UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 31 – Septiembre de 2012

# Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 3-4
ISSN: 1815-0640

**Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática** es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.
Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

## Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Alicia Bruno
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García Gonzalez
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés del Carmen Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

## Diseño y maquetación

**Diseño web**: Daniel García Asensio

**Logotipo de Unión**: Eudaldo Lorenzo

## Colaboran

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

OEI

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 5-6
ISSN: 1815-0640

# Editorial

*Estimados colegas y amigos:*

En esta nueva edición de UNIÓN les acercamos excelentes artículos de prestigiosos educadores e investigadores referidos a distintos temas de interés educativo y con diversas visiones.

En este número, la firma invitada es Marco Antonio Moreira, Ph.D. en Enseñanza de las Ciencias, profesor del Instituto de Física de la Universidad Federal de Río Grande del Sur, Brasil, que nos introduce en la visión crítica del aprendizaje significativo y sus implicaciones para la enseñanza contemporánea, haciendo una previa reflexión sobre las pedagogías que han influenciado la construcción de esta teoría.

> *"Enseñar no es depositar conocimientos en la cabeza del alumno. La adquisición de conocimientos es importante pero con criticidad, con cuestionamiento".*

Las secciones fijas son producciones de docentes colaboradores, muchos de ellos nos acompañan, escribiendo o coordinando, en todas las ediciones, les agradecemos especialmente por la creatividad de sus propuestas para los distintos niveles educativos.

Como siempre destacamos el apoyo de la OEI para que UNIÓN se publique desde su plataforma, y el aporte de la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz, lo que permite que llegue a una mayor cantidad de docentes de matemática en los distintos países.

Y agradecemos a los asesores, evaluadores, autores de cada edición y a nuestros lectores que nos siguen acompañando y fortaleciendo con su apoyo permanente.

Por último, los invitamos a continuar colaborando con el equipo de UNIÓN, para seguir ofreciendo excelencia en educación matemática.

Un abrazo fraternal.

**Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.**
**Directoras**

# Editorial

Caros Colegas e Amigos*:*

Nesta nova edição de UNIÃO acercamos-lhes excelentes artigos de prestigiosos educadores e pesquisadores referidos a diferentes temas de interesse educativo e com diversas visões.

Neste número, a assinatura convidada é Marco Antonio Moreira, Ph.D. em Ensino das Ciências, professor do Instituto de Física da Universidade Federal de Rio Grande do Sur, Brasil, que nos introduz na visão crítica da aprendizagem significativa e seus envolvimentos para o ensino contemporâneo, fazendo uma prévia reflexão sobre as pedagogias que influenciaram a construção desta teoria.

> *"Ensinar não é depositar conhecimentos na cabeça do aluno. A aquisição de conhecimentos é importante mas com criticidad, com questionamento".*

As secções fixas são produções de docentes colaboradores, muitos deles nos acompanham, escrevendo ou coordenando, em todas as edições, lhes agradecemos especialmente pela criatividade de suas propostas para os diferentes níveis educativos.

Como sempre destacamos o apoio da OEI para que UNIÃO se publique desde sua plataforma, e o contribua da Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz, o que permite que chegue a uma maior quantidade de docentes de matemática nos diferentes países.

E agradecemos aos assessores, evaluadores, autores da cada edição e a nossos leitores que nos seguem acompanhando e fortalecendo com seu apoio permanente.

Por último, convidamo-los a continuar colaborando com a equipa de UNIÃO, para seguir oferecendo excelencia em educação matemática.

Un abrazo fraternal.

**Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich**
**Directoras**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Septiembre de 2012, Número 31, página 7
ISSN: 1815-0640

# Marco Antonio Moreira

## Breve Reseña

Marco Antonio Moreira é: Licenciado em Física (1965), Mestre em Física (1972) pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)/Brasil e Doutor em Ensino de Ciências (1977) pela Cornell University/USA.

É professor do Instituto de Física da UFRGS desde 1967 e colaborador da Universidade de Burgos/Espanha desde 1998.

Integrou, como Secretário de Ensino, a Diretoria da Sociedade Brasileira de Física em 1973 e 1974. Participou da Comissão de Educação da União Internacional de Física Pura e Aplicada (IUPAP) de 1975 a 1798.

Foi Professor Visitante na Cornell University de 1986 a 1988. Integrou o Comitê de Educação do CNPq de 1993 a 1995 e de 1999 a 2001. Foi membro da Comissão de Especialistas em Ensino de Física da SESu/MEC de 1996 a 1999, presidindo-a em 1998 e 1999.

É pesquisador 1A do CNPq, na Área de Educação, desde 1989. Presidiu a Associação Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências (ABRAPEC) de 1997 a 2001. Foi Representante da Área de Ensino de Ciências e Matemática na CAPES de 2000 a 2007.

Suas áreas de interesse são o ensino de ciências e a pesquisa em ensino de ciências, particularmente Física. Dedica-se também a teorias de aprendizagem, especialmente a da aprendizagem significativa. Além disso, atua em filosofia da ciência, metodologia da pesquisa em educação e metodologia do ensino superior.

Foi editor da Revista Brasileira de Ensino de Física de 1989 a 1993, da Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências de 2001 a 2005 e na revista Experiências em Ensino de Ciências de 2007 a 2011. É editor dos periódicos Investigações em Ensino de Ciências desde 1996 e Aprendizagem Significativa em Revista desde 2011. Já publicou 228 artigos em periódicos, 118 trabalhos completos em anais de congressos e 34 livros. Orientou 48 dissertações de mestrado e 34 teses de doutorado, co-orientou 5 dissertações de mestrado e 5 teses de doutorado.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Septiembre de 2012, Número 31, páginas 9-20
ISSN: 1815-0640
firma invitada

# La Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico: un referente para organizar la enseñanza contemporánea[1]

**Marco Antonio Moreira**

## Resumen

Inicialmente son presentadas las pedagogías que han influenciado la construcción de la teoría del aprendizaje significativo crítico: el enfoque behaviorista de Skinner, la psicología educativa de Ausubel, la educación bancaria y la pedagogía de la autonomía de Freire, la enseñanza subversiva de Postman y las clases con la boca cerrada de Finkel. A continuación es introducida la visión crítica del aprendizaje significativo y son destacadas implicaciones para la enseñanza contemporánea.

## Abstract

Initially, the pedagogies that influenced the construction of the critical meaningful learning theory are presented: Skinner's behavioristic approach, Ausubel's educational psychology, Freire's pedagogy of autonomy and banking education, Postman's subversive teaching and Finkel's classes with the mouth shut. Then, the critical view of meaningful learning is introduced and some implications for contemporary teaching are discussed..

## Resumo

Inicialmente são apresentadas as pedagogias que influenciaram a construção da teoria da aprendizagem significativa crítico: o enfoque behaviorista de Skinner, a psicologia educativa de Ausubel, a educação bancária e a pedagogia da autonomia de Freire, o ensino subversiva de Postman e as classes com a boca fechada de Finkel. A seguir é introduzida a visão crítica da aprendizagem significativa e são destacadas envolvimentos para o ensino contemporâneo

## 1. Introducción

La teoría del aprendizaje significativo crítico resulta de mi larga experiencia, casi cincuenta años, como profesor de Física y Matemática. A lo largo de esa experiencia he sufrido varias influencias teóricas en términos de cómo se enseña y cómo se aprende. La primera y muy fuerte fue el conductismo de Skinner. Durante varios años mis prácticas docentes estaban dirigidas por el enfoque skinneriano, incluso he dado clases sobre análisis experimental de la conducta para profesores de ciencias en Brasil y otros países latinoamericanos.

[1] Texto completo de Conferencia Plenaria presentada en el I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y de la Matemática, Tandil, Argentina, 8 al 11 de noviembre de 2011, y en el III Curso Boliviano de Enseñanza de la Física, Sucre, Bolivia, 26 al 29 de marzo de 2012.

Sin embargo, al tomar contacto con la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel, a través de Joseph Novak, en Cornell, en los años setenta, me di cuenta de que el enfoque comportamentalista de Skinner estimulaba el aprendizaje mecánico, no el significativo.

Algunos años después conocí las magníficas obras de Neil Postman y decidí tomarlas como referente, no para una enseñanza subversiva sino para un aprendizaje subversivo. Pero, para evitar connotaciones políticas decidí usar el término aprendizaje significativo crítico, no subversivo.

Aunque había, desde mucho tiempo, oído hablar bastante de Paulo Freire, no hace mucho que me encanté con su pedagogía de la autonomía y con el concepto de educación bancaria. La pedagogía de la autonomía tiene mucho que ver con aprendizaje significativo y la educación bancaria con aprendizaje mecánico.

Más recientemente, he leído la obra "Dar clases con la boca cerrada", de Don Finkel, y me pareció muy adecuada como referente para promover un aprendizaje significativo crítico.

A continuación son presentadas muy sintéticamente las posturas de Skinner, Ausubel, Postman, Freire y Finkel, como pedagogías que han influenciado la teoría del aprendizaje significativo crítico.

## 2. El conductismo de skinner[2]

La *idea clave* en este enfoque es que el *comportamiento es controlado por las consecuencias:* dependiendo de lo que ocurre después de la exhibición de una conducta, el sujeto probablemente la exhibirá otra vez, o no. Cuando aumenta la frecuencia de una respuesta frente a lo que pasa cuando el sujeto la presenta se dice que él o ella está condicionado(a). Un estímulo inicial es siempre necesario para provocar una respuesta. No obstante, para controlar la conducta de una persona, o de un animal, lo más importante es la consecuencia, el llamado *refuerzo positivo*. Cuando la consecuencia es buena para el sujeto, pasa a funcionar como estímulo para la presentación de la misma conducta otra vez.

Es cierto que lo que es consecuencia buena, o refuerzo positivo, para una persona puede no serlo para otra, pero hay unos cuantos eventos y objetos que "funcionan" en muchas situaciones. En la escuela, por ejemplo, la "respuesta cierta", la "buena calificación", un elogio del docente son bastante eficaces para que el estudiante esté atento en las clases, haga muchos apuntes y estudie para las pruebas, en general en la noche anterior para no olvidarse de nada de lo que "cae" en examen.

Sin embargo, el enfoque skinneriano se limita al estudio de comportamientos (objetivos conductistas) manifiestos y mensurables. No tiene en consideración lo que ocurre en la mente del sujeto durante el proceso de aprendizaje.

[2] Burrhus Frederic Skinner (1904-1990) inicialmente estudió Biología, pero a lo largo de sus estudios conoció los trabajos de Ivan Pavlov y James Watson y fue profundamente influenciado por ellos. Obtuvo su doctorado en Psicología por la Universidad de Harvard,en 1931, donde fue profesor durante muchos años. Una de sus obras más importantes, *The behavior of organisms*, fue publicada en 1938 lanzando las bases del condicionamiento operante. Una novela, *Walden Two*, publicada en 1948, popularizó su concepción de una sociedad ideal basada en técnicas positivas de control de la conducta. En 1971, publicó otra obra, *Beyond Freedom and Dignity*, de fácil lectura donde otra vez defendió sus principios comportamentalistas.

En la práctica escolar son definidos objetivos, es decir, respuestas que los alumnos deben dar, se les enseñan dichas respuestas y se las piden en los tests. Normalmente, no se cuestiona si los alumnos han comprendido las respuestas, si han dado significado a los conocimientos, si son capaces de aplicarlos en situaciones distintas de aquellas trabajadas en clase.

Lo importante es saber la respuesta correcta y recibir el refuerzo positivo. Quizás no fuera esa la intención de Skinner, pero en la escuela su comportamentalismo se transformó en entrenamiento para el test. Contrariamente al discurso pedagógico y político, la escuela contemporánea no es constructivista, socio-culturalista y otros adjetivos, es simplemente comportamentalista, entrenadora para exámenes locales, nacionales, internacionales. Las mejores escuelas son las que tienen más estudiantes aprobados en esos exámenes. Si aprenden significativamente, si algo queda después de un par de años, o de un par de meses, no importa.

Usando la terminología skinneriana, ese enfoque es un estímulo al aprendizaje mecánico, netamente memorístico de corto plazo, reforzado positivamente por el buen desempeño en los tests.

## 3. El Aprendizaje Significativo de Ausubel[3]

La idea central de la teoría de Ausubel (1968, 2000) es que *de todos los factores que influyen en el aprendizaje, el más importante es lo que el alumno ya sabe.* Es decir, aprendemos desde lo que ya sabemos. En consecuencia, hay que averiguar eso y enseñar de acuerdo con ese punto de partida.

Sin embargo, al referirse a lo que el alumno ya sabe, Ausubel se está reportando a conocimientos previos aprendidos de manera significativa, no simplemente memorística sin significado.

La *interacción cognitiva* entre conocimientos nuevos y previos es la característica clave del *aprendizaje significativo*. En dicha interacción el nuevo conocimiento debe relacionarse de manera no arbitraria y substantiva (no literal) con aquello que el aprendiz ya sabe.

Aprendizaje significativo es aprendizaje con comprensión, con significado, con capacidad de transferencia. Es el opuesto del aprendizaje mecánico. Si imaginamos que el aprendizaje se produce a lo largo de un continuo, aprendizaje mecánico estaría en un extremo y aprendizaje significativo en el otro. En situaciones de enseñanza-aprendizaje muchos episodios ocurren en regiones intermedias de ese continuo. A pesar de eso, el enfoque conductista favorece sobradamente la zona del aprendizaje mecánico.

La *segunda condición* del aprendizaje significativo es la *intencionalidad*, la predisposición para aprender. En otras palabras, aprendemos significativamente si queremos. En el aula, el alumno aprende con significado si quiere. Si no quiere,

[3] David Paul Ausubel (1918-2008) se graduó en Psicología y Medicina. Su doctorado fue en Psicología del Desarrollo en la Universidad de Columbia, en Nueva York, donde fue profesor durante muchos años en el Teachers College. Dedicó su carrera académica a una visión cognitivista de la psicología educativa. Su obra básica es *Psicología de la Educación: una visión cognitivista*, publicada en 1963 y revisada en el año 2000. Su teoría del aprendizaje significativo ha sido ampliamente difundida por Joseph D. Novak y Marco A. Moreira. Seis congresos internacionales sobre aprendizaje significativo se han realizado hasta el momento.

siempre puede recurrir al aprendizaje mecánico, incluso porque la enseñanza lo estimula a eso.

Naturalmente, puede ocurrir que el alumno tenga la predisposición para aprender y no tenga el conocimiento previo adecuado o que los materiales educativos no sean buenos. Por eso, en el marco de la teoría, Ausubel propone que esos materiales (libros de texto, clases, aplicativos, etc.) sean *potencialmente significativos*, lo que implica que tengan significado lógico y que los alumnos tengan conocimientos previos específicamente relevantes para dar significados a los conocimientos vehiculizados en dichos materiales.

En el proceso de aprendizaje significativo los significados lógicos de los materiales son transformados en psicológicos en el sujeto que aprende.

En la práctica, el impacto de la teoría del aprendizaje significativo es pequeño porque el currículum escolar no está organizado para tener en cuenta el conocimiento previo de los aprendices, ni para generar en ellos una predisposición para aprender significativamente. Aunque presente una bonita serie de objetivos pretendidos de aprendizaje, en la práctica ese currículum se transforma en entrenamiento para el test (Stipek, 2011).

## 4. La Educación Bancaria y la Pedagogía de la autonomía de Paulo Freire[4].

Freire califica como *educación bancaria* aquella que anula el poder creador de los educandos o lo minimiza, estimulando su ingenuidad y no su criticidad.

En la *concepción bancaria*, la educación es el acto de depositar, de transferir, transmitir valores y conocimientos. En esa concepción, el saber es una donación de los que se juzgan sabios a los que ellos juzgan nada saber (1988, pp. 58-59). Cabe a ella alienar aún más a los sujetos que ya son seres pasivos, adaptándolos al mundo. Cuanto más adaptados, tanto más educados (op.cit., p.63).

*En esa concepción, estudiar es memorizar contenidos mecánicamente, sin significados. Lo que se espera del educando es la memorización de los contenidos depositados en él. La comprensión y la significación no son requisitos, la memorización sí.*

Contrariamente a la educación bancaria, *la criticidad, la conciencia crítica*, es fundamental para la liberación. Para eso, según Freire, la *dialogicidad* – esencia de la educación como práctica de la libertad (p.77) – es imprescindible. Diálogo, en todo caso, no es palabrería, verbalismo, bláblábló. Tampoco es la discusión guerrera, polémica, entre sujetos que buscan imponer su verdad.

En esa perspectiva, la educación auténtica no se hace del educador al educando o del educador sobre el educando, sino del educador con el educando.

No obstante, eso no significa que el educador sea igual al educando. Educador y educando son diferentes, pero esa diferencia no puede ser antagónica. El educador debe dirigir el estudiar del educando, pero sin autoritarismo y sin que los

[4] Paulo Freire (1921-1997) fue un brasileño que se destacó internacionalmente por su trabajo en la educación popular. Siempre defendió el diálogo no solamente como método, sino también como un modo de ser democrático. Es considerado uno de los más notables pensadores en la historia de la educación. Desarrolló una pedagogía crítica en contraposición a la educación tradicional, tecnicista, apasivadora.

alumnos sean licenciosos. El proceso educativo es siempre directivo, incluso en una educación libertadora, pero esa *direccionalidad* no debe ser confundida con comando, con domesticación. El educador freireano dirige los trabajos del educando para, con él, ultrapasar su ingenuidad inicial. Es un educador directivo libertador, no manipulador, opresor, domesticador.

En ese proceso, *la pregunta es esencial: preguntar es la propia esencia del conocer*. El acto de preguntar está ligado al acto de existir, de ser, de estudiar, de investigar, de conocer (p.97).

En la educación bancaria, el educador es quien pregunta y cobra del educando respuestas memorizadas. En la educación dialógica, el educando es quién debe preguntar, cuestionar. Pero eso no significa que el educador sea un repositorio de respuestas, ni que existan respuestas definitivas. No hay repuestas definitivas, todas son provisionales. Lo importante es el preguntar que lleva al conocer que tampoco no es definitivo.

Mientras la educación bancaria estimula la *conciencia ingenua*, la que tiende a un simplismo en la interpretación de los problemas, a aceptar formas gregarias o masificadoras del comportamentalismo, a aceptar la realidad como no cambiable, la educación dialógica fomenta la *conciencia crítica*, la que no se satisface con apariencias, reconoce que la realidad es cambiable, es indagadora, investigadora, busca verificar las explicaciones, no acepta explicaciones mágicas, ama el diálogo, está siempre dispuesta a revisiones,…(p.41).

El desarrollo de esa conciencia crítica estaría vinculado a otra escuela, donde predominase una *pedagogía de la autonomía*.

Paulo Freire siempre se destacó por una pedagogía libertadora, por una educación política, pero en su obra *Pedagogía de la Autonomía: saberes necesarios a la práctica educativa* (2007) se encuentran muchos principios sobre la docencia que caben perfectamente en cualquier curso sobre metodología de la enseñanza. Los principios generales de la pedagogía de la autonomía son:

- No hay docencia sin discencia.
- Enseñar no es transferir conocimiento.
- Enseñar es una especificidad humana.

El primer principio implica que quien enseña aprende al enseñar y quien aprende enseña al aprender; que enseñar no existe sin aprender y vice-versa (op.cit., p.23). Este principio incorpora varios otros, como, por ejemplo:

*Enseñar exige rigurosidad metódica:* trabajar con el educando la rigurosidad metódica con que debe aproximarse de los objetos cognoscibles; evidenciarle que es tan fundamental adquirir, dominar, reconstruir, el conocimiento existente cuanto estar abierto y apto a la producción de conocimiento todavía no existente (p.28).

*Enseñar exige criticidad:* reforzar en el educando la capacidad crítica, la curiosidad, la insubmisión; en realidad, la curiosidad ingenua que, “desarmada”, está asociada al saber del sentido común, es la misma curiosidad que, criticizándose, aproximándose, de forma cada vez más metódicamente rigorosa, del objeto cognoscible, se vuelve curiosidad epistemológica (p.31).

*Enseñar exige reflexión sobre la práctica*: en la formación permanente de los profesores, el momento fundamental es el de la reflexión crítica sobre la práctica; es pensando críticamente sobre la práctica de hoy o de ayer como se puede mejorar la próxima práctica (p.39).

El segundo principio general de la pedagogía de la autonomía de Freire es el de que *enseñar no es transferir conocimiento*, sino crear las posibilidades para su propia producción o su construcción (p.47).

Para él, *el educador que, enseñando cualquier materia, 'castra' la curiosidad del educando en nombre de la eficacia de la memorización mecánica de los contenidos, cercena la libertad del educando, su capacidad de aventurarse. No forma, domestica* (p.56).

El tercer principio general de la pedagogía freireana es el de que *enseñar es una especificidad humana,* al cual están subordinados varios otros (pp. 91-146):

- *Enseñar exige seguridad, competencia profesional y generosidad.*
- *Enseñar exige compromiso.*
- *Enseñar exige comprender que la educación es una forma de intervención.*
- *Enseñar exige libertad y autoridad.*
- *Enseñar exige tomada consciente de decisiones.*
- *Enseñar exige saber escuchar.*
- *Enseñar exige reconocer que la educación es ideológica.*
- *Enseñar exige disponibilidad para el diálogo.*
- *Enseñar exige querer bien a los educandos.*

Aunque Freire estuviese siempre buscando la liberación de los oprimidos, y opresores, en la perspectiva social, su pedagogía de la autonomía puede ser interpretada como libertadora de una manera general, particularmente en una escuela en la que todavía predomina la educación bancaria.

## 5. La enseñanza subversiva de neil postman[5]

Neil Postman, como Ausubel, también atribuye gran importancia al conocimiento previo en el aprendizaje de nuevos conocimientos:

> *Podemos , a fin de cuentas, aprender sólo en relación con lo que ya sabemos. Esta idea – por sí sola – implica un gran cambio en la mayoría de las*

[5] Neil Postman (1931 - 2003) nació y pasó la mayor parte de su vida en Nueva York. Obtuvo su maestría y doctorado en el Teachers College, Universidad de Columbia. Fue profesor en la New York University de 1971 a 2002. Ha publicado 18 libros y más de 200 artículos. Fue muy crítico con la educación norteamericana y con la mídia, particularmente la televisión que, según él, confunde asuntos serios con diversión. Entre sus libros se destacan *Teaching as a Subversive Activity*, *The End of Education, Technopoly*: *The Surrender of Culture to Technology* y *Amusing Ourselves to Death*.

*metáforas que dirigen las políticas y los procedimientos de las escuelas. (Postman y Weingartner, 1969, p.62)*

Conceptos fuera de foco

En el último capítulo de su libro *Teaching as a subversive activity*, Postman y Weingartner decían, en 1969, que aunque debería preparar al alumno para vivir en una sociedad caracterizada por el cambio, cada vez más rápido, de conceptos, valores, tecnologías, la escuela aún se ocupaba de enseñar conceptos "fuera de foco", de los cuales los más evidentes eran (op. cit., p. 217):

1. *El concepto de "verdad" absoluta, fija, inmutable, en particular desde una perspectiva bipolar del tipo buena o mala.*
2. *El concepto de certeza. Existe siempre una respuesta "correcta", y es absolutamente "correcta".*
3. *El concepto de entidad aislada, o sea, "A" es simplemente "A", y punto final, de una vez para siempre.*
4. *El concepto de causalidad simple, única, mecánica; la idea de que cada efecto es el resultado de una única causa, fácilmente identificable.*
5. *El concepto de que las diferencias existen solamente en formas paralelas y opuestas: bueno-malo, correcto-errado, si-no, corto-largo, para arriba-para abajo, etc.*
6. *El concepto de que el conocimiento es "transmitido", que emana de una autoridad superior, y debe ser aceptado sin ser cuestionado.*

Por el contrario, las estrategias intelectuales de supervivencia en esta época de energía nuclear y de viajes espaciales dependerían de conceptos como relatividad, probabilidad, incertidumbre, función, causalidad múltiple (o no-causalidad), relaciones no simétricas, grados de diferencia e incongruencia.

Hace más de cuarenta años

Esto se escribió hace más de cuarenta años, cuando la llegada del hombre a la Luna y la llamada era nuclear simbolizaban grandes cambios. Hoy, esos mismos cambios resultan pequeños frente a los que nos atropellan diariamente.

La educación, con todo, continúa estimulando varios de los conceptos que Postman y Weingartner criticaban y clasificaban como "fuera de foco".

Aún se enseñan "verdades", respuestas "correctas", entidades aisladas, causas simples e identificables, estados y "cosas" fijos, diferencias solamente dicotómicas. Y aún se "transmite" el conocimiento, desestimulando el cuestionamiento.

El discurso educativo puede ser otro, pero la práctica escolar sigue sin fomentar el "aprender a aprender" que permitirá a la persona a lidiar con el cambio de forma fructífera y sobrevivir.

Nuevos conceptos fuera de foco

En lugar de ayudar al alumnado a construir significados para conceptos como *relatividad, probabilidad, incertidumbre, sistema, función, causalidad múltiple, asimetría, grados de diferencia, representaciones, modelos*, la educación, a mi manera de ver, ahora agregó nuevos conceptos fuera de foco a la lista de Postman y Weingartner.

Por ejemplo,

1. *El concepto de información como algo necesario y bueno; cuanto más información, mejor, estamos en plena era de la información.*
2. *El concepto de idolatría tecnológica; la tecnología es buena para la humanidad y está necesariamente asociada al progreso y a la calidad de vida.*
3. *El concepto de consumidor consciente de sus derechos; cuanto más se consume, mejor, cuantos más objetos innecesarios para comprar, mejor, pero se deben hacer valer los derechos del consumidor.*
4. *El concepto de globalización de la economía como algo necesario e inevitable; el libre comercio sin restriciones es bueno para todos.*
5. *El concepto de que "el mercado da cuenta"; por ejemplo, la educación es una mercancía que puede ser vendida por cualquier institución, "el mercado se encarga" de la oferta, de la demanda, del control de calidad.*
6. *El concepto de que las mejores escuelas son las que mejor preparan para exámenes de admisión a la universidad, o para exámenes internacionales como el PISA.*

La escuela aún transmite la ilusión de la certeza, pero está actualizándose tecnológicamente, compitiendo con otros mecanismos de difusión de información y preparando, aunque en forma velada o tal vez sin darse cuenta, al estudiante para la sociedad de consumo, para el mercado, para la globalización, para la idolatría tecnológica.

¿Pero cuál sería el foco? ¿Cuál sería la salida?

Parafraseando a Postman y Weingartner, quizás el "*aprendizaje significativo como actividad subversiva".* Sin embargo, la subversión a la cual me refiero es, ante todo, una postura crítica, como estrategia de supervivencia en la sociedad contemporánea. Así, la salida podría ser el *aprendizaje significativo crítico (subversivo).*

## 6. Las clases con la boca cerrada de Don Finkel[6]

Don Finkel empieza su defensa de un modelo alternativo de enseñanza criticando al modelo clásico, al cual le da el nombre de *modelo de la narrativa*.

El modelo clásico de enseñanza, consagrado, aceptado sin cuestionamientos por docentes, alumnos y padres, por la sociedad en general, es aquel en el cual el *profesor enseña*, *básica* y *fundamentalmente, hablando, diciendo a los estudiantes lo que se supone que deben saber.* Ese modelo es el que Don Finkel (2008, p. 44) describe como *Dar clase narrando*, al cual él contrapone el modelo de *Dar clase con*

[6] Donald Finkel ha vivido con su familia en Olympia, Washington, y ha sido profesor en el Evergreen State College desde 1976 hasta su muerte en septiembre de 1999. Es coautor, con William Arney, de la obra *Educating for Freedom*: *The Paradox of Pedagogy* (Rutgers University Prees, 1995).

*la boca cerrada* (op. cit., p. 45), estimulando búsquedas de modos alternativos de enseñar.

En ese modelo, muchas veces basado en un libro de texto, el profesor escribe (una forma de narrar) en la pizarra lo que los alumnos deben copiar en sus cuadernos, estudiar (memorizar) y después reproducir en las pruebas. A veces el profesor escribe en la pizarra partes del propio libro de texto y, aún así, los alumnos copian para estudiar más tarde, en general la noche anterior a las pruebas para no olvidar.

*El acto principal de dar clase es narrar clara y cuidadosamente a los estudiantes algo que ellos no saben de antemano. El conocimiento se transmite, nos imaginamos, por medio del presente acto narrativo (Finkel, 2008, p. 34).*

El modelo de la narración parece natural a los estudiantes, los padres, los gestores, la sociedad, a todos y, por tanto, no se cuestiona.

Sin embargo, no debería ser así porque transmitir el conocimiento a partir de la cabeza del profesor hasta el cuaderno del alumno, de modo que éste transfiera el conocimiento desde el cuaderno hasta su cabeza para aprobar los exámenes, es un objetivo inadecuado para la educación y mucho menos para un aprendizaje significativo crítico.

Este modelo está orientado hacia el aprendizaje de informaciones específicas a corto plazo. Poco queda de este aprendizaje después de algún tiempo.

Muchos enseñantes no se limitan a repetir en la pizarra lo que está en los libros, hacen esquemas, resúmenes, traen ejemplos, explican, es decir, "dan buenas clases", según el modelo clásico. Sin embargo, los alumnos copian todo lo que pueden (o piden los archivos electrónicos al profesor) para estudiar más adelante.

Algunos docentes, generalmente considerados excelentes profesores, incluso grandes profesores, hacen magníficas presentaciones orales, encantan sus estudiantes explicando clara y cuidadosamente determinadas cuestiones. Estos estudiantes toman apuntes de lo que pueden y dejan el aula con la buena sensación de que entendieron el tema. Si este asunto se les solicita en las pruebas de la misma manera en la que el profesor lo ha explicado, probablemente, saldrán muy bien.

No obstante si las cuestiones consisten en la aplicación de ese mismo tema a nuevas situaciones, el resultado es probable que sea pobre. Es común en este caso decirse que el asunto no fue “dado” en clase.

Hoy en día se habla mucho de *enseñanza centrada en el alumno*, de *profesor como mediador* y de *aprender a aprender.* Si estamos de acuerdo con ese discurso, seguramente estaremos de acuerdo con Finkel en el sentido de que narrar no es la mejor manera de enseñar y tendremos que repensar nuestro modelo de buen profesor. En esa línea, Finkel propone la metáfora *Dar clase con la boca cerrada* que él usa para tornar problemáticas las suposiciones clásicas sobre la buena docencia.

## 7. El Aprendizaje Significativo Crítico de Marco Antonio Moreira[7]

Sabemos que el aprendizaje significativo se caracteriza por la *interacción* entre el nuevo conocimiento y el conocimiento previo. En ese proceso, que es no literal y no arbitrario, el nuevo conocimiento adquiere significados para el aprendiz y el conocimiento previo queda más rico, más diferenciado, más elaborado en relación con los significados ya presentes y, sobre todo, más estable. (Ver, por ejemplo, Moreira y Masini, 1982, 2006; Moreira, 1999, 2000, 2006, 2012; Masini e Moreira, 2008.)

¿Cómo sería un aprendizaje significativo crítico?

*Aprendizaje significativo crítico: es aquella perspectiva que permite al sujeto formar parte de su cultura y, al mismo tiempo, estar fuera de ella*. Se trata de una perspectiva antropológica en relación con las actividades de su grupo social, que permite al individuo participar de tales actividades, pero, al mismo tiempo, reconocer cuándo la realidad se está alejando tanto que ya no se está captando por parte del grupo.

Ése es el significado de subversivo para Postman y Weingartner (op.cit., p. 4) pero, mientras ellos se ocupan de la enseñanza subversiva, prefiero pensar más en términos de aprendizaje subversivo, y creo que el *aprendizaje significativo crítico* puede subyacer a esta idea de subversión.

Principios facilitadores

Para un aprendizaje significativo crítico (subversivo) es preciso (Moreira, 2005):

1. Aprender/enseñar preguntas en lugar de respuestas (*Principio de la interacción social y del cuestionamiento*).
2. Aprender a partir de distintos materiales educativos (*Principio de la no centralidad del libro de texto*).
3. Aprender que somos perceptores y representadores del mundo (*Principio del aprendiz como perceptor/representador*).
4. Aprender que el lenguaje está totalmente involucrado en todos los intentos humanos de percibir la realidad (*Principio del conocimiento como lenguaje*).
5. Aprender que el significado está en las personas, no en las palabras (*Principio de la conciencia semántica*).
6. Aprender que la persona aprende corrigiendo sus errores (*Principio del aprendizaje por el error*).
7. Aprender a desaprender, a no usar conceptos y estrategias irrelevantes para la supervivencia (*Principio del desaprendizaje*).

---

[7] Marco Antonio Moreira es profesor del Instituto de Física de la Universidad Federal de Río Grande del Sur, Brasil. Fue *Visiting Fellow* en el Departamento de Física de la Universidad de Cornell, en Estados Unidos, en 1972. Más adelante, en 1977, obtuvo su Ph.D. en Enseñanza de las Ciencias bajo la dirección de J.D. Novak, D.B. Gowin y D.F. Holcomb en esa misma universidad. Desde esa época se dedica a la enseñanza de las ciencias, particularmente de la Física, y al aprendizaje significativo según distintos referentes teóricos. Más recientemente llegó a la visión crítica influenciado por las obras de B.F. Skinner, D.P. Ausubel, Neil Postman, Paulo Freire y Don Finkel.

8. Aprender que las preguntas son instrumentos de percepción y que las definiciones y las metáforas son instrumentos para pensar (*Principio de la incertidumbre del conocimiento*).
9. Aprender a partir de diferentes estrategias de enseñanza (*Principio de la no utilización de la pizarra, del abandono de la narrativa*).

Estos principios son bastante auto explicativos y coherentes con las posturas de Ausubel, Freire, Postman y Finkel, aunque no hayan sido extraídos directamente de esos autores, como se dijo en la Introducción. La obra más inspiradora del aprendizaje significativo crítico fue la de Postman. Sin embargo, más tarde se encontraron puntos en común con las obras de Freire y Finkel. Por otro lado, no tiene sentido proponer un aprendizaje significativo de Ausubel sin contraponerse al aprendizaje mecánico resultante del enfoque conductivista de Skinner

## 8. Implicaciones para la enseñanza

De los enfoques teóricos presentados resultan claramente las siguientes implicaciones para la enseñanza de un cuerpo de conocimientos en situación formal de enseñanza presencial o a distancia:

El conocimiento previo debe ser siempre considerado. Es la variable aislada que más influye en el aprendizaje de nuevos conocimientos, funcionando como anclaje cognoscitivo que ayuda a dar significados a esos conocimientos, en un proceso interactivo, o como obstáculo epistemológico que dificulta la atribución de significados.

No tiene sentido enseñar sin tener en cuenta el conocimiento previo de los alumnos en alguna medida.

La interacción personal, el intercambio de significados entre estudiantes y profesor o entre ellos mismos, es fundamental. El conocimiento previo (la variable más importante) es largamente implícito. Sin crear situaciones para que los alumnos hablen, el docente no tiene idea de cuáles y cómo están siendo captados los significados de la materia de enseñanza.

La enseñanza no debe ser monológica, sino dialógica. El docente debe hablar menos (narrar menos) y crear más espacios para que los alumnos hablen y externalicen los significados que están captando.

Enseñar no es depositar conocimientos en la cabeza del alumno. La adquisición de conocimientos es importante pero con criticidad, con cuestionamiento. Los conocimientos no deben ser enseñados como verdades inmutables, sino como construcciones, creaciones humanas. El conocimiento que construimos depende de las preguntas que hacemos y de las metáforas y definiciones que utilizamos.

En la enseñanza se deben utilizar distintos materiales instruccionales y diferentes estrategias didácticas, estimulando la participación del alumno. Basar la enseñanza en un único manual no es educar, sino entrenar. El modelo de enseñanza no puede ser únicamente el de la narrativa porque poco queda de ello después de algún tiempo.

La evaluación no puede estar basada exclusivamente en tests de respuesta correcta. Esta estrategia es conductista, no evalúa, mide el aprendizaje mecánico. La evaluación debe buscar evidencias de aprendizaje, debe incluir aspectos formativos y recursivos.

En el proceso enseñanza/aprendizaje se debe aprovechar el error. El alumno puede aprender a partir del error. Se debe estimular la detección de errores y la búsqueda de nuevas respuestas. No hay respuestas definitivas.

## Bibliografía

Ausubel, D. P. (1968). *Educational Psychology: a cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston. 685p.

Ausubel, D.P.(2000). *The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 212p.

Finkel, D. (2008). *Dar clase con la boca cerrada.* Valencia: Publicacions de la Universitat Valencia. Traducción al español del original *Teaching with your mouth shut*. 292p.

Freire, P. (1988). *Pedagogia do oprimido*. São Paulo: Paz e Terra. 18ª edição. 184p.

Freire, P. (2007). *Pedagogia da autonomia*. São Paulo: Paz e Terra. 36ª edição. 79p.

Masini, E.A.S. e Moreira, M.A. (2008) *Aprendizagem significativa: condições para ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos*. São Paulo: Vetor Editora. 295p.

Moreira, M.A. (1999). *Aprendizagem significativa*. Brasília: Editora da UnB. 129p.

Moreira, M.A. (2000). *Aprendizaje significativo*: *teoría y práctica*. Madrid: Visor. 100p.

Moreira, M.A. (2005). *Aprendizaje significativo crítico.* Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS. 47p.

Moreira, M.A. (2006). *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula*. Brasília: Editora da UnB. 185p.

Moreira, M.A. (2011). *Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares*. São Paulo: Editora Livraria da Física. 179p.

Moreira, M.A. e Masini, E.A.S. (1982). *Aprendizagem significativa: a teoria de aprendizagem de David Ausubel*. São Paulo: Editora Moraes. 112p.

Moreira, M.A. e Masini, E.A.S. (2006). *Aprendizagem significativa: a teoria de aprendizagem de David Ausubel*. São Paulo: Centauro. 2ª edição 111p.

Postman, N. and Weingartner, C. (1969). *Teaching as a subversive activity*. New York: Dell Publishing Co. 219p.

Stipek, D. (2011). Education is not a race. *Science*, vol. 332, p. 1481.

.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 21-44
ISSN: 1815-0640

# Quais os objetivos para o ensino de Matemática? Algumas reflexões sobre os pontos de vista de professores

**Marcio Antonio da Silva; Célia Maria Carolino Pires**

## Resumo

O objetivo deste artigo é realizar uma análise crítica sobre os nove objetivos para o ensino de Matemática mais citados por professores de vários países, no Segundo Estudo Internacional de Matemática. A partir dessa investigação, são enfocados vários temas, como novas tecnologias, provas e demonstrações, investigações matemáticas, contextualização, resolução de problemas, modelagem matemática, entre outros. Conclui-se, a partir dos aportes teóricos escolhidos, que os principais objetivos do ensino de Matemática no ensino médio seriam: (i) desenvolver uma atitude de investigação; (ii) desenvolver a consciência sobre a importância da Matemática no cotidiano; (iii) desenvolver a consciência sobre a importância da Matemática nas ciências básicas e aplicadas; (iv) desenvolver uma aproximação sistemática para a resolução de problemas.

## Abstract

The aim of this article is to do a critical analysis of the nine aims for the teaching of mathematics most cited by teachers from various countries at the Second International Mathematics Study. From this research, we focused on different topics such as new technologies, proofs and demonstrations, mathematical investigations, contextualization, problem solving, mathematical modeling, among others. It follows from the chosen theoretical framework, the main objectives of teaching mathematics in high school would be: (i) to develop an attitude of inquiry; (ii) to develop an awareness of the importance of mathematics in everyday life; (iii) to develop an awareness of the importance of mathematics in the basic and applied sciences; (iv) to develop a systematic approach to solving problems.

## Resumen

El propósito de este artículo es realizar un análisis crítico de los nueve objetivos más citados por los profesores de varios países para la enseñanza de la matemática, en el II Estudio Internacional de Matemáticas. A partir de esta investigación, nos hemos centrado en diferentes temas como las nuevas tecnologías, pruebas y demostraciones, investigaciones matemáticas, contextualización, resolución de problemas, modelización matemática, entre otros. De éste se desprende que, a partir del marco teórico elegido, los objetivos principales de la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria serían los siguiente: (i) desarrollar una actitud de indagación, (ii) desarrollar la conciencia de la importancia de las matemáticas en la vida cotidiana, (iii) el desarrollo la conciencia de la importancia de las matemáticas en las ciencias básicas y aplicadas, (iv) desarrollar un enfoque sistemático para la solución de problemas.

## Introducción

Fundada na década de 1960, a International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) já realizou vários estudos comparativos entre sistemas educacionais de alguns países. Um dos primeiros que objetivava, entre outras coisas, estabelecer relações entre currículos de Matemática em várias partes do mundo foi o Second International Mathematics Study (SIMS), realizado entre 1977 e 1981.

Burstein (1992, apud BROWN, 1999, p. 78-79) divulgou uma lista de objetivos elencados por professores de Matemática de vinte países, durante o Segundo Estudo Internacional de Matemática (SIMS), revelando preocupações comuns de várias culturas relacionadas às metas para o ensino de Matemática naquela época: (i) compreender a estrutura lógica da Matemática; (ii) compreender a natureza da prova; (iii) tornar-se interessado em Matemática; (iv) conhecer fatos, princípios e algoritmos matemáticos; (v) desenvolver uma atitude de investigação; (vi) desenvolver a consciência sobre a importância da Matemática no cotidiano; (vii) realizar cálculos com rapidez e exatidão; (viii) desenvolver a consciência sobre a importância da Matemática nas ciências básicas e aplicadas; (ix) desenvolver uma abordagem sistemática para a resolução de problemas.

Neste artigo, pretende-se realizar uma análise crítica destes objetivos que parecem constituir uma boa amostra do que os professores de Matemática achavam que seriam metas para o ensino da Matemática. Em Silva (2009), estas reflexões serviram como aportes para a projeção de critérios que orientassem a escolha e organização de conteúdos de Matemática no Ensino Médio[1].

Após aproximadamente trinta anos da constatação destes objetivos, espera-se que, em virtude de uma série de pesquisas em Educação Matemática, várias destas metas já tenham sido superadas ou tornaram-se ultrapassadas e representam marcas de um período histórico marcado pelo tecnicismo e mecanização do ensino de Matemática. Por outro lado, talvez, ainda muitos destes propósitos podem estar presentes no ideário docente.

Então, a partir daqui, serão realizadas investigações teóricas minuciosas, salientando que os objetivos elencados foram escolhidos por professores de Matemática e, por isso, representam uma boa amostra sobre concepções docentes a respeito da construção e organização curricular da Matemática no Ensino Médio, além de manifestar características próprias de um período histórico (início da década de 1980), sendo um bom ponto de partida para ponderar sobre algumas questões que parecem ecoar na prática profissional do professor de Matemática nas salas de aula do Ensino Médio em vários países, talvez até hoje.

## 1. Compreender a estrutura lógica da Matemática

Esse objetivo primeiro, traçado pelos professores, parece reproduzir a idéia de que a Matemática seja uma ciência imutável e firmada na lógica aristotélica, na qual toda pergunta poderia ser respondida de apenas duas formas: sim ou não. Essa meta parece revelar uma característica formalista marcante, que pode ser

[1] Composição dos níveis escolares no Brasil: 5 anos iniciais do ensino fundamental (faixa etária entre 6 e 10 anos de idade); 4 anos finais do ensino fundamental (faixa etária entre 11 e 14 anos de idade); 3 anos do ensino médio (faixa etária entre 15 e 17 anos de idade).

interpretada pelos alunos como verdades que caem do céu e na qual as justificativas e provas ou devam ser aceitas ou são muito difíceis de serem compreendidas pela maioria.

É verdade que a estrutura axiomática da teoria proporciona uma riqueza de possibilidades na qual se debruçam os matemáticos para construí-la. É verdade, também, que se pode adotar, e isso implica escolher, um sistema de axiomas que melhor se adapte ao problema que se pretende resolver. No caso da Geometria, por exemplo, durante muitos séculos a Euclidiana foi aceita como verdade inabalável sobre a qual parecia pairar, cada vez mais, a ideia de que novas possibilidades de teoremas não eram necessárias, já que a teoria estava fechada, imutável e fortemente construída. Porém, motivados pelo trabalho de astrônomos e devido às grandes navegações dos séculos XV e XVI, verificou-se que a Geometria Euclidiana não era bem vinda em certas aplicações como, por exemplo, quando se deseja calcular distância entre dois pontos situados em uma superfície esférica, sabendo-se que a curva descrita entre esses dois pontos deve estar totalmente contida na própria superfície esférica. Pode-se, neste caso, a partir de outro sistema axiomático, construir novas Geometrias, verificar a validade ou não de certos teoremas quando são transferidos de um tipo de Geometria para outra. Isso seria compreender as possibilidades e limitações da Matemática e, principalmente, o papel de arquiteto criativo que exerce o matemático ao construir nova Matemática a partir de necessidades práticas ou pela genial percepção teórica sobre o que já foi construído.

