 2012-13, que está a ponto de terminar, teve um incremento tanto na quantidade alocada (que se multiplicou por três) como no número de beneficiários (que se multiplicou por seis). As ajudas foram 72 repartidas em 5 das 7 ilhas e com um orçamento de 19.400 €. Para a atribuição das ajudas utilizaram-se critérios de equidade e equilíbrio tendo em conta a distribuição da população e os níveis educativos para as que foram solicitadas. Teve um total de 397 solicitações.

Em nossa sede receberam-se numerosos depoimentos de alunos/as e de suas famílias que mostram o agradecimento ao esforço da Fundação. Entre eles queremos deixar constancia através de duas cartas cujos elementos identificativos se ocultam por razões óbvias:

* ***Querida Fundação Carlos Salvador e Beatriz:*** *Um ano mais escrevo-lhes para agradecer-lhes o trabalho que têm dedicado a seus labores por contribuir um pouco de felicidade a famílias e como não, por voltar a se lembrar de canarios como eu em épocas tão difíceis. Acho que devo dizer que o custo não só foi empregue em mim senão também em ajudar a minhas irmãs.; em casa somos três irmãs de 11, 13 e 17 anos.*

De modo que como me tinham prestado alguns livros, compre o material que me faltava e com o que sobrou, terminamos de comprar o de minhas irmãs. Estamos muito contentes porque nossas notas têm sido as esperadas.

Espero que os projectos que tenham para 2013 marchem por uma boa senda. A mais está dizer à Fundação que podem contar comigo para qualquer projecto ou acto benéfico que queiram fazer. Há muitas famílias humildes castigadas injustamente de alguma maneira pelo tipo de sociedade que nos rodeia.

**** Querida Fundação Carlos Salvador e Beatriz:** Comunico-lhes que tenho recebido sua carta e sua generosa ajuda económica. Gostaria de dar-lhes meus mais sinceros agradecimentos a todos os membros que participam em sua fundação e facilitam a tantos estudantes como eu continuar com seus estudos.*

Sua ajuda tem suposto um grande alívio para mim e minha família nesta difícil situação económica, pelo que também lhes agradeço em seu nome. Tenho podido fazer frente às despesas iniciais do curso e começar a pensar já nos de meus estudos universitários para o ano que vem. É uma sorte que em tempos como os que vivemos segua tendo pessoas solidárias como as que integram essa Fundação. De novo agradeço-lhes por confiar em mim; sento-me muito afortunada e orgulhosa de sua ajuda.

Ajuda à escola argentina

No passado mês de abril, a Fundação efectuou em Argentina sua entrega de materiais didácticos que faz o número 66. Nesta ocasião fazer ao contar com a generosa colaboração da professora Norma Susana Cotic, codirectora de revista-a UNION. Como em todas as ocasiões, com estas entregas se persegue o objectivo de apoiar a educação em zonas carenciadas com o fim de lutar por um ensino de qualidade para todos. Que o alumnado possa contar com os meios necessários para assistir à Escola para que esta carência não se converta numa limitação. A doação tem sido efectuada na Instituição Educativa Escola primária N 35 “Salvador Mazza”, no Distrito Pilar, Província de Buenos Aires. É um centro que conta com 586 alunos. A professora Mirta Carrizo, directora da instituição, enviou uma carta de agradecimento à Fundação.

A professora Norma Cotic faz entrega do material enquanto o alumnado escuta atenciosamente suas explicações.

Perú Incacocha: inauguração de uma escola e outras instalações

Por fim o ansiado projecto de Peru pôde ser inaugurado. A data do 3 de maio de 2013 converte-se assim numa meta importante para a história de nossa Fundação. Após certas vicisitudes que tiveram que ver, especialmente, com assuntos pessoais de nossa querida Flor de María e também, com o clima e as duras condições orográficas do lugar, por fim procedeu-se à inauguração e entrega das instalações.

As novas instalações

Menino cortando a simbólica fita

Por médio de Asinky Peru (Sorri Peru), instituição sem fins de lucro, receptora de doações para a melhora da qualidade de vida de pessoas em extrema pobreza, e com cuja presidenta, Flor de María Basauri Rojas, entrevistámos-nos pessoalmente, chegou-se ao momento final de um ilusionado projecto no lugar de Incacocha, Centro Educativo Nº 32682, Distrito de Churabamba, Departamento de Huánuco, a 16 horas de Lima, a capital de Perú. É a construção de um salão da escola com uma sala de aula para 30 alunos da seção inicial, uma sala de jantar novamente, escadas, três casas de banho novas, porque até agora foram "um pouco cubículos de metro sem intimidade" e remodelação da cozinha porque a corrente era "sombrio, escuro e insalubre". O orçamento de € 7,771.85 e foi totalmente fornecido pela Fundação. **Flor de María Basauri** em um relatório detalhado emocional e enviado para o presidente da Fundação disse, entre outras coisas, o seguinte:

