UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

NÚMERO 33 – MARZO DE 2013

ÍNDICE

CRÉDITOS Pág. 3

EDITORIAL Pág. 5

BIENVENIDA A LA SOCIEDAD CUBANA DE MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN Pág. 7

FIRMA INVITADA: LUIS RICO ROMERO

BREVE RESEÑA. Pág. 9

EL MÉTODO DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO Pág. 11

ARTÍCULOS

AS DIMENSÕES MATEMÁTICA, PEDAGÓGICA E TECNOLÓGICA NA CONSTITUIÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: APONTAMENTOS EM RELAÇÃO AOS SABERES DOCENTES
VINÍCIUS PAZUCH, MAURÍCIO ROSA Pág. 29

CONTENIDOS Y ACTIVIDADES ALGEBRAICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA
LILIA P.AKÉ, JUAN D.GODINO, MARGHERITA GONZATO Pág, 39

ESTUDIO DE LA DERIVADA DESDE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO. ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO
SILVIA VRANCKEN, ADRIANA ENGLER Pág, 53

ADQUISICIÓN DE COMPETENCIAS EN ESTUDIANTES DE GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA MEDIANTE EL TRABAJO PRÁCTICO: ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS, TIC Y EL PROGRAMA "WEB 2.0"
RAQUEL FERNÁNDEZ CÉZAR, CONSTANCIO AGUIRRE PÉREZ Pág, 71

TRABAJAR COLABORATIVAMENTE EN EL DISEÑO DE AMBIENTES DE APRENDIZAJE SOBRE PROBLEMÁTICAS SOCIALES: UNA UTOPÍA A REALIZARSE EN Y PARA LA CLASE DE MATEMÁTICAS?
BRIGITTE JOHANA SÁNCHEZ ROBAYO, JOSÉ TORRES DUARTE Pág, 87

SECCIONES FIJAS

DINAMIZACIÓN MATEMÁTICA: BASTAN SOLO SEIS ENLACES PARA CONECTAR A DOS PERSONAS CUALESQUIERA EN EL MUNDO?
JOSÉ MARÍA CONTRERAS BELTRÁN, ISABEL DUARTE TOSSO, JUAN NUÑEZ VALDÉS Pág, 103

EL RINCÓN DE LOS PROBLEMAS: CREACIÓN DE PROBLEMAS. UN CASO CON PROBABILIDADES
ULDARICO MALASPINA JURADO Pág. 119

TIC: A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA EM UM PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE LUGARES GEOMÉTRICOS
GERSON PASTRE DE OLIVEIRA, PÉRICLES BEDRETCHUCK ARAÚJO Pág, 125

IDEAS PARA ENSEÑAR: ¿CÓMO FACILITAR EL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS?
RODOLFO ELISEO D´ANDREA, PATRICIA SASTRE VÁZQUEZ Pág, 137

HISTORIA SOCIAL DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN IBEROAMÉRICA: BALANÇO DA PRODUÇÃO ACADÊMICA DOS CONGRESSOS BRASILEIROS DE ETNOMATEMÁTICA
MARIA CECILIA FANTINATO Pág, 147

LIBROS: COMPETENCIAS DEL PROFESOR DE SECUNDARIO Y BACHILLERATO
RESEÑA: MARÍA JOSÉ SECKEL SANTIS Pág, 163

EDUCACIÓN EN LA RED: ORGANIZACIÓN DE ESTADOS IBEROAMERICANOS Pág, 167

INFORMACIÓN

FUNDACIÓN CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ Pág, 171

CONVOCATORIAS Y EVENTOS Pág, 181

INSTRUCCIONES PARA PUBLICAR EN UNION Pág, 185

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 3-4

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM).** Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Alicia Bruno
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García González
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés del Carmen Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio

Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo

Colaboran

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 5-6

Editorial

"Enseñar no es transferir conocimiento, sino crear las posibilidades para su propia producción o construcción"
Paulo Freire (1921-1997)

Estimados colegas y amigos*:*

Un nuevo año nos encuentra reunidos con renovadas expectativas y propuestas, entre ellas, el evento más significativo para las Sociedades que conforman la FISEM, en el que podremos compartir investigaciones y proyectos, conocernos personalmente y conformar grupos de trabajo colaborativo, nos referimos al:

VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática[1]

A realizarse en Montevideo-Uruguay,

entre los días 16 y 20 de setiembre de este año.

Extendemos nuestro apoyo a los colegas de SEMUR y al Comité Organizador.

En esta oportunidad tenemos la enorme satisfacción de dar una cordial bienvenida a la **Sociedad Cubana de Matemática y Computación (SCMC)**, que ha sido incorporada a la FISEM como miembro pleno recientemente.

En este número, la firma invitada es el Dr. Luis Rico Romero, catedrático de la Universidad de Granada, quién nos enriquece con su artículo referido al Método del Análisis Didáctico, su objeto de estudio, sus finalidades y la estructura en que se articula, basada en nociones como matemáticas escolares, texto, fines, dimensiones del currículo, y organizadores curriculares. Destacando su carácter cíclico y la relevancia de la dialéctica análisis/ síntesis.

En los restantes artículos y en las secciones fijas se presentan temas muy interesantes para ser considerados como aportes para el aula, entre ellos, contenidos y actividades algebraicas en educación primaria, trabajo colaborativo, teoría de grafos, Software geogebra. También reportes de investigaciones con conclusiones y sugerencias enriquecedoras, como la adquisición de competencias en la formación docente.

Como siempre agradecemos a todos los colaboradores, autores, evaluadores, asesores y lectores que nos han acompañado durante estos años y los invitamos a continuar así en este 2013.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

[1] http://www.cibem7.semur.edu.uy

Editorial

" Ensinar não é transferir conhecimento, senão criar as possibilidades para sua própria produção ou construção "
Paulo Freire (1921-1997)

Caros Colegas e Amigos*:*

Um novo ano encontra-nos reunidos com renovadas expectativas e propostas, entre elas, o evento mais significativo para as Sociedades que conformam a FISEM, no que poderemos compartilhar investigações e projectos, nos conhecer pessoalmente e conformar grupos de trabalho colaborativo, nos referimos a o:

VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática

A realizar-se em Montevideo-Uruguai,

entre os dias 16 e 20 de setiembre deste ano.

Estendemos nosso apoio aos colegas de SEMUR e ao Comité Organizador.

Nesta oportunidade temos a enorme satisfação de dar umas cordiais boas-vindas à Sociedade Cubana de Matemática e Computação (SCMC), que tem sido incorporada à FISEM como membro pleno recentemente.

Neste número, a assinatura convidada é o Dr. Luis Rico Romero, catedrático da Universidade de Granada, quem nos enriquece com seu artigo referido ao Método da Análise Didáctica, seu objecto de estudo, suas finalidades e a estrutura em que se articula, baseada em noções como matemáticas escolares, texto, fins, dimensões do currículo, e organizadores curriculares. Destacando seu carácter cíclico e a relevância da dialéctica análise/ síntese.

Nos restantes artigos e nas secções fixas apresentam-se temas muito interessantes para ser considerados como contribuas para o sala, entre eles, conteúdos e actividades algébricas em educação primária, trabalho colaborativo, teoria de grafos, Software geogebra. Também reportes de investigações com conclusões e sugestões enriquecedoras, como a aquisição de concorrências na formação docente.

Como sempre agradecemos a todos os colaboradores, autores, avaliadores, assessores e leitores que nos acompanharam durante estes anos e os convidamos a continuar assim neste 2013.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
página 7

Bienvenida a la
Sociedad Cubana de Matemática y Computación

Con enorme satisfacción, nuevamente informamos sobre el crecimiento de la FISEM, en esta ocasión se ha incorporado a la misma la Sociedad Cubana de Matemática y Computación (SCMC). Su adhesión fue aprobada por la Junta de Gobierno recientemente, por lo que ya es miembro de pleno derecho. El Presidente de esta Sociedad es el Dr. Luis Ramiro Piñeiro Díaz

Sociedad Cubana Matemática y Computación

Con respecto a la historia y trayectoria de esta sociedad, podemos decir que el 26 de noviembre de 1976, se constituye en la Ciudad de la Habana, una asociación científica de carácter nacional que se denominó *Sociedad Cubana de Matemática*, y que posteriormente, en el III Congreso Nacional, celebrado en la ciudad de Santiago de Cuba en el año 1988, se acuerda el nombre de *Sociedad Cubana de Matemática y Computación.* La misma está vinculada, para el desarrollo de sus actividades, con el Ministerio de Educación Superior (MES) que constituye su Órgano de Relación y además la Academia de Ciencias de Cuba y el Ministerio de Educación son organismos que auspician su labor.

Solo nos queda alegrarnos por su incorporación con la seguridad de que su experiencia y trabajo ayudará al crecimiento de la FISEM, de la cual ya forman parte 15 países. Está de más decir que invitamos a nuestros colegas cubanos a que nos sigan transmitiendo experiencias e investigaciones para así puedan ser conocidas por todos nuestros lectores, profesoras y profesores que nos visitan cotidianamente.

Con mucho afecto.

Equipo Editor de UNIÓN

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 9-10

Firma Invitada: Luis Rico Romero

Breve Reseña

Es doctor en matemáticas y catedrático de la Universidad de Granada en Didáctica de la Matemática.

Su actividad profesional consiste en la investigación y la formación de profesores de matemáticas. Ha impartido docencia continuada en las Facultades de Ciencias y de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Ha participado en más de 120 cursos y seminarios.

El Dr. Rico es autor de 41 libros universitarios y 74 capítulos de libro. Ha editado tres colecciones de monografías especializadas, con 68 volúmenes.

Es autor o coautor de 132 artículos científicos en revistas nacionales e internacionales indexadas en bases de datos. La trayectoria investigadora del Dr. Luis Rico comienza en 1971. Desde entonces ha participado en 55 proyectos de investigación autonómicos, nacionales e internacionales, valorados en concurso público, de los cuales ha sido investigador principal en 41 de ellos. Desde 1988coordina el Grupo interuniversitario de Investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico,* (FQM-193), dentro del Plan Andaluz de Investigación. Ha dirigido 19 tesis doctorales en la líneas de Diseño, Desarrollo y Evaluación del Currículo de Matemáticas, Pensamiento Numérico y Formación del Profesorado de Matemáticas.

En 1999 coordina como el Proyecto de Formación de Investigadores en Educación Matemática para América Latina (Red FIEMAL), financiado por la Comisión Europea dentro del Programa ALFA, donde se forman 16 investigadores iberoamericanos en educación matemática. Ha sido miembro del Grupo de Expertos de Matemáticas del programa PISA 2003 de la OCDE. También ha sido Coordinador Nacional en la investigación *Teacher Education Study in Mathematics* (TEDS-M) promovida por la IEA, de 2007 a 2012.

En 1999 es elegido académico de número en la Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Granada. Ha presidido la Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas y representado a España en la *International Commission on Mathematical Instruction*, entre 2007 y 2012. En 2012 recibe el *XVIII Premio Andalucía de Investigación «Ibn-al-Jatib»*, en las áreas de Humanidades y Ciencias Jurídico- Sociales.

Profesor invitado en diversas universidades y centros, entre ellos el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (México), Universidad de Lisboa (Portugal), Universidad de los Andes y Universidad del Valle (Colombia), Universidad de La Serena (Chile), Universidad de San Carlos (Guatemala), Universidad de El Salvador (El Salvador), Instituto Tecnológico de Costa Rica (Costa Rica), Pontificia Universidade Católica de Sao Paulo (Brasil), Universidad del Litoral (Santa Fe, Argentina), y Universidad Nacional Mayor de San Marcos (Perú),

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 11-27

El método del Análisis Didáctico

Firma Invitada: Luis Rico Romero

Resumen	Análisis didáctico es un término de uso común en Didáctica de la matemática. Este análisis es relevante en la disciplina desde sus inicios, ya que aporta un modo específico de abordar cuestiones didácticas primordiales. *Análisis didáctico* abarca un conjunto de conceptos y métodos con uso generalizado en los grupos de investigación de Didáctica de la matemática, que detallaremos en este estudio. Se sustenta en las reglas generales del análisis, tal y como éste se entiende desde la filosofía y la historia del pensamiento. Aborda problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. En lo que sigue presentamos nuestra interpretación del análisis didáctico desde la educación matemática. **Palabras clave**: Métodos de investigación; análisis conceptual; análisis de contenido; Didáctica de la matemática; análisis didáctico.
Abstract	Didactical analysis is a term commonly used in mathematics education. This analysis is relevant to the discipline since its inception, as it provides a specific mode of address key educational issues. The *Didactical analysis* encompasses a set of concepts and methods widely used in the research groups of mathematics education, we will detail in this study. This kind of analysis is based on their general rules, as they are understood from the philosophy and the history of thought. It addresses issues of teaching and learning of school mathematics. In what follows we present an interpretation of the training analysis from mathematics education. **Keywords**: Research Methods; conceptual analysis, content analysis, Didactic of Mathematics, Didactical analysis.
Resumo	Análise didática é um termo comummente usado em educação matemática. Essa análise é relevante para a disciplina desde a sua criação, uma vez que fornece um modo específico de endereços principais questões educacionais. *Análise didática* engloba um conjunto de conceitos e métodos utilizados nos grupos de pesquisa do ensino da matemática, iremos detalhar neste estudo. Baseia-se as regras gerais de análise, tal como é entendido a partir da filosofia e da história do pensamento. Aborda questões de ensino e aprendizagem da Matemática escolar. A seguir, apresentamos a nossa interpretação da análise de formação de educação matemática. **Palavras-chave** Métodos de pesquisa, análise conceitual, análise de conteúdo, educação matemática, Análise didática

Introducción

En una primera parte de este trabajo, nos centramos en las concepciones del análisis didáctico y de otras nociones asociadas a lo largo de la historia del pensamiento. En una segunda parte, consideramos el análisis conceptual y el análisis de contenido como métodos específicos en la investigación educativa. En la tercera parte, integramos las reflexiones y caracterizamos las nociones propias del análisis didáctico en Didáctica de la matemática. Rico y Fernández-Cano (2013) complementan ideas del trabajo que aquí se desarrolla.

1. Noción de análisis

"Análisis: *resolutio*, disolución, desmembramiento, investigación" (Krings, Baumgartner y Wild, 1977, p. 79).

La Real Academia Española considera el significado común del término *análisis* como: "Distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios o elementos" (RAE, 1970, pp. 83). La Real Academia proporciona otras interpretaciones psicológicas o matemáticas; la idea nuclear en ellas es *descomponer algo en partes*.

Como complementaria se encuentra la noción de síntesis: Síntesis (del lat. synthĕsis, y éste del gr. σνθεσις). "Composición de un todo por la reunión de sus partes. Suma y compendio de una materia u otra cosa" (RAE, 1970, pp. 1207).

1.1 Diversas concepciones

El análisis se ha considerado siempre como propio del método filosófico. En los Diálogos de Platón el término análisis se refería al proceso de indagación de los primeros principios mediante los cuales algo se puede probar. Esta concepción se denomina *regresiva* o *escrutadora* del análisis. La explicación o reconstrucción se muestran entonces como el correspondiente proceso de síntesis. La meta consiste en recuperar lo básico pero puede haber diversidad de caminos para hacerlo, cada uno de los cuales se denomina *análisis*.

Otra interpretación designa por análisis, en general, el desmembramiento de algo dado en las partes que lo constituyen, la reducción a sus condiciones, o la investigación de sus consecuencias. "Casi siempre la descomposición es entendida en un sentido lógico o mental. Se habla en este caso de análisis de un concepto en tanto que investigación de los subconceptos con los cuales el concepto en cuestión ha sido construido, o de análisis de una proposición en tanto que investigación de los elementos que la componen" (Ferrater, 1981, pp. 135-138). A su vez, la síntesis se produce sobre la base de los resultados previos del análisis. Con esta significación se usa en la mayoría de las ciencias, según la disciplina específica. Esta concepción del análisis es conocida como *disgregadora* o *reductiva* (Krings, Baumgartner y Wild, 1977, p. 79).

La filosofía analítica, con carácter previo al proceso de descomposición en partes, establece que aquello que deba analizarse debe transformarse a un lenguaje específico, expresarse mediante un enunciado que se pueda transcribir en forma lógicamente correcta. De aquí que también implique una dimensión *transformativa* o *interpretativa*.

En la práctica del análisis se reflejan las tres concepciones, si bien en grados y modos diferentes. Para analizar algo, en primer lugar hay que interpretarlo de algún modo, traducirlo desde un enunciado inicial a algún lenguaje especializado lógico o científico, antes de articular sus elementos y estructuras relevantes, para así contribuir a la identificación de los principios mediante los cuales explicarlo. El análisis de un objeto se realiza a partir de la relación que existe entre los elementos que lo constituyen como un todo junto con el marco para su interpretación. Por análisis se entiende un método o conjunto de métodos que resuelven lo complejo en lo simple.

1.2 Consideraciones históricas

El método de análisis se desarrolló en la geometría griega bajo la influencia de Platón y de Aristóteles. En las definiciones de Sócrates se encuentran las raíces del análisis conceptual moderno, si bien el término ἀνάλυσις no está en los diálogos platónicos.

Platón transformó la definición socrática en su método de división, método de hipótesis vinculado, en el cual basó el análisis geométrico. En la teoría silogística de Aristóteles, por el contrario, las formas de análisis han implicado la *reducción*.

En el libro VII de la *Colección Matemática* de Pappus se encuentran las aproximaciones del análisis y la síntesis:

> El análisis es el camino que parte de la cuestión que se busca, suponiéndola conocida, para llegar, por medio de las consecuencias que se deduzcan, a la síntesis de lo que se dio por conocido.
> Suponiendo obtenido, en efecto, lo que se busca se considera lo que se deriva de ello y lo que le precede, hasta que volviendo sobre los pasos dados, se llega a una cuestión que ya se conoce o pertenece al orden de los principios; y este camino se llama análisis porque es una inversión de la solución, mientras que en la síntesis, por el contrario, suponiendo la cuestión, finalmente, conocida por el análisis, disponiendo sus consecuencias y causas en su orden natural y enlazando unas y otras, se llega a construir lo que buscamos; y este método es la síntesis.
> Hay dos clases de análisis, el propio de la investigación, que se llama teorético, y el que aplica para encontrar lo que se propone, y que se llama problemático. (Pappus, pp. 991-992)

Según esto, en la solución de un problema geométrico se analiza la proposición que se quiere demostrar, buscando determinadas condiciones que se deducen de su aceptación hipotética, hasta alcanzar enunciados verdaderos. Por ejemplo, la demostración del Teorema de Pitágoras en la proposición 147 del libro I de los *Elementos* de Euclides, es ejemplo paradigmático de este sistema. La prueba se produce cuando la proposición se infiere sintéticamente de las condiciones necesarias y suficientes encontradas. Análisis y síntesis son componentes necesarios de la prueba; pero el análisis, que precede, contiene la solución del problema y presupone la exposición del proceso de prueba.

A comienzos de la revolución científica, los trabajos de Descartes y de la escuela de Port-Royal utilizan los conceptos de análisis y síntesis para la discusión de los métodos y de las ideas de la época. El análisis es condición previa para la síntesis que le sigue.

> Puede denominarse, en general, método al arte de disponer adecuadamente una secuencia de varios pensamientos bien para descubrir la verdad cuando la ignoramos o bien para darla a conocer a otros cuando ya es conocida.

> Así, hay dos clases de métodos; uno, permite descubrir la verdad y se denomina *análisis* o *método de resolución* y, también puede denominarse *método de invención*; el otro permite hacer entender la verdad a otras personas cuando la verdad ya ha sido descubierta. Este último se denomina *síntesis* o método de *composición*, pudiendo ser también conocido como *método de enseñanza*.
> El análisis, por lo general, sirve solamente para resolver alguna cuestión de ciencia y no para someter a este método el cuerpo completo de una ciencia. (Arnauld y Nicole, 1987, pp. 418)

Los autores manifiestan que el análisis o método de invención o resolución, se completa con la síntesis o método de enseñanza, siendo esta síntesis la vía para enseñar a otras personas aquellas verdades descubiertas por el procedimiento de análisis. Por sí solo, el análisis identifica las componentes necesarias para entender y descubrir la verdad, pero es el método de síntesis el que, por recomposición de los elementos y nociones básicas obtenidas por análisis, establece la vía para comunicar y transmitir las verdades analizadas. El ciclo análisis/síntesis tiene dos funciones primordiales: entender e instruir; de ahí que la componente didáctica integra toda actividad intelectual.

El papel de la geometría en el pensamiento de Descartes implica la ruptura de problemas complejos en otros más simples, que se resuelven más fácilmente. También es significativo su empleo del álgebra en el desarrollo de la geometría analítica, que permite transformar problemas geométricos en aritméticos de solución más sencilla. Al representar el valor desconocido que debe calcularse mediante 'x', puede verse el papel transformador que desempeña en el análisis la idea de tomar algo como dado y trabajar con ello regresivamente, lo cual muestra lo apropiado de ver el álgebra como un arte de análisis. Descartes, en su desarrollo de la geometría analítica, ejemplifica las tres concepciones del análisis señaladas, si bien enfatiza la concepción reductiva.

El positivismo lógico establece que toda proposición verdadera es analítica o empírica, rechazando la posibilidad de juicios sintéticos *a priori*. Características de la filosofía analítica son: el énfasis atribuido al análisis, el valor central asignado a tal análisis y el papel que juega el análisis lógico. En el siglo XX la filosofía analítica introdujo la concepción lógica interpretativa (Zalta, 2012).

La dimensión transformadora o interpretativa del análisis viene dada porque cualquier análisis de un enunciado supone su previa transformación en un marco dado. Esto implica transformarlo, de algún modo, a fin de que se puedan utilizar los recursos de una teoría o de un marco conceptual dados. El trabajo consistirá entonces en interpretar aquello que buscamos analizar como parte del proceso de regresión y descomposición.

1.3 El análisis en perspectiva didáctica

En el marco educativo en que nos situamos consideramos el análisis como método, como camino, como modo de entender y abordar nuestro trabajo de investigación. El método de análisis es sistemático y particular en sus intereses. La revisión histórica permite aproximarnos a distintas concepciones del método, apreciar su cercanía con la propia matemática y con su enseñanza y aprendizaje.

Para trabajar con la noción de análisis en Didáctica de la matemática consideramos diversas concepciones sobre el método de análisis, que hemos denominado: *escrutadora* o *regresiva*, *disgregadora* o *reductiva* e *interpretativa* o *trasformadora.* Estas concepciones no son incompatibles entre sí y trabajamos con todas ellas.

También valoramos los procesos de síntesis y su vinculación permanente con los correspondientes de análisis, la inseparabilidad dialéctica de ambos métodos, aunque sea adecuado diferenciarlos en el discurso metodológico. La necesidad de considerar los procesos de síntesis junto con los de análisis, muestra la sistematicidad de los razonamientos, que necesitan recopilar y resumir las ideas después de la disgregación y deconstrucción de los conceptos y de los juicios.

Destacaremos la especificidad del método de análisis didáctico en la Didáctica de la matemática y singularizaremos el método para la disciplina. Introduciremos nociones centradas en el análisis, vinculadas con el análisis didáctico y que le preceden. Estas nociones son el análisis conceptual y el análisis de contenido.

2. El análisis conceptual

Los conceptos son los componentes de nuestro pensamiento, aquello con lo que pensamos. Son cruciales para entender e interpretar procesos mentales y psicológicos tales como categorización, inferencia, memoria, aprendizaje y decisión. También son importantes en educación, singularmente en educación matemática (Bell, Costello y Küchemann, 1983; Hiebert y Lefevre, 1986; Pineda, 2012; Skemp, 1980). El análisis conceptual ejemplifica una de las concepciones del método de análisis, que hemos denominado regresiva o escrutadora. Un análisis conceptual encarna una definición.

En Ciencias de la Educación, el análisis conceptual es una herramienta metodológica para controlar la complejidad semántica, seleccionar opciones idóneas y disponer de un aparato teórico, adecuado para una investigación educativa. Resulta necesario que los investigadores en educación aprecien su utilidad y alcancen un nivel razonable de competencia en el análisis conceptual (Scriven, 1988).

El análisis conceptual aborda problemas importantes para el investigador, singularmente la precisión e inteligibilidad de los conceptos:

> Para un enunciado coherente de un problema de investigación es imprescindible un conocimiento amplio del campo de estudio, un marco teórico sólido y unos conceptos precisos que permitan plantear cuestiones significativas (…) Una de las dificultades de la investigación en las disciplinas educativas es la polisemia de los conceptos centrales que se utilizan en esos estudios. Gran parte de esos conceptos proceden de la historia milenaria del pensamiento occidental y encierran sutilezas que la reflexión y la experiencia de multitud de pensadores han ido colocando en ellos. Como conocimiento científico los conceptos son públicos, son el tipo de cosas que muchas personas pueden compartir y comparten. La atribución arbitraria de significado o la desconsideración de significados centrales, son usos patológicos de los conceptos que han de quedar excluidos del trabajo científico (Rico, 2001, pp. 184-185).

Por medio del análisis conceptual se controla la precisión teórica de los conceptos. El análisis conceptual es un método no empírico. Los datos con que opera son descripciones, definiciones, listas extensivas, ejemplos de uso, contraposición de textos con significados alternativos y formulaciones simbólicas. En el análisis conceptual se detecta la preocupación socrática por la naturaleza de las definiciones y del lenguaje, que trata de encuadrar los términos y sus interconexiones. Principios orientadores de este análisis son la naturalidad, aplicabilidad, complejidad y simplicidad. En su realización se examina cuidadosamente la diversidad de significados, las posibilidades de conexión entre los términos y los niveles subjetivos (creencias), intersubjetivos (concepciones) y objetivos (conceptos) de cada campo conceptual. Contextualiza la definición dentro del área en que se inserta. Usa ejemplos y contraejemplos, en vez de la definición explícita. Emplea analogías y términos evocativos en vez de pruebas, axiomas o cuantificaciones.

Este método se sirve de la historia y variación de los términos. Permite una reflexión previa sobre la cuestión que se quiere investigar, determinando y caracterizando aquellos puntos clave que delimitan el problema en estudio y las ideas, conceptos y teorías sobre los que se aborda su resolución. Trata de eliminar las inconsistencias derivadas de la falta de precisión en el significado de los conceptos utilizados. En educación matemática hemos ejemplificado estos principios con varios conceptos, como son: el análisis conceptual de la noción de *modelo* (Rico, 2001), el análisis conceptual de las nociones de *número* y de *cantidad* (Maz, 2005) y el análisis conceptual de la noción de *representación* (Rico, 2009).

El análisis conceptual es una actividad esclarecedora para educadores e investigadores en Didáctica de la matemática. Revisa en profundidad los conceptos y nociones básicas sobre el conocimiento matemático, sobre sus fundamentos e historia, sobre su génesis y desarrollo, sobre los principios para su enseñanza e interpretación de su aprendizaje. El estudio de la evolución histórica de los conceptos es fuente de información para el análisis conceptual (Sierra, 2010). También aporta argumentos para determinar qué conocimientos, procedentes de la matemática, de la filosofía y de la ciencia cognitiva, pueden estar en la base de la disciplina teórica de la educación matemática. Finalmente, el análisis conceptual se considera un precedente de la reducción teórica para responder a cuestiones de fundamento en educación matemática.

El análisis conceptual es un método para trabajar y profundizar sobre los conceptos, una técnica de escrutinio para conseguir precisión y dominio en su uso. Por este motivo, al iniciar una investigación o intentar profundizar sobre un tema, deben analizarse los conceptos centrales, matemáticos y educativos, que lo constituyen.

3. El análisis de contenido

El análisis de contenido es un método para el procesamiento y revisión de las dimensiones cuantitativas (médium) y cualitativas (mediador) de los contenidos de la comunicación. Su origen y antecedentes procede del trabajo de censores y del estudio hermenéutico de textos (Fernández-Cano, 2010). La técnica del análisis de contenido está destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias plausibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto (Krippendorff, 1990).

3.1 Método del análisis de contenido

Las técnicas de análisis de contenido trabajan la naturaleza del mensaje-discurso. Su finalidad es descubrir la estructura interna de la comunicación, estudiando para ello su contenido semántico. Cohen, Manion y Morrison (2011) subrayan que:

> El término análisis de contenido indica el proceso de recogida y resumen de datos escritos –los contenidos principales de dichos datos y sus mensajes. De modo más preciso, [el análisis de contenido] define un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y verificación de los contenidos de datos escritos. Algunos autores lo definen como una técnica de investigación para elaborar inferencias válidas y replicables a partir de textos (u otros materiales escritos) en aquellos contextos en que se utilizan. Por texto se entiende cualquier material de comunicación escrita, que se suponen deben ser leídos, interpretados y entendidos por otras personas distintas de aquella que los analiza. El análisis de contenido se puede llevar a cabo con cualquier tipo de material escrito, desde documentos impresos a transcripciones de entrevistas, desde productos de los media hasta producciones escritas. Se utiliza frecuentemente para analizar un número considerable de textos, debido a su naturaleza sistemática, gobernada por reglas; también permite utilizar el análisis asistido por ordenador. Utiliza la categorización para reducir grandes cantidades de datos (p. 563).

Además de trabajar con la dimensión regresiva, el análisis de contenido incorpora la dimensión reductora, descomponiendo el contenido en sus unidades más simples para lo cual utiliza de modo sistemático la determinación de temas y la identificación de categorías. La aplicación del análisis de contenido a la investigación educativa puede ayudarnos a:

- Descubrir patrones en el discurso.
- Contrastar una hipótesis previa.
- Inferir significados interpretativos en un texto.

De manera general, el procedimiento para realizar un análisis de contenido sigue unas determinadas etapas; a saber:

- Delimitar el corpus de contenido (texto, discurso, producción escrita) a analizar.
- Concretar la unidad de análisis: palabra (nombre, verbo o adjetivo), frase o párrafo.
- Localizar o inferir en el texto las unidades de análisis.
- Denominar, definir e interpretar las categorías consideradas.
- Evitar en lo posible la categoría “OTROS”, para obviar indeterminaciones.
- Codificar y cuantificar mediante frecuencias o rangos las unidades de análisis previamente adscritas al sistema de categorías predeterminado (procedimiento deductivo) o inferir tal sistema de categorías sobre las unidades de análisis seleccionadas (sistema inductivo). Cada unidad sólo debe incluirse en una categoría.
- Relacionar entre sí e interpretar las categorías establecidas, considerando sus unidades de análisis adscritas.
- Relacionar el proceso de análisis de contenido con la cuestión que se indaga y con los agentes intervinientes (hablante/escritor u oyente/lector).

3. 2 Comparación entre los análisis conceptual y de contenido

La Tabla 1 compara el análisis conceptual y el análisis de contenido mediante diez descriptores (Fernández-Cano y Rico, 1996; Rico, 2001).

Tabla 1: Comparación entre el análisis conceptual y el análisis de contenido

Análisis conceptual	Análisis de contenido
Unidad central de indagación	
Término, concepto (p.e. modelo, cantidad, currículo,.)	Un texto, discurso, tarea escrita o comunicación.
Sentido	
Externo al concepto	Interno al texto
Unidades básicas de análisis	
Acepciones/definiciones del término	Unidades menores de discurso (p.e. palabra-termino, verbo-adjetivo, palabra-frase.)
Nivel de análisis	
Único	Continuo: manifiesto ←→ latente
Técnicas propias	
Método del ejemplo/contraejemplo. Lenguaje evocativo y uso de analogías. Estructuración e interpretación de la red de significados del concepto.	Delimitación de la unidad básica. Establecimiento de categorías. Interrelación de categorías. Adscripción de unidades a categorías. Interpretación de categorías: nivel manifiesto y latente.
Disciplina en que opera	
Filosofía, Epistemología, Historia de la ciencia	Lingüística, Matemáticas, Psicología, Sociología, Didáctica
Fin primordial	
Fundamentar y clarificar términos y conceptos	Estudiar textos, tareas o relatos
Concepción prioritaria sobre el análisis	
Regresiva/ Escrutadora	Disgregadora/ Reductiva
Secuenciación	
Longitudinal: relevancia del devenir histórico	Transversal: relevancia de la ampliación del discurso
Función auxiliar al método general	
Definir términos. Clasificar teorías. Validar constructos	Técnica de recogida de datos. Técnica de análisis de datos

El análisis conceptual sustenta un primer nivel del análisis de contenido; ambos se sirven de la interpretación histórica del conocimiento matemático. En nuestro trabajo consideramos el primero como fundamento del segundo.

3.3 Análisis de contenido en las matemáticas escolares

El análisis de contenido se ha venido utilizando en educación matemática como un método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en un texto (discurso del profesor, textos escolares y producciones escolares para la detección de sesgos). El grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* (DDM-PN) ha trabajado el análisis de contenido en diversos estudios e investigaciones. Las categorías básicas utilizadas derivan de la noción de organizador curricular (Rico, 1997b) y de la noción de significado establecida para los conceptos matemáticos escolares (Rico, 2012).

Las categorías consideradas para analizar el contenido matemático en un documento escolar, son:

- Conceptual, que considera el momento histórico y el marco poblacional (el quién comunica y a quién comunica) donde se insertan.
- Formal y estructural, que abarca los conceptos, definiciones y procedimientos, junto con la estructura formal, que proporcionan referencia a los contenidos utilizados.
- Representacional, que comprende las notaciones gráficas, simbólicas, y sistemas de signos involucrados.
- Fenomenológica, que aborda los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en los que se utilizan y aquellas situaciones en las que se presentan y en las cuales se aplican, que dotan de sentido a los contenidos en estudio.

El análisis de contenido matemático en educación consiste en un método para establecer y estudiar la especificidad de los significados de los conceptos y procedimientos que conforman un texto de las matemáticas escolares. En nuestra experiencia hemos desarrollado una variante propia del análisis de contenido que ha surgido para diseñar tareas y elaborar textos de matemáticas escolares, basado en la reflexión curricular y en un sistema establecido de categorías didácticas, que se focalizan en los contenidos escolares. Esta modalidad del análisis de contenido en educación matemática se propone aportar al profesor conocimientos y capacidades para diseñar y evaluar textos de matemáticas, así como criterios para su ajuste a un sistema propio de categorías. Su finalidad es proporcionar principios para atender a la estructura interna de la matemática escolar en los textos, que se elaboran para su implementación durante los procesos de enseñanza y aprendizaje, y también para evaluar las producciones recogidas en términos de las expectativas enunciadas (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). Estos documentos muestran distintas organizaciones de los contenidos matemáticos escolares.

Utilizar las categorías mencionadas para realizar un análisis de contenido con textos históricos permite llevar a cabo una selección de registros con los que interpretar y desentrañar el conocimiento matemático que sus autores quisieron transmitir y así esclarecer el significado que, en un momento histórico concreto, se otorgó a determinados conceptos matemáticos en el sistema educativo (Maz, 2005; Picado, 2012; Sierra, 2010). De ahí que consideremos oportuno emplear también el término general “análisis del contenido matemático” en los casos específicos de estudios históricos.

4. Objeto y fines del análisis didáctico

El análisis didáctico es un método de investigación propio de la Didáctica de la matemática, que se sustenta en la historia, en la propia matemática, en la filosofía del conocimiento y de la educación, que utiliza técnicas y métodos del análisis conceptual y del análisis de contenido. Son objeto del análisis didáctico aquellos conceptos, conocimientos, normas, juicios, argumentos, textos y relatos que tienen su origen en la actividad propia de la comunidad de educadores matemáticos, textos que se ajustan a su organización y que regulan su práctica.

Las finalidades del análisis didáctico radican en fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, tal y como los establece la comunidad educativa y tienen lugar en el medio escolar. En esta reflexión, los procesos generales considerados se refieren, explícita o implícitamente, a la organización, trasmisión y adquisición de conocimientos estructurados mediante textos y documentos de matemáticas escolares.

Algunos rasgos relevantes de esta conceptualización del análisis didáctico son:

- trabajar desde unas dimensiones curriculares sobre las cuales erige sus componentes y elaborar unas categorías que sustentan y renuevan el discurso matemático escolar;
- trabajar y profundizar sobre los conceptos, usar técnicas de escrutinio para conseguir precisión y dominio en su descripción y uso;
- completar los procesos de análisis con los de síntesis, según su finalidad educativa para organizar, secuenciar información y tomar decisiones fundadas;

- fundamentar un método preciso y reglado para comprender textos matemáticos escolares, es decir, para su estudio, diseño e interpretación;
- proporcionar una guía normativa para intervenir en la práctica y predecir con base en la investigación y la experiencia;
- establecer criterios para la formación inicial y permanente del profesorado en la planificación y evaluación de unidades didácticas.

Con carácter singular, destacamos que los currículos escolares y los planes de formación del profesorado de matemáticas son objeto de estudio para el análisis didáctico, en tanto se concretan en textos estructurados, relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Destacan el interés y la funcionalidad del análisis didáctico en los ámbitos de actuación identificados para la disciplina: curricular, profesional e investigador (Rico, 2012, pp. 51-54). El análisis didáctico lo utilizamos como método propio de la Didáctica de la matemática. Consideramos diversas componentes y categorías para su dominio técnico y su aplicación en la práctica,.

4.1 Sobre el concepto de currículo

El discurso matemático escolar lo enmarcamos en el diseño y puesta en práctica de un plan de formación, es decir, en un marco curricular (Stenhouse, 1984, pp. 25-30). Por esta razón las categorías del análisis didáctico las vamos a sustentar en el marco teórico elaborado para el concepto de currículo, en su interpretación sistémica en niveles y dimensiones, y en la noción de los organizadores del currículo. Resumimos brevemente algunas de esas nociones básicas para interpretar las categorías mencionadas. Por currículo entendemos todo plan de formación cuya determinación viene dada por unos sujetos a quienes hay que formar; las finalidades formativas que se pretenden y las necesidades a las que se quiere atender; la institución, el personal y los recursos con los que se lleva a cabo la formación; el tipo de formación que se quiere proporcionar: las normas y códigos, los valores, los conocimientos y capacidades, las habilidades y técnicas, las actitudes y destrezas; finalmente, el sistema de evaluación del plan de formación, determinado por unos criterios e instrumentos. Si bien las nociones educativas que consideramos son generales, nuestro campo de estudio y los documentos citados refieren al currículo escolar de matemáticas (Rico, 1990, pp. 26-28).

Un currículo viene establecido por sus finalidades. Como plan de formación, todo currículo responde a cuatro cuestiones: ¿Cuál formación/conocimiento? ¿Para qué dicha formación? ¿Cómo y cuándo se lleva a cabo la formación? ¿Con cuáles resultados? Los cuatro tipos de cuestiones responden a una diversidad de finalidades que varían de un currículo a otro. Las finalidades expresadas se pueden sintetizar en cuatro clases: conceptuales, cognitivas, formativas y sociales. Estos cuatro tipos de fines establecen las dimensiones que estructuran el concepto de currículo, con el cual venimos trabajando (Rico, 1997a, pp. 380-387). La reflexión conceptual y profesional sobre el currículo se puede llevar a cabo según distintos niveles: teleológico, institucional, académico, axiológico y práctico. Cada uno de estos niveles viene caracterizado por unas componentes que muestran los sujetos, instituciones, finalidades, disciplinas, valores y actividades profesionales del educador para planificar, implementar y evaluar el plan de formación considerado. Los niveles de reflexión conforman modos preferentes de abordar el estudio y el trabajo curricular (Rico, 1997a, pp. 408-410).

Dimensiones y niveles del currículo muestran su estructura sistémica. En nuestro marco, las dimensiones tienen carácter estructural mientras que los niveles atienden a distintas necesidades o funciones del currículo; no están limitadas salvo por su coherencia con el marco teórico en que se insertan.

Para llevar a cabo la planificación de un tema de matemáticas escolares consideramos que hay que atender las distintas dimensiones curriculares contempladas y contemplar, al mismo tiempo, la especificidad del tema matemático en estudio. En la dimensión conceptual hemos visto unas categorías específicas al contenido que contribuyen a su análisis. Para encontrar categorías que permitan reflexionar sobre las otras dimensiones del currículo que, al mismo tiempo, contemplen la especificidad del contenido es por lo que se introdujo la noción de organizador curricular (Rico, 1992, 1997b).

> Un organizador debe ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de trasmisión y construcción de conocimiento matemático. (…) Los organizadores deben tener una base disciplinar adecuada, que permita su tratamiento objetivo. El conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas ha de quedar estructurado mediante la aportación que hacen cada uno de los organizadores a dicho contenido (Rico, 1997b, pp. 45-46).

Consecuencia de la caracterización de los organizadores curriculares es su contribución al “análisis didáctico en profundidad de los distintos temas del currículo de matemáticas. Los organizadores se han escogido para satisfacer esta demanda” (p. 55). Tal y como se conciben, los organizadores son un sistema de categorías para analizar los textos de matemáticas escolares (Segovia y Rico, 2001, 88-101).

4.2 Análisis didáctico en el currículo de matemáticas

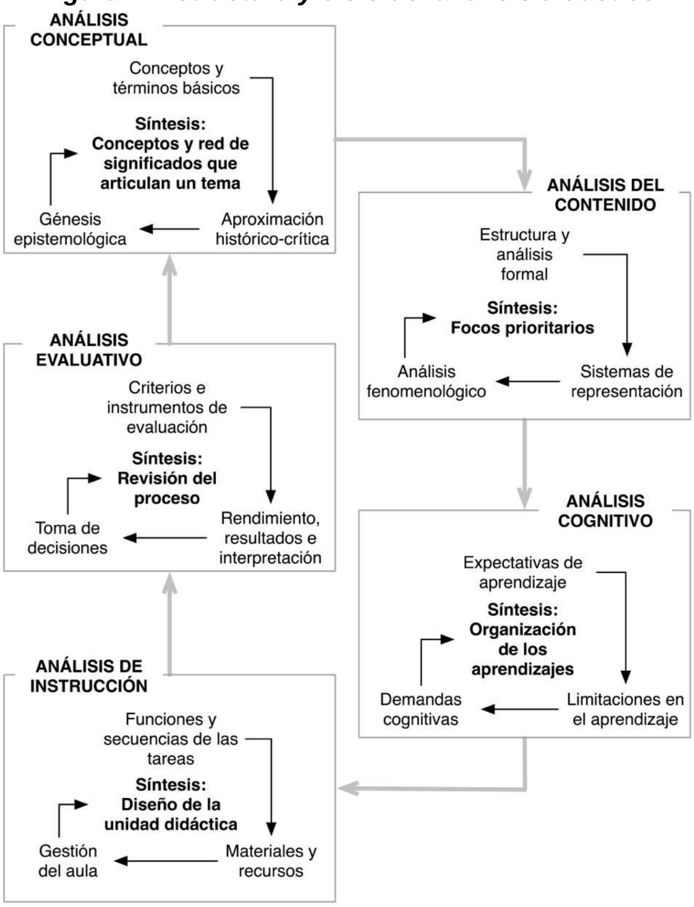
El análisis didáctico en matemáticas tiene como propósito establecer los significados de los conceptos y aprehender la intencionalidad educativa del discurso de las matemáticas escolares. En este sentido es un análisis interpretativo y transformador que maneja, de manera conjunta, categorías matemáticas y educativas. Para ello subraya la importancia del lenguaje, la precisión en las ideas y sus antecedentes, la veracidad y el rigor en los juicios. Este análisis trabaja mediante división de lo complejo en partes simples, para lo cual emplea un sistema elaborado de categorías. El orden y la coherencia, junto con la preocupación por la estructura, son atributos clave del análisis didáctico como método.

Entendemos que el análisis didáctico de los temas del currículo de matemáticas se inicia, en cada caso, con un análisis de contenido de los conceptos y procedimientos matemáticos que lo constituyen. A su vez, el análisis de un contenido matemático escolar requiere del análisis conceptual específico de las nociones básicas implicadas, incluidos sus precedentes, evolución histórica y fundamentos epistemológico (Romero, 1997, pp. 36-78). En cualquier tema de las matemáticas escolares, el análisis de contenido de los conocimientos que lo estructuran contribuye a delimitar y precisar la pluralidad y diversidad de sus significados, a establecer su alcance en cada caso. Hemos enumerado y descrito en el Apartado 3.3 las categorías que manejamos para el análisis del contenido de un texto de matemáticas escolares y para iniciar la planificación de un tema específico. Esas categorías señalan tipos de conocimiento, muestran aspectos formales-estructurales, tipos de representación, contextos y fenómenos. Provienen de la noción de significado de un concepto matemático (Rico, 2012, pp. 51-53). La síntesis de conceptos, procedimientos y propiedades proporciona criterios para su resumen y organización, para la elección de nociones concretas, para precisar la estructura antes de planificar su enseñanza. Esta síntesis se presenta, usualmente, mediante un mapa conceptual que destaca las ideas principales manejadas y compendia sus relaciones (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2010, pp. 12-15).

4.3 Ciclo del análisis didáctico

El análisis de contenido matemático responde a una concepción reductiva o disgregadora, se propone establecer qué conocimientos son los que se consideran, se dirige a dar respuesta a la cuestión curricular inicial: ¿qué conocimientos? Nuestra aproximación contempla el análisis didáctico como un ciclo, como muestra la Figura 1. Este ciclo está constituido por cinco componentes: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis evaluativo. El modelo general ajusta una dialéctica de análisis-síntesis. En el proceso subsiguiente consideramos las restantes dimensiones del currículo. Para ello diferenciamos, según esas dimensiones, nuevos tipos diferentes y complementarios de análisis, componentes todos ellos del análisis didáctico. Dichos análisis son: el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis evaluativo. Técnicamente, conciernen a los organizadores con que los que venimos analizando los contenidos de las matemáticas escolares en programas de formación inicial de profesores de secundaria (Rico, 1992, p. 355). Estas categorías son herramientas para realizar el análisis de contenido de un tema concreto o de un texto matemático determinado (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2010, pp. 9-11).

Figura 1: ***Estructura y ciclo del análisis didáctico***



4.4 Categorías para el análisis didáctico

A cada uno de los componentes del análisis didáctico le sigue el correspondiente proceso de síntesis, que recoge datos relevantes, a partir de los cuales cierra su ciclo y da paso al siguiente componente del análisis didáctico.

Así, mediante la síntesis posterior al análisis de contenido se destacan unos focos preferentes del conocimiento matemático escolar relativos al tema en cuestión. A partir de estos focos se establecen prioridades para su aprendizaje. La elección de los focos resulta del proceso previo de análisis-síntesis de los contenidos del tema que está en estudio. Esta elección da paso a modos concretos de entender e iniciar los procesos para el aprendizaje y desarrollo del tópico.

El análisis cognitivo se ajusta a una concepción escrutadora o regresiva, ya que trata de organizar el para qué y hasta dónde aprender determinados conocimientos sobre un tópico. Las categorías con las cuales llevamos a cabo el proceso de análisis-síntesis cognitiva son de tres tipos. La primera de ellas se refiere a las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares, a su precisión y riqueza, a su alcance en el largo, medio y corto plazo, a su vinculación con los fines establecidos en distintos niveles del sistema educativo. Cada tema requiere, al menos, enunciar sus prioridades cognitivas, determinar su objeto y su alcance, organizar y relacionar dichas prioridades (Rico y Lupiáñez, 2008, pp. 63-107). La segunda de las categorías se centra sobre las dificultades de aprendizaje, hipotéticas o empíricas, conjeturadas o conocidas, y sobre los errores documentados o detectados en la práctica. Un análisis sobre las limitaciones previsibles en el aprendizaje de los escolares, acompañado de propuestas para su tratamiento, es parte de la actividad que se realiza mediante la componente cognitiva del análisis didáctico (Socas, 1997, pp. 125-154). La tercera de las categorías se centra en las demandas cognitivas, en las tareas mediante las cuales se reta al alumno a dar respuesta a diversas cuestiones cuyo propósito está en el logro de su aprendizaje y en la superación de los errores relativos al tema. Las tareas matemáticas sobre un tópico, sus variables y su relación con los contenidos y las expectativas establecidas, constituyen el tercer tipo de categorías cognitivas (Caraballo, 2010; Marín, 1997, pp. 195-207; Rico y Lupiáñez, 2008, pp. 287-352).

La síntesis cognitiva tiene lugar al considerar la complejidad de las tareas según la profundidad de los contenidos que tratan, la diversidad de expectativas que atienden y las limitaciones cuya superación se proponen. Esta síntesis se expresa, en ocasiones, mediante propuestas para el aprendizaje expresadas en la articulación y complejidad de las tareas, que resumen los resultados de los análisis previos. De este modo, mediante las categorías expresadas, se indaga hasta dónde aprender y se escruta para qué aprender (Lupiáñez, 2009, pp. 461-466).

El análisis de instrucción supone la transformación y adaptación de las consideraciones realizadas en los dos análisis anteriores a las condiciones que se dan en un marco, para su interpretación. Este marco dado puede ser bien un aula o un centro, en el ámbito de la planificación que tiene que hacer un profesor o un departamento de matemáticas, o bien puede ser un proyecto de diseño de libros de texto u otros materiales escolares. El análisis de instrucción tiene por finalidad responder a la cuestión: ¿cómo y cuándo se lleva a cabo la formación? La concepción del análisis de instrucción es transformadora e interpretativa ya que cualquier consideración que se haga sobre instrucción supone una adaptación de un programa concreto al marco de un aula, un centro o un proyecto.

Las categorías del análisis de instrucción consideran primero las funciones y tipos de tareas junto con su secuenciación (Marín, 1997, pp. 197-207); en segundo lugar los materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas (Coriat, 1997, pp. 155-175), y, tercero, como faceta interpretativa, la organización y gestión del trabajo en el aula.

La síntesis de instrucción se ocupa de compendiar los procesos de comunicación de los conocimientos, seleccionar las tareas y actividades, estimular las estrategias de intercambio y transmisión de ideas, todo ello referido a los conceptos y expectativas de aprendizaje previamente considerados para un tema concreto. La planificación de la secuencia de instrucción mediante una unidad didáctica es la clave de este momento de síntesis (Marín, 1997, pp. 195-228).

El análisis evaluativo atiende a la cuestión ¿cuáles han sido los resultados? Maneja tres tipos de categorías: en primer lugar los criterios e instrumentos para diagnosticar, orientar y valorar los aprendizajes; en segundo lugar, la interpretación de los rendimientos y resultados alcanzados; finalmente, la toma de decisiones para la revisión del proceso de enseñanza y aprendizaje que se infiere de los logros alcanzados (Rico, 1995, pp. 19-22). La síntesis evaluativa muestra los aprendizajes alcanzados, determina el desarrollo cognitivo de los escolares, enjuicia las fortalezas y debilidades del proceso de instrucción, previene sobre sus amenazas y señala sus oportunidades de mejora. Contribuye a tomar decisiones para la mejora del proceso de enseñanza/aprendizaje del tema o tópico matemático en estudio. El análisis evaluativo necesita datos empíricos para mostrar los logros y fallos de la planificación realizada y de su puesta en práctica (Díez, 2012, pp. 66-91). A la conclusión del análisis evaluativo se lleva a cabo la síntesis conjunta del análisis didáctico.

4.5 Procedimiento del análisis didáctico

Las categorías presentadas estructuran el procedimiento del análisis didáctico. Hemos estudiado las categorías como organizadores del currículo, con fundamento en el marco curricular; conciernen al análisis conceptual y a los cuatro tipos de análisis-síntesis antes descritos: estructural, cognitivo, de instrucción y evaluador. El conjunto de las categorías organizan un procedimiento para un proceso complejo de análisis-síntesis, que denominamos análisis didáctico de un tema matemático.

El análisis didáctico comienza con una revisión histórica y epistemológica de los conceptos centrales implicados en el tema. Continúa con el análisis del contenido matemático escolar correspondiente, que se complementa con una síntesis que selecciona y organiza los conceptos y procedimientos relevantes que articulan el tema matemático en estudio y determina sus focos prioritarios. Prosigue con un análisis cognitivo centrado en el aprendizaje de tales contenidos, que genera una síntesis sobre expectativas de aprendizaje, establecidas según dichos criterios y que sirve para organizar los aprendizajes. Avanza con el análisis de instrucción, que, a su vez, produce una nueva síntesis, que se expresa en el diseño de la unidad didáctica del tema cuyo estudio se contempla. Finalmente, un nuevo análisis sobre evaluación de la enseñanza y aprendizaje de unos contenidos matemáticos, da paso a una síntesis evaluadora del proceso. Esta descripción responde a un procedimiento estructurado y cíclico en educación matemática, como muestra la Figura 1.

5. Conclusión

Análisis conceptual y análisis de contenido son métodos de investigación consolidados en la historia del pensamiento y también en la investigación educativa. Su adecuación a la Didáctica de la matemática ha hecho surgir en pocos años nuevas ideas, que han dado forma a sistemas de categorías propios, según diversos fundamentos teóricos y técnicos. En este trabajo hemos mostrado la articulación de un marco amplio de investigación en Didáctica de la matemática, que denominamos Análisis didáctico, que integra los análisis anteriores. Hemos mostrado su objeto de estudio, sus finalidades y la estructura en que se articula, basada en nociones como las de matemáticas escolares, texto, fines, dimensiones del currículo, y organizadores curriculares. Hemos destacado su carácter cíclico, la relevancia de la dialéctica análisis/ síntesis y aquellas funciones a las que atiende. La experiencia y la investigación de varias décadas de trabajo avalan y dan contenido a la reflexión teórica que aquí se presenta.

Bibliografía

Arnauld, A. y Nicole, P. (1987). *La lógica o el arte de pensar*. Madrid: Alfaguara.

Bell, A., Costello, J. y Küchemann D. (1983). *Research on Learning and Teaching. A Review of Research in Mathematical Education.* NFER-NELSON, Windsor. UK.

Caraballo, R. (2010). *Análisis de ítems de pruebas de evaluación de diagnóstico en competencia matemática para segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria en España, 2008-2009: Un estudio exploratorio.* Universidad de Granada, Granada. España.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education*. Routledge, London. UK.

Coriat, M. (1997). Materiales, recurso y actividades: Un panorama. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* ICE/Horsori, Barcelona. España.

Descartes, R. (2011). *Discurso del método*. Gredos, Madrid. España.

Díez, A. (2012) *Evaluación del rendimiento aritmético escolar. Un estudio comparativo.* Universidad de Granada, Granada. España.

Euclides (1991). *Elementos Libros I-IV*. Gredos, Madrid. España.

Fernández-Cano, A. (2010). Drawing some evaluation patterns inferred from the biblical Gideon's passage. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*. *22*(4), 327-343.

Fernández-Cano, A. y Rico, L. (1996). *Prensa y Educación Matemática.* Síntesis, Madrid. España.

Ferrater, J. (1981). *Diccionario de Filosofía.* Alianza, Madrid. España.

Frege, G. (1996). *Escritos filosóficos*. Crítica, Barcelona. España.

González-Marí, J. L. (1998). *Números Naturales Relativos.* Comares, Granada. España.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.) *Conceptual and Procedural Knowledge: the case of Mathematics*. LEA, Londres. UK.

Honderich, T. (Ed.) (2001). *Enciclopedia Oxford de Filosofía*. Tecnos, Madrid. España.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.

Krings, H., Baumgartner, H. y Wild, C. (Eds.) (1977). *Conceptos fundamentales de filosofía*. Herder, Barcelona. España

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada, Granada. España.

Marín, A. (1997). Programación de Unidades Didácticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* ICE/Horsori, Barcelona. España.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España los siglos XVIII y XIX*. Universidad de Granada, Granada. España.

Pappus, (1970). Colección matemática. En F. Vera (Ed.), *Científicos Griegos Tomo II* (pp. 917-1015). Aguilar, Madrid. España.

Picado, M. (2012). *El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)*. Universidad de Granada, Granada. España.

Pineda, D. (2012). *La mente humana. Introducción a la filosofía de la psicología.* Cátedra, Madrid. España.

Real Academia Española (1970). *Diccionario de la Lengua Española*. RAE, Madrid. España..

Rico, L. (1991). Diseño curricular en Educación Matemática. Una perspectiva cultural. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 17-62). Alfar, Sevilla. España

Rico, L. (1992). *Proyecto Docente*. Universidad de Granada, Granada. España.

Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *EMA 1*(1), 4-24.

Rico, L. (1997a). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Síntesis, Madrid. España.

Rico, L. (1997b). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* ICE/Horsori, Barcelona. España.

Rico, L. (1998). Concepto de currículum desde la Educación Matemática. *Revista de Estudios del Currículum*, *3*, 7-42.