Enfim, a grande questão reside na necessidade de colocar este objetivo no plural: ao invés de "compreender a estrutura lógica da Matemática", dizer-se-ia "compreender as estruturas lógicas das Matemáticas". Aliás, curiosamente, nas línguas francesa, inglesa e espanhola a palavra "Matemática" já aparece no plural, diferentemente do que ocorre na língua portuguesa.

Além disso, deve-se fazer com que os alunos compreendam que as Matemáticas, embora estruturadas em axiomas, possuem limitações, questionamentos que podem ser respondidos ou não, como Gödel demonstrou ao enunciar o Teorema da Incompletude.

Conhecer e refletir sobre essa dimensão muito mais complexa que as Matemáticas exercem e proporcionam ao serem articuladas, comparadas, construídas e desafiadas representa um objetivo de um currículo de Matemática para o Ensino Médio.

## 2. Compreender a natureza da prova

Mesmo a discussão de objetivos aparentemente estruturais, como "compreender a natureza da prova", pode ganhar aspectos novos dos tradicionais e questionáveis métodos rigorosos que podem ser contestáveis desde que não haja uma discussão sobre as várias lógicas existentes e os métodos válidos em cada uma delas, embora se saiba que, tradicionalmente, somente a lógica aristotélica é abordada. Métodos de demonstração, como "redução ao absurdo", fundamentados nesta lógica tradicional, ganham ar de rigor absoluto e indiscutível. Hanna et al. (2004), por exemplo, investigaram como os estudantes utilizam conceitos e argumentos da Estática para compreensão e produção de demonstrações de teoremas geométricos, como o fato das medianas de um triângulo de interceptarem em um único ponto, o baricentro, que é o centro de gravidade deste triângulo. A conclusão destes autores revela que o suporte da Física auxilia os alunos na compreensão e produção de significados consistentes para suas demonstrações geométricas. De fato, o ensino de Matemática, pela própria característica desta ciência, parece abandonar ou desprezar as tentativas empíricas de justificar suas verdades absolutas. Portanto, o suporte empirista de outras ciências pode ajudar a Matemática no difícil caminho de produção de significados para alguns conceitos, como a demonstração "experimental" ilustrada na figura 1, desenvolvida por Hanna et al. (Ibid., p. 82-83):

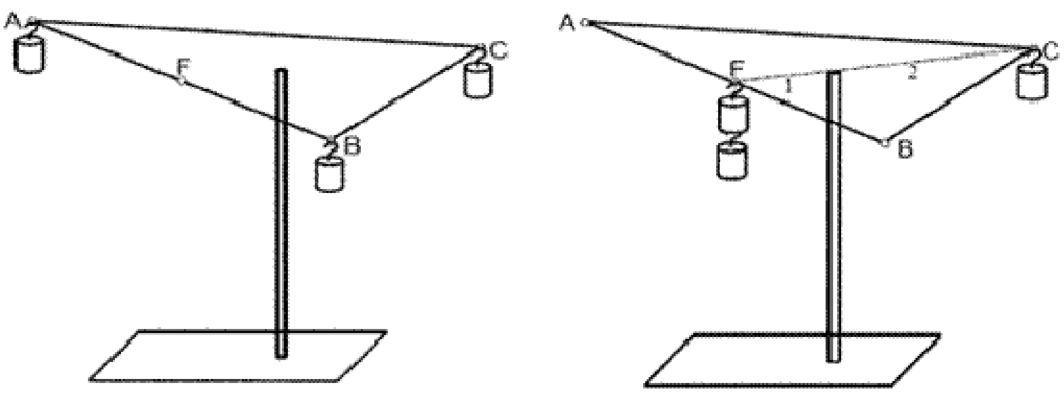



**Figura 1. Triângulo com massas iguais nos vértices A, B e C. Em seguida, as massas A e B são movimentadas para o ponto médio de AB.**

Em outro artigo, Hanna e Sidoli (2007) fazem um breve levantamento, dentro da perspectiva da Filosofia da Matemática, sobre as formas em que a visualização pode ser útil para justificar e explicar alguns aspectos de demonstrações matemáticas. Os autores apontam três correntes filosóficas que parecem discordar sobre o papel da visualização na justificativa de provas matemáticas.

Francis (1996), por exemplo, defende a posição de que a visualização tem um papel auxiliar no desenvolvimento da prova, como a utilização de computadores para este fim. No entanto, distingue claramente o papel limitador desta ferramenta em relação ao rigor metodológico desenvolvido pela própria Matemática.

Outros autores, como Casselman (2000), defendem que o recurso visual pode servir como parte integrante da prova, exemplificando o uso de animações gráficas para mostrar, por exemplo, propriedades relativas à conservação de áreas que podem auxiliar na visualização da famosa demonstração de Euclides para o Teorema de Pitágoras (HANNA; SIDOLI, p. 74-75, 2007).

Contrários a estas duas correntes, Barwise e Etchemendy (1991, 1996) defendem a visualização como prova matemática, alegando que esquemas, figuras, mapas e imagens podem ser utilizados como argumentos rigorosos dentro de uma perspectiva que valorize tais representações. Dentre os filósofos que corroboram esta forma de conceber a demonstração está Brown (1997, 1999). Para ele, "algumas 'figuras' não são realmente figuras, mas janelas para o céu de Platão" (BROWN, 1999 apud HANNA; SIDOLI, 2007, p. 77), fazendo uma alusão ao "mundo" matemático ideal do platonismo e a necessidade de acessá-lo através das representações.

Como se vê, as demonstrações matemáticas possuem defensores ferrenhos com posições diametralmente opostas. Esta divergência, no entanto, mais ajuda do que confunde o trabalho de planejar e refletir sobre o papel da prova em um currículo de Matemática para o Ensino Médio. Embora tenha um papel secundário, pois a importância primordial deve ser dada ao significado que o aluno dá para os seus conhecimentos espontâneos após reconceituá-lo por intermédio da Matemática, é necessária a clareza, para o estudante, de que a Matemática é construída sobre uma lógica, mas fundamentalmente sobre o convencimento. Para o aluno, portanto, deveria ficar claro que a intuição é limitada e pode trair certas convicções, sendo primordial construir, comunicar, conjecturar, debater, convencer ou ser convencido da validade ou não de uma determinada afirmação matemática. Estas táticas ou técnicas de convencimento, ainda que sejam desprezadas pelo rigor matemático, devem constituir uma relação entre pessoas que produzem e constroem uma linguagem própria, assim como, em qualquer língua, as gírias são eficazes para que determinadas pessoas de uma comunidade se comuniquem e, ao mesmo tempo, são marginalizadas e desprezadas pela linguagem formal. De qualquer forma, neste caso, a comunicação se constitui e o objetivo é atingido, embora os próprios elementos que estabelecem o diálogo possam reconhecer que o mesmo está longe de representar o uso correto da língua.

No caso da Matemática, os alunos também devem ter a consciência de que o convencimento, muitas vezes realizado através da visualização ou da utilização de softwares de Geometria Dinâmica, pode comunicar ideias e intuir para a elaboração de uma linguagem rigorosa que efetivamente seja aceita como demonstração. É totalmente descabido emitir juízo de valores sobre as formas de demonstração aceitáveis, mas sim argumentar que o significado que o aluno produz, seja através de diagramas, figuras, uso das tecnologias, tabelas e outros recursos, deve ser valorizado e validado pelo professor.

O papel da demonstração, em um currículo de Matemática, vai além da concepção formalista de partir de axiomas e hipóteses e, por intermédio de técnicas, apresentar a prova de uma tese. A demonstração também implica convencimento, comunicar-se matematicamente de maneira adequada, saber até onde a intuição falha e quando e mesma intuição pode servir como estímulo para a proposição de conjecturas.

## 3. Tornar-se interessado em Matemática

"Tornar-se interessado em Matemática" é outro objetivo mencionado e, embora não seja um fim explicitamente social e transformador, pode refletir um sinal da transformação que um currículo de Matemática é capaz de provocar ao preocupar-se com a inserção e participação do estudante em um mundo que, há pouco tempo, era marcado pela participação de alguns poucos como transmissores de um conhecimento elitista que incorria na segregação, classificação e seriação. Por este ponto de vista ultrapassado, porém ainda resistente nas salas de aula, cabia ao professor sábio transferir seu conhecimento "acumulado" de uma ciência pronta e não desafiadora para seus alunos que se sentiriam honrados por terem a oportunidade de presenciar o despejar de saberes do mestre em suas "mentes vazias". A participação do aluno estaria, nesta compreensão, limitada às provas escritas, como normalmente são chamadas essas maneiras de aferir a "quantidade" de saberes "acumulados", desprezando a característica transformadora que os próprios saberes provocam em outros que já vivenciamos.

Despertar o interesse do aluno no mundo matemático implica o reconhecimento e valorização dos conhecimentos e saberes que todo o ser humano possui, independente da instituição escolar. Essa experiência deve ser moldada, transformada e enriquecida por intermédio do conhecimento dito "científico", tornando-se significativo para o discente. A sala de aula não deve ser um lugar de transmissão, mas sim de mediação, confrontação e comunicação de ideias que devem ser sistematizadas pelo professor. Assim como em um debate, a capacidade de comunicar-se por intermédio da Matemática expõe uma das necessidades mais esperadas a serem atingidas em uma educação que objetiva a transformação social e uma consciência libertadora.

"Atitude" é uma palavra que representa essa forma de caracterizar a necessidade de participação plena dos alunos na construção de atividades matemáticas. Atitude como postura intelectual, social e cultural, em contraposição à apatia dos estudantes nas aulas em forma de palestras, nas quais o professor discursa e o aluno ouve. Dentro da proposta que valoriza a atitude e a participação democrática de todos, o aluno tem um papel fundamental, argumentando, conjecturando, compartilhando suas ideias em grupos, colaborando com os colegas e expressando-se de maneira adequada. Porém, o rigor matemático deve ser observado nas formas de expressão que cabem ao aluno, pois não se pretende sugerir uma postura populista e demagógica de defender que toda e qualquer expressão, ainda que incorreta, deva ser valorizada pelo professor. O papel docente torna-se de importância fundamental neste contexto, pois o mesmo deverá se expor, diferentemente do modelo de aula "pronta" com exercícios previamente escolhidos e resolvidos pelo mestre que jamais erra. Cabe ao professor a tarefa de reflexão-matemática-na-ação, validando ou não as conjecturas expostas, provocando novas inquietações nos alunos e dirigindo o andamento da aula para os objetivos estabelecidos.

Um novo desafio toma forma ao imaginar como seriam as propostas avaliativas de atitudes, quebrando paradigmas que vinculam ou privilegiam a forma de expressão escrita dos alunos. Da mesma maneira que, ainda que intuitivamente, sabe-se se determinada pessoa conhece um assunto específico e o nível de profundidade desse conhecimento, por intermédio da forma como ela se expressa verbalmente sobre um tema, também poderíamos pensar em alternativas de reconhecer, avaliar e valorizar a forma como nossos estudantes verbalizam seus saberes.

## 4. Conhecer fatos, princípios e algoritmos matemáticos

O objetivo quarto – conhecer fatos, princípios e algoritmos matemáticos – parece representar um dos propósitos mais técnicos da lista, repercutindo as características mecanicistas do ensino voltado ao saber fazer e não à reflexão. Embora o saber fazer deva ser valorizado e exercitado, esta finalidade está longe de representar um currículo comprometido com transformações e reflexões sociais. Atualmente, é possível notar, pelo menos na realidade brasileira, que as preocupações com problematizações práticas, que acabam modelando matematicamente situações reais, ocorrem mais no Ensino Fundamental que no Médio. Talvez o ideal fosse justamente o contrário, pois a modelagem de problemas econômicos, sociais, do meio ambiente e de saúde, entre outros, exige um conhecimento profundo de determinados conteúdos matemáticos muitas vezes apenas tratados no Ensino Superior. Um dos papéis mais importantes da Matemática no Ensino Fundamental seria justamente discutir, com os alunos, alguns princípios e algoritmos de maneira a produzir sentido na prática matemática e, principalmente, relacionar vários temas e áreas como Álgebra e Geometria, semeando nas crianças e adolescentes o valor da Matemática como ciência que possui uma infinidade de possibilidades de construção, justificativa e correlações entre as diversas sub-áreas que a compõe.

Já no Ensino Médio, os algoritmos devem ser ferramentas para a resolução de problemas e não o assunto principal a ser tratado. Não cabe, portanto, a divisão compartimentada que ocorre em escolas que adotam materiais didáticos que privilegiam o trabalho matemático dividido em diversas frentes, enfatizando o objetivo principal de preparar o estudante para os exames vestibulares para ingresso no curso superior. Aliás, essa característica cruel de prorrogar indefinidamente a explicação do sentido da própria Matemática parece transbordar nesse tipo de proposta, caracterizada por frases como “vocês entenderão a importância deste conteúdo e o aplicarão mais à frente”. Afinal, quando a Matemática fará sentido, neste jogo de suspense que se prolonga por vários anos?

Imagine, por exemplo, o ensino do gráfico de funções quadráticas, tradicional e exaustivamente trabalhado nas salas de aula do Ensino Médio. Normalmente, os professores, apoiando-se nos textos de livros didáticos que em muito pouco mudam a forma de tratamento deste tema, propõem uma investigação inicial, normalmente da função $f(x)=x^2$, por intermédio da construção de alguns pontos no plano cartesiano. Após a construção destes pontos, normalmente traça-se uma parábola por estes, sem maiores justificativas do porquê.

Como este tema é usualmente abordado após funções afins, os alunos podem crer que a melhor maneira de “ligar” os pontos é com segmentos de reta.

Ou ainda, algum aluno que tenha participação ativa nas aulas, tendo por hábito características investigativas, poderia propor que alguma outra linha poderia também representar a função de um gráfico que passa pelos sete pontos traçados. O que garantiria, então, que o gráfico realmente é uma parábola?

Então, o que justificaria e convenceria os alunos que o gráfico obtido realmente se trata de uma parábola? Recursos computacionais como elemento coadjuvante para este convencimento? Não, pois apenas mudar-se-ia o foco da crença que o aluno deveria ter: inicialmente era o professor e, agora, o computador. Em qualquer uma das duas formas, os estudantes não têm uma prova matemática da figura a ser obtida. A ferramenta necessária para a justificação deste fato é o Cálculo Diferencial, usualmente tratado apenas no Ensino Superior.

Portanto, pode-se concluir que existe um paradoxo importante a ser discutido em outras pesquisas: se por um lado existem vários trabalhos publicados exaltando a importância e o papel das demonstrações no ensino de Matemática, por outro lado, os conteúdos tradicionalmente apresentados no Ensino Médio possuem exemplos, como os tratados aqui, em que os algoritmos e fatos matemáticos são mostrados sem possibilidade de prova, apenas utilizando a crença do aluno de que o que o professor diz é uma verdade indiscutível e, às vezes, utilizando softwares gráficos que mobilizam a crença dos alunos para um programa computacional que, para eles, jamais erra.

## 5. Desenvolver uma atitude de investigação

"Desenvolver uma atitude de investigação" representa o primeiro objetivo, dentre as metas listadas pelos professores secundários durante o segundo SIMS, que possibilita alguma reflexão sobre a prática da Matemática tendo como objetivo a transformação social. Entretanto, pode-se conceber investigação como uma metodologia específica, amplamente divulgada pelo professor João Pedro da Ponte, do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Diferentemente dos exercícios e problemas que, embora difiram quanto ao rol de estratégias conhecidas pelos alunos *a priori*, pois o primeiro implica um conhecimento de recursos prévios que levarão à solução e o segundo abrange a inexistência de caminho para a resolução de uma situação, ambos possuem uma solução bem definida e conhecida pelo professor. O trabalho dos alunos, nestes dois contextos, possui características distintas, porém o trabalho do professor coincide no sentido de validar ou não uma solução que já lhe é familiar. Já no caso da investigação matemática, as situações são mais abertas. Caberá ao aluno a iniciativa de elaborar conjecturas e validá-las ou não, e ao professor caberá refletir matematicamente na ação, proporcionando questionamentos para instigar os estudantes à elaboração de testes e demonstrações de suas hipóteses.

Esta metodologia proporciona a simulação da criação matemática profissional, ou seja, traz para o ambiente escolar a legítima forma de trabalhar, construir e fazer Matemática dos matemáticos acadêmicos: "o conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação como os seus colegas e o professor" (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2005, p. 23).

Esta proposta está voltada à mudança do papel tradicional do professor como transmissor de conhecimento. Uma destas mudanças está ligada à preocupação que os professores têm com a administração e controle do tempo que levarão para ministrarem os conteúdos, preocupando-se com o cumprimento dos mesmos a qualquer preço. As aulas de investigação requerem novas concepções a respeito do tempo "gasto" para ensinar determinado assunto: "a realização de investigações na aula de Matemática implica que menos tempo seja destinado para outras atividades. Ora, o tempo é um fator que todo professor tem de ponderar na sua prática, exigindo a tomada de decisões. Diante dos objetivos que se propõe atingir com os seus alunos, ele, melhor do que ninguém, pode decidir o que fazer. A realização de uma investigação requer sempre certo tempo, mas o que se gasta nas primeiras experiências de investigação e nas primeiras ocasiões em que se procura discutir os resultados obtidos, pode ser superado mais tarde, porque os alunos já estão mais à vontade com este tipo de atividade, sabendo aquilo que se espera deles. Além disso, o trabalho efetuado no âmbito de uma investigação, em torno de determinado conteúdo matemático, pode revelar-se de tal forma produtivo que o professor já não vê a necessidade de voltar a trabalhá-lo, ganhando assim tempo para dedicara outro assunto" (Ponte; Brocado; Oliveira, 2005, p. 140-141).

O privilégio, nesse caso, não é necessariamente dos conteúdos, mas das investigações a serem realizadas. Como as conjecturas dos alunos dão margem a muitas possibilidades, o professor pode dirigir situações que contemplem conteúdos diversos, dentro de uma multiplicidade de possibilidades para inter-relacioná-los.

Entretanto, é razoável indagar se a pura atividade matemática profissional possui características sociais importantes e quais seriam elas. Sabe-se que muitas teorias matemáticas levam à prática, porém a motivação primordial do matemático está longe de provocar ou construir estudos que sejam imediatamente colocados em exercício, demonstrando uma intenção explícita de modificar a realidade social, política e econômica. É certo, por exemplo, que a Teoria dos Jogos Não-cooperativos de John Forbes Nash Jr.[2] não obteve aplicação prática instantânea, porém, em 1994, rendeu-lhe o prêmio Nobel de Economia, juntamente com o húngaro John C. Harsanyi e o alemão Reinhard Selten. Esta lacuna temporal entre a teoria e a descoberta de uma prática que a tornasse socialmente importante foi de quase meio século.

Portanto, torna-se simplório o pensamento de que uma prática investigativa do aluno, dentro da própria Matemática, o levaria a descobertas da função social da própria Matemática. Como dito anteriormente, parece que esta função perscrutadora cabe ao Ensino Fundamental e, ao Ensino Médio, caberia, entre outras coisas, o papel da investigação matemática social, utilizando-se ou aprendendo conceitos necessários para uma análise aprofundada de situações e problemas em vários campos, como saúde, meio-ambiente, transporte, entre outros, buscando soluções, mas, sobretudo alternativas e reflexões sobre o impacto de decisões políticas sobre a realidade social.

Concluindo, é inegável a importância do objetivo mencionado como desenvolver a atitude de investigação. Contudo, devem-se diferenciar duas formas de trabalhá-la, sendo que a primeira é mais importante, dentro do que seria um currículo transformador: (1) investigação matemática como apuração, crítica, elaboração de alternativas e implementação de projetos que objetivam a transformação da sociedade; (2) investigação matemática como elaboração de conjecturas com posterior verificação e demonstração de sua validade, enfocando somente a Matemática, como uma averiguação sistemática de seus padrões, implicações e inter-relações.

[2] A vida e obra de Nash foi parcialmente descrita no filme *A Beautiful Mind* (Uma Mente Brilhante) da *Universal Studios*, que rendeu aos seus produtores vários prêmios internacionais, incluindo o Oscar de melhor filme, em 2001.

## 6. Desenvolver a consciência sobre a importância da Matemática no cotidiano

O objetivo "desenvolver a consciência sobre a importância da Matemática no cotidiano" serve como inspiração para a formulação de algumas questões fundamentais para iniciar esta discussão: Afinal, qual é esta "Matemática cotidiana"? Esta Matemática está inserida no cotidiano de qualquer pessoa? Pensando-se em um currículo geral, amplo, feito para um grande número de pessoas e para um país que apresenta uma grande diversidade cultural, como o Brasil, por exemplo, existe alguma possibilidade de trabalhar questões que estão presentes no cotidiano de todos, ou seja, existe uma Matemática para todos? Pensando especificamente no currículo de Matemática do Ensino Médio, que abrange estudantes na faixa etária entre quinze e dezessete anos de idade, qual seria a Matemática cotidiana destes jovens? Seria coerente justificar a Matemática no cotidiano, dando exemplos de sua aplicação tecnológica e profissional, sendo que a grande maioria destes jovens jamais aplicará estes conhecimentos, seja na tecnologia, seja na profissão que escolherão?

Outra questão que merece destaque, antes de se pensar na presença da Matemática no dia-a-dia, é o volume de informações decorrentes do avanço e construção de nova Matemática a cada momento. O progresso tecnológico e industrial, iniciado no século XIX, mas com considerável expansão no século XX, proporcionou uma ênfase na aplicação matemática com fins econômicos e políticos. O trabalho dos matemáticos "puros", embora possa ser, em um primeiro momento, classificado como de aplicação imediata discutível, por um lado fornece a possibilidade de ampliação de campos de estudo e temas dentro da própria Matemática, com pesquisas cada vez mais minuciosas – por outro lado, amplia-se também a matéria-prima para que os matemáticos "aplicados", economistas, sociólogos, entre outros profissionais percebam e construam novas ferramentas para modelar fenômenos diversos, desde naturais, como as aplicações na meteorologia, passando por econômicos, como o cálculo do nível de risco em aplicações financeiras, incluindo a recomendação ou não de investimentos em países através de cálculos matemáticos, até indicadores sociais, como o IDH (Indicador de Desenvolvimento Humano), que mede as desigualdades sociais existentes em um país e utiliza, no cálculo de sua fórmula, a ideia de logaritmo (MONTEIRO, 2008).

Para Anderson (1999, p. 19): "impulsionados por todos os tipos de demandas, das indústrias progressistas ao desenvolvimento armamentista e projetos de tecnologia de ponta, tais como a corrida espacial, os matemáticos estão fazendo avançar as fronteiras do seu campo, na medida em que nenhum indivíduo pode ser instruído sobre mais de uma parte. Uma característica marcante disto é a matematização das matérias que, 20 ou mais anos atrás, teria sido geralmente considerada como tendo pouco espaço para tal tratamento: biologia, medicina, medicina, ciências da vida são exemplos. Isto cria o seu próprio dilema para os profissionais praticantes da matemática: por um lado, o tema está se expandindo para além da capacidade do cidadão comum entendê-la e apreciá-la - por outro lado, este distanciamento é um obstáculo para convencer o cidadão comum que a

Matemática em um nível mais elevado que o elementar é uma atividade que vale a pena comprometer-se[3]".

Ainda que haja preocupação somente com quais conteúdos ensinar, essa escolha deve ser cada vez mais criteriosa, pois o volume de assuntos e possibilidades de abordagem da Matemática amplia-se demasiadamente. Refletindo-se sobre os conceitos matemáticos abordados tradicionalmente no Ensino Médio, é possível verificar que se trata de assuntos extremamente antigos que, embora possam ser classificados como fundamentais ou de extrema importância, implicam a ignorância de outros temas mais recentes. Pode-se citar, como exemplo, a Geometria Euclidiana, com seus mais de dois milênios de existência, e a não menção, no currículo, da Geometria Hiperbólica ou da Geometria Esférica que, passado mais de um século de sua formulação por Lobachewsky (1793 – 1856) e Riemann (1826 – 1866), ainda não encontram espaço até mesmo em alguns currículos de cursos de Matemática no Ensino Superior.

Além da antiguidade dos assuntos versados, é necessário compreender como são utilizados atualmente, talvez analisando sua origem histórica. A Geometria Analítica, por exemplo, foi originalmente introduzida no currículo da *École Polytechnique* pelo francês Gaspard Monge (1746 – 1818) que foi um dos criadores desta instituição. Tanto o planejamento curricular quanto a implementação desta Escola Politécnica francesa estão contextualizadas dentro do cenário político da época, em que Napoleão Bonaparte era o centro de influências. A educação francesa pós-revolução tinha o caráter tecnicista, voltado à preparação e classificação de pessoas para ocuparem cargos públicos. Atualmente, ainda sentimos esta influência no currículo do Ensino Médio brasileiro, justificando alguns conteúdos pela sua importância nos concursos para admissão no Ensino Superior público. A Geometria Analítica é importante, pois representa uma possibilidade efetiva de articulação entre Álgebra e Geometria, rompendo o caráter compartimental da Matemática. Porém, ligar este assunto ao cotidiano, por intermédio de justificativas como a forma parabólica de antenas ou faróis de automóveis, a forma elíptica do movimento realizado pela Terra em torno do Sol ou o uso da forma hiperbólica para construção de telescópios de reflexão, parecem aplicações curiosas destes temas, estando longe de representar práticas significativas e cotidianas. A utilidade e adequação de mencionar esses fatos durante o ensino de Cônicas é inquestionável, porém representarão apenas informações isoladas.

## 7. Desenvolver a consciência sobre a importância da Matemática nas ciências básicas e aplicadas

Além da compreensão histórica dos temas ensinados, deve-se ponderar sobre as supostas aplicações profissionais decorrentes do conhecimento matemático. A reflexão crítica sobre o objetivo "desenvolver a consciência sobre a importância da

[3] *Driven by all kinds of demands, from innovative industries to arms developments and hi-tech projects such as the space race, mathematicians are pushing forward the boundaries of their subject to the extent that no individual can be knowledgeable about more than a part. A striking feature of this is the mathematization of subjects which, 20 or so years ago, would have been generally thought of as having little scope for such treatment: biology, medicine, and the life sciences are examples. This creates its own dilemma for professional practitioners of mathematics: on the one hand, the subject is expanding beyond the capability of the ordinary person to understand and appreciate – on the other, this remoteness is an obstacle to persuading the ordinary person that mathematics at a more elementary level is a worthwhile activity for them to become engaged in.*

Matemática nas ciências básicas e aplicadas" certamente contribuirá para a superação do senso comum que esta meta transparece. Isso porque esta finalidade parece ter uma interpretação deturpada, enfatizando apenas aspectos de aplicações voltadas ao mundo do trabalho.

A TI (Tecnologia da Informação) é um assunto que virou curso e profissão devido à enorme importância dada ao setor tecnológico, no final do século passado e até hoje. Clayton (1999, p. 27) pondera a respeito do que considera ser o papel da Educação Matemática nesta avalanche de avanços tecnológicos: "minhas conclusões levam-me a sugerir que um objetivo importante da educação matemática é que os alunos devem ser devidamente conscientes do valor da modelagem matemática, em uma ampla gama de situações, e para treiná-los a aplicar ferramentas de TI mais eficazes. Os benefícios que irão acumular são essenciais para a sobrevivência e o crescimento futuro do comércio, indústria e ciência, e há oportunidades para que sejam realizadas em todos os níveis de emprego.

Para ajudar os nossos jovens a adquirirem as competências necessárias e utilizá-las proveitosamente mais tarde em seu trabalho, espero que os colégios e faculdades capacitem e promovam a manutenção de um Currículo de Matemática equilibrado que incluam:

- Técnicas matemáticas e métodos de análise ensinados em contextos que mostrem como eles podem ser usados.
- Princípios e aplicações de modelagem matemática.
- Métodos Numéricos incluindo simulação direta, com o uso de tecnologia adequada.
- Os efeitos da incerteza - como eles podem ser medidos e analisados[4]".

Discorda-se da posição que inclui a ênfase na aprendizagem de técnicas, métodos e da própria Modelagem Matemática para benefício e crescimento do comércio, indústria e ciência, imaginando um proveito futuro dos estudantes nos empregos que ocuparão. Aliás, prover os universitários da maior quantidade de ferramentas e ensinar como utilizá-las em seu trabalho no menor tempo possível de formação parece ser uma tendência muito presente nas diretrizes e currículos de cursos do Ensino Superior. Questões éticas, sociais e políticas são deixadas de lado e, muitas vezes, não ocupam nenhum espaço nos cursos superiores, pois a prioridade está no saber-fazer. Como em uma linha de montagem, as universidades estão preparando para as empresas, mas será que as empresas estão satisfeitas com a qualidade, ou melhor, com a cultura geral dos egressos de cursos superiores?

[4] *My conclusions lead me to suggest that an important aim of mathematics education should be to make students properly aware of the value of mathematical modelling in a wide range of situations, and to train them how to apply IT tools most effectively. The benefits that will accrue are essential for the survival and future growth of commerce, industry, and science, and there are opportunities for them to be realized at every level of employment.*
*To help our young people acquire the necessary skills and use them profitably in their later employment, I hope that schools and colleges will be enabled and encouraged to maintain a balanced mathematics syllabus that includes:*
*- Mathematical techniques and analysis methods taught in contexts that show how they can be used.*
*- The principles and application of mathematical modelling.*
*- Numerical methods including direct simulation, and the use of appropriate technology.*
*- The effects of uncertainty – how they can be measured and analysed.*

Faz-se necessária uma reflexão sobre a própria origem histórica das Universidades que teve origem com os árabes e a fundação das primeiras instituições voltadas ao estudo de obras gregas desprezadas pelos cristãos. Entre estas, pode-se citar a Universidade de Karueein, localizada em Fez, no Marrocos e fundada em 859 e a Univerdade de Al-Azhar (Cairo, Egito), fundada em 988. Após as Cruzadas, surgiu a necessidade de elaboração de novas Universidades, porque as obras tomadas dos árabes, pelos cristãos, não tinham espaço nos mosteiros. Este espaço para estudo e encontro entre pagãos e cristãos, ou seja, a valorização do conhecimento, da história, de outras sociedades e culturas, está longe do caráter imediatista de aplicabilidade no mundo do trabalho, existente nas atuais instituições de ensino superior. Não se defende que os objetivos das universidades, projetados há mais de dez séculos, voltem a ser praticados, mas salienta-se que é essencial valorizar a existência de um currículo que promova uma cultura geral que dê conta, minimamente, de explicar o contexto no qual se vive, para compreensão crítica das transformações, reflexões e discussões que se façam necessárias.

Também se pode ampliar essa reflexão sobre a justificativa de preparar para a vida profissional lançando olhar para o Ensino Médio. Excetuando-se as escolas técnicas, cujo objetivo é claro e indiscutível, as escolas que propõem uma formação geral acabam privilegiando justificativas como as mencionadas por Clayton. Poder-se-ia, por exemplo, utilizar como único argumento para ensino de números complexos sua serventia no estudo de circuitos, na corrente e na tensão elétrica, na potência, na impedância, na equação de onda que rege o movimento dos elétrons, na equação de normalização que tem um papel importante na Mecânica Quântica, entre outras aplicações? Quem, com exceção dos futuros engenheiros eletricistas, ficará motivado com tal defesa? E, mesmo os futuros engenheiros eletricistas, por que aprenderão estas aplicações já que serão submetidos a muitas outras no Ensino Superior? A influência do discurso “aprendam isto porque será importante mais tarde” não surte efeito, pelo contrário, soa como uma falta de justificativa para o que se está pretendendo ensinar.

Depois de tantas críticas sobre o quê não fazer, propõe-se uma alternativa, um caminho, ainda que seja um esboço do que seria uma proposta. Na tentativa de integrar os objetivos 6 e 8, vislumbra-se a necessidade de conexão entre a Matemática e o mundo real como uma justificativa para integrar o homem ao seu meio, tornando-o mais que um cidadão, mas um ser atuante por intermédio de sua crítica e influência sobre os poderes que delegam seus deveres e direitos. Questionar, fiscalizar e reformular os direitos e deveres de um membro de uma sociedade demanda uma Educação Matemática firmada não somente em conceitos matemáticos ou aplicações técnicas, uma vez que requer uma interpretação da realidade para transformá-la.

Diariamente, todos são bombardeados por uma quantidade enorme de índices, números, resultados de cálculos que poucos conhecem suas origens, muito menos o caráter ético da suas formulações. Como assim? Caráter ético de formulações matemáticas? Isso mesmo! Veja, por exemplo, como é calculado o ICMS (imposto sobre operações relativas à circulação de mercadorias e sobre prestações de serviços de transporte interestadual, intermunicipal e de comunicação) da energia elétrica consumida por cada residência, cobrado no Estado de São Paulo (Brasil), mensalmente. A taxa paga pode ser calculada pela fórmula: ICMS = (I x A) / (100% – A), onde I = importe da conta (em R$), A = alíquota do ICMS. O "Importe" é a parcela da conta de energia elétrica resultado da aplicação das tarifas respectivas (de demanda e consumo) sobre a demanda faturável e o consumo total medido, ou seja, (kW x R$) + (kWh x R$).

Veja um exemplo do que ocorre atualmente: suponha que o “importe”, ou seja, o que efetivamente será cobrado pelo consumo exclusivo da energia elétrica consumida, seja de R$ 100,00. Suponha, também, que a residência enquadra-se na alíquota de 25% do ICMS. Poder-se-ia concluir que o imposto a ser pago seria de R$ 25,00, ou seja, 25% de R$ 100,00. Mas utilizando a fórmula existente na Lei Estadual n. 6374, de 01/03/89, chegam-se aos seguintes cálculos: ICMS = (I x A) / (100% – A) = (100 x 25%) / (100% – 25%) = R$ 33,33. Ou seja, a alíquota é de 25%, mas paga-se cerca de 33% de imposto.

Por que essa tarifa não foi contestada até hoje? Na verdade, várias ações judiciais foram impetradas e muitos consumidores conseguiram o ressarcimento da cobrança indevida paga até a publicação de decisão judicial. O fato do desconhecimento, por parte da maioria da população, faz com que se reflita sobre a necessidade de se discutir com os alunos questões semelhantes, que dizem respeito a todos. Caberia esse tipo de questão dentro dos três anos do Ensino Médio? Ou não seria possível cumprir o conteúdo? Aliás, onde está o conteúdo? Como se pode conceber esse tipo de abordagem sem uma explicitação clara da Matemática contida nestas referências?

Educar o consumidor implica diretamente questões matemáticas, embora não trate os conteúdos da maneira tradicional. Quebrar este paradigma pode ser um exemplo esclarecedor sobre o que seria uma Matemática para todos. Educar o consumidor significa, portanto, habilitá-lo a realizar as comparações necessárias e interpretar informações, nem sempre bem intencionadas, fornecidas pelas empresas na forma de rótulos, etiquetas, propagandas, etc. Para Nieves Álvarez (2002, p. 176): “[...]a educação do consumidor não é mais (nem menos) do que uma tentativa, bem como qualquer outra atividade docente, de aproximar nossos alunos ao conhecimento do meio, fazê-los descobrir seus códigos e ser capazes de interpretá-los, adquirindo os mecanismos que permitem a resolução de problemas e utilizando como ferramentas instrumentais os conteúdos das áreas de ensino. Significa aprender a “ler” as mensagens que nos apresenta a sociedade de consumo, que a educação do consumidor é simplesmente um trabalho de alfabetização em um campo em que a maioria das pessoas é muito analfabeta, em uma sociedade de consumo que fundamenta uma parte importante de seu sucesso na ignorância do consumidor”.

Além deste exemplo, seria possível enumerar vários outros que serviriam de análise para discussões como a desigualdade social, racial, de gênero, acesso à educação e o perfil econômico dos estudantes que ingressam no Ensino Superior, custo de vida em diferentes cidades e sua relação com o salário médio local, diferentes índices de inflação e como são calculados, etc.

Também é fundamental a inserção da Matemática Financeira como uma forma de educar os estudantes para planejarem seu futuro. Essa preocupação parece em sintonia com os resultados da pesquisa realizada por Gainsburg (2008) com 62 professores de Matemática, sendo 28 do *middle school*[5] e 34 do *high school*[6]. O objetivo era verificar a compreensão e o uso que estes professores fazem, em suas aulas, das conexões possíveis da Matemática com o mundo real. A tabela a seguir reflete uma das categorizações de análise feita por Gainsburg, em que os professores citam os contextos "reais" em que utilizam a Matemática:

**Tabela 1. Categorizações de análise feita por Gainsburg (2008) sobre contextos "reais" em que se utiliza a Matemática, na opinião de profesores**

| Contexto | Número de Professores (de um total de 62) que mencionaram |
|---|---|
| Projetos estruturais ou de interiores | 14 |
| Compras / Preços / Comer fora de casa | 13 |
| Assuntos Bancários / Orçamentários | 10 |
| Automóveis e outras formas de transporte | 10 |
| Esportes / Jogos | 8 |
| Artigos Domésticos | 7 |
| Mapas / Plantas / Topografia / Agrimensura | 6 |
| Física / Astronomia | 5 |
| Características Pessoais dos Estudantes / Hábitos | 4 |
| Trabalho / Salário | 4 |
| Arte / Espelhos | 3 |
| Programas de Televisão / Filmes / Culinária / Medicamentos / Investigações Criminais / Recenseamento / Montanha-russa / Fogos de Artifício | 1 ou 2 cada |

Esta pesquisa traz resultados importantes, pois demonstra o quanto os professores ainda sentem-se presos aos tradicionais problemas, muitos deles encontrados em diversos livros didáticos, ao buscarem vínculos com a realidade. Um exemplo disso é o contexto mais citado pelos professores: projetos estruturais ou de interiores. Gainsburg (Ibid., p. 206) revela que um exemplo típico citado é "encontrar quanto tapete seria necessário para um quarto[7]".

Questões financeiras foram mencionadas 23 vezes, incluindo compras, preços, refeições fora de casa, assuntos bancários e orçamentários. Cabe uma pergunta: quanto do tempo das aulas de Matemática no Ensino Médio é destinado a estas discussões, dentro das atuais orientações curriculares? E os outros assuntos mencionados por estes professores? É claro que se deve observar, e isto deve ser reconhecido, a componente cultural envolvida nestas respostas. Quando um professor busca conexões com a realidade, busca a sua realidade e a de seus alunos e, por isso, pode-se concluir que, se esta pesquisa fosse realizada em diversas cidades brasileiras, o resultado poderia ser diferente, com características regionais marcantes. Na pesquisa de Gainsburg nota-se claramente algumas

[5] Equivalente aos Anos Finais do Ensino Fundamental brasileiro.
[6] Equivalente ao Ensino Médio brasileiro
[7] *Finding how much carpet would be needed for a room.*

citações que revelam estas características regionais específicas, tais como "espelhos", "investigações criminais", "montanha-russa" e "fogos de artifício".

Na mesma pesquisa, Gainsburg analisou as respostas dos professores à pergunta: "quando faço conexões com situações ou objetos reais, a ideia mais frequente vem de (escolha um)[8]" (Ibid, p. 207). A tabela abaixo revela as respostas dos professores:

**Tabela 2. Respostas dos professores à pergunta: "quando faço conexões com situações ou objetos reais, a ideia mais frequente vem de (escolha um)" (Gainsburg, 2008).**

| Fonte | Número de professores (55 responderam) |
|---|---|
| Do Livro Didático do curso. | 4 |
| De Outro Recurso Curricular. | 1 |
| Da minha cabeça, baseado em minhas próprias ideias ou experiências. | 46 |
| Do meu desenvolvimento profissional (seminários ou encontro). | 2 |
| De colegas. | 2 |
| De outras fontes. | 0 |
| Não se aplica – raramente ou nunca conecto a Matemática com situações ou objetos reais. | 0 |

Concluiu-se que os professores, pelo menos na pesquisa citada, demonstraram utilizarem ideias próprias para realizar a conexão da Matemática com a realidade. Portanto, a realidade social e cultural docente influencia diretamente na construção dos currículos praticados nas salas de aula. No entanto, parece existir um abismo entre o currículo prescrito e o currículo praticado, e parece pertinente defender a tese de que um dos fatores que conduzem a esta lacuna é o obscurantismo existente nas prescrições oficiais, ignorando a realidade social e cultural dos professores.

Uma alternativa para esta ignorância da diversidade de práticas docentes existentes em um país com dimensões continentais é proporcionar espaços para troca de experiências e elaboração de atividades e propostas que contemplem a realidade local. Embora polêmico, o Projeto "Folhas" da Secretaria de Estado da Educação do Governo do Paraná proporciona uma possibilidade de participação efetiva dos professores locados nas escolas estaduais. Cada projeto que o professor pode submeter aos responsáveis pela análise dos mesmos deve ter no máximo doze páginas. A proposta é iniciar a atividade com um problema que provoque a busca e utilização de alguns conteúdos necessários para resolução da situação sugerida.

O problema decorrente deste projeto pode ser a criação de uma verdadeira colcha de retalhos, com propostas e objetivos distintos. Cada professor se serviria das atividades que lhe parecessem mais atraentes, possivelmente ignorando os objetivos em prol de atividades agradáveis aos alunos. No entanto, deve-se

[8] *When I make connections to real situations or objects, the idea most often comes from (choose one).*

reconhecer que uma proposta como essa pode servir como motivação para que escolas localizadas em uma mesma comunidade possam elaborar livros didáticos em conjunto, viabilizando propostas que contemplem questões, situações e problemas locais, derivadas da prática e realidade vivenciada por cada aluno, professores e dirigentes de ensino participantes destas instituições.

Portanto, é preciso reconhecer que os objetivos: "desenvolver a consciência sobre a importância da Matemática no cotidiano" e "desenvolver a consciência sobre a importância da Matemática nas ciências básicas e aplicadas" devem contemplar muito mais os aspectos relevantes da sociedade do que simplesmente visar ao mundo do trabalho e ao avanço tecnológico. É preciso aplicar a Matemática no cotidiano, em prol da construção de uma visão crítica sobre aspectos sociais, econômicos e políticos, envolvendo questões e debates sobre políticas públicas relacionadas à saúde, ao meio ambiente, transportes nas grandes cidades, saneamento básico, orientação e educação sexual, entre outras muitas querelas. Na verdade, há necessidade de que sejam colocadas em prática as propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, publicados entre 1997 e 1999, nas quais são incluídos seis temas, chamados de transversais – Ética, Orientação Sexual, Meio Ambiente, Saúde, Pluralidade Cultural, Trabalho e Consumo – que deveriam nortear projetos interdisciplinares e propostas que validassem e aglutinassem os conteúdos matemáticos, antes estanques, nesta nova proposta integradora.

Uma das alternativas metodológicas seria a utilização, tão enfatizada, porém pouco vivenciada, dos jornais e revistas na sala de aula. Realizamos uma pesquisa com alunos de Licenciatura em Matemática (SILVA, 2006), buscando notícias que provocassem e motivassem a realização de trabalhos interdisciplinares bem como a motivação para a abordagem de tópicos tratados tradicionalmente nas aulas de Matemática.

Pode-se citar um exemplo realizado por um dos grupos de licenciandos que participaram da pesquisa unificando os temas Saúde e Orientação Sexual, explorando uma reportagem que tinha como manchete "São Paulo terá mutirão para exame de DNA". O artigo abordava o número de laudos emitidos e famílias atendidas pelo Instituto de Medicina Social e de Criminologia antes e após o mutirão realizado. Isso abriria inúmeras possibilidades de trabalho, além da própria Matemática, verificando a possibilidade de integração com Biologia.