Desta vez, a chegada à comunidade tem sido muito agradável. Em crianças, a alegria percebido, mas estavam sempre vestidos com o "uniforme escolar só" entregue pelo Governo, finalmente!, Algo para os nossos filhos e para cobri-los um pouco da dureza do seu habitat. Eles aguardavam o grande momento da inauguração. Os pais também com seus filhos. Fomos capazes de se adaptar e decorar a escola porque era um feriado para tudo o que somos naquele momento. Fomos o mais importante, os protagonistas deste período de união, de fraternidade, de desejo e de extrema importância emergem: os membros da comunidade, suas autoridades, professores, crianças protagonistas e este humilde mortal com duas mulheres recebi a sua ajuda, muitas vezes representando a fabricante de mudança fundamental na vida de muitas crianças, das mães que acompanham os filhos todos os dias na escola, dando-lhes o seu alimento diário, Fundação Canárias e BEATRIZ SALVADOR CARLOS PERU ASINKY e procurador do trabalho.

Faço um parêntese para dizer-lhe para começar a viagem para Incacocha Eu vi a miséria causada pela natureza, muitos dos quais não vamos avançar em várias ocasiões para obter os materiais para o local, casas destruídas, estradas passa "provisória "transbordando rios já passaram muitos meses com esse título, caiu colinas*...*

Começa a cerimônia de abertura

Sala de jantar

A emoção da cerimônia de abertura

Começamos a cerimônia de abertura. Foi o diretor que realizou a cerimônia, cantou o Hino Nacional como convém ao primeiro número, em seguida, o diretor dirigiu-se à multidão com palavras referindo-se a tempo. O mesmo ler a mensagem enviada pelo Presidente da Fundação Canárias e Beatriz SALVADOR CARLOS, Salvador Perez, profundamente sentida por aqueles que a ouvem. Depois que eu emitiu uma palavra enquadrada pela emoção do momento que têm sido basicamente graças à Fundação Canárias e Beatriz SALVADOR CARLOS, Ordem dos cuidados e manutenção em bom estado dossel entregue às autoridades da comunidade, professores, pais família e, especialmente, as crianças. Também ouvimos as palavras do Presidente da Comunidade, o Ministério Público, o Presidente da Associação de Pais do Colégio de Professores da Primeira Infância: cada palavra tem sido de graças e promessas de cuidado e manutenção do edifício. As crianças também têm nos dado canções em homenagem e agradecimento aos membros da Fundação, em espanhol como sua língua nativa, quíchua.

Procedeu simbolicamente, como é o costume nosso corte peruana uma fita para declarar aberta cada uma das estruturas. A sala de aula educação infantil foi aberta por uma criança daquela seção e do professor. A cozinha por duas mães e jantar pelo presidente da comunidade e por isso queria dar esse "privilégio" para as pessoas da comunidade e, especialmente, as crianças. Eles foram momentos muito agradáveis, emocional, nó na garganta e um pouco de diversão, pulando em torno das crianças "Protocolo" estavam celebrando cada ato, que corria de um lado para o outro de ser o primeiro a chegar a todas as portas, abra-o e entrar em cada quarto. Encerrando a cerimônia Eu também poderia dar-lhes roupas quentes e guloseimas, porque para eles era uma festa e ela traz presentes, balões e doces.

Flor de María Basauri aborda algumas palavras

O outro mudou-se para o novo futuro: contra todas as probabilidades

Totalmente satisfeito com todos viveram este dia, alegre com a alegria das crianças, feliz com a felicidade dos pais, agradavelmente surpreendido por ela e as crianças têm um uniforme para participar de sua escola em uma posição melhor, porque melhores alunos porque eles já não têm de estudar em uma sala de aula fornecido sem condições básicas que as mães não têm mais que ir ao rio para trazer água para a cozinha para preparar a comida, porque eles não vão sofrer ou menos com a fumaça de madeira, porque eles já têm uma cozinha com a luz, com um cano e uma lavanderia para ser utensílios limpos, sem ir para o rio, porque as crianças e, especialmente, as meninas podem acessar mais banheiros privados, sem medo, porque para acessar o pátio e para baixo, a sala de jantar e não tropeçar ou o perigo de que uma pedra cai sobrepostas, têm agora uma sala de aula, uma cozinha em excelentes condições com uma sala de jantar mais espaçosa e confortável, com banheiros decentes e escadas.

É levar, mas graças a CANÁRIO FUNDAÇÃO E BEATRIZ SALVADOR CARLOS sempre continuar oferecendo. Eles fizeram um monte com os meus filhos, os nossos filhos o que eles têm sido incapazes ou relutantes em fazer aqueles que têm esse dever, é difícil, eu sei, ainda mais para nós que não temos ferramentas técnicas, mobilidade, trabalhadores, máquinas que temos em instituição, mas temos conseguido, literalmente, com grosso e fino, mas a paixão, afeto, carinho, compromisso, orientamos das estrelas, a "solidariedade para crescer" fazer "pouco pode fazer muito".