Rico, L. (2001). Análisis conceptual e investigación en Didáctica de la Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática*, (pp. 179-194). Universidad de Granada, Granada. España.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 39-63.

Rico, L. Antecedentes del Análisis Didáctico en Educación Matemática. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.) *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores.* Los autores, Granada. España.

Rico, L. y Fernández-Cano (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.) *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores.* Los autores, Granada. España..

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2000). Didáctica de la Matemática. En L. Rico y D. Madrid (Eds.), *Fundamentos didácticos de las áreas curriculares.* Síntesis, Madrid. España.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los número naturales. *Revista Suma 58*, 7- 23.

Scriven, M. (1988). Philosophical inquiry methods in education. En M. Jaeger (Ed.), *Complementary methods for research in education* (pp. 131-183). AERA, Washington. USA.

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria.* Madrid: Síntesis.

Sierra, M. (2010). *Trabajo original de investigación.* Universidad de Salamanca, Salamanca. España.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Morata, Madrid. España.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* ICE/Horsori, Barcelona. España.

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículum*. Madrid: Morata.

Zalta, E. (Ed.) (2012). *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Center for the Study of Language and Information, Standford. CA, USA. Recuperado el 12 de enero de 2013, de http://plato.stanford.edu/

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33.Marzo de 2013
páginas 29-37

As dimensões matemática, pedagógica e tecnológica na constituição de professores de matemática: apontamentos em relação aos saberes docentes

Vinícius Pazuch; Maurício Rosa

Fecha de recepción: 10/02/2012
Fecha de aceptación: 7/02/2013

Resumen	Este artículo presenta los aspectos que conforman los conocimientos docentes (Tardif, 2002) en vista de las dimensiones matemáticos, pedagógicos y tecnológicos, que forman el diseño de Cibereducación (Rosa, 2011). Para ello, se analizaron las cuentas de los dos profesores de matemáticas, de las entrevistas, llevadas a cabo antes del inicio de Cibereducación que estos docentes participen. A partir del análisis, se infiere que la investigación sobre la relación con el conocimiento es entender cómo los individuos perciben el mundo, cómo construir y es un tema íntimamente humano, social y natural (Charlot, 2005). Por lo tanto, la Cibereducación es necesario discutir las particularidades de cada maestro y su relación con las dimensiones indicadas. **Palabras clave**: Profesor. Saber. Educación Matemática.
Abstract	This article presents aspects that compose the teacher’s knowledge (Tardif, 2002) in relation of the mathematical, pedagogical and technological dimensions, which form Cybereducation conception (Rosa, 2011). For this propose, we analyzed statements of two mathematics teachers, which were collected through interviews that were conducted before the start of Cybereducation process. From the analysis, we infer that the research about relation between being and his/her knowledge is to understand how individuals perceive the world, how he/she builds him/herself, at the same time that he/she is an inextricably human, social and natural subject (Charlot, 2005). Thus, Cybereducation conception is necessary for discussion about the particularities of each teacher and their relation with the shown dimensions. **Keywords**: Teacher. Know. Mathematics Education.
Resumo	Este artigo apresenta aspectos que compõem os saberes docentes (Tardif, 2002) na perspectiva das dimensões matemática, pedagógica e tecnológica, que formam a concepção de Cyberformação (Rosa, 2011). Para tanto, analisamos depoimentos de duas professoras de matemática, coletados por meio de entrevistas semiestruturadas, realizadas antes do início da Cyberformação que tais professoras participam. A partir da análise, inferimos que pesquisar sobre a relação com o saber é compreender como o sujeito apreende o mundo, como se constrói, sendo um sujeito indissociavelmente humano, social e singular (Charlot, 2005). Assim, a Cyberformação se faz necessária para discussão sobre as particularidades de cada professor e sua relação com as dimensões apresentadas. **Palavras-chave**: Professor. Saber. Educação Matemática.

1. O contexto da pesquisa – pressupostos teóricos e metodológicos

Neste artigo estabelecemos relações com saberes de professoras que ensinam matemática na Educação Básica sob a perspectiva das dimensões matemática, pedagógica e tecnológica. Entendemos que tais dimensões são integrantes do processo de constituição do professor de matemática. É evidente que não podemos compreender a constituição de um professor em todas as suas dimensões, pois, particularmente, acreditamos que existem múltiplas dimensões, as quais abarcam crenças, concepções, conhecimentos e saberes que fazem parte da constituição de professores de matemática, porém, aqui, tratamos das dimensões matemática, pedagógica e tecnológica, que compõem a Cyberformação[1].

Para tanto, a nossa intenção é compor reflexões que possam circundar a questão de investigação deste artigo: **Quais as relações possíveis entre que o dizem professoras de matemática da Educação Básica sobre a prática docente e o uso de recursos tecnológicos com os pressupostos teóricos dos saberes docentes?** Neste viés, procuramos desencadear uma análise baseada em *pressupostos teóricos* abrangendo a Educação Matemática (D'ambrosio, 1996), a formação do professor que ensina matemática (Nacarato; Paiva, 2006), os saberes docentes (Tardif, 2002), a relação com o saber (Charlot, 2000; 2005) e o uso de recursos tecnológicos (Borba; Penteado, 2001; Kenski, 2003; Rosa, 2011).

Em relação aos *aspectos metodológicos*, adotamos a natureza qualitativa, que

> [...] engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações ou opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências [...] (Bicudo, 2004, p. 104).

Desta forma, consideramos as ideias, os julgamentos, as opiniões e possíveis reflexões dos sujeitos envolvidos (neste caso, professoras de matemática da Educação Básica).

Em particular, realizamos entrevistas semiestruturadas com duas professoras de matemática da Educação Básica, que juntamente com o pesquisador (primeiro autor) compõem um grupo[2] de Cyberformação. Para este artigo, pinçamos fragmentos das transcrições das entrevistas que são analisados em consonância com os pressupostos teóricos.

Nesta perspectiva, salientamos que a estruturação e as ideias decorrentes deste artigo são resultados parciais de pesquisa e de forma alguma representam conclusões, pelo contrário, acreditamos que a produção de saber ou de conhecimento ou até mesmo o recebimento de uma informação[3] é sempre passível

---

[1] Trata de uma concepção que abrange "[...] a formação vista sob a dimensão específica (matemática), pedagógica e tecnológica que assume o uso de TIC, em específico, o ciberespaço em ambiente de EaD sob a perspectiva do *ser-com*, *pensar-com* e *saber-fazer-com-TIC* (Rosa, 2011, p. 11). O "**Ser-com**-o-computador além de estar no mundo, cria um novo mundo, ou micromundo [...]" (Rosa, 2008, p.118); O "**Pensar-com**-o-computador de maneira a construir conhecimento nas relações com o mundo e com os outros" (Rosa, 2008, p. 106). "Um **saber-fazer** que é manifestado pelas ações intencionais efetuadas com o mundo, comigo mesmo e com os outros. Nesse sentido, ações desempenhadas na atividade, na construção de um produto, na prática [...]" (Rosa, 2008, p. 136).

[2] Tais professoras participam de um grupo de estudos com o pesquisador (primeiro autor), no qual, as ações e as discussões são sustentadas pela concepção de Cyberformação. O referido grupo faz parte de uma pesquisa de doutorado em andamento.

[3] "A informação é um dado exterior ao sujeito, pode ser armazenada, estocada, inclusive em um banco de dados; está 'sob a primazia da objetividade'. O conhecimento é o resultado de uma experiência pessoal ligada à atividade de um sujeito provido de qualidades afetivo-cognitivas; como tal, é intransmissível, está 'sob a primazia da subjetividade'. Assim, como a informação, o saber está 'sob a primazia da objetividade'; mas, é uma informação de que o sujeito se apropria.

de transformação ou de atualização. Assim, visamos mostrar as ideias construídas com o intuito de delinear apontamentos sobre os saberes de professoras de matemática da Educação Básica na perspectiva das dimensões matemáticas, pedagógicas e tecnológicas.

Desta forma, por necessidade, primeiramente traçamos apontamentos sobre um possível conjunto de saberes sistematizado por Tardif (2002), para em um segundo momento promover aproximações ou até mesmo distanciamentos ao confrontar com os dados coletados.

2. Alguns tipos de saberes identificados na literatura

Entendemos que contemplar a teorização sobre os saberes docentes na perspectiva de Tardif (2002) é ponto de partida para as pesquisas sobre a produção de saberes. Também, para construir nossa argumentação dos dados coletados em sincronia com a questão de investigação deste artigo.

Primeiramente, clarificamos que, para Tardif (2002) não há uma definição consensual a respeito do que é o saber, do que é um saber, enfim, do que são os saberes dos professores. Entretanto, se trata de uma "[...] atividade discursiva que consiste em tentar validar por meio de argumentações e de operações discursivas (lógicas, retóricas, dialéticas, empíricas, etc.) e linguísticas, uma proposição ou uma ação" (Tardif, 2002, p. 196). Desta forma, a partir de Tardif (2002), entendemos o saber como reflexões elaboradas a partir de conhecimentos teóricos, práticas, vivências ou experiências na interação de sujeitos.

Assim, ao tratar de saberes dos professores, "[...] chamaremos de 'saber' unicamente os pensamentos, as ideias, os juízos, os discursos, os argumentos que obedeçam a certas exigências de racionalidade" (Tardif, 2002, p. 199). Explicitamos, brevemente, "[...] que as exigências de racionalidade que guiam as ações e os discursos das pessoas não resultam de uma razão que vai além da linguagem e da práxis: elas dependem das razões dos atores e dos locutores, e do contexto no qual eles falam e agem" (Tardif, 2002, p. 199-200).

A elaboração conceitual proposta por Tardif (2002) estrutura que os saberes docentes correspondem à trama de *saberes profissionais*, (constituídos na formação inicial, oriundos das Ciências da Educação e da ideologia pedagógica), o que incluem os *saberes pedagógicos*, construídos por "[...] reflexões racionais e normativas que conduzem a sistemas mais ou menos coerentes de representação e de orientação da atividade educativa" (Tardif, 2002, p. 37) correlacionados com os *saberes disciplinares*, *curriculares* e *experienciais*.

Os *saberes disciplinares* são inerentes de cada objeto de saber específico (matemática, física, química, história, entre outros), que segundo Tardif (2002, p. 38) "[...] emergem da tradição cultural e dos grupos sociais produtores de saberes". Os *saberes curriculares*, na visão de Tardif (2002), se referem aos objetivos, métodos e

Desse ponto de vista, é também conhecimento, porém, desvinculado do 'invólucro dogmático no qual a subjetividade tende a instalá-lo'. O saber é produzido pelo sujeito confrontado a outros sujeitos, é construído em 'quadros metodológicos'. Pode, portanto, 'entrar na ordem do objeto'; e torna-se, então, 'um produto comunicável', uma 'informação disponível para outrem'" (Monteil *apud* Charlot, 2000, p. 61).

conteúdos que os professores devem aprender a aplicar[4]. Em nosso ponto de vista, também estes saberes podem ser produzidos pelos professores, pois os planejamentos, as escolhas metodológicas ou até a “invenção” de atividades de ensino necessitam argumentações e justificativas. É relevante mencionar que a possibilidade de produção de saberes curriculares está ligada às correlações com outros saberes.

Os *saberes experienciais* se delineiam “[...] como núcleo vital do saber docente, núcleo a partir do qual os professores tentam transformar suas relações de interioridade com sua própria prática” (Tardif, 2002, p. 54). Nesse contexto, os saberes experienciais são “[...] o conjunto de saberes atualizados, ‘adquiridos’ e necessários no âmbito da prática da profissão docente e que não provêm das instituições de formação nem dos currículos” (Tardif, 2002, p. 48-49). Na perspectiva do autor, tais saberes não estão sistematizados em doutrinas ou teorias.

A organização das atividades de ensino, recursos, estratégias metodológicas (o planejamento) atreladas ao saber matemático englobam os saberes curriculares (Tardif, 2002). Os saberes experienciais ou da prática são produtos das articulações realizadas pelo professor entre os saberes pedagógicos, disciplinares e curriculares (Fiorentini; Souza Jr.; Melo, 1998; Tardif, 2002). Nesta perspectiva, para Fiorentini, Souza Jr e Melo (1998) tais saberes parecem mais próximos aos modos de ser e agir do professor, pois estão relacionados às múltiplas dimensões da prática docente.

3. Dimensões na constituição de professoras de matemática da Educação Básica – relações com os saberes docentes

Acreditamos que múltiplas dimensões integram a constituição de professores de matemática, sejam elas: matemática, pedagógica, tecnológica, cultural, social, psicológica. Esclarecemos que a presença ou não destas dimensões na história de vida, na prática docente (Fiorentini; Souza Jr.; Melo, 1998) são delineadas por momentos, ações, interações, vivências, experiências dos professores de matemática ao longo de suas trajetórias pessoais e profissionais.

Desta forma, partimos do entendimento que múltiplas dimensões podem ser reveladas ou identificadas quando tratamos do professor e da sua relação com o saber (Charlot, 2000). Neste sentido, neste artigo, por meio da análise de depoimentos transcritos de entrevistas semiestruturadas, com duas professoras de matemática, estabelecemos relações com os saberes docentes (Tardif, 2002) envolvendo as dimensões matemática, pedagógica e tecnológica.

Os depoimentos transcritos a partir das entrevistas, as quais versaram sobre a formação inicial e continuada, a prática docente, o ensino de geometria e a relação com as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) de duas professoras (nomeadas por Professora 1 e Professora 2) ao serem confrontados com os pressupostos teóricos buscam responder a questão de investigação.

[4] Defendemos que não há um “transporte” ou transmissão de um saber (Tardif, 2002) de um lugar para outro, mas, sim, significações e/ou constituições conceituais oriundas de reflexões num contexto específico. Assim, as relações interpessoais e argumentativas nas e sobre as ações decorrentes da prática docente podem inaugurar saberes docentes.

Desta forma, questionamos: o que um professor de matemática precisa saber? (Sztajn, 2002). No depoimento, a Professora 1, diz: "*eu acho que primeiramente o conteúdo, precisa saber isso, e depois pesquisar um pouquinho como é que funciona, na criança ou adulto, como ele aprende, em cada fase...*" (Entrevista – Agosto de 2011). A dimensão matemática se apresenta pelo saber disciplinar, com ênfase no "*conteúdo*", mencionado pela professora, ao mesmo tempo, que o "*como ele aprende*", não dissocia o saber do sujeito que está em processo de aprendizagem (Charlot, 2005). Queremos dizer, que para Charlot (2005) não há saber sem relação com o sujeito, não há saber sem sujeito e nem sujeito sem saber.

Por outro lado, para a Professora 2, o professor de matemática precisa saber também

> [...] *trabalhar com as diferenças, eu tenho um aluno que tem dificuldade motora, ele não copia nada e aí como você vai trabalhar com ele? Você percebe que no decorrer da aula ele participa demais, ele tem um desenvolvimento cognitivo matemático impressionante, eu acho que o professor também tem que saber lidar com isso [...]* (Entrevista – Agosto de 2011).

Entendemos que a preocupação provinda de "reflexões" sobre a prática, explícita na argumentação da professora 2 pode ser analisada por diferentes dimensões: psicológica, pedagógica, matemática, social. Olhamos para a dimensão pedagógica, sob uma perspectiva ampla que aglutina as crenças/ concepções sobre educação e sobre o ensino de matemática. Pela ótica de Tardif (2002), o depoimento da Professora 2 se caracteriza como saberes experienciais, ao passo que, "[...] o ensino se desenvolve num contexto de múltiplas interações que representam condicionantes diversos para a atuação do professor" (Tardif, 2002, p. 49). O autor salienta que os condicionantes dizem respeito a situações particulares que não são passíveis de definições acabadas, necessitando improvisação e habilidade pessoal, por parte do professor, para "lidar" com diferentes variáveis no exercício da prática docente.

Ainda, com relação à dimensão pedagógica, identificamos no depoimento da Professora 2, indícios da presença da sua concepção sobre o processo de ensino de matemática, e mais, explicitamente, sobre concepção de aprendizagem matemática, que estão associadas aos saberes disciplinares, saberes pedagógicos e sobretudo aos saberes experienciais.

> [...] *a relação professor-aluno, isso ajuda muito, quando tu tem uma relação de confiança...tá difícil professora, é difícil. Mas, nós vamos conseguir, nós vamos fazer juntos, nós vamos nos ajudar, acho que quando você consegue 'aconchegar' eles assim, você vem aqui para aprender, é um espaço de dificuldades* [se referindo à sala de aula] *sim, mas que nós juntos vamos superar, né...é uma matéria* [matemática] *que às vezes não agrada a todos, mas que todos são capazes de aprender...nesse momento da minha vida tenho me preocupado com o processo de aprendizagem* (Professora 2, Entrevista – Agosto de 2011 – Grifos nossos).

Por meio deste depoimento podemos inferir que a Professora 2 estabelece que a relação com os saberes é a relação com o mundo, com os outros e consigo mesmo (Charlot, 2000). Ao falar (depoimento) sobre o que de fato ocorre no limiar da sala de aula, na vivência com os estudantes, na relação com a própria matemática remete à sua constituição como profissional da Educação Básica.

Ao tratar da dimensão tecnológica, questionamos as professoras no sentido do uso de recursos tecnológicos em aulas de matemática:

> *Eu acho que é importante, porque hoje a gente está vivendo em um mundo diferente daquele em que eu aprendi, então, é necessário que eles* [estudantes] *também tenham esse contato, mas eu não sei fazer isso, eu acho que é importantíssimo, pra eles* [estudantes] *e pra mim também, eu também vou aprender uma coisa que eu nunca aprendi, que eu não sei né* (Entrevista – Professora 1 – Agosto de 2011).

> *Eu acho importante, mas eu não tenho participado de cursos, pois aqui na escola era meio complicado [usar], mas neste último [evento] eu participei de um curso do GeoGebra, então, muito bacana essa questão de poder movimentar, coisas que com eles no papel você não consegue fazer eles visualizarem [estudantes], a movimentação, assim sabe... Coisas que não teria com o material manipulativo, que é com isso que eu trabalho, o meu manipulativo não dá essa visão pra eles* [estudantes]*, é algo assim diferente* (Entrevista – Professora 2 – Agosto de 2011).

Podemos olhar para os depoimentos das professoras a partir de distintos ângulos e diferentes análises podem ser descortinadas/construídas. Para estes dois fragmentos, propomos olhar para dois aspectos. O primeiro aspecto diz respeito à atualização tecnológica "necessária", pois *a gente está vivendo em um mundo diferente daquele em que eu aprendi* (Professora 1). De fato, "As velozes transformações tecnológicas da atualidade impõem novos ritmos e dimensões à tarefa de ensinar e aprender. É preciso estar em permanente estado de aprendizagem e adaptação ao novo" (Kenski, 2003, p. 30). Entendemos que somente a atualização tecnológica não transforma o contexto escolar, mas sim, um movimento de refletir porque usamos e como usamos as TIC.

O segundo aspecto, em relação ao uso de TIC, seja Internet, software, que "[...] só se consolida se esse uso considerar a mídia[5] como parte do processo cognitivo, como meio que abre diferentes fronteiras, diferentes horizontes de se pensar sobre o mesmo tópico matemático (Rosa, 2011, p. 9). A professora 2, ao mencionar que observou que a partir do "[...] *curso do GeoGebra* [...] *essa questão de poder movimentar, coisas que com eles no papel você não consegue fazer eles visualizarem* [estudantes]" o que pode "Torna-se uma forma de se potencializar a produção do conhecimento matemático [...]" (Rosa, 2011, p. 9). Em consonância, Zulatto e Borba (2006) declaram que o uso de softwares de geometria dinâmica (como é o caso do GeoGebra), "[...] pode transformar o tipo de atividade desenvolvida em sala de aula" (Zulatto; Borba, 2006, p. 2), o que requer a criação de atividades, ou, até mesmo, "[...] problemas podem ser propostos aos alunos de tal forma que seja preciso realizar diferentes construções, e estas podem levar os alunos a explorar as invariantes das figuras, através da possibilidade do arrastar" (Zulatto; Borba, 2006, p. 2).

Rosa (2011) e Zulatto e Borba (2006) pontuam a necessidade de usar TIC para possibilitar transformações cognitivas e criar de atividades que possibilitem tratar do saber disciplinar matemático de forma distinta, em que, de fato, se produzam práticas docentes diferentes daquelas possíveis em outros ambientes ou com o uso de outros recursos, o que necessariamente mobiliza a produção de outros saberes,

[5] "São meios para a realização do processo comunicativo" (Rosa, 2008, p. 106).

os saberes sobre as TIC, que na tipologia de Tardif (2002) poderiam se vincular aos saberes curriculares. No entanto, os saberes curriculares para este autor representam o programa, os recursos previamente estabelecidos. E, se o currículo escolar não prevê o uso de TIC em aulas de matemática? Entendemos que outras formas da relação com o saber-fazer-com-TIC (Rosa, 2011) ou, até mesmo do não saber-fazer-com-TIC podem ser reveladas.

Nesta perspectiva, outro aspecto presente nos depoimentos é a relação do não-saber-fazer-com-TIC, derivada de limitações da própria formação ou até mesmo da necessidade de conforto, de estar em uma zona de conforto, “[...] onde quase tudo é conhecido, previsível, controlável” (Borba; Penteado, 2001, p. 56), para assim promover o uso de TIC na construção de atividades e produção de possíveis saberes no contexto escolar.

> *Eu tenho muito medo das coisas, eu preciso ter segurança, quando eu não tenho segurança eu não faço [...]* (Entrevista – Professora 1 – Agosto de 2011 – Grifos nossos).
>
> *As limitações são como professora, não são deles, são minhas como professora, eu acho que eu tenho, não digo saber tudo, mas dominar as questões tecnológicas, e problemas e tentar solucionar né, o mínimo você tem que saber* [...] *eu tive uma formação que me deixa meio amarrada, a gente tem que se mexer e procurar um meio, a dificuldade é minha enquanto professora, de ter uma dificuldade e eu não saber resolver, uma dificuldade tecnológica, mais instrumental, sei lá, emperrou o computador, e agora, aperta aonde? Vai aonde?* [...] (Entrevista – Professora 2 – Agosto de 2011).

Assim, as análises feitas neste artigo, por intermédio de depoimentos das próprias professoras, permitiram identificar e revelar relações com os saberes docentes na perspectiva das dimensões matemática, pedagógica e tecnológica. Tais relações são aspectos da constituição profissional das referidas professoras.

Deste modo, compartilhamos a concepção de Charlot (2000, p. 62), a qual esclarece “[...] que não há “saber” sem relação entre sujeito e objeto, sujeito e outros sujeitos, sujeito e realidades”. Isto implica considerar as múltiplas relações ditas e/ou argumentadas pelas próprias professoras no tange, por exemplo, à relação das professoras com os recursos tecnológicos, à relação entre professora e estudantes e a relação destes com o mundo.

4. Apontamentos “finais”

Entendemos que ao longo deste artigo produzimos possíveis contribuições para a Educação Matemática, pois consideramos que as relações possíveis entre que o dizem professoras de matemática da Educação Básica sobre a prática docente e o uso de recursos tecnológicos, ao serem confrontadas com os pressupostos teóricos dos saberes docentes, se apresentam de forma plural, temporal e heterogênea. Isso pode abrir horizontes de significados em termos de uso de TIC nas aulas de matemática. Pesquisar sobre a relação com o saber é compreender como o sujeito apreende o mundo, como se constrói, sendo um sujeito indissociavelmente humano, social e singular (Charlot, 2005). Particularmente, as relações estabelecidas dizem respeito à ênfase dada ao saber disciplinar matemático, “*ao conteúdo*”, ao mesmo tempo, que são apontadas relações particulares do professor com estudantes, o que mostra como a prática docente revela saberes experienciais, o que depende da concepção do professor sobre a Educação e sobre o ensino de matemática (saberes pedagógicos).

Também, as relações com o uso de recursos tecnológicos, que podem estar vinculadas aos saberes curriculares, na perspectiva de Tardif (2002) se mostraram por meio da importância atribuída do uso de TIC em atividades da prática docente, porém, se limitam a isso. Ou seja, não há um entendimento da possível transformação/potencialização do uso de TIC para a produção do conhecimento matemático em sala de aula. Nesse sentido, na Cyberformação se faz necessária a discussão sobre as particularidades de cada professor e sua relação com as dimensões apresentadas nesse artigo, para que essa contribua de forma significativa ao processo de formação tecnológica do professor de matemática.

Bibliografia

Bicudo, M. A. V. (2004). Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: Borba, M. C.; Araújo, J. L. (Orgs.) *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 99-112.

Borba, M. C.; Penteado, M. G. (2001). *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Charlot, B. (2000) *Da relação com o saber*: elementos para uma teoria. Porto Alegre: Artmed.

Charlot, B. (2005) *Relação com o saber, formação dos professores e globalização*: questões para a educação hoje. Porto Alegre: Artmed.

D'ambrosio, U. (1996). *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus.

Fiorentini, D.; Souza Jr, A. J.; Melo, G. F. A. (1998). Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: Geraldi, C. M. G.; Fiorentini, D.; Pereira, E. M. A. (Orgs.). *Cartografias do trabalho docente*: professor(a)-pesquisador(a). Campinas, SP: Mercado de Letras: Associação de Leitura do Brasil – ALB, 307-335.

Kenski, V. M. (2003). *Tecnologias e ensino presencial e a distância*. Campinas, SP: Papirus.

Nacarato, A. M.; Paiva, M. A. V. (2006). A formação do professor que ensina matemática: estudos e perspectivas a partir das investigações realizadas pelos pesquisadores do GT 7 da SBEM. In: Nacarato, A. M.; Paiva, M. A. V. (Orgs.) *A formação do professor que ensina matemática*: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

Pazuch, V. (2010). *Produção e Mobilização de Saberes a partir das Práticas de Professoras que Ensinam Matemática com Tecnologia Informática*. 2010. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí.

Rosa, M. (2008). *A Construção de Identidades Online por meio do Role Playing Game*: relações com o ensino e aprendizagem de matemática em um curso à distância. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Rosa, M. (2011). Cultura Digital, Práticas Educativas e Experiências Estéticas: interconexões com a Cyberformação de Professores de Matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 33., 2011, Natal, RN. *Anais...* Natal, RN: ANPED.

Sztajn, P. (2002). O que precisa saber um professor de matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. *Educação Matemática em Revista*. Ano 9, n. 11, Edição Especial.

Tardif, M. (2002). *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis, RJ: Vozes.

Zulatto, R. B. A.; Borba, M. C. (2006) Diferentes mídias, diferentes tipos de trabalhos coletivos em cursos de formação continuada de professores a distância: pode me passar a caneta, por favor? In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Águas de Lindóia, SP. *Anais...* Águas de Lindóia, SP: SBEM.

Vinícius Pazuch é licenciado em Matemática pela Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, mestre em Educação nas Ciências pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Atualmente é doutorando em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Luterana do Brasil, Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: **viniuch@hotmail.com**

Maurício Rosa possui graduação em Matemática Licenciatura Plena pela Universidade Luterana do Brasil, mestre e doutor em Educação Matemática pela Universidade Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Unesp/Rio Claro (SP). Atualmente é professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Luterana do Brasil, Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: **mauriciomatematica@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 39-52

Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria

Lilia P. Aké, Juan D. Godino, Margherita Gonzato

Fecha de recepción: 21/06/2012
Fecha de aceptación: 7/02/2013

Resumen

En este trabajo sintetizamos algunas de las características del razonamiento algebraico elemental que motivan la posibilidad y el interés de su desarrollo desde los primeros niveles educativos. Así mismo, reseñamos las expectativas de aprendizaje del razonamiento algebraico en algunas propuestas curriculares para los distintos niveles de educación primaria. Con el fin de facilitar el reconocimiento por parte de los maestros de los rasgos característicos del razonamiento algebraico escolar incluimos ejemplos de actividades matemáticas clasificadas según tres niveles de algebrización. Esta propuesta puede facilitar al profesor distinguir las actividades aritméticas de las propiamente algebraicas, junto con otros dos tipos en los que el nivel de algebrización es intermedio.

Palabras clave: razonamiento algebraico, niveles de algebrización, formación de maestros, orientaciones curriculares.

Abstract

In this paper we summarize some characteristics of elementary algebraic thinking that motivate the possibility and interest of its development from the earliest levels of education. Likewise, we review the learning expectations for algebraic reasoning proposed for the different levels at the primary education curriculum. Examples of mathematical activities classified into three levels of algebraization are included in order to facilitate the teachers' recognition of the school algebraic thinking features. This proposal may help the teacher to distinguish arithmetic from proper algebraic activities, as well as from two other types of activities with incipient or intermediate algebraization levels.

Keywords: algebraic reasoning, algebraization levels, teacher training, curriculum guidelines.

Resumo

Neste trabalho sintetizamos algumas das características do pensamento algébrico elementar, os quais motivam a possibilidade e interesse do seu desenvolvimento desde os primeiros níveis educativos. Também apontamos as expectativas de aprendizagem do pensamento algébrico em algumas propostas curriculares para os distintos níveis de educação primária. Com o propósito de facilitar o reconhecimento, por parte dos professores, de aspectos característicos do pensamento algébrico escolar, incluímos exemplos de atividades matemáticas classificadas segundo três níveis de algebrização. Esta proposta pode facilitar ao professor distinguir as atividades aritméticas das propriamente algébricas, junto com outros dois tipos, nos quais o nivel de algebrização é intermediário.

Palavras-chave: raciocínio algébrico, os níveis de algebraization, formação de professores, currículo diretrizes.

1. Introducción

Diversas investigaciones y directrices curriculares proponen introducir ideas y modos de pensar propias del álgebra desde los primeros niveles de educación primaria. Este es el caso de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) donde se propone el *Álgebra* como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad para trabajar con los niños desde los primeros grados. Como afirman Godino y Font (2003), ciertamente no se trata de impartir un "curso de álgebra" a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato (grados K-12).

Como mostraremos en la sección 2 de este trabajo el *álgebra escolar* incluye no sólo las ecuaciones y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos (planteamiento de ecuaciones en la resolución de problemas), sino también el estudio de los patrones numéricos y geométricos, la determinación de reglas generales y el reconocimiento y uso de propiedades de las operaciones que caracterizan la estructura de los sistemas numéricos. En la sección 3 sintetizamos las expectativas de aprendizaje del razonamiento algebraico elemental que proponen documentos curriculares (NCTM, 2006; CCSS, 2011). En la sección 4 describimos ejemplos de actividades matemáticas que permiten distinguir entre el razonamiento aritmético del propiamente algebraico, distinción que no es clara en las mencionadas directrices curriculares y otras publicaciones que proponen desarrollar el pensamiento algebraico desde los primeros niveles educativos (Cai y Knuth, 2011; Molina, 2009). Finalizamos este trabajo con algunas implicaciones para la formación de profesores de educación primaria.

2. Algunas características del álgebra escolar

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones.

Algunas características del razonamiento algebraico[1] que son sencillas de adquirir por los niños, y que, por tanto, deben conocer los maestros en formación, son:

1. El uso de símbolos permite expresar de manera eficaz las generalizaciones de patrones y relaciones. Entre los símbolos destacan los que representan variables y los que permiten construir ecuaciones e inecuaciones.
2. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números. Las variables tienen significados diferentes dependiendo de si se usan como representaciones de cantidades que varían, como representaciones de valores específicos desconocidos, o formando parte de una fórmula.

[1] En Godino, Castro, Aké, y Wilhelmi (2012) se presenta un análisis más sistemático de la naturaleza del razonamiento algebraico elemental.

3. Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados. La idea de función comienza con actividades elementales con patrones, que a menudo se piensa que es un precursor necesario para otras formas de generalización matemática. Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes ya sea físicas, geométricas o numéricas.

Godino y Font (2003) constatan la existencia en la escuela de una concepción tradicional y limitada del álgebra escolar denominada "aritmética generalizada". Esta concepción supone que el álgebra es un campo de las matemáticas donde se manipulan letras que representan números no especificados. Así, los objetos que se ponen en juego en la aritmética y la "aritmética generalizada" son los mismos: números, operaciones sobre números y relaciones entre los números; las diferencias entre ambas partes de las matemáticas está en la generalidad de las afirmaciones:

1. La aritmética trata con números específicos expresados mediante los numerales habituales:

$$20;\quad -7;\quad {}^{14}/_{5};\quad 4{,}75;\quad \sqrt{3}$$

O mediante expresiones numéricas en las que los números se combinan con los símbolos de las operaciones aritméticas:

$$45 \times 12;\quad \frac{73+5{,}4}{3};\quad (13-7{,}4)^3$$

2. El álgebra trata con números no especificados (incógnitas, variables) representados por letras, como *x*, *y*, *t*, *v*, o bien expresiones con variables:

$$3x-5;\quad x^2-x+5;\quad (x+5)(x-7);\quad 3uv+4v+u+v+1$$

Este *tipo de álgebra* está presente desde los primeros niveles educativos. Siempre que se necesite expresar una generalización, el simbolismo y las operaciones algebraicas resultan de gran utilidad.

Es necesario, sin embargo, que los maestros tengan una visión del álgebra escolar más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales. Algunas características del álgebra que son fáciles de apreciar son:

1. El uso de símbolos, habitualmente letras, que designan elementos variables o genéricos de conjuntos de números, u otras clases de objetos matemáticos.

2. La expresión de relaciones entre objetos mediante ecuaciones, fórmulas, funciones, y la aplicación de unas reglas sintácticas de transformación de las expresiones.

Pero estas características del álgebra son sólo su parte superficial. La parte esencial es la actividad que se hace con estos instrumentos. Las variables, ecuaciones, funciones, y las operaciones que se pueden realizar con estos medios, son instrumentos de *modelización matemática* de problemas procedentes de la propia matemática (aritméticos, geométricos), o problemas aplicados de toda índole (de la vida cotidiana, financieros, físicos, etc.). Cuando estos problemas se expresan en el lenguaje algebraico producimos un nuevo sistema en el que se puede explorar la estructura del problema modelizado y obtener su solución. La modelización algebraica de los problemas proporciona nuevas capacidades para analizar las soluciones, generalizarlas y justificar el alcance de las mismas. Permite además reducir los tipos de problemas y unificar las técnicas de solución.

Esta concepción ampliada del álgebra como instrumento de modelización matemática es la que se puede y debe ir construyendo progresivamente desde los primeros niveles educativos, puesto que la modelización algebraica es una cuestión de menor o mayor grado. Aunque el cálculo literal, basado en las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos se suele iniciar en secundaria, los procesos de simbolización, expresión de relaciones, identificación de patrones, son propios de los primeros niveles de algebrización.

3. Estándares sobre álgebra en primaria

Como hemos indicado el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) propone incluir un bloque temático sobre álgebra en los diseños curriculares para la educación infantil y primaria. Para dicho bloque se establecen 4 estándares de contenido algebraico, a saber: Comprender patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos; usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y analizar el cambio en diversos contextos.

Estos estándares han sido desarrollados de manera más explícita para los distintos niveles o grados en el documento *Curriculum Focal Points* (NCTM, 2006), donde se amplían y ejemplifican las directrices de los Principios y Estándares 2000. Los focos curriculares son temas y nociones matemáticas importantes que permiten estructurar y organizar un diseño curricular y unas secuencias de instrucción a lo largo de esos niveles. Son tres los criterios empleados para considerar un tema concreto como un foco curricular (p. 5):

1. Ha de ser matemáticamente importante desde el punto de vista de los estudios posteriores en matemáticas y también por su uso en aplicaciones dentro y fuera de la escuela.
2. Se debe ajustar a lo que ya se conoce sobre el aprendizaje de las matemáticas.
3. Ha de conectarse de manera lógica con las matemáticas en los niveles anteriores y posteriores.

Los puntos focales del NCTM (2006) han sido desarrollados por otro documento curricular más reciente en el que se proponen expectativas de aprendizaje más explícitas para cada uno de los grados escolares y cada dominio del contenido, en particular, el algebraico. Se trata del documento, *Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM, 2011)*[2]*.*

Indicamos a continuación, para cada uno de los grados escolares de primaria, los contenidos algebraicos que se proponen en el CCSSM (2011).

[2] National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. (2011). Disponible en, http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

3.1. Expectativas de aprendizaje para los grados 1 y 2

El documento Common Core State Standard for Mathematics propone las siguientes directrices (p. 15):

Representar y resolver problemas de sumar y restar.

1. Resolver problemas verbales que requieren una suma de tres números cuya suma sea menor o igual que 20, por ejemplo, usando objetos, dibujos, y ecuaciones con *símbolos para el número desconocido* para representar el problema.

Comprender y aplicar propiedades de las operaciones y las relaciones entre la suma y la resta.

1. Aplicar las propiedades de las operaciones como estrategias para sumar y restar (sin usar términos formales). Ejemplos: Si se conoce que $8+3=11$, entonces también se conoce que $3+8=11$ (Propiedad conmutativa de la adición). Para sumar $2+6+4$, los dos segundos números se puede sumar para tener una decena, de manera que $2+6+4=2+10=12$ (Propiedad asociativa de la adición).
2. Comprender la sustracción como un problema de sumando desconocido. Por ejemplo, restar $10-8$ encontrando el número que sumado a 8 da 10

Trabajar con ecuaciones que involucran la suma y la resta.

1. Comprender el significado del signo igual, y determinar si son verdaderas o falsas las ecuaciones que involucran la adición y sustracción. Por ejemplo, ¿cuáles de las siguientes ecuaciones son verdaderas y cuáles falsas? $6=6$; $7=8-1$; $5+2=2+5$; $4+1=5+2$.
2. Determinar el número desconocido en una ecuación de suma o resta que relaciona tres números. Por ejemplo, determinar el número desconocido que hace verdadera la ecuación en cada una de las ecuaciones, $8+�=11$; $5=�-3$.

Para el grado 2 el CCSS propone similares directrices sobre álgebra que para el grado 1, en este caso involucrando las operaciones de sumar y restar números menores que 100.

3.2. Expectativas de aprendizaje para el grado 3

El documento CCSS incluye las siguientes directrices para desarrollar el pensamiento algebraico en el tercer grado:

Representar y resolver problemas que impliquen la multiplicación y la división

1. Determinar el número desconocido en una ecuación en la que interviene una multiplicación o una división relacionando tres números. Ejemplo: Determina el número que falta para hacer que la ecuación sea verdadera en cada una de las siguientes expresiones: $8\times\blacktriangle=48$; $5=�\div 3$.

Comprender las propiedades de la multiplicación y la relación entre multiplicación y división.

1. Aplicar las propiedades de las operaciones como estrategias para multiplicar o dividir. Ejemplos: Si se conoce que $6\times 4=24$, entonces también se conoce que $4\times 6=24$ (Propiedad conmutativa de la multiplicación).

Sabiendo que 8 × 5 = 40 y que 8 × 2 = 16, se puede hallar 8 × 7 como 8 × (5 + 2) = (8 × 5) + (8 × 2) = 40 + 16 = 56 (Propiedad distributiva).

2. Comprender la división como un problema de factor desconocido. Por ejemplo, resolver 32 ÷ 8 encontrando el número que multiplicado por 8 da como resultado 32.

Resolver problemas que implican las cuatro operaciones, e identificar y explicar patrones aritméticos.

1. Resolver problemas verbales de dos etapas usando las cuatro operaciones. Representar estos problemas usando ecuaciones con letras que están en lugar de la cantidad desconocida. Evaluar que las respuestas son razonables usando cálculo mental y estrategias de estimación, incluyendo el redondeo.
2. Identificar patrones aritméticos (incluyendo patrones en las tablas de sumar o de multiplicar), y explicarlos usando las propiedades de las operaciones. Por ejemplo, observar que 4 veces un número es siempre par, y explicar por qué 4 veces un número se puede descomponer en dos sumandos iguales.

3.3. Expectativas de aprendizaje para el grado 4

El documento CCSS incluye las siguientes directrices para desarrollar el pensamiento algebraico en el cuarto grado:

Usar las cuatro operaciones con números naturales para resolver problemas

1. Resolver problemas verbales de varias etapas planteados con números naturales y que tienen respuesta natural usando las cuatro operaciones, incluyendo problemas en los que el resto debe ser interpretado. Representar estos problemas usando ecuaciones con una letra para indicar la cantidad desconocida. Evaluar el carácter razonable de las respuestas usando cálculo mental y estrategias de estimación, incluyendo el redondeo.

Generar y analizar patrones.

1. Generar un patrón numérico o geométrico que sigue una regla dada. Identificar las características aparentes del patrón que no estaban explícitas en la propia regla. Por ejemplo, dada la regla "Sumar 3" y que empieza en el 1, generar términos de la secuencia resultante y observar que los términos aparecen alternando entre números pares e impares. Explicar informalmente porqué los números continuarán alternando de ese modo.

3.4. Expectativas de aprendizaje para el grado 5

En el grado 5 el CCSS se incluye la siguiente directriz en relación al desarrollo del razonamiento algebraico:

Analizar patrones y relaciones.

1. Generar dos patrones numéricos usando dos reglas dadas. Identificar relaciones aparentes entre los términos correspondientes. Formar pares ordenados constituidos por los términos que se corresponde en los dos patrones, y graficar pares ordenados sobre el plano de coordenadas. Por ejemplo, dada la regla "Sumar 3" empezando en el número 0, y dada la regla "Sumar 6" a partir del 0, generar términos de las secuencias resultantes, y

observar que los términos de una secuencia son el doble de los términos correspondientes en la otra secuencia. Explicar informalmente porqué esto es así.

3.5. Expectativas de aprendizaje para el grado 6

El documento *Common Core State Standards for Mathematics* (2011) es más explícito en cuanto a los tipos de conocimientos y competencias algebraicas a desarrollar en los estudiantes de 6º grado. Concretamente proponen las siguientes directrices:

Aplicar y extender conocimientos previos de aritmética a expresiones algebraicas.

1. Escribir, leer, y evaluar expresiones en las que se usan letras en lugar de números.
    - Escribir expresiones que registren operaciones con números y con letras en lugar de sólo números. Por ejemplo, expresar el cálculo "Restar *y* de 5" como $5 - y$.
    - Identificar partes de una expresión usando términos matemáticos (suma, término, producto, factor, cociente, coeficiente); ver una o más partes de una expresión como una única entidad. Por ejemplo, describir la expresión $2(8+7)$ como un producto de dos factores; ver $(8+7)$ tanto como una única entidad como una suma de dos términos.
    - Evaluar expresiones para valores específicos de sus variables. Incluir expresiones que surjan de fórmulas usadas en problemas reales. Realizar operaciones aritméticas, incluyendo aquellas que implican exponentes naturales, en el orden convencional cuando no hay paréntesis para especificar un orden particular (Orden de operaciones). Por ejemplo, usar las fórmulas $V = s^3$ y $A = 6s^2$ para encontrar el volumen y área superficial de un cubo con lados de longitud $s = 1/2$.
2. Aplicar las propiedades de las operaciones para generar expresiones equivalentes. Por ejemplo, aplicar la propiedad distributiva a la expresión $3(2+x)$ para producir la expresión equivalente $6 + 3x$; aplicar la factorización a la expresión $24x + 18y$ para producir la expresión equivalente $6(4x+3y)$; aplicar las propiedades de las operaciones a $y + y + y$ para producir la expresión equivalente $3y$.
3. Identificar cuando dos expresiones son equivalentes (esto es, cuando las dos expresiones designan al mismo número independientemente de qué valor se sustituye en ella). Por ejemplo, las expresiones $y + y + y$ y $3y$ son equivalentes porque designan el mismo número cualquiera que sea el valor que tome y.

Razonar sobre y resolver ecuaciones e inecuaciones con una variable.

1. Comprender la resolución de una ecuación o inecuación como un proceso de responder una cuestión: ¿qué valores de un conjunto especificado, si existe, hace la ecuación o inecuación verdadera? Usar la sustitución para determinar si un número dado en un conjunto especificado hace a una ecuación o inecuación verdadera.
2. Usar variables para representar números y escribir expresiones cuando se resuelve un problema matemático o del mundo real; comprender que una

variable puede representar un número desconocido, o, dependiendo del propósito que se tenga, cualquier número de un conjunto especificado.

3. Resolver problemas matemáticos o del mundo real escribiendo y resolviendo ecuaciones de la forma $x+p=q$, para casos en que p,q y x son números racionales no negativos.
4. Escribir una inecuación de la forma $x>c$, o $x<c$ para representar una restricción o condición en un problema matemático o del mundo real. Reconocer que las desigualdades de la forma $x>c$, o $x<c$ tienen un número infinito de soluciones; representar soluciones de tales inecuaciones sobre diagramas numéricos lineales.

Representar y analizar relaciones cuantitativas entre variables dependientes e independientes

1. Usar variables para representar dos cantidades en un problema del mundo real que cambian en relación a otra; escribir una ecuación para expresar una cantidad, pensada como variable dependiente, en términos de la otra cantidad, pensada como variable independiente. Analizar la relación entre las variables dependiente e independiente usando gráficas y tablas, y relacionar estas a la ecuación. Por ejemplo, en un problema que implica movimiento con velocidad constante, listar y graficar pares ordenados de distancias y tiempos, y escribir la ecuación $d=65t$ para representar la relación entre distancia y tiempo.

4. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar

Los estándares sobre álgebra que encontramos en los documentos curriculares, así como los ejemplos de tareas usadas en las investigación sobre “álgebra temprana” (Carraher y Schliemann, 2007), incluyen dentro del “pensamiento algebraico” actividades muy diferentes, algunas de las cuales usualmente no son consideradas como algebraicas. En estos documentos curriculares el *contenido algebraico* se incluye frecuentemente entrelazado con los *números y operaciones*. Las fronteras entre lo que se puede considerar claramente algebraico y lo que no es algebraico son difusas, lo que puede ser una dificultad para el profesor que decide asumir el compromiso de promover el pensamiento algebraico en sus alumnos.

En esta sección incluimos ejemplos de actividades que pueden ayudar a clarificar los rasgos característicos del álgebra en la educación primaria. Para ello proponemos clasificar las actividades en cuatro grupos, cada uno definiendo un nivel diferente de razonamiento algebraico. Partimos de la siguiente caracterización de “sentido algebraico”. Se trata de la capacidad de un sujeto para:

1. Usar de manera sistemática símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones, especialmente mediante notaciones simbólico-literales.
2. Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones.
3. Reconocer patrones, regularidades y funciones.

4. Modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólico-literales y operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con ellas, para obtener una respuesta interpretable en la situación dada.

Este sentido algebraico se puede desarrollar en los niños como resultado de la realización de actividades debidamente planificadas, que partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido (medida y geometría), vayan creando la tensión hacia la generalización, simbolización y el cálculo analítico.

4.1. Tareas con nivel 0 de algebrización: ausencia de razonamiento algebraico

Nos parece conveniente distinguir entre actividades netamente aritméticas de las que suponen un primer nivel de algebrización, lo que no parece claro en las orientaciones curriculares y en algunas investigaciones. El mero uso de una notación simbólica para indicar un dato desconocido en un problema no parece suficiente para hablar de la presencia de pensamiento algebraico.

En los libros de educación primaria encontramos abundantes enunciados de actividades como las siguientes:

Ejemplo 1.

Calcula el término que falta: 1.500 – 925 = ___

Suponiendo que el resultado 575 se obtiene mediante el algoritmo usual de la sustracción, el número desconocido, representado por una línea horizontal (___), es simplemente el resultado de efectuar la operación indicada en el primer miembro de la igualdad; el signo igual expresa el resultado de la operación. Se trata, por tanto de una actividad típicamente aritmética. El trabajo consiste en calcular el número particular que se debe asignar a la línea horizontal de la derecha.

Ejemplo 2.

Realiza estas sumas y compara los resultados:

a) 24.386 + 6.035　　*6.035 + 24.386*

b) 24.386 + 6.035 + 715　　*6.035 + 715 + 24386*

Si un alumno se limita a realizar las operaciones pedidas y comprobar que los resultados son iguales dos a dos, la actividad matemática realizada no implica ningún nivel de razonamiento algebraico.

Ejemplo 3.

El Ayuntamiento plantó al comienzo de la primavera 25 cajas de petunias. Cada caja contenía 20 petunias. Tras unos días de sequía murieron 72 petunias. ¿Cuántas quedan aún?

Un alumno puede razonar del siguiente modo: El número total de petunias que se plantaron fueron 25 cajas, por 20 petunias en cada caja, total 500 petunias. Como después se estropearon 72, habrá que descontarlas del total, o sea, quedan 500 – 72 = 428; 428 petunias.

En esta práctica matemática intervienen números particulares, operaciones aritméticas aplicadas a dichos números y la igualdad como resultado de la operación. Es cierto que en la tarea el sujeto debe reconocer la ocasión de aplicar los conceptos de multiplicación y sustracción de números naturales, además del concepto de número natural aplicado como medida del tamaño de colecciones discretas. Sin embargo, estos procesos de particularización no los consideramos como propios del razonamiento algebraico: las reglas que definen las situaciones de uso de tales conceptos no se hacen *explícitas* en la realización de la tarea.

4.2 Tareas con un nivel incipiente de algebrización

En el ejemplo 2, un alumno podría haber razonado de la siguiente forma: "puesto que 24386 + 6035 es 30421, entonces para calcular 24.386 + 6.035 + 715 es suficiente añadir 715 al resultado 30421, dando como suma total 31136". Asimismo, podría haber razonado que los resultados son iguales dos a dos, puesto que el orden en que se suman dos términos es irrelevante. El alumno no tiene porqué nombrar a estos razonamientos "propiedades asociativa y conmutativa"; lo esencial es que establece una relación genérica entre números y unas propiedades reutilizables de sus operaciones, lo que corresponde a un nivel incipiente de algebrización.

En el caso de prácticas matemáticas que ponen en juego incógnitas y relaciones (ecuaciones) el uso de materializaciones simbólicas (__, …, [ ], ○) para las cantidades desconocidas marca un primer nivel de algebrización si la determinación del valor desconocido no se hace mediante la mera asignación del resultado de operaciones sobre objetos particulares. Asimismo, la aplicación de propiedades relacionales y estructurales del semigrupo $\mathbb{N}$ de los naturales, expresadas con lenguaje numérico y natural, es también propia del nivel 1 de algebrización.

Ejemplo 4.

Determina el valor que falta en cada una de las siguientes expresiones.

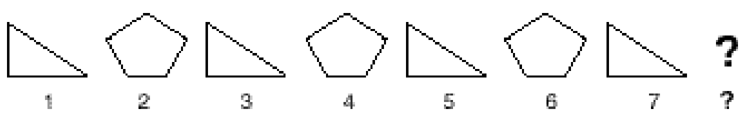
a) $5 + 11 = 11 + \_$ *b)* $10 + \blacklozenge = 15 + 15$ *c)* $3 \times \blacksquare = 672$

La tarea a) se puede resolver sin realizar directamente las operaciones, evocando la propiedad conmutativa de la suma de los números naturales. La b) se puede resolver mediante descomposición y aplicando la propiedad asociativa, 10 + ♦ = 10 + 5 + 15 = 10 + (5 + 15) = 10 + 20, luego el número que falta es 20. La c) se puede resolver reconociendo que la división es la operación inversa de la multiplicación.

En los tres casos las tareas se resuelven evocando propiedades algebraicas de las operaciones con números naturales, y no realizando los cálculos sobre los números particulares que intervienen, o mediante ensayo y error. Esta es la razón por la que le asignamos un primer nivel de algebrización.

Ejemplo 5.

Continúa las siguiente secuencia; describir la regla que se sigue y determina, ¿qué figura (triangulo ó pentágono) corresponde a la posición 89 de la secuencia?, ¿y a la posición 100 de la secuencia?



Si se enuncia la regla general de tal manera que el alumno reconoce que a todos los números pares le corresponde siempre un pentágono y a todos los números impares le corresponde siempre un triángulo, entonces estamos en un nivel 1 de algebrización. Si el alumno se limita a escribir los términos que siguen en algunos casos, sin expresar alguna regla general la actividad sería de nivel 0.

4.3 Tareas con un nivel intermedio de algebrización

Ejemplo 6.

Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después que se usa cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?

Una posible solución al problema anterior sería: Si Juan tuviera 2 monedas podría jugar; al meterlas en la máquina obtendría 4, pagaría 4 y se quedaría con 0, por lo que no podría volver a jugar. Si Juan tuviera 3 monedas, al meterlas en la máquina obtendría 6, al pagar 4 se queda con 2. Vuelve a meterlas, obtiene 4; al pagar 4 se queda sin dinero. Luego Juan tenía al principio 3 monedas.

La actividad matemática desarrollada en esta resolución no pone en juego ningún nivel de algebrización. El sujeto trabaja con valores particulares de las variables de la tarea y opera aritméticamente con ellos.

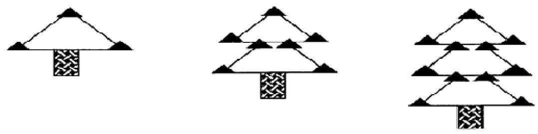
Ahora veamos otra posible solución al mismo problema: Juan comienza con *n* monedas (cantidad desconocida); al ponerlas en la máquina obtiene $2n$; paga 4 y se queda con $2n-4$. Introduce $2n-4$ en la máquina y obtiene el doble, o sea, $2(2n-4)$. Al pagar 4 se queda sin dinero, es decir:

$$2(2n-4)-4=0;\ \ 4n-8-4=0;\ \ 4n-12=0;\ \ n=3$$

Esta segunda solución es claramente de nivel 2. La cantidad desconocida de monedas (incógnita) se representa simbólicamente mediante una ecuación de la forma $Ax+B=C$.

Ejemplo 7.

Completa la secuencia de árboles, hasta la décima posición, indicando el número de triángulos negros que hay en cada árbol. ¿Cuántos triángulos tendrá la figura de la posición 100?



1 2 3

Supongamos que un estudiante realiza el siguiente planteamiento: Se observa que a excepción de la punta y la base del árbol hay siempre 4 triángulos colocados de modo horizontal en las posiciones centrales; para conocer el número de triángulos en un árbol cualquiera, a la posición le resto una unidad, la multiplico por 4 (número de triángulos en las posiciones centrales) y le sumo 3 (número de triángulos de los extremos, en la base y la cúspide). A esta actividad matemática en la cual se logra expresar una regla general en un lenguaje natural le asignamos un nivel 1 de algebrización. Si el alumno es capaz de expresar que la relación entre la posición del árbol y el número de triángulos está definida como $4(n-1)+3$, la actividad matemática realizada pone de manifiesto un nivel intermedio de algebrización (nivel 2), dado que se logra establecer una regla general expresada en un lenguaje simbólico-literal.

4.4 Tareas con un nivel consolidado de algebrización

En el ejemplo 7 el tratamiento analítico de la expresión $f(n) = 4(n-1)+3$ para obtener la expresión canónica equivalente $f(n) = 4n - 1$ indica un mayor dominio del cálculo algebraico, por lo que asignamos a esta actividad un nivel 3 de algebrización.

Ejemplo 8:
Pedro tiene una cierta cantidad de dinero. María tiene cuatro veces más dinero que Pedro. Si Pedro ganara 18.00 euros más, entonces tendría la misma cantidad de dinero que María. ¿Puedes calcular cuánto dinero tiene en total Pedro? ¿Cuánto dinero tiene María?

Un estudiante resuelve el problema de la siguiente manera: Sea x el dinero que tiene Pedro; expresamos como $4x$ el dinero que tiene María. Si Pedro ganara 18 euros más entonces tendría la misma cantidad de dinero que María; por tanto,

$$x + 18 = 4x;\ \ 18 = 4x - x;\ \ 3x = 18;\ \ x = 6$$

La actividad matemática realizada por el resolutor supone un nivel 3 de algebrización ya que se ha planteado de manera simbólica una ecuación de la forma $Ax + B = Cx + D$ y se ha operado con la incógnita para resolverla.

5. Síntesis e implicaciones

En este trabajo hemos sintetizado algunos estándares curriculares que proponen expectativas de desarrollo del razonamiento algebraico en los escolares de educación primaria, así como características básicas de dicho razonamiento. También hemos presentado ejemplos de actividades clasificadas según tres niveles progresivos de algebrización. Es necesario reconocer que las fronteras entre los niveles pueden a veces ser difusas y que dentro de cada nivel es posible hacer distinciones que podrían llevar a proponer nuevos niveles. Sin embargo, nuestra propuesta puede ser útil para orientar la acción del maestro de primaria que trate de impulsar la progresión del pensamiento matemático de los alumnos hacia niveles progresivos de generalización y eficacia en la representación y el cálculo.