Em uma reportagem denominada "Três anos de Guerra (Iraque)", outro grupo descobriu uma série de temas transversais, já que alguns quadros apresentados como "Números da guerra" propiciaram um trabalho rico de ser explorado. Um mapa revelava porcentagens de grupos étnicos e religiosos existentes no Iraque, claramente abordando questões de pluralidade cultural, um gráfico de colunas destacava a evolução da mortalidade infantil naquele país e a razão de iraquianos com acesso a água potável (um em cada cinco antes da invasão e um em cada três na época da publicação), mostrando a utilização de temas como Saúde. Número de mortos, reféns executados, e presos em Abu Ghraib (prisão onde houve torturas) instigariam a discussão da Ética. Os dados de produção de petróleo, seguidos por um gráfico de colunas sobre a evolução das exportações de barris por dia, proporcionariam uma análise detalhada com ajuda de outras disciplinas como

Geografia e História, aliado ao tema “Trabalho e Consumo”. Outro dado impressionante mostra que os contribuintes americanos pagaram US$ 315 bilhões pelos custos da guerra e o presidente Bush ainda solicitava outros US$ 72,4 bilhões extras.

Questões como estas requerem um grande conhecimento geral por parte do professor para validar as conjecturas dos alunos, propiciar debates oferecendo informações adicionais àquelas oferecidas pelos órgãos de imprensa, enriquecer as aulas com fatos pertencentes a outras disciplinas escolares das quais ele não é especialista. Preocupações com a formação inicial e continuada de professores e políticas públicas que incentivem os docentes a terem tempo e recursos financeiros para acessarem meios que possibilitem a ampliação e discussão dos conhecimentos que possuem são necessidades básicas, caso pretendamos formular e instituir um currículo de Matemática que também promova estas questões.

## 8. Realizar cálculos com rapidez e exatidão

O objetivo “realizar cálculos com rapidez e exatidão” retrocede às instruções da década de 1970, presentes nas orientações curriculares estadunidenses que privilegiavam, no contexto social, suprir as necessidades do sistema de produção capitalista, caracterizado por um ensino de Matemática voltado às técnicas, centrados, nem no professor, nem no aluno, mas na instrução e repetição dos passos necessário para que o aluno resolva uma questão. Os livros didáticos eram recheados de regras e macetes, facilitando e exaltando a memorização. Até hoje, junto a pais e até a alguns educadores, esta metodologia apresenta repercussões, como no sucesso e expansão de escolas voltadas ao ensino do chamado “Método Kumon”, por exemplo.

A ideia de um perito em Matemática como sendo alguém que realiza cálculos rapidamente parece fazer parte de uma espécie de senso comum coletivo, no qual pouco se valoriza a interpretação e relação dos resultados destas operações com outras informações. Da mesma forma, parece que a valorização do conhecimento memorizado de capitais de países também é valorizado na Geografia, assim como as datas de acontecimentos célebres são conhecimentos enaltecidos em História e saber qual a grafia correta para determinada palavra é objetivo primordial do ensino da Língua Materna (basta ver o sucesso dos populares concursos de soletração).

A calculadora pode ocupar este papel de realizar cálculos de maneira rápida e eficiente, na maior parte das vezes que efetivamente necessitamos de um resultado no dia-a-dia, mas este não deve ser considerado um objetivo primordial de um currículo que busca muito mais que promover o saber-fazer. O cálculo mental, por exemplo, pode ser incentivado desde as primeiras séries da educação escolar formal e também tem o seu papel no Ensino Médio, podendo ser ampliado, por exemplo, para a obtenção de raízes de equações sem que todo o processo seja explicitado no quadro. Mas o fundamental é que, ao solucionar uma equação, deve ficar claro que o objetivo principal não é resolvê-la simplesmente, mas mostrar aos alunos (e os professores devem acreditar nisto também!) que se pode utilizá-la como parte da resolução de problemas e questões cruciais que envolvem a interpretação crítica e possivelmente a transformação justificada do mundo no qual vivemos, a começar por nossa escola e nossa comunidade local.

## 9. Desenvolver uma abordagem sistemática para a resolução de problemas

Finalmente, o objetivo "Desenvolver uma aproximação sistemática para a resolução de problemas" surge como meta primordial e, portanto, deve ser claramente descrita.

Várias orientações curriculares mundiais preveem a resolução de problemas como metodologia ou procedimento para tornarem o ensino de Matemática mais investigativo e menos mecanizado. Stacey (2005) faz um estudo comparativo sobre o papel da resolução de problemas nos documentos curriculares oficiais da Austrália, Reino Unido, Estados Unidos e Cingapura. O autor enfatiza que, desde 1990, os currículos australianos e do Reino Unido são orientados por algumas metas. Em 1994, a publicação do "*National Profile*", pelo *Australian Education Council*, dividiu o currículo da Austrália em seis blocos, sendo cinco relativos à divisão do conteúdo (número, álgebra, espaço, medidas, probabilidade e dados[9]) e um bloco procedimental, intitulado "trabalhando matematicamente[10]". Neste bloco procedimental que, notadamente por sua função dentro do currículo já se distingue dos demais, aparece a novidade de incluir, nas metas e objetivos, as atitudes e procedimentos dos alunos, como a confiança de aplicar a Matemática em situações diversas, a persistência, a criatividade e a capacidade de trabalhar cooperativamente e de forma independente. Por sua vez, este bloco procedimental é dividido em outros seis subgrupos, cabendo a cada um deles um espaço reservado à resolução de problemas: (i) investigando; (ii) conjecturando; (iii) usando estratégias para resolver problemas; (iv) aplicando e verificando; (v) usando a linguagem matemática; (vi) trabalhando no contexto (Ibid, p. 343).

Nos Estados Unidos, os *"Principles and Standards for School Mathematics"* publicados, em 2000, pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) orientam, até hoje, a estrutura curricular da Matemática escolar naquele país. Assim como o currículo australiano, o estadunidense também possui cinco blocos referentes à estrutura dos conteúdos matemáticos, porém distingue-se do australiano por possuir outras cinco normas processuais específicas: (i) resolução de problemas; (ii) argumentação e prova; (iii) comunicação; (iv) conexões; (v) representação. Diferentemente do "*National Profile*", os *"Standards"* promovem a resolução de problemas à condição de um processo com várias vertentes e possibilidades (Ibid, p. 344). Já os documentos curriculares do Reino Unido são organizados em quatro blocos, sendo três referentes aos conteúdos (número e álgebra; forma, espaço e medidas; manuseio de dados[11]) e um quarto bloco chamado de "utilização e aplicação da Matemática[12]", que é subdividido em três componentes: resolução de problemas, comunicando e argumentando. Similar aos *"Standards"* estadunidense, a resolução de problemas é um elemento do currículo, em vez de objetivo subjacente a ele.

Nos três casos estudados por Stacey, a importância das situações-problema e os caminhos que levam à elucidação destas conjecturas matemáticas são

[9] *Number, algebra, space, measurement, chance and data*.
[10] *Working Mathematically*.
[11] *Number and algebra; Shape, space and measures; Handling data*.
[12] *Using and applying mathematics*.

classificados ou relacionados em subgrupos que fazem parte de um bloco procedimental ou processual.

O papel da resolução de problemas nas orientações curriculares de Cingapura é claramente diferente, pois o objetivo central do projeto curricular cingapurense é permitir que os alunos desenvolvam a capacidade de resolver problemas matemáticos por intermédio da inter-relação entre cinco componentes que serão aperfeiçoados com o propósito de alcançar a meta central estabelecida. A figura a seguir mostra como o currículo cingapurense estabelece a resolução de problemas como fim essencial da Educação Matemática nas escolas:

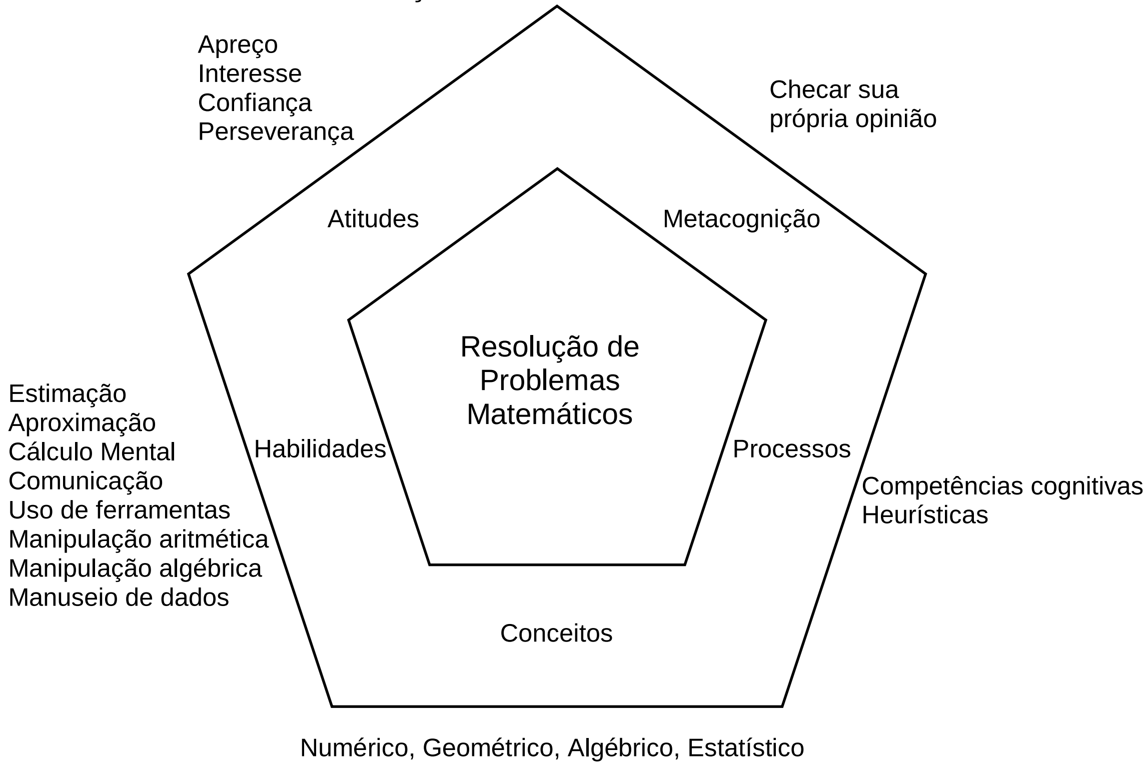



**Figura 2. O currículo cingapurense tem a resolução de problemas como objetivo central da Matemática escolar (Stacey, 2005, p. 345).**

Parece indiscutível que um currículo de Matemática deva centrar-se na resolução de problemas, não como mero coadjuvante ou como simples estratégia para auxiliar o ensino. Essa metodologia deve ser a protagonista de um processo que privilegia a criatividade, a autonomia e o trabalho cooperativo. Muito além das propostas cartesianas de Pólya, nas quais o enfoque é o produto, a preocupação primordial localiza-se no processo que envolve a resolução de problemas.

Em um currículo crítico, pode-se questionar: qual a origem e a finalidade do problema escolhido? Possui relação com a realidade social, cultural, econômica da comunidade para o qual é proposto? Motiva discussões sobre como pôr em prática determinada técnica (muitas vezes relacionada com aplicações profissionais) ou também discute a finalidade das próprias técnicas? Promove a máxima do “melhor resultado no menor tempo”, reproduzindo os ideais de organizações empresariais ou estimula o refletir e a criatividade, ainda que para isto necessite de demorada ponderação?

Para D'Ambrosio (2007, p. 516), "o nosso objetivo, como educadores, não é o de dar continuidade a este tipo de Mundo: a preparar para a guerra, nos proteger dos demais seres humanos, para aumentar a acumulação de nossos ganhos em detrimento da diminuição dos recursos naturais. Não vejo a minha missão como educador para preparar novas gerações de dóceis cidadãos que continuam a aceitar e agir neste padrão. Quero que as novas gerações sejam criativas e encontrem caminhos para a Paz em todas as suas dimensões: Militar, Social, Ambiental. Elas precisam de criatividade para propor o novo, e não serem bons reprodutores do velho[13]". O autor propõe uma nova forma de pensar e resolução de problemas, compreendendo algumas transições conceituais: (1) do problema determinado aos problemas identificados; (2) do trabalho individual ou trabalho cooperativo; (3) de problemas com solução única aos problemas abertos e (4) das soluções exatas às soluções aproximadas (Id., Ibid., p. 517). Esta concepção pode ser mais bem compreendida se adaptada aos estudos de Ponte sobre Investigações Matemáticas, mas modificando seu enfoque principal. Ao invés de pensar na proposta de situações abertas para reprodução do trabalho do matemático dentro da sala de aula, pode-se situar estas sugestões dentro de um contexto sociocultural que promova um rompimento das tradicionais propostas e produza reflexões que levem à interpretação variada e coletiva em busca de soluções criativas que possam transformar nossa realidade.

Talvez seja mais importante ouvir os alunos ao invés de estabelecer critérios de como resolver problemas para ensiná-los e orientá-los nesta tarefa: "o que nós precisamos é de uma espécie de reconceitualização da ideia de resolução de problemas. Em vez de focalizarmos diretrizes para resolver problemas, há que dar mais atenção às relações professor-aluno. Dar voz aos alunos quando confrontados com uma situação desafiadora e ouví-los torna-se mais importante que ensinar os alunos a resolver problemas[14]" (D'Ambrosio, Ibid., p. 518). Problemas podem ser compreendidos, entretanto, sua solução depende da criatividade e esta criatividade é intrínseca ao ser humano, não pode ser ensinada como um compêndio, mas deve ser estimulada e o docente tem papel crucial ao criar um ambiente propício para a sua manifestação. A experimentação, o erro, a imaginação, o improviso e o imponderável têm um peso neste "novo" conceito para resolução de problemas.

## Considerações finais

Neste artigo, foram apresentados e discutidos objetivos que pudessem definir um currículo de Matemática. Buscaram-se reflexões de alguns autores e aprofundou-se uma discussão sobre uma série de fins para o ensino de Matemática, relacionados por professores com formação matemática e pertencentes a países distintos, durante o Segundo Estudo Internacional de Matemática (SIMS).

É certo que o estudo apresentado por Burstein (1992, apud BROWN, 1999) não é recente, mas será que tal estudo constituir-se-ia muito diferente se esta

[13] *Our aim, as educators, is not to give continuity to this kind of World: to prepare for War, to protect ourselves from fellow human beings, to increase the accumulation of our gains at the expense of decreasing the natural resources. I don't see my mission as an educator to prepare new generations of docile citizens that continue to accept and behave in this pattern. I want the new generations to be creative and finding ways to Peace in all its dimensions: Military, Social, Environmental. They need creativity to propose the new and not to be good reproducers of the old.*

[14] *What we may need is a sort of reconceptualization of the idea of Problem Solving. Instead of focalizing guidelines to solve problems, more attention must be given to the teacher-student relations. To give voice to the student when faced with a challenging situation and to listen becomes more important than to teach students how to solve problems.*

pesquisa fosse repetida nos dias atuais? Novas pesquisas podem responder estas e outras questões que emergem desta discussão.

Ao apresentar cada objetivo proposto, vários temas foram discutidos e analisados do ponto de vista curricular da Matemática no ensino médio: novas tecnologias, provas e demonstrações, investigações matemáticas, contextualização, resolução de problemas, modelagem matemática, entre outros. O importante foi buscar uma aproximação de uma explicação ou teorização de um aspecto fundamental do ensino de Matemática: o que é e quais são os objetivos de um currículo de Matemática para o ensino médio?

Currículo é uma *construção* cultural (GRUNDY, 1987 apud SACRISTÁN, 2000) que define o que se *considera* o conhecimento válido (BERNSTEIN, 1980 apud SACRISTÁN, 2000). Também é um *projeto seletivo* de cultura, cultural, social, política e administrativamente condicionado (SACRISTÁN, 2000). Estes excertos compartilham a ideia de que a construção de um currículo envolve escolhas que devem ser realizadas mutuamente, entre educadores (teóricos, elaboradores de currículo, professores, dirigentes escolares) e comunidade (alunos, pais de alunos, funcionários das escolas, habitantes que residem no entorno da instituição escolar).

Em um currículo crítico, essas escolhas devem ter o rigor suficiente para problematizar práticas não-escolares, pressupondo uma ideia de currículo escolar “como vivência atual e situada de experiências de problematização de práticas socioculturais extra-escolares” (MIGUEL, 2008, p. 12). Aliás, a problematização implica uma nova concepção de resolução de problemas para a Educação Matemática, assim como D’Ambrosio (2007) sugeriu.

Conclui-se, a partir dos aportes teóricos escolhidos, que os principais objetivos do ensino de Matemática no ensino médio seriam: (i) desenvolver uma atitude de investigação; (ii) esenvolver a consciência sobre a importância da Matemática no cotidiano; (iii) desenvolver a consciência sobre a importância da Matemática nas ciências básicas e aplicadas; (iv) desenvolver uma aproximação sistemática para a resolução de problemas. Isto não significa que os outros objetivos devam ser omitidos, mas muito provavelmente reexaminados e readaptados para um novo contexto que valoriza os conhecimentos populares ou cotidianos e não apenas os conhecimentos ditos científicos e escolares.

Entretanto, não se pode ignorar que o conhecimento matemático, dito científico, ainda que não conduza a nenhuma prática imediata nem a uma transformação social, também deve ser valorizado e deve ter espaço garantido em um Currículo de Matemática que propõe a valorização de todo a espécie de saberes. A contextualização, neste caso, se justifica pela imensa gama de interconexões que podemos realizar ao ensinarmos que a Matemática é um campo de estudo com várias imbricações e não formada por compartimentos estanques. Sua história, valorizando aspectos culturais, sociais, políticos e econômicos, pode também conduzir a transformações, compreendendo que os conteúdos ensinados foram constituídos para um determinado fim e buscando um entendimento de qual seria este objetivo nos dias atuais.

A postura de Knijnik (2004, p. 232) revela essa necessidade de estabelecer proporções apropriadas de doses compostas por saberes populares e por saberes acadêmicos ou científicos: “na perspectiva etnomatemática que assumo, não há, no entanto, um relativismo exacerbado, uma visão ingênua da potencialidade de tais saberes populares no processo pedagógico, o que poderia conduzir a uma glorificação dos saberes populares com a consequente guetização dos grupos subordinados. Ao contrário, no processo educativo as inter-relações entre os saberes populares e os acadêmicos foram qualificadas, possibilitando que os adultos e jovens que dele participaram, concomitantemente compreendessem de modo mais aprofundado sua própria cultura e tivessem também acesso à produção científica e tecnológica contemporânea”.

O conhecimento da ciência de referência pode representar uma dimensão importante, pois representa uma produção científica e tecnológica contemporânea, fruto de uma cultura, é verdade, mas que deve proporcionar a oportunidade de todos conhecerem-na e compartilhá-la.

## Bibliografía

Anderson. J. (1999). Being Mathematically Educated in the 21st Century: What Should It Mean? In: Hoyles, C.; Morgan, C.; Woodhouse, G. (Org.). *Rethinking the Mathematics Curriculum*. Londres: Falmer Press.

Barwise, J.; Etchemendy, J. (1991). Visual information and valid reasoning. In: Zimmerman, W.; Cunningham, S. (Orgs.). *Visualisation in teaching and learning mathematics*, p. 9–24. Washington, DC: MAA.

Barwise, J.; Etchemendy, J. (1996). Heterogeneous logic. In: Allwain, G.; Barwise, J. (Orgs.), *Logical reasoning with diagrams*, p. 179–201. New York: Oxford University Press.

Bernstein, B. (1980). On the classification and framing of educational knowledge. In: YOUNG, M. (Org.). Knowledge and control**.** Londres: Collier Macmillan, p. 47-69.

Brown, J. R. Proofs and pictures. (1997). *British Journal for the Philosophy of Science,* 48, p. 161–180.

Brown, J. R. (1999). *Philosophy of mathematics: The world of proofs and pictures.* New York: Routledge.

Brown. M. (1999). One Mathematics for All? In: Hoyles, C.; Morgan, C.; Woodhouse, G. (Org.) *Rethinking the Mathematics Curriculum*. Londres: Falmer Press.

Burstein, L. (1992). *The IEA Study of Mathematics III: Student Growth and Classroom Processes.* Oxford: Pergamon Press.

Casselman, B. (2000). Pictures and proofs. *Notices of the AMS*, n. 47, p. 1257-1266.

Clayton, M. (1999). Industrial Applied Mathematics Is Changing As Technology Advances: What Skills Does Mathematics Education Need to Provide? In: Hoyles, C.; Morgan, C.; Woodhouse, G. (Org.) *Rethinking the Mathematics Curriculum*. Londres: Falmer Press.

D’Ambrosio, U. (2007). *Problem solving: a personal perspective from Brazil*. ZDM, v. 39, p. 515-521.

Francis, G. (1996). *Mathematical visualization: Standing at the crossroads*. <http://www.oldweb.cecm.sfu.ca/projects/PhilVisMath/vis96panel.html>.

Gainsburg, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 11, n. 3, p. 199-219.

Grundy, S. (1987). *Curriculum: product or praxis*. Londres: The Falmer Press.

Hanna G. et al. (2004). Teaching Proof in the Context of Physics. ZDM, v. 36, n. 3, p. 82-90.

Hanna G.; Sidoli, N. (2007). *Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives*. ZDM, v. 39, p. 73-78.

Knijnik, G. (2004). Etnomatemática e educação no movimento sem terra. In: Knijnik, G.; Wanderer, F.; Oliveira, C. J. *Etnomatemática, currículo e formação de professores.* Santa Cruz do Sul: EDUNISC.

Miguel, A. (2008). Concebendo o currículo como prática escolar de problematizar práticas não escolares. Trabalho apresentado no simpósio "Inovações curriculares: rupturas epistemológicas e culturais". In: *XIV Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino*. Porto Alegre.

Monteiro, M. A. (2008). *A Matemática do Índice de Desenvolvimento Humano – IDH.* In: Revista do Professor de Matemática, n.67, p.31-35. São Paulo.

Nieves Álvarez, M. et al. (2002). *Valores e temas transversais no currículo*. Porto Alegre: Artmed.

Ponte, J. P.; Brocado, J.; Oliveira, H. (2005). *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Sacristán, J. G. (2000). *O Currículo: uma reflexão sobre a prática*. Tradução de: Ernani F. da F. Rosa. 3. ed. Porto Alegre: ArtMed.

Silva, M. A. (2006). *Jornais e os Temas Transversais*. In: Anais do VIII Encontro Paulista de Educação Matemática, São Paulo.

Silva, M. A. (2009). *Currículos de Matemática no Ensino Médio: em busca de critérios para escolha e organização de conteúdos*. 248f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behavior*, v. 24, n. 3-4, p. 341-350.

**Marcio Antonio da Silva**. Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP. Professor do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/UFMS. Campo Grande-MS, Brasil. Endereço para correspondência: Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (CCET/UFMS). Cidade Universitária – Caixa Postal 549 – CEP: 79070-900 – Campo Grande, MS, Brasil. marcio.silva@ufms.br

**Célia Maria Carolino Pires**. Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo – USP. Professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP. São Paulo-SP, Brasil. Endereço para correspondência: Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (CCET/PUC-SP). Endereço para correspondência: Rua Marquês de Paranaguá, 111 - Prédio 1 - 2º andar - Consolação – CEP: 01303-050 – São Paulo, SP, Brasil. celia@pucsp.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 45-63
ISSN: 1815-0640

# Las funciones polinómicas de segundo grado en el marco de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI): alcances y limitaciones.

**Viviana Carolina Llanos, María Rita Otero**

## Resumen

En este trabajo se presentan algunos resultados de una investigación que propone insertar un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI) en cursos de 4$^{to}$ Año de la Secundaria en Argentina. En total se realizaron seis implementaciones de las que participaron 163 estudiantes entre 14 y 15 años. Se describen los alcances y limitaciones del inicio de todo un recorrido de estudio y se analiza la viabilidad de estos dispositivos en la escuela secundaria. Se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard.

## Abstract

In this paper we present some results of a research carried out to introduce Research and Study Courses (RSC) in the secondary school in usual classes of 4$^{th}$ year at Secondary level in Argentina. We have realized six implementations with 163 students between 14 and 15 years old. We describe the advantages and limitations of these proposal and we analyzed the viability of these devices in the secondary school. We adopted the framework of the Anthropologic Theory of Didactic (ATD) of Yves Chevallard.

## Resumo

Apresentamos resultados de uma investigação pra introduzir um Percurso de Estudo e de Investigação (PEI) em cursos habituais de 4$^{to}$ Ano do ensino meio na Argentina. Em total foram feitas seis implementações envolvendo 163 estudantes entre 14 e 15 anos. Aqui descrevemos os alcances e as limitações de um percurso de estudo e também analisamos a viabilidade destes dispositivos na escola secundária. A Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard e o referencial teórico adotado

## 1. Introducción

En la escuela secundaria, la enseñanza de la matemática presenta problemas, que ocasionan frustración para los estudiantes y para los profesores. El modelo didáctico imperante es mecanicista y la actividad esencial del alumno se reduce a la transcripción o reproducción, de lo que el profesor explica y propone. El docente es quien "cubre" casi todo el espacio disponible en la clase, "tiene" que explicar y "transmitir" el saber al alumno, ser además su "garante", y de este modo, son pocas las posibilidades de construcción y deconstrucción que pueden tener lugar en el aula. La actividad reconocida al profesor es *explicar* y "*mostrar"* el saber, del mismo modo que se exhibe una escultura en un museo, como una obra terminada, incuestionable y en el decir de Chevallard, "muerta"; fenómeno, que ha sido llamado metafóricamente *monumentalización del saber* (Chevallard, 2004). El fenómeno de la *monumentalización* produce en el profesor una obligación inevitable: "el profesor debe explicar, describir, mostrar con claridad, etc. Se sobredimensiona su figura por sobre los alumnos, al mismo tiempo, que se reduce el lugar de los estudiantes al de reproductores, espectadores y “visitante de la obra”. Otra consecuencia “grave” de la *monumentalización* es la sustitución de las preguntas por las respuestas. Las obras expuestas “como monumentos” son respuestas a preguntas ocultas, sin que se reconozca la necesidad de remitir a su origen, a su utilidad, a su razón de ser, a su porqué o para qué. La desaparición de las preguntas y de la actividad de construir conocimiento es una de las consecuencias más desfavorables y difíciles de revertir de la *pedagogía monumentalista* en la enseñanza de las matemáticas.

Nuestro problema didáctico es introducir en la escuela secundaria un cambio radical en la forma de hacer matemática. Este cambio requiere de una modificación sustancial del contrato vigente, reemplazando la *pedagogía monumentalista* por otra, denominada por Chevallard (2004, 2007) *de la investigación* y *del cuestionamiento del mundo*. En la “nueva” pedagogía el saber es entendido como la respuesta a una pregunta matemática que tiene sentido para la comunidad de estudio, una pregunta “fuerte”, que para ser respondida requerirá de la elaboración de respuestas parciales que en su conjunto aportarán de manera funcional al saber matemático. La respuesta de la TAD al problema de la *monumentalización* y la consecuente *pérdida de sentido* de las matemáticas escolares, se articula a partir del constructo *Recorrido de Estudio y de Investigación* (REI) (Chevallard, 2004, 2007). Los REI sitúan a las cuestiones $Q$ como punto de partida de todo un proceso de estudio. Un aspecto esencial es relativo a la posibilidad de introducir estos dispositivos en el Nivel Secundario. En este trabajo, se describen algunos resultados de la inserción de un REI en clases de matemática habituales.

## 2. Marco teórico: algunas nociones centrales de la TAD

Se adopta como referencial teórico la TAD de Yves Chevallard (1999), específicamente el constructo *Recorrido de Estudio y de Investigación* (REI) (Chevallard 2004, 2005, 2006, 2007, 2009). Chevallard (2007) propone este dispositivo para enfrentar y comenzar a superar el fenómeno de la *monumentalización del saber* y *pérdida de sentido* de los conceptos matemáticos que se estudian en la institución escuela media. Uno de los factores que describe la *pérdida de sentido*, es relativo a la sustitución de las cuestiones $Q$ por las respuestas $R$. Los programas de estudio $P=(Q_i;R_i)_{1\leq i\leq n}$, afectados por la sustitución de cuestiones, toman la forma $P=(?;R_i)_{1\leq i\leq n}$; convirtiéndose en una sucesión de respuestas $R_1, R_2,\ldots,R_n$,. Estas respuestas $R_i$ no responden a ninguna cuestión $Q$; y de este modo, son consideradas *per se*, tendencia denominada *monumentalización* de saberes (Chevallard, 2004, 2006). Algunas investigaciones se han ocupado de los problemas de la *pérdida de sentido* y la *monumentalización del saber* (Barquero, Bosch y Gascón, 2012; Chevallard, 2004, 2005, 2007, 2009; Marietti, 2009) y consideran que una enseñanza por REI puede promover a la superación de estos fenómenos. Los REI ponen en primer plano el estudio de cuestiones genuinas enfatizando que la *razón de ser* de todo el proceso de estudio viene dada tanto por la construcción de una “buena” respuesta a la cuestión, como por la generación de otras nuevas cuestiones que podrían reorientar y mejorar todo el estudio.

### 2.1 Sobre las características de los REI

En un REI la cuestión generatriz $Q_0$ es el punto de partida del proceso de estudio en una clase $[X,Y]$. La evolución de dicha cuestión $Q_0$ requiere de la emergencia de otras cuestiones derivadas $(Q_i)_{1\leq i\leq n}$ que permiten la formación y el funcionamiento de los sistemas didácticos $S(X;Y;Q_i)_{1 \le i \le n}$ cuya finalidad es la producción de una respuesta R$^{\heartsuit}$. El estudio de una cuestión generatriz $Q_0$ se concreta en un recorrido "general" que integra varias cuestiones $Q_i$, donde cada una a su vez da lugar a numerosas cuestiones particulares ligadas a ellas, lo que permite la emergencia de varias entidades praxeológicas $(\wp_i)_{i>1}$. El *medio* didáctico queda así conformado por: $\wp_1, \wp_2, ...., \wp_k \in M \cup$ R$^{\heartsuit}$, con $M = \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, ...., R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, ...., O_m\}$, donde las $R_i^{\Diamond}$ son las posibles respuestas a la cuestión $Q$ existentes en la cultura y donde las $O_j$ son otras obras juzgadas útiles a la creación de la respuesta $R^{\heartsuit}$.

En un REI el sistema didáctico queda definido por lo que Chevallard, (2009) denomina esquema *herbartiano*[1] *desarrollado*:

$$[S(X;Y;Q)) \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, ...., R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, ...., O_m\}](\mathrm{R}^{\heartsuit},$$

y las entidades praxeológicas, se colocan:

$$\wp_1, \wp_2, ...., \wp_k \subset \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, ...., R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, ...., O_m\} \cup \mathrm{R}^{\heartsuit}.$$

Este esquema permite interpretar algunas características e indicadores que posee un REI: es necesario partir del estudio de una cuestión generatriz y las respectivas cuestiones derivadas, a la cual es necesario aportar una respuesta; debe pasar por la constitución de un medio *M*, debe permitir obtener como resultado del proceso la elaboración, validación e institucionalización de una respuesta $R^{\heartsuit}$. La inserción del REI requiere entonces de un cambio sustancial de la organización didáctica corriente, con implicaciones fuertes en la *cronogénesis,* la *topogénesis* y la *mesogénesis* (Chevallard, 1985, 2009). En un REI el medio no está totalmente determinado, es "construido por la clase". La *mesogénesis*, remite a la gestación y sostenimiento del *medio didáctico* que se elabora para generar la respuesta a *Q*. Son varias las obras que puede ser llamadas a construir el medio, y ninguna puede ser excluida. El *medio M* debe ofrecer herramientas idóneas para construir y justificar cada $R_i^{\Diamond}$ y la $R^{\heartsuit}$. La modificación en la *topogénesis*, relativa a la manera en que se gesta la ocupación de espacios del profesor y del alumno, va a la par de los cambios en la *mesogénesis*. El *topos* del alumno se modifica y amplía. El alumno puede aportar su respuesta personal $R_x$ como solución al problema propuesto por *y*; pero además puede llevar a *M* cualquier obra que considere necesario estudiar. El *topos* del director del estudio de *Q*, Y (o un profesor *y*), asume el compromiso de decidir si la clase [*X*,*y*] tratará o no con el *medio* propuesto para su estudio.

La *cronogénesis*, relativa a la gestión y regulación de los tiempos didácticos también se ve afectada por los cambios en la *topogénesis* y la *mesogénesis*. La constitución y el "trabajo" del medio *M* afectan al tiempo didáctico originando una dilatación del mismo. Es necesario "cuidar" todo el trabajo en el *medio*. El impulso de "estimular el estudio" de manera artificial para que el "tiempo escolar" sea acorde al producido por el REI debe ser evitado en una *pedagogía de la investigación*.

A partir de las características del constructo REI propuesto por la TAD, se abordan las preguntas de la investigación:

- ¿Cuáles son los alcances y limitaciones del recorrido implementado en el marco del REI para estudiar las funciones polinómicas de segundo grado?

[1] Chevallard indica que el adjetivo "herbartiano" hace referencia al filósofo y pedagogo alemán Johann Friedrich Herbart (1776-1841)

- ¿Qué elementos permiten justificar la viabilidad de los dispositivos tipo REI en la escuela secundaria?

## 3. Metodología

La investigación propone un estudio cualitativo, de corte exploratorio y carácter etnográfico. Se busca describir las características del dispositivo diseñado en una *pedagogía de REI* para la escuela secundaria, presentando algunos resultados obtenidos en los grupos seleccionados para implementar dicho dispositivo.

### 3.1 Acerca del contexto de implementación:

Los cursos pertenecen a $4^{to}$ Año secundaria en Argentina y fueron seleccionados por el investigador. Todas las implementaciones se realizaron en un mismo establecimiento educativo con estudiantes entre 14 y 15 años. En todos los cursos predomina en el comienzo una *enseñanza tradicional* y *monumentalista*. Cada grupo de estudio está conformado por aproximadamente 30 alumnos y el profesor del curso. Las clases se desarrollan en dos encuentros semanales con duración de tres horas en total. Los estudiantes y el profesor permanecen todo el ciclo lectivo en el curso, pero cada implementación dura 13 semanas, y la ejecución de la propuesta corresponde al segundo semestre. Se realizaron en total seis implementaciones, dos por cada año, durante tres años consecutivos de las que participaron 163 estudiantes. En la clase los estudiantes están dispuestos en equipos de trabajo de cuatro integrantes. Cada implementación permitió mejorar el diseño y las condiciones de estudio entre unas y otras ejecuciones.

### 3.2 Acerca del "nuevo" acuerdo de trabajo:

Para insertar la *pedagogía de la investigación* es necesaria una modificación de contrato en los cursos seleccionados por el investigador. Este cambio puede realizarse si el profesor asume un lugar y realiza unas actividades diferentes, y también de una manera más explícita. En este caso fue necesario que los estudiantes supieran que se encontraban en un contexto experimental y que prestaran su acuerdo, si así lo deseaban. Se elaboró un *"Acta de compromiso y* estudio *en Matemática"* (Otero, 2007) que consiste en un conjunto de acuerdos de trabajo que se elaboran y consensúan entre el profesor y los alumnos.

El acuerdo propone ingresar en un dominio didáctico diferente donde entre otras cosas, se contempla explícitamente el reconocimiento de que el error es siempre a posteriori, y en consecuencia, es inevitable, razón por la cual se vuelve una oportunidad de aprender y reflexionar. También se discuten cuestiones que son críticas para los estudiantes *¿cómo va a ser la evaluación?* Se refieren a cómo, cuándo y en base a qué se los va a calificar. Se acuerdan con ellos *nuevas* reglas, dirigidas a clarificar el inevitable proceso de calificación, confundido en el nivel de la pedagogía con la evaluación, que es algo sustancialmente diferente. Todo el proceso de generación de este acuerdo así como el de su escritura y ratificación ayudan a la instalación de un nuevo contrato. Los estudiantes comienzan a percibir que tienen tareas y responsabilidades nuevas, un lugar diferente.

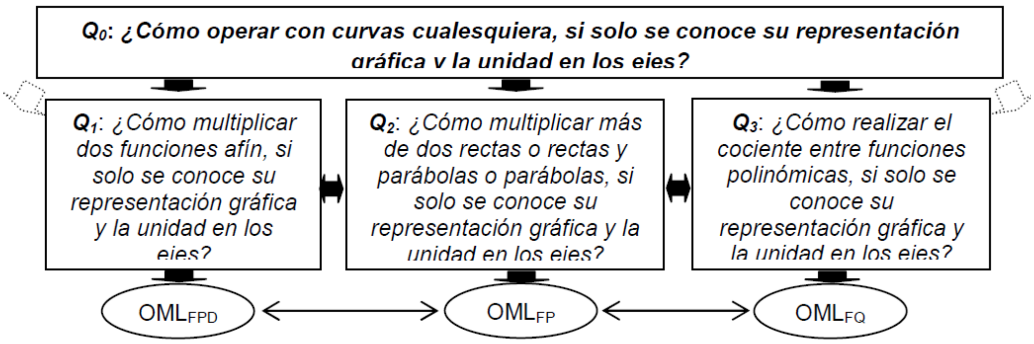
### 3.3. Acerca de la recolección de los datos y los instrumentos de análisis:

En cada implementación el profesor tuvo carácter de observador participante. Se realiza también observación no participante a partir de la colaboración de colegas del equipo de investigación. Se toma un audio general de cada curso durante todo el período de ejecución del dispositivo y además el profesor-investigador registra notas de campo antes y después de cada clase correspondiente a cada implementación. Todas las clases, el profesor acerca el problema que es nuevo para los estudiantes y también "retira" al finalizar cada encuentro las producciones escritas de todos los alumnos. Se escanean todos los trabajos escritos y se devuelven a la clase siguiente. Esto permite obtener todos los protocolos escritos de los estudiantes durante cada implementación. Para analizar estos protocolos, se decidió segmentarlos en episodios correspondientes a cada tarea y además se selecciona un alumno, el más representativo de cada grupo de estudio, por cada implementación. La selección de los alumnos "prototípicos" de cada grupo, atiende a criterios vinculados con las producciones personales de los estudiantes dentro del grupo, en todas las clases .Se transcriben los audios que permiten al investigador recuperar información de lo ocurrido en la clase. En este trabajo se presentan algunos resultados obtenidos de las implementaciones realizadas, que permiten describir los cambios que produce la inserción de REI en la escuela secundaria, respecto de la enseñanza tradicional.

## 4. Los REI:

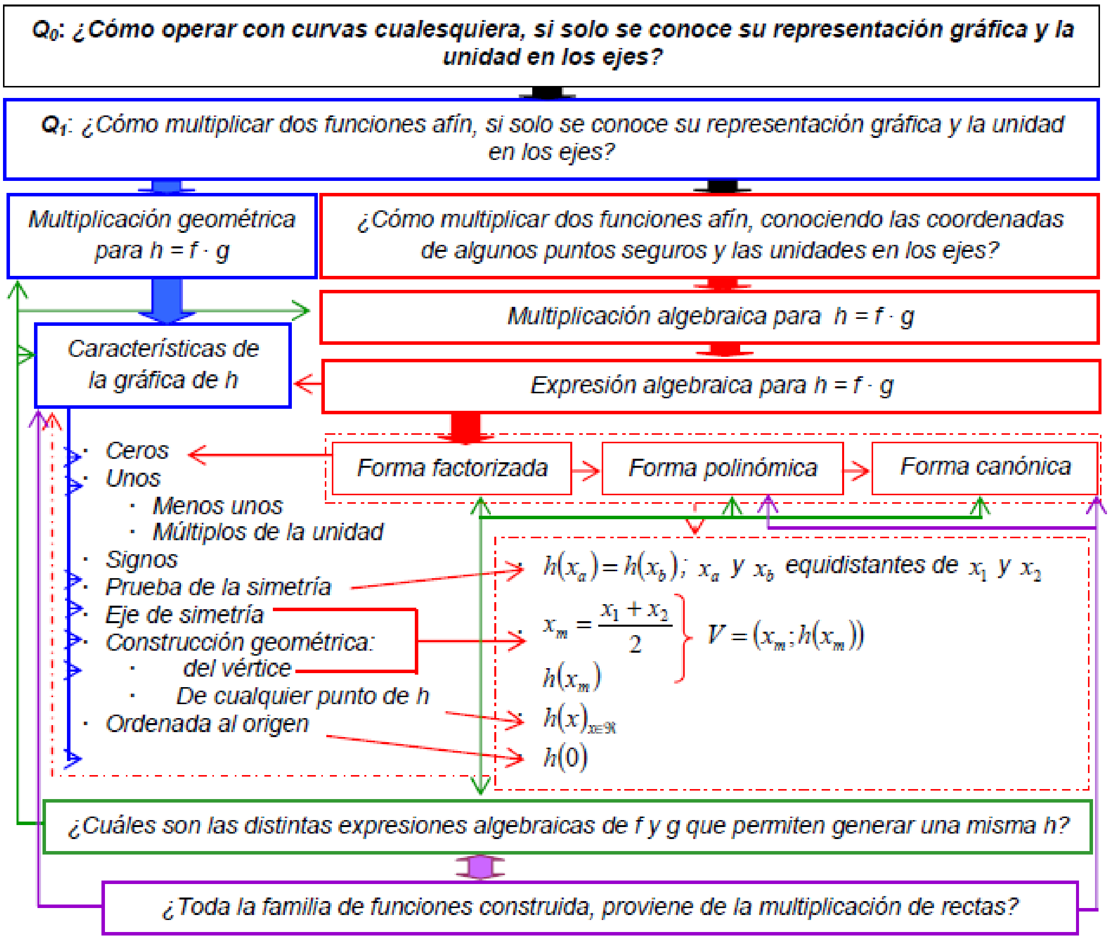
Todo el recorrido se inicia a partir de la cuestión generatriz $Q_0$: *¿Cómo operar con curvas cualesquiera, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?* La respuesta a dicha cuestión puede originar diferentes recorridos de estudio, dependiendo de las funciones que se adopten y de la operación que se realice entre las mismas. Por ejemplo, si se multiplican dos rectas es posible generar un posible recorrido que permite reconstruir la Organización Matemática Local ($OML_{FPD}$) de las funciones polinómicas de segundo grado; si se multiplican más de dos rectas o combinaciones entre parábolas y rectas o entre parábolas, se origina la posibilidad de reconstruir la $OML_{FP}$ de las funciones polinómicas en el cuerpo de los reales; si se trata del cociente de rectas, o de rectas y parábolas, o entre funciones polinómicas, es posible reconstruir la $OML_{FQ}$ de las funciones racionales, y así podríamos continuar y elegir otros posibles caminos de estudio.

Las posibles respuestas a $Q_0$ se corresponden con posibles recorridos que paulatinamente aportan resultados parciales a $R^{\heartsuit}$ como resultado de todo el proceso. En el marco de esta investigación se han ejecutado además, otros tres recorridos que permiten: estudiar las funciones polinómicas de grado dos, las funciones polinómicas; y también las funciones racionales (Gazzola, Llanos, Otero, 2011; Llanos, Bilbao, Otero, 2011; Llanos, Otero, 2011; Llanos, Otero, Bilbao, 2011; Otero, Llanos, 2011). Los recorridos abordados al momento, en el marco de esta investigación, pueden sintetizarse en el siguiente esquema.




**Esquema 1: Posibles recorridos de investigación, desarrollados en el marco del REI.**

El diseño propuesto parte de $Q_1$ y consta de un conjunto de diez situaciones. Las tres primeras, se basan en la adaptación de una ingeniería propuesta por Régine Douady (1986, 1999, 2010, 2011) para estudiar los signos de las funciones polinómicas. En nuestro caso, el inicio del recorrido que se propone va más allá del análisis de signos y permite obtener la curva (parábola) que resulta de la multiplicación geométrica de dos rectas. El análisis de los signos es una información más entre las características que es necesario construir. Luego de estas situaciones se avanza en la multiplicación algebraica de las rectas, cuestión de la que no nos ocupamos en este trabajo. Además el estudio de $Q_1$ involucra dos actividades de síntesis a cargo de los estudiantes, tres instancias de familiarización correspondientes a las tareas, dos síntesis parciales proporcionadas por el docente, y dos evaluaciones escolares. El esquema 2 permite interpretar cómo se ha efectuado el recorrido que parte de la multiplicación de las rectas, cómo se recuperan las cuestiones y los conceptos construidos, al mismo tiempo que permite explicar cómo se relacionan los conceptos que se van construyendo en el trayecto por la cuestión $Q_1$ y las cuestiones que de esta se derivan.




**Esquema 2: Descripción del recorrido generado a partir de $Q_1$**

Este trabajo describe los resultados obtenidos de la primera parte del recorrido, a partir de las tres primeras situaciones, relativas a la multiplicación geométrica de las rectas. Aquí resulta muy importante describir y analizar los alcances y limitaciones de las técnicas que se construyen no sólo para obtener la representación gráfica de las funciones polinómicas de grado dos, sino también para los demás recorridos generados en el marco del REI.