Pedir ajuda aos professores para participar da VII CIBEM

VII CIBEM VII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

O **Canário Fundação Canária Carlos Salvador e Beatriz** através do Editor Comitê de Digital UNIÃO Federação Ibero-americana de Matemática da Educação, reuniu um pacote de ajuda para cobrir a inscrição CIBEM VII a ser realizada em Montevidéu, Uruguai, de 16 a 20 de setembro de 2013. Os regulamentos, que incluiu as bases, considerou-se que um evento como esse é uma excelente oportunidade para os professores para participar de um encontro que reúne centenas de profissionais e especialistas personalidades internacionais em Educação Matemática.

Para o estudo de aplicações e de alocação de ajuda formou uma comissão com poder de decisão e política feita pelos Diretores da Revista UNIÃO, Norma Cotic e Teresa Braicovich, vice-presidente da Fundação, Luis Balbuena eo Secretário-Geral da FISEM, Agustín Carrillo. Após o encerramento do período dentro do qual o pedido, o Comité elevou sua proposta para o presidente da Fundação, Salvador Perez, que escreveu para o designou foram:

Francisco Haro Laguardia.
Sociedad Thales de Andalucía-España

Mariana Gabriela Torres.
Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)

Marina García Rozoo
Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT)

Eimard Gomes Antunes do Nascimento
Instituto GeoGebra Fortaleza – IGGF.

Na carta enviada a cada um deles, o Presidente eo Congresso desejável que atenda às suas expectativas, eles pediram um relatório sobre a atividade de coleta de impressões pessoais.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 207-210

Convocatorias y eventos

XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas

Convoca**:** Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
Organiza: Sociedad Balear de Matemática (SBM)
Lugar**:** Palma, España.
Fecha: 2 al 5 de julio de 2013.
Información: **http://xvi.jaem.es/**

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

27° Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 27)
Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Lugar: Buenos Aires. Argentina
Fecha: 15 al 19 de Julio de 2013
Información: **www.clame.org.mx**

Día GeoGebra en Iberoamérica

Convocan: FISEM y SEMUR
Lugar. Montevideo. Uruguay
Fecha: 14 de septiembre de 2013, como actividad previa al VII Congreso
Información: **http://www.ibertic.org/diageogebra.ph**

Del 16 al 20 de septiembre en Montevideo. Uruguay

www.cibem7.semur.edu.uy

Convoca la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)

REUNION ANUAL DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA 2013

Lugar**:** Rosario, Pcia. de Santa Fe. (Argentina)
Convoca**:** Unión Matemática Argentina (UMA)
Fecha: 17 al 20 de septiembre de 2013
Información: **www.union-matematica.org.ar**

Convoca: ASOVEMAT y Universidad Nacional Francisco de Miranda
Lugar: Santa Ana de Coro. Estado de Falcón. Venezuela.
Fecha: 1 al 4 de octubre de 2013.
Información: **http://siscovem.falcon.gob.ve**

14º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. ECME—14

Convocan: Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME) y Universidad de Atlántico, Barranquilla..
Lugar: Ciudad de Barranquilla, Colombia.
Fecha: 9 al 11 de octubre de 2013.
Información: **www.asocolme.com**

VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática

Convoca: Universidad Luterana de Brasil
Organiza: Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da ULBRA Canoas
Lugar**:** Canoas, Rio Grande do Sul. Brasil.
Fecha: 16 al 18 de octubre de 2013.
Información: **www.ulbra.br/ciem2013**

Escuela de Primavera en Didáctica de la Matemática

Convocan: Universidad de San Martín (UNSAM). Universidad Pedagógica de Buenos Aires (unipe).
Lugar**:** Buenos Aires. Argentina.
Fecha: 24al 26 de octubre de 2013.
Información; **cede@unsam.edu.ar** **-** **equipomatesec@unipe.edu.ar**

Convoca: GeoGebra Institute of Rio Grande do Norte.
Lugar: Mossoró. Brasil.
Fecha: 24 al 26 de octubre de 2013
Información: **http://geogebrainstitute-rn.com.br/**

Convoca: Universidad del Chaco Austral.
Lugar: Presidencia Roque Sáenz Peña. Chaco. Argentina.
Fecha: 7 al 9 de noviembre de 2013
Información: **http://geogebra.uncaus.edu.ar**

Congreso Internacional
COMPUMAT 2013

Convoca: Universidad de Ciencias Informáticas.
Lugar: La Habana. Cuba
Fecha: 27 al 29 de noviembre
Información: **https://compumat.uci.cu/**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 211-212

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@fisem.org**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “Arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Figura 1, Figura 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**
4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

Para libro:
Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:
Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista:
Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:
Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de **http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php**

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a **revistaunion@fisem.org**