En síntesis proponemos utilizar tres criterios para distinguir los niveles de razonamiento algebraico elemental:

1. La presencia de “objetos algebraicos” - que tienen un carácter de generalidad, o de indeterminación.
2. Tipo de lenguajes o representaciones usadas.
3. El tratamiento que se aplica a dichos objetos (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales).

En consonancia con las propuestas de los autores que investigan en el campo conocido como “algebra temprana” (Carraher y Schliemann, 2007) proponemos distinguir dos niveles primarios de razonamiento proto-algebraico para diferenciarlos de otras formas estables o consolidadas de razonamiento algebraico. La idea clave es “hacer explícita la generalidad”, en el campo de las relaciones (equivalencia y orden), estructuras, el estudio de las funciones y la modelización de situaciones matemáticas o extra-matemáticas, al tiempo que se opera o calcula con dicha generalidad. En la tabla 1 se describen sintéticamente ejemplos de tareas, objetos algebraicos, tipos de lenguajes y tratamientos característicos de cada nivel de algebrización.

Tabla 1. Niveles de algebrización de tareas matemáticas

Nivel	Descripción de tareas	Objetos algebraicos	Lenguaje	Tratamiento
0	– Se realizan cálculos. Se pone énfasis en realizar operaciones y obtener un resultado.	– Ninguno	Aritmético	Operacional
1	– Descomposición de números – Relaciones inversas entre las operaciones – Propiedades de las operaciones – Igualdad como indicador de equivalencia de expresiones – Cantidades indeterminadas – Uso de símbolos (Δ,__,■ [ ], ◯) para representar una indeterminación: un valor faltante, un número generalizado, una incógnita, una variable, etc. – Uso de literales para modelizar situaciones. Plantear ecuaciones de la forma $ax = b$ e inecuaciones de la forma $cx \leq p$. – Representar, analizar y generalizar patrones, utilizando tablas, gráficas o palabras. Reconocer la variable independiente, dependiente y la regla de correspondencia.	– Propiedades de las operaciones – Equivalencia – Ecuación – Inecuación – Patrones – Función – Incógnita – Variable	Natural, numérico, simbólico…	No se realizan operaciones explicitas con el valor desconocido
2	– Propiedades de las operaciones – Igualdad como indicador de equivalencia de expresiones – Cantidades indeterminadas – Uso de literales para modelizar situaciones. Plantear ecuaciones de la forma $ax + b = c$ e inecuaciones de la forma $cx + d \leq p$. – Representar, analizar y generalizar patrones, utilizando símbolos y literales.		Simbólico literal	No se realizan operaciones explicitas con el valor desconocido o con las variables
3	– Propiedades de las operaciones – Igualdad como indicador de equivalencia de expresiones – Cantidades indeterminadas – Uso de literales para modelizar situaciones. Plantear ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$ e inecuaciones de la forma $cx + d \leq px + q$ – Representar, analizar y generalizar patrones, utilizando símbolos y literales – Reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas simples y resolver ecuaciones lineales		Simbólico literal	Tratamiento analítico de expresiones

Si queremos desarrollar el razonamiento algebraico en las aulas de primaria, y mejorar el tratamiento del álgebra en secundaria, el profesor debe ser el principal agente del cambio. La distinción de niveles de razonamiento algebraico elemental que hemos descrito en este trabajo, junto con los ejemplos ilustrativos de los mismos, puede ser útil en la formación matemática de maestros de educación primaria. El estudio y discusión de ejemplos similares a los presentados en este trabajo puede permitir el desarrollo en los maestros de un *sentido algebraico,* al permitir reconocer rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales se puede intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los alumnos.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MCINN) y Fondos FEDER y el Proyecto EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad.

Bibliografía

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, 26 (42B),* 483-511.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. (Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/)

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y estándares 2000*. Reston VA: NCTM. Traducción, M. Fernández (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales), 2003.

National Council of Teachers of Mathematics (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics. A quest for coherence.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. (2011). Common core state standards for mathematics. (Disponible http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf)

Lilia Aké Licenciada en Enseñanza de las Matemáticas por la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, México. Becaria doctoral del Programa MAEC-AECID en el DPTO. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Facultad de Educación, Campus de Cartuja, Granada, España. **lake86@gmail.com**

Juan D. Godino, es Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada/UGR. Catedrático de Didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada/UGR. Granada, España. Facultad de Educación. Campus de Cartuja. 18071 Granada, España.: **jgodino@ugr.es**

Margherita Gonzato es becaria del Programa de Formación de Profesorado Universitario (MEC) en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Facultad de Educación, Campus de Cartuja, 18071 Granada (España). **mgonzato@ugr.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 53-70

Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico

Silvia Vrancken, Adriana Engler

Fecha de recepción: 4/11/10
Fecha de aceptación: 10/07/12

Resumen	Para llegar a lo que actualmente se conoce como derivada, tuvieron que transcurrir varios siglos de desarrollo de las ideas matemáticas relacionadas con las tangentes, la variación y los infinitesimales. Esta etapa se caracterizó por tener un componente fundamentalmente visual e intuitivo, en interacción constante con problemas geométricos y físicos. Presentamos los aspectos más importantes del estudio histórico-epistemológico realizado en el marco de una investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada. Abarca una revisión histórica de la evolución de la matemática de la variación y el cambio teniendo en cuenta el papel otorgado a la visualización y a las representaciones utilizadas así como los obstáculos que surgieron en esa evolución. **Palabras clave**: derivada, representaciones, visualización.
Abstract	To get to what currently is known as derivative, there had to pass several centuries of investigation of mathematical ideas related to tangents, variation, and infinitesimals. This period was unique in having a component fundamentally visual and intuitive, in constant interaction with geometry and physics problems. We present the most important aspects of the historical epistomology study performed under the research framework about teaching and learning of derivatives. It covers a historical revision of the evolution of the mathematics of change and variation, considering the role of visualization and the utilized representations, as well as the obstacles that emerged from that evolution. **Keywords:** derivative, representations, visualization
Resumo	Para chegar ao que actualmente se conhece como derivada, tiveram que decorrer em vários séculos de desenvolvimento das ideias matemáticas relacionadas com as tangentes, a variação e os infinitesimales. Esta etapa caracterizou-se por ter um componente fundamentalmente visual e intuitivo, em interacção constante com problemas geométricos e físicos. Nos apresentamos os aspectos mais importantes no estudo histórico-epistemológico feito no marco duma investigação sobre o ensino e a aprendizagem da derivada.Inclui uma revisão histórica da evolução da matemática da variação e a mudanza, tendo en conta o papel outorgado à visualización das representações utilizadas bem como os obstáculos que surgiram nessa evolução. **Palavras-chave:** derivada, representações, visualización

1. Introducción

La matemática juega su rol principal cuando es necesario cuantificar o medir cualquier fenómeno y las variaciones que se producen. Se crean modelos abstractos para describir dichos fenómenos y la medición del cambio en los mismos es un aspecto esencial de la variación y el elemento eje en la formación del concepto de derivada. El cálculo tiene reconocida su importancia porque permite encontrar las leyes que describen esos cambios, medirlos y predecirlos.

Por otro lado, el cálculo es la rama de la matemática en la que el número de problemas que suelen presentarse en los procesos de enseñanza y aprendizaje es mayor. A pesar de que la determinación de razones de cambio (idea fundamental del cálculo) está presente de una u otra manera en la vida diaria, todo lo relacionado con él resulta muy abstracto para el alumno en el aprendizaje formal y desemboca en graves problemas para su enseñanza. En general se observa que, si bien el estudiante logra resolver ejercicios y problemas sencillos, surgen grandes dificultades al momento de ingresar en el campo disciplinar y alcanzar a comprender satisfactoriamente los conceptos y métodos de pensamiento que rigen este campo de la matemática.

Enmarcados en este contexto nos propusimos tomar uno de los objetos básicos del cálculo, la derivada, para abordar en una investigación. La derivada es el concepto matemático que permite cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. Son múltiples las aplicaciones de este concepto, ya sea en el ámbito de la matemática como en situaciones correspondientes a otras ciencias.

Dado que el interés de nuestra investigación se centra en comprender cómo los alumnos construyen la derivada y teniendo en cuenta la complejidad de los elementos implicados en el proceso de aprendizaje, intentamos dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo y el didáctico (Cantoral y Farfán, 2000).

Por este motivo realizamos una serie de estudios preliminares que tuvieron en cuenta las características del saber en juego (dimensión histórica-epistemológica), las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza (dimensión cognitiva) y el estudio del medio en el que se establecen las relaciones entre alumno, docente y saber (dimensión didáctica). Reconociendo que en el aprendizaje escolar no están exentas las interacciones sociales, incorporamos una cuarta componente, la sociocultural, como integradora de las otras tres, reforzando de esta manera el enfoque sistémico a los fenómenos abordados.

En este trabajo presentamos el análisis correspondiente a la primera dimensión. Por razones de extensión desarrollamos los aspectos que a nuestro entender son los más importantes.

2. Análisis histórico-epistemológico

Un estudio de este tipo debe responder a la pregunta sobre cómo se constituye el objeto de conocimiento. Interesa identificar las situaciones problemáticas a las que las personas han dedicado sus esfuerzos, las características, propiedades y grado de emergencia del concepto, así como las representaciones simbólicas asociadas. Ruiz (1998, p. 105) expresa que el objetivo debe ser “aportar información acerca de la evolución del concepto en los distintos momentos históricos, tratando de identificar las variables y factores condicionantes que han determinado distintos estadios del desarrollo de esta noción”.

El análisis epistemológico juega un papel importante en la enseñanza. Al respecto, Farfán (1997) expresa que provee de historicidad a los conceptos matemáticos que normalmente la enseñanza presenta como objetos universales tanto en tiempo como en espacio. Posibilita además la observación de las disparidades entre el saber científico y el enseñado, contribuyendo de esta manera a desterrar otra de las ficciones de la escuela, la concepción de que los objetos de enseñanza son copias simplificadas, pero fieles de los objetos de la ciencia.

La idea de buscar en el desarrollo histórico e epistemológico de conceptos pautas para la enseñanza nos provee de un acercamiento metodológico. Cada persona reproduce durante la adquisición de un conocimiento, en síntesis, las etapas por las que atravesó el ser social, en la historia, para la aprehensión de dicho concepto.

En el aprendizaje individual del concepto no sólo se reproducen las etapas esenciales, históricamente hablando, sino también los tropezones que se dieron en su desarrollo histórico. Resulta importante reconocer las nociones que a lo largo de la historia se han mostrado resistentes a su evolución y generalización y que se constituyen por lo tanto en obstáculos para el aprendizaje.

El origen del cálculo está relacionado con los incrementos y las cantidades de cambio. El estudio de la variación en los fenómenos dinámicos es lo que condujo en sus comienzos al estudio de la derivada y al desarrollo del análisis. Los procesos de medir, cuantificar y establecer leyes para el cambio y la variación están en el origen de la noción actual de derivada y su evolución histórica.

Entre los siglos XIV y XVII el interés científico se centró en el estudio de las cualidades en situaciones como el movimiento, la intensidad luminosa o la intensidad de calor. Durante el siglo XVII se trataron grandes problemas para la ciencia que influyeron en su desarrollo y posteriormente en su formalización. Estos problemas surgieron por un lado de la mecánica, con el estudio del movimiento, y por otro lado de la geometría, donde lo que se buscaba era la determinación de tangentes a una curva dada. Newton y Leibniz relacionaron estos dos problemas y proporcionaron un método general para resolverlos. Esta conexión fue gracias a la poderosa herramienta que resultó el método de las coordenadas, que les permitió representar gráficamente la dependencia entre dos variables. Contaban ya con elementos que les permitieron representar funciones y, gracias al poder de estas representaciones gráficas, fue más sencillo relacionar los problemas (Badillo, 2003).

En este sentido, las diversas representaciones de la función y la derivada aparecen desde un principio íntimamente relacionadas, teniendo cada una de ellas un origen histórico y epistemológico diferente.

En base a lo expuesto decidimos estudiar la evolución de estos conceptos en relación a los problemas de variación tratados en los distintos períodos históricos, analizando su desarrollo con respecto al papel otorgado a la visualización y a las distintas representaciones utilizadas. Se consideraron también las concepciones que históricamente se han configurado como resistentes a su evolución y generalización y por lo tanto pueden considerarse como obstáculos epistemológicos. Atendiendo a estos factores hemos dividido el análisis en varias secciones (Castiblanco, Urquina, Acosta y Rodríguez, 2004).

2.1. El mundo antiguo. Los esbozos del estudio de las nociones de variable y dependencia. La representación verbal

Desde la época prehistórica el hombre observó fenómenos naturales relacionados con magnitudes físicas variables: el cambio de posición de las ramas de los árboles por la acción del viento, el cambio en la posición del sol, la luna y las estrellas y su relación con la sucesión del día a la noche, los procesos de producción agrícola y el vínculo con la posición de los astros. Esta observación lo llevó a desarrollar las primeras tecnologías materiales y simbólicas, como herramientas, lenguaje gestual y lenguaje verbal icónico, que sentaron las bases para el surgimiento de sistemas de representación escritos mucho más complejos.

La consolidación de la escritura, hacia el 3000 a.C., promovió la aparición de diversos instrumentos de registro a través de los cuales ha sido posible conocer el saber social y cultural construido a partir de la antigüedad.

Los aportes de las civilizaciones mesopotámicas, en particular la babilónica (2000 a.C. a 600 a.C.), constituyen las referencias conocidas más antiguas sobre el estudio de fenómenos de cambio y de la determinación de leyes cuantitativas a través de tablas.

Su interés estuvo centrado principalmente en la astronomía. Realizaron observaciones sistemáticas de fenómenos que se repetían periódicamente, relacionados con el sol, la luna y los planetas. Efectuaron una compilación de los hechos en tablillas de arcilla que han llegado hasta nuestros días. Sus estudios comprendieron problemas de variaciones continuas, como los períodos de visibilidad de un planeta en relación con el ángulo que forma con el sol o la luminosidad de la luna en intervalos de tiempos iguales. Atraídos por la astrología, su tarea fundamental fue intentar predecir sucesos. Más allá de anotaciones empíricas, en las tablillas se encuentran los intentos por aritmetizar observaciones difícilmente medibles, así como interpolaciones, lineales y geométricas.

Avanzaron en lo que se denomina *álgebra retórica*, en la que los problemas se enunciaban y solucionaban sin utilizar de manera organizada notaciones algebraicas como las actuales. No usaban letras para representar cantidades variables. Los mismos términos, longitud, área y volumen, cumplían con esa finalidad. A pesar de que no figuraban generalizaciones, sino sólo casos concretos, esto no significa que no existiera en su pensamiento conciencia de la generalidad de las reglas o principios. De ser así, no se podría explicar la analogía entre problemas del mismo tipo (Boyer, 1986, c.p. Ruiz, 1998).

Si bien es difícil encontrar aspectos que permitan intuir la existencia de conceptos como variable y función, no es posible desconocer sus aportes en cuanto a los intentos de cuantificar y establecer regularidades en sus tablas.

La civilización griega (alrededor de 2800 a.C. a 600 d.C.) dejó también un inmenso legado. A partir del siglo VI a.C. se preocuparon, especialmente los pitagóricos, por explicar no sólo el cómo sino el por qué de las cosas, lo que impulsó la transformación de la matemática en una ciencia deductiva.

La visualización constituyó una herramienta común de su actividad matemática. Los pitagóricos concibieron y trataron los números y sus relaciones utilizando piedrecillas que llamaban cálculos. Platón se acercó al conocimiento a través de los sentidos. La imagen jugó un papel importante de evocación, permitiendo que la idea o concepto quede almacenada en la memoria. Los Elementos de Euclides contienen muchas imágenes que no se pueden separar del texto para su comprensión.

Desde la época de Heráclito y Zenón fueron tratados problemas vinculados con el movimiento, la continuidad y el infinito, a los cuales Aristóteles dedicó gran parte de su física. En el pensamiento griego existía una idea primitiva de función en las nociones de cambio y relación entre magnitudes variables. Sin embargo estas ideas fueron externas a la matemática.

Al estudiar el movimiento de los cuerpos, Aristóteles se preguntaba sobre cuáles son las causas reales del movimiento. Este marco originó descripciones cualitativas del fenómeno de variación. Por ejemplo, para el caso de la piedra que cae libremente o por un plano inclinado, no generó procedimientos para cuantificar el movimiento, simplemente indagó acerca de la naturaleza del cuerpo que cae y la forma en que se modifican sus atributos durante la caída.

Esta filosofía fue la razón de que, por mucho tiempo, los matemáticos se expresaran en términos de incógnitas y no de variables. Esto los condujo a las proporciones y las ecuaciones y no las funciones. Los griegos consideraron las magnitudes físicas y las proporciones entre ellas como algo diferente a las igualdades numéricas.

Son atribuibles a los pitagóricos la determinación de algunas leyes simples de la acústica, que constituyen un intento por buscar relaciones cuantitativas de dependencia entre variables físicas, como ser las longitudes de las cuerdas y los tonos de las notas emitidas al pulsarlas. No obstante, este aspecto cuantitativo de las leyes de la naturaleza no fue tratado ampliamente.

El carácter geométrico de la matemática griega, el papel preponderante de las proporciones y la disociación entre número y magnitud son los principales obstáculos que hicieron que en la época antigua el estudio de fenómenos de cambio sea aún muy reducido y que no sea posible hablar de la formulación explícita de nociones como variable, dependencia o función. Otro factor importante es el escaso desarrollo del simbolismo, las expresiones algebraicas no existían, a excepción de los interesantes intentos de Diofanto, aunque en forma retórica, conceptualmente relacionados con la dependencia funcional (Azcárate y Deulofeu, 1996).

2.2. La Edad Media. Avances en las nociones de variable y dependencia. Representación cinemática y geométrica. Primeras notaciones simbólicas.

Este período, que abarca desde la caída del Imperio Romano occidental en el siglo V a.C. hasta el siglo XV, se caracteriza por una larga etapa de oscuridad en Europa. Fueron los árabes, quienes tomaron el relevo de los griegos en cuanto al estudio de las ciencias y permitieron que su legado llegara a occidente. No hubo en esta época cambios sustanciales pero sí algunos resultados concretos. Se incrementó el número de funciones consideradas, que abarcó casi todas las funciones trigonométricas, y se ampliaron también los métodos de estudio.

A partir del siglo XIII, ya en el mundo occidental, la matemática tiende a ocupar un lugar más importante en las ciencias de la naturaleza. Se pone en duda la estricta demarcación entre ella y las ciencias físicas. La preocupación era descubrir lo real, lo permanente, lo inteligible, tras el mundo cambiante de la experiencia, ya sea esa realidad algo cualitativo, según se lo concebía al principio de este período, o algo matemático, como se lo pensó luego (Crombie, 1979, c.p. Ruiz, 1998).

Una de las principales cuestiones que se analizaron fueron los fenómenos sujetos al cambio y al movimiento. "Se preguntaban por qué los planetas brillan, por qué el viento sopla, por qué se forma el arco iris, por qué la lluvia cae, mientras que el fuego sube. Trataban de encontrar un modelo de universo que respondiese a estas cuestiones" (René de Cotret, 1985, c.p. Ruiz, 1998, p. 111).

Las escuelas de filosofía natural de Oxford y París, dos de los principales núcleos científicos de la época, hicieron grandes aportes para el desarrollo de la noción de función. Partiendo de las doctrinas aristotélicas, realizaron estudios cuantitativos de distintos fenómenos, entre los cuales se destaca el estudio del movimiento local no uniforme, empezando a desplazar el interés del por qué suceden los cambios al cómo suceden. Analizaron fenómenos sujetos al cambio, como el calor, la luz, la densidad, la velocidad, llamados cualidades o formas, que pueden tener diversos *grados* de *intensidad* que cambian entre dos límites establecidos. Una *forma* era cualquier cantidad o cantidad variable de la naturaleza. La *intensidad* o *latitud* de una forma era el valor numérico que había que asignarle, en relación a otra forma invariable que llamaban *extensión* o *longitud*, como el tiempo, la distancia o la cantidad de materia. En Inglaterra los estudios tuvieron una orientación preponderantemente cinemática-aritmética, mientras que en Francia se desarrollaron en dirección a la geometría.

Durante el segundo cuarto del siglo XIV, un grupo de lógicos y filósofos naturales del Colegio de Merton, entre ellos Heytesbury, Bradwardine y Swineshead, abordaron el problema de la cuantificación del cambio. Estudiaron las variaciones de la intensidad de una cualidad, desde un punto a otro de un cuerpo o desde un punto a otro del tiempo. Referidos al caso del movimiento y la velocidad, sus aportes más importantes son las definiciones de velocidad uniforme y de movimiento uniformemente acelerado, así como sus intentos por definir velocidad instantánea. A partir de estos conceptos lograron deducir la regla del movimiento uniformemente acelerado que hoy conocemos.

El trabajo más completo y original sobre la intensificación y disminución de formas y cualidades fue el llevado a cabo por Oresme (1323-1382) en su tratado *De configurationibus qualitatum et motuum,* en el que describe su teoría de las latitudes de las formas, abriendo un nuevo camino en los estudios cinemáticos aritméticos realizados, proponiendo una aproximación geométrica. Su estudio de la variación fue independiente de cualquier contexto físico. Las representaciones eran imaginarias y cualitativas y nunca las verificó mediante mediciones. Oresme se preguntaba por qué no hacer un dibujo de la manera en que las cosas varían. De esta manera utilizó recursos geométricos para el estudio de la variación.

A modo de ejemplo presentamos el caso en el que se representa la velocidad de un móvil en función del tiempo. La longitud es un segmento horizontal cuyos puntos representan los sucesivos instantes de tiempo. Para cada instante, se traza un segmento perpendicular (latitud) que representa la intensidad de la velocidad en ese instante. Los extremos superiores de las latitudes determinan una curva.

Según D´hombres (1987, en Ruiz, 1998), Oresme al principio trabajó con los movimientos en forma general pero luego distinguió tres configuraciones distintas (Figura 1): las uniformemente uniformes (asociadas a un movimiento con velocidad constante), las uniformemente diformes (movimiento uniformemente acelerado) y las diformemente diformes (movimientos con aceleración no constante).

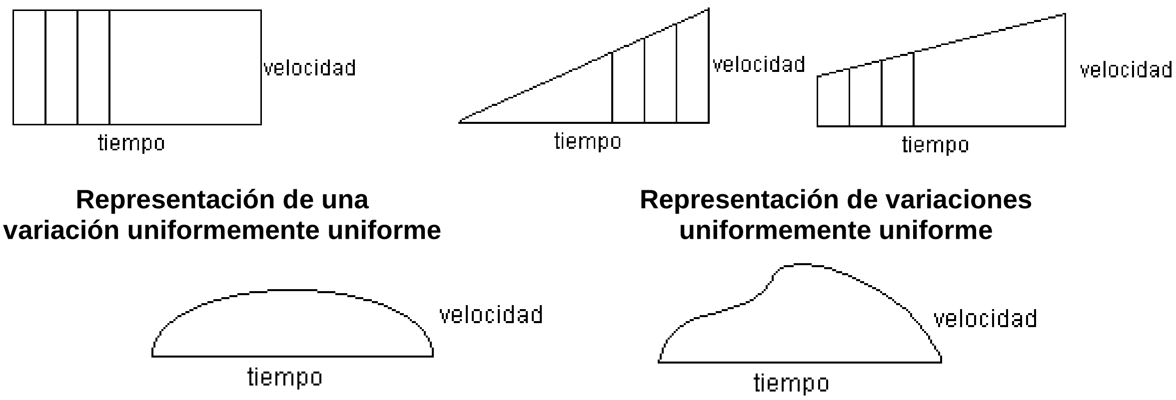


Figura 1 Representación de variaciones diformemente diformes

Con este tipo de representaciones, Oresme pretendía que sea más sencillo comprender la naturaleza de los cambios, ya sean cuantitativos o cualitativos, de manera de hacer posible dar una representación de todos ellos. Sus dibujos recuerdan a la representación gráfica de una función en un sistema de ejes cartesianos, sin embargo en su trabajo, la línea superior, de intensidades, no aparece aislada sino que el fenómeno se representa a través de toda la figura, por su forma (rectángulo, triángulo, etc.) y por la superficie que queda debajo de la curva, es decir por la integral de la curva. Por eso no pueden ser considerados como una expresión de la dependencia en el sentido actual.

A pesar de esto, su obra no deja de ser un adelanto hacia la geometría analítica y la introducción en la geometría de la idea de movimiento. Captó la idea fundamental de que una función de una variable se puede representar por una curva.

Azcárate y Deulofeu (1996, p. 44) expresan que, en el transcurso de estos estudios, “comienzan a aparecer conceptos fundamentales como cantidad variable, entendida como un grado de cualidad, velocidad instantánea o puntual, aceleración, todos ellos íntimamente ligados a la idea de función”.

2.3. Siglos XV y XVI. La transición a la representación simbólica (algebraica). El desarrollo de la noción de variable y función

En este período sobresale el avance del simbolismo algebraico y la formación definitiva de la trigonometría como una rama particular. Ambos aspectos favorecieron el desarrollo del concepto de función. Se destaca la obra durante el siglo XVI de algebristas italianos, especialmente de Viète cuya contribución a la creación del álgebra simbólica fue decisiva. La introducción de signos para numerosas operaciones y la utilización de letras para representar cantidades desconocidas y coeficientes arbitrarios, fue importante para la representación de funciones por medio de fórmulas.

El intento por dar solución a problemas surgidos de la navegación marítima, el desarrollo del capital comercial y de la industria, propició el descubrimiento de varias de las leyes generales de la naturaleza y su modelación mediante fórmulas matemáticas. Resalta la obra de Kepler, quien, en la primera mitad del siglo XVI, formuló matemáticamente sus leyes sobre el movimiento de los planetas.

Los avances gráficos en la representación de formas variables no fueron adoptados de manera inmediata. Ya en la transición hacia el siglo XVII, fue Galileo (1564-1642) quien, en su libro *Dos nuevas Ciencias* de 1638, recupera los aportes de Oresme.

Galileo estudió el movimiento local y la rapidez, enfrentándose al problema de la caída de los cuerpos. Realizó un estudio cuantitativo buscando relacionar los conceptos de velocidad, aceleración y distancia recorrida con la ayuda de leyes inspiradas en la observación y experimentación. Usando instrumentos para tomar medidas, estableció leyes que son auténticas relaciones funcionales.

Considerando un cuerpo que cae libremente hacia la Tierra, no intentó hallar por qué cae, sino cómo cae, es decir en qué forma matemática la distancia recorrida y la velocidad alcanzada dependen del tiempo y el espacio transcurrido. En la descripción y análisis de cuerpos en caída libre aplicó el resultado del colegio de Merton sobre el valor medio de una cualidad uniformemente acelerada.

En sus desarrollos, Galileo utilizó un método expositivo de estilo euclidiano, sin ningún simbolismo. Su único recurso fue la representación gráfica de las magnitudes espacio, tiempo y velocidad. Para la visualización del desplazamiento y el tiempo usó recursos equivalentes, líneas que se pueden recorrer. Enunciamos el teorema I, proposición 105 de su libro *Dos nuevas Ciencias* (en Carrasco, 2005, p. 35):

> El tiempo en que cualquier espacio es atravesado por un cuerpo que empieza en reposo y es uniformemente acelerado, es igual al tiempo en que ese mismo espacio se cruzaría por el mismo cuerpo que se mueve a una velocidad uniforme cuyo valor es la media de la velocidad más alta y la velocidad justo antes de que la aceleración empezara.

Para su demostración, Galileo utilizó una gráfica, que se presenta en la siguiente figura (Figura 2), coherente en el aspecto visual con la situación de caída que se está modelando. Utilizando una representación bidimensional velocidad-tiempo, representó el tiempo sobre la línea vertical AB y las velocidades instantáneas mediante segmentos perpendiculares a AB. Representó también el espacio en una línea vertical auxiliar CD.

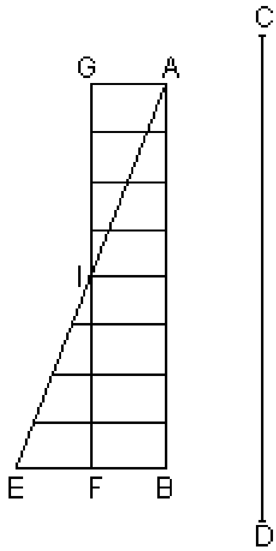


Figura 2 Gráfica de Galileo

En esta gráfica, A es el instante en que se inicia el movimiento, BE es la velocidad en el tiempo B o velocidad final del móvil y BF es la mitad de la velocidad anterior.

Construyó el rectángulo ABFG de base BF y prolongó los segmentos velocidad hasta FG. El triángulo ABE describe el movimiento uniformemente acelerado del móvil. El rectángulo ABFG describe un movimiento uniforme de velocidad constante BF que sucede en el mismo tiempo que el anterior.

El área de ABE coincide con el área de ABFG. La suma de las líneas paralelas contenidas en ABE es igual a la de las líneas paralelas contenidas en ABFG. De esto, concluyó que los espacios recorridos por los dos móviles son iguales.

A partir de estos trabajos, entre otros, se fueron desarrollando las ideas de variación y cambio como abstracciones obtenidas de la realidad.

Otro avance importante de la segunda mitad del siglo XVI, según expresan Azcárate y Deulofeu (1996), que permitió llegar a considerar las funciones como relaciones entre conjuntos de números más que como entre cantidades, fueron los progresos realizados en la extensión del concepto de número, con la configuración de los números reales y la aparición de los números imaginarios.

2.4. Siglo XVII. El surgimiento de la matemática de las variables

El poderoso instrumento algebraico desarrollado en los años precedentes permitió a Descartes (1596 -1650) y a Fermat (1601-1665) introducirse en el mundo de la representación analítica. Desarrollaron el método de las coordenadas expresando las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos a través de relaciones numéricas, generando la geometría analítica.

Su importancia radica en el hecho de poder traducir cualquier problema de geometría plana en un problema algebraico equivalente. Por primera vez se utiliza el hecho de que una ecuación es una manera de expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de modo que a partir de ella es posible calcular los valores de una variable correspondientes a determinados valores de la otra.

Diudonné (1989, c.p. Ruiz, 1998, p. 119) expresa que “el método de las coordenadas constituye también el fundamento de los otros dos grandes progresos realizados en el siglo XVII: la introducción de la noción de función y el cálculo infinitesimal".

Al surgir nuevas curvas se presentaron nuevos problemas. Los griegos de la antigüedad clásica concebían la recta tangente a una cónica en un punto, como la recta que toca a la curva en ese punto pero no la corta al prolongarla.

La introducción de la geometría analítica, el auge de las ciencias naturales y las exigencias de la mecánica, propiciaron nuevas soluciones que relacionaron el problema de la tangente con los fenómenos de variación. En particular tres problemas se presentaban como acuciantes: determinar la velocidad de los cuerpos en movimiento, dada la velocidad del movimiento determinar la trayectoria en un tiempo determinado, y el problema de los máximos y mínimos.

Los aportes de Fermat a la resolución de estos problemas fueron tales que Lagrange, Laplace y Tannery, entre otros, lo denominaron el inventor del cálculo. Tratando de determinar los máximos y los mínimos de ciertas funciones, observó que una curva tiene en cada uno de sus puntos una dirección, definida por la recta tangente a la curva en dichos puntos, tal que donde la función tiene un máximo o un mínimo, la tangente es horizontal.

En su obra *Methodus ad disquerendam maximan et miniman* publicada en 1637 expuso su método para encontrar el valor extremo de algunas variables y propuso una manera de resolver el problema de las tangentes utilizando ideas cercanas a los infinitesimales.

Utilizó elementos de tipo gráfico visual, así como ideas intuitivas de cambio y lo que pasa con estos cambios cuando se hacen muy pequeños. Su proceso se basó en la idea que si una secante s rota sobre uno de los puntos de intersección de manera que el punto más próximo se acerca indefinidamente al primero, entonces la secante s se aproxima a la posición definida t. La recta que tiene esa posición se llama tangente a la curva, y el punto fijo, punto de contacto (o punto de tangencia). De todas las rectas que pasan a través de ese punto, la tangente es la que proporciona la mejor aproximación al curso de la curva en ese punto. Por ese motivo, la dirección de la tangente en el punto se llama también dirección de la curva en el punto.

Fermat (en Ribnikov, 1987, citado por Dolores, 1996), consideró un pequeño arco MN (Figura 3) de una curva algebraica polinomial f(x). Por medio del trazado de la secante SMN se construye el triángulo MNP de manera que MNP $\approx$ SMR, de donde la longitud de la subtangente[1] SR está dada por SR = $\frac{MR\,.\,MP}{PN}$, expresión que en términos modernos se escribiría: $SR = \frac{f(x).h}{f(x+h)-f(x)}$.

[1] La subtangente es la distancia del punto S que se encuentra en la intersección de la tangente con el eje de las abscisas y el punto R que es la abscisa del pie de la perpendicular trazada desde el punto M.

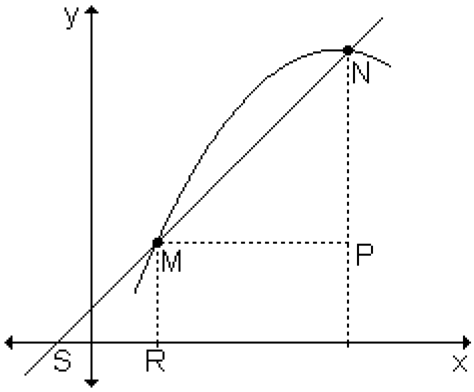


Figura 3 Gráfica de Fermat para el problema de la tangente

Después pasa de la secante a la tangente, poniendo *h* = 0 (aunque no menciona que *h* debe *aproximarse* a cero o que se *haga* cero, sino sólo que el término que contiene a h debe ser eliminado) de manera que, si s = SR, en términos modernos la expresión anterior quedaría escrita como $s=\frac{f(x)}{f'(x)}$. Esto significa que la longitud de la subtangente, con la que la tangente queda determinada, se obtiene del cociente de la función entre su derivada.

Cantoral y Farfán (2004, p. 72) expresan que "este método de Fermat, independientemente de los problemas de existencia de límites, dependía de la existencia de una relación explícita entre la variable *y* y la variable *x* de la forma $y = f(x)$".

De manera similar pero utilizando explícitamente los infinitesimales en la resolución del problema de la tangente, Isaac Barrow publicó en 1670 su obra Lecciones de Geometría.

Observamos cómo en esta etapa la visualización jugó un papel importante. En su obra, Descartes explica y da importancia al papel de las imágenes y figuras en lo que respecta al pensamiento matemático. Afonso (2002, p. 59) se refiere al respecto, citando un pensamiento extraído de *Reglas para la dirección del espíritu*:

> ... es preciso servirse de todos los recursos del entendimiento, de la imaginación, de los sentidos y de la memoria: ya para intuir distintamente las proposiciones simples; ya para comparar debidamente lo que se busca con lo que se conoce, a fin de reconocerlo.... Es útil también en muchas ocasiones describir estas figuras y mostrarlas a los sentidos externos para que de este modo se mantenga atento nuestro pensamiento más fácilmente.

Nacimiento del cálculo

El período que comienza en el siglo XVII, caracterizado por la síntesis entre los métodos geométricos de Cavalieri y Barrow, por los métodos analíticos de Descartes, Fermat y Wallis y por la asimilación del hecho de que el trazado de tangentes y cuadraturas eran procesos inversos e interrelacionados permitió la elaboración de un aparato algorítmico que brindaba métodos generales para el tratamiento de curvas estudiadas en la época. Estos avances fueron un elemento importante en la formación del Análisis Infinitesimal. Su nacimiento fue la culminación de un largo proceso, que consistió en la acumulación de elementos del cálculo diferencial e integral así como de la teoría de series.

Ribnikov (1974, c.p Ruiz, 1998, p. 122) manifiesta:

> Las causas que motivaron este proceso fueron los problemas de la mecánica, la astronomía y la física. Estas ciencias no sólo planteaban a las matemáticas problemas, sino que la enriquecían con sus representaciones de magnitudes continuas y movimientos continuos y, sobre todo, con la esencia y forma de las dependencias funcionales. En una estrecha interacción de las matemáticas y las ciencias contiguas se elaboraron los métodos infinitesimales que son la base de las matemáticas variables.

En el último cuarto del siglo XVII, el inglés Isaac Newton y el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz, de manera diferente e independiente sistematizaron y generalizaron las ideas y procedimientos que habían sido abordados hasta el momento.

Tanto el cálculo de Newton como el de Leibniz trataban de cantidades variables. En Newton cantidades que variaban con el tiempo. En Leibniz una sucesión de valores infinitamente próximos. El primero tuvo una idea intuitiva de movimiento continuo próxima al concepto de límite. El segundo concibió el continuo geométrico formado por segmentos infinitesimales.

El primero en descubrir el cálculo fue Newton, pero su miedo a publicar le hizo guardar su descubrimiento en secreto. Uno de sus aportes fundamentales es la interpretación geométrico-cinemática de los conceptos fundamentales del análisis matemático. Siguiendo a su maestro Barrow, tomó el tiempo como argumento y analizó las variables dependientes como cantidades continuas que tienen cierta velocidad de cambio.

En su obra *Método de las Fluxiones* (1665-1666) estudió las magnitudes variables que representan diversas formas de movimiento mecánico continuo. A las magnitudes que varían continuamente las llamó *fluentes* (nuestras funciones actuales) y las consideró como variables dependientes del tiempo, después introdujo las velocidades de las fluentes que las denominó *fluxiones*. Para calcular las fluxiones les imponía a las fluentes la condición de una variación infinitesimal y las representaba por $\dot{x}$ e $\dot{y}$. En términos actuales éstas son las derivadas de *x* e *y* con respecto a *t* $\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right)$ y la razón entre ellas es la derivada de *y* con respecto a *x* $\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}\right)$.

Las fluxiones o velocidades de las fluentes son *razones de cambio instantáneas*, y expresan la rapidez con que cambia una variable respecto a otra en un instante. Esta es la idea física fundamental que subyace en el concepto actual de derivada.

Asoció también el concepto de fluxión con el problema de las tangentes. De manera muy similar a las ideas desarrolladas por sus predecesores, consideró una curva *f(x, y)* = 0 como el lugar geométrico determinado por la intersección de dos rectas en movimiento, una vertical y la otra horizontal, las coordenadas *x* e *y* del punto en movimiento son funciones del tiempo *t* y están representadas por las rectas horizontal y vertical, respectivamente (Figura 4). El movimiento resulta de la composición del movimiento horizontal cuya velocidad está representada por el módulo del vector *x* y la del movimiento vertical por el módulo del vector *y*.

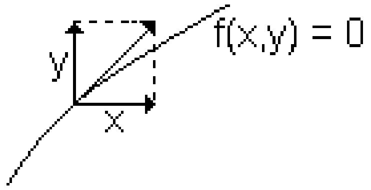


Figura 4 Vector velocidad como composición del movimiento horizontal y el vertical

Por medio de la ley del paralelogramo se obtiene el vector resultante cuya dirección determina la tangente a la curva y que tiene como pendiente $\frac{y}{x}$.

En 1671 escribió el artículo *"Un tratado del método de series y fluxiones"*, en el cual estableció la manera de expresar y trabajar relaciones algebraicas complicadas rescribiéndolas como series infinitas de términos más sencillos. Asoció el manejo de las series infinitas con las velocidades de cambio, las que a su vez utilizaba para determinar la fluente, lo que fluye. Presentó así los dos problemas principales del cálculo infinitesimal, la diferenciación y la integración, en términos de movimiento. Es decir, dada la ley para la distancia determina la velocidad y, dada la velocidad, determina la distancia. Relacionó los dos problemas, haciendo una herramienta utilizable lo que hoy conocemos como teorema fundamental del cálculo.

Muchos de sus resultados aparecen en su obra *Principios matemáticos de la filosofía natural*, editada por primera vez en 1687 y con dos nuevas ediciones en 1713 y 1726. Presentamos el lema VI de la sección primera del libro primero para analizar el tratamiento que Newton le daba a la tangente:

> Si cualquier arco ACB, en una posición dada, es subtendido por su cuerda AB, y en cualquier punto A situado en medio de la curvatura continua es tocado por una recta AD prolongada en ambos sentidos, si los puntos A y B se acercan el uno al otro y se encuentran, afirmo que el ángulo BAD contenido entre la cuerda y la tangente disminuirá hasta lo infinito, desapareciendo en última instancia... (Isaac Newton, 1713. Traducción de Antonio Escohotado. En Serna, 2007, p. 93).

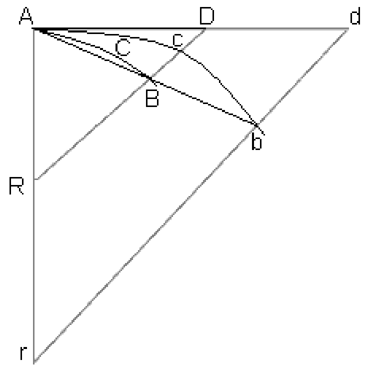


Figura 5 Tratamiento de Newton al problema de la tangente

Newton tuvo en cuenta la idea de lo infinitamente pequeño y cómo, al realizarse el proceso, la cuerda subtendida tiende a ser la tangente a la curva en el punto A. Trabajó la idea del paso al límite ya que dicha tangente es el límite al que llega la cuerda AB. Utilizó ideas variacionales al mencionar que los puntos A y B se acercan uno al otro y se encuentran. Construyó las figuras como un argumento necesario para dar las explicaciones.

Leibniz, más conocido como filósofo, presentó su cálculo entre 1673 y 1676. Su descubrimiento fue posterior al de Newton, aunque fue el primero en publicarlo. Basándose en una concepción geométrica llegó a resultados similares, obteniendo un método para la resolución del problema de las tangentes y la determinación de áreas y volúmenes.

Inspirándose en sus primeros trabajos sobre sucesiones de sumas y diferencias de números, traslada sus ideas al contexto continuo, como ser el caso de las variables asociadas a las curvas geométricas. Comienza a desarrollar toda una teoría de sumas y diferencias infinitesimales, a partir de la cual obtiene sus nociones de *diferencia* e *integrales*. Introdujo la notación que actualmente usamos para ambas nociones.

Decía que en una sucesión infinita de valores de una variable, que nombramos x, la diferencia entre dos valores sucesivos es el diferencial de x (dx), que es infinitesimal o despreciable comparado con los valores de x. Además, la suma de todas las diferencias (que el anotaba $\int dx$) da como resultado la variable completa x. Es decir: $\int dx = x$.

Definió diferencial de una ordenada de una curva cualquiera, dy, como un segmento cuya relación a dx, es igual a la relación entre la ordenada y la subtangente $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{y}{S_t}\right)$. Se dio cuenta de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas cuando las mismas tienden a cero y que el cálculo de un área depende de la suma de las ordenadas o de los rectángulos cuya abscisa tiende a cero, convenciéndose que eran problemas equivalentes.

En un artículo publicado en 1673, usó por primera vez el término “función”. Inicialmente, no para designar la relación formal entre la ordenada de un punto y su abscisa, sino en el sentido corriente que describe la función de un órgano en un organismo, o en una máquina. Significaba por ejemplo, tener un punto de contacto con la curva, ser perpendicular a la curva, considerar su subtangente, etc.

Posteriormente utilizó la palabra en un sentido más general, aunque todavía poco preciso y referido siempre a cuestiones geométricas, identificando la noción de función con ciertas longitudes tales como abscisas, ordenadas, tangentes, normales, etc., asociadas con la posición de un punto en una curva.

Se observa en este período una tendencia de los matemáticos en general a rechazar explicaciones que implicasen suposiciones arbitrarias. Newton veía como desfavorable el hecho de no poder traducir con una fórmula cualquier expresión, mientras que se mostraba satisfecho con cualquier concepción que, mediante una fórmula, permitiera abordar algo real de manera eficaz. Sierpinska (1989, c.p. Ruiz, 1998) expresa que se promovió una actitud hacia las matemáticas, según la cual lo principal es proveerse de un conjunto de algoritmos que capaciten a los científicos para resolver problemas. La eficacia de los cálculos formales se convirtió en un obstáculo epistemológico para el desarrollo de la noción de función.

La concepción mecánica de curva presente en matemáticos como Galileo, Torricelli, Roberval o Newton, que hacía que las curvas no fueran consideradas como gráficas de la relación funcional, sino más bien como trayectorias de puntos en movimiento resultó otro obstáculo al desarrollo de la concepción de función.

2.5. Siglos XVIII y XIX. La consolidación del sistema de representación simbólico

Durante el siglo XVII los objetos de estudio del análisis infinitesimal eran las curvas geométricas, tarea realizada esencialmente en el marco de la geometría cartesiana y relacionada con la mecánica y la física. Durante el siglo XVIII comienza a perder este carácter a favor de la aritmetización y del uso casi exclusivo del álgebra.

Con los trabajos de Jean Bernoulli, Leonard Euler y Lagrange se consolida la noción de función como representación de procesos de variación y cambio así como el sistema de representación simbólico. La ampliación del concepto de función se desarrolló ampliamente en el siglo XIX con los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet, entre otros.

El impacto del cálculo infinitesimal fue tan grande que durante casi todo el siglo XVIII los matemáticos se dedicaron a explorar sus aplicaciones obteniendo resultados importantes en el cálculo variacional, la astronomía, la hidrodinámica y otros campos de la mecánica. El análisis fue cobrando cada vez mayor importancia e independencia como disciplina, perdiendo su carácter geométrico y mecánico a favor del uso casi exclusivo del álgebra. A partir de mediados del siglo XIX se comienza a desconfiar de la intuición y de lo visual y los matemáticos empiezan a trabajar en una fundamentación rigurosa del cálculo.

En 1820, Cauchy hizo un aporte importante en la reconstrucción de los fundamentos del análisis cuando, sobre la base de la teoría de los límites, introdujo el lenguaje algebraico de las desigualdades. Esto llevó a la aparición de definiciones sólidas sobre convergencia de series, límite, continuidad y diferenciabilidad. En 1823 definió la derivada de f(x) como $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, siempre que este límite exista.

Con el perfeccionamiento del concepto de límite, la construcción de la teoría de los números reales, la teoría de conjuntos y el desarrollo de la teoría de las funciones, se le da al análisis matemático una estructura lógica coherente, con la que los conceptos básicos son definidos rigurosamente a partir de los números reales y las funciones. La derivada es definida como un límite existente para funciones continuas. Se define continuidad en términos del límite y éste por medio de los ε y δ.

Con la introducción de la teoría de conjuntos el concepto de función alcanza un nuevo grado de generalidad. Al considerar una definición en términos conjuntistas, todas las anteriores corresponden a casos particulares. Con esta definición se pone de manifiesto una caracterización estática, como colección de pares de elementos, quedando oculto el carácter dinámico de asignación entre variables. Azcárate y Deulofeu (1996, p. 53) manifiestan que con esta definición, la noción de función "pierde muchos de los atributos que tenían las definiciones clásicas, como son la idea de variación, de continuidad, de la variable como parámetro temporal, de dependencia, característicos de la mayoría de problemas que generaron la necesidad del concepto de función".

2.6. La última etapa. La interacción entre sistemas de representación en el estudio de la variación y el cambio

El rigor conferido al estudio del análisis a finales del siglo XIX y durante el siglo XX, transformó las concepciones sobre la matemática en los distintos campos y sobre la manera de concebir los sistemas de representación de procesos o fenómenos de variación y cambio. Afonso (2002) manifiesta que la Teoría de Conjuntos de Cantor y las paradojas en torno a los fundamentos de la matemática condujeron a que los matemáticos de la época hicieran hincapié en los aspectos formales y desecharan argumentos visuales. La influencia del formalismo fue fundamental en la investigación, extendiéndose además a la estructura de los libros de texto en todos los niveles de la enseñanza.

En conexión con la teoría de conjuntos, los conceptos de variable y de función adquirieron mayor precisión, hecho esencial para el desarrollo posterior del análisis. Nace a comienzos del siglo XX, con matemáticos como Borel, Lebesgue, Luzón y su escuela, una nueva rama del análisis: la teoría de funciones en una variable.

La base proporcionada por el desarrollo del análisis y la física matemática, junto a las nuevas ideas de la geometría y el álgebra, lleva al desarrollo de una nueva rama de la matemática, el análisis funcional, que juega un papel preponderante en la matemática moderna, con los importantes trabajos de matemáticos como Hilbert, Riesz y Banach.

El desarrollo desde la primera mitad del siglo XX de las tecnologías informáticas y su evolución hasta llegar al uso de sistemas gráficos y algebraicos ejecutables, ha abierto un extenso campo de experimentación y desarrollo, con importantes repercusiones en el campo de la educación.

Desde las últimas dos décadas del siglo XX la enseñanza de la matemática ha experimentado una enorme evolución. La mediación de herramientas computacionales permite la interacción entre sistemas de representación, constituyéndose en una poderosa herramienta para observar, representar, modelar y simular situaciones de variación y cambio. En numerosas investigaciones de educación matemática, se resalta la tendencia hacia la renovación del papel de la visualización en el quehacer matemático (Afonso, 2002).

3. Conclusiones

Revisando algunos aspectos del estudio realizado, resalta en primer lugar el hecho de que el origen y la evolución del cálculo diferencial trata sobre incrementos y cantidades de cambio. Las ideas que llevaron a Newton y a Leibniz a la invención del cálculo se fueron gestando desde muchos siglos antes a estos matemáticos. En esas etapas anteriores los problemas se abordaron de manera general y desde diferentes perspectivas, especialmente numéricas y geométricas, pero el mayor logro se alcanzó al estudiar el cambio más sencillo, el cambio de posición. Se produjo un gran progreso al intentar describir cómo se realiza el movimiento sin preocuparse por qué se realiza de esa manera.

El paso más importante fue relacionar los problemas de la mecánica, conectados con el estudio del movimiento, y los antiguos problemas de la geometría, consistentes en la determinación de tangentes a una curva dada. El problema de la tangente era estudiado desde la época de los griegos de la antigüedad clásica. Sin embargo, con la transición de la matemática de las constantes a la matemática de las variables, la tangente a una curva comienza a adquirir un carácter variacional. El método de determinar la tangente a partir de la pendiente de una secante y hallar el límite de esa pendiente cuando uno de los puntos de corte se aproxima tanto como se quiera al otro, fue el método utilizado por Newton para el cálculo de velocidades instantáneas y fue la base gráfica del cálculo de derivadas en los libros clásicos.

Para llegar a lo que actualmente se conoce como derivada, formalizando una definición rigurosa en términos del límite, tuvieron que transcurrir varios siglos de desarrollo de las ideas matemáticas relacionadas con las tangentes, con la variación y con los infinitesimales. Esta etapa se caracterizó por tener un componente fundamentalmente visual e intuitivo, en interacción constante con problemas geométricos y físicos.

En el siglo XX la actividad matemática sufrió la influencia de una corriente formalista, que rechazó la visualización como herramienta de demostración y análisis. Se considera la derivada como un concepto abstracto definido en términos del límite e inserto en una estructura determinada por el rigor matemático. Así ha llegado a la actualidad y de esa manera es introducida generalmente en la enseñanza.

Sin embargo, en las últimas décadas, se observa una renovación del papel de la visualización e interés por el estudio del rol que juega el uso de distintas representaciones de un concepto en el desarrollo de esta forma de pensamiento.

Estos aspectos relacionados al desarrollo histórico de la derivada sugieren un camino que puede ser explorado en la enseñanza. No se trata de reproducir en el aula cada uno de los episodios que tuvieron lugar en la historia de su desarrollo, sino de recuperar las ideas, estrategias y procedimientos claves que contribuyeron a su formación. En este sentido Wenzelburger (1993, p. 2) manifiesta:

> ...de esta manera podría obtener del proceso histórico de desarrollo del análisis matemático indicaciones importantes acerca del fin y propósito de esta rama de las matemáticas.
>
> La enseñanza del cálculo se debería orientar en esta génesis que tuvo lugar en la historia de la ciencia matemática: una formación lenta de conceptos matemáticos a través de la liberación de las percepciones sensoriales la intuición primaria.

Es razonable entonces intentar la formación de este concepto explotando el potencial que las nociones de variable y función tuvieron en la modelación de los problemas del movimiento, de manera que esto prepare el terreno para estudiar los problemas de la rapidez de la variación por medios infinitesimales. La idea es considerar el estudio de la variación como una especie de eje rector del que se desprende el contenido temático, otorgando un lugar central a la visualización y al manejo de distintas formas de representación de las funciones.

Bibliografía

Afonso, R. (2002). *Problemas de convergencia en un contexto de software educativo*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de La Laguna.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas* (Primera Reimpresión). Editorial Síntesis, Madrid. España.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia. La derivada un concepto a caballo entre la Matemática y la Física*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra: España.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En: Cantoral, R. (ed.), *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME*-8, 69-91. Grupo Editorial Iberoamérica, Sevilla.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del Cálculo*. Thomson Editores, México.

Carrasco, E. (2005). *Visualizando lo que varía. Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo*. Tesis de maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Castiblanco, A.; Urquina, H.; Acosta, E. y Rodríguez, F. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Serie Documentos. Colombia.

Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis doctoral. Instituto Superior Pedagógico: Enrique J. Varona. La Habana.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Universidad de Jaén. Servicio de publicaciones, Jaén.

Serna, L. (2007). *Estudio socioepistemológico de la Tangente.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Wenzelburger, E. (1993). *Didáctica Cálculo diferencial*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Vrancken Silvia. Profesora en Matemática.Magíster en Didácticas Específicas por la Universidad Nacional del Litoral. Línea de investigación:Educación Matemática ocupándose en especial de las dificultades de enseñanza y aprendizaje de los principios del cálculo y la incorporación de las TIC en el aula. Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral-Santa Fe. **Argentina.svrancke@fca.unl.edu.ar**

Engler Adriana. Licenciada en Matemática Aplicada. Magíster en Educación Psicoinformática. Actualmente es alumna del Doctorado en Matemática Educativa (IPN–CICATA. México). Investigadora en Educación Matemática, en especial sobre enseñanza y aprendizaje de los principios del cálculo e incorporación de nuevas tecnologías en el aula. Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral-Santa Fe. Argentina. **aengler@fca.unl.edu.a**r

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 71-86

Adquisición de competencias en estudiantes de Grado de Maestro en Educación Primaria mediante el trabajo práctico: actitudes hacia las matemáticas, TIC y el programa "Escuela 2.0"

Raquel Fernández Cézar, Constancio Aguirre Pérez

Fecha de recepción: 10/02/2012
Fecha de aceptación: 12/03/2013

Resumen	Este artículo muestra un diseño del "trabajo práctico" de la asignatura de Didáctica de los Números y la Estocástica de primer curso del Grado de Magisterio en Educación Primaria. Se persigue con el desarrollo de esta experiencia que los alumnos adquieran las competencias incluidas en la guía docente de la asignatura, introducir a los alumnos en el uso de las TIC como fuente de información, herramienta y soporte educativo al acercarles al programa Escuela 2.0 implantado recientemente en las escuelas de Educación Primaria, y mejorar su Actitud hacia las matemáticas. **Palabras clave**: maestros en formación, competencia matemática, TIC, programa Escuela 2.0.
Abstract	This report shows a particular design of the practical work section included in the syllabus of the matter Didactics of Numbers and Stochastic in the first course of Teacher in Primary Education Degree. The purpose is to help students reach the competences indicated in the syllabus of the matter, establish contact with ICT School 2.0 programme, currently in implementation in Primary Schools and rise the students' average score in Attitudes towards Mathematics. **Keywords:** teacher education, mathematics competence, ICT, 2.0 School programme
Resumo	Este artigo mostra um design de "trabalho prático" o curso de Didática de Números e a Estocástica do primeiro ano do grau de professores no ensino primário. É perseguido com o desenvolvimento desta experiência que os estudantes adquiram as competências incluídas no ensino do guia do assunto para introduzir os alunos na utilização das TIC como uma fonte de informação, ferramentas, e suporte a abordagem educacional-los implantados escola 2.0 programa recentemente nas escolas de ensino fundamental e mejorarar sua atitude face à matemática. **Palavras-chave;** Educaçao do profesores, competência matemática, TIC, programa Escola 2.0

1. Introducción

Las políticas educativas en nuestro país han cambiado varias veces en los últimos 40 años. Así, hemos pasado de la Ley General de Educación -LGE- de 1970 que se centraba en el aprendizaje de contenidos, hasta la actual Ley Orgánica de Educación (LOE), que entró en vigor en mayo de 2006 y que trajo consigo uno de los principales cambios en la educación en niveles no universitarios: la orientación de la enseñanza hacia el desarrollo de las competencias del alumnado. En el camino se ha ido pasando por la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema

Educativo –LOGSE- de 1990 y la Ley Orgánica de Calidad de la Educación –LOCE- de 2002, que habían dado el paso hacia el desarrollo de contenidos procedimentales y capacidades, entendiéndose estas como el conjunto de potencialidades del alumno. Las distintas reformas han ido incorporando al sistema educativo aspectos novedosos presentes en la sociedad del momento, y manteniendo otros. Estos cambios normativos indefectiblemente se han reflejado en los diseños de los programas de formación del profesorado. Así, en este período de tiempo al que nos referimos en el párrafo anterior, los programas de formación del profesorado han pasado desde los ofrecidos en las antiguas Escuelas Normales (período anterior a la Ley General de Educación de 1970), pasando por los ofrecidos en las Escuelas de Magisterio ya con rango de estudios universitarios (BOE 23 de octubre 1971), por las Directrices Generales publicadas en 1992, y acabando con los actuales, adaptados al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) en las Facultades de Educación tras la adaptación al Proceso de Bolonia (BOE 4 de marzo de 2010).