## 4.1 Sobre la multiplicación geométrica de las rectas:

El REI parte de la multiplicación geométrica de las rectas. Las tres primeras situaciones permiten construir una gráfica razonable para *h* que resulta de multiplicar dos rectas, y las variantes entre estas se dan en las diferentes rectas. En todos los casos $h = f \cdot g$ . Las cuestiones propuestas en estas situaciones son:

*Las funciones f y g están dadas por los gráficos de las Figuras. Todas las rectas A//B//C//D, son perpendiculares al eje x. La función* $h = f \cdot g$ .

**Situación 1** **Situación 2** **Situación 3**

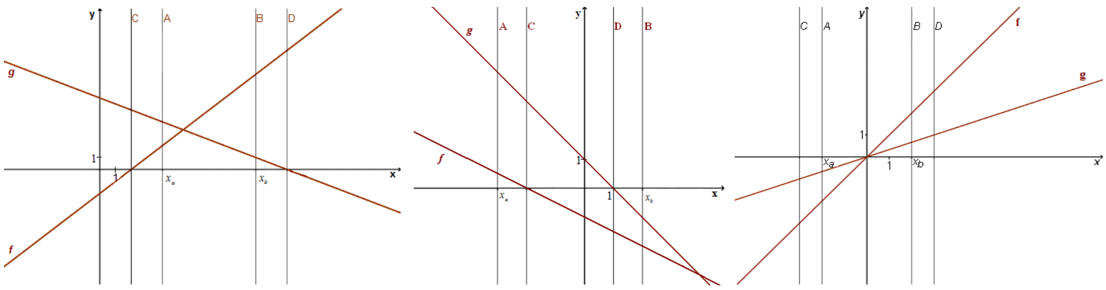


**Figura 1: Gráficas correspondientes a las a las funciones f y g de las situaciones 1, 2 y 3.**

*(a) ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para h? ¿Qué características de la gráfica de h podrías justificar?*

*(b) Para todo* $x_a$ *y* $x_b$ *equidistantes de los ceros de cada función,* $\overline{CA} = \overline{BD}$ *¿Es verdad que* $h(x_a) = h(x_b)$ *? ¿Podrías justificar?*

*(c) ¿Qué triángulos tendrías que construir para calcular la multiplicación entre f y g en el eje de simetría, utilizando como lado de uno de los triángulos, la unidad?*

Estas situaciones permiten construir los puntos notables y una gráfica aproximada para la curva parábola. Para ello es necesario identificar los signos ($C^+$ y $C^-$) de *h*, a partir de las gráficas de *f* y *g*, los puntos seguros de *h* (ceros, unos, menos uno, múltiplos de la unidad), justificar la simetría de la curva (identificar el eje de simetría, identificar los puntos simétricos), construir el vértice de *h*, y también es posible construir geométricamente cualquier punto para *h*. Para describir los alcances del problema propuesto, se propone explicitar las técnicas que permiten generar la gráfica para *h* a partir de la primera situación. Los demás casos estarán contemplados en los resultados obtenidos de la puesta en obra en el aula.

## 4.2 Sobre las características de *h* y la construcción de puntos notables

La información proporcionada en el problema (la representación gráfica de *f* y *g* y la unidad en los ejes) permiten obtener en principio algunos *"puntos seguros",* en el decir de los estudiantes, y el análisis de los signos de *h*, a partir de los signos de *f* y *g*. Partiendo de que $h = f \cdot g$, es posible identificar cuatro puntos, que se identifican con (×), que los estudiantes denominan "los ceros y los unos" y son seguros porque:

$$f(x_c) = 0 \Rightarrow h(x_c) = 0 \cdot g(x_c) = 0$$
$$g(x_d) = 0 \Rightarrow h(x_d) = f(x_d) \cdot 0 = 0$$
$$f(x_i) = 1 \Rightarrow h(x_i) = 1 \cdot g(x_i) = g(x_i)$$
$$g(x_b) = 1 \Rightarrow h(x_b) = f(x_b) \cdot 1 = f(x_b)$$

además los signos de las funciones *f* y *g*, determinan los signos de *h*.

$$\forall x \in (-\infty ; x_c) \;\; f < 0 \text{ y } g > 0 \Rightarrow h < 0$$
$$\forall x \in (x_c ; x_d) \;\; f > 0 \text{ y } g > 0 \Rightarrow h > 0$$
$$\forall x \in (x_d ; +\infty) \;\; f > 0 \text{ y } g < 0 \Rightarrow h < 0$$

En la Figura 2 se identifican los signos, ceros y unos. Es posible obtener otros puntos, pero resulta de fundamental importancia probar primero que $h(x_a) = h(x_b)$ para obtener también por construcción los puntos simétricos a los antes mencionados.

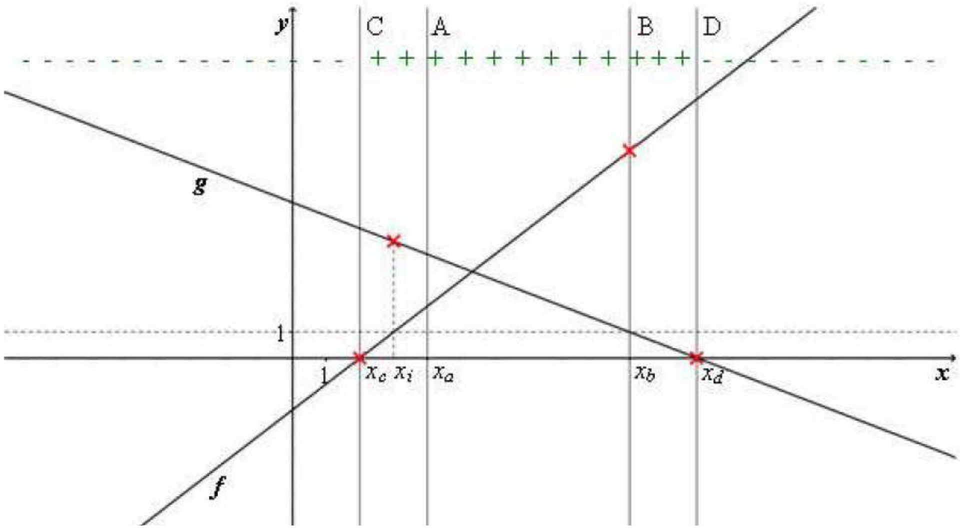



**Figura 2: identificación de cuatro puntos seguros y de los signos de *h***

Para realizar la prueba por la simetría de la curva, es necesario construir triángulos semejantes sobre los segmentos $x_a$ y $x_b$, que son puntos que equidistan de los ceros. Se nombra, por ejemplo, a $f(x_a) = y_a$, $f(x_b) = y_b$, $g(x_a) = y'_a$, $g(x_b) = y'_b$ y se construyen dos pares de triángulos semejantes determinados por estos segmentos. En la Figura 3 se identifican los triángulos, y por las relaciones entre los ángulos de los triángulos construidos es posible afirmar que los pares de triángulos azules y verdes son semejantes entre si. Además el enunciado indica que los segmentos $\overline{CA} = \overline{BD}$, se nombra a esta longitud como *z* y la que es común a ambos triángulos *w*.

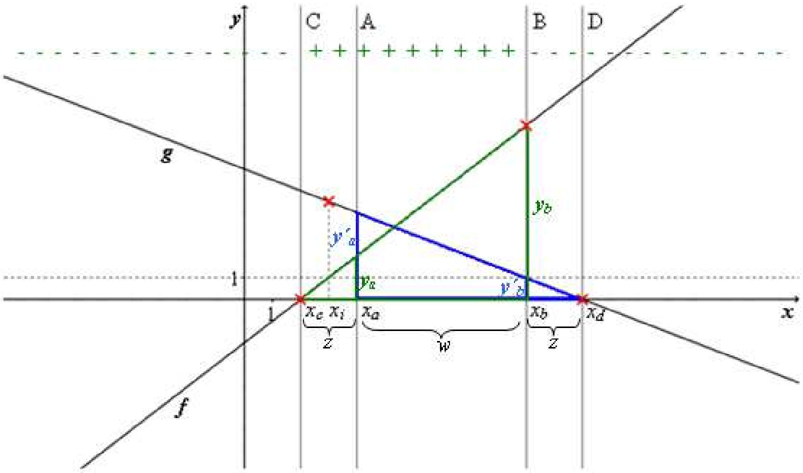



**Figura 3: Identificación y ubicación de los triángulos semejantes sobre $x_a$ y $x_b$**

Como los pares de triángulos son semejantes, es posible por el teorema de Thales plantear la proporción entre los lados de los triángulos:

$$\left.\begin{array}{l} Azules: \dfrac{y'_a}{y'_b} = \dfrac{w+z}{z} \\ Verdes: \dfrac{y_b}{y_a} = \dfrac{w+z}{z} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{y'_a}{y'_b} = \frac{y_b}{y_a} \Rightarrow y'_a \cdot y_a = y'_b \cdot y_b \Rightarrow g(x_a)\cdot f(x_a) = g(x_b)\cdot f(x_b);$$

$h(x_a) = h(x_b)$ $\forall x_a$ y $\forall x_b$ equidistantes de los ceros de *h*. Entonces *h* es simétrica, con respecto a un eje vertical que se encuentra en la mediatriz de los ceros de $x_c$ y $x_d$ respectivamente y se denomina "eje de simetría".

La prueba por la simetría de la curva permite además obtener otros puntos seguros, los simétricos de $h(x_i)$ y $h(x_b)$que ya se han identificado como puntos seguros. En la Figura 4 se agrega la construcción del eje de simetría y los puntos simétricos (×).

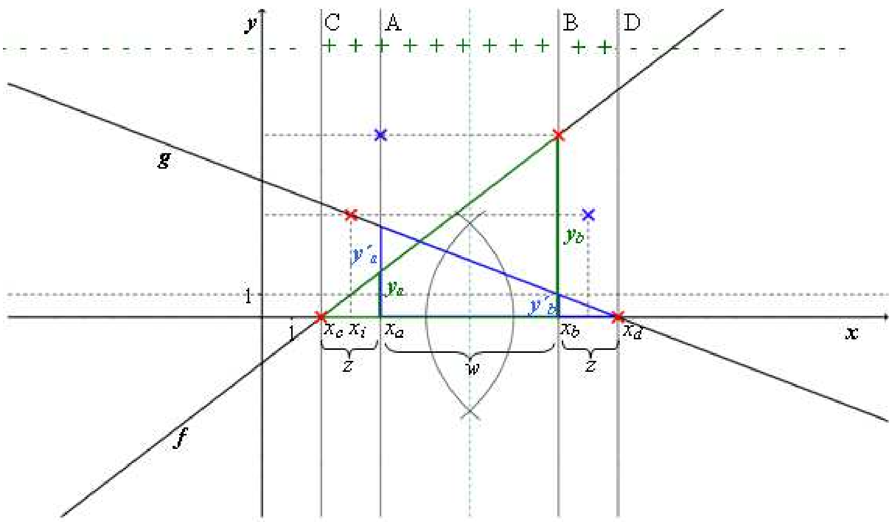



**Figura 4: Representación del eje de simetría y de los puntos simétricos de $x_i$ y $x_b$.**

Para aumentar la precisión sobre las características de la gráfica de *h*, es posible recuperar el razonamiento utilizado para la identificación de puntos seguros de la Figura 2, que, puede ser generalizado para cualquier múltiplo de la unidad que se quiera construir. Dicha "ampliación" permite determinar otros puntos, a partir de los múltiplos de la unidad: "los menos unos, los dos", etc.; identificados (×) en la Figura 5. Por ejemplo, los menos unos y los dos quedan así justificados:

$$f(1) = -1 \Rightarrow h(1) = f(1) \cdot g(1) \Rightarrow h(1) = -1 \cdot g(1) \Rightarrow h(1) = -g(1)$$

$$f(x_a) = 2 \Rightarrow h(x_a) = f(x_a) \cdot g(x_a) \Rightarrow h(x_a) = 2 \cdot g(x_a)$$

Se obtienen los simétricos de estos puntos y lo mismo ocurre con el -1 y el 2 para la recta *g*. Podrían también identificarse otros puntos: los tres, los menos dos, etc. tantos como sea necesario.

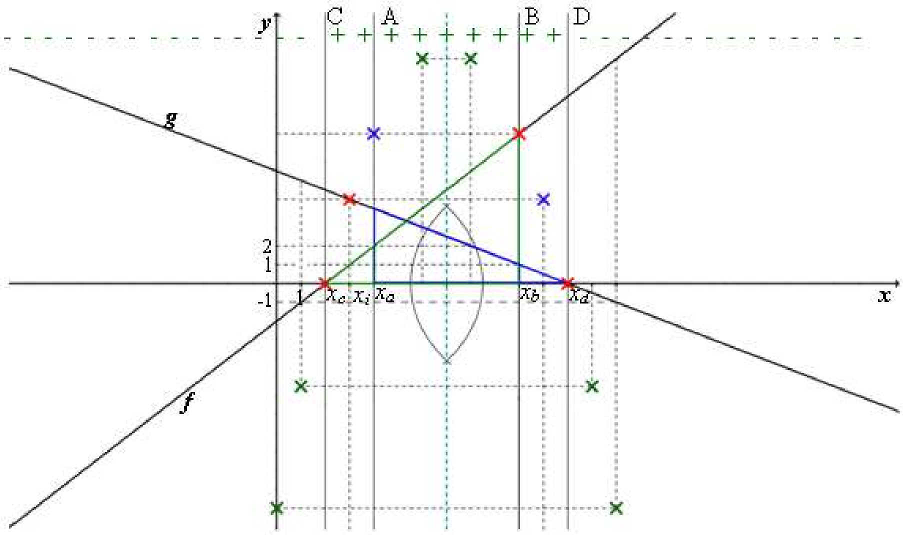



**Fig. 5: Representación de los múltiplos de la unidad.**

El incremento de puntos seguros permite "mejorar" las características de la gráfica de *h*, pero esta técnica tiene algunas limitaciones: sólo permite obtener los puntos seguros que son múltiplos de la unidad, y no permite conocer la intersección de *h* en el eje de simetría; no es posible obtener el vértice de *h*. Este problema puede ser superado a partir del ítem c) que propone construir triángulos semejantes utilizando como datos la unidad. En la Figura 6 se identifican los segmentos de *f* y *g* en el eje de simetría y se los nombra $a$ y $b$ respectivamente. Con $a$ y la unidad se construye un triángulo. Trasladando el segmento $b$ al eje *x*, se construye otro triángulo semejante al anterior y el segmento que se obtiene se nombra *c*. Por construcción los triángulos son semejantes y por lo tanto sus lados proporcionales:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{1} \Rightarrow c \cdot 1 = a \cdot b\,;$$

*c* es el resultado de realizar la multiplicación entre los segmentos de *f* y *g* en el eje de simetría.

El problema de la multiplicación geométrica de las rectas requiere validar cada punto notable de la parábola. Los ceros, la prueba por la simetría, el eje de simetría y el vértice son objeto de construcción. Los estudiantes poco a poco van obteniendo distintas informaciones sobre la gráfica de *h*, puntos seguros y signos principalmente; y también consiguen realizar la prueba por la simetría y obtener la construcción del vértice. Los resultados obtenidos de las implementaciones permiten justificar la relevancia de las técnicas indicadas en este apartado.

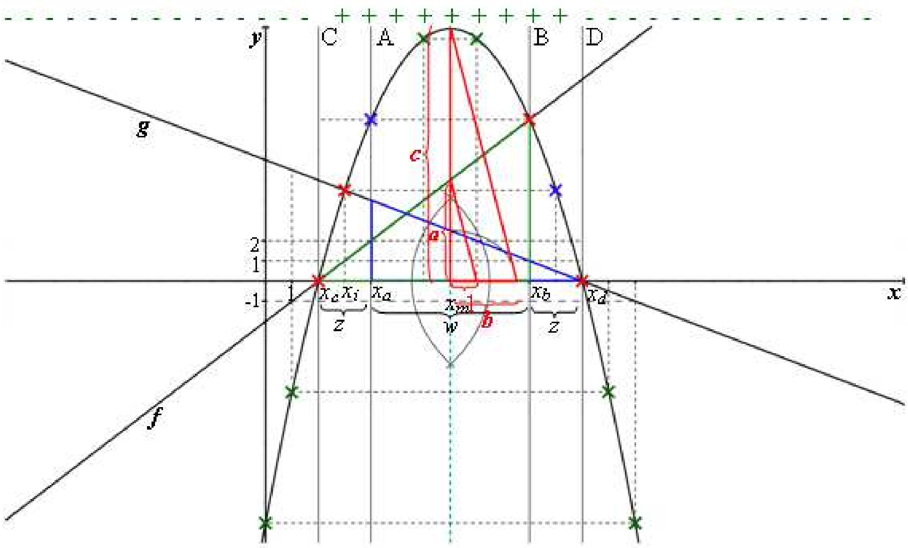



**Figura 6: Construcción geométrica del vértice y representación gráfica de *h*.**

## 4.3 Sobre la puesta en obra del REI:

Las situaciones analizadas en este trabajo difieren en las rectas que se multiplican en cada caso. La información de la que disponen los estudiantes siempre es la misma. Entre las discusiones que dieron origen al problema de obtener la gráfica de *h*, pueden mencionarse:

- Los estudiantes intentan buscar primero las expresiones algebraicas de *f* y *g*, luego *h*. No logran obtenerlas porque no tienen seguridad de los puntos que buscan para construir las expresiones de las rectas.
- También consideran que la intersección entre *f* y *g* es un puto notable para *h* y aseguran que la gráfica pasará por dicho punto. Esta idea es desestimada más adelante porque eso ocurriría solamente si la intersección entre las rectas se dan en (*x*;1). Aparecen dentro de este problema los casos de los grupos que consideran que *h* es una recta que pasa por ese punto, o los que saben que además tendrá que pasar por los ceros de *f* y *g* y dibujan la gráfica de *h* con la forma de un "pino" cuyo extremo se encuentra en dicha intersección.
- En algunos grupos, la pregunta por la simetría genera la intuición de que algo importante relacionado con *h* ocurre en el punto medio de los ceros; y hasta indican a *h* como una recta vertical en ese punto.

Progresivamente y superando las "respuestas no tan adecuadas" los estudiantes consiguen identificar algunos puntos notables y analizan también los signos de *h*. La identificación de los puntos seguros y signos presentó algunas dificultades, sobre todo al inicio, dado que las respuestas requieren de un tiempo "de maduración", de avances, y retrocesos, de una adecuada distribución de responsabilidades, de discusiones, de acuerdos.

Otra cuestión crucial, aunque más compleja para los estudiantes, es relativa a la prueba por la simetría de la curva. En todas las implementaciones ha sido posible obtener dicha prueba, pero siempre con la dificultad de los estudiantes para identificar los segmentos que permiten construir los triángulos semejantes para probar la simetría de la curva por medio del Teorema de Tales. En todos los casos ha sido necesaria la intervención del profesor para ayudar a los alumnos a identificar los segmentos de *f* y *g* en $x_a$ y $x_b$ respectivamente, y a partir de ahí son los alumnos quienes realizan las construcciones. Los alumnos realizan algunas inferencias que les permite "asegurar" que el valor de *h* en el eje de simetría es único (y el "mayor o menos" según el caso), pero no consiguen obtener ese punto hasta tanto no avanzan con el problema de la construcción geométrica del vértice.

Para la construcción del vértice toda la clase discute y comparte los resultados que se ajustan más a la respuesta del problema. Se genera discusiones relativas a las posiciones de los segmentos de las rectas y la unidad, cuestión que se termina resolviendo por recurrencia al análisis de signos. Este análisis da lugar a los estudiantes a explicitar la técnica que permite calcular la multiplicación entre dos segmentos en cualquier abscisa. En algunos casos deciden también realizar la construcción en otros puntos además del vértice, lo que permite aumentar la cantidad de puntos seguros y su certidumbre de obtener una gráfica más precisa para *h*. La construcción correspondiente a la situación 1 se ha tomado como caso para describir las técnicas que se requieren construir para obtener una respuesta al problema de la multiplicación geométrica de las rectas. En esa situación las rectas que se multiplican tienen pendientes con signos opuestos, *f* y *g* ceros distintos y *h* tiene un máximo. En la situación 2 las rectas tienen ceros distintos, pendientes con igual signo y *h* alcanza un mínimo. El protocolo A56 de la figura 7 corresponde a la situación 2. En este protocolo el estudiante identifica los signos, los puntos seguros (los ceros, unos, los menos dos y los menos uno), realiza la prueba por la simetría de la curva y la construcción geométrica del vértice. La gráfica que obtiene para *h* es muy aproximada.

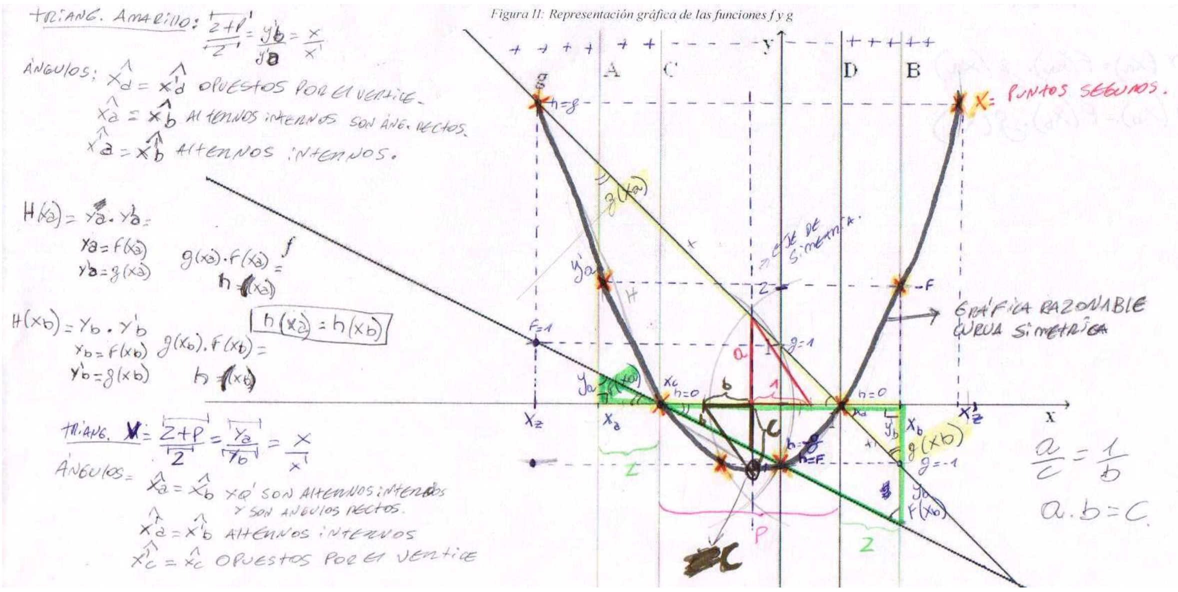



**Figura 7: Protocolo correspondiente al alumno A69. Implementación 3.**

Con la situación 3 se introduce el problema de la multiplicidad de los ceros. Se analizan las características de la gráfica de *h* con dos ceros reales iguales. En esta situación el vértice de la parábola coincide con los ceros de las rectas. Los estudiantes continúan identificando los signos y los puntos seguros (ceros, unos y en algunos casos, los múltiplos de la unidad). En el protocolo A136 correspondiente a la figura 8, se interpreta la importancia de la técnica construida en principio para la obtención del vértice de la parábola que luego fue generalizada para cualquier punto de *h*. Este alumno consiguió identificar no sólo los signos y puntos seguros (ceros y unos); sino que además pudo agregar por construcción cuatro puntos más que le permitieron mejorar las características de la gráfica de *h*, utilizando la generalización de la construcción del vértice de *h* para cualquier otro punto.

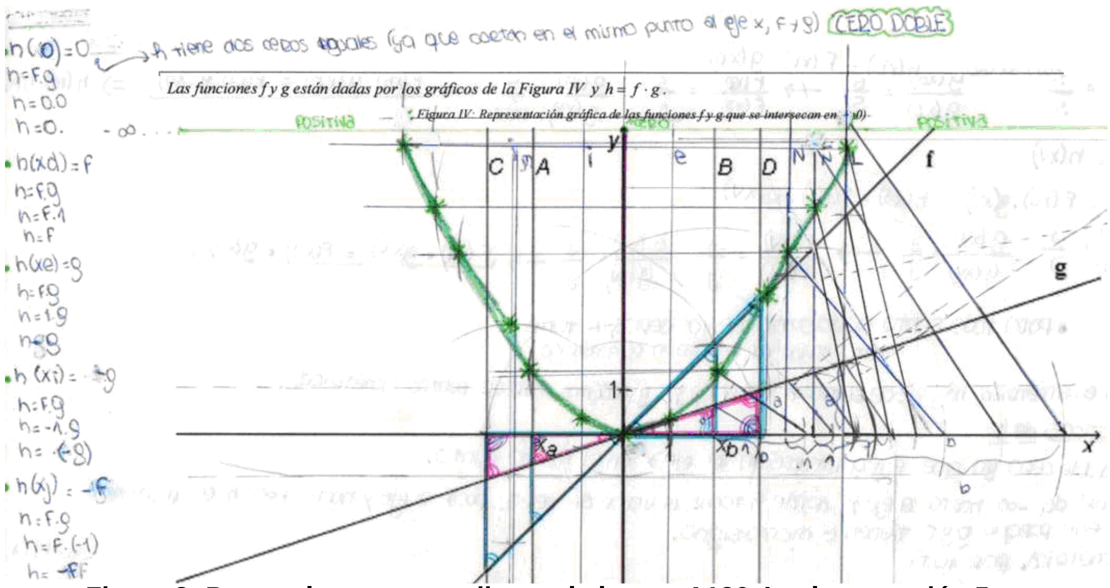



**Figura 8: Protocolo correspondiente al alumno A136. Implementación 5**

El inicio del recorrido propuesto permitió introducir las funciones polinómicas de segundo grado en la escuela secundaria de una manera que se aparta de la tradicional. La generatividad de la cuestión inicial propuesta en el REI, planteada en el dominio geométrico-gráfico, da sentido a los puntos notables de la parábola y a las características generales de la representación gráfica de dicha función. Además las técnicas generadas como iniciación del recorrido pueden ser generalizadas y recuperadas en los demás recorridos generados por $Q_0$.

## 4.4 Sobre la generatividad de las técnicas construidas:

La cuestión $Q_0$ permite alcanzar diversos recorridos de estudio. El problema de la multiplicación geométrica de las rectas permitió construir técnicas para obtener la representación gráfica de las parábolas. La cuestión generatriz y los resultados obtenidos con las primeras situaciones en $Q_1$ dan lugar también a otros posibles trayectos de estudio relativos a $Q_2$ y $Q_3$ respectivamente.

Con $Q_2$ se amplían los resultados obtenidos en $Q_1$, de manera tal que, multiplicando tres rectas, rectas con parábolas, parábolas con parábolas; se obtiene por construcción la representación gráfica de las funciones polinómicas. En el recorrido correspondiente a $Q_2$ las tres primeras situaciones son variantes de problema de obtener la multiplicación geométrica de las curvas, y se espera obtener la gráfica para $p = f \cdot g \cdot j$ o $p = f \cdot h$ según corresponda:

**Situación 1** **Situación 2** **Situación 3**

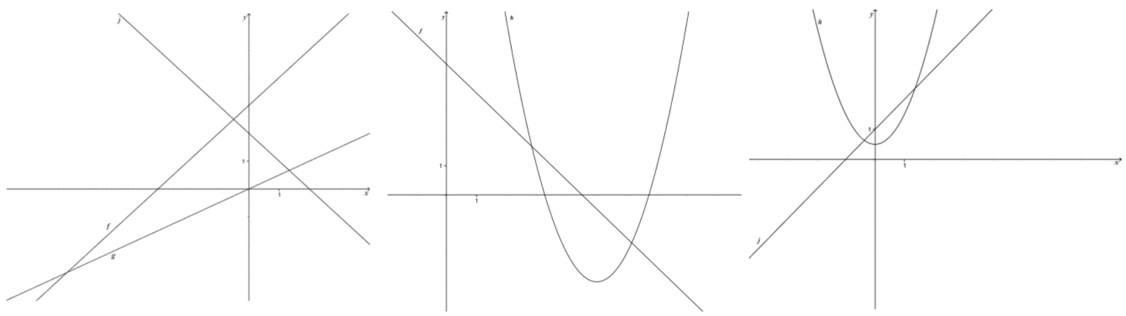


**Figura 9: Gráficas de las funciones correspondientes a las situaciones 1, 2 y**

*(a) ¿Cuáles son los puntos seguros y los signos de p? ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para p?*

*(b) ¿Qué características de la gráfica de p podrías justificar?*

Como ocurre con la multiplicación geométrica de las rectas, la obtención de la curva de *p* resulta de la identificación de los puntos seguros (signos $C^+$ y $C^-$, ceros, unos, múltiplos de la unidad) y en algunos casos también la construcción de triángulos semejantes, utilizando como información la unidad en el eje x. Las estrategias de cálculo geométrico generadas en $Q_1$ son recuperadas por los estudiantes sin inconvenientes para estos casos.

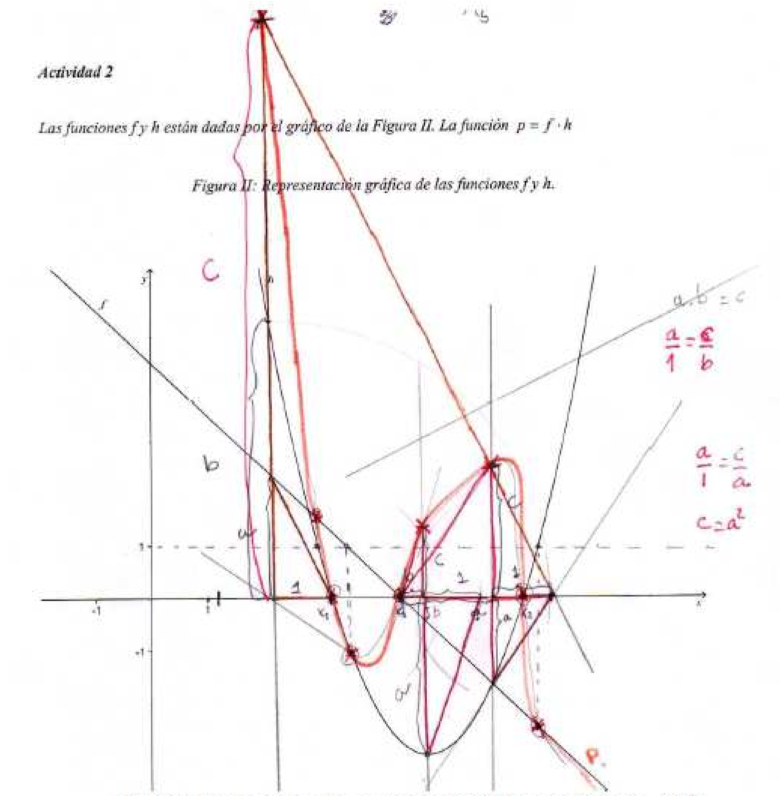



**Figura 10: Protocolo correspondiente al alumno A35**

Del mismo modo, también ha sido posible continuar el recorrido generado por el cociente de polinomios, lo que permitió construir las características de la representación gráfica de las funciones racionales (*q*). $Q_3$ parte del cociente de funciones polinómicas. Las dos primeras situaciones son variantes del problema dividir geométricamente dos curvas. En cualquier caso se busca obtener la gráfica más razonable para *q:*

**Situación 1** **Situación 2**

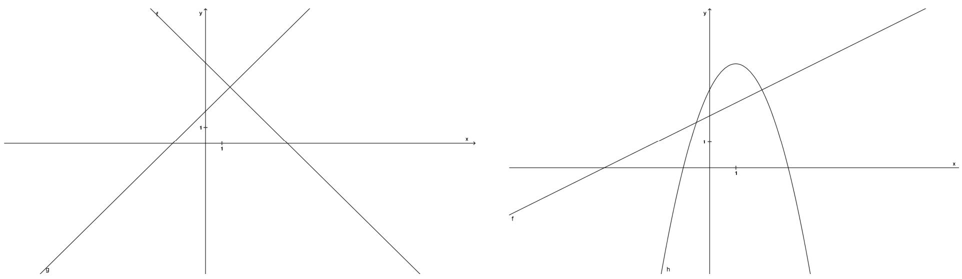


**Fig. 11: Gráficas de las funciones correspondientes a las situaciones 1, 2**

*(a) ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para q?*

*(b) ¿Qué características de la gráfica de q podrías justificar?*

La obtención de la curva más razonable para la función racional *q* se logra a partir de la identificación de los signos ($C^+$ y $C^-$), los puntos seguros (los ceros, los unos, los menos unos), y también es posible obtener otros puntos seguros a través de la construcción geométrica que se retoma de los recorridos anteriores, a partir de los triángulos semejantes utilizando como dato la unidad en los ejes.

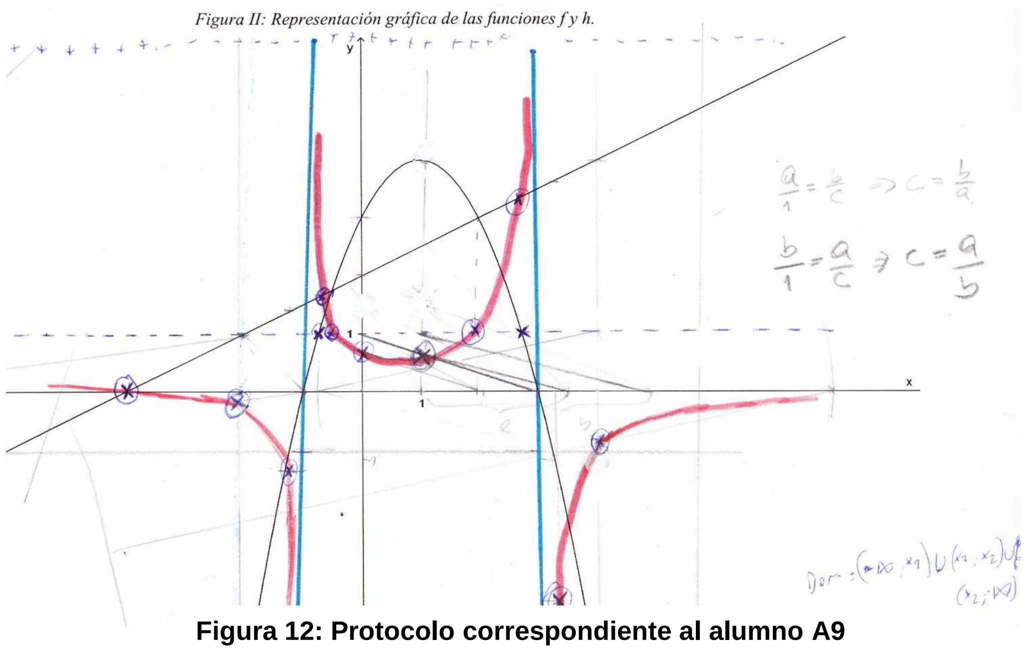



**Figura 12: Protocolo correspondiente al alumno A9**

Entre las características de la gráfica de *q*, resulta interesante analizar el caso de la división por cero, dado que en los recorridos que preceden, este aspecto no ha sido considerado porque los estudiantes tratan con la multiplicación entre curvas y no con el cociente como ocurre en este caso. Se pone énfasis entonces en la identificación de los puntos donde la función divisor se hace cero y se analiza el posible comportamiento de la gráfica razonable para *q* en los puntos próximos al "cero del denominador", debido a que en este punto hay una asíntota vertical.

Los resultados construidos en un recorrido de estudio derivado de $Q_0$, pueden recuperarse y reutilizarse en otros derivados de la misma cuestión. $Q_0$ ha permitido construir las organizaciones matemáticas relativas a las funciones polinómicas de grado dos y mayor, y también la organización matemática de las funciones racionales. Las técnicas desarrolladas para las primeras situaciones permiten interpretar el alcance de las mismas para obtener cualquier representación, a partir de la multiplicación o cocientes de curvas.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se han presentado algunos resultados de la inserción de un REI en la escuela secundaria. La generatividad de la cuestión planteada ha permitido no sólo la emergencia de un posible recorrido que permite estudiar con sentido las funciones polinómicas de segundo grado, sino que recuperando estrategias de resolución similares, ha legitimado también el encuentro con organizaciones matemáticas relativas al estudio de las funciones polinómicas y de las funciones racionales.

La variedad y calidad de resultados obtenidos al cabo de las seis implementaciones permiten afirmar que los resultados son auspiciosos. El recorrido generado por la multiplicación geométrica de las rectas permitió:

- Construir una representación gráfica de la parábola, justificando cada punto notable, y también analizando las diferencias entre las distintas representaciones que se obtienen.
- Un resultado interesante, es el papel que adquieren los puntos notables cuando sólo se dispone de la unidad en los ejes y lo mismo ocurre con el análisis de signos, tarea que los estudiantes realizan en acto desde el inicio, pues necesitan hipotetizar una curva, y en este análisis, se destaca la relación entre los ceros y el cambio o no de signo. Esta cuestión también es fundamental en los recorridos que continúan.
- Otro aspecto muy importante es relativo a la justificación del vértice y la simetría de la curva. En el marco de una pedagogía de la investigación, la obtención de dichos puntos notables no pueden reducirse a una imposición ostensiva, como ocurre en la enseñanza tradicional. El retorno a la geometría hace posible obtener por construcción el eje de simetría y el vértice de una parábola.
- La construcción geométrica del vértice no sólo resulta imprescindible por la relevancia que dicho punto notable adquiere en la representación de una parábola, sino también por la generalidad y la generatividad que dicha construcción tiene. Esta técnica permite multiplicar o dividir cualquier segmento de cualquier representación gráfica, y por lo tanto en el marco de esta

investigación ha permitido construir cualquier punto para mejorar las características de las representaciones gráficas estudiadas.

Cada recorrido continúa y va más allá de la representación gráfica de las funciones como iniciación del proceso de estudio. La multiplicación algebraica también permitió obtener resultados significativos. La potencialidad de los conceptos construidos y de los instrumentos adquiridos revela los alcances del dispositivo propuesto.

La ejecución de recorridos de estudio y de investigación en la escuela secundaria no ha sido una tarea sencilla. Las limitaciones que se han presentado están relacionadas con el proceso de inserción de la "nueva" pedagogía en la escuela secundaria, dado que requiere de modificaciones fuertes en el contrato didáctico tradicional: el profesor ya no "explica", no es garante del saber, no impone sus ideas, ni sus tiempos. Aquí ha sido el responsable de presentar una "buena cuestión", que desencadena diferentes recorridos de estudio que tienen que ser construidos por y en la clase. Otra restricción es relativa a la "dilatación del tiempo escolar". La necesidad de enfrentar el problema de una "dilatación" considerable del tiempo didáctico, resulta ampliamente compensada no sólo por la ganancia que supone el haber logrado hacer vivir, al menos parcialmente algunos elementos de la *pedagogía de REI*, sino por la amplitud y la generalidad de los conceptos construidos.

La viabilidad de los dispositivos tipo REI está justificada por la diversidad recorridos posibles y la generalidad y el alcance que tienen las técnicas que se construyen. Además la inserción de este dispositivo posibilita la instalación escolar de algunos elementos de la *pedagogía de la investigación,* siempre que se disponga de una infraestructura escolar que lo permita.

## Referencias

Barquero, B.; Bosch, M.; Gascón, J. (2012). *Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación*. Actas III CITAD. Disponible en http://www.crm.es/Publications/Documents/Documents_10.pdf, pp. 553-578 ISSN 2014-2331. Bellaterra, Barcelona.

Chevallard, Y. (1985) La transposition didactique ; du savoir savant au savoir enseigné. Paris: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19 (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2005). *La place des mathématiques vivantes dans l´éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2006). *Les mathématiques à lécole et la révolution épistémologique à venire*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, pp. 5- 32

Douady, R. (1999) *Relation Function/al algebra: an example in high school (age 15-16)*. European Research in Mathematics Education I: Group 1. pp. 113-124

Douady, R. (2010) Communication personnel avec Maria Rita Otero.

Douady, R. (2011) Géométrie, graphiques, fonctions au college. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC)*. 6(1), pp 1-7. ISSN 1850 - 6666 / NIECYT. Argentina. Disponible en http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/.

Gazzola, M. P.; Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2011) "*Funciones racionales en la secundaria: primeros resultados de una actividad de estudio y de investigación* (*AEI*)". Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Tandil, del 8 al 11 de Noviembre de 2011. pp. 493-500. ISBN 978-950-658-284-5. Disponible: http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2011) *Evolución de una AEI como producto de investigación al cabo de seis implementaciones consecutivas*. Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Tandil, del 8 al 11 de Noviembre de 2011. pp. 501-508. ISBN 978-950-658-284-5. Disponible en http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas

Llanos, V. C.; Otero, M. R.; Bilbao, M. P. (2011). *"Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI)"*. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC). Año 6 nº1, pp 102-112. ISSN 1850 - 6666 / NIECYT. Argentina. Disponible en http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/.

Llanos, V. C.; Bilbao, M. P.; Otero, M. R. (2011) *"Implementación de una AEI relativa al campo conceptual de las funciones polinómicas en la escuela secundaria: perspectiva didáctica y cognitiva"*. Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). NIECyT, F. de Cs. Exactas, UNCPBA. Tandil, del 8 al 11 de Noviembre de 2011. pp. 486-492. ISBN 978-950-658-284-5. Disponible http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas.

Marietti, J. (2009). *Le concept de PER et sa réception actuelle en mathematiques et ailleurs. Une étude préparatoire*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr

Otero, M. R.; Llanos, V. C. (2011) *"La enseñanza por REI en la escuela secundaria: desafíos, incertidumbres y pequeños logros al cabo de seis implementaciones"*. Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Tandil, del 8 al 11 de Noviembre de 2011. pp. 15-23. ISBN 978-950-658-284-5. Disponible en http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas

**Viviana Carolina Llanos** es Licenciada en Educación Matemática y Profesora de Matemática por la UNCPBA. Actualmente es doctoranda del Programa de Posgrado en Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, UNCPBA. Es Becaria del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Es Investigadora del Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Es secretaria de redacción de la Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC). **vcllanos@exa.unicen.edu.ar**

**María Rita Otero** recibió Posdoctorado por la Université Paris V. René Descartes-Sorbonne. (2009-2010). Es Doctora por la Universidad de Burgos. Es Magister en Educación, UNICEN-UNICAMP. Es Profesor en Matemática y Física, UNCPBA. Actualmente es Investigadora Independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y Coordinadora de la Comisión Asesora en Psicología y Ciencias de la Educación, CONICET, 2011-2012. Es Profesor Asociado de la Facultad de Ciencias Exactas. Es Directora del Núcleo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias (NIECyT). Es Investigador categoría I. Coordina el Programa de Posgrado en Enseñanza de las Ciencias y la matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA. **http://docensci.sites.exa.unicen.edu.ar/.** Edita la Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias **http://reiec.sites.exa.unicen.edu.ar/**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 65-74
ISSN: 1815-0640

# Concepções sobre Identidade do Professor de Matemática: Portugal e Países Francófonos.

**Lênio Fernandes Levy, Elizabeth Cardoso Gerhardt Manfredo, Tadeu Oliver Gonçalves**

## Resumo

O presente artigo é uma descrição de pesquisa bibliográfica em que se buscaram localizar e estudar trabalhos portugueses e em língua francesa que abordam, direta ou indiretamente, o tema "identidade do professor de Matemática". A idéia central foi reunir, em um mesmo artigo, as concepções de autores sobre o tema referido e tentar perceber recorrências, entre tais autores/pesquisadores, de aspectos relativos ao tipo de identidade em foco.

## Abstract

This article is a description of bibliographic research in which they attempted to locate and to study some works of Portugal and some works in French language which refers to, directly or indirectly, the theme of "identity of the mathematics teacher". The idea was to bring together, in the same text, the conceptions of authors about the subject and try to verify recurrences, among those authors, about aspects related to the type of identity into focus.

## Resumen

Este artículo es una descripción de una literatura en la que trataban de localizar y estudiar textos portugueses y en la lengua francesa que se ocupan, directa o indirectamente, del tema de la "identidad del profesor de Matemáticas". La Idea central era reunir, en un solo artículo, las opiniones de los autores sobre el tema mencionado y tratar de ver las recurrencias (entre estos autores / investigadores) de aspectos relacionados con la identidad en el foco.