En nuestra universidad, la universidad de Castilla La Mancha (UCLM), se implantó el Grado de Maestro en Educación Primaria en el curso 2009-2010, dado que la memoria de verificación del título fue aprobada por la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (ANECA) en ese año. En esta memoria se recoge la última adaptación de los programas al sistema de créditos europeo (ECTS) y ha cambiado tanto la estructura del plan de estudios, como los nombres de las asignaturas y orientación de las mismas, introduciendo la palabra competencia. Se definen las competencias en términos generales como actuaciones integrales para identificar, interpretar, argumentar y resolver problemas del contexto con idoneidad y ética, integrando el saber ser, el saber hacer y el saber conocer (Tobón, Pimienta y García Fraile, 2010).

Los actuales planes de Grado en Maestro de Educación Primaria en nuestra universidad se estructuran en módulos, y estos en asignaturas. Incluyen como objetivo fundamental del plan de estudios la adquisición de competencias por parte del alumnado. Las competencias contempladas en el plan de estudios son de dos tipos: generales, indexadas con "I" (ECI/3857/2007), y específicas o de módulo, indexadas con "II". Dentro de las competencias generales hay varios subgrupos de competencias: generales de los títulos de grado para todos los grados universitarios (I.1), generales de grado propias de nuestra universidad (I.2), y generales del título Grado de Maestro en Educación Primaria (I.3). Esta información se detalla en la Memoria para la solicitud de verificación de Título de Grado de Maestro en Educación Primaria por la Universidad de Castilla-La Mancha [1]. Las correspondientes a cada asignatura se recogen en la guía docente, documento que se emplea para que el alumno sepa lo que de él se espera que sepa y que sepa hacer, al concluir la misma. Las competencias que se pretende que el alumno alcance al finalizar de cursar la asignatura que nos ocupa, Didáctica de los Números y la Estocástica, de 9 créditos ECTS, se incluyen, por lo tanto, en la guía docente de la misma [2].

1.1. Escuela 2.0 en Castilla La Mancha.

A pesar de los cambios en las comunicaciones en el mundo actual, y de la importancia que las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) tienen en la vida de todos nosotros, su presencia no se ve reflejada en la misma medida en el mundo escolar y académico. El currículo de educación primaria en España y en Castilla La Mancha [3] recoge las TIC como una de las nueve competencias básicas, en concreto la "d", tratamiento de la información y competencia digital, a desarrollar de forma transversal, es decir, que debe impregnar la enseñanza de todas las asignaturas del currículo, persiguiendo con ello la alfabetización tecnológica de todos los ciudadanos, dado que la Educación Primaria (EP) es un tramo obligatorio de la educación en nuestro país.

El estado español inició en el curso 2009-2010 el programa Escuela 2.0 que persigue implantar estas tecnologías de la información y la comunicación en la escuela. El proyecto comienza en el tercer ciclo de Educación Primaria, con niños y niñas de 10-11 años, y prevé cubrir los cuatro años siguientes, hasta que estos alumnos lleguen al segundo curso de la enseñanza secundaria obligatoria. Dado que en España las competencias en educación están en manos de las comunidades autónomas, no en todas ellas se está llevando a cabo de la misma forma.

Nuestro estudio se realiza en la Facultad de Educación de Cuenca que pertenece a la Universidad de Castilla La Mancha, por lo que describimos cómo se está implantando en nuestra región. La consejería de educación dota a los Colegios de Educación Infantil y Primaria (CEIP) de tantas pizarras digitales como aulas de tercer ciclo tenga el centro, y a cada alumno con un ordenador portátil tipo "notebook" de gran calidad. Se ha elegido con especial atención a sus características técnicas por su influencia en los alumnos, sobre todo en cuanto a la pantalla se refiere, de tal forma que el refresco de la misma no sea detectado por el ojo humano, y así no provoque fatiga visual en los usuarios. Las clases disponen también de un armario-cargador que sirve, no sólo para guardar los ordenadores, sino también para cargarlos y que estén operativos al día siguiente. Los colegios se dotan de conexión wi-fi para que todos los usuarios tengan acceso a internet. El programa pretende que el ordenador sea una herramienta de trabajo más para los alumnos, y que puedan disponer de la potencia que supone estar conectado a internet, con sus ventajas y sus riesgos, y cuyo uso es el maestro el que está encargado de delimitar y dirigir. Las baterías tienen una autonomía que les permite trabajar con los ordenadores en clase hasta 4 horas de las 5 lectivas que tiene su jornada diaria.

Los software elegidos para el programa son: cuadernia, smart, clic, audacity, entre otros, y todos ellos tienen una característica común: que son de acceso libre y gratuito. Se prevé que se empleen en la docencia de todas las asignaturas del currículo indistintamente. La consejería de educación forma a los maestros tutores de los cursos de tercer ciclo en su manejo para que puedan usarlos en sus clases. No son softwares particularmente educativos, sino de presentación de las lecciones y que permiten al educador crear sus propios materiales, ya que pueden poner sus explicaciones, introducir hipervínculos, y también tienen la opción de generar actividades interactivas, tipo puzzle, preguntas tipo test, enlazar figuras con definiciones, etc. Otra novedad en cuanto a la clase tradicional es que al estar conectados con las pizarras interactivas los ordenadores de los alumnos y el del maestro, la materia trabajada por él en la pizarra pasa directamente al formato digital y puede ser compartida por toda la clase, confiriendo a este trabajo una naturaleza nueva no perecedera, a diferencia de lo que ocurría hasta ahora.

1.2. La competencia matemática.

Entre las asignaturas del currículo, las matemáticas han sido tradicionalmente una de las más complicadas para educadores, padres y estudiantes. Como la lengua del país, la asignatura de matemáticas es considerada materia de tipo instrumental o básica en la Educación Primaria en España y en todos los sistemas educativos de su entorno. Ambas son fundamentales en el desarrollo intelectual de los estudiantes, ya que ofrecen herramientas de razonamiento para "aprender a pensar" y para "aprender a aprender" [3]. La educación primaria tiene como propósito que los estudiantes alcancen las "'competencias básicas" que le permitan ser un ciudadano con recursos intelectuales suficientes para desenvolverse en su vida académica y cotidiana en la edad adulta. Como se ha dicho anteriormente, la legislación que rige la EP en Castilla-La Mancha recoge un grupo de 9 competencias básicas, entre las que se encuentra la "competencia matemática". La vía para adquirir esta competencia matemática aparece desglosada en objetivos, contenidos, y criterios de evaluación, y su adquisición supone dotar al alumno de los conocimientos y destrezas necesarios para comprender, utilizar, aplicar y comunicar conceptos y procedimientos matemáticos; que puedan, a través de la exploración, abstracción, clasificación, medición y estimación, llegar a resultados que les permitan comunicarse y hacer interpretaciones y representaciones de la realidad [3]. Es decir, descubrir que las matemáticas están relacionadas con la vida y con las situaciones que los rodean, más allá de la escuela. No sólo en España y Europa, sino también en el resto del mundo, como en Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) [4], y en algunos países de Iberoamérica [5], las nuevas legislaciones que regulan los tramos de educación obligatoria, recogen las competencias básicas a alcanzar por los alumnos al finalizar ese tramo de su educación, y entre ellas, claro está, se encuentra la competencia matemática.

2. Antecedentes y Metodología

Debido a la reciente implantación de los nuevos planes de estudio, y los diseños de las nuevas guías docentes, existen escasos estudios publicados con relación a qué se considera trabajo práctico en didáctica de las matemáticas. Uno de ellos es el de Ruiz, F. et al (2009), pero no su enfoque está dirigido hacia la consideración o no de la resolución de problemas y los seminarios como trabajo práctico para futuros maestros, mientras que el nuestro contempla dentro del mismo la adecuación de un tema matemático al aula de EP, la puesta en común de argumentos con los compañeros, y, sobre todo, la implementación y práctica docente. De cualquier forma, no hay bibliografía que aporte resultados concluyentes sobre cómo debe diseñarse esa parte del trabajo que los alumnos deben completar, y queda por lo tanto abierto a propuestas por parte del profesorado.

Nuestro trabajo se enmarca en la investigación-acción en la que tratamos de conseguir que los alumnos adquieran mediante un planteamiento concreto de "trabajo práctico" o de campo, varias competencias de las incluidas en la guía docente de la asignatura de Didáctica de los números y la Estocástica de primer curso de Grado de Maestro en Educación Primaria de la Facultad de Educación de Cuenca, entre ellas las referentes a las TIC actualmente en implantación en las aulas de primaria con el programa Escuela 2.0.

2.1. La muestra.

El estudio se ha realizado con los alumnos de la Facultad de Educación de Cuenca, en la Universidad de Castilla-La Mancha, matriculados en la asignatura Didáctica de los números y la Estocástica, impartida en primer curso de Grado de Maestro en Educación Primaria. La muestra la conforma uno de los grupos constituido por 90 alumnos en lista, de los cuales asisten a clase todos al inicio del curso, y casi el 60% al final del mismo. La realización del trabajo práctico es obligatoria para todos ellos, asistan o no a clase, con una valoración del 10% para los que asisten (modalidad presencial) y un 5% para los que no asisten (modalidad semipresencial).

Tradicionalmente, los estudiantes que cursaban estudios de magisterio en España provenían de los bachilleratos (ciclo preuniversitario) que no tenían cursos de matemáticas entre los requisitos obligatorios. Nuestros estudiantes tienen actualmente una composición ligeramente diferente, ya que los grupos de alumnos en nuestra facultad están constituidos aproximadamente por el 70% de estudiantes que provienen del bachillerato de Ciencias de la Salud, Tecnológico o de Ciencias Sociales, que sí tiene matemáticas como requisito obligatorio; un 25% que provienen del bachillerato de Humanidades, sin matemáticas como asignatura obligatoria; y el otro 5% que han accedido desde la Prueba de Acceso a la Universidad para mayores de 25 años, también con matemáticas como asignatura optativa.

2.2. Planteamiento del trabajo práctico.

El conjunto de competencias de la asignatura se incluyen en la guía docente, y nos ocupan las que aparecen en el siguiente cuadro:

I.2.2 Dominio de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC).
I.2.3 Correcta comunicación oral y escrita.
I.2.4 Compromiso ético y deontología profesional.
I.3.2 Diseñar, planificar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
I.3.5 Fomentar la convivencia en el aula y fuera de ella, resolver problemas de disciplina y contribuir a la resolución pacífica de conflictos. Estimular y valorar el esfuerzo, la constancia y la disciplina personal en los estudiantes.
I.3.11 Conocer y aplicar en las aulas las tecnologías de la información y de la comunicación. Discernir selectivamente la información audiovisual que contribuya a los aprendizajes, a la formación cívica y a la riqueza cultural.
II.1 Adquisición de las competencias matemáticas básicas y capacidad de aplicarlas en la práctica.

Tabla 1. Competencias propias de la asignatura: Didáctica de los números y la estocástica, incluidas en la guía docente

Perseguimos con el planteamiento de la actividad que los alumnos alcancen los siguientes objetivos:

1) Adquirir las competencias incluidas en la tabla 1 de la guía docente.
2) Acercar a los maestros en formación a las herramientas tecnológicas (Escuela 2.0) que encontrarán, al salir a las aulas para desempeñar su práctica docente en el aula de matemáticas.
3) Actuar sobre el dominio afectivo de los estudiantes y modificar positivamente su actitud hacia las matemáticas.

Para alcanzarlos, hemos considerado adecuado, detectar previamente el grado de conocimiento que los alumnos tenían del programa Escuela 2.0 y de su implantación en los centros de EP financiados con fondos públicos en nuestra región. Les hemos pasamos la siguiente encuesta, como puede verse, preparada ad-hoc por la ausencia de trabajos previos sobre el tema:

1.	Indica si has oído hablar sobre el programa Escuela 2.0. SI □ NO□
2.	Si lo conoces, indica si has empleado algún software de los recomendados en el programa Escuela 2.0: SI □ NO □

Tabla 2. Encuesta para comprobar el conocimiento sobre el programa Escuela 2.0

El total de los estudiantes contestó que NO a la primera pregunta, lo que nos permitió concluir que el 100% de la muestra no había oído hablar de este programa, y, por lo tanto, no conocían el software recomendado.

La consecución del objetivo 1 se ha valorado con la nota que se ha asignado al trabajo de campo, diseñado mediante pautas transmitidas a los alumnos usando la plataforma moodle instalada en nuestra universidad. Previamente, se han distribuido los alumnos en grupos de entre 3 y 5 miembros, por considerarse este rango de personas el más adecuado para trabajos en grupo, según Artzt (1991). Una vez formados los grupos, han elegido un tema de entre los que constituyen los contenidos del curso, que son los siguientes:

- Tema 1: El currículo de los números y la estocástica en Educación Primaria.
- Tema 2: El número natural.
- Tema 3: Operaciones con números naturales.
- Tema 4: Fracciones, decimales y porcentajes.
- Tema 5: Estadística y aplicaciones.
- Tema 6: Probabilidad.

Los estudiantes han ido realizando las sucesivas fases en las que se divide el trabajo, que se detallan a continuación:

En la fase 1, los estudiantes deben realizar la elección de uno de los temas matemáticos incluidos el temario de la asignatura Didáctica de los números y la estocástica y demostrar su dominio del mismo; realizar búsquedas de sitios web en los que se traten los mismos; ser críticos con los sitios encontrados, teniendo en cuenta que el objetivo final será emplearlos en la clase con sus alumnos de primaria; y, elaborar una memoria-resumen de su análisis para presentarla en clase a sus compañeros, con tiempo limitado a 15 min.

En la fase 2 se les pide diseñar una actividad pensada para un ciclo concreto de EP que puede involucrar el uso de los sitios web elegidos por ellos en la práctica 1, o servirse de ellos para diseñar una actividad de clase con materiales manipulativos comerciales o preparados por ellos mismos. Se concluye con la implementación en clase con sus compañeros en un tiempo determinado: 15-20 min.

En la fase 3 se desarrolla esa misma actividad didáctica en una clase de un colegio real con alumnos de EP. Para ello, los responsables de la asignatura han establecido contacto con centros públicos de EP de la ciudad de Cuenca, y se han distribuido los grupos de alumnos por los distintos colegios que han accedido. En cada colegio, se distribuyen los grupos de nuestros alumnos en función de los tutores que quieren colaborar en la experiencia, y los profesores de la universidad encargados de esta asignatura están presentes en todas las implementaciones de las actividades. Es importante destacar que esta fase del trabajo está enmarcada en la asignatura que nos ocupa, y no está dentro de la asignaturas Prácticum I y II que realizarán los alumnos a lo largo de su tercer y cuarto curso, respectivamente, en nuestra Facultad.

En la fase 4, deben elaborar una memoria en la que recojan la actividad que habían preparado, lo que han hecho realmente en clase con los alumnos de primaria, sus reflexiones en cuanto a su manejo y desarrollo de la clase, y sus observaciones respecto a la manera en la que realizan la evaluación, es decir, cómo detectan si sus alumnos aprenden y aprenden a hacer.

El trabajo total se valora con 1 punto como máximo, y cada fase ejecutada correctamente con 0.25.

Para cuantificar la consecución del objetivo número 3, consistente en valorar la modificación de la actitud hacia las matemáticas en nuestros alumnos, se ha pasado al grupo la encuesta de Elena Auzmendi (1992), que mide la variable "Actitud frente a las matemáticas", cuyas preguntas se muestran en la tabla 3. Se emplea esta escala por estar diseñada para estudiantes del sistema educativo español de bachillerato y primeros cursos universitarios.

1. Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios.
2. La asignatura de matemáticas se me da bastante mal.
3. Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto.
4. Utilizar las matemáticas es una diversión para mí.
5. Las matemáticas son demasiado teóricas para que puedan servirme de algo.
6. Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas.
7. Las matemáticas son una de las asignaturas que más temo.
8. Tengo confianza en mí cuando me enfrento a un problema de matemáticas.
9. Me divierte el hablar con otros de matemáticas.
10. Las matemáticas pueden ser útiles para el que decida realizar una carrera de "ciencias", pero no para el resto de los estudiantes.
11. Tener buenos conocimientos de matemáticas incrementará mis posibilidades de trabajo.
12. Cuando me enfrento a un problema de matemáticas me siendo incapaz de pensar con claridad.
13. Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas.
14. Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí.
15. Espero tener que utilizar poco las matemáticas en mi vida profesional.
16. Considero que existen otras asignaturas más importantes que las matemáticas para mi futura profesión.
17. Trabaja con las matemáticas hace que me sienta muy nervioso/a.
18. No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de matemáticas.
19. Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las matemáticas.
20. Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de matemáticas.
21. Para mi futuro las matemáticas son una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar.
22. Las matemáticas hacen que me sienta incómodo/a y nervioso/a.
23. Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas.
24. Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios.
25. La materia que se imparte en las clases de matemáticas es muy poco interesante.

Tabla 3. Escala de actitudes hacia las matemáticas de Elena Auzmendi

Como se ve en la tabla 3, la encuesta está compuesta por 25 preguntas y estas se dividen en cinco bloques de afectos: Ansiedad, Agrado, Utilidad, Motivación, y Confianza. Las preguntas relacionadas con cada bloque se muestran en la siguiente tabla.

BLOQUE	PREGUNTAS
Ansiedad	2, 3, 7, 8, 12, 13, 17, 18, 22
Agrado	4, 9, 14, 24
Utilidad	1,6, 15, 16, 19, 21
Motivación	5, 10, 25
Confianza	11, 20, 23

Tabla 4. Bloques de preguntas en la Escala de actitudes hacia las matemáticas de Elena Auzmendi

Las preguntas se valoran en una escala tipo Likert de 1-5, y las respuestas posibles van desde Totalmente en desacuerdo, hasta Totalmente de acuerdo, pasando por Ni de acuerdo ni en desacuerdo. Las instrucciones de uso de la encuesta vienen recogidas en el libro Escala de actitudes hacia las matemáticas (Auzmendi, 1992), y para evitar que se falseen los datos, no siempre corresponde a Totalmente en desacuerdo la puntuación mínima, ya que depende de cómo está plantea la pregunta.

Para detectar la modificación en la Actitud hacia las matemáticas se han comparado los resultados obtenidos al pasar dicha encuesta a los alumnos al principio de curso con los obtenidos al pasar la encuesta al final del mismo, tras la realización de la experiencia. Se han guardado los resultados individuales por alumno, pero los que se muestran en la tabla son los promedios obtenidos en total y por bloque de afectos.

3. Resultados

Los trabajos prácticos se han realizado tratando los siguientes temas del contenido de nuestra asignatura, dirigidos a los alumnos de los ciclos que se indican:

<u>Primer ciclo</u>:

- Sistema Monetario: monedas y billetes pequeños, objetos que comprar y vender con precios enteros y hasta 5€.
- Juegos con sumas en el pabellón polideportivo.
- Problemas escenificados de sumas y restas.

<u>Segundo ciclo</u>:

- Sistema Monetario: implementar tienda y fotocopias de monedas. Incluir euros y céntimos.
- Introducción a la división con materiales manipulativos como ábaco y otros materiales preparados por ellos.
- Números romanos.

Tercer ciclo:

- Materiales manipulativos preparados por ellos para introducción de fracciones y operaciones combinado con empleo de páginas web.
- Empleo del cuento de "Los tres cerditos" para realizar problemas.
- Trabajo de estadística mediante la creación de encuestas por parte de los niños, y la página web www.mathisfun.com en el aula althia.

En cuanto al objetivo 1, adquisición de las competencias incluidas en la guía docente (ver tabla 1), se evalúa con el trabajo realizado por los alumnos. Se considera que si se supera cada fase exitosamente se adquieren todas ellas.

En cuanto al objetivo de incorporar las TIC a la enseñanza de las matemáticas, se ha conseguido dado que se les ha presentado el programa Escuela 2.0 y han manejado algunas de las herramientas informáticas incluidas en el mismo en sus presentaciones y actividades diseñadas. Se han familiarizado con el uso de las TIC en el aula como receptores (alumnos) y como usuarios (docentes), y han descubierto el potencial que internet tiene como fuente de información. Pero también han sido conscientes de que "no todo vale", ya que han utilizado unos sitios web y descartado otros, lo que les ha servido para desarrollar su espíritu crítico. Han descubierto que este nuevo soporte informático les permite la reutilización, modificación y aprovechamiento posterior de los materiales elaborados por ellos mismos, por su naturaleza no perecedera.

Respecto al objetivo 3, influencia sobre la variable Actitudes hacia las matemáticas, se ha evaluado, como ya se ha dicho, al comienzo del curso y al final del mismo, y se muestran los resultados en la tabla que sigue.

Escala	Valor medio inicio curso	σ_{inicio}	Valor medio final curso	σ_{final}	Nº items
Total	57,54	11,70	60,28	8,34	25
Ansiedad	21,78	15,66	23,30	15,92	9
Agrado	6,48	5,47	6,68	6,90	4
Utilidad	14,68	13,77	14,72	12,74	6
Motivación	9,92	8,68	10,30	9,97	3
Confianza	5,70	27,32	5,28	14,45	3

Tabla 5. Media Total y por grupo de afectos al inicio y final del curso

Para descartar que el valor de la media total sea el mismo en ambos casos dado el tamaño de la muestra superior a 30 individuos tanto al inicio como al final del curso, y que tanto la media como la varianza son conocidas en ambas muestras, se aplica un test Z, cuyo parámetro se define en la siguiente ecuación:

$$z = \frac{(\mu_2 - \mu_1) - 0}{\sqrt{(\sigma_2^2 / n_2 + \sigma_1^2 / n_1)}}$$

Nuestra hipótesis de comparación es que ambas medias son iguales, y la hipótesis alternativa es que la media al final del curso, μ2, es superior a la que se mide al principio, μ_1.

$$H_0: \mu_2 = \mu_1$$

$$H_1: \mu_2 > \mu_1$$

Puesto que el valor obtenido para el parámetro es 1.61, al emplear la tabla A2 para estos test, se concluye que la hipótesis nula no es cierta con un nivel de significación de del 94,63% (1-0.0537). Por lo tanto las medias no son iguales y damos por cierta la hipótesis alternativa: la segunda media es superior a la primera, con el indicado nivel de significación.

Como el objetivo perseguido era mejorar la actitud hacia las matemáticas de los alumnos con nuestra experiencia docente, los resultados nos permiten concluir que lo hemos conseguido, con casi el 95% de probabilidad. Nos parece un logro importante, sobre todo porque nuestros alumnos partían de una media bastante baja comparada con la referencia de E. Auzmendi, y también porque estos estudiantes serán referentes de los suyos (McLeod, 1989) en el futuro y les transmitirán su percepción de las matemáticas y su sentimiento hacia las mismas.

En la secuencia de fases pautadas en la realización del trabajo práctico, de la fase 1 a la 4, se ha observado que mostraban más deficiencias en la primera fase, en relación a utilizar criterios de búsquedas eficientes en Google o en otros buscadores, y en la selección de los sitios web más adecuados para su uso en el aula de EP. Para subsanar esta carencia, se ha recibido a los grupos de alumnos en las tutorías y se les han dado indicaciones para realizar sistemáticamente búsquedas efectivas de webs matemáticas adecuadas a los contenidos de la EP, con Google como buscador, ya que es ampliamente utilizado no solo en España, sino en casi todo el mundo. Por ejemplo, se les ha indicado que, para buscar artículos publicados en revistas especializadas de matemáticas, deben buscar en el Google académico; si la búsqueda incluye varias palabras, debemos poner "+" entre ellas para que la búsqueda incluya a todas en los resultados, como por ejemplo, razonamiento + educación + primaria; si la búsqueda incluye una expresión literal, hay que usar comillas encerrando la expresión, como por ejemplo, "matemáticas en educación primaria".

El material encontrado ha sido consultado con cada grupo en las sesiones de tutoría, y se han discutido las características que hay que exigir al material de internet para ser empleado como material educativo. Después, han seleccionado los sitios web que pueden ser más adecuados para este fin de entre los que tenían. Los estudiantes han concluido unos criterios mínimos que resumen las exigencias del grupo-clase en ese aspecto, y que se muestran a continuación.

I. Se prioriza que el material sea atractivo para el alumno de EP y que le ayude a desarrollar su comprensión matemática del tema elegido.

II. Se descarta aquel material que esté insertado en un sitio web con elementos de distracción, como animaciones o sonidos, que no permitan al alumno centrarse en su tarea matemática y dificulten su aprendizaje.

III. Se buscan materiales con planteamientos alejados de lo común, que favorezcan un aprendizaje significativo y por descubrimiento, y que sean auto evaluables, y se descartan aquellos que solo ofrecen material similar al encontrado en libros de texto tradicionales.

En la preparación de las presentaciones de la fase 1 y el diseño de la actividad de la fase 3 no han necesitado asistir a tutorías. Tampoco para elaborar la memoria final, fase 4.

Como muestra de los trabajos realizados por los alumnos, se incluye en el anexo I una de las memorias entregadas al finalizar la fase 4, por un grupo compuesto por 4 alumnos que trata sobre los Números Romanos.

Los alumnos han recibido con entusiasmo este planteamiento del trabajo y han trabajado con una actitud muy positiva, ya que, entre otras cosas, les ha supuesto su primer contacto con al aulas de EP. Consideramos que en la ejecución sucesiva de las fases, se consigue que adquieran el conjunto de competencias que se incluyen en la tabla 1: con la fase 1 muestran que han adquirido la competencia II.1, la I.2.2, la I.2.3, y I.3.11; al finalizar la fase 2, las mismas que en la anterior y además I.3.2; al final de la fase 3, las mismas que en las fases anteriores, y la I.3.5; y al elaborar las memorias cuando completan la fase 4, muestran en sus reflexiones su consciencia sobre su labor docente, y por lo tanto consideramos que han alcanzado, al menos incipientemente, la competencia I.2.4.

Consideramos, por todo lo expuesto, cumplido el objetivo 2 pues los alumnos han incorporado las TIC como una herramienta de trabajo más en el desempeño de su labor como "enseñantes de matemáticas"; les ha hecho desarrollar el espíritu crítico respecto a fuentes de información en internet; les ha puesto en situación, al permitirles llevar a cabo su labor docente, con la responsabilidad que ello supone, al asistir a un colegio con alumnos reales de EP a poner en práctica la actividad diseñada por ellos mismos; también les ha hecho reflexionar sobre el contenido matemático que han mostrado, y sobre su propia labor docente/discente en la memoria final, y han experimentado en primera persona que el proceso de enseñanza-aprendizaje al que se van a dedicar no es un proceso cerrado ni inmutable, y requiere de replanteamientos y reorientaciones casi constantes.

4. Conclusiones

De nuestra experiencia podemos extraer las siguientes conclusiones.

1. El trabajo práctico así planteado es útil y adecuado para que los estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria adquieran algunas competencias que se incluyen en la asignatura de Didáctica de los Números y la Estocástica.
2. Con este planteamiento conseguimos que los alumnos tengan una Actitud hacia las matemáticas más positiva actuando sobre su dominio afectivo.
3. Los maestros en formación deben recibir en su formación universitaria información actual sobre los programas que están llevándose a cabo en los colegios de EP y tener contacto directo con estos centros porque esto les permite contextualizar su aprendizaje, lo que aquí se hace con el programa

Bibliografía

[1] Memoria verificación título [En línea]. Recuperado el 28 de febrero de 2013 de http://www3.uclm.es/eumagisterio-u/archivos/g_archivos/22/MEMORIA%20PRIMARIA.pdf

[2] Guía docente de Didáctica de los números y la estocástica, [En línea]. Recuperado el 28 de febrero de 2013 de http://www3.uclm.es/eumagisterio-cu/archivos/gasignaturas /16/46304.pdf

[3] DOCM, 68/2007 de 1 de junio, [En línea]. Recuperado el 28 de febrero de 2013 de http://docm.jccm.es/portaldocm/

[4] Math Standards and Expectations, [En línea]. Recuperado el 28 de febrero de 2013 de http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=4294967312

[5] Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), Estándares Curriculares para Matemáticas, Bogotá, Mayo de 2003. [En línea]. Recuperado el 28/02/2013 de http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf

Artzt A. F.y Newman C.M. (1991). *How to Use Cooperative Learning in the Mathematics Class.* National Council of Teachers of Mathematics, INC.

Auzmendi Escribano E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitaria. Características y medición.* Ediciones Mensajero, Bilbao, España.

ECI/3857/2007 de 27 de diciembre por la que se establece los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria.

McLeod, D.B. (1989). *The role of affects in mathematical problem solving, en D.B. McLeod y V.M. Adams Ediciones. Affect and mathematical problem solving: A new perspective,* (20-36), Springler-Verlag, New York.

Nortes Checa, A., Martínez Artero, R. (1992). *Actitud, Aptitud y Rendimiento en matemáticas: un estudio en primero de magisterio. Revista Suma*, 10, 36-40.

Ruiz, F., Molina, M., Lupiánez, J.L., Segovia, I. y Flores, P. (2009). *Mathematics Primary Teacher Training at the University of Granada: An Adaptation to the EHEA. Electronic Journal of Research in Educational Psychology,* 7(1), 425-454.

Tobón, S., Pimienta, J., y García Fraile, J.A. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias.* Pearson. México.

Fernández Cézar, Raquel, PhD.Profesora Asociada en la Facultad de Educación de Cuenca; Profesora de Ciencias en Suffolk University Madrid Campus. Líneas de investigación: Didáctica de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas y enseñanza de ciencias en entornos bilingües. **raquel.fcezar@uclm.es**

Aguirre Pérez, Constancio. PhD. Prof. De Didáctica de las Ciencias Experimentales. Línea de trabajo: Didáctica de las Ciencias Experimentales. Facultad de Educación de Cuenca, Campus universitario. Universidad de Castilla La Mancha**. constancio.aguirre@uclm.es**

Anexo I

Este trabajo fue presentado oralmente por un grupo de 4 alumnos. Es una transcripción literal de su relato realizada por ellos mismos.

Trabajo elaborado por......................................

Exposición para 4º Primaria.

Uso de gran grupo, pequeño grupo, individual.

Aula Althia.

Metodología y materiales:

- Uso de las nuevas tecnologías: Power Point.
- Uso de din-4 con números romanos
- Uso del propio cuerpo de cada alumno
- Uso de bolsa acertijos
- Uso de acertijos

Documentación en red:

Expositivas:

- www.wikilengua.org/index.php/N%C3%BAmeros_romanos
- http://www.mscperu.org/utiles/utilidades/num_roman.htm

Interactivas:

- http://www2.gobiernodecanarias.org/educacion/17/WebC/eltanque/todo_mate/actividades5/tema1_P6/tema1_pr6.swf
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/romanos/index.htm
- http://roble.pntic.mec.es/~msanto1/ortografia/numrom.htm

No tan adecuadas para el aula por incluir distracciones para el alumno:

- http://www.indicedepaginas.com/tests_rom.html
- http://www.elabueloeduca.com/aprender/matematicas/romanos/numeros_romanos.html

Comentario exposición números romanos

Comienza la exposición Alberto preguntando a toda la clase (gran grupo) si saben algo de los Números romanos (lluvia de ideas). Él les habla del rey Juan Carlos I, del papa Benedicto XVI. En Cuenca también se puede nombrar al rey o la calle Alfonso VIII. Esto sirve para relacionar la historia con nuestra unidad matemática pero también para encuadrar la presentación con un entorno cercano a ellos (competencia afectiva o emocional).

Una vez introducida la unidad, Alberto hace una breve exposición de la historia de estos números, pregunta a los chicos qué nos queda de los romanos y ellos comentan: acueducto de Segovia, latín, el coliseo de Roma, las olimpiadas. Aunque algunas respuestas no son del todo correctas, ahora el tema es más familiar (lluvia de ideas). Alberto cuenta que los números romanos no son muy utilizados en la actualidad pero se usan en actos de teatro, en algunos relojes etc.

Ahora pasa a explicar la equivalencia de las letras romanas con los números árabes. Comienza contando que los números que hoy usamos provienen del árabe (se apoya en información del libro "El Señor del Cero") y ahora sí les muestra en la pantalla la equivalencia de los números. Los chicos repiten la equivalencia guiados por Alberto: I es el 1, V es el 5… (Gran grupo; participación activa en clase).

Continúa Amparo hablando de las reglas de los números romanos, para lo que muestra la siguiente pantalla. Antes de describirlas les comenta que van a jugar con los números. Les pregunta: ¿queréis jugar? Todos contestan que sí. Les pregunta quién sabe jugar al parchís, y a la Wii (nuevas tecnologías). Muchos saben y les pregunta cómo se juega. Les deja que cuenten cómo se hace (participación gran grupo). Entonces les explica "cómo se juega" a los números romanos (visión lúdica del tema). Pasa la pantalla que muestra la primera regla. Les dice que antes de contarles la 1ª regla necesita saber si ellos saben cuál es su derecha para lo que tienen que levantar la mano derecha (lateralidad. Participación gran grupo). Es importante comentar que ella se da la vuelta y levanta su mano derecha, sino lo hiciera podría confundir a algún chico/a ya que a ella la ven como su imagen especular.

"Vale, muy bien", les dice; ya veo que sabéis cuál es vuestra mano derecha; entonces esta regla ya la conocéis. Utiliza este comentario para que les parezca más sencillo (competencia emocional).

Comienza la 1ª regla; les cuento lo que dice y volvemos a la tabla de equivalencia, anterior pantalla, y buscamos los números que están a la derecha de otra letra para poder sumar. Volvemos a la pantalla de la 1ª regla y ellos resuelven los ejemplos (Participación gran grupo).

Usa entonces las hojas con letras grandes. Saca aleatoriamente a dos alumnos para lo que se sirve del día del mes o también si ve alguien que parece más aislado, como le ocurrió el día de la exposición: un niño estaba en un rincón solo en un pupitre, además era inmigrante. Fue un niño escogido para que participara con el resto (Participación pequeño grupo). Estos niños muestran dos números romanos y los demás tienen que adivinar qué número suman: XI, II. Deben poner atención a cómo se colocan los números. Ellos están enfrente (Participación gran grupo).

Pasa la pantalla y se pasa a la 2ª regla, sigo el mismo procedimiento. Se les pide que digan cuál es su izquierda. (Lateralidad, interdisciplinariedad. Participación gran grupo). Se les explica la regla y se vuelve a la tabla de equivalencia para buscar qué números romanos se pueden restar, siempre a la izquierda de dos siguientes de mayor valor. Ellos van diciendo qué números son (Participación gran grupo). Se vuelve a la pantalla de la 2ª regla y entre todos resuelven los ejemplos. Ahora se buscan otros dos alumnos. Como Amparo ya les va conociendo saca a los más inquietos para otro ejercicio con nº de letras grandes: IV, IX. Los demás deben resolver qué números son (Participación gran grupo).

En este momento si se dispone de tiempo se les puede contar las leyendas del nº IV, así jamás olvidarán cómo se escribe este número:

Un relojero suizo, entregó un reloj que su soberano le había encargado. Como no sabía que el número 4 se escribe IV y no IIII. El monarca, al ver el reloj, le cortó la cabeza. Desde ese momento, a modo de protesta y homenaje, todos sus colegas comenzaron a trabajar y a usar el IIII en vez de IV

El conjunto de cuatro caracteres IIII crea una simetría visual con su opuesto en la esfera VIII, cosa que el IV no logra.

Poniendo IIII, con lo que esto supone de ahorro en la fabricación de los símbolos.

También se sugería que el IV corresponde a las dos primeras letras de Júpiter, (IVPITER en latín), el dios romano, su uso, por tanto, no era apropiado.

El símbolo I es el único que aparece en las primeras cuatro horas, el V aparece las siguientes cuatro horas y el X las siguientes cuatro, proporcionando una simetría rota usando el IV.

Luis XIV, rey de Francia y enamorado de la cultura de los romanos, prefería IIII sobre IV, por lo que ordenó a sus relojeros producir relojes con IIII en lugar de IV.

A continuación se les pregunta qué leyenda de todas les gusta más. Generalmente suele ser la del relojero suizo. (Participación gran grupo). (Desarrollo de imaginación, atención, interdisciplinariedad con otras materias)

Se pasa a continuación a la siguiente pantalla, 3ª regla. Se les explica y entre todos se dice qué números son, y posteriormente se resuelven los ejemplos (Participación gran grupo). Se les reitera que no sólo se pueden repetir 3 veces sino también dos.

A continuación Irene les explica la última regla para lo que se pasa de pantalla. A continuación, sale un voluntario y escribe en la pizarra un número multiplicando por mil su valor con la raya encima del mismo. Los demás alumnos dirán de qué número se trata. (Participación gran grupo)

Se les dice: Bueno ahora, ya sabéis cómo jugar. ¿Queréis jugar? Entonces, se les muestra la siguiente pantalla que presenta ejercicios con el título de fácil, difícil o mayor dificultad. Les pregunta Irene con cuál desean empezar, para hacerles participar, pero siempre empezará por los fáciles para fijar ideas.

Se pasa a la siguiente pantalla que muestra números romanos para que alumnos digan su equivalente árabe. Hay que ir de uno en uno, pues la presentación no permite otra cosa. Al comprobar el número se oye un aplauso (recompensa por esfuerzo). Estos ejercicios se hacen en gran grupo. Los alumnos los resuelven sin problemas

Se pasa a la siguiente pantalla. Los ejercicios que son más difíciles. Les pregunta Irene si son capaces de decir cuál es la forma correcta de escribir el 4; IV, VI, IIII. Antes de comprobar el número ellos deben decir qué manera es la correcta. Se les pregunta: ¿estáis seguros? Entonces, la descubrimos y comprobamos, comenta Irene. (Participación gran grupo).

Lo mismo ocurre con el siguiente ejercicio de la misma pantalla.

Ahora, es el turno de Mª Luz que pasa a los ejercicios de mayor dificultad. Se procede también de uno en uno. No se puede hacerlo salteado ya que la presentación no lo permite. Algún ejercicio resulta difícil para los alumnos así que Mª Luz lo detalla paso a paso en la pizarra con ayuda de los chicos. (Participación gran grupo).

Una vez hecho esto si queda tiempo se puede jugar de otra manera con los números romanos. Se dispone de una bolsa que al principio de la sesión se deja visible para los alumnos, pero sin decirles nada. Esto crea curiosidad en los chicos, que al final preguntarán qué hay en la bolsa.

Esta sensación del alumnado da pie para atraer su atención y jugar a las adivinanzas con ellos. Se les debe decir que se juega a este juego no sólo con las reglas sino usando estas de otro modo, con imaginación. Sale un niño por adivinanza, la leerá en voz alta (favoreciendo la entonación, el hablar en público) y los demás deberán adivinar de qué se trata. (Participación gran grupo).

<u>1ª adivinanza</u>:

Cinco más uno y quinientos
te dará, querido amigo,

una planta y no te miento.
Respuesta: VID

2ª adivinanza:

¿Qué país se queda en 1090 si le quitan las vocales?
Respuesta: México

3ª adivinanza:

Si digo: «uno entre veinte es igual a diecinueve», ¿es posible?
Respuesta: XIX

4ª adivinanza:

¿Cuánto es la mitad de XIII?
Respuesta: La mitad de XIII es VIII cuando se corta gráficamente.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 87-101

Trabajar colaborativamente en el diseño de Ambientes de Aprendizaje sobre problemáticas sociales: ¿una utopía a realizarse en y para la clase de matemáticas?

Brigitte Johana Sánchez Robayo, José Torres Duarte

Fecha de recepción: 13/09/2012
Fecha de aceptación: 7/02/2013

Resumen	En el proyecto de investigación *Los escenarios de aprendizaje como propuesta desde la Educación Matemática Crítica para la formación continuada de profesores de matemáticas en ejercicio*, se construyó de manera colaborativa con profesores de matemáticas, propuestas de enseñanza que les permitiera a los estudiantes fortalecer su formación sociopolítica. En este artículo, se presentan algunas consideraciones y desarrollos de dicho proceso, resaltando la crítica al papel que ha jugado tradicionalmente las matemáticas, al desconocer su potencial en la construcción de ciudadanía y soportando la idea de que el trabajo colaborativo permite transformar prácticas educativas. **Palabras clave**: Educación matemática crítica, trabajo colaborativo, ambientes de aprendizaje y formación sociopolítica.
Abstract	The research *Learning Milieus as a Proposal from the Critical Mathematics Education for In-Service Mathematics Teachers* allowed building by a collaborative way with mathematics teachers, some teaching proposals which enable some students strengthen their sociopolitical training. In this article, some considerations and developments of that process are submitted. By the way, it highlights the criticism to the traditionally role playing by mathematics, when their potential for making citizenship have been unknown. Also, the article supports the idea that collaborative work allows change educative practices. **Keywords:** Critical mathematics education, collaborative work, milieus of learning, sociopolitical training
Resumo	No projeto de pesquisa *Os cenários de aprendizagem, como proposta da Educação Matemática Crítica para a formação continuada de professores de matemática em exercício,* foram construídos, em colaboração com professores de Matemáticas, propostas de ensino que permitiram aos estudantes, fortalecer a sua formação sociopolítica. Neste artigo, apresentamos algumas considerações e desenvolvimentos deste processo, destacando a critica do papel que tradicionalmente tem desempenhado a matemática, ignorando o seu potencial na construção da cidadania. No final, se mostra a ideia de que o trabalho colaborativo pode transformar as práticas de ensino. **Palavras-chave:** Educação matemática crítica, trabalho colaborativo, ambientes de aprendizagem, formação sociopolítica

1. Introducción

Contrario a lo que la tradición presenta, la enseñanza y el aprendizaje de las diferentes disciplinas en la actualidad, busca con la interdisciplinariedad dejar de girar en torno a lo individual para hacerlo ahora en torno a lo social (Tomaz, 2008). Aunar esfuerzos para este propósito, pretende lograr mejores comprensiones de los hechos que rodean a los estudiantes y ello, da sentido a lo que se aprende y llena de pertinencia lo que se enseña. Bajo este paradigma, la Educación Matemática ha establecido relaciones; entre otras, con las Ciencias Sociales y recíprocamente, estas disciplinas y en particular la Historia, han abierto posibilidades de interrelación al enunciar su intensión de una Nueva Historia en donde todas las formas de pensamiento humano estén integralmente relacionadas (Grupo de investigación en la enseñanza de la Historia, 2008).

En este marco, la Educación Matemática Crítica (EMC); concebida como el enfoque sociopolítico de la educación matemática, comparte con la enseñanza de las Ciencias Sociales algunas pretensiones relacionadas; por una parte, con la comprensión crítica de la complejidad del presente para con base a esto proponer alternativas de superación de los problemas de la humanidad hacia el futuro (Bourdé, 1992), lo mismo que con la formación de ciudadanos críticos, democráticos y solidarios frente a los problemas y a sus posibles soluciones (MEN, 2002). Por otra parte, con la investigación en colectivos de profesores y estudiantes, así como el trabajo interdisciplinario (Tomaz, 2008).

Siguiendo esta perspectiva se desarrolló un proyecto de investigación[1], consistente en generar propuestas de enseñanza para estudiantes del Colegio Distrital Paulo Freire (Bogotá-Colombia) que fortalecieran la formación sociopolítica y que permitieran por un lado, una mejor comprensión de aspectos de su contexto cotidiano y por otro, posibilitar procesos de formación continuada de profesores, por medio del intercambio de colectivos de trabajo bajo la metodología de trabajo colaborativo. Las propuestas generadas, denominadas Ambientes de Aprendizaje por la perspectiva teórica que se adoptó[2], abordaban problemáticas sociales del contexto de los estudiantes para ser trabajadas en la clase haciendo uso de las matemáticas para su comprensión, modelación y búsqueda de alternativas de solución. Las problemáticas identificadas y la referencia a los Ambientes de Aprendizaje propuestos, se mencionarán más adelante.

Ahora bien, el Colegio Paulo Freire está ubicado en Usme, una de las localidades periféricas del sur de la ciudad capital Bogotá (Colombia). Dicha localidad presenta unas particularidades sociales y ambientales que llevan a pensar en la pertinencia del tipo de trabajo que se llevó a cabo bajo el enfoque teórico mencionado. Por ejemplo, Usme es una de las localidades que presenta el más alto potencial de crecimiento, entre otros factores, porque buena parte de su territorio aún es rural y ello le da posibilidades de extender su área urbana; de hecho, es una

[1] El proyecto en mención fue desarrollado por el grupo de investigación *EdUtopía* de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá-Colombia).
[2] Como ya ha sido mencionada la perspectiva teórica asumida fue la de la Educación Matemática Crítica. En ella Skovsmose (2000), propone seis Ambientes de Aprendizaje que describen las prácticas educativas en matemáticas. El Ambiente tipo uno es el llamado tradicional mientras el ambiente tipo seis es el ideal por cuanto trabaja las matemáticas bajo escenarios de investigación (o trabajo por proyectos) con referencia en situaciones críticas o problemas de la realidad de los estudiantes.

de las localidades que más población desplazada recibe del país por lo que se genera proliferación de urbanizaciones piratas, formación de barrios ilegales o soluciones de vivienda por la vía de la invasión.

Usme además, posee niveles de pobreza y miseria por encima del promedio de la ciudad, contando a 2001 con 60 800 personas consideradas como pobres y cerca de 13 200 como miserables. Buena parte de su población no satisface sus necesidades básicas, sus hogares no cuentan con todos los servicios públicos, algunas vías están en pésimas condiciones o son inexistentes y la mayoría de su población pertenece a los estratos I y II; razones por las cuales sus índices de calidad de vida, comparativamente con otras localidades, la ubican dentro de los más bajos, superada únicamente por la localidad de Santa Fé (Bogotá - Colombia).

2. Marco Teórico

La Educación Matemática Crítica es una perspectiva bajo la cual, la enseñanza de las matemáticas tiene primordialmente propósitos sociales y políticos, que van más allá de la promoción del sujeto cognitivo para llevarlo al plano del sujeto ciudadano; dimensión bajo la cual, se consideran las matemáticas como una herramienta para la comprensión y la mejora de las situaciones sociales en las que se encuentra el estudiante, así como para la formación democrática del mismo.

Presentada así, Valero (2006) menciona que lo democrático está relacionado con lo social y lo político: *lo social*, porque considera que los procesos asociados a la educación matemática van más allá del plano de lo individual; esto es antagónico a él y en este sentido, estimula el trabajo en equipos, la participación, la interacción en el aula, el diálogo comunicativo, la negociación de significados, la extrapolación de conocimientos del contexto a la escuela y de la escuela al contexto, relaciona matemáticas y prácticas en problemáticas cotidianas de la escuela y los estudiantes. Esta primera idea se opone a la tradición de ver la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como procesos de construcción individual en lo personal y en lo disciplinar; en otras palabras, y siguiendo a Valero (2006), se opone a la visión según la cual el aprendizaje de las matemáticas es un proceso individual en el cual una persona construye significados y construye conocimientos matemáticos. Esto contrasta con otras visiones que toman a tal sujeto y al objeto mismo de conocimiento en relación con otras personas y con el contexto donde se lleva a cabo la interacción entre tanto personas como personas y contextos.

En relación con *lo político*, se plantea la tesis según la cual "las matemáticas son un conocimiento poderoso para la acción social" (Valero, 2007, pg. 3); es decir, en sí mismas, tanto las matemáticas como su enseñanza y aprendizaje, son poderosas y las primeras potencian a quien las aprenden; no obstante, sus usos pueden ser objetos potenciales de construcción o destrucción y por tanto, es necesaria una mirada crítica sobre la manera como los actores sociales que participan en las prácticas de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, se posicionan en la construcción de sus significados (Valero, 2006). Así mismo, para nadie es un secreto que diversas desigualdades sociales se expresan inicialmente en el aula de clases, al verse fuertemente marcadas las diferencias entre los estudiantes que presentan grandes desarrollos en esta área y los que no, cuando se promueve la participación de aquellos que pueden dar rápidamente una respuesta y al ser las matemáticas un campo de conocimiento alejado de la realidad de quienes las aprenden.

Por otra parte, el enfoque hasta ahora descrito, fomenta los valores democráticos porque promueve la comunicación, que, según Hoyos (2008), es la competencia democrática por excelencia; fomenta la toma de decisiones de manera colectiva, propende por la transformación de las condiciones de vida de las y los estudiantes, estimula las deliberaciones y la toma de conciencia social frente a los problemas del contexto. De esta forma, esto último es considerado en relación con la construcción de sujeto político dentro y fuera del aula de clase; esto quiere decir, que puede tomar decisiones con criterio frente a su actuar, a su papel dentro de la sociedad y que el poder que tiene en el aula de clase, está en el mismo nivel del profesor, pues sus decisiones, direccionan y modifican las dinámicas de clase, incidiendo en su micro o macro contexto[3].

Algunos otros planteamientos base de la Educación Matemática Crítica, citados por Sánchez & Torres (2009, pg. 4), son:

- “Desde esta perspectiva, la actividad curricular es una actividad social para la formación en una nueva sociedad compleja y plural, actividad que encierra conflictos, mediatizados por el diálogo comunicativo” (Oliveras, 2006, pg. 142).
- “Las prácticas de la educación matemática no se pueden definir exclusivamente en términos de procesos de pensamiento individual. Los problemas no están solamente en la “cabeza” de los individuos, sino en la manera como colectivamente y a través de la historia se construyen ideas sobre lo que es válido y legítimo como acción y como pensamiento. De esta manera, los problemas se encuentran tanto en el nivel de la acción individual como en el nivel de la acción colectiva de grupos de personas y de sistemas sociales” (Valero, 2007, pág 2).
- “La escuela está llamada, desde paradigmas críticos sobre la Educación, a usar la praxis educativa como proceso de construcción de significado social, a romper la distribución de poder y las clases sociales y a la integración entre la diversidad sociocultural. La sociedad es cambiante, construida por quienes la componen” (Oliveras, 2006, pg. 142).

Otra de las consideraciones principales de la Educación Matemática Crítica consiste en cuestionar por un lado, la forma de entender el contexto y por otro, la influencia que éste tiene en las clases de matemáticas. Valero (2007) identifica el contexto de un problema, el de interacción y el situacional como tres maneras en las que éste se ha concebido en educación matemática y propone el sociopolítico como una alternativa de entenderlo. En éste se conciben los aspectos políticos del macrocontexto del estudiante, como parte del ambiente que determina las distintas situaciones que se viven en el aula de clases. Adicionalmente, en el contexto situacional se tienen en cuenta las condiciones sociales y culturales en las que se encuentra el estudiante; aquí, se identifican las situaciones que aquejan a la

[3] Microcontexto y macrocontexto son dos acepciones utilizadas por Valero (2002) donde, en la primera, se miran las acciones individuales e interacciones sociales dentro de espacios como la familia, la escuela, el trabajo y todos aquellos más cercanos al individuo; mientras que en la segunda, se consideran las estructuras sociales, políticas, económicas, que han sido construidas a nivel local, regional o global durante la historia.

comunidad a la que él pertenece, pues se parte del presupuesto de que ellas están afectando directamente el desempeño del estudiante y su participación como ciudadano.

Dentro de las acciones del proyecto se encontraba una pretensión permanente de relacionar teoría y práctica, así como de generar una propuesta de formación continuada de profesores para transformar la problemática en la enseñanza de las matemáticas caracterizada como tradicional, en la que tanto profesores como investigadores, participaran colaborativamente a lo largo del proceso. Para tales pretensiones se adoptó un enfoque metodológico que a continuación se describe.

3. Metodología

Las propuestas desarrolladas, se enfocaron en la planificación, acción, observación y reflexión (Barreto, et al, 2011) de las diversas acciones durante el proyecto, por lo que la metodología seguida fue la investigación acción. No obstante, dado que las intensiones del proyecto apuntaban a dos aspectos en particular: la formación de profesores y la creación de Ambientes de Aprendizaje para la enseñanza de las matemáticas, las acciones desarrolladas pueden especificarse de acuerdo a cada uno de estos aspectos.

Para la formación continuada de profesores se siguieron los principios del trabajo colaborativo, donde se considera que tanto profesores como investigadores tienen un conocimiento igualmente valioso, pero con distinto énfasis. Lo precedente, se concretaba en la elaboración de propuestas de enseñanza aprendizaje enmarcadas bajo el principio de tener en cuenta el contexto de los estudiantes y de que el aprendizaje de las matemáticas debe estar fuertemente determinado por las problemáticas sociales que aquejan a quienes van a aprender.

Para la selección de la población, es decir, profesores y estudiantes con los que se desarrollaría el proyecto, el grupo de investigación consideró importante que la propuesta tuviera incidencia en uno de los sectores menos favorecidos, pues aunque desde los principios de la Educación Matemática Crítica, la exclusión está excluida, las diferencias sociales que desde la misma se señalan, mostraban que el impacto sería mayor si se considera este tipo de población. Es así que, la investigación se desarrolló en el Colegio Distrital Paulo Freire, cuyo contexto situacional ya fue brevemente descrito.

3.1. De la formación continuada de profesores

El trabajo colaborativo es un movimiento que aparece en los ochenta, como una propuesta para abordar los problemas de la escuela, por medio del trabajo conjunto de profesores e investigadores (García, et al. 2009). Siguiendo los planteamientos de Boavida & Ponte (2002), se requiere que todos los integrantes del grupo se esfuercen de igual manera y den sus aportes, para obtener los objetivos propuestos. Para ello, es necesario que los integrantes del grupo tengan un objetivo común, acepten la diversidad, respeten las diferencias y tengan una actitud tolerante y comprensiva cuando las diferencias afloren; no obstante, el diálogo forma una parte importante dentro del trabajo colaborativo, la reflexión conjunta, el manejo de la conversación y la capacidad de negociación, permiten diluir desacuerdos y minimizar conflictos que surgen durante el proceso.

Adicionalmente, es importante plantear la diferencia entre colaborar y cooperar, pues,

> la diferencia radica en la construcción conjunta de conocimiento resultante de la discusión para tomar decisiones en cada uno de los pasos de la planeación, la ejecución, la evaluación, y no en la ejecución segmentada por pasos de tareas específicas, no discutidas ni reflexionadas (Barreto, et al., 2011, pg. 18).

En la colaboración, los integrantes del grupo no se complementan, sino que consensuan, no completan una tarea, sino que la acuerdan y la ejecutan entre todos, desde el comienzo hasta el final.

Al trabajar colaborativamente, los distintos grupos conforman un *colectivo* que es quien en conjunto, planea, decide y operativiza las acciones a seguir. Aunque inicialmente, en el proyecto se había considerado que el *colectivo* iba a estar conformado únicamente por profesores de matemáticas del Colegio y profesores de la Universidad (investigadores); una vez iniciado el proyecto, el colectivo se amplió y quedó conformado por los dos grupos mencionados –profesores de matemáticas de Colegio y profesores universitarios- y adicionalmente por estudiantes para profesor de matemáticas de la Universidad, que entraron a formar parte del grupo de investigación también.