## 1. Introducción

Conforme se poderá observar ao longo das páginas seguintes, alguns dos autores pesquisados não utilizam o termo "identidade", o que não nos impede de confirmar, em suas produções escritas, a existência de aspectos que, para nós, e mesmo para eles, estão ligados à "identificação do (futuro) professor de Matemática e/ou do (futuro) professor de um modo geral".

Cumpre-nos destacar, em se tratando de publicações portuguesas, os esforços de um grupo de estudiosos ligados à Universidade de Lisboa, entre os quais assinalamos o Prof. João Pedro da Ponte, responsável pela orientação de dissertações e de teses que guardam vínculo com a identidade do professor de Matemática.

No que diz respeito a produções em língua francesa, o emprego (com fins de rastreamento na *Web* de trabalhos correlatos) da versão francesa relativa à expressão em Português, ou seja, a utilização da frase "*identité du / de(s) professeur(s) de(s) Mathématiques*" não nos trouxe quantidade significativa de resultados. Ao fazermos tentativas semelhantes com a palavra "*enseignant(s)*" [ao pé da letra: "ensinante(s)" ou "pessoa(s) que ensina(m)"], no lugar da palavra "*professeur(s)*", encontramos, dessa feita, alguns textos, a maioria dos quais, entretanto, não abordando o tema "identidade de professores / ensinantes de Matemática" ou não fazendo referência a esse tema nos moldes acadêmicos.

Nossos esforços redundaram na localização de dois trabalhos (que consideramos interessantes) em língua francesa sobre "identidade do professor", nenhum deles, contudo, referindo-se, especificamente, à docência de Matemática. Apesar de insignificante, aparentemente, em termos quantitativos, o resultado dessa triagem abarcou o sociólogo Claude Dubar, que se constitui em fonte teórica de diversos textos sobre identidade docente, inclusos aí muitos daqueles ligados ao grupo de pesquisas do Prof. João Pedro da Ponte. Por tal motivo, mesmo com Dubar não se detendo na figura do professor de Matemática, achamos de fundamental importância mantê-lo entre os autores que selecionamos.

Enfim, localizamos outras obras de alguns dos autores mencionados nas próximas linhas, obras que não incluímos neste artigo porque, levando em conta o que procurávamos, ou seja, considerando a busca de concepções acerca da "identidade do professor de Matemática", esses trabalhos não apresentam acréscimos, de nosso ponto de vista, quando comparados às publicações de que trataremos a seguir.

## Os autores

O presente texto focaliza as idéias de Boavida & Guimarães (1999), Brunheira (2002), Fidalgo & Ponte (2004), Oliveira (2004) e Ponte & Oliveira (2002), assim como os pensamentos de Dubar (2005) e Riopel (2006).

## Concepções de autores portugueses

Segundo Boavida & Guimarães (1999), a construção da identidade transita por um caminho complexo, em função do qual o sujeito apropria-se do sentido de sua história pessoal e profissional. Para essas autoras (Ibidem), já que a maneira de ser cruza-se com a maneira de ensinar, então a compreensão dos processos identitários dos professores passará pelo conhecimento do que o professor, como pessoa, é quando exerce o magistério. Boavida & Guimarães (1999) frisam a necessidade de que o estudo do professor de Matemática no seu todo seja mais valorizado, integrando-se, nesse sentido, a dimensão organizacional com a dimensão pessoal, uma vez que, na profissão docente, são especialmente relevantes as competências inerentes ao "saber ser".

Por sua vez, Brunheira (2002) analisou a evolução do conhecimento didático e das atitudes de estagiários em face de trabalhos investigativos. Fundamentou-se em um projeto de formação elaborado por um núcleo de estágio de licenciatura em ensino de Matemática. Nesse projeto, três professores-estagiários trabalharam com investigações em aulas de Matemática, procurando identificar e resolver os desafios à integração dessa metodologia em suas práticas. Houve ciclos de trabalho envolvendo a preparação conjunta de aulas de investigação, a sua condução, a reflexão individual do professor-estagiário, a redação do respectivo relatório e, enfim, a discussão com a orientadora de estágio. Brunheira (2002) identificou quatro aspectos que contribuem para a evolução do conhecimento e das atitudes no tocante à realização de investigações na sala de aula: experiência, reflexão, interação com colegas e orientadores e leitura de textos sobre o tema desenvolvido. Um elemento-chave serviu para integrar esses aspectos: a reflexão. Quanto ao papel de orientação que Brunheira (2002) assumiu, as atividades relatadas indicam que ele manifestou-se em três categorias: desafiar, apoiar e promover a reflexão.

Fidalgo & Ponte (2004) relatam um estudo sobre as concepções e práticas de ensino da Matemática relativamente a aspectos do currículo dessa disciplina — tarefas, materiais e comunicação na sala de aula — por parte de dois futuros professores do ensino básico durante a sua prática pedagógica. O estudo fundamentou-se nas orientações curriculares para o ensino da Matemática e sublinhou o papel que a reflexão tem na formação inicial do professor. Fidalgo & Ponte (2004) propuseram aos alunos tarefas matemáticas não-rotineiras, desafiantes e orientadas para a exploração e a descoberta. Os dois autores constataram que as concepções dos formandos quanto às finalidades do ensino da Matemática, a exemplo do desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e do raciocínio, adquiridas como frutos de experiências ao longo do curso, refletem-se em suas práticas.

Conforme Oliveira (2004), tornar-se professor de Matemática é habitualmente considerado um percurso mais ou menos intenso de aprendizagem ou, ainda, um processo de socialização em uma profissão. Entretanto, no âmbito da pesquisa que relata em seu artigo, tornar-se professor de Matemática afigura-se, acima de tudo, como uma experiência de identidade.

Para o processo de construção da identidade profissional, concorrem diversos fatores e experiências em um emaranhado complexo, sendo a formação inicial um dos mais relevantes (Oliveira, 2004).

É no decurso da sua formação que o futuro professor começa a consolidar suas posições sobre a profissão e a criar uma imagem de si como docente, embora tais pontos de vista possam ter começado a desenvolver-se antes de ele haver escolhido a profissão (Oliveira, 2004). A autora (Ibidem) analisa a contribuição da formação inicial para a construção da identidade profissional do professor, tomando por base uma investigação realizada com professores de Matemática oriundos de uma mesma instituição de ensino superior, nos seus três primeiros anos de carreira, lecionando em diferentes escolas básicas e secundárias.

Segundo Oliveira (2004), é fundamental que se proporcionem aos futuros professores experiências de aprendizagem por meio das quais eles comecem a definir o seu papel como educadores, alargando as suas competências profissionais e transcendendo a esfera do conhecimento didático. É essencial, também, na situação de prática pedagógica, atender à pessoa do professor-estagiário e ao seu projeto de vida, além de criar condições para que ele reflita sobre as suas concepções e crenças a propósito do ensino e da profissão (Ibidem).

Ponte & Oliveira (2002), no artigo intitulado “Remar contra a maré: a construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial”, afirmam que o conhecimento profissional do professor de Matemática desdobra-se em "conhecimento na ação" relativo à prática letiva e à prática não-letiva, bem como à profissão e ao desenvolvimento profissional, sendo que a parte do conhecimento profissional chamado a intervir diretamente na prática letiva pode ser designada por conhecimento didático, incluindo quatro vertentes: o conhecimento da Matemática, o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem, o conhecimento do currículo e o conhecimento do processo instrucional.

As quatro vertentes do conhecimento didático sempre estão presentes na atividade de um professor quando ensina Matemática (Ponte; Oliveira, 2002).

A primeira vertente é a disciplina a ensinar, ou seja, a Matemática. Nesse sentido, "o conhecimento que o professor tem da Matemática escolar é o seu traço mais distintivo relativamente ao conhecimento dos outros professores" (Ponte; Oliveira, 2002, p.153).

A segunda vertente do conhecimento didático é o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem, o que inclui conhecer os seus interesses, os seus gostos, as suas reações, os seus valores, as suas referências culturais e o modo como aprende.

A terceira vertente refere-se ao currículo e ao modo como o professor faz a gestão curricular, abrangendo os objetivos, a organização dos conteúdos, o conhecimento dos materiais e das formas de avaliação que irá utilizar.

> Finalmente, temos o quarto campo do conhecimento didáctico, que podemos designar por conhecimento do *processo instrucional*. Trata-se da vertente fundamental do conhecimento didáctico. (...) Esta vertente inclui tudo o que se passa antes da aula, em termos de preparação e tudo o que se passa depois, em termos de reflexão, mas o seu núcleo essencial diz respeito à condução efectiva das situações de aprendizagem (Ponte; Oliveira, 2002, p. 154).

De acordo com Ponte & Oliveira (2002), o conhecimento didático articula-se com outros domínios do conhecimento profissional do professor, principalmente os relativos à prática não-letiva, à profissão e ao desenvolvimento profissional. Além disso, para os dois autores, o conhecimento didático guarda vínculo com o conhecimento de si mesmo e com o conhecimento do contexto de ensino, sendo esse último domínio essencial para que o professor conheça os alunos, os colegas de profissão, a escola, os pais, a comunidade e o sistema educativo. "O conhecimento profissional de um professor de Matemática é, assim, o conhecimento específico da profissão usado nas diversas situações de prática profissional" (Ponte; Oliveira, 2002, p. 156).

## Concepções de autores francófonos

Do ponto de vista de Claude Dubar:

> A divisão do Eu como expressão subjetiva da dualidade social aparece claramente através dos mecanismos de identificação. Cada um é identificado por outrem, mas pode recusar essa identificação e se definir de outra forma. (...). Não há correspondência necessária entre a 'identidade predicativa de si', que exprime a identidade singular de uma pessoa determinada, com sua história de vida individual, e as identidades 'atribuídas pelo outro', (...). E, no entanto, a identidade predicativa de si reivindicada por um indivíduo é condição para que essa pessoa possa ser identificada genérica e numericamente pelos outros (...) (Dubar, 2005, p. 137-138).

De acordo com Dubar (2005), acontece o encontro de dois processos heterogêneos: (i) um deles é concernente à atribuição da identidade pelas instituições e pelos agentes que interagem com os indivíduos, tratando-se de um processo que tende a se impor coletivamente aos atores implicados; (ii) o segundo processo diz respeito à incorporação, à interiorização ativa da identidade pelos próprios indivíduos, tratando-se da história que eles se contam sobre o que são.

"Esses dois processos não são necessariamente coincidentes. Quando seus resultados diferem, há 'desacordo' entre a identidade social 'virtual' conferida a uma pessoa e a identidade social 'real' que ela mesma se atribui" (Dubar, 2005, p. 140). Utilizam-se estratégias para reduzir a distância entre esses dois níveis identitários, construindo-se a identidade mediante a articulação entre as propostas de identidades virtuais e as trajetórias vividas (Dubar, 2005).

> (...) A identidade nada mais é que *o resultado a um só tempo estável e provisório, individual e coletivo, subjetivo e objetivo, biográfico e estrutural, dos diversos processos de socialização que, conjuntamente, constroem os indivíduos e definem as instituições*. O que essa noção traz além – ou de diferente – das noções de grupo, classe ou categoria utilizadas em uma perspectiva macrossocial, ou das noções de papel e de *status* definidas a partir de uma perspectiva microssocial? A resposta parece clara: ela tenta introduzir a dimensão subjetiva, vivida e psíquica no cerne da análise sociológica (Dubar, 2005, p. 136).

A identidade social é uma articulação entre uma transação interna ao indivíduo e uma transação externa entre ele e as instituições com as quais interage (Dubar, 2005).

> (...) As identidades sociais e profissionais típicas não são nem expressões psicológicas de personalidades individuais nem produtos de estruturas ou de políticas econômicas impostas de cima, mas sim construções sociais que implicam a interação entre trajetórias individuais e sistemas de emprego, de trabalho e de formação (Dubar, 2005, p. 330).

Expressando-se, assim como Dubar, em Francês, Marie-Claude Riopel, na obra *Apprendre à enseigner: une identité professionnelle à développer* (Aprender a ensinar: uma identidade profissional a desenvolver), assevera que ensinar é um ofício que se fundamenta principalmente sobre um jogo de influências complexas entre o professor e o aluno.

Uma preparação adequada emerge do jovem professor e das suas capacidades reflexivas de construção para si de uma idéia justa de seu papel (Riopel, 2006).

Tornar-se professor exige elaborar um ponto de vista amplo sobre a aprendizagem (do aluno) e o seu contexto. Normalmente, há uma separação entre o universo do aluno e o universo do professor: um aprende, o outro ensina; um obedece, o outro dirige. Instaurar uma passarela entre os dois mundos é, de certa maneira, traçar a passagem de uma identidade de aluno a uma identidade de professor (Riopel, 2006).

O que interessa na formação inicial concernente ao desenvolvimento da identidade profissional é levar o estudante a adotar um ponto de vista de professor acerca da aprendizagem e, ao mesmo tempo, descrever-se a si próprio como uma pessoa em aprendizagem (Riopel, 2006).

Para desenvolver-se profissionalmente, o professor não terá outra escolha além de tomar consciência, cada vez mais, acerca do que faz, acerca das suas maneiras de propor e de resolver problemas e acerca das suas decisões éticas. O desenvolvimento profissional passa pelo reconhecimento do que constitui a ação e a aprendizagem do professor (Ibidem).

A identidade profissional é, de qualquer maneira, uma forma de tornar precisa a identidade social, porque ela está ligada ao exercício de um trabalho onde é dividido um conjunto de preocupações referentes, por exemplo, à relação educativa, à avaliação e à aprendizagem. Somente o professor desempenha o seu papel, para o qual ninguém mais é sempre interpelado e chamado a fim de tomar decisões (Riopel, 2006).

Ainda segundo Riopel (2006), a identidade profissional pode também ser abordada a partir dos saberes dos professores. Além do mais, a autora (Ibidem) afirma que uma equipe de pesquisa da rede das universidades do Quebec (Canadá) se interessa pela questão da identidade profissional dos professores desde meados dos anos noventa, sendo que a tese desses pesquisadores é de que a identidade profissional inclui a dimensão individual tanto quanto a dimensão social, o que nos reporta a Dubar (2005).

## Aspectos que vinculamos à identidade do (futuro) professor de Matemática e/ou à identidade do (futuro) professor de um modo geral

A partir das idéias mencionadas nos tópicos anteriores deste artigo, pudemos elaborar uma síntese constituída de aspectos que entendemos estarem relacionados com a “identidade do (futuro) professor de Matemática e/ou do (futuro) professor de um modo geral”. Vejamos:

Boavida & Guimarães (1999): (i) Apropriação, pelo professor, do sentido de sua história pessoal e profissional (autoconhecimento); (ii) Consideração do professor no seu todo (integração das dimensões organizacional e pessoal).

Brunheira (2002): (i) Experiência; (ii) Reflexão; (iii) Interação; (iv) Leitura/conhecimento dos textos/temas.

Fidalgo & Ponte (2004): (i) Reflexão; (ii) Capacidade de resolução de problemas; (iii) Raciocínio.

Oliveira (2004): (i) Socializar-se na profissão; (ii) Ser “educador matemático” (em outras palavras: ser mais do que “professor de Matemática”); (iii) Refletir acerca de suas concepções e crenças do ensino e da profissão; (iv) Criar imagem de si próprio enquanto professor.

Ponte & Oliveira (2002): (i) Conhecimento didático, que inclui as seguintes vertentes: conhecimento da Matemática escolar; conhecimento do aluno e da sua aprendizagem; conhecimento do currículo; conhecimento do processo instrucional; (ii) Conhecimento da profissão e do desenvolvimento profissional; (iii) Autoconhecimento; (iv) Conhecimento do contexto de ensino (alunos, colegas de profissão, escola, pais, comunidade e sistema educativo).

Dubar (2005): (i) Identidade de si como condição para que a pessoa possa ser identificada genericamente pelos outros; (ii) Identidade humana construída (em vez de fixada) na infância e reconstruída no transcurso da vida; (iii) Identidade como resultado a um só tempo estável e provisório, individual e coletivo, subjetivo e objetivo, biográfico e estrutural, dos diversos processos de socialização que, conjuntamente, constroem os indivíduos e definem as instituições; (iv) Identidade social como articulação entre uma transação interna ao indivíduo e uma transação externa entre ele e as instituições com as quais interage.

Riopel (2006): (i) Ensino fundamentado no jogo de influências complexas entre professor e aluno; (ii) Reflexão do professor acerca de seu papel; (iii) Docência como aquisição de um ponto de vista mais amplo acerca da aprendizagem discente e do seu contexto; (iv) Formação inicial centrada na condução do estudante a adotar um ponto de vista de professor acerca da aprendizagem e de si próprio como pessoa em aprendizagem; (v) Tomada de consciência pelo professor acerca do que faz; (vi) Identidade social definida pela identidade profissional; (vii) Identidade profissional também abordada a partir dos saberes dos professores; (viii) Identidade profissional incluindo a dimensão psicológica/individual e a dimensão social.

## Algumas considerações

Os aspectos que emergiram das leituras das obras listadas neste artigo trouxeram consigo algo que, em nosso entendimento, é digno de nota, ou seja: percebemos que aspectos referentes a (futuros) professores de Matemática também podem ser observados em sujeitos ligados a outras disciplinas escolares. Com efeito, ao se estudarem casos particulares, os elementos identitários adquirem um delineamento que os torna singulares. Podemos então dizer que professores de Matemática são únicos quanto aos elementos que os identificam. Mas também podemos dizer que o professor de Matemática é um professor, assim como o são os demais docentes.

Dados os textos que analisamos, chama-nos atenção a recorrência de idéias que nos remetem à reflexão, ao autoconhecimento e à tomada de consciência, fato que sinaliza a importância com que é tratado o âmbito subjetivo/pessoal/individual na constituição da identidade profissional. Como separar o ato reflexivo da noção de identidade? Em consonância com Imbernón (2009), quando falamos de identidade docente, não nos referimos somente a um conjunto de elementos que servem para individualizar, mas também ao resultado do poder de reflexão.

Ao mesmo tempo, os autores estudados neste texto fazem menção reiterada ao processo através do qual o indivíduo socializa-se na profissão, na medida em que se repetem idéias, nos artigos e livros analisados, sobre dimensão organizacional, interação, conhecimento da profissão, conhecimento do contexto de ensino, relações entre professores e instituições escolares, bem como relações entre professores e alunos, o que indica a consideração da relevância do fator coletivo/social no processo de construção da identidade docente e, em nosso caso, no processo de construção da identidade do professor de Matemática.

Acerca da relação entre o universo particular e o universo social no processo de constituição identitária, dois dos autores focalizados, Riopel (2006) e, em especial, Dubar (2005), são deveras analíticos.

Ainda nesse sentido, Imbernón (2009), ao tratar da identidade docente, faz referência à forma de pensar da pessoa, mas, ao mesmo tempo, entende o sujeito dentro da escola, situado no contexto. Quando tratamos da identidade do professor, distinguimos o âmbito individual, levando em conta seus pensamentos ou representações acerca de si enquanto indivíduo, assim como a esfera coletiva, considerando os papéis que ele desempenha nos grupos a que pertence (Paiva, 2006).

Uma característica a que os autores reportam-se em mais de um dos textos analisados por nós diz respeito à constituição identitária como processo, como algo dinâmico, a qual, além de ser complexa (sendo, portanto, integrada por múltiplas dimensões que interagem umas com as outras), não é delimitada temporalmente, ocorrendo, pois, de forma contínua. A propósito, a maioria dos autores estudados dá ênfase, em suas pesquisas, à constituição da identidade também durante o período de formação inicial do professor e/ou também durante os seus primeiros anos de exercício da profissão, o que reforça a nossa perspectiva de que, por um lado, a identidade docente não prescinde da experiência, mas que, por outro lado, o termo “experiência” não é reducionista a ponto de não podermos considerar, nesse sentido, tanto o período de graduação do indivíduo quanto suas vivências anteriores ou imediatamente posteriores a esse período. Em uma escala temporal longa, a identidade do professor e o que se espera dele modificam-se de acordo com interesses políticos, sociais e culturais (Paiva, 2006). Além disso, a todo o momento, ou seja, em escalas temporais curtas, a identidade docente está em construção. “Ora, a identidade humana não é dada, de uma vez por todas, no nascimento: ela é construída na infância e, a partir de então, deve ser reconstruída no decorrer da vida” (Dubar, 2005, p. XXVI, no prefácio).

Outro aspecto marcante em algumas das publicações em foco guarda relação com o conhecimento docente (em especial, com o conhecimento didático), com a leitura e a assimilação dos temas a serem abordados/investigados pelos professores-estagiários em suas aulas, com a capacidade de resolução de problemas e com o raciocínio. Todavia, devemos salientar que os autores sob pesquisa, ao abordarem tais elementos, normalmente não os posicionam como componentes únicos da identidade, da formação e/ou do desenvolvimento do (futuro) professor de Matemática.

Por fim, conforme já havíamos salientado em linhas anteriores, alguns dos autores pesquisados não utilizam o termo “identidade”, o que não nos impede de confirmar, em suas produções escritas, a existência de aspectos que, para nós, e mesmo para eles, estão ligados à “identificação do (futuro) professor de Matemática e/ou do (futuro) professor de um modo geral”. Destacamos, a título de exemplo, a colocação de Riopel (2006), segundo a qual a identidade profissional também pode ser abordada a partir dos saberes dos professores. Nesse sentido, reportamo-nos a Tardif (2008), que, defendendo uma perspectiva complexa, procede à critica da idéia de redução dos saberes dos professores tanto a processos psicológicos quanto a processos sociológicos, o que se coaduna, em nosso entendimento, com as concepções de identidades social e profissional de Dubar (2005) e, no âmbito particular da formação docente, com a concepção identitária de Riopel (2006).

## Bibliografía

Boavida, A. M.; Guimarães, M. F. (1999). Investigação sobre o conhecimento e a formação de professores. En: Anais do VII Encontro de Investigação em Educação Matemática da SEM /SPCE: Mirandela, Portugal.

Brunheira, L. (2002). O conhecimento didático e as atitudes de uma professora estagiária face à realização de atividades de investigação na aula de matemática. En Ponte, J. P. et. al. (Orgs.). Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores, 183-205. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação: Coimbra, Portugal.

Dubar, C. (2005). A socialização: construção das identidades sociais e profissionais. São Paulo: Martins Fontes.

Fidalgo, A.; Ponte, J. P. (2004). Concepções, práticas e reflexão de futuros professores do 1º ciclo do ensino básico sobre o ensino da Matemática. Revista Quadrante, Portugal, v. 13, n. 1, 5-29.

Imbernón, F. (2009). Formação permanente do professorado: novas tendências. São Paulo: Cortez.

Oliveira, H. (2004). Percursos do professor de matemática em início de carreira: o contributo da formação inicial. Revista Quadrante, Portugal, v. 13, n.1, 115-145.

Paiva, M. A. V. (2006). O professor de matemática e sua formação: a busca da identidade profissional. En: Nacarato, A. M.; Paiva, M. A. V. (Orgs.). A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas. Autêntica: Belo Horizonte, Brasil.

Ponte, J. P.; Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: a construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. Revista de Educação, Portugal, v. 11, n. 2, 145-163.

Riopel, M. C. (2006). Aprendre à enseigner: une identité professionnelle à développer. Québec, Canada: Les Presses de l'Université Laval.

Tardif, M. (2008). Saberes docentes e formação profissional. Rio de Janeiro: Vozes.

**Lênio Fernandes Levy.** Possui Graduação em Matemática (Licenciatura) pela UFPA (1987-1990), Especialização em Educação Matemática pela UEPA (2000-2001) e Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas pela UFPA (2002-2003). Atualmente, é Professor Assistente I do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da UFPA. É também doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do IEMCI / UFPA. Tem experiência em Matemática e em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: (i) Modelagem Matemática no Ensino; (ii) Educação Matemática e Paradigma Epistemológico da Complexidade; (iii) Formação de Professores de Matemática

**Elizabeth Cardoso Gerhardt Manfredo.** Doutoranda em Educação em Ciências e Matemáticas do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (2009), concluiu o mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas pelo mesmo programa (2004); Especializou-se em Educação e Problemas Regionais e Graduou-se em Pedagogia pela UFPA (1999). Atualmente é professora de ensino superior, Assistente III na Universidade Federal do Pará (IEMCI). Tem experiência profissional no campo da formação inicial e continuada de professores de matemática e ciências, com ênfase em projetos de trabalho, currículo, planejamento e processos de aprendizagem mediados por computador

**Tadeu Oliver Gonçalves.** Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1976), Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (1981) e Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (2000). É professor da UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ desde agosto de 1976, situando-se atualmente na categoria de PROFESSOR ASSOCIADO I. É docente Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências em Matemática – Mestrado e Doutorado – do IEMCI (Instituto de Educação Matemática e Científica) da UFPA. Tem experiência na área de Educação Matemática, e seu campo de pesquisa tem ênfase na Formação de Formadores e de Professores de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: educação matemática, formação de professores, ensino-aprendizagem, história da matemática e ensino da matemática.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 75-84
ISSN: 1815-0640

# Uso de Mapas Conceptuales para la Evaluación en Matemática

**Silvia Caronía, Graciela Lombardo, Roxana Operuk,**
**Edith Abildgaard, Lucas Domínguez**

## Resumen

En el marco de la enseñanza universitaria, los docentes buscan métodos que mejoren la calidad del proceso enseñanza y aprendizaje. Por esto recurren a la investigación educativa para que la transformación del conocimiento específico sea transferida efectivamente a los educandos. Para lograr este cometido es menester: integrar al alumno como actor fundamental en este proceso, considerar la evaluación como vía potente que posibilita al docente repensar su práctica, creándose una dialéctica en beneficio de los resultados. Es así que, contando con herramientas que permitan mejorar el proceso de evaluación, las posibilidades de que esto ocurra son mayores. El objetivo general de este trabajo es valorar la aplicación de mapas conceptuales en la evaluación de la matemática. Se describen las acciones realizadas, como ser: construcción de mapas conceptuales y uso de CmapTool.

## Abstract

In the context of university education, teachers seeking methods to improve the quality of teaching and learning process. For this reason they use educational research to the transformation of specific knowledge is transferred effectively to students. To achieve this task is necessary to integrate the student as a key player in this process and consider evaluation as potent way that allows teachers to rethink their practice, thus creating a dialectic in favor of results. If you have tools to improve the evaluation process, the chances of this happening are greater. The overall objective of this study is the application of concept maps in mathematics assessment. The actions carried out were construction of concept maps and use of CmapTool.

## Resumen

No contexto do ensino universitário, os professores procuram métodos para melhorar a qualidade do ensino e aprendizagem. Por esta razão eles usam pesquisa educacional para a transformação de conhecimentos específicos é transferido de forma eficaz aos alunos. Para atingir este objetivo é necessário: a inserção do aluno como um jogador chave neste processo de avaliação como forma poderosa que permite ao professor repensar sua prática, criando uma dialética em favor dos resultados. Assim, com ferramentas para melhorar o processo de avaliação, as chances de isso acontecer são maiores. O objetivo geral deste estudo é a aplicação de mapas conceituais na avaliação de matemática. Ele descreve os esforços, tais como: mapeamento de conceitos e utilização de CmapTool

## 1. Introducción

El presente trabajo es un avance del Proyecto de Investigación “Análisis de la implementación de herramientas computacionales aplicadas al proceso de evaluación en Matemática”, cuyo objetivo es valorar la aplicación de mapas conceptuales en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, más precisamente en el proceso de evaluación continua y forma parte de la continuación de una línea de investigación[1] llevadas a cabo por este grupo desde el año 2009

En esta presentación se analiza la efectividad de la implementación de herramientas computacionales aplicadas al proceso de evaluación en Matemática, en particular la incidencia en el uso del software libre CmapTool para la confección de mapas conceptuales.

En tal sentido, existen antecedentes relevantes como los de Zea Restrepo y Atuesta (2004), que investigaron acerca de la eficacia de actividades con mapas conceptuales, confeccionados con CmapTool, articulados al desarrollo de proyectos colaborativos, para potenciar el aprendizaje en ciencias; en tanto que Chrobak (2007), propone el uso de CmapTool en la educación a distancia, fundamentando que el uso de esta herramienta amerita no solo cambios curriculares sino también cambio en los roles de docentes y alumnos.

En el marco de la enseñanza universitaria, los docentes buscan métodos que mejoren la calidad del proceso enseñanza y aprendizaje. Para lograr este cometido es menester: integrar al alumno como actor fundamental en este proceso, como así también considerar la evaluación como vía potente que posibilita al docente hacer una retroalimentación de las actividades realizadas en su quehacer, creándose una dialéctica que redunda en beneficio de los resultados. Es así, que contando con herramientas que permitan mejorar el proceso de evaluación, las posibilidades de que esto ocurra son mayores.

Los futuros profesores en Matemática, se encuentran con un gran desafío: los canales de información son principalmente a través de los medios audiovisuales y de Internet. Este es un paso que pretende acercar a la educación tradicional las bondades de las NTICs. Más aún, dado que el Ministerio de Educación de la Nación y algunos gobiernos provinciales están entregando Netbooks a docentes y alumnos de escuelas públicas, en las cuales vienen incluidas aplicaciones entre ellas CmapTool. Creímos oportuno incluir un espacio, para realizar aportes, que entendíamos eran favorables para acortar la brecha digital, cultural y socio-económica existente en nuestra sociedad.

La metodología de trabajo consistió en el desarrollo de clases con modalidad aula-taller e incluyeron varias acciones, entre ellas: capacitación sobre el uso del software libre CmapTool, destinado a los estudiantes[2]. Los alumnos confeccionaron mapas conceptuales por cada unidad del programa de la asignatura, donde debía evidenciarse una integración de contenidos. Los docentes, por su parte, perpetraron labores referidas a la evaluación diagnóstica continua, tales como análisis de los mapas conceptuales e incidencia del uso del CmapTool en la producción de los mismos. La noción de mapa conceptual surge en la década de los setenta como fruto de las investigaciones realizadas en la Universidad de Cornell, Estados Unidos.

[1] "Uso de la entrevista clínica para la evaluación continua en Geometría Proyectiva" (Caronía, Lombardo, Operuk, 2009) y "Aplicación de herramientas metacognitivas integradas en el proceso de evaluación continua en la Geometría Proyectiva", (Caronía, Lombardo, Operuk, Abildgaard, 2010-2011). En términos generales, los trabajos mencionados versan sobre el uso de herramientas metacognitivas para llevar a cabo la evaluación en todas sus dimensiones, en distintas promociones de la asignatura, Geometría III del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM).

[2] Estudiantes de la asignatura Geometría III, materia que se ubica en el tercer año, segundo cuatrimestre del plan de estudios del Profesorado en Matemática de la FCEQyN de la Universidad Nacional de Misiones, Argentina.

Los mapas conceptuales están compuestos por nodos, que representan a los conceptos, y por líneas, que unen nodos, constituyendo las relaciones entre conceptos. Novak, Gowin (1988, p. 33), afirman: *"Los mapas conceptuales tienen por objeto representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones. Una proposición consta de dos o más términos conceptuales unidos por palabras para formar una unidad semántica".*

Investigadores como Ausubel, Novak, y Hanesian (1983, p. 61), definen a *"los conceptos como objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signo.* […] *la proposición potencialmente significativa, consiste en una idea compuesta que se expresa verbalmente en forma de una oración que contiene así los significados denotativo y connotativo de las palabras como sus funciones sintácticas y sus relaciones".*

En la construcción debe considerarse que los conceptos más inclusores[3] deben estar ubicados en la parte superior, para luego ubicar los conceptos de menor jerarquía a medida que se desciende. Es así que los conceptos ocupan posiciones que van de lo general a lo particular o a lo más específico. La existencia de relaciones de orden transversal evidencia interrelación entre conceptos que no guardan un orden jerárquico vertical, pero que de alguna forma están relacionadas. Es conveniente, procurar que un mismo concepto no aparezca repetido en el mapa.

Lombardo (2008, pp. 64-65) sostiene que: *"El ser humano organiza los conceptos jerárquicamente, identificando los centrales de los restantes, por lo que el mapa conceptual requiere, para que se produzca un aprendizaje significativo, poseer las mismas características. Se debería lograr una relación biunívoca entre las estructuras cognitivas idiosincrásicas de la persona que construye el mapa conceptual y la estructura jerárquica intrínseca en el marco teórico del tema tratado.* […]. *Los mapas conceptuales son esquemas gráficos que permiten visualizar procesos tales como: organización jerárquica, diferenciación progresiva y reconciliación integradora*[4]*. Estos procesos constituyen los principios del aprendizaje significativo postulado por Ausubel*".

Los mapas conceptuales son herramientas metacognitivas, cuentan con una considerable cantidad de bondades:

- Desde el punto de vista del alumno permite la toma de decisiones a fin de determinar la relevancia de la nueva información en función de los conocimientos previos y relacionarla con el bagaje de conocimientos existentes en la matriz cognoscitiva.
- Desde el punto de vista del docente posibilita realizar una exploración de los conocimientos detentados por los alumnos, el modo en que están interrelacionados y la forma de aprendizaje de los mismos. Es decir, facilita la evaluación de los aprendizajes operados, los errores conceptuales que

[3] Conceptos supraordenados

[4] Chrobak (2000) expone: "De acuerdo al principio de la diferenciación progresiva, el aprendizaje es más efectivo cuando la nueva información se presenta comenzando por los conceptos y proposiciones más generales y terminando por los conceptos y proposiciones más específicos o más explícitos. Cuando la instrucción se organiza de esa manera, se favorece la posterior diferenciación de los segmentos más relevantes de la estructura cognoscitiva. […] La reconciliación integradora: Este principio establece que la instrucción debe ser organizada de tal manera que favorezca la integración y encadenamiento de secuencias de conceptos que parecieran no estar relacionados."

pudieran existir, lo cual produce una dialéctica que otorga argumentos para repensar la práctica de la instrucción.

Respecto a esto último, existen diversos criterios de valoración de un mapa conceptual. Por ejemplo, el propuesto por Chrobak (1998, p.13 – Cap. 5), que si bien es un criterio más general, que el desarrollado por Novak y Gowin (1988, pp 56-57), es un excelente punto de partida cuando los educandos que confeccionan los mapas no tienen la suficiente destreza para hacerlo. (Tabla 1).

**Tabla 1. Evaluación general de un Mapa conceptual**

| *CARACTERÍSTICAS A EVALUAR* | *SI* | *NO* | *NECESITA TRABAJARSE* |
|---|---|---|---|
| *¿Están las relaciones entre conceptos indicados sobre la línea y son correctas?* | | | |
| *¿Están los conceptos ordenados del más general al más específico?* | | | |
| *¿Existen conexiones cruzadas?* | | | |
| *¿Tiene el mapa una distribución jerárquica?* | | | |

En cuanto a la evaluación, se puede identificar una configuración en fases o etapas, siendo la primera de diagnóstico inicial, cuyo objetivo es establecer y reconocer los saberes que han incorporado los alumnos en años previos; la siguiente, de diagnóstico continuo, tiene la finalidad de recabar información sobre los conocimientos adquiridos en esa etapa, a efectos de delinear la propuesta de enseñanza, como también, establecer criterios tendientes a examinar los resultados de aprendizajes; y finalmente la fase de acreditación, donde se centra la atención en la verificación de resultados para certificar y legitimar sus conocimientos. Palou de Maté (2003, pp. 19-48).

A partir de los diagnósticos, que elabore el docente, al inicio y durante el transcurso del ciclo lectivo, podrá establecer en forma continua y sincrónica el nivel alcanzado por los alumnos y al mismo tiempo obtener elementos de juicio que le permitirán realizar ajustes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Litwin (2008, p. 166) sostiene: *"A la hora de evaluar los aprendizajes de los estudiantes, el problema se centra en encontrar estrategias de valor que permitan distinguir cabalmente los aprendizajes construidos de los simplemente almacenados.* […] *Memorizar datos, hechos o conceptos no es desdeñable ni carece de importancia; por lo contrario, para pensar se utilizan hechos y conceptos que se recuperan a partir de la información almacenada.* […] *En definitiva, son puentes necesarios para pensar. La evaluación debe distinguir estos puentes de los procesos comprensivos. Esto permite juzgar los resultados de la enseñanza y también valorar la tarea comprendida; se trata de procesos de análisis en los que podemos diferenciar los conceptos almacenados de las operaciones cognitivas reflexivas."*

De acuerdo con Carlino (2007, p.107), la evaluación, en este sentido, representa un medio potente en el que se produce la retroalimentación del aprendizaje y de la enseñanza. En efecto, lo producido por el alumno en instancias evaluativas confiere información al docente la cual puede ser devuelta al alumno, a fin de reorientar su desempeño, como así también le proporciona argumentos para repensar su práctica pedagógica posterior. Además, *"la función tácita de toda evaluación: señalar a los alumnos qué es importante en una materia".*

## Desarrollo

En la primera clase se acordó con los alumnos que al finalizar cada unidad del programa, debían entregar, en forma individual, un mapa conceptual relativo al núcleo temático correspondiente. Se les proveyó de material bibliográfico a los efectos de interiorizarse de esta nueva herramienta y hacer una posterior puesta en común, acerca de:

- ¿Qué es un mapa conceptual?
- ¿Cuáles son las ventajas de su uso?
- ¿cómo está constituido?
- ¿Cómo se construye?
- ¿Cuáles son los softwares que se utilizan en su construcción?

En la segunda clase se desarrolló las nociones básicas de CmapTool, mostrando cuáles son las herramientas elementales disponibles: edición, formato, herramientas, como así también la personalización que se puede realizar. Para su comprensión realizaron simultáneamente, docente y alumnos, el armando de un mapa conceptual utilizando conceptos de las distintas áreas de la Matemática.

Luego para observar si fue comprendida la herramienta del CmapTool se solicitó la confección de un mapa conceptual sobre el tema “Los cuadriláteros”, tema abordado en la Geometría I (Métrica) del primer año de la carrera. Posteriormente se realizó una puesta en común donde se expusieron y se discutieron las distintas producciones, las virtudes de cada elaboración como así también las cuestiones que se podían mejorar. A modo de ejemplo se presenta la construcción realizada (Fig. 1) por uno de los estudiantes. En ésta se observa que se han añadido numerosos conceptos utilizando los cuadros de textos, los mismos presentan nexos de unión entre ellos para las palabras enlaces, incluyendo algunos nexos cruzados. Se evidencia que hubo intención de dotar de una jerarquización a los conceptos presentados, pero las líneas carecen del sentido en el que se considera la jerarquización de lo más general a lo más particular.

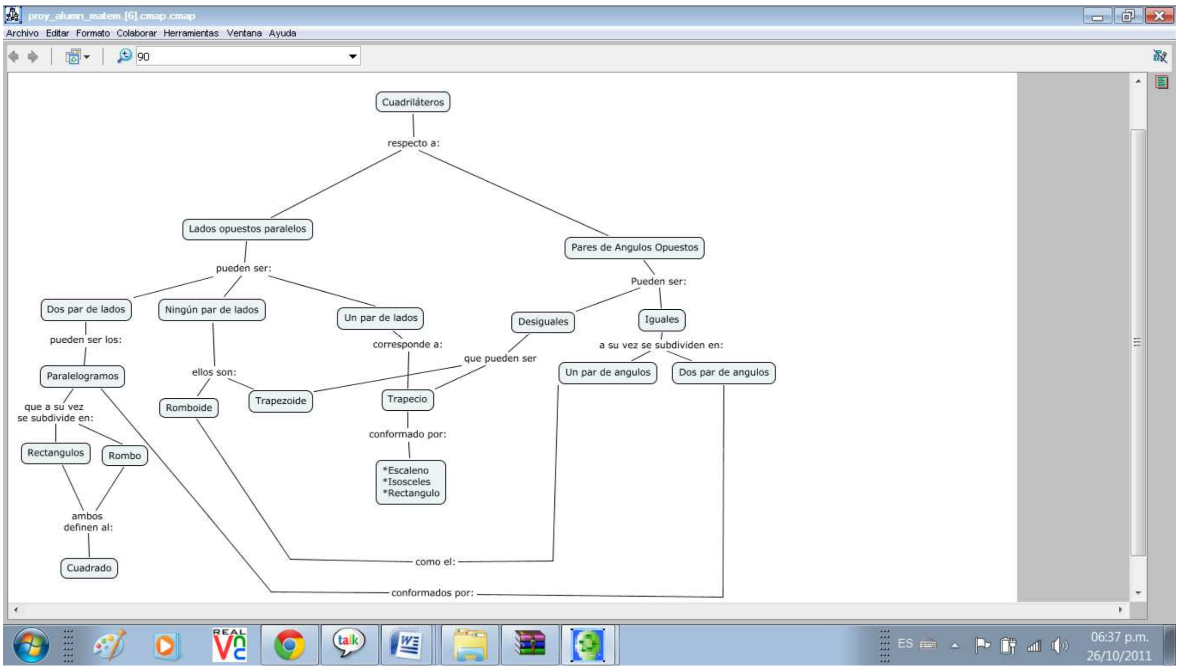



Figura 1

A los efectos que los alumnos puedan aprovechar de manera exhaustiva las virtudes del CmapTool, se los instó a que asistan al Taller *"Potenciando producciones con CmapTool"*. Este taller se inscribe en el Proyecto de Extensión[5] *"Utilización de Herramientas informáticas para la resolución de problemas matemáticos"*. En el mismo se inició a los estudiantes en el uso de todas las herramientas disponibles en el programa, como ser: edición de formatos, tanto de objetos, fuentes, líneas e incluso del mismo CmapTool, distintos tipos de enlaces que pueden realizarse, por ejemplo con construcciones hechas con GeoGebra, páginas web, archivos Word, videos, audio, etc. Además se los instruyó acerca de la forma de crear anidaciones y presentaciones. Esta instancia adicional, ofrecida por el equipo docente, fue muy bien recibida por los estudiantes y por los profesores allí presentes, en razón que pudieron profundizar sus conocimientos respecto al software.

Tal como se acordó en el inicio del ciclo lectivo, al finalizar cada unidad, los alumnos confeccionaron los mapas conceptuales. Para la evaluación de los mismos, el equipo de investigación adoptó el criterio de Chrobak (1998, p.13 – Cap. 5). Se pudo observar, en las distintas producciones, que muy rápidamente los alumnos se apropiaron de los recursos aprendidos en el Taller y pudieron plasmarlos en los mapas solicitados por la cátedra. A modo de ejemplo se presenta, en la Fig. 2, la elaboración del alumno que confeccionó el mapa conceptual mostrado en la Fig. 1, en la que plasma los conceptos propios de la Unidad 1 de la asignatura. Aquí ha aplicado cuantiosos recursos provistos por CmapTool: el concepto principal posee un fondo de objeto, así como también aplicó formato de objeto para cambiar la forma del mismo, color y tipo de letra, incluyendo sombra y color de fondos; esta característica se aplica en varios de los conceptos expuestos, jerarquizándolos, inclusive diferenciándolos a través del uso de diversos colores. Aplicó al mapa un fondo con imágenes relativas al tema central, y utilizó la herramienta anotaciones para complementar la información.