Los profesores de matemáticas del Colegio aceptaron el reto de formar parte del proyecto, dado que dentro de sus clases, observaban con preocupación la fuerte incidencia que tiene la situación social de los estudiantes, además de ser atractiva la propuesta de formación continuada, a partir de la participación activa en un proyecto de investigación. La administración del Colegio por su parte, apoyó la iniciativa y brindó a la Universidad el espacio para trabajar con los profesores permanentemente. Por otro lado, para el grupo de profesores y estudiantes de la Universidad, era claro que las dinámicas de trabajo de los integrantes de Colegio y Universidad son distintas y que por ende, era más fácil la movilización y organización de los horarios desde los integrantes de la Universidad que los del Colegio.

Este colectivo (profesores y estudiantes de la Universidad – profesores del Colegio) empezó a trabajar en su conjunto desde el inicio del proyecto; las dinámicas de trabajo para el desarrollo del mismo, eran facilitadas por medio de una reunión semanal que se realizaba en el Colegio en el espacio de reunión de área de matemáticas. A esta reunión asistía el colectivo en pleno y en ella, se decidía por medio del diálogo, las acciones a realizar para el diseño de las propuestas de enseñanza aprendizaje y, paralelamente se leían y discutían documentos sobre Educación Matemática Crítica.

3.2. Del diseño de ambientes de aprendizaje

Los Ambientes de Aprendizaje son identificados en la Educación Matemática Crítica de acuerdo a la conjugación del tipo de actividad que se desarrolle en clase, con el tipo de referencia en el que se enmarquen dichas actividades. Respecto al tipo de actividad, Skovsmose (2000) identifica el paradigma del ejercicio como las actividades usuales en matemáticas -donde la aplicación de algoritmos es suficiente- y propone los escenarios de investigación como una alternativa en la que se invita al estudiante a realizar procesos de indagación. Respecto al tipo de referencia, este autor identifica la matemática, la semi-realidad y la realidad de acuerdo a la relación que tiene la actividad propuesta con las situaciones reales que vive el estudiante.

Particularmente, Skovsmose (2000) identifica seis tipos de ambientes, donde el primero y el sexto presentan las mayores diferencias. El primer ambiente, surge de conjugar actividades bajo el paradigma del ejercicio con el tipo de referencia matemático, y corresponden a aquellos ejercicios típicos rutinarios de matemáticas en los que es suficiente aplicar un algoritmo para resolverlos (Ej: resuelva la ecuación $\frac{3}{4}x = 2$). El sexto ambiente en cambio, surge de proponer problemas a los estudiantes, que parten de la identificación de situaciones problemáticas que aquejan su contexto; para solucionar tales problemas, se requiere que los estudiantes sientan un fuerte interés por buscar la solución y que propongan diferentes estrategias para encontrarla, así ellas no constituyan caminos "ideales" para tal propósito[4].

Aunque Skovsmose (2000) propone que el profesor busque en lo posible, moverse por los seis ambientes, los procesos de participación y formación de ciudadanía se fomentan principalmente, desde ambientes tipo seis, pues es el estudiante, el principal sujeto responsable de su aprendizaje. Las propuestas de enseñanza desarrolladas durante el proyecto, responden principalmente a este tipo de ambientes.

Dado que, según la Educación Matemática Crítica, el reconocimiento del contexto[5] es condición necesaria para la enseñanza de las matemáticas, y que dicho reconocimiento se dificulta por la cantidad y divergencia en la subjetividades de los estudiantes; en las reuniones semanales que realizaba el colectivo, se decidió asumir tal dificultad y hacer el reconocimiento desde las miradas de los estudiantes de grado séptimo, de las dos jornadas (mañana y tarde). Para ello, el colectivo propuso dos instrumentos que fueron tomados de la cartografía social "herramienta que permite conocer de cerca una realidad" (Barreto, et al. 2011, pg. 10) y que revelaron aspectos no conocidos de la localidad de Usme así como las problemáticas que aquejan su comunidad.

La primer herramienta fue el *mapa*, que más allá de mostrar una distribución geográfica, permite identificar zonas de conflicto, recursos de la localidad, descripción de redes en la zona, entre otras. La construcción de mapas permite identificar la localidad y reconocer "la vivencia de los habitantes como punto de partida para descubrir la territorialidad y construir colectivamente significados" (Barreto, et al. 2011, pg. 11).

Los mapas fueron realizados por grupos de cinco estudiantes y en ellos expresaban los sitios que según ellos, eran representativos de la localidad[6]. Con la información de estos mapas, se empezó a organizar lo que fue la segunda

[4] Un abordaje más profundo de los seis tipos de ambientes, así como ejemplos particulares de cada uno de ellos, se encuentra en Sánchez, B & Torres, J. (2009).
[5] Mayores consideraciones sobre el contexto desde la Educación Matemática Crítica puede encontrarse en Sánchez, B & Torres, J. (2009).
[6] Una descripción más detallada del proceso de realización de los mapas y de las actitudes de los estudiantes, puede observarse en Ángel, Z. & Camelo, F. (2010).

herramienta para conocer el contexto de los estudiantes, *la deriva*, que es “una salida o viaje hacia el exterior de un colegio con intensiones pedagógicas claras de formación e investigación” (Barreto, et al. 2011, pg. 11). Aunque la deriva fue organizada por el colectivo, su diseño fue liderado principalmente por los profesores que dirigían los grados séptimos y por un profesor de la Universidad.

Teniendo presente que la trayectoria de la deriva iba a ser determinada por los estudiantes a partir de la realización de los mapas, ellos acordaron la ruta a seguir para que el colectivo en pleno, reconociera la localidad donde habitan. En cada una de las jornadas se establecieron rutas diferentes y la deriva realizada, fue guiada por estudiantes de grado séptimo de la jornada de la tarde.

Dentro de las intensiones de la deriva[7], se encontraba el identificar las problemáticas que aquejan a los estudiantes en su localidad, así que cada uno de los integrantes del colectivo diligenciaba una rejilla previamente diseñada, en donde se identificaban los lugares que, a criterio personal, se consideraran interesantes positiva o negativamente. Al tiempo, los guías de la deriva (estudiantes) iban contando sus experiencias en cada una de las partes por las que se iba pasando, y a su vez, los integrantes del colectivo les preguntaban cuestiones particulares para complementar la identificación de problemáticas.

Como resultado de los mapas y la deriva, se identificó que las problemáticas que aquejan a esta comunidad son:

- Inseguridad: En la localidad en general, existen diversos lugares donde los estudiantes recomiendan no pasar; otros, donde según ellos, ni siquiera la policía entra. Adicionalmente, son múltiples los robos que se presentan en la localidad en general y particularmente, a las afueras del colegio. Esta situación, junto con la violencia de la que habían sido víctimas algunos estudiantes del colegio frente al mismo, generó que algunos meses antes de iniciar el proyecto, los estudiantes se tomaran el portal de Usme de Transmilenio (servicio de transporte masivo de Bogotá -Colombia), para exigir mayor presencia de la policía y acciones concretas para que la comunidad del colegio tuviera mayor seguridad.
- Basuras: Particularmente con la realización de la deriva, se observó que en varios barrios de la localidad, las basuras llenan las calles y la falta de cultura respecto al manejo de las mismas, genera que haya suciedad, pues por ejemplo, no se usan las canecas que se encuentran en las calles. Por otro lado, como es común, la presencia de gran cantidad de basuras genera mal olor en los barrios y problemas de salubridad. Sin embargo, este tipo de situaciones se consideran una vez se reconoce el lugar, pero luego, el olor se vuelve costumbre.

Adicionalmente, la existencia del botadero de Doña Juana en la localidad genera proliferación de enfermedades y contaminación atmosférica.

- Explotación Minera: Se encuentran diversas canteras donde se explota la tierra para la producción de materiales de construcción. Esta situación agudiza los problemas de salubridad, genera contaminación y afecta los recursos físicos y ambientales de la localidad.

[7] Aspectos más puntuales de la deriva, se encuentran descritos en Ángel, Z. & Camelo, F. (2010).

- Uso del tiempo libre: En las jornadas contrarias a las escolares, se observan cantidades de niños en las calles. Según los estudiantes, en sus casas se aburren y no saben qué hacer cuando no están en el Colegio, así que prefieren salir a buscar actividades para realizar durante su tiempo libre. La problemática radica en que varias de esas actividades no favorecen su formación personal.
- Perspectivas de futuro: A lo largo del recorrido de la deriva, varios integrantes del colectivo cuestionaron a los estudiantes sobre sus intereses a futuro. Todos expresaron como mayor aspiración, el ser futbolista o ayudar a sus padres en sus trabajos. No hubo alguno que expresara la posibilidad de estudiar una carrera profesional. Algunos, inclusive, admiraban la vida de aquellos que por vías fáciles e ilícitas, habían obtenido su riqueza.
- Barras Bravas: El barrismo es una problemática social que determina diversas dinámicas de seguridad y violencia en Bogotá. Particularmente en Usme, la pasión irracional que muchos jóvenes sienten hacia equipos de fútbol (Millonarios, Santa Fé, América y Nacional), genera que se presenten conflictos violentos entre estos grupos. De hecho, en la zona se ubican lugares que son puntos de encuentro entre las barras, con el único propósito de pelear, sin arreglar sus desacuerdos. Es tal la situación de riesgo, que inclusive al interior del Colegio se había prohibido el uso de algún tipo de accesorio que exprese admiración hacia algún equipo, pues en la institución se habían presentado brotes de violencia por esta causa.

Por cada una de estas problemáticas y teniendo presente que según el plan de área de matemáticas para grado séptimo, la proporcionalidad era el contenido a desarrollar en la época en la que se aplicarían los ambientes; el colectivo propuso Ambientes de Aprendizaje para abordarlos desde dicho grado y seleccionó de ellos, aquel que sería aplicado y analizado para el proyecto de investigación. Los procesos desarrollados sobre este Ambiente en particular, serán retomados más adelante.

Al tiempo que una parte del colectivo diseñaba la deriva, la otra parte se dedicó al estudio de los Ambientes de Aprendizaje y al reconocimiento del tipo de Ambiente predominante por cada uno de ellos en sus clases regulares. En general, los profesores del Colegio reconocieron que en sus clases privilegiaban el Ambiente de Aprendizaje tipo uno; así que inicialmente ellos, y luego todo el colectivo, determinó la pertinencia y conveniencia de empezar a proponer y aplicar, Ambientes de Aprendizaje diferentes a los que usualmente se asumían en las clases de matemáticas del Colegio. De esta forma, cada uno de los integrantes del colectivo (principalmente profesores de matemáticas y estudiantes para profesor de matemáticas) propusieron actividades iniciales para la conformación de tales Ambientes. Como resultado de esta acción, se obtuvieron diversos Ambientes de Aprendizaje (Bohórquez, L & Sánchez, B. 2010; Cardozo, H. et al, 2010; Leal, H. & Torres, J., 2011) en los que grados diferentes a séptimo, abordaban situaciones desde un punto de vista más participativo a lo que usualmente se desarrollaba en sus clases. El diseño y aplicación de estos Ambientes representó acciones particulares en la formación de los profesores de matemáticas que los plantearon, pues además del ejercicio mismo de proponer actividades para cambiar sus dinámicas de clase, como uno de los resultados concretos, se obtuvo la presentación de ponencias en eventos académicos de educación matemática.

Retomando el diseño de Ambientes de Aprendizaje según las problemáticas identificadas en la deriva; de los seis Ambientes de Aprendizaje tipo seis (uno por cada problemática) propuestos, el colectivo seleccionó el que correspondía a la *explotación minera* para aplicarlo y analizarlo en el grado séptimo. Este Ambiente se llamaba *canteras*, y aunque se centraba en la problemática de las canteras de Usme, condensaba la problemática ambiental de esta localidad. Como primera instancia, se pretendía que los estudiantes conocieran a fondo, la realidad de las canteras en su zona, desde dos puntos de vista distintos: El de uno de los dueños de las canteras y el de los críticos de su existencia.

Para el primer punto de vista, se invitó a los dueños de una de las canteras para que les contara a los estudiantes, desde su punto de vista, el papel de éstas y sus ventajas o desventajas. Sin embargo, la persona invitada se dedicó a contar las obras de beneficencia que su entidad realizaba y cuando una profesora de sociales del Colegio, que se encontraba en el auditorio, hizo la pregunta particular sobre la afectación de esta explotación minera en la zona, la persona eludió la pregunta y se retiró rápidamente. Los estudiantes notaron esta situación y en un posterior análisis de la actividad, se observaron cuestionamientos acerca de las canteras y de cómo esto afecta su vida.

Para el segundo punto de vista, se proporcionó una lectura corta, donde se especificaba en términos científicos, cómo las canteras afectaban el suelo y en consecuencia, el medio ambiente. Se propusieron algunas preguntas provocadoras y junto con esto, los estudiantes observaron un video y continuaron cuestionándose sobre esta problemática y sobre las consecuencias que han traído y traerán a sus vidas.

Entrevistas, fotos, videos, visitas a las canteras, fueron algunas de las acciones que por iniciativa propia, los estudiantes realizaron para conocer más a fondo esta situación. Posteriormente, diseñaron maquetas de su zona, pensando en el antes, el ahora y el después de las canteras, para ello, se exigió que las maquetas fueran proporcionales. Particularmente, se evidenciaron distintos momentos de ambientes de aprendizaje tipo 2, es decir con un tipo de referencia matemático y escenario de investigación como tipo de actividad, pues los estudiantes se enfrentaban ante la situación de hacer cada una de las figuras que conformaban la maqueta, de manera proporcional; esto quiere decir, que en momentos la clase se enfocaba en el estudio de la proporción directa y de atributos como el tamaño de las figuras, para la identificación de dicha relación.

En la realización de estas maquetas se visualizó una postura más crítica en los estudiantes y con ellas, expusieron su conocimiento sobre la situación ambiental que aquejaba su comunidad, las consecuencias territoriales, ciudadanas y sanitarias; así como el silencio y la indiferencia tanto de la sociedad, como de su comunidad y de los actores políticos que podrían solucionar directamente esta situación. Su cambio de percepción sobre las mismas fue radical y sus cuestionamientos muchos, aunque algunos estudiantes propusieron soluciones, ninguna de ellas se aplicó realmente.

Para estudiar la incidencia del Ambiente de Aprendizaje *canteras*, se consideraron observaciones de clase, videos, carpetas de los estudiantes (portafolios) y entrevistas semiestructuradas (a estudiantes y profesora), como instrumentos para analizar la formación socio-política de los estudiantes y de la profesora. La información recolectada en ellos fue triangulada y a partir de allí, se pudieron establecer resultados y conclusiones en torno a: las dinámicas de la clase de matemáticas, los roles que se adquieren en el aula de clase, la perspectiva socio-política y de formación crítica de los estudiantes, las matemáticas que giraron en torno al proyecto y, el trabajo colaborativo y la formación de profesores.

4. Resultados

Trabajar colaborativamente en el diseño de Ambientes de Aprendizaje que llevaran a la clase de matemáticas las problemáticas sociales, para allí comprenderlas, modelarlas y buscar alternativas de solución, usando las matemáticas como instrumento para ello, resultó una utopía realizable. Los resultados de este proceso, mencionados en el informe final del proyecto de investigación (Barreto, et al. 2011, pg. 21) y la realización de tal utopía, se pueden mencionar en dos aspectos: El trabajo entre profesores y el trabajo con estudiantes.

Sobre el primero, se logró mostrar la manera como el trabajo colaborativo fomenta la creación y el fortalecimiento de una comunidad autónoma de profesores de matemáticas que piensan en transformar sus prácticas tradicionales, a través del abordaje de problemáticas que aquejan a los sujetos con los que trabajan, contemplando alternativas para lidiar con los aspectos propios del contexto sociocultural que influyen en el aula, fomentando en sus estudiantes además de pensamiento crítico, su formación democrática y, realizando acciones de investigación respecto a los procesos que ello implica en el aula. En esto, el intercambio con otros brindó una posibilidad de crecimiento mutuo y de robustecimiento de la heterogénea y muchas veces, desarticulada comunidad de profesores de matemáticas.

El trabajo en equipos de profesores dedicados a conceptualizar, diseñar y pensar la gestión de los Ambientes de Aprendizaje, lo mismo que a sistematizar sus experiencias, resultó claramente en un distanciamiento de la tradición de adelantar estas tareas individualmente, sin ningún tipo de realimentación que favorezca la formación de los profesores.

Para el caso particular de los profesores del Colegio, la enunciación, socialización y discusión de una serie de aspectos sociales que inciden y explican el rendimiento de los estudiantes, a la par de su visión de la escuela y del entorno, reconfiguran sus conocimientos y les permiten dar respuestas a problemas propios de su práctica pedagógica en consonancia con las particularidades del contexto en el que las desarrollan. Como ejemplo de esto, el colectivo de profesores del Colegio, que inicialmente reconoció que en sus prácticas docentes predominaba el Ambiente de Aprendizaje tipo uno, efectivamente propuso e implementó, en conjunto, Ambientes de Aprendizaje tipo seis.

Para el caso de los estudiantes para profesor, como producto de su participación, produjeron dos proyectos de trabajo de grado que permitieron considerar de manera relevante aspectos socio-políticos en el aula de matemáticas, lo que se constituye en una nueva posibilidad de prácticas docentes a futuro.

A partir de un intercambio permanente de saberes, donde se constituye a los profesores como investigadores que se involucran en prácticas colaborativas y aportan como pares a la reflexión sobre su hacer en el aula, de las necesidades de generar transformaciones sociales desde la formación democrática y matemática de sus estudiantes; todos los miembros del equipo de trabajo reconocieron nuevas posibilidades y metodologías de investigación. Específicamente, aquellas relacionadas con las problemáticas sociales presentes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así se toma distancia de la creencia en soluciones prefabricadas, descontextualizadas y solamente disciplinares, hechas por expertos externos al colegio, como se hace desde la tradición.

En general se percibió que las actividades adelantadas; como la deriva, las reuniones semanales, el diseño y aplicación de los Ambientes de Aprendizaje, permitieron resignificar: la función social de la labor educativa, el conocimiento de su entorno laboral, los límites espaciales y conceptuales del término “escuela”, y las formas de enseñar y de aprender a relacionarse. Lo anterior cambia la manera usual de concebir el conocimiento del profesor.

Sobre el trabajo de los estudiantes, en ellos se produjo cambios sustanciales de motivación, pero sobretodo, de participación. En este sentido, incluso los estudiantes que usualmente no participaban en clase, estuvieron más prestos a abordar los Ambientes propuestos, exponer sus ideas, argumentar, discutir, analizar, escuchar, interpretar y consensuar.

Por una parte, la participación de los estudiantes se origina de lo innovador que resultó ser que en la clase de matemáticas se abordaran problemas de su contexto, al proponerse Ambientes de Aprendizaje relacionados con temas de interés para ellos, pues éstos les afecta directa o indirectamente. Por otra parte, el cambio de actitudes de los profesores fueron notorias al punto que los estudiantes los percibieron como distintos en el desarrollo de los Ambientes, los profesores ya no solo explicaban, sino que también escuchaban, promovían, mediaban los diálogos y no tenían todas las respuestas, pues las construían con sus estudiantes.

Una mirada más alerta y crítica es uno de los productos más importantes del proyecto en los estudiantes, pues durante el desarrollo de los Ambientes de Aprendizaje, reconocieron la existencia de problemáticas sociales y ambientales en su localidad o en su entorno más cercano; en muchos casos, éstas antes no eran percibidas como problema. De esta manera y como ejemplo, sobre el problema ambiental generado por las canteras legales o ilegales que funcionan en la localidad, el tener contacto cercano con los lugares, las personas que allí trabajan o quienes las critican o defienden, no era algo común en las clases del Colegio, aún menos, en las clases de matemáticas. Este hecho, además de generar una disposición de consulta, generó en ellos criterios de posición a favor o en contra de los actores que hacen parte de la mencionada problemática.

En este sentido, llamó la atención, por ejemplo, la posición frente a las empresas o fundaciones que administran dichas canteras, pues los niños que conocían algo de las canteras, lo hacían porque siendo más pequeños, los llevaron por parte de las empresas explotadoras a recibir recreación; también, porque una fundación que tiene su base en una de estas empresas, ofrece educación a algunos niños de la localidad. Luego del trabajo realizado en el Ambiente diseñado para tal problemática, los niños ven con desconcierto la beneficencia que ofrecen a cambio de los daños ambientales que hacen al entorno en el que ellos viven.

En términos generales, se evidenciaron planteamientos frente a la explotación incontrolada de los recursos no renovables, sobre la contaminación y sus implicaciones a largo plazo, reflexiones sobre su localidad y sobre la forma como las problemáticas trabajadas los afectan, forjando esto que asumieran posiciones respecto a las situaciones que anteriormente era desconocidas o miradas con indiferencia o poca crítica por ellos.

Finalmente y como parte de una postura crítica, los estudiantes propusieron acciones que estarían dispuestos a realizar para mitigar o incluso transformar las problemáticas en cuestión.

5. Conclusiones

A pesar de lo que tradicionalmente se considera, desde las clases de matemáticas se pueden identificar y estudiar problemáticas sociales, donde las matemáticas se convierten en una herramienta potente para entender las ideas de mundo y proporcionan elementos particulares en la búsqueda de soluciones a problemas de índole matemático o social, enmarcados bajo una referencia real para el estudiante. Particularmente, las matemáticas tienen una gran responsabilidad en la formación de los estudiantes como sujetos sociopolíticos; pues así como usualmente han sido usadas para generar exclusión de acuerdo al desempeño de los sujetos, el poder que ellas otorgan permite que todos ellos se sientan incluidos y puedan participar de las clases, dar sus opiniones y buscar por sí solos, estrategias para resolver un problema.

Desde esta perspectiva, el conocimiento profesional del profesor se amplía al posicionamiento de una actitud crítica, donde tanto el macrocontexto como el microcontexto, son reconocidos por éste y forman parte fundamental en el diseño y desarrollo de sus clases. A su vez, la ampliación de su conocimiento genera una transformación en su práctica docente, pues se asume la incertidumbre como un aspecto participante en las clases del día a día y se potencia la división del poder en el aula de clases, entre cada uno de los agentes que en ella se encuentran.

El profesor entonces, debe desprenderse de la concepción determinista donde los sucesos de la clase están previamente establecidos y organizados según una planeación prefijada, donde todos los procesos dependen de su dirección. En cambio, debe aceptar que su papel en el aula es de orientador y que sus clases pueden cambiar dependiendo, de las estrategias que los estudiantes pongan en juego en el aula de clase y de las problemáticas sociales por las que ellos se interesen.

Los estudiantes por su parte, aceptan la invitación que el profesor les propone, si la misma está basada en una situación sentida para ellos; es decir, si la situación está dotada de elementos propios de su contexto y de las problemáticas que les aqueja. Para el caso particular del proyecto que aquí se cita, las canteras era una situación que afectaba la salud y el ambiente de los estudiantes; el conocer más sobre ellas y estudiar a fondo sus implicaciones, generó en ellos mayor interés hacia su clase, pasando de ser menos de diez los que participaban, a ser toda la clase y tener que limitar las intervenciones, para que todos pudieran participar.

Lo anterior, confirma la relevancia de asumir que el contexto en la clase de matemáticas va más allá del espacio, de las matemáticas como tal o del entorno cultural en el que se encuentren los estudiantes; el contexto sociopolítico transforma el papel histórico que ha tenido la enseñanza de las matemáticas, de considerar como importantes sólo aquellas situaciones heredadas del conocimiento mismo y de dejar de lado a quienes no tienen grandes habilidades en la consolidación y relación de algoritmos y procesos complejos de un saber cuyos elementos son abstractos y difusos.

Finalmente, si bien es cierto que teóricamente se ha comprobado la renuencia que presentan algunos profesores por transformar sus prácticas y aún más, por cambiar sus concepciones acerca de las matemáticas, de su enseñanza y aprendizaje, del papel que juegan tanto ellos como los estudiantes y la comunidad en sus clases; también lo es que existe una gran preocupación por todos estos aspectos y particularmente, por la formación de sus estudiantes. No obstante, para fomentar el mejoramiento de las prácticas educativas que no considere que desde la clase de matemáticas es utópico pensar en la formación de ciudadanos a partir del abordaje de problemáticas sociales; se requiere del trabajo constante con tales profesores, en el que se tenga presente entre otros aspectos, que no hay diferencia entre investigadores y profesores, que su conocimiento es igualmente valioso y que ambos tienen mucho que aportar a las investigaciones que se desarrollen sobre las prácticas educativas. Bajo esta mirada, el trabajo colaborativo se convierte en una opción que desvanece la escisión investigación–práctica; criticada por diversos autores, fortalece la formación continuada de los profesores desde procesos de investigación y fomenta la transformación real de las prácticas.

Bibliografía

Ángel, Z. & Camelo, F. (2010). *Conocer el contexto de los estudiantes, una alternativa indispensable para la formulación de proyectos bajo un enfoque crítico.* Memorias de 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Bogotá.

Barreto, et al, (2011). *Los escenarios de aprendizaje como propuesta desde la Educación Matemática Crítica para la formación continuada de profesores de matemáticas en ejercicio*. Informe final de investigación. Documento sin publicar.

Boavida, A. M. & Ponte, J. P. (2002). *Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas.* En Grupo de Trabalho sobre Investigação GTI (Org), Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp. 43-65). Lisboa: Asociación de Profesores de Matemática.

Bohórquez, L. & Sánchez, B. (2010). *Una experiencia de aula desde la Educación Matemática Crítica en la IED Paulo Freire.* Memorias de 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Bogotá.

Bourdé, G. (1992). *Las escuelas históricas.* Madrid: Akal.

Grupo de investigación en la enseñanza de la Historia. (2008). *Pensamiento Histórico.* Bogotá D.C.: SED.

Hoyos, G. (11 de Junio de 2008). *Cooperar en vez de competir*. Periódico El Tiempo, pág. 24.

Sánchez, B., & Torres, J. (2009). *Educación Matemática Crítica: Un abordaje desde la perspectiva sociopolítica a los Ambientes de Aprendizaje.* Memorias de 10° Encuentro de Matemática Educativa (pág. 3). Pasto: ASOCOLME.

Sovsmose, O. (2000). *Escenarios de investigación*. EMA,Vol 6, N°1, 3-26.

Tomaz, V. (2008). *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula*. Belo Horizonte. Minas Gerais: Autentica.

Valero, P. (2006). *¿De carne y hueso? La vida social y política de la competencia matemática*. Memorias de Foro Educativo Nacional. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Valero, P. (2007) *Investigación socio-política en educación matemática: Raíces, tendencias y perspectivas*. Recuperado el 5 de septiembre de 2010 de http://vbn.aau.dk/fbspretrieve/12158125/Granada_notas.pdf

perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. ICE/Horsori, Barcelona.España.

Brigitte Sánchez Robayo. Profesora de la Licenciatura en educación básica con énfasis en Matemáticas Ha realizado investigaciones bajo las líneas de didáctica de la geometría, tecnologías computacionales y formación de profesores; así como un proyecto de innovación en la Educación Básica.

José Torres Duarte. Profesor de la Licenciatura en educación básica con énfasis en Matemáticas. Ha investigado sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, la didáctica del cálculo y la formación continuada de profesores de matemáticas. **jotorresd@udistrital.edu.co**
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. Colombia.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 103-118

Dinamización Matemática:

¿Bastan solo seis enlaces para conectar a dos personas cualesquiera en el mundo?

José María Contreras Beltrán, Isabel Duarte Tosso, Juan Núñez Valdés

Resumen	En este artículo se le presenta una novedosa herramienta metodológica al profesor de Matemáticas de Bachillerato consistente en la descripción de un problema en principio no relacionado con las Matemáticas, la denominada *Teoría de los Seis grados de separación*, y su tratamiento mediante el empleo de la teoría de grafos, con el objetivo de facilitarle la introducción y posterior explicación de determinadas partes del currículo de esta materia, como puedan ser fundamentalmente la Combinatoria y la Probabilidad, todo ello con el objetivo de despertar el interés, curiosidad y motivación de estos alumnos hacia la asignatura **Palabras clave**: grafos, combinatoria, probabilidad
Abstract	A new methodological tool aimed to High School math teachers is presented in this article. It consists of the description of a problem initially not related to Mathematics, the so-called *Six degrees of separation Theory,* and its treating by using graph theory, in order to facilitate the introduction and subsequent explanation on certain parts of the subject curriculum, such as Combinatorics and Probability, for instance, with the objective of arousing the pupils' interest, curiosity and motivation towards this subject. **Keywords:** graphs, combinatorics and crobability
Resumo	Este artigo apresenta uma nova ferramenta metodológica para os professores de Matemática do bacharelado consistente na descrição de um problema em principio não relacionado à Matemática, a denominada *Teoria dos Seis graus de separação*, e seu tratamento mediante o emprego da teoria de gráficos, com o objetivo de facilitar a introdução e posterior explicação de determinadas partes do currículo desta matéria, como podem ser fundamentalmente, Combinatória e Probabilidade, tudo com o objetivo de despertar o interesse, curiosidade e motivação dos alunos para com a matéria. **Palavras chave:-**chave gráficos, combinatória e crobabilidade

Introducción

¿Qué pensarías si te dijesen que "el mundo es un pañuelo"? Probablemente, te remontarías a cualquier situación pasada en la que esa frase haya venido a tu mente. Pero, ¿es realmente cierta? En este artículo podrás comprobar que sí, que generalmente no es casualidad haberte encontrado, en el lugar más inesperado, a alguien con quien tuvieras un conocido en común.

Pero retrocedamos un poco en el tiempo. En 1735, el ya por entonces famoso matemático suizo Leonhard Euler ((Basilea, Suiza, 1707 - San Petersburgo, Rusia, 1783), fue consultado por los habitantes de una pequeña ciudad prusiana cercana al Mar Báltico, Konigsberg (en la actualidad, Kaliningrado), sobre la posibilidad de que existiese una ruta o camino que cruzase los siete puentes que unían entre sí las cuatro zonas de la ciudad en las que ésta quedaba divida por el Río Pregel, a su paso por la misma, en el que formaba dos islas en su interior, con la condición de que esa ruta pasase por todos los puentes pero una sola vez por cada uno de ellos (véase el gráfico adjunto, en el que las zonas de la ciudad aparecen en color gris, el Río Pregel en azul y los puentes en rojo).

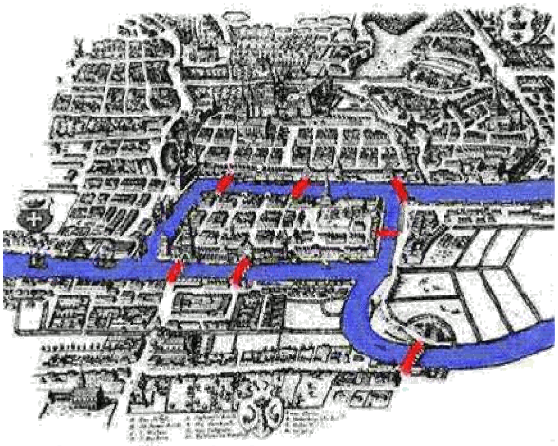


Figura 1. Konigsberg y sus puentes

Pues bien, al igual que ocurre con todo lo relativo a este personaje, la solución de Euler a este problema (denominado el *Problema de los Puentes de Konigsberg*) fue sencillamente genial. De hecho, Euler no sólo se limitó a resolver ese problema concreto, sino que resolvió el problema general, es decir, un problema similar para una ciudad que tuviese *m* zonas y *n* puentes

Para conseguir esta solución general, lo primero que hizo Euler fue *modelizar* el problema, es decir, prescindir de las características físicas del mismo (ciudad, zonas, puentes) y crear un modelo matemático formado por puntos y líneas entre ellos, que se adaptara a esas características. Permítasenos, no obstante, antes de proseguir, una pequeña aclaración: La palabra "modelizar" no existe en castellano, siendo su uso por tanto, incorrecto. No obstante, los autores seguimos utilizándola en el argot matemático, al igual que otros muchos, porque en nuestra opinión refleja mejor que el vocablo correcto, *modelar,* lo que se desea transmitir.

Continuando entonces con la narración, diremos que Euler diseñó lo que actualmente se denomina un *grafo* y creó una teoría apropiada para tal modelo (actualmente, la *Teoría de Grafos*), de forma que utilizándola convenientemente pudo dar con la solución de ese problema en grafos, hallando después la solución al problema de los Puentes de Konigsberg sin más que traducir su solución en grafos al caso de la vida real. Por este hecho, a Euler se le suele designar con el nombre de "Padre de la Teoría de Grafos", considerándose a su vez a este Problema de los Puentes de Konigsberg como uno (existen otros) de los que originaron el nacimiento de esta teoría. Para más detalles sobre este problema puede consultarse (Alfonso et al. 2004), por ejemplo.

Pues bien, en este artículo, los autores vamos a modelizar, también mediante la Teoría de Grafos, otro problema que aparece en la vida real mucho más a menudo de lo que pudiera parecer, conocido con el nombre de “Problema de los Seis grados de separación”. Este problema está relacionado con la célebre frase que aparece al principio de esta introducción, el mundo es un pañuelo, que suele emplearse cuando dos personas, desconocidas o no, descubren que tienen amigos o conocidos cercanos a ambas, hecho que en principio desconocían.

El objetivo que se pretende es el de poner este problema en conocimiento de los profesores de Matemáticas de Bachillerato, así como también el empleo de la Teoría de Grafos en su resolución, para que éstos puedan servirse de ello como técnica metodológica novedosa, a emplear en distintas partes del currículo de su asignatura, fundamentalmente a la hora de explicar la Combinatoria o la Probabilidad, para conseguir, de esa forma, un mayor interés, curiosidad y motivación de estos alumnos hacia la asignatura.

Como aclaración para los lectores no españoles, comentar que en el Sistema Educativo Español, la Educación Primaria va dirigida a los alumnos de entre 6 y 12 años. La siguiente etapa es la de Educación Secundaria Obligatoria, que llega hasta los 16 años. Después de esta etapa (aunque actualmente están previstos algunos cambios), el alumno puede elegir entre una Formación Profesional o bien un Bachillerato, ambos con una duración de dos años, concluyendo así sus estudios previos a la universidad a los 18 años. Además, el hecho de referirnos a la Combinatoria o a la Probabilidad, sobre todo, se explica porque éste es un problema claramente de Matemática Discreta, en el que las técnicas de contar, así como la aparición de diferentes posibilidades en cada paso desempeñan un papel preponderante.

Aparte lo anterior, acompañando a la descripción del problema en sí, los autores también indicamos en el artículo un experimento previo personal realizado en tal sentido, aunque desafortunadamente no del todo exitoso, que también pudiera ser aprovechado por la clase como modelo en el que fijarse para realizar su propio experimento, consiguiéndose así de esa forma, por parte del profesor, la realización de otras competencias, distintas de la propia matemática, como pueden ser la lingüística, la idiomática o la facilitación del trabajo en grupo, que también le son pedidas en el desempeño de su labor .

El artículo está estructurado en 5 secciones. En la primera, se comentan ampliamente tanto la evolución histórica de la Teoría de los Seis grados de separación como los experimentos de Milgram que contribuyeron a darla a conocer y a reforzarse. Algunos de los datos que se indican pueden verse más extensamente desarrollados en varias de las numerosas páginas web relacionadas con esta teoría (pueden consultarse, (web3, 4 y 5), por ejemplo). La sección 2 está dedicada a mostrar algunos preliminares básicos de Teoría de Grafos, necesarios para una adecuada comprensión de la siguiente sección, en la que los autores modelizamos a partir de estos grafos la Teoría de los Seis grados de separación. En la sección 4, se detalla el experimento realizado por los autores con el fin de confirmar esta teoría. La siguiente sección, la quinta, muestra algunas situaciones de la vida real especialmente relacionadas con esta teoría, mientras que se finaliza el artículo con otra sección personal, la sexta, en la que los autores comentamos algunas reflexiones personales al respecto de la teoría y del estudio realizado. Algunas de las figuras que aparecen en este artículo se han tomado de (web9, 10 y 11).

La Teoría de los Seis grados de separación

En 1993 se estrenó en Estados Unidos una película en clave de drama/comedia titulada “Six degrees of separation”, dirigida por el prestigioso director Fred Schepisi, cuyo título hace referencia a la “Teoría de los Seis grados de separación”. Diez años más tarde, el sociólogo estadounidense Duncan J. Watts publicó una obra titulada “Six Degrees: The Science of a Connected Age” sobre dicha teoría.

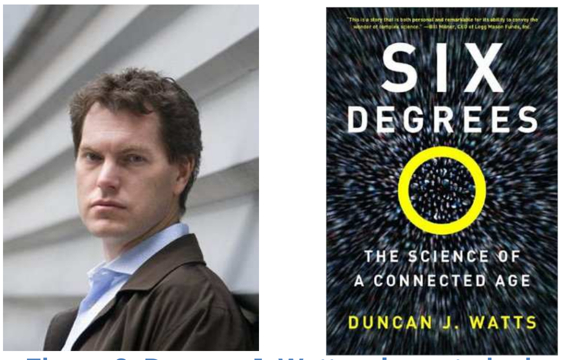


Figura 2. Duncan J. Watts y la portada de su obra “Six Degrees".

La Teoría de los Seis grados de separación afirma, básicamente, que en nuestro mundo, *cualquier persona puede estar conectada a cualquier otra a través de una cadena de conocidos que no tiene más de cinco intermediarios, es decir, que conecte a ambas personas con sólo seis enlaces*. Esta teoría fue inicialmente propuesta por el escritor húngaro Frigyes Karinthy (Budapest, 1887–Siófok, 1938) en un cuento titulado “Chains”, que él publicó en 1929.

Figura 3. Frigyes Karinthy.

Para formular su teoría, Karinthy se basó en la idea de que *el número de personas conocidas crece exponencialmente con el número de enlaces en la cadena*, por lo que sólo un pequeño número de enlaces son necesarios para que el conjunto de personas conocidas se convierta en el de todas las personas del planeta (posteriormente, tanto Milgram (al que ahora nos referiremos) como el anteriormente citado Watts concretaron este número de enlaces en tan sólo seis “saltos”).

Han sido muchos, y prestigiosos, los autores que han tratado de probar esta teoría. En la década de los años 50 del pasado siglo, el estadounidense Ithiel de Sola Pool (1917–1984), doctor en Ciencias Sociales que trabajó en el Instituto Tecnológico de Massachusetts y el matemático e informático austríaco, nacionalizado estadounidense, Manfred Kochen, de I.B.M., reconocido pionero de las redes sociales, se propusieron demostrar la teoría matemáticamente, aunque sin conseguirlo, a pesar de enunciarla en términos de probabilidad: "*dado un conjunto de N personas, ¿cuál es la probabilidad de que* *cada miembro de estos N estén conectados con otro miembro vía 1, 2, 3,...,n enlaces*?"

Para conseguir esa demostración, los autores de Sola Pool y Kochen escribieron un artículo matemático titulado “Contacts and Influences” en el que construyeron un modelo teórico del”*mundo pequeño*” que describía la mecánica de las redes sociales y estudiaba sus consecuencias matemáticas. Para este estudio necesitaron saber cuál era el número medio de conocidos de una persona. Por experiencia propia, concluyeron que este número rondaba las 500 personas, deduciendo por tanto que la posibilidad de que dos americanos elegidos al azar se conozcan es de una entre 200.000 (para ello, tuvieron en cuenta la cuestión de la endogamia existente en toda red). Sin embargo la probabilidad de que esas dos personas estén conectadas a través de dos conocidos, asombrosamente, se incrementa hasta más del 50%.

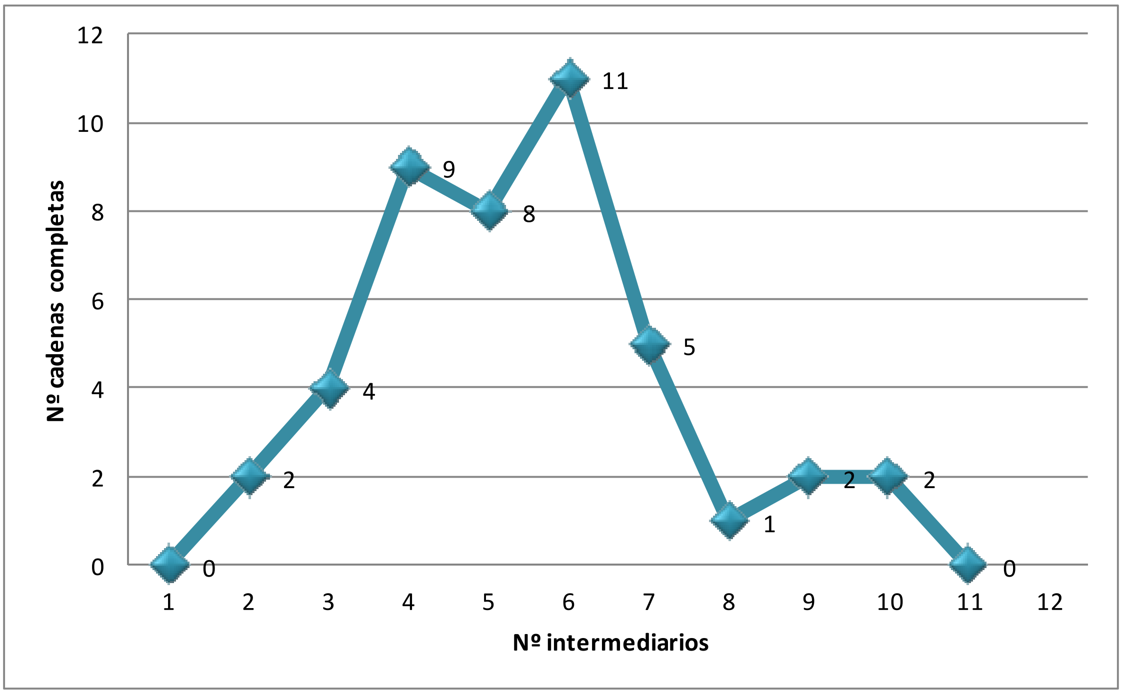
Además de todo esto, en dicho artículo formulaban algunas preguntas que dejaban sin respuesta, como por ejemplo, ¿*cuál es el grado de separación entre dos individuos en una red social real*?

Figura 4. Stanley Milgram

Posteriormente, en 1967, el estadounidense Stanley Milgram (Nueva York, 1933–1984), licenciado en Ciencias Políticas por la Universidad de Yale y psicólogo social por la de Harvard, logró dar una aproximación de dicho número a través de sus experimentos empíricos (hizo tres). Para ello, ideó una nueva manera de probar la teoría, que él llamó "*el problema del mundo pequeño*".

Los experimentos de Milgram consistieron en enviar una carta a un grupo de personas elegidas al azar, residentes en alguna ciudad estadounidense. A este grupo de partida, se le solicitó que remitieran las cartas a una persona objetivo, también elegida al azar, que vivía en un estado diferente. Con esto, se esperaba que no existiese relación directa entre los emisores y el destinatario. Los remitentes conocían el nombre del destinatario, su ocupación y la localización aproximada y sólo podían contactar directamente con él si lo conocían previamente. En caso contrario, debían buscar entre sus conocidos a alguien que tuviese más probabilidades de conocerlo y enviarle a dicha persona la carta.

Milgram, para facilitar el procedimiento, añadió a la carta una lista en la que cada persona de la cadena debía escribir su nombre, para, así, evitar devolver la carta a personas que ya habían participado con anterioridad. Y también iban en la carta una serie de tarjetas de control que cada persona que enviase la carta debía devolver a Milgram, para que él pudiera llevar, de esa forma, un seguimiento directo del experimento. Para el primer experimento, realizado en 1967. Eligió al azar a 160 personas de Wichita (Kansas). La persona objetivo de este primer estudio vivía en Cambridge y era la esposa de un estudiante de la Escuela de Teología. A ella le llegaron 44 cartas de las 160, lo que suponía un 27% de cadenas completadas. La longitud de estas cadenas variaba entre 2 y 10 personas intermediarias, siendo la distancia promedio de cinco personas, a pesar de que, inicialmente, los participantes esperasen que la cadena incluyera al menos a cientos de intermediarios.



Gráfica 1. Datos del primer experimento de Milgram.

La gráfica anterior, elaborada por los autores de este artículo, muestra los datos obtenidos en el 1º experimento de Milgram. Obsérvese que el mayor número de cadenas completas contaba con entre 5 y 7 intermediarios.

Milgram realizó el segundo experimento en 1969, para el que contó con la colaboración de Jeffrey Travers. Eligió a 217 personas de la ciudad de Omaha (Nebraska), siendo la persona objetivo un corredor de Bolsa que trabajaba en Boston y vivía en Sharon (Massachusetts). A esa persona le llegaron 64 cartas del total de 217 enviadas (29%). En este caso las longitudes mínimas y máximas de las cadenas fueron 1 y 11, respectivamente, siendo 5.2 la media aritmética de las longitudes.

Su tercer experimento lo realizó en colaboración con Charles Korte en la ciudad de Los Ángeles en 1970. Consistió en el estudio de las comunicaciones entre subgrupos en la sociedad americana (blancos y negros). El grupo de partida estaba formado por 540 personas, llegándole a la persona objetivo sólo 123 cartas de las 540 posibles (22%).

Para Milgram (famoso también por sus experimentos sobre la obediencia ciega de las personas a la autoridad) el hecho de que el número medio de eslabones se repitiese en todos sus experimentos fue un gran éxito, pero sus estudios no se quedaron ahí. De sus experimentos consiguió extraer más datos acerca de la sociedad, como por ejemplo que los roles sexuales condicionan ciertos tipos de comunicaciones, ya que fue tres veces más probable que los participantes enviaran la carpeta a alguien del mismo sexo que a alguien del sexo contrario. Además, dedujo que en la sociedad americana, los lazos de amistad y conocimiento mayoran a los familiares, pues, solo 22 personas de 145 enviaron la carta a personas de su familia. Además no todos nuestros amigos o conocidos poseen el mismo nivel de amplitud de círculo de conocidos, es decir, existen personas que están más aisladas que otras. Esto se tradujo en el ensayo en que existían ciertos canales que resultaban más importantes que otros para la comunicación.

Sin embargo, los experimentos de Milgram (véase Milgram and Travers, 1969) fueron criticados por muchas personas, primero porque el número de cartas que alcanzaron al destinatario señalado fue alrededor de un tercio del total y segundo, porque muchos lo acusaron de parcialidad al seleccionar a los participantes entre una lista de personas de características similares, y por tanto no representativas del ciudadano medio.

No obstante, estos descubrimientos fueron publicados en la prestigiosa publicación "Psychology Today" e inspiraron la frase "*seis grados de separación*", popularizada por el dramaturgo John Guare al escogerla como título de su obra en 1990.

Como era de esperar, el trabajo de Milgram tuvo sus repercusiones en el ámbito de la ciencia, tanto es así que desde entonces y hasta día de hoy se ha seguido investigando acerca de este tema. En 2003 Duncan J. Watts, Meter Dodds y Roby Muhamad trabajaron en la misma línea de investigación. Su objetivo era elaborar un mapa de la conectividad entre individuos a través de Internet. Para su experimento participaron más de 60.000 personas, residentes en 166 países, mediante correo electrónico. En este caso, eran 24.163 cadenas que buscaban alcanzar a 18 personas objetivo, procedentes de 13 países diferentes. A pesar del elevado número de cadenas iniciales, sólo 364 fueron completadas. La longitud media de estas cadenas completas fue 4,05. No obstante, fue necesario realizar algunos ajustes en el resultado debido a que ese gran número de cadenas incompletas, probablemente, hubiesen tenido una longitud mayor. Se estima que el resultado final oscila entre los 5 los 7 eslabones.

Esta Teoría de los Seis grados de separación empezó a hacerse popular a medida que fueron pasando los años. Brett C. Tjaden contribuyó a ello al publicar un juego de ordenador en la página web de la Universidad de Virginia basado en esta idea. Y alcanzó su máxima popularidad en 2011, cuando Facebook realizó un estudio denominado "Anatomy of Facebook" con todos los usuarios activos de su página en ese momento (721 millones de miembros, es decir alrededor del 10% de la población mundial) y se analizó el conjunto de amigos en común, para sacar el promedio de cuántos eslabones hay entre cualquier usuario y otro cualquiera (de esa prueba se excluyó a celebridades y famosos para evitar la endogamia, por una parte, y una selección sesgada por otra). Los resultados mostraron que el 99,6% de pares de usuarios estuvieron conectados por 5 grados de separación, lo que constituye la prueba más cercana de la teoría en la actualidad, dando un resultado aproximado de 4,75 eslabones.

Algunos aspectos básicos de la Teoría de Grafos

Hasta ahora, hemos hablado de la Teoría de los Seis grados de separación sin tener para nada en cuenta las Matemáticas. Al igual que en el caso de Euler, con ocasión del Problema de los Puentes de Konigsberg, la pregunta que nosotros nos haríamos sería: ¿Cómo podemos emplear esta disciplina en un problema como éste? Pues bien, la respuesta la encontramos en la Teoría de Grafos.

Pasamos entonces a introducir previamente algunos conceptos elementales sobre esta Teoría, que serán necesarios para una mejor comprensión de lo que sigue. Estos conceptos, lógicamente, deberán ser comentados por el profesor a sus alumnos, para poder ir introduciéndolos poco a poco en los aspectos básicos de los grafos, de forma que los alumnos puedan ir siguiendo sin dificultad sus explicaciones. Dado que no son complicados y que poseen un marcado carácter intuitivo no deben presentar muchos problemas a los alumnos a la hora de su rápida comprensión.

La definición precisa de grafo es la siguiente: un *grafo* es un par G = (V, A), donde V es un conjunto numerable (no vacío) y A es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V (eventualmente vacío). Los elementos de V se denominan *vértices* (o *puntos* o *nodos*) y los de A se denominan aristas (o *líneas*). No obstante, a nivel de Bachillerato, el profesor puede decir sencillamente a sus alumnos que un grafo va a ser un conjunto de puntos y de líneas que unen entre sí algunos o todos de esos puntos.

Un grafo se dice *etiquetado* si en él se distinguen sus vértices, es decir, si se ha asignado un cierto nombre a cada uno de sus vértices. En caso contrario, el grafo se dice *no etiquetado*. Como ejemplo, el grafo G = (V, A), tal que V = {a,b,c,d}, A = {ab, ac, ad}.

Un grafo se puede representar de varias formas. De ellas, las más frecuente e intuitiva, aunque no operativa para su uso en el ordenador, es la que se ha comentado de manera informal, es decir, es mediante un *diagrama geométrico* en el que aparezca un punto por cada vértice y una línea entre cada dos vértices unidos. Así por ejemplo, el grafo de la definición puede venir representado según:

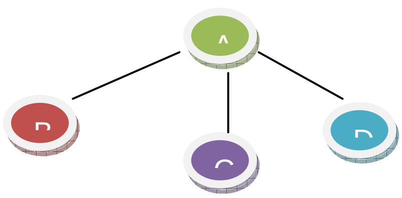


Figura 5. Grafo etiquetado

Dos vértices de un grafo se dicen *adyacentes* si ambos definen una arista en el grafo. En este caso, dichos vértices se dicen *extremos* de la arista. Una arista se dice que es *incidente* con cada uno de sus vértices extremos y dos aristas que comparten un extremo se dicen *incidentes*.

Se denomina (*grado*) (antiguamente, *valencia*) de un vértice v del grafo o bien al número de aristas del grafo que son incidentes con él o bien al número de vértices del grafo que son adyacentes con él. Por convenio, un vértice no se considera adyacente consigo mismo. Los vértices de grado 0 se denominan *vértices aislados* y los de valencia 1, vértices *hojas o finales*.

Sea G = (V, A) un grafo. Un *camino* en G es una sucesión finita de vértices y aristas que se alternan, cuyo primer elemento es un vértice, tal que dos elementos consecutivos de la misma sean siempre incidentes. Un camino en el que todas sus aristas sean distintas se denomina *recorrido*. Un *arco* en G es un recorrido en el que todos los vértices que lo forman son distintos, y finalmente, un *ciclo* en G es un camino cerrado en G que es un arco excepto en el hecho de que el primer y el último vértice coinciden.

Un camino en un grafo se dice *euleriano* si en él entran todas las aristas y además una sola vez cada una de ellas (puede ser abierto o cerrado), mientras que se dice *hamiltoniano* si en él entran todos los vértices y además una sola vez cada uno de ellos. Se denomina *longitud de un arco* o bien al número de aristas que lo forman o bien al número de vértices que lo forman, disminuido en una unidad. Relacionado con este concepto está el de *distancia entre dos vértices* en un grafo, que se define como la menor longitud de los arcos que los unen.

Para finalizar estos breves preliminares, el profesor puede decirles a los alumnos que un grafo se dice *conexo* si dos cualesquiera de sus vértices pueden unirse mediante un arco. Si un grafo no es conexo, se dice *disconexo*.

Comentar también que de entre las tres denominaciones similares: vértices, puntos o nodos, nosotros utilizaremos en este artículo la de nodo, por ser la que mejor refleja el contenido real del mismo, ya que en lo que sigue vamos a hablar de personas.

Modelización del Problema de los Seis grados de separación mediante la Teoría de Grafos

Bien, pues, una vez conocidos los conceptos básicos sobre grafos, vamos a utilizarlos como herramienta en el tratamiento del problema de los Seis grados de separación. Bien entendido, no obstante, que este problema actualmente está considerado como una conjetura y que por tanto, no está probado matemáticamente. De ahí que nuestro primer propósito, al menos por el momento, sea únicamente modelizar esa situación, con vistas a una posible futura resolución empleando técnicas de la Teoría de Grafos.

Para ello, comenzaremos haciendo corresponder cada persona con un nodo, de forma que las presencia o ausencia de aristas determinará la relación existente entre personas, es decir, que si dos personas se conocen personalmente, existirá entonces una arista entre los nodos que les corresponden (y por tanto, estos nodos serán adyacentes).

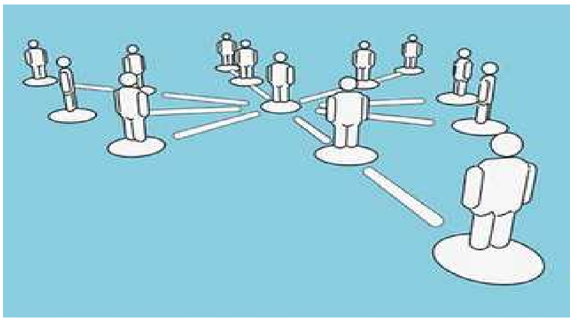


Figura 6. Modelización del problema.

Por ejemplo, sean A, B y C tres personas tales que B y C se conocen y A conoce a B, pero no a C. El grafo correspondiente a esta situación sería el siguiente:

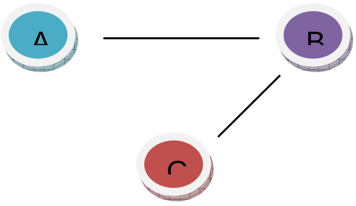


Figura 7. Grafo representativo

Por lo tanto, el número de conocidos de una persona determina el grado del nodo que la representa. Volviendo al ejemplo anterior, el grado de A y C será 1, mientras que el de B es 2.

Un concepto muy utilizado en el estudio de las topologías de redes de comunicaciones es la *longitud media del camino* y viene dado por el número medio de pasos que hay que dar (enlaces a atravesar) para que, siguiendo siempre la ruta más corta posible correspondiente a cada caso, podamos ir desde un nodo cualquiera a otro de la red de interconexión. Este concepto mide la eficiencia para el transporte de información o materia a través de una red de trabajo.

La Teoría de los Seis grados de separación, expresada en términos de grafos, se puede enunciar entonces de la siguiente forma: "*entre dos nodos cualesquiera siempre existirá un arco que los una. La longitud media de estos arcos es 6*".

Observemos que este enunciado es realmente coherente. En efecto, si estimamos que cada nodo tendrá un grado alrededor de 100, y que el numero de conocidos de una persona crece de manera exponencial al aumentar el número de eslabones, obtendremos, pues, que en el sexto eslabón se abarca a un total de 100 elevado a 6 nodos, que es mayor que 7 por 10 elevado a 9, es decir aproximadamente el numero de nodos de la tierra.

Un experimento personal realizado por los autores

Pasamos ahora a continuación a describir un experimento que se nos ocurrió hacer a los autores para profundizar en el estudio de esta teoría.Una de las razones que nos movió a realizarlo fue aprovechar la enorme popularidad que tienen las redes sociales entre los alumnos del nivel educativo al que nos estamos dirigiendo. Es innegable que todos esos alumnos se desenvuelven con una gran soltura en este campo y que disfrutan enormemente al hacerlo.

Por ello, tras conocer la Teoría de los Seis grados de separación, decidimos realizar un pequeño experimento en nuestro país emulando el ya mencionado experimento de Milgram. El hecho de haber elegido España para este estudio se explica porque, aparte de tratarse de nuestro país, España es el quinto país a nivel mundial que más utiliza las redes sociales, superando incluso a Alemania o Francia.

A diferencia de lo realizado por Milgram, que se sirvió del correo ordinario, en papel, para llevar a cabo sus estudios, nosotros, en cambio, quisimos adaptarnos a las nuevas tecnologías y pensamos que sería interesante utilizar las redes sociales. En los últimos años, las redes sociales han tenido gran impacto en la sociedad, habilitando una nueva forma de comunicación alternativa a las ya utilizadas (carta, teléfono...). Este tipo de redes han potenciado un mecanismo de encuentro y conversación entre usuarios. Los accesos no sólo se realizan a través de mecanismos tradicionales como un PC, sino que la movilización de estos entornos ha generado que cualquier usuario pueda acceder a ellos en cualquier momento y en cualquier lugar, por ejemplo, desde un teléfono móvil. Además, con ellas, se ha conseguido eliminar el que quizás haya sido el principal problema para tener relaciones con otras personas: la distancia. Por ello, para realizar nuestra experiencia, nosotros elegimos la red social Tuenti, debido a su popularidad a nivel nacional.

Figura 8. Emulando a las redes sociales

Nuestra experiencia se inició a mediados de marzo de 2012 y consistió en escoger al azar a un conjunto de personas residentes en España, que tuviesen una cuenta asociada a dicha red social.

A este grupo de personas le enviamos un mensaje privado en el que le explicábamos, resumidamente, que debían reenviarlo a uno de los autores de este artículo (en lo sucesivo X), en el caso de que éste formase parte de su grupo de amigos de Tuenti. Si no era así, esa persona debería enviar el mensaje a alguien de su propio grupo de amigos de Tuenti que creyese que tuviese más posibilidades de conocer a X.

El mensaje llevaba añadida la petición de una serie de datos personales de la persona objetivo (lugar de nacimiento, edad, lugar de residencia, estudios…) que deseábamos aportar a este trabajo. De esta forma, iríamos creando una cadena de personas de forma que el último eslabón sería X.

Por otra parte, el experimento llevaba un sistema de seguridad y seguimiento en el que nosotros sabríamos, en cada momento, dónde se encontraba la cadena. Este sistema consistía en que cada persona, al escoger el destinatario del mensaje, debía informarnos sobre a qué persona se lo enviaba y el por qué de su elección.

El experimento empezó a dar sus frutos muy pronto, ya que, en menos de un par de horas, ya había comenzado una primera cadena, aunque desvaneció al llegar al cuarto eslabón. Esta primera cadena no llegó a su destino, X, pero sí es cierto que llegó, al menos, a la ciudad donde X había nacido. Así, aunque todo daba la sensación de ir sobre ruedas, la verdad es que finalmente nuestro experimento resultó un fracaso, ya que de 20 personas al inicio, sólo una empezó la cadena.

Además, nos encontramos con la negativa, por parte de la empresa Tuenti, a la que nos dirigimos por escrito al efecto, de proporcionarnos ciertos datos que nos hubiesen permitido hacer un perfil más cercano de los usuarios de la red social (número de usuarios, número medio de amigos por usuario, etc.).

Sin embargo, no todo fue negativo en esta experiencia. Con su puesta en práctica hemos podido extraer ciertas conclusiones acerca de la Teoría de los Seis grados, que comentamos a continuación.

En primer lugar, como ya Milgram pudo observar en sus estudios, vimos que, lo común, es que las personas elegidas para la muestra no colaboren. ¿Las razones? En primer lugar, Tuenti es una red social que está diseñada para que grupos de amigos tengan una forma de comunicación entre ellos, y la mayor parte de las veces hay una gran desconfianza por parte de todos hacia las personas que no conoces. Además, las personas que elegimos como muestra tenían edades comprendidas entre los 18 y los 22 años, y, con esta edad, resulta difícil ser consciente de lo importante que puede ser colaborar en un experimento como éste.

Otra posible razón del fracaso de la experiencia puede ser el hecho de que existe un elevado porcentaje de cuentas creadas en las redes sociales que no están activas. Es decir, existen muchas cuentas que han sido creadas por usuarios, pero que más tarde han dejado de usar por diferentes causas. Esto es una barrera adicional con la que nos hemos encontrado y que sin embargo en el experimento de Milgram no existía.

Por todo esto y a pesar del esfuerzo y la ilusión puesta en el experimento, no obtuvimos el resultado esperado, lo cual, sin embargo, no nos ha impedido seguir con nuestros estudios e investigaciones, tratando de obtener algunos logros lo más fructíferos posible, de cara a nuestro trabajo posterior. Esto hace además que, desde estas líneas, animemos a los alumnos y profesores que nos lean a poner en práctica experiencias parecidas, esperando que sean algo más afortunados que nosotros. Como ya dijo el profesor Duncan Watts, de la Universidad de Columbia:

> *El estudio de las redes puede ayudar a comprender problemas prácticos tales como cómo se difunden las ideas, cómo se originan las modas y cómo una falla inicial no muy grande puede transformarse en una cascada y afectar una red de gran tamaño muy grande, tal como una red eléctrica o un sistema financiero. (Harvard Business Review: Boston: febrero de 2003)*

La Teoría de los Seis grados de separación "dentro y fuera de las Matemáticas"

No resulta extraño encontrar numerosas situaciones de la vida real relacionadas de alguna manera más o menos directa con la Teoría de los Seis grados de separación. De hecho, la repercusión que tiene esta teoría fuera del ámbito propiamente matemático es muy grande. Mostramos a continuación algunos ejemplos:

1. Es un hecho evidente que la Teoría de Redes ha aumentado grandemente su popularidad en los últimos tiempos. Pues bien, no es aventurado afirmar que una gran parte de culpa la tiene la Teoría de los Seis grados de separación.

En efecto, aunque el término “*www*” (acrónimo de *world wide web*) se confunde habitualmente con el de Internet, en realidad no hace referencia a la red física de ordenadores y cables, sino a la red virtual que forman los documentos o páginas web como nudos y los links o enlaces como hilos que las conectan. Se estima que en estos momentos existen unos 2.000 millones de páginas web. Una red de relaciones gigantesca donde las páginas aparecen y desaparecen a un ritmo vertiginoso. Los científicos estiman que tan sólo son necesarios un promedio de 16 clicks de ratón para viajar entre dos páginas escogidas al azar en ese mar de información. Lo dicho: *la red es un pañuelo virtual*.

2. No estrictamente fuera de las Matemáticas, aunque tampoco propiamente dentro, otra situación de la vida real en la que se refleja esta Teoría de los Seis grados de separación es la asignación del “número de Erdös” que se le atribuye a cualquier matemático. Pasamos a explicar brevemente a continuación en qué consiste este número.

Paul Erdös fue un matemático húngaro (Budapest, 1913 – Varsovia, 1996) que escribió más de 1500 artículos, la mayoría de ellos en colaboración conjunta con otros autores (más de 500 diferentes), debido a su consideración de las Matemáticas como una actividad social. En su honor se ha acuñado esta terminología “*número de Erdös*”, que distingue a los matemáticos dependiendo del grado de cercanía de éstos con el propio Erdös o con colaboradores suyos.

Así, al propio Erdös se le asigna el número de Erdös 0 y a todas las personas que escribieron un artículo conjunto con él el número de Erdös 1 (en total hay 509 personas que tienen este número, es decir que colaboraron directamente con Erdös en un trabajo). A las personas que colaboraron con éstos en otro trabajo, pero no directamente con el propio Erdös, se les asigna el número de Erdös 2 (hay 6.984 personas), las que colaboraron con éstas pero no con personas que tienen un número de Erdös 2, ni con Erdös mismo, ni con alguien con un número de Erdös 1, tienen un número de Erdös 3, y así sucesivamente.

Para que a una persona entonces se la pueda asignar un número de Erdös, ésta debe de haber escrito un trabajo matemático conjuntamente con un autor que tenga un número de Erdös asignado. Nótese que a pesar de la aparente frivolidad de este hecho, la propia Asociación de Matemáticas de Estados Unidos (AMS) facilita una herramienta para el cálculo del número de Erdös de cualquier matemático que lo solicite y que sea miembro de la sociedad (véase mayor información al respecto en (web6 y 7)).

Existen también otros números que representan una idea parecida. En wikipedia (a pesar del rechazo general que suele acompañar a este sitio web, por su muchas veces probada no fiabilidad, en este asunto la mayoría de la información está totalmente contrastada) pueden encontrarse el número de Bacon, aplicación de esta misma idea en la industria cinematográfica, que conecta actores que han aparecido junto al actor Kevin Bacon en alguna película, el número de Stringfield en ufología, relacionando a aquéllos que han investigado conjuntamente casos de OVNI’s con

Leonard H. Stringfield e incluso, el no va más, el número de Erdös-Bacon, que se le asigna a un pequeño número de personas curiosamente conectadas tanto con Erdös como con Bacon, como por ejemplo la actriz Danica McKellar, protagonista de la serie “Los años maravillosos”, que cuenta con un número de Erdös 4 y un número de Bacon 2.

3. En 1990, John Guare escribió una obra teatral que trataba de un joven llamado Paul, que se desplaza a Nueva York con el objetivo de encontrar a su padre. Sin embargo, tras una serie de tentativas, no fue capaz de encontrarlo. Lamentándose, Paul afirmaba que aunque conocía esta Teoría de los Seis grados y que, por consiguiente, daba por hecho que cualquier persona en el mundo estaba conectada con él por menos de seis pasos (lo que era suficientemente tranquilizador), suponía un trabajo bastante tedioso el tener que encontrar a las personas correctas para poder realizar esa conexión.

4. Otro claro ejemplo de que esta teoría se encuentra presente en muchos aspectos de nuestra vida es la película “Seis grados de separación”, la cual toma su nombre en referencia a dicha teoría.

En la película, Flan y Ouisa Kittredge, dos importantes comerciantes de arte de Nueva York, reciben un día la visita de un joven de color negro que dice ser compañero de su hijo en la universidad de Harvard, y que además, afirma ser el hijo de Sidney Poitier. Flan y Ouisa le ofrecen su hospitalidad y lo invitan a cenar y a quedarse a dormir. Sin embargo, al día siguiente descubren que el joven no es todo lo que dice ser.

5.- La Teoría de los Seis Grados de separación pasó también a la pequeña pantalla a través de la serie estadounidense “*Seis Grados*”, producción del famoso J.J. Abrams, que se emitió en el año 2007 y fue uno de los fracasos más sonados de la temporada en EE. UU. A España llegó ese mismo año al canal AXN, y meses más tarde fue la cadena Cuatro la que comenzó su emisión. Actualmente, solo se transmite por el canal People + Arts.

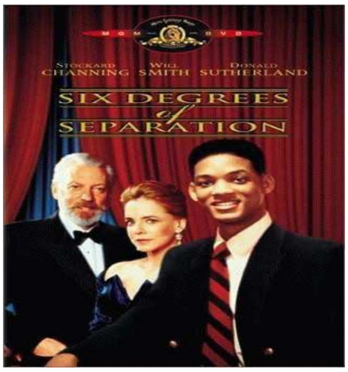


Figura 9. Cartel de la película “Six Degrees of Separation”

Esta serie narra las vidas de seis personas de Nueva York y de la influencia que, inconscientemente, tienen sobre el resto. En la web sobre cine Filmaffinity puede leerse:

> “Seis grados subraya y destaca lo pequeño que es el mundo y cómo tan sólo seis personas aparentemente desconocidas pueden darle forma a nuestro futuro en este mismo momento.”

Reflexiones de los autores

En este artículo, los autores hemos tratado de mostrar tanto la evolución como el estado actual de la popularmente conocida con el nombre de “Teoría de los Seis grados de separación”, intentando a su vez modelizarla y explicarla desde un punto de vista estrictamente matemático, para lo cual nos hemos servido de una herramienta propia de esta disciplina, la Teoría de Grafos. Además de mostrar algunas situaciones de la vida real relacionadas en mayor o menor grado con esta teoría, hemos descrito asimismo un experimento personal puesto en marcha por nosotros mismos, desafortunadamente no del todo exitoso, con el que deseábamos ratificarla, dado que aún no está probada desde el punto de vista matemático.

En nuestra opinión, y así parece estar aceptado, al menos por los experimentos realizados, esta teoría está bastante bien fundamentada a pesar de que, en apariencia, pudiera parecer lo contrario. Sin embargo, no es menos cierto que en la actualidad están empezando a aparecer bastantes detractores, curiosamente no negándola, sino, en contra lo que podría parecer, endureciéndola. Así, en una noticia publicada por el diario ABC de España sobre Facebook (véase web8) se afirma que la red social permite la conexión de dos personas de cualquier parte del mundo en menos pasos de los que se creía, de forma que según aumenta el número de usuarios, disminuye el número de pasos para el contacto.

Según esa noticia, la Universidad de Milán investigó las relaciones de amistad de 721 millones de usuarios del sitio (un 10% de la población mundial), como muestra para demostrar la popular Teoría de los Seis grados de separación y del estudio realizado dedujo que en contra de lo afirmado por esta teoría, según la cual las personas tienen un contacto que a su vez tiene otro que tiene otro y así hasta 6 que unen a cualquier persona, los investigadores descubrieron que la teoría no sólo se cumple, sino que se reduce: "*El 99,6% de las parejas de usuarios analizados están conectadas por 5 grados, y el 92% lo hace a través de 4 grados".* Además, los investigadores han comprobado que según aumenta el número de usuarios disminuye el número de pasos para el contacto. Así, los datos presentados aseguran que en 2008 eran necesarios 5,28 grados, mientas que en la actualidad son necesarios 4,7.

Siendo aún más concretos, los investigadores de la Universidad de Milán han comprobado que la teoría se reduce aún más si se limita el ámbito de estudio a un país. De esta forma, analizando los datos de usuarios de un solo país, el número de pasos para conectar a dos usuarios se limita a 3. El estudio confirma que Internet y las redes sociales han contribuido a la creación del mundo global actual: *la posibilidad de cualquier usuario de conocer a cualquier persona del mundo.*

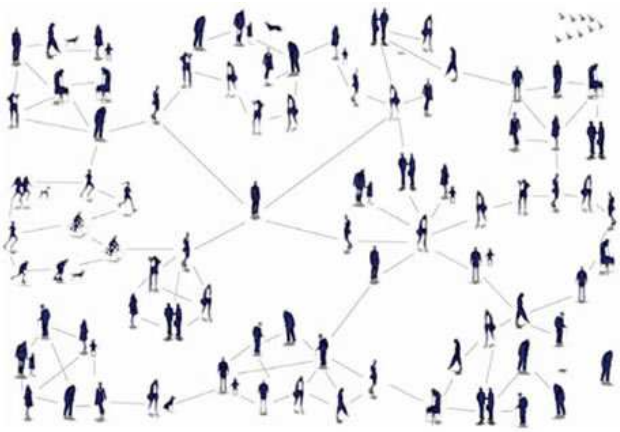


Figura 10. Créetelo, el mundo es un pañuelo

Bibliografía

Alfonso, M., Bueno, S., Diánez, M. R., de Elías, M. C. y Núñez, J. (2004), *Siete puentes, un camino: Konigsberg*, Revista SUMA, 45, 69-78.

Milgram, S. and Travers, J. (1969), *An experimental Study of the Small World Problem*, Sociometry, 23, 425-443.

[web3] http://www.xatakaciencia.com/sabias-que/la-teoria-de-los-seis-grados-de-separacion

[web4] http://www.blogsocialmedia.es/2010/03/%C2%BFrealmente-solo-existen-seis-grados-de-separacion-entre-cualquier-persona/(sobre la Teoría de los Seis grados de separación).

[web5] http://www.culturizando.com/2011/09/la-teoria-de-los-6-grados-de-separacion.html (sobre la Teoría de los Seis grados de separación).

[web6] http://identidadgeek.com/%C2%BFy-tu-tienes-numero-de-erdos/2011/05/ (sobre el número de Erdös).

[web7] The Erdös Number Project : http://www.oakland.edu/enp/ (sobre el número de Erdös).

[web8]http://www.abc.es/20111122/medios-redes/abci-facebook-seis-grados-201111221734.html

[web9] http://campusvirtual.unex.escalaepistemowikiaimagesbb8Portada6g.jpg

[web10] http://humanidades09.pbworks.comf12638139866grados.jpg

[web11] http://1.bp.blogspot.com/-Viwyll7Yyt4/TeTwGqFsb4I/AAAAAAAABEw/Mimuq0c4ECc/s1600/tuenti.jpg

José María Contreras Beltrán e Isabel Duarte Tosso son alumnos de tercer curso de grado de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla (España) y Estudiantes Internos del Departamento de Geometría y Topología de la misma, bajo la dirección del profesor **Juan Núñez Valdés**, doctor en Matemáticas y profesor Titular de Universidad de ese Departamento, con el que colaboran en artículos de divulgación de las Matemáticas en general.

chema_cb10@htmail.com **isabel92_dt@hotmail.com** **jnvaldes@us.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 119-124

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Creación de problemas. Un caso con probabilidades

Problema

En un sistema vigesimal de calificación, las notas de un alumno en los dos primeros exámenes de los cursos A y B son 8 y 12, y 10 y 14 respectivamente. Si las notas finales se obtienen como media aritmética de tres exámenes, los cursos se aprueban con notas mayores o iguales a 11 y procede el redondeo habitual, ¿en qué curso hay mayor probabilidad de que el alumno obtenga nota final aprobatoria?

Este problema recoge la propuesta de un grupo de trabajo en un taller que desarrollé sobre creación de problemas, en el marco de la *IV Jornada de Matemática del Departamento de Matemática de la Universidad de Valparaíso*, al que fui invitado en enero de este año.

Para la primera parte del taller presenté una situación y pedí que en torno a ella, cada grupo de participantes – formado por tres estudiantes de final de carrera de profesorado en matemáticas para educación media – se plantee preguntas y proponga y resuelva un problema creado en grupo. La situación fue la siguiente:

Carlitos obtuvo las siguientes notas en los cursos A y B. (La escala de calificación es de 0 a 20; la nota final se obtiene como media aritmética de tres exámenes; los cursos se aprueban con 11 y procede el redondeo habitual)

	Curso A	Curso B
1er Examen:	08	10
2do Examen:	12	14

La idea de presentar una situación con notas de cursos me pareció que recogía un contexto frecuente en el mundo estudiantil y que considerar las notas en dos cursos ofrecía más posibilidades de plantearse preguntas y de crear problemas. Pensé en algunas preguntas que podrían plantearse y en algunos problemas que se podrían crear. Puse intencionalmente notas desaprobatorias de ambos cursos en el primer examen e iguales incrementos (4 puntos) en las notas del segundo examen, dando así condiciones para que se planteen como pregunta en qué curso hubo un "progreso mayor" de Carlitos y para que usen el criterio de variación porcentual.

En el taller, todas las preguntas y los problemas propuestos por los grupos fueron en función de las notas posibles en el tercer examen. La mayoría de ellos buscando la nota mínima necesaria para obtener determinado promedio final en cada curso.

A continuación reproduzco tres de ellos:

Problema del grupo 3:

> *Para obtener una beca, es necesario aprobar ambos cursos y al menos uno de ellos con nota superior o igual a 15. ¿Qué notas debe obtener el alumno en el tercer examen de cada curso para obtener la beca?*

Problema del grupo 7

> *Carlitos posee una beca cuya condición para mantenerla es que el promedio de los cursos A y B sea mayor a 12. ¿Qué nota mínima debe obtener en los terceros exámenes de los cursos A y B?*

Problema del grupo 8

> *¿Carlitos puede aprobar ambos cursos con nota 15?*

Dos grupos tomaron la situación, pero no los datos dados para crear su problema. Por ejemplo:

Problema del grupo 4

> *Carlitos aprueba un curso con tres notas y con promedio 11. ¿Cuáles son las posibles notas en dos de las pruebas si en la tercera obtuvo 15?*

Solo uno de los grupos propuso un problema considerando probabilidades:

Problema del grupo 1

> *¿En qué curso hay mayor probabilidad de que Carlitos apruebe?*

Algunos comentarios

1. Se percibió una actitud muy positiva para la creación de problemas en todos los participantes. Manifestaron que no habían tenido antes una experiencia similar y que valoraban mucho tener la oportunidad de hacerlo y comentarlo en grupo.
2. Fueron correctamente enfocadas todas las soluciones que presentaron de los problemas que crearon. Se hizo uso de operaciones básicas y de ecuaciones sencillas.
3. Ningún grupo consideró la información de que se admite el redondeo habitual; así, por ejemplo para que la nota final de un curso sea 15, consideraron que la suma de las tres notas debería ser 45, cuando bien podría ser 44, pues $44/3 \sim 14{,}66$ que se redondea a 15.
4. Ningún grupo consideró un análisis comparativo del progreso de Carlitos en los cursos A y B, como me imaginé que podría ocurrir. Posiblemente la información de un tercer examen a rendir pesó mucho sobre la orientación de los problemas a crear, sobre todo siendo estudiantes los participantes en el taller. Son aspectos importantes a tener en cuenta en el diseño de tareas.
5. Entre los posibles problemas que pensé, no consideré uno con probabilidades y encuentro muy valioso que un grupo lo haya considerado, pues el tema de probabilidades es muy poco tratado en los estudios secundarios y aun en los

cursos básicos de la educación superior. Por eso, en esta ocasión, me detendré en comentarios en torno a esta iniciativa del grupo 1.

Comentarios al problema con probabilidades (del grupo 1)

a) El grupo no presentó una solución del problema.

b) El problema considera una pregunta que parece ser frecuente entre los estudiantes ante situaciones similares.

c) Propuse este problema a dos profesores de secundaria y ambos coincidieron en una solución como la siguiente:

Notas posibles de Carlitos en el tercer examen del curso A: 0, 1, 2, …, 20 (21 notas posibles)

Notas que le dan un promedio aprobatorio en el curso A: 12, 13, 14, … , 20 (9 notas favorables)

En consecuencia, la probabilidad de tener promedio aprobatorio en el curso A:

$$P(\textit{aprobar el curso A}) = \frac{9}{21}$$

Similarmente

$$P(\textit{aprobar el curso B}) = \frac{13}{21}$$

Si bien ésta es una solución posible, es importante notar que conlleva algunos supuestos implícitos, cuya explicitación es importante.

i) Se está asumiendo solo notas con números enteros.

ii) Se está asumiendo que todas las notas son igualmente probables de obtener. Este es un supuesto simplificador, válido para obtener una solución sencilla e ilustrar la probabilidad en el sentido dado por Laplace, pero no acorde con la realidad, pues la experiencia nos dice que obtener un 20 es menos probable que obtener un 12.

d) ¿Se puede resolver este problema haciendo supuestos más acordes con la realidad? Veamos:

- *Suponer que las notas tienen distintas probabilidades de ser obtenidas.*

  Si mantenemos el supuesto simplificador de obtener notas solamente en números enteros, podemos asignar a cada nota entre 0 y 20 una probabilidad p_i de ser obtenida. Es decir, asignamos números p_i entre 0 y 1 a cada una de las notas de 0 a 20, de modo que la suma de tales números p_i sea 1. Podemos asignar los números p_i asumiendo también que las notas más bajas y las más altas son menos probables de obtener. Tengamos en cuenta que al calcular las probabilidades como en (c), asumiendo implícitamente que todas las notas son igualmente probables de obtener, en verdad se está asumiendo que cada una de las 21 notas (enteras) posibles, tiene probabilidad 1/21 de ser obtenida. Así, al asignar los números p_i más bajos para las notas más bajas y los más altos para las notas más altas, se debe compensar los excesos con los defectos respecto a 1/21, de modo que la suma de los 21 números p_i sea 1. Operativamente, una posibilidad que facilita los cálculos es considerar fracciones con denominador 210 en lugar de denominador 21. Así, la siguiente es una posible lista de los p_i, que deben entenderse como la probabilidad p de obtener la nota i. Observar que 10 es la nota a la que se le ha asignado mayor probabilidad y a medida que las notas están más alejadas de 10 – menores o mayores – las probabilidades asignadas son menores.

Nota i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	$\frac{1}{210}$	$\frac{3}{210}$	$\frac{5}{210}$	$\frac{7}{210}$	$\frac{9}{210}$	$\frac{11}{210}$	$\frac{13}{210}$	$\frac{15}{210}$	$\frac{17}{210}$	$\frac{19}{210}$	$\frac{21}{210}$

Nota i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_i	$\frac{19}{210}$	$\frac{17}{210}$	$\frac{15}{210}$	$\frac{13}{210}$	$\frac{10}{210}$	$\frac{6}{210}$	$\frac{4}{210}$	$\frac{2}{210}$	$\frac{2}{210}$	$\frac{1}{210}$

Con estos números, ya podemos obtener las probabilidades de que Carlitos apruebe sus cursos A y B:
Notas que le dan un promedio aprobatorio en el curso A:

$$12, 13, 14, \ldots , 20$$

En consecuencia, la probabilidad de tener promedio aprobatorio en el curso A es:

$$P(\text{aprobar curso A}) = p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16} + p_{17} + p_{18} + p_{19} + p_{20}$$

Viendo las tablas, podemos verificar que tal suma es $\frac{70}{210}$.

Así, la probabilidad de que Carlitos tenga promedio aprobatorio en el curso A es $\frac{70}{210} = \frac{1}{3} \sim 0{,}333$.

Similarmente,

$$P(\text{aprobar curso B}) = p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16} + p_{17} + p_{18} + p_{19} + p_{20} = \frac{146}{210}.$$

Así, la probabilidad de que Carlitos tenga promedio aprobatorio en el curso B es $\frac{146}{210} \sim 0{,}695$

- *Suponer que las notas pueden ser números decimales.*
  Como hay “muchos números decimales posibles”, para simplificar se considera a todos los números reales del intervalo cerrado [0; 20], aunque en la realidad jamás se asigne una nota que sea un número irracional. Este supuesto – que es usual en diversos modelos matemáticos – nos lleva, en este caso, a representar el evento “aprobar el curso A” por el intervalo [11,5 ; 20], el evento “aprobar el curso B” por el intervalo [7,5 ; 20] y a calcular las probabilidades usando una función de densidad de probabilidad continua y el cálculo integral. Una posibilidad es considerar la función de densidad de probabilidad correspondiente a una distribución normal (campana e Gauss):

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-10}{3}\right)^2}}{3\sqrt{2\pi}}$$

El número 10 está presente por haber asumido que la media es 10, y el número 3 está presente por haber asumido que la desviación estándar es 3. Los otros números, incluidos e y π, son parte de la fórmula deducida en la teoría de probabilidades. Como Carlitos obtendrá nota aprobatoria en el curso A si en el tercer examen obtiene una nota entre 11,5 y 20, la probabilidad de que Carlitos apruebe el curso A se identifica con la probabilidad del intervalo [11,5; 20], que es la integral de 11,5 a 20 de la función de distribución adoptada. Así:

$$P([11{,}5;\,20]) = \int_{11{,}5}^{20} f(x)\,dx \sim 0{,}31.$$

Similarmente, para el curso B:

$$P([7{,}5;\,20]) = \int_{7{,}5}^{20} f(x)\,dx \sim 0{,}8.$$

Vemos así cómo, a partir de un problema sencillo, según los supuestos que se hagan, se requieren recursos matemáticos diferentes. Suele ocurrir que al pretender resolver situaciones más próximas a la realidad se requiera hacer supuestos menos simplificadores y en consecuencia usar recursos matemáticos más avanzados. Es justamente la realidad y los problemas que ella nos plantea lo que impulsa el desarrollo de la ciencia y en particular de la matemática.

e) Otro problema interesante a partir de la situación presentada, sugerida por un colega matemático, es el siguiente:

¿Cuál es la probabilidad de que en el curso A Carlitos tenga nota final más alta que en el curso B?

En este caso, con supuestos similares a los considerados en i) y ii) y con el supuesto adicional de que hay independencia entre las notas que se obtengan en los cursos A y B, el universo de todos los casos posibles es el producto cartesiano del conjunto $\{0; 1; 2; \ldots; 19; 20\}$ por sí mismo, pues considera todos los pares ordenados (m; n), donde m es la nota obtenible en el tercer examen del curso A y n la nota obtenible en el tercer examen del curso B. Para responder a la pregunta habría que seleccionar los pares ordenados (m; n) que dan como promedio final en el curso A un número mayor al promedio final en el curso B. Contar el número de tales pares ordenados y aplicar la fórmula Laplaciana habitual.

Comentarios finales

1. Estas experiencias refuerzan mi convencimiento de la importancia de estimular en profesores y alumnos las capacidades de plantear preguntas y de crear problemas, sobre todo a partir de situaciones dadas. Los procesos de pensamiento no son los mismos que al entender una demostración o al resolver un problema. El hecho mismo de crear algo es afrontar un reto diferente y por muy simple que sea la situación, lo cierto es que no hay un texto escrito sobre el problema que se piensa resolver sino que tal texto debe

ser creado y debe ser coherente con la información que se tiene y adecuadamente redactado para que sea claramente entendido por otra persona. Si se le añade el reto personal de crear algo que tenga originalidad y sea desafiante para quien intente resolverlo, hay una puesta en juego de manera diferente de los conceptos matemáticos conocidos y un ejercicio muy grande de creatividad.

2. Hemos visto que crear un problema sobre probabilidad a partir de una situación cotidiana sencilla, tiene muchos aspectos sobre los cuales reflexionar y que pueden ir inclusive más allá de los conocimientos sobre probabilidades que tengan los creadores del problema. Esto ilustra una vez más otro aspecto de la importancia de crear problemas, pues brinda también a los estudiantes oportunidades para explicitar supuestos y para estudiar con más motivación temas matemáticos que profundizan lo conocido o que llevan a temas no conocidos para resolver problemas creados por ellos mismos.

3. Enfatizo una vez más la importancia de fortalecer la capacidad creadora en general; crear conocimientos es fundamental en la sociedad del conocimiento y la información, y creando problemas de matemáticas fortaleceremos esa capacidad, tanto la nuestra como la de nuestros alumnos. Concluyo recordando a William Edwards Deming, un estadístico y consultor internacional de negocios, fallecido en 1993, que nos decía: “*You don't just learn knowledge; you have to create it. Get in the driver's seat, don't just be a passenger*.”, que me permito traducir como: “*No te limites a aprender conocimientos; tienes que crearlos. Ponte en el asiento del conductor, no seas solamente un pasajero.*”

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 125-136
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC):

A utilização do software geogebra em um processo de ensino-aprendizagem de lugares geométricos

Gerson Pastre de Oliveira, Péricles Bedretchuck Araújo

Fecha de recepción: 10/02/2012
Fecha de aceptación: 7/02/2013

Resumo

A pesquisa descrita neste artigo relata uma investigação que teve por bases a Teoria das Situações Didáticas e pressupostos relativos ao emprego de estratégias pedagógicas mediadas por tecnologias para a aprendizagem em Geometria. A sequência didática proposta visou possibilitar aos participantes, estudantes do nono ano do Ensino Fundamental e do segundo ano do Ensino Médio, construir os conceitos de circunferência e mediatriz como lugares geométricos. A investigação empregou atividades nas quais situações do cotidiano associadas à circunferência e à mediatriz como lugares geométricos foram apresentados aos alunos. Tais ocorrências foram utilizadas na aprendizagem de geometria através de tarefas de construção que, também, permitiram levantar as dificuldades de aprendizagem dos estudantes e suas estratégias, quando em contato com ambientes dinâmicos como os que foram proporcionados pelo GeoGebra. O estudo permitiu considerar que a intervenção mediada pelo software auxiliou os estudantes na superação dos problemas encontrados. Semelhante efeito também pode ser creditado à proposta colaborativa das situações didáticas planejadas.

Palavras-chave Geometria dinâmica, lugares geométricos, teoria das situações didáticas, GeoGebra..

Abstract

The research described in this paper reports an investigation that was to base the Pedagogical Situations Theory and assumptions relating to the use of teaching strategies mediated by technologies to learning in Geometry. The proposed educational sequence aimed to enabling participants, students in 9th year of Elementary School and 2nd year of High School build the concepts of circumference and perpendicular bisector as geometric loci. There were activities of daily situations, used in learning geometry through construction tasks and strategies to work with dynamic environments, as GeoGebra. It was found that the intervention mediated the software helped them overcome the problems encountered. A similar effect can be credited to the proposed collaborative teaching situations previews.

Keywords: Dynamic geometry, loci, Pedagogical Situations Theory, GeoGebra

Resumen

Este trabajo presenta una investigación basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas y en supuestos relacionados con el uso de estrategias pedagógicas mediadas por tecnologías para la aprendizaje de geometría. La secuencia didáctica propuesta tenía por objeto permitir a los participantes de la investigación, estudiantes del noveno año de la escuela primaria y del segundo año de la escuela secundaria, construir los conceptos de circunferencia y mediatriz como lugares geométricos (loci). Se presentaron actividades de situaciones cotidianas, utilizadas en el aprendizaje de geometría a través de tareas de construcción y sus estrategias al trabajar con entornos dinámicos, como GeoGebra. Se comprobó que la intervención mediada por el software los ayudó a superar los problemas encontrados. Un efecto similar puede ser acreditado a la propuesta colaborativa de las situaciones de enseñanza previstas.

Palabras clave: Geometria dinámica, lugares geométricos, teoría de las situaciones didácticas, GeoGebra

1. Introdução: sobre a pesquisa e sua fundamentação teórica

Este artigo relata uma pesquisa concluída e levada a efeito no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo[1], envolvendo alunos de uma escola pública de Educação Básica, cursando séries finais do Ensino Fundamental ou o Ensino Médio. O objetivo era o de avaliar se uma sequência de situações adidáticas, estruturadas em uma estratégia pedagógica mediada pelo *software* GeoGebra, poderia contribuir para a aprendizagem dos temas "circunferência" e "mediatriz", vistos como lugares geométricos.

No contexto supramencionado, segundo Brousseau (2008), uma situação adidática é aquela na qual o estudante não tem a revelação, por parte do professor, da intenção de ensinar, ainda que este tenha planejado dada situação de modo a estabelecer condições favoráveis para a construção do novo saber. O aluno não buscará a solução de problema para responder ao professor, mas para solucionar a situação que lhe é apresentada, ganhando maior autonomia. O professor não intervém diretamente para que o aluno adquira o conhecimento esperado: o aprendiz adapta-se a um 'meio', que é fator de desequilíbrios.

Ainda em relação aos conceitos mencionados, uma figura geométrica se caracteriza por determinadas propriedades que a individualizam. Neste contexto, a concepção de lugar geométrico pode ser vista como "um conjunto de pontos que apresentam uma determinada propriedade: se certo ponto possui a propriedade x, então ele pertence ao lugar geométrico dos pontos que satisfazem x" (Camargo, n.d., s/p).

Segundo King e Schattschneider (1997), os lugares geométricos representam um assunto evitado em livros de geometria, ainda que representem um tema que pode enriquecer o seu estudo. Entender as propriedades geométricas que estão atreladas a uma determinada figura e como elas se relacionam pode possibilitar um entendimento de conceitos geométricos como a circunferência, mediatriz, bissetriz e outros. Especificamente nesta pesquisa, os lugares geométricos trabalhados são a circunferência e a mediatriz, que têm as seguintes definições:

> **Circunferência**: lugar geométrico dos pontos de um plano que são equidistantes de um ponto dado chamado centro da circunferência – a distância constante é a medida do raio; **Mediatriz**: lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes dos extremos de um segmento (Camargo, n.d., p.2).

Estas definições também podem ser encontradas em livros didáticos. No caso da circunferência como lugar geométrico, uma definição pode ser: "a circunferência é um lugar geométrico no plano, pois todos os seus pontos têm uma propriedade comum: estão a uma mesma distância a um ponto fixo" (Mori e Onaga, 2009, p. 226).

Um ponto que se move em um plano, com determinadas propriedades, pode ser visto como um lugar geométrico – por exemplo, a distância deste ponto em

[1] Este artigo é resultado de pesquisa apoiada pela Fapesp (Processo no. 2010/01225-8) e pelo CNPq (Processo no. 401390/2010-1).

relação a dois outros pode ser constante e igual a x. A curva formada pelo ponto em questão pode ser de difícil visualização com recursos estáticos – claro que não é impossível, apenas mais difícil. Esta é a argumentação de King e Schattschneider (1997), que acrescentam ser difícil para as pessoas imaginarem um ponto se movendo em uma configuração na qual pode haver outros pontos e ainda serem capazes de apontar o lugar geométrico. Uma possibilidade existente nos programas de Geometria Dinâmica é a capacidade de visualização de lugares geométricos por meio do traçado de um ponto, entre outros recursos. Evidentemente, o recurso, por si só, não tem o poder de melhorar a capacidade de aprendizagem de um estudante em particular – ou de um grupo: são as estratégias pedagógicas planejadas no âmbito das situações de aprendizagem as responsáveis por fomentar este processo (Oliveira, 2009).

No que diz respeito à Geometria Dinâmica, argumenta Gravina (1996):

> A partir de exploração experimental viável somente em ambientes informatizados, os alunos conjeturam e, com o *feedback* constante oferecido pela máquina, refinam ou corrigem suas conjeturas, chegando a resultados que resistem ao "desenho em movimento", passando então para a fase abstrata de argumentação e demonstração matemática (Gravina, 1996, s/p).

Nas tarefas desta pesquisa, os lugares geométricos são utilizados em uma série de construções geométricas, considerando uma abordagem com o software GeoGebra. Entende-se, desta forma, que o uso das tecnologias não significa a simples transposição das aulas tradicionais para o computador, mas expressa uma mudança na forma de ensinar, representando uma forma de estimular o aluno a ganhar autonomia, avançando desde a perspectiva de um simples executor de tarefas automatizadas, para a de alguém que aprende a aprender. Denota, também, uma postura diferenciada do professor, de modo que ele possa transitar e saber usar os potenciais oferecidos pelas TICs.

2. Metodologia

Foi importante, na investigação aqui relatada, eleger um estilo de trabalho para os sujeitos, de tal forma a favorecer um ambiente de interações intensivas, tanto quanto possível. Esta ambientação surgiu com base nas ideias do trabalho colaborativo, o qual favorece o relacionamento social dos indivíduos, ao incentivar as discussões entre os seus membros, gerando momentos ricos de aprendizagem onde um membro pode incentivar o outro a expor suas ideias, reformulá-las, compartilhar seus conhecimentos, buscando o êxito da tarefa na qual estão envolvidos. A ideia de colaboração na aprendizagem assim foi definida por Ramos e Quartiero (como citado em Oliveira, 2007, p. 113):

> (..) entendemos a colaboração 'como atividade síncrona e coordenada que resulta de uma tentativa contínua de construir e manter uma concepção compartilhada de um problema' (Roschelle e Teasley como citado em Rosatelli et al, 2003, p. 48). Neste sentido, a colaboração caracteriza-se como uma ação na qual os objetivos e os problemas são partilhados visando à construção do conhecimento e a aprendizagem.

Participaram da pesquisa nove alunos voluntários, com idades entre 14 a 16 anos, dos quais três eram do 9º ano do Ensino Fundamental e seis do 2º ano do Ensino Médio, em uma escola pública situada no município de São Paulo. As sessões ocorreram em horário diverso das aulas regulares. Os alunos foram divididos em 3 grupos, com 3 alunos cada. Os grupos foram indicados por A, B e C, e os alunos de cada grupo como A1, A2, A3, e assim por diante. A sequência de ensino foi aplicada por um dos pesquisadores e contou com a colaboração da professora de Matemática da turma. Foram utilizados 12 computadores e um projetor multimídia2 durante as quatro sessões de aplicação do instrumento, que contava com 13 tarefas, das quais 3, em função da relevância, são descritas neste artigo.

Nesta pesquisa, os procedimentos metodológicos consideraram os pressupostos da Engenharia Didática, caracterizada como:

> [..] um esquema experimental baseado sobre “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, sobre a concepção, realização, a observação e a análise de sequências de ensino (Artigue como citado em Machado, 2008, p.235).

Os procedimentos adotados na metodologia da engenharia didática distinguem quatro fases. Nas análises preliminares, são realizadas as considerações sobre o quadro teórico-didático envolvido. No caso desta investigação, tais elementos compreendem a Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau (1997), bem como conhecimentos ligados aos lugares geométricos “circunferência” e “mediatriz”, além de um exame sobre livros didáticos que trazem os temas em estudo e suas abordagens. Na fase de análise a priori, o pesquisador define as variáveis didáticas presentes nas tarefas, bem como indica as possibilidades de resolução das mesmas. A fase da experimentação realiza-se no momento em que ocorre o contato do pesquisador com os alunos que participaram da investigação e prevê uma explicação dos objetivos e das condições em que a pesquisa será realizada, assim como o estabelecimento do contrato didático na consecução das tarefas (Brousseau, 2008). Por fim, na análise a posteriori e validação, coletaram-se os dados obtidos na fase de experimentação, resultados estes oriundos tanto das observações desenvolvidas em cada sessão como das produções desenvolvidas pelos alunos com o software GeoGebra. É o momento em que se comparam análise a priori e a posteriori, validando ou não as hipóteses levantadas.

Assim, entende-se, no âmbito deste trabalho, que o sucesso do emprego de tecnologias digitais em sala de aula está em estabelecer as estratégias apropriadas para o desenvolvimento cognitivo do aluno e o aperfeiçoamento das práticas de ensino por parte do professor. Nesta investigação, a sequência com esta visão está integrada à propositura de problemas de acordo com a Teoria das Situações Didáticas. Para Brousseau (como citado em Almouloud, 2007, p.31),

> Um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo

[2] Os alunos utilizaram os computadores individualmente, discutindo os resultados no âmbito do grupo posteriormente. Os outros 3 computadores foram utilizados, respectivamente, por um dos pesquisadores, pela professora de Matemática das turmas e para o projetor multimídia, utilizado para socialização dos resultados entre os alunos e para os momentos de institucionalização.

> frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos

Nesta teoria, o principal elemento de estudo é a própria situação didática, no contexto da qual se pode identificar certas ordens de interações existentes entre o saber, o professor e o aluno, em dadas situações de ensino, como explicitado na próxima figura.

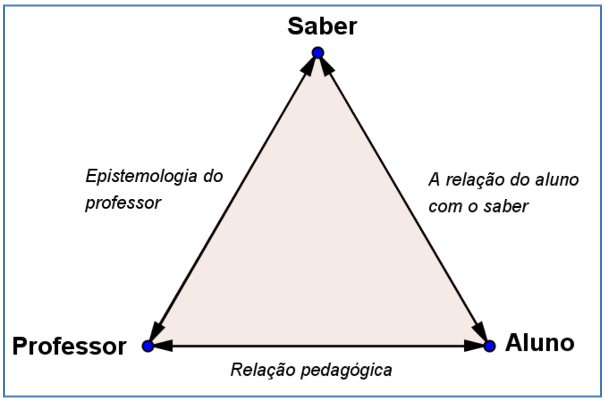


Figura 1. Triângulo didático
Fonte: Almouloud, 2007, p. 32

Tal como nos aportes construtivistas piagetianos, considera-se aqui que o sujeito aprenda pela adaptação a um milieu antagônico, ou seja, um meio que é agente de dificuldades, desequilíbrios e contradições diversas. São as respostas inéditas as atestadoras da aprendizagem de dado estudante. O milieu como adversário não é uma condição indesejável, pelo contrário: deve ser desta forma para que possa existir a superação desde o conhecimento estruturado no sujeito, a partir da percepção e avanço desde o desequilíbrio cognitivo. A responsabilidade pela criação e organização de um milieu com intencionalidade didática deve ser do professor, que criará situações passíveis de acionar as aprendizagens matemáticas pretendidas. Assim, uma situação didática poderia ser definida como

> O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo milieu (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (Brousseau como citado em Almouloud, 2007, p. 33).

Como elemento importante da situação adidática, surge o conceito de devolução: o professor propõe uma tarefa e estimula o aluno a aceitá-la como desafio a resolver. A esse respeito, Brousseau (2008, p. 91) afirma que “a devolução é ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e o mesmo assume as consequências dessa transferência”.
Em seguida, então, são mencionadas as tarefas analisadas e expostas neste artigo.

3. Tarefas e análises

Para a primeira tarefa, o seguinte enunciado estava disponível, com as distâncias anunciadas já em escala:

> Um carro está a 3,5 cm do Parque Raul Seixas, do qual já havia passado, e a 4,5 cm da Praça Jequitibá. Em que lugar o veículo se encontra? Observe

a direção em que o carro vai[3]. Abra o arquivo correspondente, localize o mapa e resolva a atividade no GeoGebra (adaptado de Brasil, 1973, p. 53)

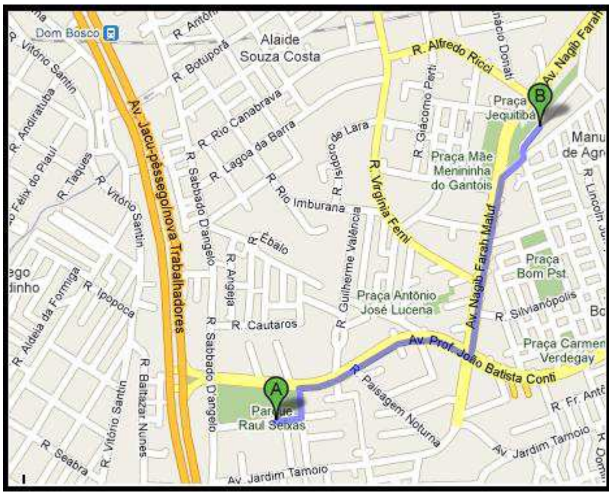


Figura 2. Mapa da tarefa 1
Fonte: Google Maps

Nesta tarefa, os grupos poderiam criar segmentos de 3,5 e 4,5 cm como raios de duas circunferências que teriam, por exemplo, dois pontos comuns, marcados como lugares nos quais o veículo poderia estar. Ocorre, porém, que um dado grupo poderia, por exemplo, entender que o veículo estaria em um ponto qualquer dos segmentos, e não em pontos de intersecção das circunferências, o que não seria uma solução válida. A análise a posteriori desta tarefa pode ser vista no quadro seguinte.

Situação adidática e institucionalização	Tarefa 1
Ação	Os grupos fazem a leitura e a interpretação do enunciado. Analisam a situação proposta. De início, os grupos entenderam que tinham que medir a distância entre as duas praças: tentam descobrir se o ponto está entre elas. Fazem testes com o *GeoGebra*. Observamos nesta fase que um grupo procurava estabelecer uma estratégia que lhes possibilitasse encontrar um terceiro ponto. Houve várias tentativas, como só usar a ferramenta "segmento por dois pontos".
Formulação	Observaram a necessidade de usar segmentos nas medidas do problema como raios de circunferências que tivessem intersecção entre si. Os alunos propõem o uso das ferramentas "segmento com comprimento fixo" e "circunferência".
Validação	Os grupos comunicam suas estratégias uns aos outros. Simulam a situação no programa *GeoGebra* e argumentam que as ferramentas "segmento com comprimento fixo" e "compasso" deveriam ser aplicadas em cada ponto definido do mapa. Neste caso, definiram o tamanho dos dois segmentos, aplicaram a ferramenta "compasso" em cada ponto e obtiveram os dois pontos que são a intersecção das duas circunferências.
Institucionalização	A partir dos argumentos levantados durante as discussões, o pesquisador organiza as conclusões, solicitando que os alunos meçam as distâncias dos pontos encontrados para as referências e observem que a intersecção das circunferências possibilitou encontrar os pontos solicitados.

Quadro 1. Tarefa 1 – análise a posteriori

[3] O pesquisador encarregado da aplicação das tarefas explicou aos participantes que, apesar do enunciado, o carro não se deslocava, necessariamente, por uma estrada determinada.

Analisando as gravações em áudio desta sessão, observamos que alguns alunos entenderam que o carro ia de uma praça a outra. O pesquisador observou que isto não ocorria. Os membros do grupo C queriam usar a ferramenta “segmento por dois pontos”, mas havia o obstáculo de como definir a medida. Neste meio tempo, observamos que os integrantes do grupo A procuravam encontrar a solução fazendo várias tentativas, ou seja, através da experimentação com uso da interface computacional. Depois de certo tempo, o grupo B apresentou uma solução válida para a questão. O aluno B3 dividiu com os demais grupos a solução apresentada, que consistia no uso das ferramentas “segmento com comprimento fixo”, a partir de um ponto A com 3,5 cm e de um ponto B com 4,5 cm. Em seguida, usaram a ferramenta “compasso” sucessivamente nos pontos A e B, marcando pontos de intersecção entre as circunferências encontradas e argumentando que estes seriam os lugares possíveis para a localização do veículo.

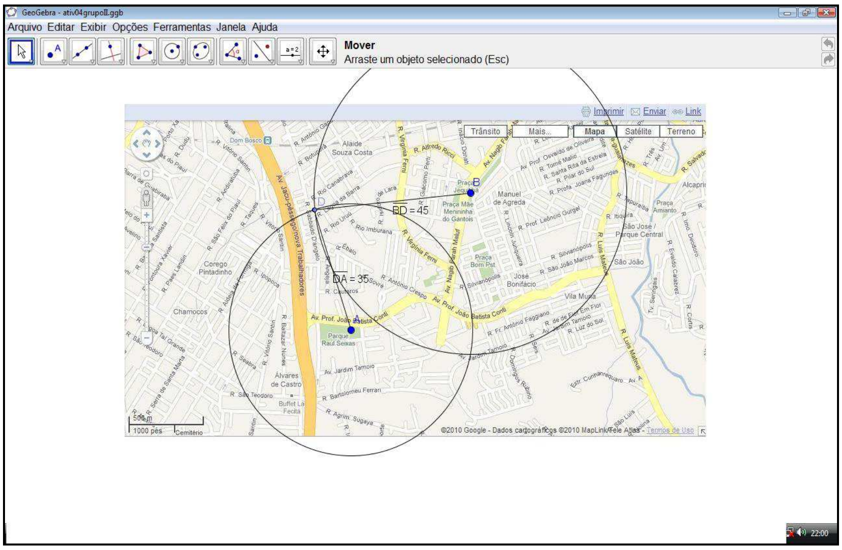


Figura 3. Protocolo da solução da tarefa 1, Grupo B, parte 1

Observamos que os grupos A e C executaram a solução proposta pelo grupo B, depois de argumentarem entre si e de a considerarem válida. É possível verificar que a colocação dos segmentos da maneira como a tarefa foi executada implicava na dificuldade de alinhá-los com exatidão a partir dos pontos dados. Uma melhor exploração da interface, com uso da ferramenta “Círculo dados centro e raio” facilitaria a execução. A tarefa 2 trazia o seguinte enunciado:

> “uma estrada de ferro passa bem próxima a duas cidades. Irá ser construída uma nova estação, próxima a linha férrea, de modo que ela fique a uma mesma distância das duas cidades” (Casado, 2009, p.2). Simule esta situação no GeoGebra. Confira os resultados, mude a posição das cidades ou da estação e verifique se as propriedades geométricas se mantêm.

A intenção era de que os grupos interagissem com o arquivo proposto para a tarefa e observassem que a nova estação seria um ponto da mediatriz, que se encontraria equidistante das duas cidades (pontos). A estratégia esperada seria a de desenhar pontos, representando as cidades, um segmento entre eles, representando a linha férrea, o uso da ferramenta “mediatriz” ou outra que permitisse traçar a mediatriz, além de um ponto de intersecção entre a mediatriz e o segmento (ou um ponto móvel sobre a mediatriz). A partir daí, deveria haver a movimentação dos elementos envolvidos na construção, de modo a constatar a manutenção das propriedades anunciadas.

A análise a posteriori desta tarefa pode ser vista no quadro seguinte.

Situação adidática e institucionalização	Tarefa 2
Ação	Os grupos fazem a leitura e a interpretação do enunciado. Interagem com o arquivo que simula as diferentes posições das duas cidades e a linha férrea. Os alunos movimentam a posição das cidades.
Formulação	A partir da mediatriz, a movimentação dos elementos garantia que as cidades mantinham a mesma distância da estação.
Validação	Os grupos mostravam, entre si, que as diferentes movimentações das duas cidades mantinham distancias iguais.
Institucionalização	A partir dos argumentos levantados durante as discussões, o pesquisador organiza as conclusões e apresenta a mediatriz como uma reta que equidista de dois pontos.

Quadro 2. Tarefa 2 – análise a posteriori

Nesta tarefa, os grupos responderam as questões propostas sem maiores dificuldades. Em seu depoimento, os membros do grupo C indicaram ter compreendido o conceito: “*a segunda tarefa era igual à outra que realizamos e a distância da ferrovia até a outra cidade eram iguais. Se você mexer as cidades sempre terá a mesma medida”.*

A tarefa 3 era uma extensão da anterior, e trazia o seguinte enunciado: “como você faria se, no lugar de duas cidades, tivéssemos três? Tente resolver com o GeoGebra” (Casado, 2009, p.2).

A estratégia dos grupos para encontrar uma solução poderia ser a de aplicar a construção de mediatrizes com a utilização, no GeoGebra, das ferramentas: “compasso” e “reta”, em conjunto, ou “mediatriz”.

Esperava-se que os estudantes, ao manipularem a figura construída na tela, percebessem que o circuncentro não se restringe a área delimitada pela região triangular formada pelas três cidades. Esperava-se, igualmente, que pelo menos um dos pontos não fosse colinear em relação aos outros dois4.

Poderia acontecer que a solução que os grupos adotassem fosse a de ajustar os elementos para conseguir a posição do circuncentro, por tentativa e erro, procurando um ponto que ficasse a igual distância das três cidades, o que não seria uma construção válida.

[4] Apesar de o interesse em discutir o caso em que os três pontos sejam colineares, este tópico não foi abordado no estudo aqui relatado.

A análise a posteriori desta tarefa pode ser vista no quadro seguinte.

Situação adidática e institucionalização	Tarefa 3
Ação	Os grupos fazem a leitura e a interpretação do enunciado. Usam a ferramenta mediatriz em dois pontos. Definem estratégias de como achar o centro. Alguns percebem que o centro se encontra na mediatriz e tentam ajustá-lo.
Formulação	Os grupos conjecturam sobre como procurar a ferramenta mais adequada na barra de menus: ponto médio, mediatriz, mediana.
Validação	Procuram confirmar com o professor e com os demais grupos se a mediatriz e a mediana representam o mesmo conceito ou se são distintos.
Institucionalização	A partir dos argumentos levantados durante as discussões, o pesquisador organiza as conclusões e intervém. É institucionalizado o circuncentro, como o lugar que equidista dos três vértices do triangulo. É observado que nem sempre o circuncentro se encontra no interior do triângulo.

Quadro 3. Tarefa 3 – análise a posteriori

Nesta tarefa, os alunos colocaram na tela os pontos A, B e C. Através das discussões, compreenderam que deveriam achar um ponto que ficasse a igual distância de A e de B. Daí, os alunos anunciaram que a mediatriz possibilitaria ter todos os pontos a igual distância de A e de B. O mesmo procedimento se deu para os pontos B e C. Como as mediatrizes se intersectavam, os estudantes empregaram corretamente a ferramenta “intersecção de dois objetos”, observando, também, que tal intersecção equidistava de A, B e C.

O pesquisador solicitou que modificassem a posição das cidades (pontos A, B e C). Os grupos não imaginavam que a estação estaria, em determinadas condições, fora do triângulo formado pelos ponto A, B e C. Foi neste momento que o pesquisador instituiu o que era um circuncentro, como a intersecção das mediatrizes do triângulo formado por A, B e C.

Após esta tarefa, os grupos escreveram, livremente, o que haviam compreendido. Observou-se, em suas produções, que os alunos compreenderam o conceito de mediatriz, bem como a diferença entre este conceito e o de mediana.

4. Considerações finais

Nas interações ocorridas entre os estudantes, ficou bastante clara a importância do caráter colaborativo proporcionado pelas situações adidáticas em discussão. No âmbito dos grupos, em um primeiro momento, ocorriam as lógicas de ação e de formulação, posteriormente ampliadas para discussões gerais com o intuito de obter a validação. Após a obtenção de certo grau de conhecimento sobre os conteúdos em jogo, ao final das tarefas, ocorria o momento de institucionalização.