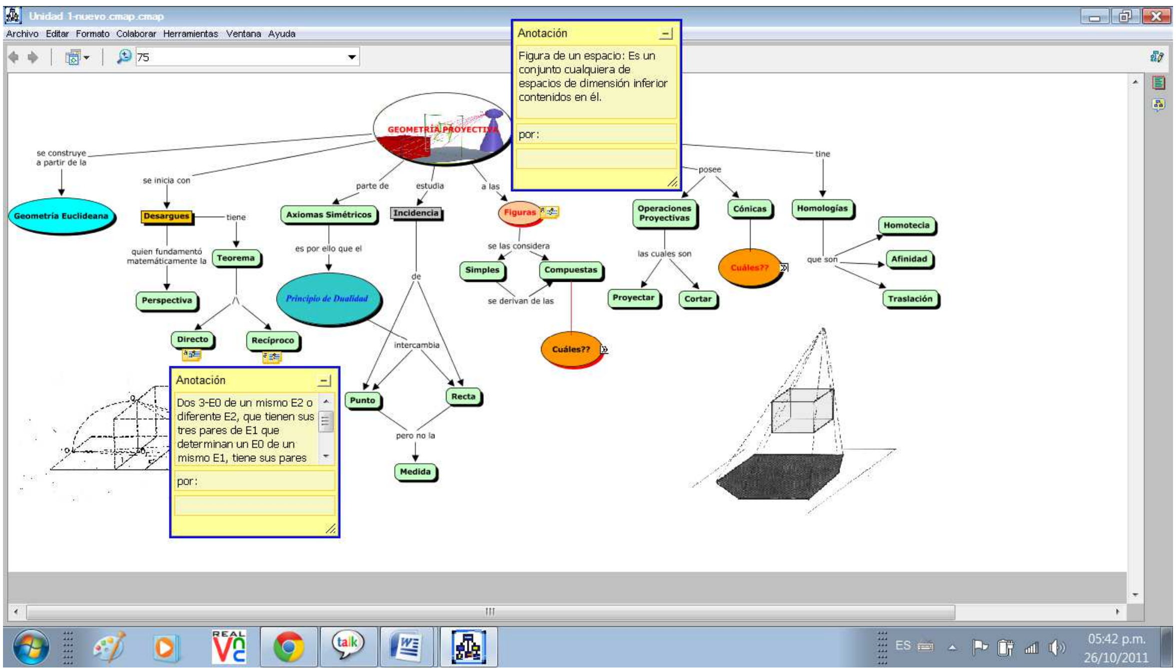



**Figura 2**

[5] Aprobado según Resolución CD Nº 105-10 de la FCEQyN de la UNaM. Argentina

Tanto en la Fig. 3 como en la Fig. 4, del mismo mapa conceptual, se encuentran desplegados los nodos anidados en la Fig. 2. En cada uno muestra los conceptos y palabras de enlaces, que el autor los considera secundarias dentro de su presentación. Además, varios de los conceptos que estaban anidados muestran enlaces con recursos.

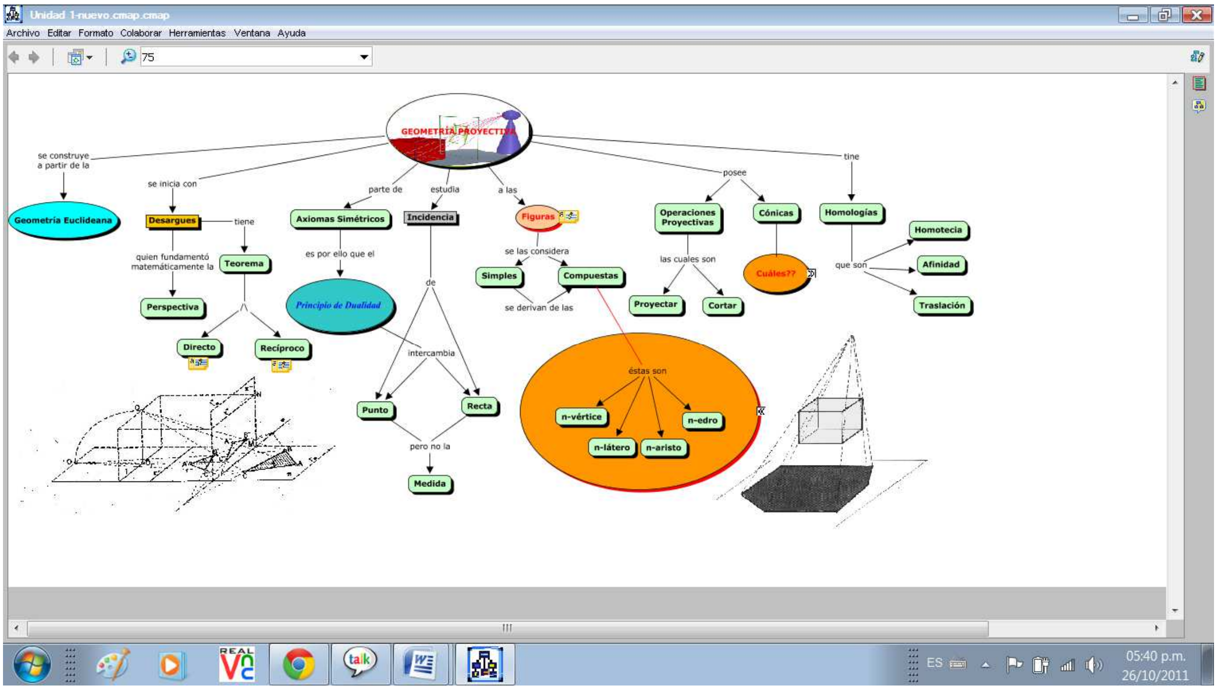



Figura 3

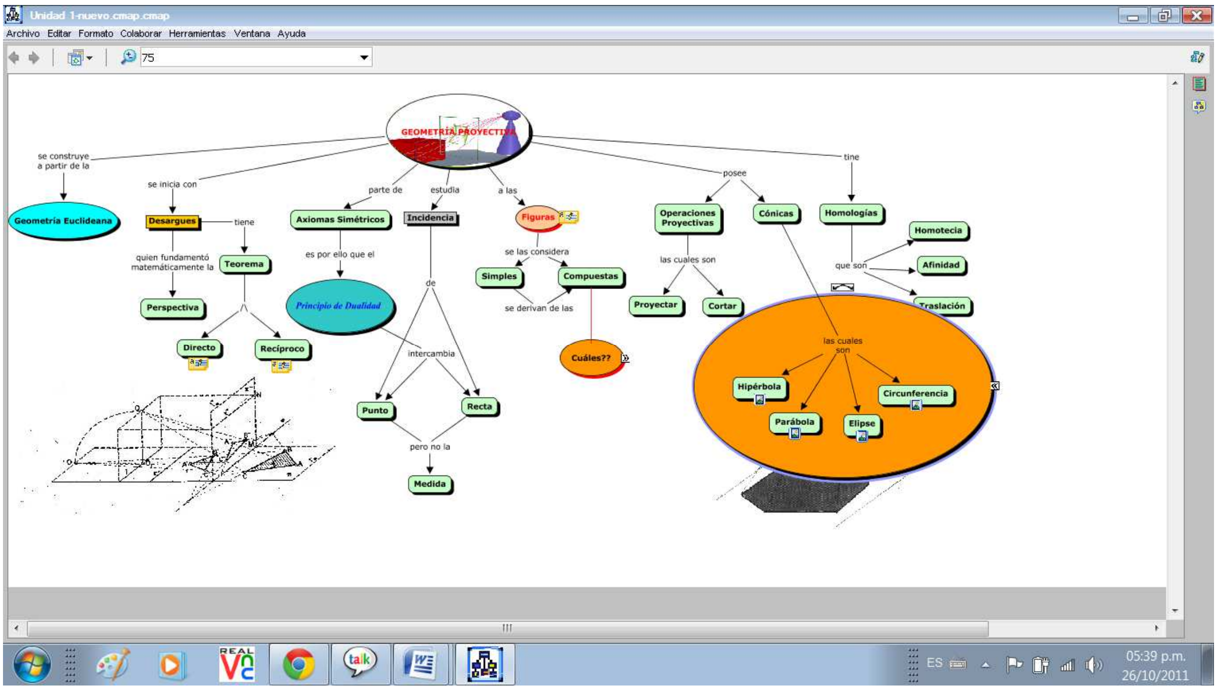



Figura 4

Tal como se expresa en el párrafo anterior, en la Fig. 5, se observa desplegado uno de los enlaces utilizados en este mapa conceptual, el mismo es una imagen en formato jpeg., que hace referencia al tema presentado.

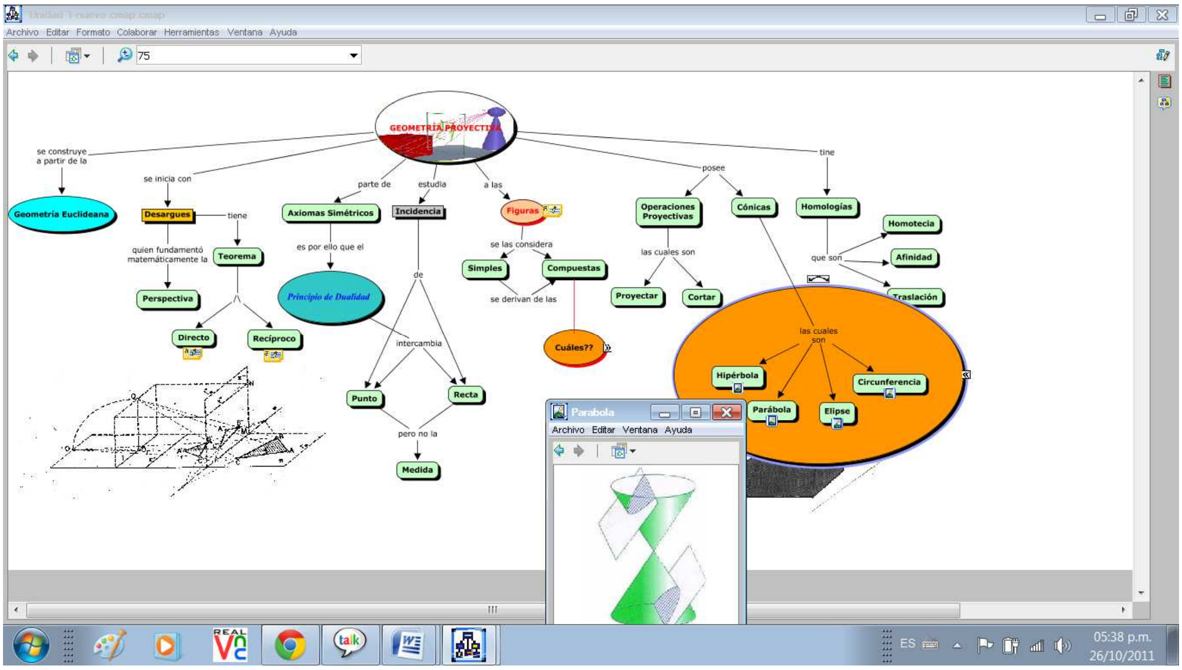



**Figura 5**

Del análisis y evaluación de las distintas producciones elaboradas por los alumnos de Geometría III, se pudo determinar que no existieron mayores dificultades en las mismas. Si bien los conceptos, en su mayoría, fueron bien utilizados, como así también las palabras de enlace, en algunos casos se percibieron las siguientes características a corregir:

- Repetición de un mismo concepto.
- Uso excesivo de conceptos.
- Uso de palabras que no son conceptos en sí mismos.
- Uso inadecuado de palabras y/o frases de enlace.
- Utilización de definiciones.
- Conexiones inadecuadas.

Ante el hecho que algunos estudiantes mostraron inconvenientes en la construcción de mapas conceptuales, el equipo docente se avocó a la tarea de revisión conjunta con cada alumno para repensar su producción. Es así que paulatinamente se observó una mejoría en este tipo de labores. Luego del análisis de las producciones realizadas con CmapTool, se percibió el nivel de conceptualización alcanzado por los estudiantes, ya que esta exploración permitió llevar a cabo una evaluación diagnóstico inicial y continua, acorde a los temas tratados en cada oportunidad. Este tipo de actividades permitieron a los alumnos hacer una integración de los contenidos abordados, acción propicia para favorecer al proceso de comprensión y consecuentemente el aprendizaje significativo, realizar la metacognición y la autoevaluación. Al mismo tiempo posibilitó a los docentes llevar a cabo la evaluación de los aprendizajes realizado por los alumnos, constatar la existencia de errores conceptuales y trazar acciones para desarraigarlos.

## Conclusiones

Luego de un análisis integral, de las producciones de los estudiantes, se puede concluir que no presentaron en general, errores conceptuales, en cuanto a los diversos marcos teóricos abordados. En algunos casos se observó una marcada mejoría en la construcción de los mapas conceptuales, al percibir no solo el logro de relacionar conceptos de un orden jerárquico de mayor generalidad a mayor especialidad, sino también al lograr articular conceptos en forma transversal, lo que inicialmente no todos habían logrado.

Contrastando las producciones realizadas, por este grupo de estudiantes, con las de alumnos de ciclos anteriores, se advirtió que lograron mejorar la arquitectura del mapa conceptual, al hacer uso de esta herramienta disponible en el software, dotándolo de un formato menos complejo y de interpretación más sencilla.

Se pudo constatar que esta metodología permite contribuir al mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Proyectiva lo cual abona la afirmación del cumplimiento del objetivo general propuesto en el plan de trabajo de investigación.

Si bien el primer impacto es para la Universidad, el realizar este tipo de investigaciones y transferir los resultados, contribuirá al cambio en el nivel secundario, porque se está incidiendo en la formación docente capacitándola antes de su salida al nivel medio.

La investigación es un aporte para el estudio y profundización de las herramientas que nos brinda la tecnología aplicada a la educación. Creemos que la reflexión y la discusión de un conocimiento más exhaustivo acerca de la construcción de mapas conceptuales y del uso del CmapTool, debe ser una cuestión explícitamente considerada en la formación de los docentes de Matemática en particular y de cualquier disciplina en general.

## Bibliografía

Ausubel, D., Novak, J. Y Hanesian, H. (1983). Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. (2da Ed.). México D. F., México: Trillas.

Carlino, O. (2007). Escribir, leer y aprender en la Universidad. Una introducción a la alfabetización académica. (1ª Ed. 3º Reimp.). Buenos Aires, Argentina: Fondo de Cultura Económica.

Chrobak, R. (1998). Metodologías para lograr aprendizaje significativo.. Neuquén, Argentina: Educo.

Chrobak, R. (2007). La educación a distancia y el CmapTool. Primera Jornada de Educación mediada por Tecnología. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén.

Chrobak, R. (2000). La Metacognición y las herramientas didácticas. [En línea], recuperado 15 de Setiembre de 2011 de http://www.unrc.edu.ar/publicar/cde/05/Chrobak.htm

Lombardo, G. (2008). Análisis de la efectividad de la aplicación de herramientas metacognitivas en el proceso de evaluación continua en Geometría Proyectiva. Tesis de Maestría. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén, Argentina.

Litwin, E. (2008). El oficio de enseñar: Condiciones y contextos. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Novak, J. D. Y Gowin, D. B. (1988). Aprendiendo a aprender. Barcelona, España: Martínez Roca.

Palou de Maté, C. (2003). Evaluar para enseñar y evaluar para acreditar. En: La enseñanza y la evaluación. Una propuesta para matemática y lengua.. Buenos

Aires, Argentina. Colección: Estudios Universitarios. Coordinadora: Carmen Palou de Maté.

**Silvia Caronía**. Especialista en Educación Superior (UNaM, Argentina). Profesora en Matemática, Física y Cosmografía (FACENA-UNNE, Argentina). Docente en el Profesorado en Matemática de Didáctica de la Matemática, Práctica Profesional, Lógica y Metodología de la Matemática, Universidad Nacional de Misiones. Dirige proyectos de investigación en el área de matemática educativa, dicta cursos de capacitación y cursos de posgrado en el campo de la Didáctica de la Matemática. Cuenta con numerosos trabajos publicados a nivel nacional e internacional. Miembro fundador del Instituto GeoGebra Misiones, Argentina. Posadas, Misiones, Argentina**.** **silvca2@gmail.com**.

**Graciela C. Lombardo**: Magister en Educación en ciencias, con mención en Matemática (FI-UNCOMA, Argentina). Profesora en Matemática, física y Cosmografía (FHyCS-UNaM, Argentina). Docente en el Profesorado en Matemática de FCEQyN en Geometría Métrica y Proyectiva y en otras asignaturas de carreras de grado y pre-grado de FCE (UNaM). Integra proyectos de investigación y extensión y dicta cursos de capacitación en el campo de educación Matemática. Ha publicado numerosos trabajos a nivel nacional e internacional. Es Presidente del Instituto GeoGebra Misiones, Argentina**.** **gracielalombardo@gmail.com**.

**Operuk Roxana Verónica**: Profesora en Matemática física y Cosmografía (FHyCS-UNaM, Argentina). Ayudante de Primera con cargo regular, en las asignaturas Geometría I y Geometría III. Coautora y expositora con trabajos publicados con referato. Integra proyectos de investigación y extensión y dicta cursos de capacitación en el campo de educación Matemática. Miembro fundador del Instituto GeoGebra Misiones, Argentina**.** **roxsoperuk@gmail.com**.

**Abildgaard, Edith Graciela**: Profesora en Matemática física y Cosmografía. Ayudante de Primera con cargo regular, en Lógica y Metodología de la Matemática y en Didáctica de la Matemática. Coautora y expositora con trabajos publicados con referato. Integra proyectos de investigación y extensión y dicta cursos de capacitación en el campo de educación Matemática. Miembro fundador del Instituto GeoGebra Misiones, Argentina. **edithabild@gmail.com**.

**Domínguez, Lucas Javier**: Profesor en Matemática (FCEQyN- UNaM). Ayudante de Cátedra en carreras de pre-grado de FCE (UNaM). Dicta el Ciclo de Nivelación de Matemática para las carreras de grado de FCE. Integra proyectos de investigación y extensión y dicta cursos de capacitación en el campo de educación Matemática. Miembro fundador del Instituto GeoGebra Misiones, Argentina. **pm_lucas@hotmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 85-106
ISSN: 1815-0640

# Estudio de la función lineal en estudiantes con déficit auditivo: ¿Un problema de tiempo o ritmo de aprendizaje?

**Giselle Mora Ocares, Marcela Parraguez González**

## Resumen

Esta investigación indaga en cómo estudiantes con déficit auditivo construyen el concepto función lineal, considerando como marco teórico y metodológico la teoría APOE, con una leve variación, al tomar el conocimiento del cotidiano en una nueva construcción mental que hemos definido como de las preacciones. Para lograr tal objetivo, se propone una descomposición genética hipotética, considerando en esta no solo conceptos sino también prácticas pedagógicas cotidianas, que ayudan a construir las primeras nociones de los conceptos, que llamamos preacciones. Uno de los resultados de la investigación dice relación con la documentación de la descomposición genética a través de la aplicación de instrumentos a 4 alumnos de enseñanza media con déficit auditivo.

## Abstract

This research explores how students with hearing impairments construct the linear function concept, considering as theoretical and methodological framework APOS theory, with a slight variation: taking the knowledge of everyday life in a new mental construct that we have defined as the preactions. To achieve this goal, we propose a hypothetical genetic decomposition, considering not only the concepts but also everyday teaching practices that help build the first notions of concepts, call preactions. One outcome of the investigation is related to the documentation of genetic decomposition through the application of instruments to 4 high school students with hearing impairments.

## Resumo

Esta pesquisa explora a forma como os alunos com deficiência auditiva constroem o conceito de função linear, considerando-se como teórico-metodológico a teoria APOS com uma ligeira variação: levar o conhecimento da vida cotidiana em uma nova construção mental que temos definido como as pre-ações. Para atingir esse objetivo, propomos uma decomposição hipotética genética, considerando não apenas os conceitos, mas também as práticas de ensino cotidianas que ajudam a construir as primeiras noções de conceitos, chamada pre-ações. Um dos resultados da investigação está relacionada com a documentação de decomposição genética através da aplicação de instrumentos para quatro alunos do ensino médio com deficiência auditiva.

## 1. Problemática y objetivos de investigación

Nuestra investigación se sitúa en la construcción de un concepto matemático –función lineal– en personas sordas, bajo la mirada de la teoría APOE (Dubinsky, 1991) y con una leve variación al considerar el conocimiento cotidiano (Mazzitelli y Aparicio, 2010). La investigación busca indagar cómo estudiantes con déficit auditivo logran el aprendizaje del concepto matemático –función lineal–, noción que está ligada al álgebra, y que generalmente requiere para su construcción de dos elementos fundamentales: por un lado, un alto grado de abstracción y por otro un lenguaje matemático propio de esta rama de las matemáticas (Serrano, 1995).

La investigación se sitúa en la construcción de un concepto matemático –función lineal– en personas sordas, bajo la mirada de la teoría APOE y el conocimiento cotidiano de la matemática. Considerando un nivel medio superior, específicamente en el nivel de segundo año de educación media (17 a 20 años) según el programa de estudios vigente en Chile hasta el año 2010, El estudio se realizará con estudiantes de tercero medio todos ellos con sordera profunda y un alumno de cuarto medio hipoacusico, pertenecientes al Centro de Estudios y Capacitación para Sordos de Valparaíso (CECASOV). Es así como la pregunta que sustenta esta investigación es:

¿Cómo construyen el concepto función lineal, estudiantes sordos, bajo la mirada de la Teoría APOE?

**Objetivos generales de investigación**

- Identificar las construcciones mentales de los alumnos sordos asociadas a la función lineal.
- Identificar las prácticas sociales-pedagógicas que ayudan a la apropiación de nociones de conceptos asociados a esta investigación.

**Objetivos específicos de investigación**

- Identificar las construcciones mentales de los alumnos sordos, asociadas a la función lineal
- Identificar las prácticas sociales-pedagógicas que ayudan a la apropiación de nociones de conceptos asociados a esta investigación.

Diversas investigaciones han indagado en las concepciones de los estudiantes acerca de la función lineal, pero ellas no consideran el caso de los estudiantes sordos, siendo este la propuesta de nuestra investigación. Tales investigaciones han sido dadas a conocer a la comunidad en diferentes trabajos; uno de ellos es el de Ana Sierpinska (1992), relativo a la re significación de la linealidad (Cf. García y Montiel, 2008). Esos autores concluyen que los estudiantes tienden a representar la función lineal como una fórmula y como una combinación de variables gráficas en la que no se visibilizan ni valoran los atributos propios de la función, como por ejemplo, considerar la función como una conjunción de elementos relacionados por medio de variables y que deben cumplir ciertas características específicas.

Según Serrano (1995), en estricto rigor, este tipo de alumnos no debiese tener problemas en adquirir este concepto matemático si consideramos a la sordera como un problema fisiológico y no cognitivo; y más aún, dependiendo del nivel de sordera el educando sólo necesitaría más tiempo para la adquisición de este concepto, debido a que el álgebra presenta un problema de aprendizaje ligado más bien al lenguaje propio de esta disciplina, siendo esta la principal dificultad para el docente; por ende la problemática se traslada entonces a la dificultades asociadas a la apropiación del lenguaje técnico-matemático que posee diferentes aristas. Además

Serrano (Ibíd.) señala que el álgebra presenta un lenguaje propio, siendo esta otra de las dificultades en la adquisición de este concepto para las personas sordas *"cualquier contenido que implique el uso de un lenguaje excesivo genera un obstáculo"*. Para el caso de alumnos con sordera o hipoacusia en cualquiera de sus niveles, dificulta aún más el aprendizaje en forma general de esta disciplina, por su falta de lenguaje oral, el nivel abstracción y señas específicas limitadas en el área de la matemática,

Ante este panorama, la investigación que se reporta utiliza como marco teórico –La teoría APOE– con una leve variación, al considerar el conocimiento cotidiano de la matemática. La justificación para utilizar ambas teorías es procurar indagar de mejor manera, cómo una persona sorda logra la construcción del concepto función lineal. A través de la teoría APOE indagamos sobre cómo estudiantes sordos construyen el conocimiento, proponiendo una descomposición genética hipotética del concepto función lineal y a través del conocimiento del cotidiano consideramos a los estudiantes como sujetos individuales con una realidad propia y que se consideran diferentes uno de otros a través de las acciones que realizan, proponiendo actividades que sean acordes y significativas a su realidad y comunidad.

La investigación considera como objeto matemático la función lineal, pero para el estudio de ella se precisa además del reconocimiento de cuatro pilares matemáticos de estudio, siendo estos: variable, relaciones, relación funcional y función lineal, todos estos considerados en el diseño de la descomposición genética hipotética propuesta.

En una de las primeras etapas de la investigación y teniendo en claro los conceptos matemáticos asociados al estudio, se desarrollo una revisión bibliográfica acerca de la epistemología de la función lineal con el fin de analizar el desarrollo a través de la historia del concepto función lineal y de revisar las prácticas sociales asociadas al concepto función lineal.

## 2. Epistemología del concepto Función Lineal

Algunos de los antecedentes recopilados en la revisión epistemológica de la función lineal serán utilizados como referencias a tomar en cuenta en el diseño de la descomposición genética hipotética; uno de ellos es considerar las nociones de función y relación en forma intuitiva y como base de experiencia previa al concepto función propiamente tal, la historia apunta que se trabajo así hasta el año 1673.

El concepto "función" aparece por primera vez en 1673 en el manuscrito de Leibniz, en el contexto de un problema de cálculo de ordenadas a partir de cierta propiedad de la tangente, lo que da paso a su definición explícita como tal en 1718, de forma analítica. Euler evoluciona el concepto de función lo que es aceptado por la comunidad. Pese a ello existen antecedentes no formales de la noción de función de tiempos remotos.

Desde la historia pre Helénica, donde no hay conceptos definidos, como lo son las variables o conceptos abstractos de forma implícita, se comienza a trabajar con el concepto de función, más que nada de forma intuitiva. A modo de ejemplo aquello ligado al conteo que asocia correspondencia biunívoca entre dos conjuntos, por lo que es válido pensar que la idea de función estaría asociada al de número, es más podríamos considerar las cuatro operaciones básicas como funciones de dos variables.

Los babilonios (2000 a.C. – 500 a.C.) también aportan en este sentido, ellos desarrollaron de buena forma el manejo algebraico, caracterizado por la sustitución y el cambio de variable, ellos manejaron la “noción” de función, y la noción de este concepto se encuentra implícita en las tablillas astronómicas, las cuales muestran observaciones a fenómenos naturales como lo es distancia angular de el planeta Tierra al sol.

Con el paso de los años y ya durante el desarrollo de la edad media en general no hubo avances en lo matemático y lo científico (Vásquez, 2008), se deja este ámbito de estudio un poco relegado y se produce un avance en el ámbito religioso. Sin embargo igualmente hubo algunos desarrollos asociados principalmente al estudio de fenómenos naturales como el calor, velocidad, movimiento uniforme acelerado, etc. Apareciendo en estos estudios la noción de variables, específicamente ampliando la gama a variables dependiente e independiente; así el estudio de función empieza a evolucionar asociada al “estudio del cambio” específicamente al del movimiento. En este periodo se tiene una descripción verbal de la noción de función, se comienzan a desarrollar algunas de sus propiedades en cuanto a enunciado y gráfico de ésta; eso si apoyada en el uso de fórmulas.

Ya durante la época moderna, se avanzó a pasos agigantados en cuanto al concepto de función, al final del siglo XVI, estas fueron equivalentes a expresiones analíticas. Todo esto también ligado al avance del álgebra, que en sus inicios estuvo unida a la geometría.

Y es aquí donde se enlaza con esta investigación ya que tal como se dijo al inicio de esta revisión epistemológica fue Leibniz quién utiliza por primera vez la palabra función, haciendo alusión a la relación entre la abscisa y ordenada, refiriéndose a cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, tal como la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada.

Todo lo que se relato anteriormente fueron nociones y aproximaciones al concepto, desde el siglo XVI en adelante se aleja de estas nociones, pasando a una nueva etapa del conocimiento de función, se trabaja con el concepto de función propiamente tal, con su notación característica y clasificando en tipo de funciones y por supuesto al símbolo que caracterizaría a las funciones hoy en día, el cual fue aportado por Bernulli (letra griega f).

En la época moderna de las matemáticas prevalecen las expresiones analíticas de las funciones, desarrollándose la teoría de funciones cuya base se sustentaba en tres ejes: Crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos, Creación del álgebra simbólica-literal y Extensión del concepto de número.

Euler ya en el siglo XVIII define función de forma analítica, y entre otros especifica constante y cantidad variable. La definición analítica es la siguiente:

> *"la función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes”. (Ruthing, 1984)*

El aporte de Euler con esta definición permitió dar un avance significativo, definiendo además nociones iniciales y abordando el tema de que se entiende por expresiones analíticas, desarrollando toda una teoría de funciones. Aparecen estudios de funciones logarítmicas, exponenciales, otras proporcionadas por el cálculo integral, la integración, las ecuaciones diferenciales, etc.

Considerando las etapas en la evolución del concepto función revisadas anteriormente, se hace necesario en esta investigación, indagar en otros antecedentes que contribuyan al diseño de descomposición genética.

## 3. Algunos antecedentes

La labor pedagógica de entrega de conocimiento matemático específico se dificulta aún más con estudiantes con deficiencias auditivas, debido a la falta parcial o completa de este sentido, y más aún considerando que no existen señas propias del área de la matemática para muchas de sus nociones. El álgebra presenta un problema de aprendizaje ligado al lenguaje propio de esta disciplina, siendo esta la principal dificultad para el docente ya que se agrega un nuevo tipo de lenguaje –lenguaje de señas–; por ende la problemática se traslada entonces a la dificultades asociadas a la apropiación del lenguaje técnico-matemático que posee diferentes aristas, las cuales son declaradas en algunas investigaciones:

La investigación de Serrano (Serrano, 1995), por ejemplo, señala que la sordera no está ligado a lo cognitivo, por lo que no habría dificultad en la adquisición del concepto. Los problemas que derivan de la sordera estarían asociados a dificultades de abstracción y comparación, lo que justificaría los problemas de la adquisición del concepto algebraico en lo que toca exclusivamente lo experimental y comunicativo. El álgebra presenta un lenguaje propio, siendo este otra de las dificultades en la adquisición de este concepto para las personas sordas, tal como queda expresado en Serrano (1995): *"cualquier contenido que implique el uso de un lenguaje excesivo genera un obstáculo"*, para el caso de alumnos con sordera o hipoacusia en cualquiera de sus niveles, por su falta de lenguaje oral, el nivel abstracción y señas específicas limitadas en el área de la matemática, dificulta aún más el aprendizaje en forma general de esta disciplina.

Otra investigación, Van Lamoen (2011) desde una perspectiva cognitiva a la luz de la teoría APOE y de la teoría de Registros de Representación Semiótica, relativo a la Función Cuadrática con estudiantes sordos, señala como parte de las conclusiones la dependencia que tienen este tipo de estudiantes a determinados métodos, para manejar distintos elementos matemáticos: pares ordenados, representaciones sagitales, entre otros; así como también de la vida cotidiana: nombres, fechas, por nombrar algunos. Además esta investigación nos provee de evidencia empírica, que los conceptos asociados con mayor nivel de abstracción son los que presentan mayor dificultad en los estudiantes sordos. Es así entonces, que pareciera que los alumnos sordos tienen una buena comprensión de los conceptos, si estos están asociados a actividades de la vida cotidiana.

Para interpretar el conocimiento cotidiano desde la teoría APOE, la investigación contempla una construcción mental previa, denominada preacciones, donde se consideraran el trabajo previo para tratar de lograr nociones del concepto función y así asociar practicas cotidianas de los estudiantes a los conceptos asociadas a él, como por ejemplo: las labores que se puedan dar a los alumnos presentadas mediante una relación dada en diagrama, brindando así la experiencia previa que a este tipo de estudiantes les falta por su condición auditiva; cabe mencionar también la ausencia de señas propias y especificas de los conceptos asociados.

## 4. Marco teórico y metodológico

Nuestra investigación contempla como marco teórico y metodológico la teoría APOE pero con una leve variación al considerar desde ella el conocimiento cotidiano. La justificación para utilizar ambos marcos es la consideración del universo de estudiantes informantes que forman parte de la investigación –estudiantes con déficit auditivo–, y considerando esto y lo expuesto por Serrano (1995) el principal problema de este tipo de estudiantes es la falta de experiencia previa por falta de su sentido auditivo, lo cual generaría un obstáculo de aprendizaje.

A esto se le debe anexar lo que viene desde la experiencia de aula, donde los estudiantes presentan problemas en lo comunicacional, en la lectura comprensiva y en los conectivos; además falencias de señas en el área de la matemática y en general de las ciencias.

En esta investigación, el conocimiento cotidiano esta pensado para dar luces sobre qué pasa con estos estudiantes en la etapa de indagación y de la experiencia previa a la construcción del concepto función lineal, generando una instancia que llamaremos “preacción” donde se crean las nociones preliminares de los conceptos matemáticos involucrados en la investigación.

Creemos fehacientemente que los estudiantes sordos a partir de los conocimientos desde el cotidiano podrían llegar a un conocimiento matemático formal, comprendiendo conceptos y es aquí donde la Teoría APOE juega un rol fundamental en el sentido de establecer las construcciones y mecanismos mentales que poseen estos estudiantes con respecto a la función lineal y los conceptos asociados a ella.

### 4.1. Del conocimiento cotidiano al conocimiento Matemático

El conocimiento cotidiano aparece con distintos significados en la literatura como lo es contextualización, ideas previas, conocimiento intuitivo, etc. También es usado en distintas ramas de la enseñanza de las ciencias, en el caso de la matemática es tomado y usado por la socio epistemología en didáctica de la matemática, pero en esta investigación el cotidiano estará mirado desde la didáctica de la ciencias, según lo expuesto por Mazzitelli y Aparicio(2010) y por Pozo y Gómez (1998).

Mazzitelli y Aparicio (2010) proponen que uno de los problemas relevantes en la enseñanza de las ciencias es la desconexión existente entre el conocimiento de los alumnos y el sentido que se le da al conocimiento, mostrando símbolos, esquemas y conceptos abstractos alejados del mundo real. Así entenderemos como conocimiento cotidiano a aquel conocimiento construido desde el contexto de la vida cotidiana. Tal como lo señala Mazzitelli y Aparicio (2010):

> *Si consideramos que el hecho educativo no se produce en el vacío sino en un contexto interactivo que involucra distintos actores, comprenderemos que el aprendizaje de las Ciencias implica procesos y acciones que superan el plano*

*individual. Dicho de otro modo, los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las Ciencias son, también, fenómenos sociales en los que confluyen e interaccionan múltiples factores.*

El conocimiento humano es un acto fundamentalmente social y el conocer algo supone la participación activa y colaborativa en una comunidad. Desde esta perspectiva y orientada en el proceso enseñanza- aprendizaje se debería enseñar a los estudiantes a través de prácticas autenticas, cotidianas, relevantes en su cultura.

Berger y Luckmann (1986) desde una mirada Psicosocial consideran al cotidiano como un proceso de sociabilización, surgiendo este conocimiento como un aval empírico y que se organiza sistemáticamente. Estos autores señalan que la realidad en la niñez es natural pero las realidades posteriores son artificiales por ello la importancia de hacer familiares los contenidos, teniendo por misión el docente hacer familiares los contenidos de enseñanza, volviéndolos vividos y relevantes.

### 4.2. Teoría de Representación social

Las representaciones sociales (R.S) es un nuevo campo de investigación que parecen en la década del 60, con ello aparecen las representaciones colectivas (RC) introducidas por Durkheim en 1898. Las R.S han abierto nuevos campos de investigación relativas a como la realidad es construida por los sujetos, como se vulgariza el conocimiento científico y cuál es el rol de la sociedad en la construcción del conocimiento de los individuos.

En este sentido Abric (en Mazitelli y Aparicio, 2010) señala que las representaciones sociales dependen de la historia del individuo, adquiriendo las características del objeto, dando una definición funcional del mundo. De las R. S existen diferentes miradas que las amplían más allá de las relaciones interpersonales, que lo hace poseer un enfoque psico-socilógico que desplaza el centro de interés de lo individualista a lo colectivo, por ende los datos recolectados deben ser desde el contexto de interacción social.

Desde la mirada propuesta por Mazitelli y Aparicio (2010) el sujeto es un ser social e inserto en un medio, por ello para definir las relaciones sociales se necesita: objeto de la representación social, sujetos en los cuales se estudia la representación social y característica del contexto sociocultural donde se desenvuelven los sujetos al estudiar la representación social. Al respecto es válido señalar que las R. S constituyen un conocimiento práctico y que permite comprender y explicar el mundo, respondiendo a inquietudes y dando sentido a nuestro entorno. Cumpliendo tres funciones: Función cognitiva de integración de la novedad, Función de interpretación de la realidad y Función de orientación de as conductas y relaciones sociales.

Existen procesos que explican como lo social se transforma un conocimiento en representación y como la representación lo transforma en social, estos son los procesos de objetivización y el anclaje.

*Objetivización:* Pone a disposición del individuo una imagen concreta a partir de un ente abstracto y anclaje, para ello considera las fases:

- selección y descontextualización de los elementos de la teoría, se selecciona la información y la separa del campo científico pasando a la apropiación.
- Formación del núcleo figurativo: forma una estructura conceptual.

- Naturalización: transforma los elementos del esquema en elementos de la realidad.

*Anclaje:* Es lo que relaciona el significado con la utilidad que se le otorga a la representación y al objeto con la integración cognitiva de lo nuevo al pensamiento social ya constituido.

Así la finalidad de las R.S es hacer familiar lo extraño y así poder internalizarlo, permitiendo el anclaje y ubicando la novedad dentro de lo familiar y explicando a través de formas accesibles. Al respecto Mazzitelli y Aparicio (2010) señala:

> *Otro aspecto a tener en cuenta es que las representaciones sociales constituyen un todo estructurado y organizado, compuesto por un conjunto de informaciones, creencias, opiniones y actitudes con relación a un objeto.*

## 4.3. El conocimiento cotidiano

En el sentido del cotidiano el conocimiento científico juega un rol fundamental ya que es la forma de explicar fenómenos naturales de forma coherente desde una perspectiva cotidiana respondiendo a lo predictivo y explicativo, además responde a la necesidad de entender y controlar el mundo que nos rodea. Según pozo el conocimiento cotidiano tendría su origen según tres aspectos sensorial; cultural-social y escolar.

Mazzitelli y Aparicio (2010) según su investigación señala que la construcción de este conocimiento cotidiano surge en la necesidad de explicar lo nuevo en base a lo que ya se conoce, siendo más accesible a la memoria y dando una propiedad a lo desconocido a partir de lo que se conoce. En cuanto a la estructura esta son ideas coherente pero aunque sin la sistematicidad y coherencia interna de una teoría propiamente dicha, difiriendo de conocimientos científicos y que interfieren en la enseñanza. Mazzitelli y Aparicio (2010) para caracterizar el conocimiento cotidiano propone el siguiente cuadro resumen en su artículo (ver Tabla 1):

**Tabla 1: Síntesis sobre aspectos destacados del conocimiento cotidiano**

| Conocimiento cotidiano | |
|---|---|
| Características | - Conocimiento espontáneo.<br>- Conocimiento construido de manera personal y compartido por el grupo social.<br>- Conocimiento implícito, ya que los argumentos que contiene son tácitos.<br>- Conocimiento episódico, ya que responde a las necesidades del contexto en el que se produce, siendo específico para cada dominio del conocimiento científico.<br>- Resistencia al cambio. |
| Funciones | - Carácter adaptativo ya que cumplen una función más pragmática que epistémica.<br>- Permite explicar y entender el mundo que nos rodea |
| Origen | - **Sensorial:** que podría considerarse más individual y así se formarían *concepciones espontáneas* en el intento de entender y explicar las actividades cotidianas, a partir de procesos sensoriales y perceptivos),<br>- **Cultural-social:** estas representaciones sociales no estarían tanto dentro de cada sujeto sino antes bien en su entorno social y cada uno se impregnaría de ellas. Serían creencias socialmente inducidas sobre numerosos hechos y fenómenos.<br>- **Escolar:** también se trataría de una instancia de interacción social. |
| Estructura | - Se organiza como teorías intuitivas e implícitas. No presenta la sistematicidad y coherencia interna de una teoría propiamente dicha, pero los conceptos relacionados presentan una estructura jerárquica y poseen un carácter predictivo y explicativo. |

Para Mazzitelli y Aparicio (2010), quien habla acerca del cotidiano presentan diferencia con las Representaciones sociales (RS) y en este sentido el conocimiento es parte de la actividad mental de los individuos, siendo procesos similares entre los distintos sujetos donde se experimentan experiencias sin constituir representaciones de un grupo de sujetos, mientras que las Representaciones sociales (RS) son las representaciones de las prácticas sociales, compartiendo el significado construido socialmente.

Es así como las personas al estar insertos en una sociedad, no solo pasan por el proceso de la experimentación sino que comparten experiencias y comunican lo obtenido, construyendo socialmente el conocimiento. Para finalizar Mazzitelli y Aparicio (2010) hace un llamado a usar este tipo de conocimiento en actividades didácticas, haciendo un llamado a identificar este tipo de conocimiento de la siguiente forma:

> *No es suficiente con identificar este conocimiento y conocer su contenido, sino que es necesario indagar la vinculación jerárquica de esa información, es decir, la estructura conceptual.*

## 4.4. Teoría APOE

Teoría de carácter cognitiva creada por Ed Dubinsky (Dubisnsky, 1991), ya hace mas de 10 años. Recibe su nombre debido a sus componentes Acción, Proceso, Objeto y Esquema. Considera el concepto de abstracción reflexiva como forma clave en la descripción de las construcciones mentales de los estudiantes, Este mecanismo se activa a través de las acciones físicas o mentales que el alumno realiza sobre el objeto de conocimiento, por el modo que el sujeto reflexiona sobre sus acciones. La Teoría APOE reflexiona sobre los conceptos de la propia matemática considerando distintos procesos en la construcción del conocimiento:

> "*El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas con el fin de manejar las situaciones" (Dubinsky, 1996)*

Los mecanismos de la teoría de teoría APOE, son entonces acción, proceso, objeto y esquema, que según palabras de Dubinsky se describen como:

> *"Las acciones son construidas por respuestas repetitivas a un estímulo; los procesos son construidos ya sea al interiorizar acciones o al transformar procesos existentes; los objetos son construidos al encapsular los procesos; y, en la desencapsulación de un objeto, los únicos procesos que un individuo puede obtener son los procesos que fueron encapsulados para construir este objeto"* (Dubinsky, 1997).

Cabe señalar que a simple vista estas construcciones mentales nombradas anteriormente fuesen secuenciadas, lo cual es incorrecto, lo que hace a esta teoría más dinámica como herramienta de investigación.

Antes de proseguir hay que hacer una aclaración relativo a objeto para lograr un mejor entendimiento de la teoría APOE y evitar confusiones posteriores, en matemáticas este puede ser considerado como un objeto matemático lo que no coincide con el concepto en su construcción objeto considerada en la teoría APOE, el cual tiene su propia definición y será tratada más adelante.

La teoría APOE se centra específicamente en la manera en que los estudiantes construyen los conceptos matemáticos a partir de sus estructuras mentales matemáticas previas, las cuales evolucionan conformando otros saberes, las concepciones previas de los estudiantes son consideradas en la descomposición genética que proponemos, estas son:

*Acciones*: Las acciones son transformaciones de los objetos que percibe un estudiante como esencialmente externos y que requiere de instrucciones para llevarlas a efecto. Por ejemplo: un estudiante tendrá una construcción "*Acción de Relación*", si es capaz de establecer relaciones entre conjuntos desde lo cotidiano, con la idea de pertenecía asociada, es decir reconoce la pertinencia de un alumno a un determinado curso haciendo uso de diagrama sagitales estableciendo así la relación.

*Procesos.* Cuando la acción es repetitiva y el alumno es capaz de reflexionar sobre ella, puede ser interiorizada como un proceso. Ya no se realiza motivada por estímulos externos, y la manipulación del objeto matemático lo puede realizar en la mente del estudiante logrando una interiorización del concepto como acción.Por ejemplo: un estudiante tendrá una construcción proceso de variable, si reconoce y establece la relación de dependencia entre las variables

*Objetos.* Cuando un estudiante logra reflexionar sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, tomando en cuenta las acciones y procesos involucradas, percibiendo la totalidad del proceso, entonces se dice que el estudiante ha encapsulado el proceso para construir un objeto cognitivo. La desencapsulación se da cuando el estudiante es capaz de descomponer el objeto en procesos y acciones subyacentes. Por ejemplo: un estudiante tendrá una construcción objeto de función lineal, si a partir de datos obtenidos desde la grafica es capaz de establecer la relación funcional.

*Esquemas.* El esquema para determinado tema matemático o concepto más general (concepto que requiera la construcción de relaciones entre otros conceptos), es la colección de acciones, procesos y objetos que tiene un alumno y que están unidos por principios generales de forma que generen un marco coherente para el alumno. Esto se refiere a que el estudiante es capaz de relacionar diferentes esquemas los cuales se pueden realizar en la mente del individuo, dándose en los siguientes niveles de reflexión:

- El nivel *Intra*, alude a la individualización de las acciones, procesos, objeto y esquemas, sin establecer relación entre ellas.
- El nivel *Inter* el estudiante comienza a establecer relaciones y diferencias entre los esquemas, concebidos en la mente del individuo.
- El nivel *Trans se da* cuando el sujeto logra la coherencia del *esquema*, es decir, se forma una estructura subyacente aún más compleja en base a las encontradas en el anterior nivel. .

La metodología de trabajo empleada en la investigación contempla en una primera etapa realizar una revisión bibliográfica y epistemológica del concepto función lineal, la que es tomada en cuenta en el diseño de la descomposición genética, junto a las practicas pedagógicas y los conceptos asociados a la función lineal; para luego proponer un instrumento acorde a la descomposición genética que permita dar luces de las construcciones mentales que los estudiantes sordos están realizando al construir el concepto de función lineal. Todo lo anterior se realiza siguiendo las etapas propuestas por el ciclo de investigación de la teoría APOE.

El ciclo de investigación de la teoría APOE considera un análisis teórico, un diseño y aplicación de instrumentos, y un análisis y verificación de los datos; existiendo así una dialéctica que permite el replanteamiento del análisis teórico, a través del refinamiento de la descomposición genética diseñada. Lo cual puede ser representado por el siguiente diagrama:

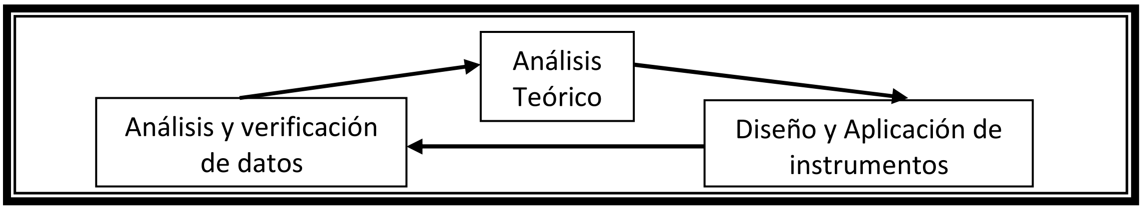



**Figura 1: Ciclo de Investigación (Asiala et al., 1996)**

## ***Análisis teórico***

Para este análisis se tomaron en cuenta la experiencia de los investigadores en relación a la función lineal, la recopilación de datos del objeto matemático -la función lineal-, la revisión epistemológica, y el análisis de textos. Todos ellos dando luces de las construcciones mentales que estarán involucrados en la descomposición genética hipotética. En la descomposición genética se evidencian las acciones y los procesos de los conceptos involucrados en la investigación para ir estructurando la construcción del objeto de estudio, por medio de la coordinación de acciones, procesos y objetos, para llegar a la construcción propuesta en nuestra descomposición genética. La descomposición genética en nuestra investigación juega un muy rol importante no solo por los objetivos propuestos, sino que estamos considerando una construcción previa que no considerara en la teoría APOE, denominada pre-acción y es donde justamente entra en consideración el conocimiento cotidiano, como una etapa previa donde los estudiantes construyen nociones de los conceptos involucrados en la descomposición genética.

## ***Diseño y aplicación de instrumentos***

Se diseñan y aplican instrumentos con el fin de poder documentar cada una de las construcciones mentales dispuestas en nuestra descomposición genética. Cabe aclarar que es la totalidad del instrumento el que da cuenta de nuestra descomposición genética.

## ***Análisis y verificación de datos***

Los datos recogidos en la etapa anterior, permiten ver la viabilidad de la descomposición genética hipotética propuesta, o bien proveen antecedentes para una reformulación de la descomposición genética, es decir su refinamiento, obteniendo así una descomposición genética más viable como resultado de la aplicación completa de este ciclo.

## ***Prerrequisitos y articulación del conocimiento cotidiano y la teoría APOE***

Hay algunos prerrequisitos de nociones matemáticas que considerados esenciales para que los estudiantes sordos comiencen el aprendizaje de la función lineal en el nivel de enseñanza considerado en esta investigación:

- Comprender la correspondencia entre dos conjuntos, estableciendo relaciones entre ellos.
- Comprender algunas nociones básicas de conjunto; es decir, algunas operaciones con subconjuntos y su notación, y la utilización de la idea de pertenencia y labor desempeñada para establecer relaciones entre dos conjuntos.
- Conocer y aplicar adecuadamente las propiedades de función, interpretándola desde sus interpretaciones y usos.
- Familiarizarse con manipulaciones algebraicas básicas, incluyendo manipulación de expresiones polinomiales de primer grado.
- Comprender el significado de implicaciones falsas y verdaderas, así como de recíprocas de implicaciones y de equivalencias.
- Comprender el concepto de función en un trabajo de la vida real y se capaz de esbozar gráficos de algunas de ellas, como, por ejemplo, de las funciones lineales.

Para indagar con profundidad en los prerrequisitos mencionados anteriormente en nuestra población de estudio, es necesario agregar otra construcción mental denominada **pre-acción**, pues este tipo de construcciones no están propuestas ni definidas en la teoría APOE.

Un estudiante sordo realiza una pre-acción cuando en sus argumentaciones emplea manipulaciones aleatorias, transformando conceptos relacionados con la función lineal a la vida cotidiana. Por ejemplo trata de abordar la noción de función de la siguiente forma: *para el alumnado sordo la palabra "función" está asociada al rol que uno desempeña o al trabajo a desarrollar, por ello se propone un trabajo desde el significado de los alumnos adecuando la matemática en su contexto y desde este, trabajar el concepto matemático para que este adquiera el significado adecuado, con sus propiedades y que este no sea impuesto por el docente o por la propia matemática.*

El conocimiento cotidiano nos permitirá que los estudiantes sordos tengan las instancias previas de indagación y experimentación como se menciono anteriormente, permitiendo que aparezcan la señas desde la matemática, la idea es dar sentido a través del conocimiento cotidiano que poseen nuestros estudiantes a lo matemático.

La teoría APOE al considerar que "*El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social*" no contradice el hecho de agregar otra construcción mental que estamos llamando "preacción", la cual nos permitirá explicar y documentar de mejor manera la construcción del concepto de función lineal, desde el conocimiento cotidiano del sordo al conocimiento matemático; para así avanzar de mejor manera hacia la construcción de un camino viable que modele cómo los estudiantes sordos construyen el concepto de función lineal.

## 5. Descomposición genética hipotética

El siguiente diagrama (ver figura 2) presenta los conceptos matemáticos asociados al estudio en color azul y, en color rojo y pintados en su interior en celeste se muestran aquellas prácticas cotidianas con las cuales se trabajaran las primeras nociones de estos conceptos. Esta descomposición genética presenta 4 ejes fundamentales que están al centro de la descomposición genética, estos son: variable, relación, función, y función lineal.

***Descripción de las construcciones mentales***

Pese a que la teoría APOE tal como se señalo anteriormente deriva su nombre de las construcciones mentales que se desarrollan en ella (acción – proceso – objeto – esquema), por el objetivo de nuestra investigación se consideraran solo las construcciones acción, proceso y objeto. Además como el universo de los estudiante que son parte de esta investigación presentan déficit auditivo consideramos que es necesaria una construcción previa y no considerada en la teoría APOE, la cual trata preacciones, donde se consideraran el trabajo previo –desde el conocimiento cotidiano de los estudiantes sordos– para tratar de lograr nociones del concepto, y así asociar prácticas de los estudiantes a los conceptos, dando la experiencia previa que a este tipo de estudiantes por su condición auditiva les falta; tal como queda afirmado en la investigación de Serrano (1995) les falta la parte experimental. Además si a esto le agregamos la dificultad de no tener señas propias y especificas de los conceptos asociados, la cuestión de alcanzar la construcción de un determinado concepto matemático para esta población empeora. Las construcciones mentales, según los pilares que hemos definido en la descomposición genética serían:

*Preacción:* Un estudiante posee una concepción de preacción cuando se queda en el trabajo contextualizado, logra asociar pero sin distinguir las nociones de los conceptos asociados a las actividades realizadas. Un estudiante realiza una preacción:

- De relación, si el alumno es capaz de establecer relaciones entre conjuntos desde lo cotidiano, con la idea de pertenecía asociada.
- De variable, si reconoce el concepto de variación de de variables pero no distingue si este tipo de variable dependiente o independiente.
- De función, si asocia el concepto de función a trabajo (según contexto) y resuelve ejemplos prácticos como asociar la labor realizada y por quien la realizo, enlazando ambos en el diagrama.

*Acción:* Un estudiante realiza una concepción acción cuando es capaz de a partir de prácticas asociadas e identificar nociones de los conceptos asociados y concebir estos desde la matemática. Un estudiante realiza una acción cuando es capaz de pasar del trabajo práctico cotidiano a trabajar conceptos desde la matemática.

- De relación, si reconoce pares ordenados en los diagramas presentados
- De variable, reconoce variables, sin establecer la relación entre ellas.
- De función, si el alumno reconoce la relación funcional en conjuntos no numerables.
- Función lineal, si reconoce la gráfica, la pendiente sin asociar si es creciente o decreciente o valora expresión algebraica que determina la función lineal.

*Proceso:* Un estudiante percibe el proceso que engloba diferentes nociones asociadas, es capaz de realizar trabajo con conjuntos no numerables. Reconocer variables y asociarlas, determinar la grafica de la función lineal y describir un análisis de esta. Un estudiante posee una concepción proceso:

- De variable, si reconoce y establece la relación de dependencia entre las variables.
- De función, si es capaz de argumentar el porque es una función alejado del vocabulario asociado del cotidiano.
- De función lineal, si reconoce la grafica de la función lineal y argumenta ello, a partir de la valoración determina la grafica de la función lineal y decide si esta es creciente o decreciente indicando el signo de la pendiente (m).

*Objeto*: Un estudiante tiene una concepción objeto cuando establece relaciones o funciones entre las variables, trabajando con conjuntos no numerables, establece el tipo de función y su grafica. O bien a partir del análisis de la grafica dada este determine la función asociada. Un estudiante posee una concepción objeto:

- De variable, si a partir de la relación de las variables es capaz de establecer la relación que se establece entre ellas.
- De función lineal, si a partir de datos obtenidos desde la grafica es capaz de establecer la relación funcional.

El ciclo de investigación de la teoría APOE considera análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de datos, existiendo una dialéctica que permite el replanteamiento del análisis teórico, siendo esta el refinamiento de la descomposición genética más acabada.

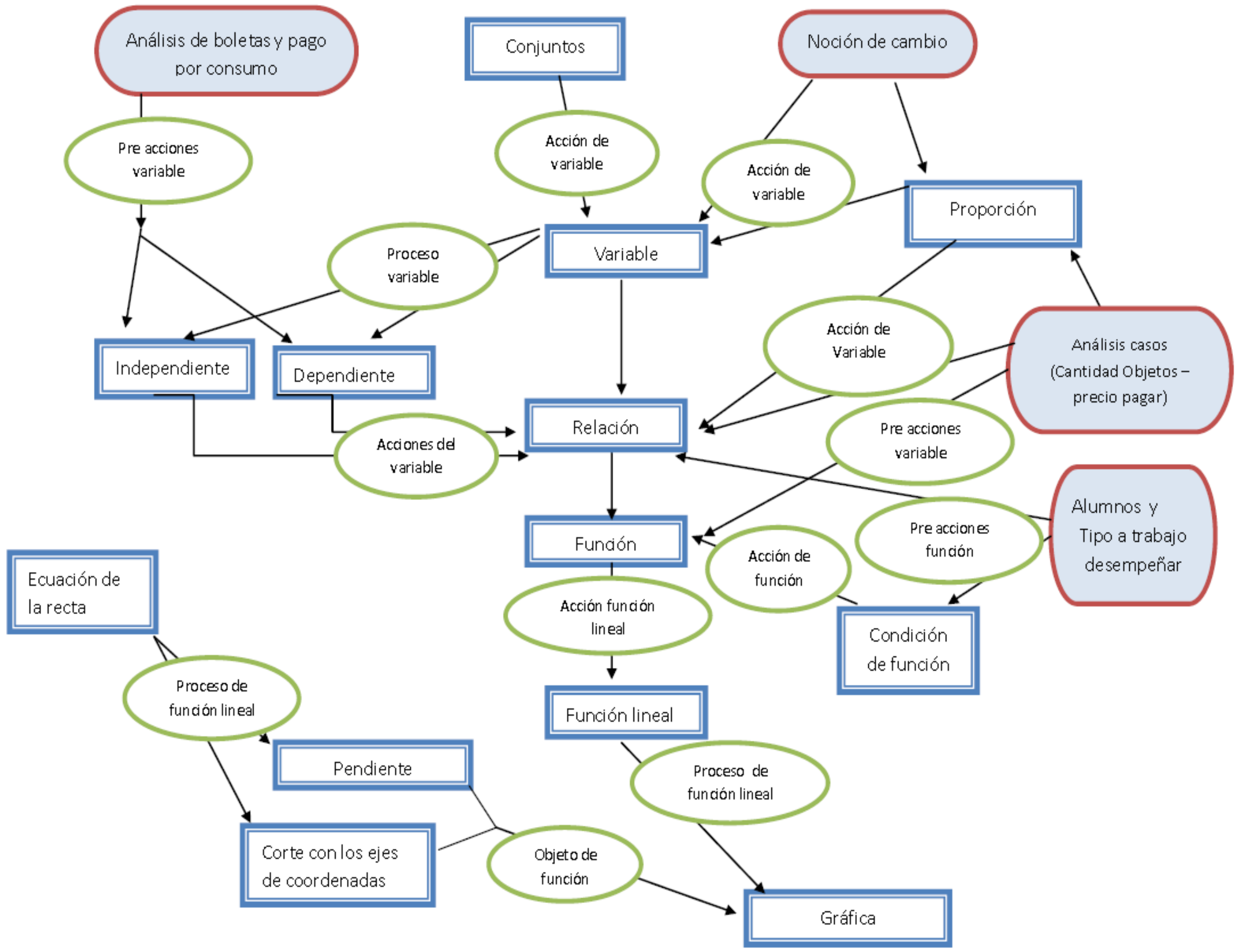



**Figura 2: Análisis descomposición genética hipotética.**

## 6. Diseño y aplicación de instrumentos

Se diseño un cuestionario de 14 preguntas con el fin de documentar o refinar nuestra descomposición propuesta, en el cuestionario se consideraron los 4 ejes antes mencionados, considerando desde el conocimiento cotidiano al conocimiento matemático. El instrumento se aplicó a un grupo de alumnos del Centro de Estudios y Capacitación para Sordos de Valparaíso (CECASOV), en la dos etapas; la primera de ella se aplicó a un grupo de 4 estudiantes, 3 de ellos pertenecientes al nivel de tercero medio, los que serán identificados por E1, E2, E3 y uno de cuarto año de enseñanza media identificado por E4. Todos ellos han trabajado el concepto de función lineal de forma previa; en esta primera etapa se aplicó la parte del cuestionario relativo a:

- Relaciones, con preguntas relativas establecer relaciones entre diagramas sagitales.
- Reconocimiento de Variables, a través del análisis de situaciones los alumnos analizan variables y su dependencia.
- Función, los alumnos desde conocimiento cotidiano o conocimiento matemático establecen la relación funcional y en especifico la función lineal.

El cuestionario fue tomado en un grupo de 2 estudiantes (E1 y E2) pero sin interacción entre los alumnos participantes y 2 individuales (E3 y E4) en tres sesiones y en diferentes días.

La segunda parte relativa a función lineal, fue aplicada de forma grupal solo a dos estudiantes, uno de tercero medio y uno de cuarto medio (E1 y E4) sin tener interacción entre los estudiantes, por inasistencia del resto de los estudiantes, teniendo ambos alumnos excelente rendimiento en matemática y también en el resto de las asignaturas. A estos dos estudiantes se les aplicó la parte dos del cuestionario relativa a función lineal. Considerando lo anterior podemos considerar que la investigación tiene un carácter de cualitativo, siendo un análisis de casos, válido para la realidad del centro de estudios. En cuanto a la realidad académica de los estudiantes informantes, todos los estudiantes de tercero medio presentan hipoacusia profunda, con muy poca oralización y el alumno de cuarto medio presenta restos de audición con un alto nivel de oralización.

Todas las sesiones –5 En total– fueron filmadas y fotografiadas por lo que se cuenta con el respaldo de las entrevistas realizadas, estas serán de gran importancia en el análisis de los resultados ya que uno de los alumnos de tercero medio E2 no tiene un amplio nivel de vocabulario ni comprensión lectora, por lo que se tuvo que explicar cada una de las preguntas en señas y como consecuencia de ello E2 explicó de forma verbal más de lo que contesto de forma explícita en el cuestionario, lo cual quedo como evidencia en el video grabado de la sesión.

Una vez aplicado el cuestionario, se procederá a analizar los datos obtenidos que pondrá en evidencia la validez de la descomposición genética hipotética presentada, con ello se recopilarán evidencias de las construcciones mentales de los alumnos y de las prácticas pedagógicas asociadas a los conceptos que ayudan a los alumnos adquirir nociones de estos. Esto nos permitirá visualizar si los alumnos sordos son capaces de despegar de estas prácticas cotidianas asociadas o se quedan en las nociones del concepto.

*Análisis y verificación de datos*

Según el análisis de los datos obtenidos podemos señalar que los alumnos informantes en lo general logran apropiarse de las nociones previas de los conceptos trabajadas desde un contexto cotidiano, definidas en las preacciones de nuestro trabajo, tal como se ilustra a continuación según la respuesta de E1:

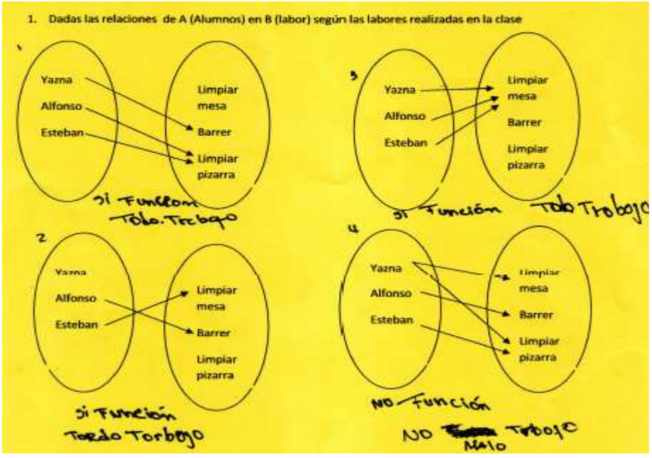



**Figura 3: Respuesta del estudiante E1, relación funcional**

En la figura anterior, el estudiante E1 señala que la relación establecida no es una función ya que Yazna no tiene imagen, lo que él señala escribiendo que es floja, con un lenguaje cotidiano asociado al trabajo preliminar propuesto. Por otro lado el alumno aun trata la función como trabajo, usando ambas palabras para designar si las relaciones son función. Esto nos muestra que no hay un lenguaje claro y específico de la matemática, pero en relación a los demás resultados obtenidos comienza haber una evolución del concepto, donde ya se empieza a asociar al concepto de trabajo uno propio desde la matemática, como lo es función, al establecer la relación funcional entre conjuntos. Este alumno designado por E2 en la mayoría de las respuestas presento dificultad para entregar su respuesta escrita, ya que en señas no tenía problemas de justificación, por lo que en el extenso están transcritos los diálogos con este alumno desde la filmación, para complementar sus respuestas y así poder determinar sus construcciones mentales. A modo de evidencia se puede ver la figura.


**Figura 4: Respuesta estudiante E2.**

También la recolección de datos nos permite dar cuenta de la falencia de vocabulario y de lenguaje en los alumnos, esto se evidencia en la comprensión del nombre de los docentes del centro (conjunto A de la imagen 3) conocidos por los alumnos y que son reconocidos al señalar el apodo en señas de estos. Una vez aclarado esto, el alumno E1 puede corregir su ejercicio, ver figura 5:


**Figura 5: Respuesta del alumno E2.**

En general el grupo de estudiantes a los cuales se les aplicó el instrumento logra concepción pre acción y acción de los 4 pilares declarados: relación, relación funcional, función y función lineal; solo 1 de los alumnos logra la concepción objeto del concepto función lineal alejado del vocabulario del cotidiano. Este es el caso del alumno E4, el cuál logra determinar que la grafica es creciente, determinar los puntos que pertenecen a la función, calcular su pendiente en base a los pares de puntos determinados, reconoce la expresión que determina la función lineal en base a lo calculado, el alumno presenta dificultades en el cálculo de la pendiente al hacer la diferencias de x e y, no considera el signo al restar pero como en ambos es negativo definitivamente no afecta su cálculo, tal como muestra la figura 6, este alumno cabe señalar que es hipoacusico por ende tiene un vocabulario mayor al resto de sus compañeros.

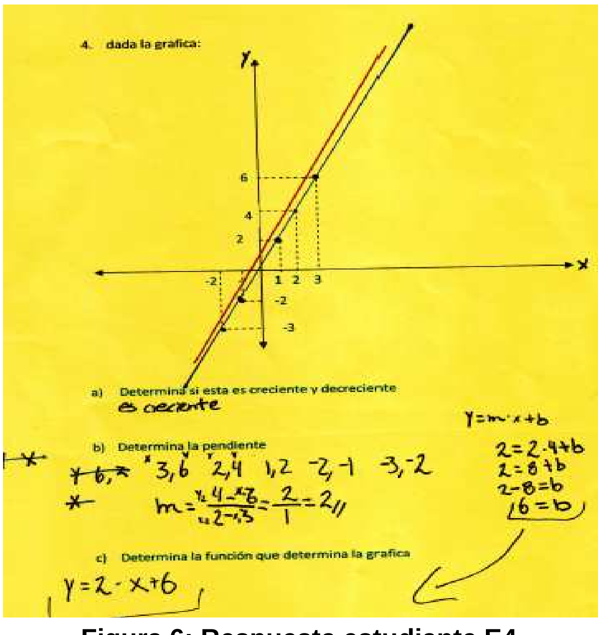



**Figura 6: Respuesta estudiante E4.**

A la luz de los resultados obtenidos, podemos decir que los alumnos por lo general se les hace mas sencillo les acomoda el trabajo desde el conocimiento cotidiano, no presentando dificultades en su resolución, más aún si se trabaja con conjuntos numerables, ya que de cierta forma esto lo hace más tangible para ellos y menos abstracto al asociar situaciones que para ellos le son cotidianas. Al hacer evolucionar el concepto alejándose del conocimiento cotidiano y acercándose desde la matemática, solo dos de ellos logran alejarse del vocabulario que permitió trabajar las primeras nociones de los conceptos y que permitían que a los estudiantes les sea significativo según su realidad. Pero no logran desarrollar un trabajo desde un vocabulario técnico matemático; además no olvidemos que todo esto esta asociado a la falencia de señas en el área de la matemática.

## 7. Conclusiones y reflexiones

### *En relación a las construcciones mentales*

Con respecto a las construcciones mentales que los alumnos poseen en relación a la función lineal, podemos evidenciar que el paso del conocimiento cotidiano al conocimiento matemático y la transición que se evidencia entre estos conocimientos, es una ruta para los alumnos sordos mucho más efectiva para llegar a construir conceptos matemáticos. Les permite un trabajo no tan abstracto con situaciones que son vividas por ellos o bien cosas que ellos pueden realiar para comprobar su veracidad, como por ejemplo el tratar de hacer dos labores a la vez como lo es limpiar la pizarra y barrer lo que implicara que ninguna de las dos “funciones” asociadas sean un trabajo que realice bien, por lo tanto en el ámbito funcional representando dichas situaciones con diagramas sagitales lo lleve a ver que matemáticamente esta tampoco sea función, o bien que uno de los alumnos no desempeñe labores o “funciones” pese a que todo el resto lo haga y se marque por ser un “flojo” lo que implicara que en el diagrama sagital uno de los elementos del dominio no tenga imagen implicara que tampoco sea función, ya que hay un alumno que no desempeña función.

Para esta investigación trabajar los conceptos involucrados en la descomposición genética desde lo cotidiano permitió a los alumnos tener nociones significativas de los conceptos involucrados como lo son: variables, relación, relación funcional. Pudiendo con ello asociar palabras desde su vocabulario como lo es “ser flojo” o “trabajo” asociados al concepto de función, para así despegar de este vocabulario y el conocimiento cotidiano de preacciones a otras construcciones mentales más elaboradas como acciones o procesos.

Con respecto a esto último los alumnos presentan problemas al realizar trabajo algebraico, relacionar las variables a través de una igualdad, determinando la ecuación de la recta asociada a la función lineal, presentando problemas de tipo calculistico ya sea al operar números o bien reducir expresiones algebraicas, siendo estas últimas las que presentan mayor dificultad, presentando incluso una estructura distinta a la comúnmente usamos que es coeficiente numérico y factor literal, ellos pueden usar sin mayor inconveniente factor literal-coeficiente numérico como por ejemplo 5x o x5. Con ello no se señala que lo anterior este errado ya que la multiplicación es conmutativa en los números reales.

Solo un alumno presenta una construcción objeto de función lineal, y escapándose completamente del vocabulario del cotidiano, trabajando desde la matemática, cabe señalar además que no es un dato menor, ya que este estudiante es el único alumno hipoacusico, teniendo mayor vocabulario escrito y oral respecto al resto de los estudiantes participantes en la investigación, lo cual influye en la forma de entregar sus respuestas.

Creemos que el haber considerado estos dos referentes teóricos –APOE y cotidiano– en la investigación nos permite evidenciar y responder a nuestra pregunta de investigación planteada inicialmente, de cómo las personas sordas logran el conocimiento matemático en especifico la función lineal, ya que al considerar el conocimiento cotidiano hace la matemática cercana y contingente a la realidad de los estudiantes, permitiendo crear nociones de los conceptos y por sobre todo permitir que aparezcan las primeras señas matemáticas de los conceptos trabajados, que surgen desde los propios alumnos y no impuestas desde la matemática y por la o el docente a cargo.

### *Con respecto al lenguaje*

Los resultados obtenidos en esta investigación ratifican también los obtenidos por Van Lamoen (2011), que es sumamente necesario trabajar no solo desde el subsector del lenguaje el vocabulario matemático, sino que desde la matemática, ya que juega un rol fundamental para poder expresar de mejor maneras respuestas, favorecer la comprensión lectora matemática, y sobre todo para soslayar la dificultad que se mostró en el instrumento al tratar de entender lo que se pedía en las preguntas, ya que al ser explicado en señas por una de las investigadoras el alumno comprende que es lo que se pedía resolver, siendo este no un obstáculo desde la matemática sino más bien desde el lenguaje.

Siendo este uno de las principales diferencias que presentaría este tipo de alumnado con respecto a sus pares oyentes, consideramos que este punto es fundamental en el aprendizaje de cualquier persona ya que en una primera instancia es lo que nos permite comunicarnos con otros, expresarnos y comprender nuestro entorno.

Si fuésemos más allá, la comunicación escrita y oral es la que ha permitido el traspaso de generación en generación de la información, tal como se evidencia en la revisión epistemológica del concepto función y como este fue surgiendo y evolucionando con el paso de los años. En este sentido el avanzar en lo comunicacional y en las señas especificas de las ciencias y en particular de las nociones matemáticas, permitirá que los alumnos con déficit auditivo traspasen el conocimiento adquirido de generación en generación dentro de la cultura sorda, incluyendo las señas que surjan desde la matemática. Respetando su forma de expresión y diferencias lingüísticas las cuales no utilizan conectivos y tienen un sentido diferente en relación a como un oyente expresaría lo mismo, un oyente al preguntar “tú estás bien”, un sordo lo haría “tu bien”.

### *Con respecto a la didáctica*

Una vez culminado el análisis de las construcciones mentales de los estudiantes, podemos apreciar que el trabajo desde el conocimiento cotidiano de la matemática, hace más significativos los conceptos, permitiendo adquirir nociones más evolucionadas de los conceptos. Particularmente, podemos señalar que el trabajo relativo a la función lineal necesita un trabajo previo, fuerte y significativo en lo cotidiano, para que los estudiantes sordos alcancen las construcciones mentales dispuestas en las descomposición genética.

Esto implica realizar un trabajo didáctico previo al trabajo de los conceptos desde la matemática y también posterior a ello, ya que solo enlazando ambos trabajos los alumnos comprenderán el significado previo realizado y no quedarán como actividades sin algún sentido.

Este enlace de los trabajos permitirá que los alumnos logren finalmente un trabajo desde la matemática y no desde el conocimiento cotidiano, usando vocabulario adecuado a los conceptos trabajados, en nuestra investigación dejar de lado palabras como “trabajo” por “función”, “flojo” por “relación” o “no es función” por “la falta de imagen en elementos del dominio”, entre otros. Para lograr esto se debe hacer un buen enlace entre el trabajo desde el conocimiento cotidiano hacia el conocimiento matemático, siendo majaderos en el uso del lenguaje matemático cuando corresponda.

Estas instancias que permitirán explorar, descubrir y formalizar el conocimiento matemático no debe estar presionada por los tiempos, sino por el contrario dar el tiempo necesario para que nuestros estudiantes adquieran la etapa exploratoria o de experiencia que les falta, respetando los tiempos de dialogo y de donde surgirán las señas y los conceptos que serán la base de las construcciones mentales de los estudiantes.

## *Reflexiones y proyecciones*

De forma particular creemos que aún hay una brecha abismante entre el alumnado sordo y el oyente, las formas en que ellos aprenden matemática son sumamente diferentes, por ello la forma en que debemos abordar los mismos contenidos debe ser totalmente distinta, quizás las actividades propuestas en el cuestionario no tenga sentido para estudiantes oyentes, pero para alumnos sordos la etapa previa es algo fundamental, para que los conceptos adquieran sentidos y se apropien de nociones reales de lo que estamos tratando de enseñar.

El manejo algebraico es un tema a proyectar en futuras investigaciones y que se podría proponer un refinamiento de nuestra descomposición genética, ya que no se alcanza a visualizar bien el trabajo algebraico, más solo al tratar de buscar la función lineal se evidencia la dificultad al sumar letras o valorar fórmulas, quedando esta arista sin abordar en esta investigación y que es parte las proyecciones que proponemos.

Como docentes creemos que aún nos falta mucho por avanzar para poder atender a las necesidades de este tipo de estudiantes, nos falta: la preparación en nuestra formación docente, conocer experiencia en la entrega de los conocimientos matemáticos de forma que estos sean significativos para estos alumnos, conocer más realidades y por sobre todo, hace falta tener más investigaciones de cómo podemos entregar el conocimiento a los estudiantes sordos y hacer una Didáctica para LAS NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES.

## Agradecimientos

Para finalizar, son muchas las cosas que hemos aprendido en el CECASOV, agradecemos la oportunidad que nos dieron este grupo de chicos de poder entrar en su cultura, de intentar comprenderlos, de enseñarnos su mundo que hasta ese instante era desconocido para nosotros, por hacer mirar la enseñanza de la

matemática desde una arista distinta, de desafiar día a día, clase a clase a buscar practicas pedagógicas distintas para tratar de enseñarles y por mostrar que no soy solo nosotros enseñamos en la sala de clases sino que son nuestros estudiantes quienes también nos están enseñando a nosotros.

## Bibliografía

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Ed.s) *Research in Collegiate Mathematics Education*. Vol. 2. Providence, RI: American Mathematical Society. p. 1-32.

Berger, P. y Luckmann, T. (1986). *La construcción social de la realidad.* Buenos Aires: Amorrortu.

Dubisnky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical thiking* (pp 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación Matemática Universitaria. *Educación Matemática*. **8**(3), 25 – 41.

Dubinsky, E. (1997). On Learning Quantification. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,* vol. 16, num. 2/3, pp. 335-362.

Diaz. F y Hernandez G. *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, una interpretación constructivista.* Facultad de psicología, Universidad Autónoma de México. Tercera edición. Editorial Mc Graw Hill.

Dubisnky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical thiking* (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

García-Zatti, M. y Montiel, G., (2008). Resignificando la linealidad en una experiencia de educación a distancia en línea. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias* 3(2), 12-26.

Mazzitelli C. y Aparicio M., (2010). El abordaje del conocimiento cotidiano desde la teoría de las representaciones sociales*. Revista Eureka enseñanza de divulgación de la ciencias*. (pp 636-652).

Mineduc. (2010). Guía 600 Mineduc – Educación especial. Documento disponible en: http://600.mineduc.cl/informacion/info_nive/nive_espe/index.php

Serrano, C. (1995). *Procesos de resolución de problemas aritméticos en el alumnado sordo: aspectos diferenciales respecto al oyente*, Tesis para optar al grado de Doctor, Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Pozo, J. I.; Gómez Crespo, M. A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico.* Madrid. Morata.

Serrano, C. (1995). *Procesos de resolución de problemas aritméticos en el alumnado sordo: aspectos diferenciales respecto al oyente*, Tesis para optar al grado de Doctor, Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Sierpinska, A. (1992). Understanding the notion of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds), *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp 25-58) USA: Mathematical Association of America.

Van Lamoen K. (2011). Construcción *del Concepto Función Cuadrática en Estudiantes Sordos: un estudio bajo las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica.* Tesis para optar al Grado de Magíster en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile.

Vásquez S (2008), El concepto de función a través de la Historia. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* Número 16.

**Giselle Mora Ocares**. Magíster en Didáctica de la Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. de Chile.
profesoragisellemora@hotmail.com.

**Marcela Parraguez González**: Doctora en Matemática Educativa. Profesora del Programa de Doctorado y Magíster en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso de Chile. **.** marcela.parraguez@ucv.cl.

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 107-114
ISSN: 1815-0640

# Relações Institucionais: a noção de sistemas de equações lineares na Escola Básica no Brasil

**Marlene Alves Dias, Tânia Mendonça Campos, Veleida da Silva, Bernard Charlot**

## Resumo

Nesse trabalho apresenta-se uma análise da evolução do ensino da noção de sistemas de duas equações e duas incógnitas para estudantes com idades entre 13 e 14 anos, da escola básica no Brasil, utilizando como referencial teórico central a abordagem de Bosch e Chevallard (1999) e como referencial teórico de apoio a noção de "topos" de Chevallard e Grenier (1997). Finalmente, fazem-se algumas considerações sobre os resultados encontrados, indicando transformações ocorridas no período considerado..

## Abstract

This work presents an analysis of developments in teaching the concept of systems of two equations and two unknowns for students aged between 13 and 14 years, basic education in Brazil, using as its main theoretical reference-point the approach adopted by Bosch and Chevallard (1999) and as a supporting theoretical reference-point the notion of "topos" of Chevallard and Grenier (1997). Finally, there are some considerations about the results, indicating changes occurred over the period.

## Resumen

Este artículo presenta un análisis de la evolución de la enseñanza del concepto de sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas para estudiantes de edades comprendidas entre los 13 y los 14 años, de educación primaria en Brasil, utilizando como una aproximación teórica central a Bosch y Chevallard (1999) y como soporte teórico a la noción de "topos" de Chevallard y Grenier (1997). Por último, hay algunas consideraciones acerca de los resultados, lo que indica cambios ocurridos durantes el período.

## 1. Introdução

A noção de sistemas de equações lineares é uma ferramenta matemática importante tanto para os estudantes do ensino fundamental e secundário como para os do ensino superior, pois além de permitir a modelagem de diversas situações matemáticas das outras ciências e do cotidiano, ela também possibilita a articulação com outras noções matemáticas, em diferentes níveis de ensino. Pode-se citar como exemplo, sua aplicação em questões da engenharia, de álgebra linear e de equações diferenciais.

Certamente, as situações-problema que podem ser exploradas nesses contextos não se reduzem a apenas sistemas lineares – outras noções matemáticas estão em jogo em sua resolução – mas, a escolha desses contextos está relacionada ao fato de que eles permitem uma introdução da noção de sistemas lineares que propicia a discussão das soluções e favorece também a discussão de outras aplicações dessa noção.

Sendo assim, este artigo tem por objetivo melhor compreender as escolhas institucionais nos últimos 50 anos, para o tratamento dessa noção com estudantes brasileiros entre 13 e 14 anos, a fim de verificar como suas diferentes possibilidades são exploradas nessa etapa da escolaridade.

Dessa forma, estuda-se neste trabalho, a relação institucional esperada, levando-se em conta as orientações apresentadas nos documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1991) e Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008), a relação institucional existente em diferentes décadas, via livros didáticos referentes a essas épocas. Ou seja, o estudo aqui proposto tenta compreender a ecologia das diferentes tarefas e técnicas encontradas nas diferentes décadas. Inicia-se, assim, este estudo, a partir do seguinte questionamento:

- Como se aborda a noção de sistema de duas equações lineares e duas incógnitas nas diferentes décadas?
- Quais são os ostensivos e não ostensivos em jogo nas diferentes abordagens, conforme definição de Bosch e Chevallard (1999)?

Na tentativa de responder às questões acima, realizamos um estudo bibliográfico e localizamos algumas pesquisas sobre as noções de equações e inequações, mas não encontramos trabalhos específicos sobre sistemas de equações lineares, em particular, sobre os sistemas de duas equações com duas incógnitas, o que aumentou o nosso interesse por desenvolver uma pesquisa específica sobre essa noção matemática.

## 2. Referencial teórico da pesquisa

O estudo bibliográfico conduziu-nos à abordagem antropológica de Bosch e Chevallard (1999) como referencial teórico central para a análise das relações institucionais esperadas e existentes no ensino da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas para estudantes brasileiros entre 13 e 14 anos. Dedicamo-nos, em particular, ao exame dos ostensivos (qualquer objeto material, principalmente os objetos materiais particulares como os sons, os grafismos e os gestos) e não ostensivos (objetos que, como as idéias, as intuições ou os conceitos, existem institucionalmente) privilegiados, nas diferentes décadas para o ensino dessa noção matemática.

Assim, ao desenvolver este estudo, propusemo-nos a identificar os diferentes tipos de tarefas propostas nas diferentes décadas, as técnicas privilegiadas, destacando as que podem ser utilizadas para justificar o trabalho matemático, ou seja, o discurso tecnológico empregado para auxiliar o estudante a desenvolver as diferentes tarefas que lhe são propostas.

Para compreender melhor que papéis o professor e o estudante devem desempenhar no processo de ensino e aprendizagem, baseamos nosso estudo na noção de “topos” introduzida por Chevallard e Grenier (1997), que permite analisar o que se espera do professor e do estudante, tanto em relação aos conhecimentos prévios necessários quando se introduz um novo conceito matemático, como em relação às atividades e atitudes necessárias para que se desenvolva o trabalho matemático em jogo nas tarefas que competem a cada um deles.

## 3. Metodologia da pesquisa

A pesquisa foi iniciada com um estudo bibliográfico das pesquisas existentes sobre a noção de equações, inequações e sistemas de equações lineares para a escola básica no Brasil e dos trabalhos relacionados ao referencial teórico escolhido. Na sequência foram levantadas as sugestões dos documentos oficiais para o tratamento da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas ressaltando os papéis do professor e do estudante e um conjunto de tarefas que possibilitam o tratamento proposto por esses documentos

Finalmente, construímos uma grade de análise para examinar as regularidades e diferenças existentes nas abordagens da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas apresentadas em oito livros didáticos, publicados e adotados nas décadas escolhidas. Para os livros anteriores ao ano 2000 utilizamos as obras fornecidas por colegas que as preservaram e tentamos verificar as evoluções de um mesmo autor quando possível. As três obras mais recentes foram escolhidas por terem sido avaliadas pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, conforme figura 1 abaixo.

**Figura 1: Os livros analisados**

| Livro – Autores | Ano | Século | PNLD |
|---|---|---|---|
| 1º *Matemática e Realidade*. Iezzi et al. | 2005 | XXI | 2008 |
| 2º *A conquista da Matemática*. Castrucci et al. | 2002 | XXI | 2005 |
| 3º *Matemática e Realidade*. Iezzi et al. | 2000 | XXI | 2006 |
| 4º *Matemática Scipione*. Di Pierro Netto | 1999 | XX | |
| 5º *Matemática Conceitos Operações*. Di Pierro Netto | 1982 | XX | |
| 6º *Matemática na Escola Renovada*. Di Pierro Netto | 1971 | XX | |
| 7º *Matemática Curso Moderno*. Sangiorgi | 1966 | XX | |
| 8º *Curso de Álgebra*. De Farias | 1959 | XX | |

Apresentamos a grade de análise construída para identificar as tarefas e as variáveis das tarefas privilegiadas nas diferentes épocas.

### 3.1. A grade de análise

A grade serve de instrumento para estudar os ostensivos e não ostensivos possíveis na introdução da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, destacando: As *tarefas* associadas a essa noção, (em geral, utilizadas no trabalho com alunos entre 13 e 14 anos) e as *variáveis dessas tarefas*, com ênfase para os ostensivos e não ostensivos possíveis para a sua solução.

Distinguimos as seguintes *tarefas* em função da situação que elas privilegiam:

- situação matemática algébrica transformada em um contexto cotidiano;
- sistemas de equações lineares algébricos explícitos, indicando, ou não, o método a ser aplicado;
- articulação entre a noção de sistema de duas equações lineares e duas incógnitas e a noção de retas no plano $IR^2$;
- situação envolvendo a articulação de diferentes noções matemáticas e que exige a passagem de um ostensivo representado em língua natural para os ostensivos tabela e representação algébrica de equações lineares e sistemas de equações lineares.

Para as **variáveis das tarefas,** considerando a tarefa: "Estudo gráfico das possibilidades de solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas", distinguimos as seguintes variáveis:

- O tipo de situação dada no enunciado da tarefa;
- Os não ostensivos possíveis para o seu desenvolvimento, colocando em evidência aqueles que devem fazer parte dos "topos" do aluno e/ou do professor;
- Os ostensivos possíveis para o desenvolvimento das tarefas.

Escolhemos apresentar nesse artigo os resultados da obra de Scipione Di Pierro Neto, na sequência denominado apenas Scipione, pois se trata do único autor que foi possível analisar três décadas seguidas.

## 4. A análise dos livros didáticos

Para a análise dos livros didáticos selecionados, levamos em conta a relevância atribuída, por cada um dos autores, à noção de sistemas de equações lineares, em relação às outras noções introduzidas na mesma série. Esse trabalho foi apresentado por meio de um organograma segundo modelo proposto por Tavignot (1991) seguido de comentários, conforme o exemplo abaixo para o livro de Scipione (1999).

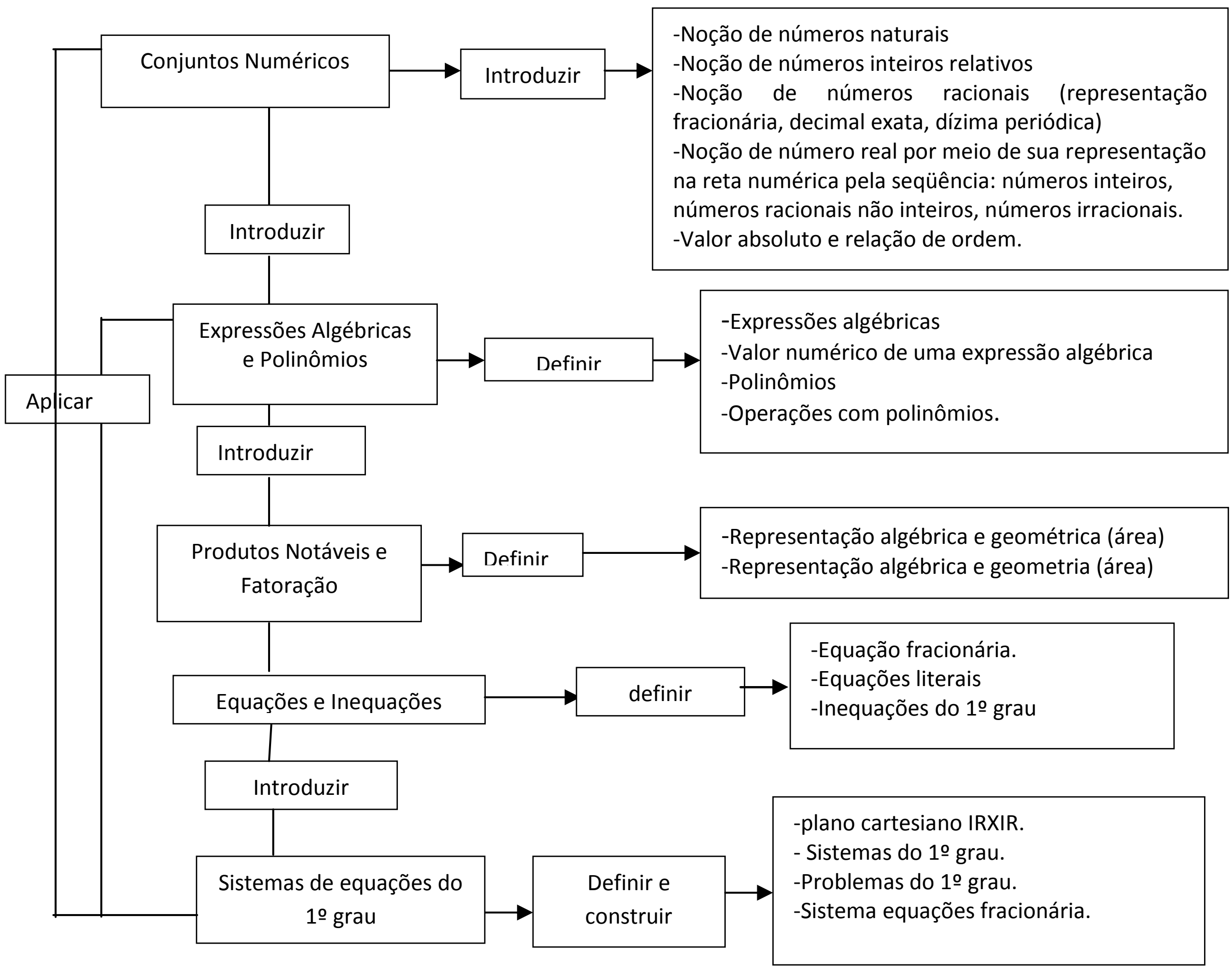



**Figura 2: Organograma da obra de Scipione (1999)**

Em seguida, procuramos identificar o papel do professor e do estudante, com base na noção de "topos", introduzida por Chevallard e Grenier (1997), a saber:

Para a análise da parte que corresponde ao trabalho do professor, examinamos a introdução teórica da noção de sistemas de equações lineares e os exercícios resolvidos ("topos" do professor).