Por vezes, as situações adidáticas de validação representaram momentos de orientação, nos quais o pesquisador atuou na tentativa de resgatar elementos essenciais ao processo, ou de recolocar os estudantes em contato com o conteúdo matemático, em relação ao qual apresentavam dificuldades. O ideal seria que tais atuações fossem reduzidas, mas isto pode representar o reflexo da necessidade que os estudantes têm de serem habituados ao trabalho com situações-problema, vistas como possibilidades de engajar os aprendizes em projetos de autoaprendizado nem sempre presentes na escola tradicional.

A inserção de uma estratégia pedagógica mediada pelo software GeoGebra foi muito importante para a consolidação de algumas aprendizagens sobre a circunferência e a mediatriz como lugares geométricos. Os estudantes puderam experimentar suas hipóteses, conjecturar sobre distintas possibilidades de resolução, abandonando aquelas que não representavam caminhos vistos como válidos. Interessante observar que os aprendizes recorriam às tarefas anteriores ou à teoria aprendida nos momentos de institucionalização para dar continuidade na solução de uma tarefa nova na qual se envolviam. Este aspecto é importante para denotar a possibilidade de que os alunos não desenvolvam dependência da tecnologia para a construção de elementos matemáticos, mas que a utilizem como parceira e mediadora, na direção da resolução de um problema.

Claro que diversas dificuldades persistiram. Vários foram os momentos de intervenção orientadora do pesquisador. Em diversas circunstâncias, as ferramentas adequadas eram esquecidas ou não havia um relacionamento entre elas e as construções geométricas em processo. Entretanto, o caráter dinâmico da interface permitia retomar as conjecturas, e o debate entre os participantes, em caráter colaborativo, criava condições para que o trabalho continuasse, ainda que na obtenção de resultados, às vezes, errados. Aqui, então, os pressupostos teóricos da estratégia pedagógica adotada permitir obter retroações a partir do milieu, percebendo o erro, questionando, reconstruindo e, finalmente, chegando a resultados mais satisfatórios.

O uso do GeoGebra permitiu aos grupos de estudantes, por causa da estratégia adotada, desenvolver autonomia para experimentar e validar as suas conjecturas. Possibilitou, também, compreender os conceitos de circunferência e mediatriz como lugares geométricos. Além disso, foi possível para os alunos investigar a equidistância, quando os grupos usavam a ferramenta “distância” para verificar a regularidade da propriedade pela qual um ponto da mediatriz se mantinha equidistante de dois outros.

A respeito das construções geométricas desenvolvidas, o GeoGebra mediou a validação da construção por meio do recurso “arrastar”, aplicado aos diferentes elementos da construção, quando perceberam que a mesma se mantinha inalterada – ou a percepção de erros, quando a construção “desmanchava”.

Algumas dificuldades precisam ser destacadas. Por exemplo, os grupos se prenderam excessivamente ao traçado do desenho: na tarefa que envolvia a colocação de um ponto (circuncentro) equidistante de três outros, os grupos, em sua maioria, responderam que o ponto devia ficar no meio na região triangular, ou seja, prenderam-se muito a concepções intuitivas ligadas ao desenho e não levaram em conta as propriedades da figura geométrica. Para mudar isso, procurou-se orientar os grupos a usar o recurso de “arrastar”, no qual um dos três pontos foi escolhido e a sua movimentação permitia aos estudantes ver o circuncentro fora da região triangular, com a manutenção da característica de ficar equidistante dos três pontos. Esta situação permitiu caracterizar o circuncentro como um lugar geométrico – e seria bastante difícil de ser aplicada sem a mediação do software. Outras dificuldades ocorreram na interpretação dos textos das tarefas e na tentativa de obter resultados simplesmente ajustando as figuras a uma configuração preconcebida e que seria próxima a solução buscada, ignorando propriedades geométricas fundamentais. Estes aspectos carecem de maior atenção por parte dos currículos oficiais, que, em sua implementação, precisam de maiores espaços para tarefas que visem superar estas limitações, para além da eventual intervenção do professor.

Outras sugestões referem-se a pesquisas com outros lugares geométricos, como a bissetriz, o arco-capaz e retas paralelas, bem como investigações que envolvam áreas, sólidos geométricos, estudo de curvas e movimento de pontos, sob o ponto de vista dos lugares geométricos.

Referências

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: UFPR, 2007.

Brasil. Ministério da Educação e Cultura. Fundação Nacional de Material Escolar (1973). *Desenho 2*: plano – espaço. Brasília: MEC.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao Estudo das Situações didáticas*: conceitos e métodos de ensino. São Paulo: Ática.

Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. Acesso em 30 de maio, 2010, de http://perso.wanadoo.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm#ligne.

Camargo, M. A (n.d.). *Arcos e cordas*: conceitos de desenho geométrico. Acesso em 20 de agosto, 2010, de http://educacao.uol.com.br/matematica/ult1705u8.jhtm

Casado, M. J. (2009). *Lugares geométricos*. Acesso em 08 de março, 2010, de http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/Geogebra/index.htm.

Gravina M.A. (1996). Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte*. Acesso em 20 de agosto, 2010, de http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/curcom2/artigo/artigo.htm.

King, J. E. & Schattschneider, D. (1997). *Geometry Turned On*: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research. The Mathematical Association of America, 1997. Acesso em 20 de agosto, 2010, de http://mathforum.org/dynamic/geometry_turned_on.

Machado, S. D.A. (2008). Engenharia Didática. In Machado, S.D.A.(org.). *Educação Matemática*: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC.

Mori, I. & Onaga, D. S. (2009). *Matemática, Ideias e Desafios*. São Paulo: Saraiva - 8º e 9.º anos.

Oliveira, G. P. (2009). Estratégias didáticas em Educação Matemática: as tecnologias de informação e comunicação como mediadoras. *Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Brasília: SBEM. 1 CD-ROM.

Oliveira, G. P. (2007). Avaliação da aprendizagem em cursos online colaborativos: uma abordagem multidimensional. *Tese de Doutorado* (Educação). São Paulo: USP.

Gerson Pastre de Oliveira: Professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, pesquisador do grupo PEA-MAT (PUC/SP), líder do grupo de pesquisa Edutec/UNIP. Seus principais interesses de pesquisa reúnem temas como tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de Matemática e formação de professores de Matemática. Doutor em Educação (USP/SP).

Péricles Bedretchuk Araújo: Professor de Matemática da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, mestre em Ensino de Matemática (mestrado profissional), formado pelo Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 137-145

Ideas para enseñar: ¿Cómo facilitar el proceso de demostración matemática en estudiantes universitarios?

Rodolfo Eliseo D´Andrea, Patricia Sastre Vázquez

Fecha de recepción: 5/06/2011
Fecha de aceptación: 1/03/2013

Resumen	El objetivo de este trabajo es mostrar cómo puede facilitarse al estudiante universitario el abordaje de la demostración matemática. La dificultad del estudiante frente a este proceso tiende a universalizarse y el modelo didáctico utilizado en este trabajo podría aplicarse en diferentes contextos. En este trabajo se presenta un instrumento (Guía Secuenciada), el cual facilita al estudiante la reproducción de demostraciones. Esta guía fue utilizada con estudiantes universitarios obteniéndose resultados alentadores. **Palabras clave**: Demostración matemática, modelo didáctico.
Abstract	The goal of this work is to show how it can be facilitated the university student the boarding of the mathematical demonstration. The student's difficulty in front of this process lays to be universalized and the didactic model used in this work could be applied in different contexts. In this work an instrument is presented (Sequential Guide), which facilitates the student the reproduction of demonstrations. This guide was used with university students being obtained encouraging results. **Keywords**: Mathematical demonstration, didactic model
Resumo	A meta deste trabalho é mostrar como pode ser facilitado o estudante universitário a tábua da demonstração matemática. A dificuldade do estudante se deita para ser universalizada na frente deste processo e o modelo didático usou neste trabalho poderia ser aplicado em contextos diferentes. Neste trabalho é apresentado um instrumento (Guia Seqüente) que facilita o estudante a reprodução de demonstrações. Este guia era usado com estudantes universitários que são obtidos resultados encorajadores. **Palavras-chave**: Demonstração matemática, o modelo educacional

1. Introducción

En general, cuando el estudiante universitario de Argentina aborda o intenta la explicación de la demostración de un teorema o proposición verdadera, lo hace sin comprender. Y cuando comprende, cabe preguntarse: ¿Qué es lo que comprende?. Mientras el docente realiza las explicaciones, los estudiantes entienden el proceso que se lleva a cabo. Pero a la hora de abordarlas autónomamente o intentar reproducirlas o realizar algunas similares, les resulta complejo tal abordaje. De modo que el proceso de apropiación se limita a un conocimiento estático.

El raciocinio se manifiesta a través de la deducción, manejando la Ciencia Matemática elementos como: conceptos primitivos, definiciones, y proposiciones.

Las proposiciones son de tres tipos:

a) Los axiomas que son proposiciones verdaderas, que se aceptan intuitivamente, y que no necesitan ser demostradas.

b) Las proposiciones verdaderas, que a diferencia de cualquier proposición común del lenguaje cotidiano requieren inexorablemente para tener validez, ser demostradas. Dentro de esta categoría podrían englobarse: Los Lemas, que son proposiciones que forman parte de un teorema más largo. Y Los Corolarios que se trata de proposiciones que siguen inmediatamente a un teorema, o sea que resultan, su consecuencia.

c) Los Teoremas, que tienen el mismo tratamiento que las proposiciones verdaderas citadas en b), pero son trascendentes dentro de la comunidad matemática para así ser consideradas.

Un teorema o una proposición verdadera no axiomática consta de Hipótesis, Tesis y Demostración. La Hipótesis es una suposición que permite inferir una consecuencia. Debe tenerse presente que la hipótesis incluye también las denominadas “hipótesis implícitas”. Estas constituyen, todos los conocimientos previos que se tienen al momento de establecer la hipótesis del teorema a probar.

La Tesis es una proposición mantenida con razonamientos, ¿Cuáles? Los que determinan la estructura de la demostración. ¿Y quiénes determinan esa estructura? Los ‘eslabones’ que constituyen la cadena de la denominada demostración o prueba del teorema o proposición a demostrar. Son los pasos necesarios para resolver (o llegar) a probar la verdad que postula la tesis.

La Demostración matemática, es la argumentación utilizada para mostrar la veracidad de una proposición matemática cualquiera. Una demostración en general comienza con una o más declaraciones denominadas premisas. Y la prueba resulta de utilizar las reglas de la lógica, de modo que si las premisas son verdaderas, entonces una determinada conclusión debe ser también cierta. Es interesante destacar, lo que señala Montoro (2007) al referirse a la demostración: “*Desde la tradición platónico-aristotélica y hasta nuestros días, la noción filosófica de demostración se relaciona con la derivación de un enunciado a partir de otros enunciados, llamados premisas, mediante la aplicación de determinadas leyes lógicas; en esta idea de demostración subyace siempre una búsqueda razonable de la verdad.*”

2. El estudiante y la demostración

Desde lo curricular, en el ciclo medio, se produjo la eliminación de la exposición de la prueba de teoremas. Esto incluye la exposición de la teoría en general, como manifiestan claramente Legorburu y Miguiarra (2004): “*En la década del 90, se inició una tendencia a eliminar la enseñanza del método axiomático en la escuela, hasta llegar a suprimir la presentación de los teoremas en la forma convencional (con hipótesis, tesis y demostración), situación que continúa hasta la actualidad* “.

Riviére Gómez (2001) en referencia con la demostración en el nivel medio manifiesta que existen opiniones comunes, que no guardan conexidad y consistencia, presentando contradicciones, siendo algunas de ellas:

a) En el ciclo medio no se realizan demostraciones. No se hace hincapié en los desarrollos teóricos. A veces esta idea toma la forma de "*En la enseñanza secundaria las matemáticas se muestran, en la universidad se demuestran*".
b) Es imposible hacer demostraciones. No las comprenden. Son incapaces de entender y menos reproducir una demostración. Por ende, las elimino.
c) Debe elegirse entre realizar demostraciones y aprender algoritmos.
d) Enseñar matemáticas es enseñar a demostrar.

Si se piensa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de Matemática, debe respetarse la esencia de su método y por ende es esencial favorecer y estimular la etapa de validación matemática. Es importante Integrarla a la práctica cotidiana, sin que se constituya en un compartimiento estanco, lo que es muy común y coloca consecuentemente al estudiante frente a un clásico binomio antagónico: teoría – práctica.

Si bien en estudiantes de Ingeniería no interesa desarrollar la habilidad "demostrar", es importante que éstos puedan comprender y reproducir, no textualmente pero si de forma aproximada, las pruebas de las proposiciones y teoremas que el curso de Matemática requiera. Estimular el pensamiento lógico–abstracto no se logra solamente a través de la fase procedimental de esta disciplina. Dreyfus (2000) manifiesta que las demostraciones – entendidas en sentido amplio – deberían estar presentes de forma subyacente en todos los componentes del currículo de Matemáticas. Esto no significa reproducir demostraciones de memoria, tomando el formalismo bourbakiano, sino tener en cuenta como expresa Arrieta (1994) que *"la aceptación de un teorema por la comunidad matemática se realiza mediante un proceso social en que interesa más la comprensión y significado del mismo que el de la prueba rigurosa*."

Esto lleva a pensar en la importancia de fortalecer en el estudiante universitario, la comprensión de lo postulado por un teorema y la generación de una "*working proof*" (Resnick, 1992). Este autor afirma que la matemática contemporánea está repleta de "*working proof*", esto es, pruebas informales, no axiomatizadas.

El paradigma del proceso de enseñanza y aprendizaje respecto a la exposición de los cursos de Matemática universitaria, ha cambiado en ciertos aspectos. El cambio radicó primeramente en la desaparición gradual de la clásica exposición bourbakiana de desarrollos teóricos dirigidos a los estudiantes, que imperó hasta la década del 90. Si bien no ha desaparecido por completo, de a poco va difuminándose en los diferentes lugares donde todavía está presente. El cambio también se hizo presente en la implementación de bibliografías más didácticas, visualmente ricas y con explicaciones que recurren a situaciones reales. Pero el proceso evaluativo sigue vigente, en su casi generalidad, de la misma manera que en los últimos treinta años. Con excepción de algunas propuestas innovadoras y aisladas que se producen en algunas casas de estudios, la evaluación de los cursos de Matemática dirigidos a estudiantes universitarios consiste en una serie de parciales con actividades procedimentales, con alguna eventual propuesta teórica. El estudiante luego de estos parciales, en el examen final, vuelve a pasar por una instancia práctica. Y luego para la acreditación de la asignatura, pasa a una instancia teórica, donde deberá reproducir ciertos teoremas expuestos por el docente durante el desarrollo del curso. Y allí aparece el principal inconveniente.

Por un lado están los estudiantes que pudieron acceder a la práctica, y a la instancia teórica no pueden acreditarla, por falta de comprensión de los procesos deductivos. Por otro, están aquellos estudiantes que acreditan esta instancia pero que lo hacen desde una posición memorística y ritual. El estudiante a la hora de reproducir una prueba expuesta por el docente en clase, lo hace precisamente "*como un ritual, un discurso que debe repetir o cuyo estilo debe imitar si se le pide probar un enunciado, más que como una herramienta explicativa basada en un sistema común de validación construido y aceptado por él y su grupo" (*Balacheff, 1982)". Finalmente, y son los menos, están aquellos alumnos que acreditan la asignatura con la comprensión, producto de un aprendizaje constructivo, tanto de las actividades procedimentales como teóricas.

Dependiendo a qué carrera universitaria va dirigido el curso de Matemática se hace hincapié en diferentes contenidos. Pero, tanto en el proceso de enseñanza como en el de aprendizaje no debe dejarse de lado la epistemología, esta es invariante. De lo contrario ya no se está enseñando Matemática, sino un "recetario" de fórmulas y problemas. En virtud de esto, es atinado pensar que según a qué carrera vaya dirigido el curso de Matemática, ciertas demostraciones pueden hacerse más ligeras o bien, directamente pueden obviarse, pero no se debería considerar la posibilidad de la supresión definitiva de estas.

3. Modelo didáctico que facilita la realización de las demostraciones

Se sabe que para demostrar un teorema "no hay recetas", cada uno que se presenta, es una situación nueva. Pero existen ciertos lineamientos o pautas a seguir que constituyen los métodos a aplicar en diferentes situaciones. Asimismo, más allá de esas metodologías y reglas, a cada momento se presentan situaciones diferentes que requieren de ingenio y destreza. Con ingredientes que son comunes y que se requieren siempre: raciocinio y capacidad deductiva, además de una importante capacidad de abstracción.

D´Andrea (2010), propone un modelo didáctico para la presentación de un teorema a demostrar en el ámbito áulico. Este modelo consiste de una serie de estrategias didácticas mostradas como una secuencia de tareas. El modelo, se basa esencialmente en las tres facetas que hacen al Lenguaje Matemático y en permitirle al estudiante, el pasaporte al conocimiento de dicho lenguaje. Este lenguaje se manifiesta como: 1) coloquial, 2) visual y 3) simbólico. El primero tiene que ver con la conexión del lenguaje que le es propio a esta Ciencia, y el lenguaje natural de la persona. A través de este, el sujeto de aprendizaje traduce a sus propios códigos lo comprendido desde el lenguaje simbólico. Esta fase es esencial, y en la que el docente debe hacer mucho hincapié. Su significación y comprensión depende de lo que el docente transmita desde el lenguaje cotidiano y lo que el estudiante pueda captar de esto.

La visualización de la estructura conceptual a apropiarse o teorema a probar, es una fase que puede preceder o anteceder a la anterior. Ya que la cultura visual de la generación de estudiantes posmodernos es el icono de esta generación. Por ende, poder establecer comunicación en el aprendizaje a través de esta fase constituye un factor tan o más importante que el coloquial. En virtud que lo visual, actualmente supera a lo coloquial.

El teorema o proposición verdadera a demostrar no es la excepción. Muchas veces, resulta que lo más importante previamente a la tarea de demostrar, es la comprensión del enunciado. Tiene que estar claro que se quiere probar y ocurre en la mayoría de las oportunidades, que el enunciado termina quedando en segundo plano. Como consecuencia de la comprensión de la proposición, desde el lenguaje natural y propio del estudiante y la visualización, el acceso al lenguaje que le es propio a la Ciencia Matemática se simplifica.

Así, el modelo, complementando al conocimiento del lenguaje matemático y siguiendo el lineamiento de las facetas presentes en tal lenguaje, requiere una serie de secuencias a seguir frente a la presentación de cada contenido conceptual o teorema a demostrar. Así, la secuencia de tareas a seguir para la presentación de un teorema o proposición verdadera a demostrar es la siguiente: 1) Presentación del teorema o proposición verdadera a demostrar; 2) Interpretación coloquial; 3) Verificación; 4) Visualización; 5) Simbolización; 6) Detección de los elementos epistemológicos que hacen a la estructura lógica de la proposición: hipótesis (se incluyen las hipótesis implícitas) y tesis 7) Contenidos conceptuales implícitos de la proposición; 8) Pregunta disparadora de abstracción; 9) Guía Secuenciada de la Demostración y 10) Análisis de artificios matemáticos.

4. Guía Secuenciada

La Guía Secuenciada consiste de una serie de instrucciones que contemplan el paso a paso de la prueba en cuestión para propiciar la construcción de esos razonamientos de forma autónoma. La Guía permitirá observar y también reproducir aproximadamente la demostración una vez realizada y mostrada por el docente, desde una perspectiva global hacia otras más focalizadas. Posibilita la construcción de la prueba generando aprendizajes comprensivos y significativos y no un "*conocimiento inerte*" (Perkins, 1995), sin interacción.

Se recomienda que el docente genere, para la asignatura que dicta, una Guía Secuenciada de la totalidad de los teoremas o proposiciones a demostrar durante el desarrollo del curso. La redacción de la Guía debe tener la mayor claridad posible y ser equilibrada en su extensión no siendo ni demasiado larga, ni demasiado corta de modo de evitar generar ambigüedades en el estudiante a la hora de su lectura. Esta Guía es una interesante posibilidad para sanear el inconveniente de la memorización por parte de los estudiantes a la hora del requerimiento de demostraciones en exámenes finales.

La idea de la *Guía Secuenciada* está inspirada en la siguiente cita textual de Poincaré (1908): *"Una demostración matemática no es más que una simple yuxtaposición de silogismos, de silogismos colocados en cierto orden; y el orden en que están colocados estos elementos es más importante que los elementos mismos. Si tengo el sentimiento, la intuición, por decirlo así, de este orden, que me permite percibir de una ojeada la totalidad del razonamiento, no debo sentir temor de olvidar ninguno de los elementos, cada uno de los cuales vendrá a colocarse por sí mismo en el cuadro que le está asignado, y sin que me vea obligado a hacer ningún esfuerzo de memoria.".*

La demostración matemática exige un orden, y ese orden tiene que guiar el proceso del razonamiento. Cuando el proceso no está guiado por lo que Poincaré llama el “sentimiento” o “intuición” de su orden, la sucesión de silogismos conduce a conclusiones verdaderas o identidades, pero que no son las que se quieren demostrar.

5. Ejemplos de la Guía Secuenciada

5.1. Cociente entre números complejos en forma polar

¿Cómo puede probarse que el cociente entre dos números complejos, expresado en forma polar, es otro número complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y su argumento es la diferencia de los argumentos?

<u>*Guía Secuenciada*</u>*:* Considerar que el cociente entre dos números complejos z y z’ arroja un cierto resultado (darle un nombre) y despejar luego z o z’ en función de los otros dos. Expresar ambos miembros de la igualdad planteada, en forma polar y luego de tener en cuenta la definición del producto de números complejos en forma polar. Considerar la definición de igualdad entre números complejos, correspondiente al formato polar. Aplicada la definición, deben despejarse los valores del módulo y el argumento del número complejo resultado del cociente al cual se le otorgó un nombre al comienzo de la prueba. Tener presente que tal definición debe considerarse particularmente para $k = 0$.

<u>*Resolución*</u>*:* Simbólicamente si:

$$z = \rho_\varphi \text{ y } z' = \rho'_{\varphi'} \text{ entonces } \frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}_{\varphi-\varphi'}$$

Se sabe que el cociente de dos números complejos es otro número complejo. Es atinado, darle un nombre a este nuevo complejo, e inclusive nombrar su módulo y su argumento. El objetivo es encontrar el módulo y el argumento de este nuevo número complejo. Así escribimos: $\frac{z}{z'} = w$ siendo $w = R_\alpha$.

Teniendo en cuenta: la definición, en forma polar, de igualdad entre números complejos y del producto polar entre números complejos; y despejando las incógnitas buscadas. Resulta entonces que el módulo y el argumento del número complejo cociente, se obtiene mediante la siguiente cadena argumentativa:

$$\frac{z}{z'} = w \Leftrightarrow z = w.z' \Leftrightarrow \rho_\varphi = R_\alpha.\rho'_{\varphi'} \Leftrightarrow \rho_\varphi = R.\rho'_{\alpha+\varphi'} \Leftrightarrow \rho = R.\rho' \wedge \varphi + 2k\pi\alpha =$$
$$= \alpha + \varphi' \Leftrightarrow R = \frac{\rho}{\rho'} \wedge \varphi - \varphi' + 2k\pi\alpha = \alpha$$

Considerando $k = 0$, resulta: $\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}_{\varphi-\varphi'}$ $_{Q.E.D.}$

5. 2. Determinación de la monotonía de una función

Se considera a continuación, una de las tres proposiciones que constituye la totalidad de este teorema. Este contempla, según sea el signo de la primer derivada, que la función sea creciente, decreciente o constante.

Si $f{:}\,[a,b] \Rightarrow R$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces, cualesquiera sea $x \in (a,b){:}\,f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en (a,b). ¿Cómo puede demostrarse que la función de la hipótesis es estrictamente creciente si la función derivada primera es positiva?

<u>Guía Secuenciada</u>: Considerar la función de la hipótesis, y un subintervalo de la misma, que puede llamárselo, por ejemplo: $[x,y] \subset [a,b]$. Luego, aplicar a la función f el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial o Lagrange en el subintervalo, previa verificación del cumplimiento de las hipótesis. Posteriormente analizar el signo de la expresión obtenida y teniendo en cuenta la hipótesis sobre el signo de $f'(x)$ y la definición de función estrictamente creciente, se podrá arribar a la tesis.

<u>Resolución</u>: Considerando la definición de función estrictamente creciente en un intervalo: f es estrictamente creciente en (a,b), si dados $x,y \in (a,b)/x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$. Es importante visualizar la definición precedente. Se quiere probar que: $f(x) - f(y) < 0$, esta diferencia puede ser vista como el numerador del cociente incremental de la función de la hipótesis en el intervalo $[x,y]$.Este cociente involucra implícitamente el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial o Lagrange.

Si se trata de aplicar el teorema citado a la función de la hipótesis en el intervalo $[x,y] \subset [a,b]$,previo chequeo de las hipótesis, se obtiene la siguiente cadena argumentativa:

f continua en $[x,y] \subset [a,b]$, y derivable en $(x,y) \subset (a,b)$ luego, por Lagrange, existe

$$c \in (x,y)/f'(c).(y-x) = f(y) - f(x) \overset{1}{\Rightarrow}$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} f(y) - f(x) > 0 \Longrightarrow f(y) > f(x) \overset{2}{\Rightarrow} f \text{ } es \text{ } creciente \text{ } en \text{ } (x,y) \subset (a,b)_{Q.E.D.}$$

1. El primer miembro de la igualdad, es positivo. Ya que se trata del producto de dos cantidades positivas. Una lo es por hipótesis y la otra por ser la amplitud de un intervalo. Por ende, el segundo miembro de la igualdad, es positivo.

2. por definición de función estrictamente creciente.

5. 3. Álgebra de los Límites: Límite de la suma.

$$Sean \text{ } f,g \text{ } tales \text{ } que: \lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \text{ } y \lim_{x \to x_0} g(x) = L_2 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$$

¿Cómo puede demostrarse que el límite de la suma de las funciones es igual a la suma de los límites?

<u>Guía Secuenciada</u>: Partiendo de la hipótesis, se debe aplicar a cada una de las funciones, la definición de límite, sujetando la elección de cada valor de ε con lo que se quiere lograr en la tesis. En virtud de lo último descrito, plantear la definición de límite para la tesis, y "trabajar" la desigualdad que involucra ε. Será necesario aplicar la desigualdad triangular. La expresión de la tesis desglosada orienta sobre como deberán ser elegidos los valores de ε de la hipótesis.

Por ejemplo, si se elige un valor dependiente de ε de la hipótesis de la forma: $\frac{\varepsilon}{2}$, ¿Cómo deberá ser el otro valor? Y si se elige un valor dependiente de ε de la hipótesis de la forma: $\frac{2\varepsilon}{3}$, entonces: ¿Cómo deberá ser el otro valor?. Tener en cuenta que la elección del radio del entorno del punto x_0, dependerá de los radios de los entornos del punto de las funciones de las hipótesis. Pensar entonces cómo deberá ser el radio, porque con la elección del mismo se finaliza la demostración.

Resolución: Por hipótesis se sabe que:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon' > 0: \exists\delta_1 > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon' > 0: \exists\delta_2 > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \varepsilon$$

¿Qué es lo que se quiere probar?

$$\forall\varepsilon > 0: \exists\delta_\varepsilon > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$$

Se considera a continuación la expresión que contiene la desigualdad última en detalle.

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| = |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| =$$
$$= |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon$$

Ahora, ¿Cómo se logra la última desigualdad?

Eligiendo para las hipótesis valores dependientes de ε que sean tales que logren establecer la última desigualdad. Entonces para ello es conveniente volver a escribir las hipótesis nuevamente así:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0: \exists\delta_1 > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \, (1)$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0: \exists\delta_2 > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \, (2)$$

Teniendo en cuenta (1) y (2) en las dos últimas desigualdades, se tiene:

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| = |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| = |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, si\ \delta_\varepsilon \leq mín\{\delta_1, \delta_2\}$$

Nota: Los valores de ε, se construyen de forma tal que generen en la suma de la desigualdad que debe probarse, el valor total de ε. Por ejemplo, si se elige uno de los valores de $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$, el otro debe ser tal que su suma arroje como resultado ε. Así, ese valor buscado debe ser: $\frac{2\varepsilon}{3}$.

6. Conclusiones

El estudiante universitario requiere de dos facetas que se hallan siempre presentes en un curso de Matemática. Por un lado, la heurística presente en el desarrollo de las actividades procedimentales, direccionado a la habilidad para resolver problemas. Por otro, necesita disciplinar el raciocinio a través de la argumentación presente en el proceso de validación de teoremas, lo que disciplina mentalmente para la toma de decisiones y el sostén de las mismas en el futuro profesional. Así, es necesario educar a los estudiantes en la justificación y argumentación de lo que aseguran como verdadero o falso basándose en resultados y propiedades que ya conocen. Inclusive en la resolución de actividades procedimentales. Esta tarea no es sencilla. Como afirma Dreyfus (2000): “no deberíamos esperar que nuestros estudiantes sean capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático.”

El modelo propuesto por D´Andrea (2010) es una interesante alternativa para superar la inercia del estudiante universitario frente a la prueba matemática, pero su aplicación requiere tener ciertos recaudos. Es ideal su utilización desde los cursos iniciales. Es factible que se aplique la Guía Secuenciada, en diferentes regiones, ya que el problema del abordaje de la demostración en el estudiante en general, es universal.

Bibliografía

Arrieta, J. (1994.). Las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria. ¿Cambio curricular para que todo siga igual?. Signos*. Revista de Teoría y Práctica de la Educación*, núm. 13, 70-81.

Balacheff, N. (2000): "Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas". Una empresa docente. Universidad de Los Andes. (Bogotá).

D´Andrea, R.E. (2010). Análisis del razonamiento deductivo de estudiantes de Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías en el proceso de validación de proposiciones matemáticas. Tesis de Maestría. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue. Neuquén. Argentina.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N.,Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Barcelona. Graó, S.R.L. pp.125–133.

Legorburu, N y Miguiarra, M. (2004). Volver a las demostraciones. Revista Enseñar. 3er Ciclo. Número 2. Septiembre 2004. Editorial Clarín.

Montoro, V. (2007). Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración. REIEC. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias. Año 2 – Número 1– pp. 101 – 121. ISSN 1850 – 6666

Perkins, D. (1995). La escuela inteligente. Gedisa. Barcelona.

Poincaré, H. (1981).La Ciencia y el Método. CONACyT. México.

Resnick, M.D. (1992). Proof as a source of truth, en Detlefsen, M.(ed.). Proof and knowledge in mathematics, pp.6-32. Londres: Routledge.

Riviére Gómez, V. (2001). Convencer y formalizar. Papel y límites de la demostración en secundaria. X JAEM. Ponencia P24. pp.213-221.

Rodolfo Eliseo D´Andrea. Magíster en Educación Matemática. Profesor Adjunto e investigador en Facultad de Química e Ingeniería de Universidad Católica Argentina y Facultad de Agronomía de Universidad Nacional de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Autor de varios libros y disertante en numerosos congresos sobre Educación Matemática. **rodolfoedandrea@yahoo.com.ar**

Patricia Sastre Vázquez. Doctora en Matemática Aplicada, España. Profesora Titular e investigadora en Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Dirige proyectos de investigación en Educación Matemática. Autora de varios capítulos de libros y numerosos artículos en revistas científicas. Email: **pasava2001@yahoo.com.ar**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 147-161
Coordinada por Fredy González

Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica: Balanço da produção acadêmica dos congressos brasileiros de Etnomatemática[1]

Maria Cecilia Fantinato

Fecha de recepción: 15/12/2012
Fecha de aceptación: 27/02/2013

Resumo

Este artigo tem por objetivo realizar um balanço da produção acadêmica em Etnomatemática dos últimos doze anos, a partir da análise dos trabalhos dos quatro congressos brasileiros da área já realizados. O texto contextualiza os quatro congressos brasileiros, em termos de suas características principais, organização e marcos para a área. É realizada uma análise comparativa da produção em Etnomatemática ao longo dos quatro congressos, por meio de uma interpretação qualitativa dos gráficos e tabelas construídos com o tratamento dos dados. O artigo é finalizado levantando algumas questões quanto às perspectivas para a pesquisa em Etnomatemática no Brasil.

Palavras-chave: Etnomatemática; congressos brasileiros; produção acadêmica.

Abstract

The purpose of this article is to investigate the academic production on Ethnomathematics of the last twelve years, focusing on the works presented at the four Brazilian congresses of this area. The paper contextualizes the four Brazilian congresses that already happened, in terms of their main characteristics, organization and landmarks to the area. The article provides a comparative analysis of Ethnomathematics academic production over the four congresses, through a qualitative interpretation of graphs and tables constructed with data handling. It ends by raising some issues about the outlooks for Brazilian research in Ethnomathematics.

Keywords: Ethnomathematics; Brazilian congresses; academic production

Resumen

Este artículo tiene como objetivo lograr un panorama de la producíon académica en Etnomatemática de los últimos doce años, a partir del análisis de la obra de los congresos brasileños ya realizados en el campo. El texto contextualiza los cuatro congresos brasileños, en términos de sus características principales, organización y puntos de referencia en la área. El artículo proporciona un análisis comparativo de la producción en Etnomatemática en los cuatro congresos, a través de una interpretación cualitativa de gráficas y tablas construidas con el manejo de datos y concluye planteando algunas preguntas acerca de las perspectivas de la investigación en Etnomatemática en Brasil.

Palabras clave: Etnomatemática; congresos brasileños; produción académica.

1. Introdução

A Etnomatemática é uma área de estudos e pesquisas relativamente nova, ainda em construção. A partir dos anos 70 começaram a surgir, em diferentes partes do mundo, estudos relacionados às formas de matematizar de diferentes grupos socioculturais (Gerdes, 2007), muito embora ainda não tivesse sido cunhado o termo *etnomatemática*, o que foi feito por Ubiratan D'Ambrosio em 1984, durante o ICME5, em Adelaide, Austrália. Desde então, esta tendência da Educação Matemática vem se desenvolvendo no mundo inteiro, gerando resultados em estudos, pesquisas e projetos educativos. Particularmente, a participação do Brasil vem se destacando no cenário da produção internacional em Etnomatemática (D´Ambrosio, 2008).

Este texto vem contribuir para relatar uma parte desta história, realizando um balanço da produção em Etnomatemática dos últimos doze anos, a partir da análise dos trabalhos dos quatro congressos brasileiros de Etnomatemática. Propõe-se a ser um relato reflexivo, da perspectiva da autora – membro dos comitês de organização do primeiro e do quarto congresso, coordenadora geral do terceiro congresso, e que também participou ativamente do segundo congresso. Cabe destacar que esta reflexão, apesar de ser um texto escrito por uma pessoa, também teve a colaboração de muitos outros pesquisadores da área[1].

O presente estudo justifica-se, em primeiro lugar, porque ainda são escassos os trabalhos que abordam a produção acadêmica na área da Etnomatemática. Pode-se citar, entre outros, Conrado (2005), que realizou uma pesquisa de mestrado sobre as teses e dissertações produzidas de 1985 até 2003, e mais recentemente, Costa (2012), que fez um estudo sobre os artigos na área publicados em periódicos nacionais. A relevância do presente trabalho decorre, também, do fato de que os citados congressos nacionais são os principais, tratando-se da pesquisa na área em questão, em contexto brasileiro. Por conseguinte, a produção resultante dos mesmos pode servir como um retrato das questões debatidas e aprofundadas pelos estudiosos da Etnomatemática no Brasil, assim como permite evidenciar como vêm se constituindo os modos de pesquisa e as questões pedagógicas dos educadores que trabalham nesta perspectiva. Para atender ao objetivo principal de analisar a organização e realização de quatro momentos de produção acadêmica, de modo a compreender os caminhos da Etnomatemática no Brasil, este artigo está dividido em quatro partes. A primeira parte descreve as características principais dos congressos, em termos de organização e marcos para a área. A segunda descreve os procedimentos metodológicos adotados para a leitura dos documentos dos congressos. Na terceira parte, apresentamos uma análise comparativa da produção em Etnomatemática ao longo dos quatro congressos. Ao fim do texto, são tecidas algumas considerações quanto às perspectivas para a pesquisa em Etnomatemática no Brasil.

2. Os Congressos Brasileiros de Etnomatemática

Nesta parte do texto procuraremos caracterizar os quatro congressos brasileiros de Etnomatemática, cujos trabalhos constituíram nosso objeto de análise,

[1] Agradecimentos especiais à professora Maria do Carmo Domite, por todas as interações ao longo desses treze anos de orientação e parceria amiga. Agradecimento também aos integrantes do Grupo de Etnomatemática da UFF, pelo auxílio na categorização dos resumos dos congressos, em particular, Andréa Thees, Claudio Costa, Eliane Lopes de Andrade, Fabio Lennon dos Santos, Márcio de Albuquerque Vianna e Margarida Pacheco. Por ter sido um trabalho colaborativo, este texto utilizará a primeira pessoa do plural em sua redação.

respectivamente o Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática (CBEm1), o II Congresso Brasileiro de Etnomatemática (CBEm2), o Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática (CBEm3) e o 4º Congresso Brasileiro de Etnomatemática (CBEm4).

2.1. O Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm1

Coordenado pelos professores Maria do Carmo Santos Domite e Ubiratan D´Ambrosio, aconteceu na cidade de São Paulo (SP) de 01 a 04 de novembro de 2000 o Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática (CBEm1), nas dependências da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. A organização deste evento pioneiro esteve aos cuidados do Grupo de Estudos e Pesquisa em Etnomatemática da USP (GEPem).

O CBEm1 não apresentou uma temática geral para o evento, mas indicou que os trabalhos enviados deveriam estabelecer relações da Etnomatemática com os seguintes temas: educação rural, educação indígena, educação caiçara, educação urbana, práticas artesanais, educação de jovens e adultos, educação ambiental, educação matemática crítica, grupos de profissionais e aspectos teóricos. As regras de envio dos textos não exigiam, entretanto, que os autores especificassem com qual dessas linhas o texto estaria relacionado. A pluralidade temática desta lista procurava atender às diferentes tendências dos estudos e pesquisas na área, com o objetivo de atrair o maior número possível de pesquisadores e professores que estivessem desenvolvendo trabalhos nesta área. Foram apresentados 48 trabalhos abrangendo essas diferentes temáticas.

O CBEm1 representou uma tentativa “de olhar a etnomatemática nas suas múltiplas faces, enquanto produção social do conhecimento e agenciadora da inclusão” (Domite, 2000, p.1). A diversidade das palestras reflete essa preocupação. Algumas privilegiavam aspectos teóricos da Etnomatemática (Mesa redonda 1: Etnomatemática: construção teórica) ou estimular o debate sobre conceitos centrais à reflexão teórico-epistemológica da área (Conferências intituladas: “Igualdade/Diferença”; “Etnomatemática: entre o discurso acadêmico e a produção social do conhecimento*”; “*Saberes escolares: o singular, o particular, o universal”).

A organização do congresso procurou incluir um amplo leque de perspectivas sobre questões da área, convidando pesquisadores brasileiros e estrangeiros. Um dos destaques foi a conferência de Bill Barton, da Universidade de Auckland, intitulada *“*Matemática e linguagem: divergência ou convergência?*”,* que foi proferida com tradução simultânea.

Um dos marcos do CBEm1 foi a busca de delimitação da Etnomatemática pelo diálogo com as principais áreas que lhe servem de fundamentação teórica, como a Antropologia, a História, a Filosofia. Esta característica é visível na Conferência de Abertura, intitulada “A noção de cultura”, onde o assunto foi objeto de discussão na perspectiva de um matemático (Eduardo Sebastiani Ferreira) uma psicóloga (Marta Kohl de Oliveira), uma antropóloga (Neusa Gusmão) e um filósofo (Antonio Joaquim Severino). O CBEm1 apresentou igualmente uma postura de abertura com relação a outras linhas de pesquisa da Educação Matemática, próximas, mas não equivalentes à Etnomatemática, como a Modelagem. Neste sentido, a programação do evento indicou duas conferências abordando as interfaces dessas duas linhas:

"Etnomatemática e modelagem" e "Modelagem e Etnomatemática: pontos incomuns".

De um modo geral, o CBEm1 apresentou uma perspectiva de Etnomatemática muito associada ao estudo dos grupos socioculturais, procurando dar visibilidade às matemáticas praticadas por esses diferentes grupos (Duarte, 2009). Um exemplo claro desta característica foi o critério de organização dos fóruns de discussão, definido de acordo com o contexto sociocultural e histórico-geográfico de realização das pesquisas, se indígena, rural ou urbano.

Embora não central, as relações da Etnomatemática com o campo educacional também estiveram presentes na organização. Ubiratan D'Ambrosio encerrou o congresso com uma conferência intitulada "Etnomatemática: uma proposta pedagógica para uma civilização em mudança".

Por fim, cabe ressaltar que, por ser o primeiro congresso brasileiro em Etnomatemática, o CBEm1 estimulou a aproximação dos diferentes grupos de pesquisa brasileiros já existentes e a formação de novos, com certeza uma importante contribuição para a área.

2.2. O II Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm2

O II Congresso Brasileiro de Etnomatemática (CBEm2) aconteceu na cidade de Natal, no campus da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, de 4 a 7 de abril de 2004. Foi coordenado por dois professores do Departamento de Matemática da UFRG, Bernadette Morey e John Andrew Fossa. Representou, sem dúvida, "mais um passo na consolidação da Etnomatemática como área de conhecimento" (Morey, 2004a, p.7), uma tentativa de dar legitimidade à Etnomatemática como um campo de saber.

A estrutura do CBEm2 foi um pouco diferente do anterior, com menor número de palestras, priorizando reunir todos os participantes do evento em plenárias. Quatro das cinco mesas redondas foram organizadas em torno de temas que destacaram as dimensões da Etnomatemática como identificadas por D'Ambrosio (2001): dimensão política ("Etnomatemática e questões políticas"), epistemológica ("Etnomatemática e Epistemologia"), metodológica ("Etnomatemática e o trabalho de campo") e educacional ("Etnomatemática e a formação de professores"). O CBEm2 organizou ainda uma mesa redonda discutindo a Etnomatemática indígena, privilegiando este grupo sociocultural, que tem sido objeto de muitas pesquisas na área.

A conferência de abertura foi proferida por Arthur Powell, da Rutgers University, e teve o título "A crise na educação matemática nos EUA e a contribuição da etnomatemática na busca de uma solução". A presença deste pesquisador, americano negro e crítico do eurocentrismo da educação matemática (Powell; Frankestein, 1997), pode ter contribuído para que fosse indicada na plenária de encerramento deste evento a necessidade de se ampliar os estudos sobre Etnomatemática e africanidade.

Em número de trabalhos apresentados (38), o CBEm2 foi menor do que o CBEm1, possivelmente por ser localizado no Nordeste, região brasileira onde na ocasião havia menor concentração em Programas de Pós-Graduação nas áreas afinadas com a temática do congresso. Em termos de debate de ideias, este evento evidenciou a presença de alguns tensionamentos, decorrentes do acolhimento de diferentes perspectivas teóricas e/ou metodológicas da etnomatemática (Conrado, 2005).

Um dos marcos do CBEm2 foi, certamente, o lançamento de algumas publicações importantes e de certa forma inéditas no Brasil, que indicavam o crescimento e a sistematização da pesquisa na área. São elas as coletâneas de Ribeiro; Domite; Ferreira (2004) e Knijnik; Wanderer; Oliveira (2004). A coleção *Introdução a Etnomatemática*, editada por Bernadete Morey especialmente para o CBEm2 (Morey, 2004b), organizou os textos dos minicursos que foram ministrados neste congresso, visando aproximar professores da escola básica e estudantes da graduação dos resultados das pesquisas da área da Etnomatemática.

Do ponto de vista político, merece destaque a decisão da Assembleia final do CBEm2, de criar a representação brasileira do International Study Group on Ethnomathematics (ISGEm). Nesta ocasião foram indicadas para integrar esta representação cinco pesquisadoras, de diferentes regiões do Brasil: Alexandrina Monteiro, Andrea Conrado, Ieda Giongo, Isabel de Lucena e Bernadette Morey.

2.3. O Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm3

Universidade Federal Fluminense em Niterói, RJ, o Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática (CBEm3). A autora deste texto, Maria Cecilia Fantinato, foi a coordenadora geral do evento, e seu grupo de pesquisa, o Grupo de Etnomatemática da UFF, seu organizador.

O CBEm3 apresentou um tema geral, *Etnomatemática: novos desafios teóricos e pedagógicos*, e sete eixos temáticos dentre os quais os autores dos trabalhos deveriam escolher e indicar um ao enviá-los: Educação matemática em diferentes contextos culturais; Etnomatemática e formação de professores; Etnomatemática e etnociências; Etnomatemática e seus fundamentos teóricos; Pesquisa em Etnomatemática; Etnomatemática e a sala de aula; Etnomatemática e História da Matemática. Além dessa especificação, para o CBEm3, diferentemente dos congressos anteriores, foi adotado um critério mais restritivo de avaliação: só seriam aceitos trabalhos que estivessem “claramente dentro da perspectiva etnomatemática”[2]. Esta orientação mostra preocupação com a especificidade teorico-metodológica da Etnomatemática. Durante o CBEm3, foram apresentados 81 trabalhos, entre comunicações orais e pôsteres.

Em relação à programação, o CBEm3 deu continuidade às mesas redondas plenárias do CBEm2, abordando cada uma delas eixos significativos da pesquisa na área: “Educação matemática em diferentes contextos culturais”, “Etnomatemática e etnociências”, “Etnomatemática e seus fundamentos: contribuições teóricas”, “A Pesquisa em Etnomatemática”; “Etnomatemática: formação de professores e prática pedagógica”. Em algumas mesas ou conferências, à semelhança dos congressos antecessores, o CBEm3 manteve a tradição de ter convidados estrangeiros: André Cauty - da França, Arthur Powel - dos Estados Unidos, Darlinda Moreira - de Portugal. Os textos dos palestrantes convidados do CBEm3 foram posteriormente publicados em coletânea (Fantinato, 2009).

[2] http://www.uff.br/cbem3/ , acesso em 07.11.12.

Uma das novidades do CBEm3 foram os fóruns de discussão, onde os participantes, mediados por um pesquisador mais experiente, tinham um tempo reservado para debater as questões levantadas nos diferentes espaços do congresso. Esta dinâmica possibilitou o aprofundamento das discussões e uma relação menos vertical entre os participantes e os conferencistas convidados.

O destaque dado no CBEm3 ao diálogo entre a Etnomatemática e as outras etnociências nas palestras gerais – além da mesa redonda, a conferência proferida por Márcio D´Olne Campos "Etnociência, etnografia e saberes locais", não resultou em um número expressivo de trabalhos enviados dentro desta temática, o que leva a supor que a produção em Etnomatemática não tem sido frutífera nessa discussão. Costa (2012), ao analisar a produção relacionada à Etnomatemática publicada na revista Bolema de 1985 a 2010, também não detectou uma tendência de uso de referências advindas da Etnofísica, Etno-astronomia, Etnomúsica, ou outras "etno-X", nas palavras de Campos (2009). Concordamos com Costa, quando sugere que "a Etnomatemática deva exercitar uma interlocução mais ativa com estas áreas, a fim de fertilizar sua prática científica e pedagógica" (Costa, 2012, p.79).

O maior número de trabalhos apresentados durante o CBEm3, em relação aos congressos anteriores, já parece ser reflexo da formação de novos centros de pesquisa no Brasil, com o resultante crescimento da produção científica e das publicações na área. Este crescimento também pode ser resultante de uma maior popularização do termo *etnomatemática*, para além dos contextos acadêmicos. A publicação, neste período, de um número temático da revista de divulgação Scientific American Brasil, inteiramente dedicado à Etnomatemática[3], certamente contribuiu para este fato. Esta maior popularização da Etnomatemática, apesar de ter um lado positivo, também contribuiu para a associação da Etnomatemática à ideia de método de ensino, ou de *panacéa* para os problemas da aprendizagem da matemática. Algumas falas durante o CBEm3 mostraram a preocupação com uma delimitação mais clara da área, para evitar interpretações equivocadas ou superficiais como a citada[4].

Um marco político importante do CBEm3 foi a criação, em Assembleia Geral de 28 de março de 2008, da Associação Brasileira de Etnomatemática (ABEm), com a presidência sendo assumida pela professora Maria do Carmo Domite.

2.3. O 4º Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm4

O CBEm4 aconteceu na Universidade Federal do Pará, na cidade de Belém, de 13 a 17 de novembro de 2012. Foi organizado localmente pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Cultura Amazônica (GEMAZ), sob a coordenação geral da professora Isabel de Lucena. Devido à localização geográfica, este evento atraiu um grande número de participantes das diversas regiões brasileiras, especialmente do Norte e Nordeste do Brasil. Observando-se o número de trabalhos aceitos para apresentação (111), pode-se concluir que o CBEm4 foi maior que o CBEm3 em número de participantes.

[3] Esta revista teve uma primeira edição em 2005 e uma segunda edição em 2007.
[4] Durante sua apresentação na mesa redonda V, sobre formação de professores e prática pedagógica, Alexandrina Monteiro enfatizou o aspecto de que a "Etnomatemática não é método de ensino".

O tema do congresso, “Cultura, Educação Matemática e Escola”, visou dar destaque às “possíveis relações entre as matemáticas, conhecimentos e saberes dos grupos culturais e seu papel no espaço escolar”, tendo “como pano de fundo a diversidade da riqueza sociocultural brasileira”. Além de visar contemplar os estudos realizados pelos pesquisadores nos últimos quatro anos, o CBEm4 quis tomar como foco privilegiado a dimensão educacional da Etnomatemática (D´Ambrosio, 2001), em relação com o processo ensino/aprendizagem, a formação de professores, a formação da escola, assim como ao “estabelecimento de novas perspectivas educacionais nos diferentes grupos socioculturais”. O congresso foi organizado em torno de quatro eixos temáticos que estão de algum modo, relacionados a esta dimensão educacional: Etnomatemática e educação dos povos da floresta; Etnomatemática e educação do campo; Etnomatemática e as relações entre as tendências da Educação Matemática; Etnomatemática e inclusão. Esses mesmos eixos também foram os critérios de distribuição dos participantes do CBEm4 nos quatro Grupos de Trabalho, ao longo dos quatro dias do evento. Esta estrutura, de certa forma, dá prosseguimento à experiência bem sucedida dos fóruns de discussão do CBEm3.

Além da prioridade dada à dimensão educacional da Etnomatemática, o CBEm4 deu um destaque às relações entre educação matemática e cultura amazônica. A primeira mesa temática deste evento, intitulada “Etnomatemática na Pan-Amazônia”, representou um momento de debate nessa perspectiva.

Mantendo a tradição dos eventos anteriores, este congresso teve como convidados estrangeiros Fredy Gonzalez, professor da Universidad Pedagógica Experimental Libertador, da Venezuela, Lawrence Shirley, professor da Towson University nos Estados Unidos, e Alexandre Pais, professor português que realiza pós-doutorado junto à Aalborg University, Dinamarca.

Uma importante contribuição do CBEm4 foi a divulgação da ABEm na página do evento, estimulando a filiação dos participantes à esta recém criada entidade da Etnomatemática, o que contribuiu para o desenvolvimento e a melhor delimitação da área. Em Assembléia geral, ao final deste evento foi eleita a nova diretoria desta Associação para os próximos quatro anos, assumindo a presidência o professor Iran Abreu Mendes, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

3. Procedimentos metodológicos

Para realizar um balanço da produção acadêmica resultante dos quatro congressos brasileiros de Etnomatemática, era necessário adotar um caminho metodológico.

O primeiro passo foi selecionar o material que seria analisado. Decidimos tomar como fonte de consulta os Anais dos congressos, as páginas da internet que disponibilizam informações sobre os mesmos, assim como os livros de resumos. Também foi acessada a página do Grupo de Pesquisa em Etnomatemática da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (GEPEm), porque esta disponibiliza informações sobre a programação do CBEm1. Do mesmo modo, em caso de dúvidas, foram feitas consultas às coordenadoras do CBEm1, CBEm2 e CBEm4, pessoalmente ou por correio eletrônico[5].

[5] A entrevista com a organizadora do CBEm3 foi considerada desnecessária, por ser esta a autora deste artigo.

Após a seleção do material para análise, procedemos a uma leitura cuidadosa dos resumos dos quatro eventos, buscando categorizá-los. Como categorias de análise, decidimos tomar como base seis dos sete eixos temáticos do CBEm3[6]. A opção por esses seis eixos foi feita porque, apesar de os congressos anteriores terem indicados temas a partir dos quais os trabalhos deveriam estar afinados, o CBEm3 adotou como critério que os autores indicassem o eixo para o qual estavam enviando o seu texto. Além deste motivo, para atender ao objetivo de comparar, verificar e analisar as tendências de crescimento ou decréscimo de uma ou outra linha de pesquisa, sentimos a necessidade de adotar um mesmo parâmetro para a classificação de todos os trabalhos analisados. Com relação ao CBEm4, apesar deste congresso também solicitar a indicação de um entre quatro eixos temáticos para envio dos trabalhos, consideramos que os seis eixos do CBEm3 atenderiam de maneira mais ampla e detalhada as diferentes perspectivas da pesquisa em Etnomatemática. Ainda assim, a dinâmica do processo nos fez alterar o eixo *etnomatemática e a sala de aula*, por *etnomatemática e prática pedagógica*, por considerarmos esta última denominação mais abrangente, compreendendo práticas educativas em espaços escolares e não escolares. Esta troca certamente permitiu a inclusão de alguns trabalhos que não se enquadravam propriamente num contexto de sala de aula, mas que estavam vinculados a práticas educativas.

Todos os trabalhos dos congressos foram então classificados de acordo com as categorias temáticas citadas. Dos trabalhos do CBEm3, respeitou-se a indicação feita pelos autores, salvo pouquíssimas exceções, quando julgamos que uma outra categoria, diferente da indicada, representaria melhor o texto. No caso dos trabalhos do CBEm1, do CBEm2 e do CBEm4, fizemos uma escolha dentro das opções existentes, mesmo incorrendo no risco de estar cometendo algumas imprecisões.

O trabalho de categorização foi coletivamente realizado com a colaboração de representantes do Grupo de Etnomatemática da UFF. Cada resumo era lido por pelo menos duas pessoas, com a sugestão de indicação de dois eixos temáticos para cada trabalho, um predominante e outro secundário. Esta estratégia revelou-se muito importante em caso de divergências, quando então todos os membros do grupo voltavam a ler o resumo e decidia-se pelo eixo mais representativo do trabalho em questão. Quando não havia consenso, recorria-se à leitura do texto completo[7].

O trabalho cuidadoso da análise não significou, ainda assim, que em alguns casos tenha sido necessário fazer escolhas, por não se contar com todas as informações necessárias. Portanto, os resultados são aproximações, revelando tendências da produção em Etnomatemática ao longo desses doze anos.

Após a conclusão da categorização dos resumos, foi realizado um tratamento estatístico dos dados obtidos, com construção de gráficos e tabelas. Foram gerados gráficos de trabalhos por categoria temática, por congresso, e a partir deste foi construído um gráfico indicando a evolução das categorias temáticas, ao longo dos quatro congressos. Um outro trabalho realizado foi a identificação das instituições de origem dos autores principais dos trabalhos. A partir deste registro, tabulamos esses

[6] O eixo Etnomatemática e etnociências foi deixado de lado porque nenhum autor espontaneamente indicou este eixo ao enviar seu trabalho. Entretanto, os palestrantes convidados Márcio D´Olne Campos e Paulo Pinheiro abordaram esta temática na mesa redonda II.
[7] Isto só não foi possível no caso dos trabalhos do CBEm4, porque até o momento de realização da análise, os textos completos ainda não se encontravam disponíveis para acesso na página do evento.

dados, categorizando as instituições por região brasileira. Do mesmo modo, foram gerados gráficos de todos os congressos, comparando o quantitativo de trabalhos por regiões do Brasil, e depois as transformações em relação ao quesito distribuição geográfica dos autores ao longo dos quatro congressos.

A etapa seguinte foi da análise qualitativa dos resultados obtidos em termos de tabelas e gráficos, procurando-se verificar as tendências de crescimento ou decréscimo e as transformações ocorridas ao longo desses doze anos de produção brasileira em Etnomatemática, manifesta nos quatro congressos da área.

4. Análise comparativa da produção ao longo dos congressos

Nesta parte do texto interpretaremos os dados estatísticos obtidos, com o objetivo de apresentar as tendências da produção acadêmica em Etnomatemática, presente nos quatro congressos brasileiros. Em primeiro lugar, apresentaremos um comparativo de acordo com os seis eixos temáticos selecionados. Em seguida, faremos uma análise comparativa da representação geográfica das diversas regiões brasileiras das instituições de vínculo dos autores.

4.1. Comparativo dos congressos por eixo temático

A tabela 1 apresenta o total de trabalhos aceitos e que constam dos Anais ou livros de resumos dos congressos. Como podemos observar, a participação nesses eventos, com apresentação de trabalhos, cresceu significativamente nesses doze anos, passando de 48 trabalhos em 2000 (CBEm1), para mais que o dobro, 111 trabalhos em 2012 (CBEm4).

Congresso	Total de trabalhos aceitos
CBEm1	48
CBEm2	38
CBEm3	81
CBEm4	111

Tabela 1. Total de trabalhos aceitos por congresso

Os gráficos 1 e 2 apresentam os resultados da produção dos congressos por eixo temático e a tabela 2 apresenta a legenda comum a ambos.

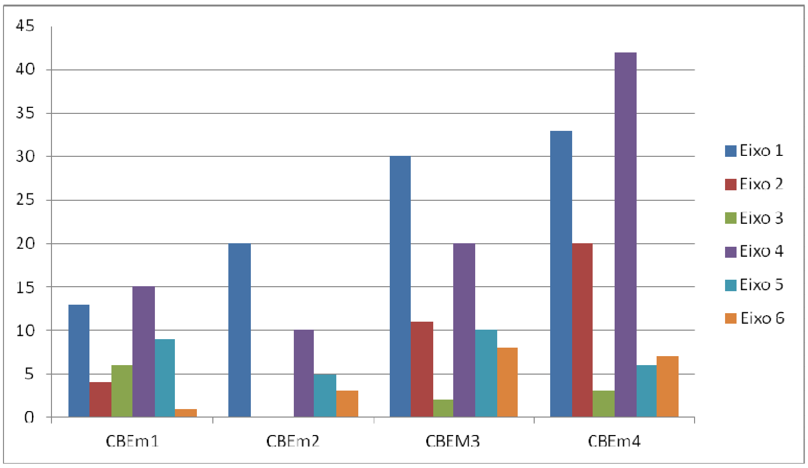


Gráfico 1. Comparativo da produção em cada congresso em cada eixo temático

Eixos	Temas
1	Educação matemática em diferentes contextos culturais
2	Etnomatemática e formação de professores
3	Etnomatemática e História da Matemática
4	Etnomatemática e prática pedagógica
5	Etnomatemática e seus fundamentos teóricos
6	Pesquisa em Etnomatemática

Tabela 2. Legenda dos gráficos 1 e 2

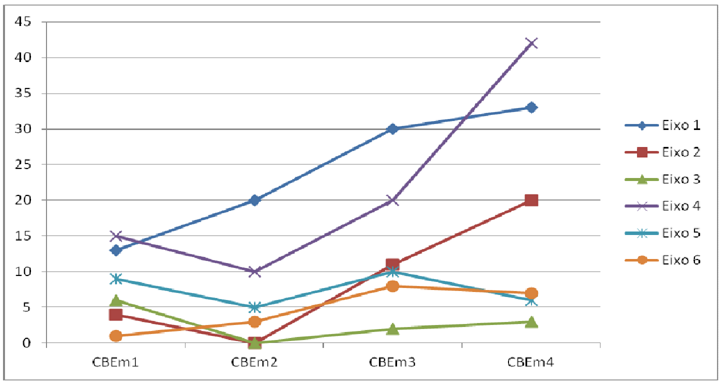


Gráfico 2. Crescimento/decrescimento dos trabalhos por eixo temático nos congressos

A observação dos gráficos 1 e 2 permite-nos tecer algumas considerações. Até o CBEm3, havia uma predominância absoluta do tema 1, *Educação matemática em diferentes contextos culturais*. Tal fato pode ser justificado por ser este o eixo mais definidor da Etnomatemática. Como diz Ubiratan D´Ambrosio:

> Na metodologia para trabalhar em etnomatemática, o principal é a capacidade de observar e analisar as práticas de comunidades e populações diferenciadas, não necessariamente indígenas ou quilombolas ou de periferia. (D´Ambrosio, 2008, p.9)

Com efeito, a concepção original da Etnomatemática definia-a como a matemática dos grupos culturais específicos (Barton, 2004). Gelsa Knijnik, ao analisar os itinerários da Etnomatemática, lembrou que questões relacionadas à diversidade cultural têm sido objeto de discussão entre os pesquisadores e representam desafios para o campo, para que não se incorra na "armadilha de uma visão essencialista da diferença" (Knijnik, 2004, p. 32) ou na folclorização da diversidade de culturas.

Mas aos poucos o objeto da Etnomatemática foi se transformando, e assumindo uma polissemia (Costa, 2012). A questão das relações entre a *Etnomatemática e prática pedagógica* vem ganhando espaço crescente, o que pode ser constatado pelo grande número de trabalhos do eixo 4 nos quatro congressos. Particularmente no CBEm4, o eixo 4 chega a superar o eixo 1, o que pode ser reflexo de uma preocupação com a dimensão educacional da Etnomatemática (D`Ambrosio, 2001), e da própria temática central deste evento, que enfatiza a educação matemática no espaço escolar. Ainda com relação ao eixo 4, observa-se uma representação mais significativa do mesmo no CBEm1 do que no CBEm2, voltando a crescer do CBEm3 em diante. Uma hipótese que pode ser levantada é que se o grande número de trabalhos no contexto educativo no CBEm1 é devido à abertura deste congresso à temática da modelagem. Como esta área passou a ter eventos específicos no Brasil, a partir de 1999[8], esses passaram a absorver a produção específica da modelagem matemática no ensino.

O eixo 2, formação de professores, que também está relacionado às relações da Etnomatemática com a educação, apresenta uma tendência de crescimento ao longo dos quatro congressos, apesar de não aparecer representado de forma clara no CBEm2. Este temática tem sido recorrente na área, em teses, dissertações e publicações.

Com relação ao eixo 3, Etnomatemática e História da Matemática, a produção tem sido pouco expressiva nos congressos ao longo desses doze anos. Cabe lembrar, entretanto, que a dimensão histórica foi destacada como umas das sete dimensões da Etnomatemática por D´Ambrosio (2001), e que portanto a continuidade de estudos nessa linha é importante para a área.

O eixo 5, *Etnomatemática e seus fundamentos teóricos,* apresenta uma posição relativamente estável ao longo dos eventos, mas com uma pequena tendência de decréscimo, se pensarmos em termos proporcionais. Tal fato indica que pensar o campo da Etnomatemática em seus aspectos filosóficos epistemológicos, apesar de ser um dos objetivos centrais dos congressos, ainda não tem sido o tema central da maioria dos estudos na área.

Por fim, quanto ao eixo 6, *Pesquisa em Etnomatemática* pode-se apontar uma ligeira tendência de crescimento do quantitativo de trabalhos, mas que representa, em termos proporcionais, uma estabilidade, ao longo dos quatro congressos. Este tema que aborda os aspectos teorico-metodológicos da investigação em Etnomatemática também precisa ser mais estudado, de acordo com nossa leitura dos gráficos da produção dos congressos.

4.1. Comparativo da produção dos congressos por região

O tratamento estatístico das informações acerca das instituições de origem dos primeiros autores de cada trabalho, classificadas posteriormente de acordo com a região geográfica brasileira, permitiu a construção dos gráficos 3, 4, 5 e 6, que passamos a interpretar agora.

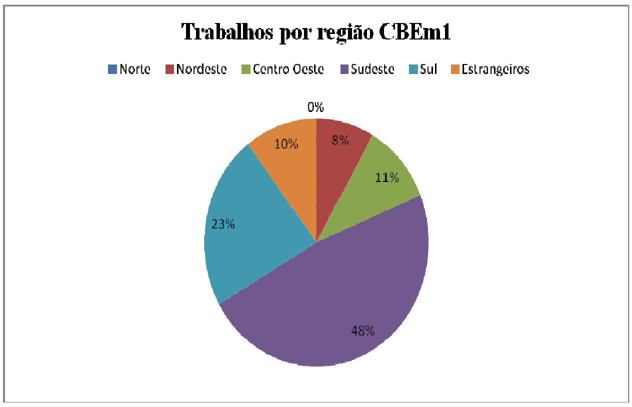


Gráfico 3. Distribuição proporcional de trabalhos do CBEm1 por origem geográfica

2.1 [8] Ano em que aconteceu a I Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática (CNMM).

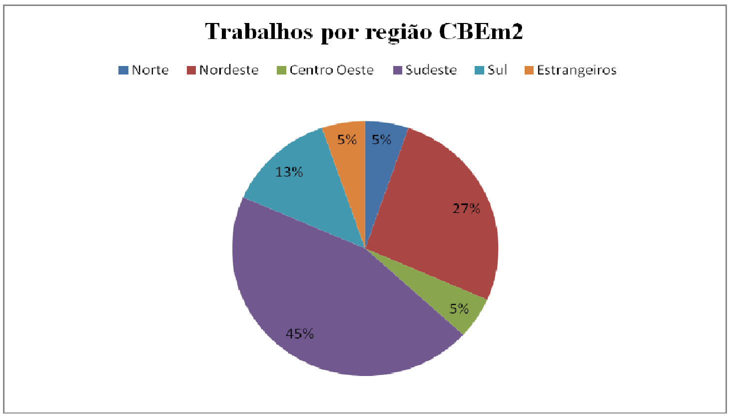


Gráfico 4. Distribuição proporcional de trabalhos do CBEm2 por origem geográfica

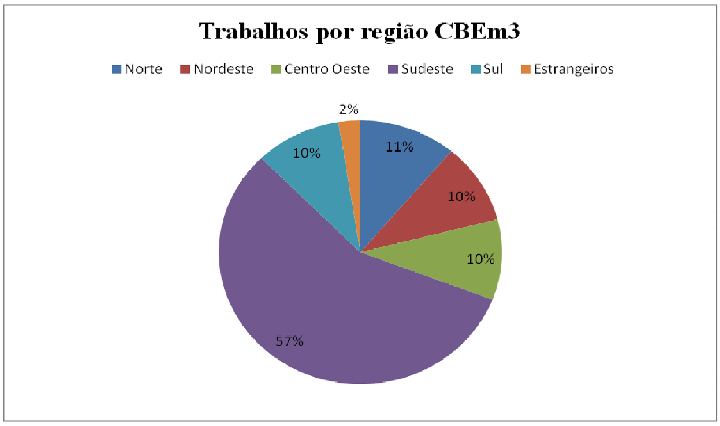


Gráfico 5. Distribuição proporcional de trabalhos do CBEm3 por origem geográfica

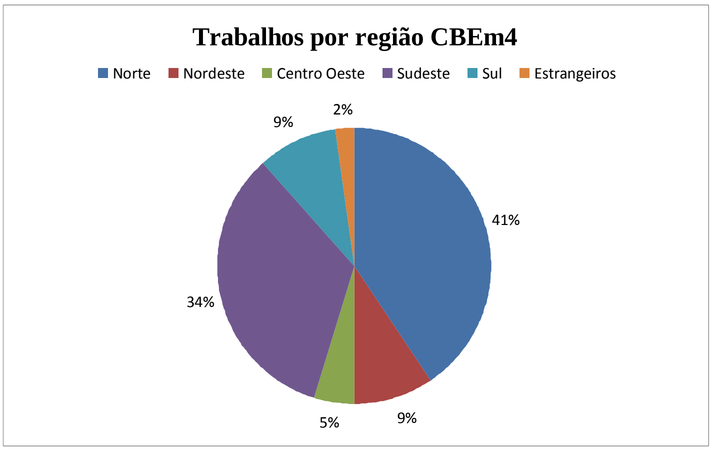


Gráfico 6. Distribuição proporcional de trabalhos do CBEm4 por origem geográfica

Em primeiro lugar, cabe lembrar que os resultados obtidos não revelam a localização regional dos grupos socioculturais estudados, mas sim das instituições de pesquisa declaradas pelos participantes. Ou seja, a maior ou menor representatividade de algumas regiões está mais intimamente relacionada aos Centros de Pesquisa em Educação Matemática existentes.

Analisando-se os quatro gráficos de setores, observa-se uma predominância constante da região Sudeste nos três primeiros congressos: 48% no CBEm1, 45% no CBEm2, 57% no CBEm3. Tal fato não chega a ser surpreendente, por terem dois desses eventos ocorrido na região Sudeste (o CBEm1 e o CBEm3), e também por estarem concentrados nesta região a maior parte dos Programas de Pós-Graduação.

Entretanto, no gráfico do CBEm4 ocorre uma mudança significativa, e o Norte, que vinha apresentando uma tendência de crescimento, passa a superar o Sudeste em representatividade (41% para 34%, respectivamente). Há que se registrar que esta região passou de uma representatividade zerada no CBEm1 para a primeira posição no CBEm4. Tal transformação, além de ser impressionante, serve como registro da grande produtividade na área da Etnomatemática dos Programas de Pós-Graduação da região Norte. Que fatores poderiam explicar tal fato? A localização do evento, na cidade de Belém? O esforço da organização do CBEm4 na divulgação do congresso junto à comunidade acadêmica da região? Ou seria a grande diversidade cultural da região amazônica que estaria impulsionando o desenvolvimento dos estudos e pesquisas sobre as "possíveis relações entre as matemáticas, conhecimentos e saberes dos grupos socioculturais"[9]? Neste trabalho, fazemos apenas conjecturas, que mereceriam serem confirmadas, ou não, por outros estudos.

O caso da região Nordeste também merece destaque. Esta região também apresentou um grande aumento da participação quando o evento foi realizado em Natal, RN (passou de 8% no CBEm1, para 27% no CBEm2, voltando a diminuir para 10% no CBEm3). Podemos defender a ideia de que o local de realização do congresso parece interferir no quantitativo de trabalhos por região.

Com relação à sua participação nos quatro congressos, a região Sul apresenta uma tendência de decréscimo ao longo desses doze anos (passando de 23% no CBEm1, 13% no CBEm2, 10% no CBEm3 para 9% no CBEm4). Não temos elementos para explicar tal fato, a não ser pela observação de que ao longo desses doze anos foram criados muitos novos centros de pesquisa em Etnomatemática, em regiões que em 2000 não estavam representadas no primeiro congresso da área. Podemos concluir que a formação de doutores e criação de novos Programas de Pós-Graduação estimula o crescimento da produção em regiões antes pouco representadas, como é o caso do Norte.

Quanto à região Centro-Oeste, sua representatividade tem variado entre decréscimo e crescimento ao longo dos diferentes congressos (de 11% no CBEm1, para 5% no CBEm2, para 10% no CBEm3 e novamente para 5% no CBEm4). Como o próximo congresso da área acontecerá nesta região, será possível avaliar se este fato vai estimular o crescimento da participação dos pesquisadores locais. Os gráficos também demonstram a participação pequena, mas constante, de pesquisadores estrangeiros. O maior percentual é do CBEm1, que por seu pioneirismo e sua característica plural pode atraído um maior número de pesquisadores de outros países.

5. Perspectivas para a Etnomatemática após o CBEm4

Após a apresentação deste balanço parcial da produção nos congressos brasileiros de Etnomatemática, cabe-nos apontar algumas perspectivas para as pesquisas na área, que a análise realizada permite indicar.

[9] http://www.cbem4.ufpa.br/evento/tema, acesso em 03.11.12

Os congressos brasileiros em Etnomatemática têm contribuído tanto para a área se pensar enquanto tal, quanto para seu processo de consolidação. Dar continuidade a tal movimento certamente será a meta dos próximos eventos e da comunidade de estudiosos e pesquisadores em geral.

Tal processo de consolidação passa pelo desenvolvimento dos estudos e pesquisas em diferentes eixos temáticos. Os seis temas destacados neste artigo permitem acompanhar algumas tendências e suas transformações ao longo do tempo, mas podem estar também mascarando outras perspectivas, menos recorrentes, mas significativas. Um estudo mais detalhado sobre a polissemia temática nos estudos em Etnomatemática não deixaria de lado pesquisas sobre culturas negras, grupos com necessidades especiais, ou desenvolvidas em ambientes virtuais, entre outros novos enfoques. O balanço realizado também indica a necessidade de aprofundamento dos estudos em alguns temas já mais consolidados, dentre os quais destacamos as perspectivas teóricas da Etnomatemática.

O deslocamento dos congressos pelas diversas regiões brasileiras tem sido uma prática que deve ser continuada. Este estudo evidenciou o impacto da realização do evento na participação e produção dos pesquisadores locais. Além de permitir uma maior divulgação e socialização da produção acadêmica de regiões historicamente menos representadas no panorama acadêmico brasileiro, este deslocamento regional parecer estimular a formação de novos centros de investigação na área.

Bibliográfia

Barton, B. (2004) Dando sentido à etnomatemática: etnomatemática fazendo sentido. In: J. P. M. Ribeiro, M.C.S. Domite; R. Ferreira (Orgs), *Etnomatemática: papel, valor e significado*, 39-74. São Paulo: Zouk.

Campos, M. D. (2009) Etnociência, etnografia e saberes locais. In: M.C.C.B. Fantinato (org.) *Etnomatemática: novos desafios teóricos e pedagógicos*, 69-84. Niterói: Editora da UFF.

Conrado, A. L. (2005) *A pesquisa brasileira em Etnomatemática: desenvolvimento, perspectivas, desafios*. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Costa, W. N. G. (2012) Um espelho para a Etnomatemática: os artigos da área em periódicos nacionais de Educação Matemática. *Revista Educação Matemática em Foco*. V.1 N.1, 65-81.

D´Ambrosio, U. (2008) O Programa Etnomatemática: uma síntese. *Acta Scientiae,* V. 10, n. 1,7-16.

D´Ambrosio, U. (2001) *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica.

Domite, M. C. S. (2000) *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática - CBEm1.* São Paulo, SP.

Duarte, C. G. (2009) *A "realidade" nas tramas discursivas da educação matemática escolar*. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo.

Fantinato, M.C.C.B. (2009) (org.) *Etnomatemática: novos desafios teóricos e pedagógicos*. Niterói: Editora da UFF.

Gerdes, P. (2007) *Etnomatemática: reflexões sobre Matemática e diversidade cultural*. Vila Nova de Famalicão: Edições Húmus.

Knijnik, G. F. (2004) Itinerários da Etnomatemática: questões e desafios sobre o cultural, o social e o político na educação matemática. In: G. Knijnik, F.; Wanderer; C. J. Oliveira (Orgs.) *Etnomatemática*: *currículo e formação de professores,* 19-38. Santa Cruz do Sul: EDUNISC.

Knijnik, G.; Wanderer, F.; Oliveira, C. J. (2004) (Orgs.) *Etnomatemática*: *currículo e formação de professores.* Santa Cruz do Sul: EDUNISC.

Morey, B. B. (2004a) *Anais do II Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm2.* Natal, RN.

Morey, B. B. (2004b) (org.) *Coleção Introdução à Etnomatemática.* Natal: Editor geral Bernadete Barbosa Morey.

Powell, A.; Frankestein, M. (1997) *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education*. Albany, SUNY Press.

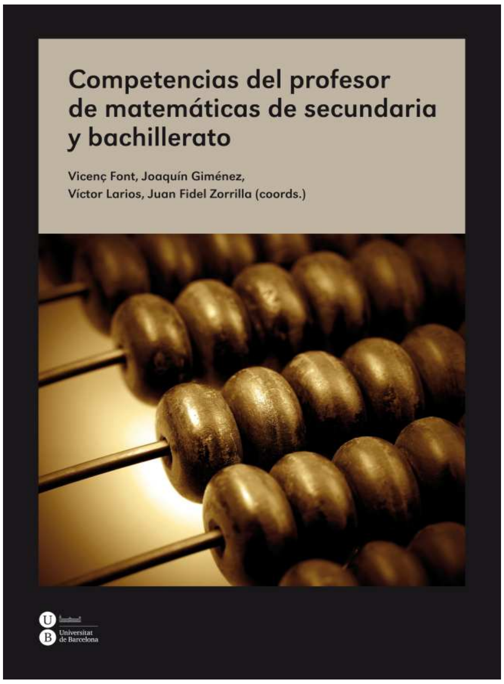
Ribeiro, J. P. M.; Domite, M.C.S.; Ferreira, R. (2004) (Orgs) *Etnomatemática: papel, valor e significado*. São Paulo: Zouk.

Fantinato, Maria Cecilia: Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Professora da Universidade Federal Fluminense (UFF), do Programa de Pós-Graduação em Educação – Mestrado e Doutorado. Pesquisadora nas áreas de Etnomatemática e Educação de Jovens e Adultos. Endereço: Rua Prof. Marcos Valdemar de Freitas Reis, s/n, Bloco D, Gragoatá, Niterói, RJ, Brasil. CEP: 24210-201. **mcfantinato@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 163-165

Libros



Competencias del profesor de matemáticas de secundario y bachillerato.

Autores: Vicenç Font, Joaquín Giménez, Víctor Larios y Juan Fidel Zorrilla (coords.)

Año: 2012

Editorial: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona

ISBN: 978-84-475-3558-3

Páginas: 212

En este texto se reúne una selección de los trabajos que se presentaron y debatieron en el seminario “Formación de profesores de matemática y nuevos entornos de aprendizaje” realizado en junio del 2010 en la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ). En el podemos encontrar tres bloques que tratan aspectos diferentes de la compleja trama de cuestiones relacionadas con el desarrollo del tema que da título al libro en España y en México.

En el primer bloque Vicenç Font, Juan Fidel Zorrilla y Víctor Larios explican el contexto institucional en el que se desarrolla la formación de profesores de matemáticas en España y en México, en particular en la Universitat de Barcelona (UB), en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y en la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ).

Vicenç Font, en el capítulo titulado «La formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria en la Universitat de Barcelona», después de explicar cómo era la formación inicial de los profesores de matemáticas de secundaria en el periodo 1971-2009, expone cómo es la actual formación inicial para ser profesor de matemáticas de secundaria en España, en particular las características del máster que habilita para el ejercicio de la docencia de secundaria para la especialidad de matemáticas en la Universitat de Barcelona.

Juan Fidel Zorrilla, en el capítulo titulado «La formación del profesor de matemáticas en la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior de la Universidad Nacional Autónoma de México», explica que la profesionalización de la docencia para la educación media superior es un fenómeno muy reciente en México que busca que los egresados tengan un papel de líderes en la enseñanza/aprendizaje de su disciplina y de sus planteles e instituciones, dentro del contexto de la modernización de la educación nacional.

Víctor Larios, en el capítulo «La Maestría en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Querétaro», explica los antecedentes históricos de la formación en didáctica de las matemáticas de la UAQ, en especial las características de la Maestría en Docencia de las Matemáticas que funcionó hasta 2004. A continuación expone los rasgos de la actual Maestría en Didáctica de las Matemáticas, cuyo objetivo es la formación y superación de los profesionales en la enseñanza de las matemáticas de los niveles medio superior y superior, con una formación apropiada en el área didáctica y disciplinaria que les permita la aplicación adecuada de tecnología y teorías didácticas en la resolución de problemas docentes.

El segundo bloque del libro se centra en la problemática del desarrollo de las competencias profesionales de los futuros profesores de secundaria y bachillerato de matemáticas.

Vicenç Font, Joaquín Giménez, Juan Fidel Zorrilla, Víctor Larios, Nahina Dehesa, Anton Aubanell y Antoni Benseny, en el capítulo titulado «Competencias del profesor y competencias del profesor de matemáticas. Una propuesta» sugieren una manera de entender la competencia que no sea contradictoria con las directrices curriculares vigentes en España y en México.

Víctor Larios, Noraísa González y Ángel Balderas, en el capítulo titulado «Las matemáticas dinámicas y la competencia digital del profesor de matemáticas», reflexionan sobre la competencia digital del profesor de matemáticas y su desarrollo en entornos digitales que permiten matemáticas dinámicas, en particular en los casos de la geometría y la estadística.

Norma Rubio, Vicenç Font y Mario Barajas, en el capítulo «Competencia inicial de futuros profesores en la evaluación de competencias matemáticas», explican una investigación cuyo objetivo es indagar en la competencia profesional de un grupo de futuros profesores de matemática de secundaria para evaluar las competencias matemáticas del informe PISA 2003, haciendo uso únicamente de los constructos teóricos que propone este.

Claudia Vargas y Joaquín Giménez, en el capítulo «Competencia comunicativa matemática y formación docente», reflexionan sobre la siguiente pregunta: ¿cómo se puede desarrollar en los estudiantes que se forman como profesores la competencia de comunicar matemáticas, tanto desde una perspectiva del contenido matemático como de lo didáctico? Su respuesta es que resulta importante que los futuros profesores tomen conciencia de que estar con alumnos es un acto comunicativo y debe tener características reales de intercambio.

Yuly M. Vanegas y Joaquín Giménez, en el capítulo «Tareas profesionales y escolares para desarrollar la relación entre competencia matemática y ciudadanía», reflexionan primero sobre lo que significa pasar de una formación centrada en el logro de objetivos específicos, definidos desde los «contenidos» del área, a una enseñanza enfocada hacia el desarrollo de competencias y la asunción de la necesidad e importancia de la formación para la ciudadanía. A continuación explican la importancia de abordar tareas profesionales que permitan a los futuros docentes de matemáticas de secundaria prepararse para saber desarrollar competencia ciudadana a través de la enseñanza de las matemáticas.

El tercer bloque presenta, como ejemplo ilustrativo, un material didáctico elaborado específicamente para la formación de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Vicenç Font, Yuly Vanegas, Susana Ferreres, Silvia Carvajal y Marta Adán en el capítulo «Funciones», exponen solo una parte del conocimiento matemático necesario para la enseñanza de las funciones, ya que se presupone que los lectores ya poseen un dominio amplio sobre ellas. Se trata del conocimiento matemático sobre las funciones que los autores consideran que se debe impartir en la materia Complementos para la Formación Matemática del máster de la UB que habilita para ejercer de profesor de matemáticas de secundaria. El objetivo es presentar un material que sirva para el desarrollo de una parte de las competencias profesionales contempladas en el capítulo cuarto de este mismo texto.

María José Seckel Santis
Magíster en Didáctica de la Matemática
mjseckel@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 167-169

Educación en la Red: Organización de Estados Iberoamericanos http://www.oei.es/

Al entrar a esta página encontramos en una primera barra la siguiente información:

- Acerca de OEI: Es un organismo internacional de carácter gubernamental para la cooperación entre los países iberoamericanos en el campo de la educación, la ciencia, la tecnología y la cultura en el contexto del desarrollo integral, la democracia y la integración regional. Los Estados Miembros de pleno derecho y observadores son todos los países iberoamericanos que conforman la comunidad de naciones integrada por Argentina, Bolivia, Brasil, Colombia, Costa Rica, Cuba, Chile, República Dominicana, Ecuador, El Salvador, España, Guatemala, Guinea Ecuatorial, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Uruguay y Venezuela. La financiación de la OEI y de sus programas está cubierto mediante las cuotas obligatorias y las aportaciones voluntarias que efectúan los Gobiernos de los Estados Miembros y por las contribuciones que para determinados proyectos puedan aportar instituciones, fundaciones y otros organismos interesados en el mejoramiento de la calidad educativa y en el desarrollo científico-tecnológico y cultural. Se presenta en este apartado una breve historia, los fines y objetivos y también su estructura de gobierno.
- Metas Educativas 2021: "*La educación que queremos para la generación de los bicentenarios*". Se puede encontrar todo lo referido a este proyecto: noticias de acuerdos y reuniones, documento inicial y documento final, funciones, composición y funcionamiento del Consejo Asesor, principios fundamentales y productos principales del Instituto de Evaluación y Seguimiento de las Metas Educativas 2021 (IESME 2021). También se encuentran reflexiones, colección de libros y foros de debate.
- Formación: En este ícono encontramos toda la información relacionada con el Centro de Altos Estudios Universitarios (CAEU), cuyo objetivo general es contribuir a la construcción del Espacio Iberoamericano del Conocimiento y a fortalecer y mejorar la calidad de los procesos de modernización de la educación, la ciencia y la cultura, a través de redes de formación e

investigación interinstitucionales. Enmarcadas en el CEAU se tienen: la Escuela de Educación, la Escuela de la Ciencia, la Tecnología y la Innovación, la Escuela de las Culturas y la Escuela de la Cooperación. Dentro de las escuelas de educación se hallan las de formación docente en matemática y también en otras disciplinas.

- Áreas de cooperación: existe, entre otros, un link que permiten el acceso a Iberciencia:.

La OEI generó este Instituto con la voluntad de coordinar las acciones que se vayan desarrollando. Es un desarrollo institucional de carácter virtual y descentralizado que tiene articulaciones con diferentes Oficinas de la OEI. se trabaja de forma coordinada sobre cinco ejes de trabajo: Investigación e Innovación, Formación, Evaluación, Promoción y Transferencia. Además de la página web del Instituto se puede seguir en twitter desde las cuentas @iberciencia e @ibermatemática.

Dentro de este apartado se encuentran videos, documentos de sala de lectura, novedades, se presentan, mediante una captura de pantalla, las distintas secciones:

Cada una de ellas es, seguramente, una herramienta para nuestra labor docente. En particular, por ejemplo, la Revista Escolar digital de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, para uso de alumnos y profesores de Educación Media y promovida por el profesor Francisco Bellot Rosado, Catedrático del I.E.S. "Emilio Ferrari" de Valladolid, representante para Europa de la World Federation of National Mathematics Competitions.

También se puede acceder a distintas secciones del CAEU, como se muestra en los siguientes links:

Para finalizar con esta reseña, es importante mencionar la información que se encuentra en la página sobre el:

Proyecto "Luces para aprender"

"Este proyecto es liderado por la OEI, el mismo pretende llevar energía solar y acceso a internet a más de 66.000 escuelas en Iberoamérica, la mayor parte de ellas situadas en zonas rurales y de difícil acceso. La iniciativa surge en el marco de las Metas Educativas 2021 y pretende abordar retos no resueltos en la región iberoamericana como el acceso a una educación pública de calidad que ofrezca mejores oportunidades a las niñas y niños y les permita hacer frente a la pobreza y la desigualdad.

La OEI, consciente de esa situación y teniendo en cuenta que la calidad educativa es una de las cuestiones más importantes para alcanzar un equilibrio social entre ciudadanos, propuso un proyecto que mejorará la educación de todos aquellos niños y niñas que no pueden acceder a una educación digna por falta de recursos. Se quiere reducir la brecha digital y poner fin al aislamiento de las comunidades rurales, que históricamente han quedado rezagadas de los avances tecnológicos, facilitando su acceso a las tecnologías de la comunicación, con el fin de favorecer su desarrollo educativo, económico, social y cultural. Abre asimismo una puerta a los procesos de participación comunitaria, situando a la escuela como lugar de encuentro y de ocio de la comunidad."

Es mucha la información que se puede encontrar en esta página, por eso te invitamos a que la visites...

Equipo Editor

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 171-180

www.fisem.org/web/union

Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz

Perú, nuevo colegio en Incacocha o estudiar con dignidad

Introducción

Momentos finales en la construcción de un **nuevo colegio en Incacocha, Perú**, dotado de aulas, comedor, cocina y baños en una comunidad de extrema pobreza a 3850 metros de altitud. Se realiza con la colaboración de *Asinky Perú (Sonríe Perú)*, una entidad sin fines de lucro y receptora de donaciones para la mejora de la calidad de vida de personas en situación más desfavorecida, y con cuya presidenta, Flor de María Basauri Rojas, nos hemos entrevistado personalmente, a través de nuestro Vicepresidente, Luis Balbuena Castellano con ocasión de su visita a Perú y Paraguay en septiembre de 2011, para asistir a dos congresos y ofrecer conferencias y talleres.

Se trata, en concreto, del proyecto desarrollado en el ya nombrado lugar de Incacocha, en el Centro Educativo Nº 32682, Distrito de Churabamba, Departamento de Huánuco, a 16 horas de Lima, la capital de Perú. El proyecto, ya culminado, contemplaba la construcción de un aula, una nueva cocina (la actual es *tétrica, lúgubre e insalubre*), nuevos baños (*Los "servicios higiénicos", así, entre comillas, porque simplemente no existían*) y un nuevo comedor.

El presupuesto aportado por la Fundación ha sido de **siete mil setecientos ochenta y un euros con ochenta y cinco céntimos (7.781.85 €)**

Informe previo a la inauguración

Desde Perú, el 5 de marzo de 2013, previo al acto de inauguración, **FLOR DE MARÍA BASUARI ROJAS**, que ha desarrollado un trabajo eficaz, sacrificado y constante y honrado, nos envía el siguiente texto: "Ya en las postrimerías de este sueño que se ha convertido en una realidad palpable y concreta me toca hacer un balance de lo que he podido vivir desde el inicio de este proyecto hasta estos últimos pasos para la entrega, con todo finalizado de la mejor manera.

Fachada

INCACOCHA es un lugar entrañable al que muchas veces he llegado, enclavado en las alturas andinas de nuestra Sierra Central, a 3.850 metros de altitud, con una población que, de acuerdo a estadísticas que datan ya de algunos años atrás, es de 295 habitantes. Según esa misma fuente son casi en igual número los varones y mujeres, pero más reales son, creo, las nóminas de matrícula de los alumnos que manejo cada año para las acciones sociales. La población femenina es mayor en estos últimos años.

Dista desde la ciudad de Huánuco sólo 67 km, pero viajar desde Huánuco hasta Incacocha demora más o menos 3 o 4 horas, de acuerdo a las condiciones del camino, a la movilidad que encuentre y que se anime a ir hasta esos lugares. En muchas ocasiones no he podido llegar por los rigores del clima que deteriora los caminos en determinadas épocas del año. Su población se sustenta con la agricultura no calificada, el material para la construcción de sus viviendas en casi el 80% de ellas es la piedra y barro o barro con los techos de paja, los hay algunos de “calamina” (son planchas corrugadas de metal).

Las viviendas no cuentan con habitaciones propias para dormitorios, cocina, comedor etc…La mayoría tiene solo una habitación para todas sus actividades, un gran porcentaje de las viviendas son propias. No cuentan con agua potable, su abastecimiento es de un río que cruza el pueblo, tampoco tienen servicios higiénicos. Casi el 70% de la población es analfabeta. De ella el menor porcentaje lo llevan los varones y un porcentaje alto recae en las mujeres. A mi parecer y luego de sólo algunos años este dato va revirtiéndose, justamente gracias a acciones sociales, pues la gente va tomando conciencia de que la población femenina no puede relegarse a la casa, cocina o “criar hijos”. Aun en ésta época si han de escoger por el hijo o hija por razones económicas, para asistir al colegio se opta por el varón.

Cuenta con una escuelita de nivel primario con sólo tres aulas para los seis grados escolares que se imparten. Le correspondería tener cuatro profesores pero sólo cuentan en la actualidad con tres. Hasta hace un par de años no tenía el nivel de Inicial, el que le corresponde a niños a partir de los tres años hasta integrarse al primer grado de primaria (6 años), cuando se implementó estudiaban en un lugar “prestado” pues no contaban con un aula propia. En la actualidad cuenta con algo más de 32 alumnos de ese nivel.

La cocina

Las escuelas rurales deben contar con una cocina para la preparación, en un principio del desayuno escolar, ahora se les da el almuerzo, lo cual en estas zonas deprimidas por la pobreza es en su gran mayoría único alimento que muchos niños pueden saborear durante el día. El colegio “Virgen del Carmen de Incacocha” contaba con una cocina, tétrica, lúgubre, insalubre, al entrar a ella quienes no estamos acostumbrados no podemos ver “más allá de las narices”, es imposible siquiera abrir los ojos pues el humo no deja hacerlo y si se puede, todo es de un color negro azabache que imposibilita distinguir algo. El piso era de tierra afirmada. Para lavar los alimentos, los enseres y servicios tenían que ir hasta el río o aprovisionarse de agua y hacerlo fuera de la cocina.

El comedor

Cuentan con un comedor con las condiciones básicas pero insuficientes, el local no está terminado convenientemente, muchas veces los niños tenían que ingerir sus aliment os sentados en el piso, con el consecuente riesgo de adquirir muchas enfermedades, el piso era de tierra afirmada, con el lavado de los enseres y otras actividades terminaba siendo un lodazal al igual que la cocina.

Nuevas instalaciones

Los baños

Los “servicios higiénicos”, así, entre comillas, porque simplemente no existían como tales pues lo que se utilizaba para ese fin, lejos de servir y faltos de la más mínima intimidad, en especial a las niñas las hacia vulnerables a muchas cosas y eran hasta un peligro para su integridad física. Para los profesores las condiciones son las mismas.

Servicios higiénicos

A estas alturas de mi informe cuando asoma la indignación pues las imágenes se van sucediendo en la memoria, hace muchos años ¿10 tal vez?, que he conocido Incacocha, para situarme en ella y sus alrededores, para lograr la felicidad que siento ahora, para crecer, para disfrutar, para enseñar y para ir recogiendo frutos que en dosis exactas voy saboreando.

El mejor manjar está ya servido gracias, miles de gracias a la FUNDACION CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ, especialmente a Sal y Bea, abreviatura que me he permitido porque los tengo ya alojados en el corazón y sé que también lo están en el de muchísimos niños y padres de familia que entienden que habiendo trascendido también se puede enseñar a hacerse querer, a despegar, a desear el triunfo, soñar los logros, alcanzar objetivos y sobre todo que ello se logra únicamente con la educación, el aprendizaje y conocimiento. Las gracias para nuestros jóvenes amigos van también y en mayor grado para quienes, amorosos padres y diligentes maestros, Salvador Pérez y Aurora Estévez supieron hacerse una mística solidaria de su incalculable dolor ofreciendo vida digna por medio de la educación, en especial para quienes más lo necesitan.

Luego de un buen tiempo, idas y venidas, viajes largos, cortos, pesados o inciertos, derrumbes, atoros, caminatas en la lluvia, vueltas de medio camino, huaycos y un sinfín de cosas más que se convierten en anécdotas que recordaré con cariño, desde las reuniones con los señores comuneros, Presidente de la Asociación de Padres de Familia, Presidente de la Comunidad, Director del Colegio, autoridades y funcionarios de la Región de Educación, Unidad de Servicios Educativos, etc… los ofrecimientos de trabajo, las búsquedas del maestro constructor, por la distancia y lejanía no hay muchos profesionales que deseen un trabajo por allí.

Lo primero que se ha logrado y después de más de 40 años ha sido legalizar la situación del colegio. Es increíble pero no tenía la Resolución de Creación. Después de muchísimos trámites en Lima, Huánuco, Huancayo y otros la he logrado, también gracias a este proyecto hemos procurado la inscripción del colegio en los Registros Públicos de la Propiedad Inmueble, les hemos proveído los planos, costos financieros y dejado el trámite en camino para su logro total. Es un paso muy importante que ha reconocido la Dirección Regional de Educación.

Ver la mejora del colegio, el trabajo de los padres y los niños, desde los cimientos, su crecimiento poco a poco, ir contra algunas personas que aún piensan que no se le puede dar lo mejor a los que menos tienen, hemos ido creciendo junto con las bases, paredes, techado de la obra, acabados, como innovación he querido que el AULA de la SECCIÓN DE INICIAL no sea oscura, por ello hemos convenido en poner como parte del techado unas láminas o “calaminas” transparentes, lo que permite el paso de la luz, amplía el aula y el ambiente se torna mucho mejor, el mismo sistema hemos empleado en la cocina y los cambios son óptimos. El piso es de madera “machihembrada” para preservarles del frío.

La construcción va tomando forma desde lejos se van viendo ya los edificios y cada nueva visita aumenta la emoción del avance, contra viento y marea, la edificación del pabellón queda prácticamente levantada, en la parte inferior (primer piso) se va terminando el comedor y en la cara posterior, la que da al patio del colegio se sitúa la entrada al aula de Educación Inicial.

Entre los dos pabellones queda el acceso del comedor hacia las aulas y viceversa, decidimos también construirles una mejor escalera, inutilizando la que usaban construida de piedras unidas con barro, totalmente irregular y peligrosa.

El avance se hace lento, pues por las lluvias se tenía que esperar los buenos tiempos para su avance y literalmente de peldaño a peldaño se ha logrado este mejor acceso con seguridad para nuestros niños hacia sus aulas desde la cocina o comedor y viceversa.

El COMEDOR, es el que queda en la planta “de abajo”, ubicado junto al que ya tenían, quedó amplio, cumpliendo como en toda la construcción las directivas del sector educación, se le ha proveído de piso de cemento rojo facilitando de esa manera un mejor aseo del ambiente ayudando con esto a la ingesta de alimentos en un ambiente limpio.

El ambiente que ha sido también remodelado en su totalidad es el de la COCINA la entrada hacia ella y sobre todo el interior que se tornaba insoportable se le han hecho importantes modificaciones para que se convierta en un ambiente propicio para la preparación de los alimentos, se le ha dotado de comodidad, ideando un sistema de llegada del agua del único pilón (toma de agua) con que cuenta la comunidad hacia un lavadero, caño o grifo dentro de la cocina facilitando la labor de las señoras que cocinan por turno el almuerzo de nuestros niños. Creo que esta es una gran ventaja que estoy segura han de agradecer muy especialmente, se le ha puesto una chimenea para la evacuación del humo hacia el exterior, creemos que con ello se ha de aminorar de alguna manera la incidencia de enfermedades pulmonares o bronquiales que son continuas entre los niños y padres del lugar. Comparando las fotos del antes y del después, huelgan las palabras.

Los BAÑOS, al ser lugares que tienen que ser cambiados de tiempo en tiempo, hemos creído conveniente utilizar material que también pueda ser trasladado una vez que se cubra la capacidad de los hoyos que se usan como letrinas, es así que se ha pensado en preservar la intimidad de las niñas en especial y se ha considerado la construcción de tres baños, uno para las niñas otro para los niños y un tercero para el uso de los profesores. Comparando con los que usaban y los que han de usar a partir de este año escolar las diferencias saltan a la vista, he sido testigo de la alegría en especial de las niñas. Los pequeños muy entusiastas han deseado intervenir en su construcción, como consta en las imágenes.

Me embarga la emoción y me quiero adelantar con este informe, luego del 18 de marzo del presente año de 2013, fecha en la que procederemos a la inauguración y entrega a la comunidad y al sector de Educación mediante un acta, podré agradecer una vez más a la **FUNDACIÓN CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ** y veremos totalmente finalizado este gran logro en pro de la niñez más necesitada y en aras de su desarrollo personal mediante la educación con dignidad”

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

¡¡Aquí les esperamos!!

Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz

Peru, novo colégio em Incacocha ou estudar com dignidade

Introdução

Momentos finais na construção de um novo colégio em Incacocha, Peru, dotado de salas, comedor, cozinha e banhos numa comunidade de extrema pobreza a 3850 metros de altitude. Realiza-se com a colaboração de Asinky Peru (Sorri Peru), uma entidade sem fins de lucro e receptora de doações para a melhora da qualidade de vida de pessoas em situação mais desfavorecida, e com cuja presidenta, Flor de María Basauri Vermelhas, nos entrevistámos pessoalmente, através de nosso Vice-presidente, Luis Balbuena Castellano por motivo de sua visita a Peru e Paraguai em setembro de 2011, para assistir a dois congressos e oferecer conferências e cursos.

Trata-se, em concreto, do projecto desenvolvido no já nomeado lugar de Incacocha, no Centro Educativo Nº 32682, Distrito de Churabamba, Departamento de Huánuco, a 16 horas de Lima, a capital de Peru. O projecto, já culminado, contemplava a construção de um sala, uma nova cozinha (a actual é tétrica, lúgubre e insalubre), novos banhos (Os “serviços higiênicos”, assim, entre aspas, porque simplesmente não existiam) e um novo comedor.

O orçamento contribuído pela Fundação tem sido de **sete mil setecentos oitenta e um euros com oitenta e cinco céntimos (7.781.85 €)**

Relatório prévio à inauguração

Desde Peru, o 5 de março de 2013, prévio ao acto de inauguração, FLOR DE MARÍA BASUARI ROJAS, que tem desenvolvido um trabalho eficaz, sacrificado e constante e honrado, nos envia o seguinte texto:

“Já nas postrimerías deste sonho que se converteu numa realidade palpable e concreta me toca fazer um balanço do que tenho podido viver desde o início deste projecto até estes últimos passos para a entrega, com todo finalizado da melhor maneira.

Fachada

INCACOCHA é um lugar entrañable ao que muitas vezes tenho chegado, enclavado nas alturas andinas de nossa Serra Central, a 3.850 metros de altitude, com uma população que, de acordo a estatísticas que datam já de alguns anos atrás, é de 295 habitantes. Segundo essa mesma fonte são quase em igual número os varões e mulheres, mas mais reais são, creio, as nóminas de matrícula dos alunos que manejo a cada ano para as acções sociais. A população feminina é maior nestes últimos anos.

Dista desde a cidade de Huánuco só 67 km, mas viajar desde Huánuco até Incacocha demora mais ou menos 3 ou 4 horas, de acordo às condições do caminho, à mobilidade que encontre e que se anime a ir até esses lugares. Em muitas ocasiões não tenho podido chegar pelos rigores do clima que deteriora os caminhos em determinadas épocas do ano. Sua população sustenta-se com a agricultura não qualificada, o material para a construção de suas moradias em quase o 80% delas é a pedra e varro ou varro com os tetos de palha, os há alguns de #8220;calamina &" (são ferros corrugadas de metal).

As moradias não contam com habitações próprias para dormitórios, cozinha, comedor etc…A maioria tem só uma habitação para todas suas actividades, uma grande percentagem das moradias são próprias. Não contam com água potável, seu abastecimento é de um rio que cruza o povo, também não têm serviços higiênicos.

Quase o 70% da população é analfabeta. Dela a menor percentagem o levam os varões e uma percentagem alta recae nas mulheres. A meu parecer e depois de só alguns anos este dado vai se revertendo, justamente graças a acções sociais, pois a gente vai tomando consciência de que a população feminina não pode relegarse à casa, cozinha ou "criar filhos". Ainda nesta época se têm de escolher pelo filho ou filha por razões económicas, para assistir ao colégio se opta pelo varão.

Conta com uma escuelita de nível primário com só três salas para os seis graus escoares que se dão. Corresponder-lhe-ia ter quatro professores mas só contam na actualidade com três. Até faz um par de anos não tinha o nível de Inicial, o que lhe corresponde a meninos a partir de três anos até se integrar ao primeiro grau de primária (6 anos), quando se implementou estudavam num lugar "prestado" pois não contavam com uma sala própria. Na actualidade conta com algo mais de 32 alunos desse nível.

A cozinha

As escolas rurais devem contar com uma cozinha para a preparação, num princípio do café da manhã escolar, agora se lhes dá o almoço, o qual nestas zonas deprimidas pela pobreza é em sua grande maioria único alimento que muitos meninos podem saborear durante o dia. O colégio “Virgen do Carmen de Incacocha” contava com uma cozinha, tétrica, lúgubre, insalubre, ao entrar a ela quem não estamos acostumados não podemos ver “para além dos narizes”, é impossível sequer abrir os olhos pois a fumaça não deixa o fazer e se se pode, tudo é de uma cor negra azabache que imposibilita distinguir algo. O andar era de terra afirmada. Para lavar os alimentos, os enseres e serviços tinham que ir até o rio ou se abastecer de água e o fazer fora da cozinha.

O comedor

Contam com um comedor com as condições básicas mas insuficientes, o local não está terminado convenientemente, muitas vezes os meninos tinham que ingerir seus aliment vos sentados no piso, com o consequente risco de adquirir muitas doenças, o andar era de terra afirmada, com a lavagem dos enseres e outras actividades terminava sendo um lodazal ao igual que a cozinha.


Nuevas instalaciones

Os banhos

Os “serviços higiênicos”, assim, entre aspas, porque simplesmente não existiam como tais pois o que se utilizava para esse fim, longe de servir e faltos da mais mínima intimidem, em especial às meninas as para vulneráveis a muitas coisas e eram até um perigo para sua integridade física. Para os professores as condições são as mesmas.



Serviços higiênicos

A estas alturas de meu relatório quando assoma a indignação pois as imagens se vão sucedendo na memória, faz muitos anos ¿10 talvez?, que tenho conhecido Incacocha, para me situar nela e seus arredores, para conseguir a felicidade que sento agora, para crescer, para desfrutar, para ensinar e para ir recolhendo frutos que em doses exactas vou saboreando.

O melhor manjar está já servido obrigado, milhares de graças à FUNDACION CANARIA CARLOS SALVADOR E BEATRIZ, especialmente a Sal e Bea, abreviatura que me permiti porque os tenho já alojados no coração e sei que também o estão no de muitíssimos meninos e pais de família que entendem que tendo trascendido também se pode ensinar a se fazer querer, a descolar, a desejar o triunfo, sonhar os lucros, atingir objectivos e sobretudo que isso se consegue unicamente com a educação, a aprendizagem e conhecimento. As obrigado para nossos jovens amigos vão também e em maior grau para quem, amorosos pais e diligentes mestres, Salvador Pérez e Aurora Estévez souberam se fazer uma mística solidária de sua incalculable dor oferecendo vida digna por médio da educação, em especial para quem mais o precisam.

Depois de um bom tempo, idas e vindas, viagens longas, curtos, pesados ou incertos, derrubes, atoros, caminatas na chuva, voltas de médio caminho, huaycos e um sinfín de coisas mais que se convertem em episódios que recordarei com cariño, desde as reuniões com os senhores comuneros, Presidente da Associação de Pais de Família, Presidente da Comunidade, Director do Colégio, autoridades e servidores públicos da Região de Educação, Unidade de Serviços Educativos, etc… os oferecimentos de trabalho, as buscas do mestre construtor, pela distância e lonjura não há muitos profissionais que desejem um trabalho por ali.

O primeiro que se conseguiu e após mais de 40 anos tem sido legalizar a situação do colégio. É incrível mas não tinha a Resolução de Criação. Após muitíssimos trâmites em Lima, Huánuco, Huancayo e outros a consegui, também graças a este projecto temos tentado a inscrição do colégio nos Registos Públicos da Propriedade Inmueble, lhes provimos os planos, custos financeiros e deixado o trâmite em caminho para seu lucro total. É um passo importantíssimo que tem reconhecido a Direcção Regional de Educação.

Ver a melhora do colégio, o trabalho dos pais e os meninos, desde os alicerces, seu crescimento pouco a pouco, ir contra algumas pessoas que ainda pensam que não se lhe pode dar o melhor aos que menos têm, temos ido crescendo junto com as bases, paredes, techado da obra, acabamentos, como inovação tenho querido que o SALA da SECÇÃO DE INICIAL não seja escura, por isso temos convindo em pôr como parte do techado umas lâminas ou “calaminas” transparentes, o que permite o passo da luz, amplia o sala e o ambiente torna-se muito melhor, o mesmo sistema temos empregado na cozinha e as mudanças são óptimas. O andar é de madeira “machihembrada” para preservar-lhes do frio.

A construção vai tomando forma desde longe vão-se vendo já os edifícios e a cada nova visita aumenta a emoção do avanço, contra vento e maré, a edificación do pavilhão fica praticamente levantada, na parte inferior (primeiro andar) se vai terminando o comedor e na cara posterior, a que dá ao pátio do colégio se situa a entrada ao sala de Educação Inicial.

Entre os dois pavilhões fica o acesso do comedor para as salas e vice-versa, decidimos também lhes construir uma melhor escada, inutilizando a que usavam construída de pedras unidas com varro, totalmente irregular e perigosa.

O avanço faz-se lento, pois pelas chuvas tinha-se que esperar os bons tempos para seu avanço e literalmente de peldaño a peldaño se conseguiu este melhor acesso com segurança para nossos meninos para suas salas desde a cozinha ou comedor e vice-versa.

O COMEDOR, é o que fica na planta “de abaixo”, localizado junto ao que já tinham, ficou amplo, cumprindo como em toda a construção as directoras do sector educação, tem-se-lhe provisto de andar de cemento vermelho facilitando dessa maneira um melhor aseo do ambiente ajudando com isto à ingestão de alimentos num ambiente limpo.

O ambiente que tem sido também remodelado em sua totalidade é o da COZINHA a entrada para ela e sobretudo o interior que se tornava insuportável se lhe têm feito importantes modificações para que se converta num ambiente propício para a preparação dos alimentos, tem-se-lhe dotado de comodidade, criando um sistema de chegada do água do único pilón (tomada de água) com que conta a comunidade para um lavadero, caño ou grifo dentro da cozinha facilitando o labor das senhoras que cozinham por turno o almoço de nossos meninos. Acho que esta é uma grande vantagem que estou segura têm de agradecer muito especialmente, se lhe tem posto uma lareira para a evacuação da fumaça para o exterior, achamos que com isso se tem de aminorar de alguma maneira a incidência de doenças pulmonares ou bronquiales que são contínuas entre os meninos e pais do lugar. Comparando as fotos do dantes e do depois, huelgan as palavras.

Os BANHOS, ao ser lugares que têm que ser mudados de tempo em tempo, temos crido conveniente utilizar material que também possa ser transladado uma vez que se cubra a capacidade dos buracos que se usam como letrinas, é de modo que pensou-se em preservar a intimidem das meninas em especial e considerou-se a construção de três banhos, um para as meninas outro para os meninos e um terceiro para o uso dos professores.

Comparando com os que usavam e os que têm de usar a partir deste ano escolar as diferenças saltam à vista, tenho sido testemunha da alegria em especial das meninas. Os pequenos muito entusiastas têm desejado intervir em sua construção, como consta nas imagens.

Me embarga a emoção e quero-me adiantar com este relatório, depois do 18 de março do presente ano de 2013, data na que procederemos à inauguração e entrega à comunidade e ao sector de Educação mediante um acta, poderei agradecer uma vez mais à FUNDAÇÃO **CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ** e veremos totalmente finalizado este grande lucro em pró da niñez mais precisada e em aras de seu desenvolvimento pessoal mediante a educação com dignidade”

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

¡¡ Aqui esperamos-lhes!!

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 181-183

Convocatorias y eventos

AÑO 2013

XXVI Jornada de Matemática de la Zona Sur

Organiza: Sociedad Matemática de Chile y Universidad Católica del Maule.
Lugar: Talca (Termas de Quinamávida) Chile.
Fecha: 24 al 26 de abril de 2013.
Información: **http://www.ucm.cl/jmzs2013.html**

4º congreso internacional sobre la Teoría antropológica de lo didáctico CITAD-4

Lugar**:** Toulouse, Francia.
Convoca**:** Grupo de investigación en Teoría antropológica de lo didáctico
Fecha: 21 al 26 de abril de 2013.
Información: **http://www.atd-tad.org/**

XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas

Convoca**:** Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
Organiza: Sociedad Balear de Matemática (SBM)
Lugar**:** Palma, España.
Fecha: 2 al 5 de julio de 2013.
Información: **http://xvi.jaem.es/**

27° Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 27)
Lugar: Buenos Aires. Argentina
Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Fecha: 15 al 19 de Julio de 2013
Información: **www.clame.org.mx**

Del 16 al 20 de septiembre en Montevideo. Uruguay

www.cibem7.semur.edu.uy

Convoca la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)

REUNION ANUAL DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA 2013

Lugar**:** Rosario, Pcia. de Santa Fe. (Argentina)
Convoca**:** Unión Matemática Argentina (UMA)
Fecha: 17 al 20 de septiembre de 2013
Información: **www.union-matematica.org.ar**

ASOCIACIÓN COLOMBIANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

14º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. ECME—14

Convocan: Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME) y Universidad de Atlántico, Barranquilla..
Lugar: Ciudad de Barranquilla, Colombia.
Fecha: 9 al 11 de octubre de 2013.
Información: **www.asocolme.com**

VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática

ULBRA

Convoca: Universidad Luterana de Brasil
Organiza: Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da ULBRA Canoas
Lugar**:** Canoas, Rio Grande do Sul. Brasil.
Fecha: 16 al 18 de octubre de 2013.
Información: **www.ulbra.br/ciem2013**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 185-186

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@fisem.org**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**
4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

Para libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista:

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de **http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php**

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a **revistaunion@fisem.org**