Para a análise da parte que corresponde ao trabalho do estudante, examinamos os exercícios propostos ("topos" do aluno).

### 4.1. Exemplo da análise de um livro: Análise do livro didático de Scipione (1999)

Antes de introduzir a noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, o autor retoma e/ou desenvolve noções de conjuntos numéricos, expressões algébricas e polinômios, produtos notáveis e fatoração, equações e inequações, articulando novos conhecimentos com aqueles construídos anteriormente. Utilizando um discurso tecnológico para justificar essa articulação, o autor propõe exemplos de aplicação da Matemática em situações contextualizadas e, quando possível, mostra como uma noção se desenvolveu historicamente. Dessa forma, o autor segue as indicações da Proposta do Estado de São Paulo (1988) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998).

Para o caso específico da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas o autor propõe o estudo algébrico das possibilidades de solução do sistema, por meio da representação geométrica das retas que correspondem a cada equação no sistema cartesiano ortogonal. Com relação às tarefas propostas aos estudantes, verificou-se que as quatro atividades que envolvem sistemas lineares privilegiam a abordagem algébrica.

## 5. Resultados da análise

Verifica-se que, em geral, as tarefas apresentadas não exigem o cálculo literal (regras e leis que permitem a aplicação da técnica) podendo ser resolvidas apenas por meio do cálculo numérico, isto é, utilizando o cálculo mental, o que denominamos ponto de vista das tentativas, como mostra o seguinte exemplo.

Um menino quer cortar um pedaço de barbante com 30 cm de comprimento em duas partes, de forma que uma dessas partes meça o dobro da outra. Quanto deverá medir cada parte? (São Paulo, p.130, 1991).

| parte 1 | parte 2 | soma | total de barbante |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 2 + 4 | 6 cm |
| 5 | 10 | 5 + 10 | 15cm |
| 10 | 20 | 10+20 | 30cm |

**Figura 3: Ponto de vista das tentativas**

As tarefas "situação matemática transformada em um contexto cotidiano", "sistemas de equações lineares algébricos explícitos pedindo ou não o método a ser aplicado", "estudo gráfico das possibilidades de solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas" correspondem a apenas 39% do total das tarefas propostas aos estudantes. Dessas tarefas, 34% são tarefas de aplicação de um método de solução de sistemas, ou seja, se destinam ao desenvolvimento de técnicas de solução de sistemas.

A tarefa “situação matemática algébrica transformada em um contexto do cotidiano” exige que os estudantes dominem noções de equações e sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas. Em nossa análise, verificamos que esse tipo de atividade corresponde a apenas 4% do trabalho proposto aos estudantes, o que pode dificultar a possibilidade de aplicação desse conhecimento em outros contextos, no futuro.

A evolução do ensino da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas está associada às sugestões de novas abordagens contidas na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1991), nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e na Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008) em virtude do grande número de possibilidades de aplicação de noções e procedimentos relativos aos sistemas lineares. Embora não esteja explícito, esses documentos sugerem que é necessário um discurso tecnológico para justificar as técnicas utilizadas, sem que, para isso, recorra-se à teoria que justifica essas técnicas, ou seja, as estruturas algébricas.

Em relação ao questionamento inicial, foi possível observar que para o ensino da noção de sistemas de equações lineares para estudantes com idades entre 13 e 14 anos, a abordagem proposta, tanto na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1991) como nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), está associada à solução de situações-problema do cotidiano e para um tipo de sistema mais restrito, isto é, o sistema de duas equações e duas incógnitas.

Verificou-se que nos livros didáticos existe um número reduzido de tarefas que permitem a introdução da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas e as escolhas variam em função dos ostensivos e não ostensivos que lhes são associados.

Além disso, com o auxílio da grade de análise e pelo exame dos livros didáticos escolhidos apresentados na figura 3 abaixo, foi possível observar que nas obras atuais considera-se a noção de equação do 1º grau, como conhecimento já construído, quando se introduz a noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas. Essa escolha pode justificar o fato de não se utilizar no processo de ensino e aprendizagem da noção de sistemas de duas equações e duas incógnitas o ponto de vista das tentativas ou o cálculo mental mesmo quando esse é possível. Existe também a preocupação dos autores das três obras recentes, apresentados na figura 1 acima, em articular os quadros numérico, geométrico e algébrico, mesmo quando as noções são introduzidas por meio dos ostensivos que as representam, o que exige a utilização de um discurso tecnológico para justificar as passagens de uma representação à outra, ou a aplicação de conhecimentos prévios, no desenvolvimento das tarefas propostas.

Consideramos que as escolhas estão associadas aos “topos” do professor e do estudante, uma vez que variam em função do tipo e da quantidade de tarefas que ficam a cargo de cada um deles. Dessa forma, parece que nas obras atuais analisadas existe a preocupação de se levar em conta os quatro tipos de tarefas consideradas nesta pesquisa.

## 6. Conclusão

É possível observar que houve um avanço na abordagem sugerida nos livros didáticos, no que se refere à construção da noção de sistemas de equações lineares, quando a ênfase é dada aos sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, pois esse ensino não se limita apenas ao caráter ferramenta para a solução de tarefas da própria Matemática, de outras ciências ou do cotidiano. Ou seja, seu caráter objeto também é destacado pela exploração e discussão das possíveis soluções dos sistemas, tanto algébrica quanto geometricamente.

Observa-se ainda que entre as décadas analisadas, houve um momento (década de 50) em que se estudavam os sistemas de equações lineares de ***m*** equações e ***n*** incógnitas, mas o nível privilegiado era apenas o nível técnico. Essa época é seguida por uma abordagem na qual se privilegia o objeto matemático e não se consideram as situações de aplicação do conhecimento em jogo – abordagem característica da época da Matemática Moderna (década 60).

Pode-se dizer que a partir da década de 70, aqui analisada por meio do livro didático de Scipione (1971) inicia-se uma articulação entre o caráter ferramenta e o caráter objeto dos sistemas de duas equações e duas incógnitas, que vem sendo empregada até o presente.

É importante observar que essa articulação é feita por meio de uma mudança entre os quadros algébrico e geométrico, não exigindo um trabalho fundamentado nas estruturas de grupo aditivo, multiplicativo, abeliano, anel e corpo, como se propunha na época da Matemática Moderna.

## Bibliográfia

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais. (PCN): Matemática* / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). *La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs*. Recherches en didactique des mathématiques 19(1), 77-124.

Castrucci, B. et al. (2002). *A Conquista da Matemática*. Editora FTD, São Paulo. Brasil.

Chevallard, Y. & Grenier, D. (1997). *Le topos de l' éleve*. Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques. Houlgate: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

De Farias, S. (1959) *Curso de Álgebra Ensino Fundamental*. Editora Globo, Rio de Janeiro. Brasil.

Di Pierro Netto, S. (1991) *Matemática Scipione*. Editora Scipione, São Paulo. Brasil.

Di Pierro Netto, S. (1982) *Matemática Conceitos e Operações*. Editora Saraiva, São Paulo. Brasil.

Di Pierro Netto, S. (1971) *Matemática na Escola Renovada*. Editora Saraiva, São Paulo, Brasil.

Iezzi, G. et al. (2000) *Matemática e Realidade*. Editora Atual, São Paulo, Brasil.

Iezzi, G. et al. (2005) *Matemática e Realidade*. Editora Atual, São Paulo, Brasil.

São Paulo (1991). *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: Ensino fundamental*. Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. – São Paulo: SEE/CENP.

São Paulo (2008) *Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo.* Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. – São Paulo: SEE/CENP.

Sangiorgi, O. (1966) *Matemática Curso Moderno*. Editora Moderna, São Paulo, Brasil.

Tavignot, P. (1991) *L'analyse du processus de transposition didactique, l'exemple de la symétrie orthogonal au collège*. Thèse de Doctorat, Paris :Université René Descartes.

**Marlene Alves Dias** é Matemática e Educadora Matemática com doutorado em Didática de disciplinas, opção Matemática, pela Universidade Dennis Diderot – Paris 7 – França em 1998. É professora – pesquisadora do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante do Brasil – UNIBAN. Desenvolve pesquisas, orienta estudantes de mestrado e doutorado e é avaliadora de cursos do INEP. **alvesdias@ig.com.br**.

**Tânia Maria Mendonça Campos** é Matemática com Doutorado em Matemática pela Universidade de Ciências de Languedoc (Montpellier – FR) em 1979. Tem Pós-doc em Matemática pela Universidade de Londres em 1991e em Educação Matemática na Universidade de Oxford em 2007. Atualmente é Pró-reitora de Pós-Graduação e Coordenadora do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo; assessora ad-hoc do CNPq, CAPES e FAPESP e avaliadora institucional do INEP. Tem experiência na coordenação de grandes projetos de formação continuada de professores de matemática financiados pelo PNUD/SEE-SP. **taniammcampos@hotmail.com**.

**Veleida Anahí da Silva** é Doutora em Ciências da Educação pela Universidade de Paris 8 França e Pós-doutorado pela Universidade Federal de Sergipe, graduada em Ensino de Ciências e Matemática. Atualmente é professora Adjunta da Universidade Federal de Sergipe, no Departamento de Educação e no Núcleo de Pós-graduação em Educação e no Núcleo Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, que ela coordena. Fundou e lidera o Grupo de pesquisa Educação e Contemporaneidade - EDUCON. Pesquisa os temas Relação com os saberes quotidianos e científicos, Didática do Ensino de Ciências e Matemática, Formação de professores, Jovens universitários de espaços populares. Publicou livros e capítulo de livros na França e no Brasil. **vcharlot@terra.com.br**.

**Bernard Charlot** é livre docente em Educação pela Universidade de Paris X, Nanterre (1985). Atualmente é Professor Visitante Nacional Senior (bolsa CAPES) na Universidade Federal de Sergipe e membro dos cursos de Pós-Graduação em Educação e em Ensino de Ciências e Matemática da UFS. É também Professor Titular Emérito da Universidade Paris 8 e Professor Afiliado da Universidade do Porto, Portugal. Na UFS, líder do Grupo de pesquisa CNPq Artes, Diversidade e Contemporaneidade e membro do Grupo de pesquisa CNPq Educação e Contemporaneidade (EDUCON). Principal tema de pesquisa nos últimos anos: a relação dos alunos com o saber e a escola. Publicou também sobre Globalização e Educação. Possui numerosos livros e artigos, publicados ou traduzidos em muitos países. Já orientou muitos mestrados, doutorados e supervisou vários pós-doutorados (na França e no Brasil). **bernard.charlot@terra.com.br**.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 115-129
ISSN: 1815-0640

# Dinamización Matemática:
# Teatro matemático infantil

**Margarita V.E. Marín Rodríguez**

## Resumen

Este artículo relata una actividad de innovación con los estudiantes del Grado de Educación Infantil, futuros maestros, utilizando el teatro como recurso dinamizador para enseñar y aprender conceptos matemáticos desde varios puntos de vista: el suyo propio como futuro docente, al analizar y experimentar la bondad del recurso en la materia, y desde los aprendizajes realizados por los niños espectadores en las representaciones realizadas. Igualmente, comentamos las reflexiones provocadas por la actividad en la asignatura de Grado en la docente universitaria.

## Abstract

This article refers to an innovating activity with respect to Kindergarten Education Grade students, the future teachers, making use of the theatre as a dynamic recourse to teach and learn mathematical concepts from different points of view: his own as a future teacher, on analyzing and experiencing the goodness of the recourse in the subject; and from the acts of learning carried out by the children audience present in the performance realized. Likewise we comment the reflections raised by the activity in the Grade subject within the university teaching.

## Resumo

Este artículo relata una actividad de innovación con los estudiantes del Grado de Educación Infantil, futuros maestros, utilizando el teatro como recurso dinamizador para enseñar y aprender conceptos matemáticos desde varios puntos de vista: el suyo propio como futuro docente, al analizar y experimentar la bondad del recurso en la materia; y desde los aprendizajes realizados por los niños espectadores en las representaciones realizadas. Igualmente comentamos las reflexiones provocadas por la actividad en la asignatura de Grado en la docente universitaria.

## 1. Introducción

Es innegable la fascinación que ejerce sobre los pequeños la narración de cuentos y relatos así como las representaciones teatrales o guiñoles apropiados a su edad. Conscientes de este hecho, desde finales de los noventa, venimos utilizando los cuentos como herramienta de aprendizaje matemático en la formación de futuros maestros de Educación Infantil en la Facultad de Educación de la Universidad de Castilla-La Mancha (UCLM en adelante) en Ciudad Real (España) (Marín Rodríguez, 1999, 2007a, 2007b, 2010).

En el presente curso 2011/2012 hemos puesto en práctica la representación teatral de algunos cuentos para infantes de 3 a 6 años, inspirados y estimulados por las actividades de los profesores españoles José Muñoz Santonja e Ismael Roldán Castro (2005). Ellos trabajan con alumnos de Educación Secundaria, nosotros con maestros en formación, pero el recurso de aprendizaje es igual de válido para unos que para otros. La diferencia radica en el nivel de los contenidos matemáticos vehiculados por el texto representado.

Además, este recurso teatral, al igual que la utilización de los cuentos en la enseñanza de los primeros conceptos matemáticos a los párvulos, permite trabajar de forma globalizada totalmente concordante con la educación escolar de tres a seis años, segundo ciclo de Educación Infantil en el actual sistema educativo español.

Este artículo describe la experiencia vivida con los estudiantes de Grado de Maestro en Educación Infantil para hacer una representación teatral con cuentos adaptados para la misma, la organización de los estudiantes convertidos en actores, decoradores y hasta diseñadores de su vestuario, así como los aprendizajes conseguidos en tres niveles: los realizados por los niños asistentes a la representación teatral, los adquiridos por los estudiantes del Grado de Infantil y los efectuados por la propia docente universitaria, autora de este artículo.

## 2. El contexto

La formación inicial del maestro de educación infantil español se desarrolla a lo largo de cuatro cursos académicos del Grado de Maestro en Educación Infantil, cursados en las Facultades de Educación de las diversas universidades españolas. Estos estudios de grado, al igual que el resto de las carreras universitarias después de la adaptación del sistema español al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), se centran en el desarrollo de competencias de los estudiantes. Este aprendizaje basado en competencias conlleva que un estudiante, al terminar su carrera, ha conseguido un amplio bagaje tanto en saber conceptual como saber hacer o procedimental y las actitudes propias de un docente a través de las diversas materias y asignaturas del grado (Villa; Poblete, 2007).

Cada asignatura contribuye a la formación integral en competencias mediante la adquisición de las competencias propias específicas de dicha asignatura y las transversales que se puedan trabajar desde la misma.

Respecto a la formación matemática, el Grado de Maestro de Educación Infantil proporciona dos asignaturas cuatrimestrales de 6 créditos ECTS cada una en segundo y tercero de carrera. Se espera que, a través de un correcto y adecuado aprendizaje realizado en ambas, el futuro maestro de infantil desarrolle un pensamiento lógico, numérico, métrico y geométrico que le faculte para el ejercicio de su profesión.

### 2.1 La asignatura "*Desarrollo del pensamiento lógico y numérico en la Educación Infantil*"

Esta asignatura supone el primer encuentro de los futuros maestros especialistas en Educación Infantil con su formación matemática inicial. Aunque la nota de corte para acceder a esta carrera es alta, un 7.5 sobre 10 en nuestra universidad, la preparación matemática anterior no se corresponde con la misma, ya que la mayoría de los estudiantes han realizado un Bachillerato en modalidad de Ciencias Sociales o Letras huyendo, a propósito en muchos casos, de las matemáticas. De hecho, la pregunta mayoritaria el primer día de clase es: *¿vamos a hacer ecuaciones en esta asignatura?*, sacando a relucir a continuación sus fobias, temores y fracasos matemáticos anteriores.

Por tanto, la primera tarea de esta docente universitaria es cambiar su actitud hacia las matemáticas, mudando rechazo por admiración y temor por deseo de aprender para, posteriormente, poder enseñar de manera adecuada a los chiquitines.

La segunda tarea es desmontar el tópico de que “para enseñar en infantil, no se necesita saber matemáticas”. ¡Grave error en un mundo tan tecnificado como el nuestro, en donde las matemáticas se cuelan por cualquier rendija! Y además por la alta comprensión que exigen los conceptos primarios a desarrollar con los pequeños. Es necesario adquirir pocos conceptos, pero de forma muy clara, reflexionada y precisa. E igualmente los métodos de trabajo adecuados para enseñarlos en el aula con el máximo rendimiento.

Hablando con los estudiantes a través de estos años de docencia hemos llegado a la conclusión de que entre las variables que han provocado su rechazo a las matemáticas hay dos constantes: por una parte el método de aula empleado y por otra el castigo sistemático del error en vez de aprovecharlo como fuente de aprendizaje. Además, la punición de la equivocación conduce a que el estudiante deduzca que en clase lo mejor es estar callado, no participar, no opinar, salvo que estés muy seguro de la corrección de tu aportación.

En consecuencia, en esta asignatura debemos de enseñar, con nuestra propia actuación diaria en el aula universitaria, a enseñar de forma atrayente, fecunda y participativa. Esto nos exige el reto de abandonar la lección magistral como único método de trabajo, utilizar métodos activos y estrategias de aula variopintas y por último, manejar una gran cantidad de recursos mediante los cuales facilitemos el aprendizaje de los conceptos matemáticos a estos niveles.

Con esta asignatura y con la de tercer curso, centrada en el desarrollo del pensamiento métrico y geométrico, esperamos que el estudiante de grado, futuro maestro de infantil, adquiera la competencia matemática en el sentido de la prestigiosa asociación norteamericana National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M., 2004), para la cual dicha competencia está ligada al entendimiento y uso de las matemáticas en la vida diaria y en el trabajo. Y su trabajo de docente implica ayudar a los niños y niñas de 3 a 6 años a comenzar su red matemática intelectual; a fomentar en ellos el gusto y una actitud positiva hacia la materia; a utilizar los procedimientos básicos de clasificar, ordenar, organizar e interpretar; y, por último, a que realicen la génesis de conceptos primarios a partir de la manipulación, reflexión y abstracción.

Para lograrlo el estudiante debe dominar tanto los conceptos matemáticos implicados como los métodos de trabajo y estrategias docentes adecuadas para enseñar-aprender a estas edades.

### 2.2 El teatro como recurso de aprendizaje

Como decíamos en la introducción, la utilización de los recursos literarios para enseñar-aprender matemáticas en la etapa infantil es muy ventajosa por las siguientes razones ya escritas por Marín Rodríguez (1999):

1. El cuento es un medio que facilita la comunicación entre docente - narrador y discente - oyente.
2. Nos permite utilizar la fantasía de los niños, su creatividad e imaginación, a la vez que las potencia.

3. Facilita la unión del significado cognitivo con el afectivo, tan importante a estas edades y tan olvidado en una educación lógica y racional, sobre todo en Matemáticas.
4. Nos permite realizar una educación transversal, uniendo las "frías matemáticas" con los valores difundidos a través del cuento. Estos valores inciden directamente en los sentimientos de las personas facilitando el acceso al conocimiento.
5. Igualmente, procuraremos despertar sentimientos de simpatía en el niño para que comience a construir su estructura lógica-matemática con gusto y entusiasmo.
6. Y por último, la enseñanza de las matemáticas la realizaremos de acuerdo con un elemento usual en el entorno lúdico del niño, que disfrutará aprendiendo matemáticas.

Además, después de utilizarlos a lo largo de estos cursos académicos, podemos constatar que son un magnífico recurso para cautivar la atención y motivación hacia la materia de estos maestros en formación (Marín Rodríguez, 2010).

Por otra parte, las lecturas realizadas sobre la utilización del teatro como recurso lúdico y educativo en la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria coinciden en que (Alpízar Vargas, M. y otros; Jiménez de Cisneros, 2010; Núñez Castaín y otro, 2009; Roldán Castro, 1999):

1. El teatro es el vehículo tradicional para la expresión de emociones e ideas, grabando en la memoria del estudiante-espectador los conceptos vividos en la puesta en escena.
2. Desarrolla la creatividad y la imaginación.
3. Favorece el trabajo en equipo de forma colaborativa.
4. Mejora la autoestima de los alumnos.
5. Facilita la enseñanza y el aprendizaje de la comunicación matemática.
6. Fortalece la compresión de conocimientos, habilidades y destrezas matemáticas.
7. Ayuda a los alumnos a superar las debilidades que se presentan en el área de matemática.
8. Permite a los docentes proporcionar herramientas adecuadas que en un futuro le permitirán al alumno avanzar en su vida y que luego éste aplicará en su comunidad permitiendo mejorarla.
9. Es un recurso que tanto a docentes como a alumnos les favorece la aplicación de las matemáticas con entusiasmo.
10. Beneficia el diagnóstico de los conocimientos básicos que presentan los alumnos en cuanto a los contenidos curriculares.
11. Posibilita el diseño de estrategias para diversos bloques matemáticos centradas en la dramatización.
12. Rompe la rutina de la clase, quedando como actividad memorable de la misma.

13. La elección del texto a representar es clave para poder utilizarlo como medio de motivación y contextualización de los conceptos matemáticos contemplados, o para desarrollar y reforzar los mismos.

Por tanto, después de haber disfrutado de las representaciones teatrales de los profesores Ismael Roldán y Pepe Muñoz y observar las reacciones positivas de los estudiantes asistentes, pensamos que era hora de dar un paso más y pasar a representar los cuentos en forma de pequeñas obras teatrales para disfrute y aprendizaje tanto de mis estudiantes como del público infantil.

## 3. La experiencia

En octubre de 2011, una vez sentadas las bases de la asignatura y creado un clima de clase participativo, lanzamos al grupo de 2º A de grado Maestro Infantil la propuesta de hacer un grupo de teatro que representase, en una función cierre de curso en Navidad, algunos de los cuentos trabajados a lo largo de los diversos temas.

Esta idea de hacer un teatro matemático infantil fue muy bien acogida y hubo veintiún voluntarios que la secundaron de un total de sesenta y cuatro estudiantes. Entre ellos destacaron rápidamente dos, Jesús Carlos Arreaza Fernández y Sonia Cuerva Martín-Nieto, por su experiencia en representaciones teatrales para niños. Jesús Carlos es voluntario en la Asociación Regional de Afectados de Autismo y Otros Trastornos del Desarrollo (AUTRADE) de Ciudad Real y trabaja en la representación de pequeñas piezas teatrales con afectados por el síndrome de Down. Sonia trabajaba en las obras de teatro propuestas por la profesora de Lengua en el Instituto. Estas actividades, y concretamente su papel de Angustias en *La Casa de Bernarda Alba* de Federico García Lorca, provocaron en ella un entusiasmo por el teatro.

Por tácito consenso Jesús Carlos fue elegido director de la representación teatral, lo que conllevaba la organización de los espacios y tiempos de ensayo, la realización de los decorados y la del vestuario apropiado para cada pieza. Su trabajo fue eficaz, callado y esforzado.

Por su parte Sonia, con su ejemplo de actriz iniciada, ayudó a todos los compañeros que así lo solicitaron a mejorar sus respectivas interpretaciones en el escenario.

Los objetivos a conseguir con la experiencia eran dobles: por una parte los propios dirigidos a los estudiantes de Magisterio, y por otra los propios de una actividad matemática para infantil. Podemos enunciarlos de la siguiente manera:

- **Objetivo principal de la actividad:** enseñar/aprender matemáticas utilizando la actividad teatral como recurso mediador del aprendizaje.
- **Objetivos secundarios:** a) divulgar matemáticas; b) aprender a trabajar colaborativamente en grupo; c) aprender técnicas de dramatización como recurso para la enseñanza y aprendizaje matemático en particular; d) poner en práctica los aprendizajes matemáticos realizados a lo largo del curso.

Lógicamente en el objetivo principal están incluidos estudiantes y niños de 3 a 6 años como aprendices matemáticos. Sin embargo, los objetivos secundarios están claramente dirigidos a los maestros en formación.

### 3.1 Selección de los textos teatrales

La única pieza de teatro matemático para infantil propiamente dicha que conocíamos era la obra titulada *El ratón Dindandón* del profesor español J.A. Fernández Bravo (2007). Este texto nos sirvió de guía e inspiración para realizar la adaptación de los cuentos seleccionados a lenguaje teatral. En consonancia con el temario de nuestra asignatura universitaria, elegimos dos cuentos para trabajar los contenidos de razonamiento lógico, más la obra de teatro nombrada y tres para aspectos numéricos. Los describimos brevemente a continuación.

**Razonamiento lógico**

El razonamiento lógico en las mentes infantiles empieza antes de la escuela y se va a ir modificando continuamente por sus experiencias. La escuela debe fomentar la competencia matemática *pensar y razonar* (informe Pisa 2003) que supone la capacidad de explicar lo que uno piensa dando sus razones. Es una destreza importante para el razonamiento formal que comienza en esta etapa.

Entre los recursos que disponemos para fomentarlo destacamos los cuentos. Ejemplos de cuentos por excelencia para lograrlo son los cuentos seriados, encadenados y acumulativos. La mayoría de ellos nos permiten modelizar su narración mediante un patrón con símbolos, consiguiendo con esta acción trabajar las capacidades de abstracción y representación de los niños. Para la puesta en escena elegimos el cuento de título *El pollito Pito*, cuento popular cuya narración sigue un patrón acumulativo. Su texto y realización del patrón pueden consultarse en el artículo de Marín Rodríguez (1999) en la Revista Números. En la foto nº 1 aparecen sus seis personajes de izquierda a derecha: Pollito Pito, Gallina Fina, Gallo Malayo, Pato Zapato, Ganso Garbanzo y Pavo Barbado.

**Foto N° 1**

Otros cuentos facilitan la contextualización de conceptos abstractos como son los contrarios lógicos. Nosotros para ello empleamos *El ruido y el silencio*, cuento que escenifica perfectamente estos dos contrarios mediante un relato de lo sucedido entre el zorro, animal ruidoso y molesto, y sus vecinos amantes del silencio y la paz.

Lo adaptamos a representación teatral a partir del texto encontrado en el archivo pdf de título *Los contrarios de Dodó* en la dirección www.planetalector.com/descargas/fichero/551/, recuperado el 24 de agosto de 2012. Jesús Carlos Arreaza interpretó el papel del zorro, diseñando un disfraz con bolsas de plástico como puede verse en la siguiente foto:

**Foto N° 2**

Por último, la obra *El ratón Dindandón* centra la atención de actores y espectadores en el concepto de verdad lógica. Para ello su autor pone al personaje clave, la hormiga Libiriniga, foto nº 3, en la tesitura de tener que averiguar cuál personaje miente y cuál dice la verdad mediante el razonamiento realizado con el fin de poder asistir a la fiesta de cumpleaños de su primo el ratón en el lugar y día precisos.

**Foto N° 3**

**Razonamiento numérico**

Los niños y niñas a estas tempranas edades empiezan a asimilar el concepto de número a través del conteo y la formación correcta de la serie numérica. Deben ser capaces de reconocer y valorar el número natural en sus dos acepciones: cardinal y ordinal, así como las relaciones entre los números, su significado, lo que les va a permitir sentar una base correcta del cálculo. Podemos encontrar abundantes cuentos y relatos en los que aparecen números a lo largo de la acción y con distintos significados. Es misión nuestra elegir en cada momento el más adecuado para nuestros objetivos. Para nuestra representación teatral elegimos tres, los titulados *Carlota, la mariquita viajera, Los globos* y *Ser quinto.*

El primero fue escrito por la autora de este artículo hace ya algún tiempo para trabajar con los pequeños las distintas descomposiciones de un número como suma de otros inferiores. En este caso, el número elegido fue el seis que cobra vida a partir de seis mariquitas que se reparten entre dos hojas: la vieja y la nueva, pero siempre el número total de mariquitas es 6.

*Los globos* ha sido escrito por la maestra de Educación Infantil Mª del Carmen Sánchez-Medina Rodríguez-Rey, con la que hemos colaborado en varios proyectos de aula. Con este cuento introducimos o reforzamos el número cero mediante restas sucesivas a partir de un número inicial, hasta que no nos queda nada, cero.

*Ser quinto* es un delicado y maravilloso cuento del escritor austriaco Ernst Jandl e ilustrado magníficamente por Norman Junge, para desmitificar entre los pequeños la visita al médico y el miedo que les infunde. Sin embargo, leído con ojos matemáticos, es una formidable herramienta de aprendizaje de los ordinales de quinto a primero, los cardinales de uno a cinco en relación con los anteriores, el inicio de la resta así como, al igual que en los cinco cuentos anteriores, observar y valorar la utilidad de los conceptos matemáticos para regular las acciones cotidianas, como es en este caso la cola de espera en la consulta médica.

La adaptación de los cinco cuentos fue concebida de la misma manera: un narrador que llevaba el hilo conductor de la acción y las frases breves, precisas y concisas que debían decir los personajes, sin olvidar nunca que el objetivo final es el aprendizaje matemático, por lo cual los conceptos debían sobresalir claramente, arropados en ese contexto lúdico, para que los niños los captaran sin impedimentos.

Por esta razón, en algunos cuentos apoyamos la narración con láminas sobre la representación matemática que se iba viviendo. Por ejemplo, en *Carlota, la mariquita viajera* la frase “[…] así que sus alas abrió y voló, voló, y voló y al fin las encontró. Ninguna mariquita quedó y seis se marcharon.” Se ilustra con los carteles 0+6=6 puestos en alto por los ayudantes del narrador según se puede apreciar en la foto nº 4.

Igualmente, el narrador preguntaba a los niños cuántas mariquitas había en la hoja inicial, cuántas se marcharon y cuántas en total, pidiendo a los pequeños que pusieran estos números con sus deditos. Puede observarse la buena participación de una pequeña en la foto nº 5.


Foto N° 4

Foto N° 5

## 3.2 Organización de los ensayos, decoración y vestuarios

Como decíamos en párrafos superiores, por tácito acuerdo se eligió director al estudiante Jesús Carlos Arreaza. Él se encargó de consensuar con sus compañeros los días y horas de ensayo en el salón de actos de la Facultad de Educación, previa solicitud de ocupación del mismo por la profesora responsable, el decorado y el vestuario apropiado para cada cuento.

Al ser un escenario con mobiliario fijo, mesa y sillas para ponentes en actos académicos, y no disponer de telón, decidimos entre todos que la decoración sería fija, con motivos alegres y variados, ilustrativos de los seis cuentos, más los elementos clave en cada uno. Así por ejemplo, se construyeron dos grandes hojas verdes para *Carlota*, un sol y una luna para *El ratón*, etc. En la elaboración de este decorado los estudiantes pusieron en práctica todo lo aprendido en Plástica y Trabajos manuales en cursos anteriores, comprobando por ellos mismos la globalización que facilitaba la actividad teatral.

Cada estudiante-actor se encargaba de su propio vestuario, una vez acordada la idea general entre todos los actores del cuento. De esta manera combinaron trajes viejos de la época del Carnaval con vestiduras de plástico hechas ex profeso. El resultado final visto en la representación fue muy agradable, sugerente y evocador.

Algunas estudiantes contaron con la ayuda materna, como en el caso de Elena Gutiérrez López, cuyo disfraz de hormiga Libiriniga fue realizado por su madre con el magnífico resultado que puede apreciarse en la foto nº 3.

Es importante resaltar que nuestro capital para decorados, vestuario y divulgación impresa ascendía a 200 €, por lo que la creatividad e imaginación desplegadas por estos estudiantes fue fundamental para estirar este dinero y lograr los mejores resultados al menor coste.

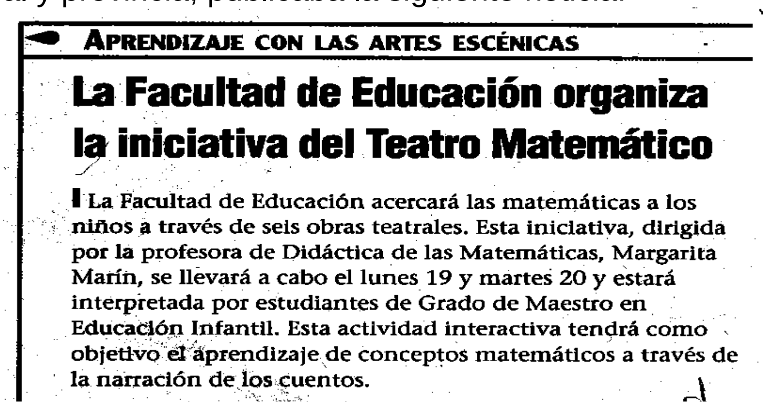
## 3.3 Las representaciones: divulgación de las mismas

Realizamos un total de tres representaciones, dos en diciembre en el Salón de Actos de la Facultad de Educación, los días 19 y 20, y la última el lunes 12 de marzo del presente año en el Salón de Actos del Colegio San José de Ciudad Real, invitados por la profesora Dña. Mª del Mar Solís, quien, después de ver la primera representación con sus hijos, pidió autorización a su centro para repetirla en el mismo por “su alto nivel didáctico y matemático” según sus propias palabras.

Ante el esfuerzo que la actividad estaba suponiendo a este grupo de estudiantes, vimos la necesidad de hacer una divulgación masiva de las dos representaciones en época navideña, para que sus sacrificios se vieran recompensados por los aplausos y agradecimiento de los niños espectadores. Consecuentemente, diseñamos un cartel de la obra y un programa de mano cuyos costes milagrosamente también fueron cubiertos por nuestro capital.

Para anunciar las dos primeras representaciones utilizamos varios medios: la prensa y radio locales, conseguidas gracias al Gabinete de Comunicación de la UCLM, envíos postales y en el portal de la propia Universidad. Puede leerse la referencia en: http://www.uclm.es/gabinete/ver_noticias.asp?id_noticia=8587.

Las notas de prensa fueron escritas por los periodistas correspondientes a partir de las entrevistas realizadas a la docente y a algunos estudiantes. La divulgación en la radio se hizo a través de otra entrevista en un programa en directo, cuyo locutor no salía de su asombro de que se pudiera ligar teatro con matemáticas para el mundo infantil. Así, el viernes 16 de diciembre el periódico *Lanza*, edición para Ciudad Real y provincia, publicaba la siguiente noticia:


APRENDIZAJE CON LAS ARTES ESCÉNICAS

**La Facultad de Educación organiza la iniciativa del Teatro Matemático**

La Facultad de Educación acercará las matemáticas a los niños a través de seis obras teatrales. Esta iniciativa, dirigida por la profesora de Didáctica de las Matemáticas, Margarita Marín, se llevará a cabo el lunes 19 y martes 20 y estará interpretada por estudiantes de Grado de Maestro en Educación Infantil. Esta actividad interactiva tendrá como objetivo el aprendizaje de conceptos matemáticos a través de la narración de los cuentos.

**Foto N° 6**

Sin embargo, el periódico *La Tribuna* fue mucho más explícito en su edición de la noticia el mismo día, publicando hasta los títulos de los cuentos que se iban a representar.

**Foto N° 7**

Por último, elaboramos una carta tipo, personalizada para cada colegio público y privado de la capital, con la invitación a todo el profesorado de Infantil junto a sus alumnos a asistir a las mismas. En el sobre adjuntábamos un cartel y varios programas para conocimiento de los docentes y padres.

En cada representación fuimos aprendiendo cómo subsanar pequeños hechos no previstos de antemano en los ensayos; como es el caso de ser necesaria la presencia de animadoras que dialoguen, entretengan a los pequeños espectadores en las pausas entre cuentos.

Esta labor la realizaron Sonia Cuerva Martín-Nieto en el primer acto y Lorena García-Parrado Iniesta en el segundo. Su tarea fue absolutamente creativa, ya que, a partir de unas preguntas iniciales sobre el cuento que se acababa de representar, debían subrayar e intensificar los conceptos aprendidos con la representación del mismo. Fueron las dos estudiantes que más valoraron el poder de la pregunta para dirigir la reflexión que conduce al aprendizaje, así como la dificultad que encierra el hacerlo adecuadamente. Ambas estudiantes están fotografiadas en la foto nº 7.

### 3.4 Valoración de la experiencia

La observación directa de los estudiantes y sus comentarios en los ensayos y representaciones hacía intuir que la actividad teatral y todo el proceso para lograrla habían sido muy provechosos para ellos. Para constatarlo, una vez dejado pasar el tiempo prudencial para que las emociones experimentadas en las representaciones se asentasen y la cabeza mandase sobre el corazón, se les pidió a los veintiún participantes que contesten un cuestionario formado por las siguientes preguntas:

1. Respecto a las matemáticas, lo que he aprendido ha sido:
2. Respecto al trabajo en equipo, lo que he aprendido ha sido:
3. Respecto a la observación de los pequeños durante la representación, lo que he aprendido ha sido:
4. Otros aprendizajes que he realizado son:
5. Lo fundamental de la actividad que destacaría es:
6. Lo negativo de la actividad que destacaría es:
7. En resumen, mi opinión general es:

Las respuestas abiertas no facilitan la tabulación y análisis de las mismas, pero podemos decir que todas menos dos inciden en que los aprendizajes realizados han sido: a) la ayuda proporcionada por la actividad para empatizar desde la perspectiva del niño/a para enseñar las matemáticas y b) haber aprendido a interpretar los conceptos matemáticos para posteriormente representarlos en la obra teatral.

En cuanto al trabajo en equipo, destacan fundamentalmente los siguientes aprendizajes: a) aumento de la propia autoestima; b) confianza en el trabajo de los otros; c) aceptación de las críticas constructivas y d) la constatación de que todos juntos, pensando y reflexionando, pueden hacer más que uno sólo por muy bueno que sea.

Aunque no está recogido en ninguno de los cuestionarios, añadiríamos que realmente han aprendido a trabajar en equipo de forma colaborativa al advertir que la no realización de la tarea encomendada individualmente lleva al fracaso global, aunque los demás sí hayan cumplido.

En la pregunta tercera hay acuerdo en destacar la sorpresa producida al descubrir la agilidad mental de los niños asistentes que, en varias ocasiones, iban por delante de nosotros contestando e interviniendo en la representación. Debemos señalar que estos estudiantes todavía no han hecho ningún período de prácticas en los colegios, por lo que la visita a los mismos ha sido facultativa hasta el momento y consecuentemente muy pocos tienen la visión de los niños en acción: los afortunados con familiares en el cuerpo docente que tienen acceso libre a sus aulas, o los muy motivados que visitan regularmente su antiguo colegio de Infantil y Primaria para observar y aprender.

Otros dos matizan que han aprendido a no ceñirse al guión estructurado e improvisar según el contexto lo requería. Es lógico después de las anécdotas vividas con la representación del cuento de *Los globos*. Las narramos al final de este epígrafe.

Respecto a la cuarta pregunta, las respuestas se dispersan en una variedad de aprendizajes como son: a) el valor del currículum oculto; b) la necesidad de una buena dicción, clara y limpia para comunicarse con la audiencia; c) el teatro como recurso didáctico; y, por último, d) los valores implícitos en cada cuento.

Igualmente en la quinta hay consenso en destacar el grado de coordinación alcanzado entre estas veintiuna personas, su motivación y su compromiso para sacar adelante la actividad.

Lo negativo también se centra en un mismo hecho recogido en todas las respuestas: las pocas horas de ensayo dedicadas a preparar la representación. Además, un estudiante destaca los celos y las envidias entre ellos al tener papeles más o menos importantes y otro la cabezonería de algunas personas por querer imponer su idea o no aceptar la más votada. Sin embargo, ambos coinciden en que estos aspectos al final se solucionaron con buena voluntad y explicaciones precisas que han tenido que aprender a dar.

Por último, en la séptima pregunta los veintiuno coinciden en lo provechosa que les ha resultado la actividad en general; por su parte otros dos manifiestan que les gustaría seguir ampliando este recurso con otros conceptos matemáticos diferentes a lógica y cálculo; tres convienen en que trabajar con niños tan pequeños no es nada fácil; y, finalmente, Sonia Cuerva sugiere que, en el caso de volver a repetir esta experiencia en la asignatura de 3º de Grado, sean ellos los que escriban el cuento matemático para ser representado, pues de esta manera el aprendizaje sería mucho más amplio: qué conceptos matemáticos vamos a representar, cómo los arropamos por el texto y la acción para su mejor comprensión, qué cuentos entendieron mejor de la representación hecha en 2º curso, qué no entendieron y por qué, etc.

Los aprendizajes realizados por los niños asistentes sólo podemos suponerlos por los comentarios realizados y las respuestas dadas a las animadoras. Lógicamente el grado de comprensión de los conceptos vehiculados por cada cuento fue muy diferente para cada participante, sobre todo teniendo en cuenta el intervalo de edad: 3 a 6 años en las dos primeras y 3 a 8 en la tercera realizada en el colegio. Lo que suponía una sorpresa a los pequeñines de 3, era una rutina ya adquirida para los mayorcitos. Sin embargo, por sus respuestas e intervenciones todos aprendieron algo a lo largo de la representación. Lo lógico sería continuar trabajando en días sucesivos con los conceptos vehiculados en las representaciones al igual que rememorar estas obritas cada vez que haya lugar.

Personalmente catalogaría como decepcionante la tercera representación realizada. Cuando la profesora Solís nos comunicó la asistencia a la misma de todo el segundo ciclo de infantil más el primer ciclo de Primaria, niños de 7 y 8 años, con un total de 375 niños, nos opusimos rotundamente por lo inapropiado, pedagógicamente hablando, de la mezcla de edades del grupo. Todos sabemos el abismo en razonamiento, comprensión y abstracción que separa a un niño de 3 ó 4 años con otro de 7 u 8. Los cuentos estaban buscados para cubrir el apetito intelectual matemático de 3 a 6 años, mientras que los de 7 y 8 tienen estos conceptos ya superados. Al no ser admitida nuestra oposición, sólo podíamos o aceptar el grupo con todas las consecuencias o declinar la invitación realizada. Decidimos representar y todos nuestros temores se cumplieron: fue muy difícil mantener la atención de tanto público diverso; las animadoras tuvieron que derrochar imaginación para poder encauzar las respuestas tan variopintas; los actores tuvieron que improvisar más de lo adecuado y todos tuvimos que dominar nervios y aplacar arrebatos para no recurrir a métodos tradicionales de disciplina en el aula en un contexto tan alejado de la misma.

Para terminar dos anécdotas que nos obligaron a la reflexión más que otras. La primera se produjo a causa del pensamiento concreto de los niños de esta edad. En la representación de *Los globos* una ráfaga de aire se lleva los últimos tres globos de nuestro protagonista, quedándose éste con cero globos. Esta acción va acompañada de una frase en tono compungido en la que éste manifiesta “ya no tengo ninguno”. Sin embargo, en una de las representaciones, una desafortunada ráfaga de aire impulsó dos globos detrás de la mesa, por lo que quedaron ocultos a la audiencia, y el tercero, en vez de seguir la trayectoria de los otros, quedó a los pies del protagonista. Por lo tanto, al escuchar la frase que indica la pérdida total, los mayorcitos, que comprendían perfectamente la acción matemática, clamaron “¡Noooooooo¡, te queda uno, míralo”. Como cada vez se suman más voces ante el hecho concreto de ver este globo en el escenario y no poder imaginar que también había volado, el estudiante protagonista improvisó diciendo “¡me parece que me queda uno!, sí aquí está”, de tal manera que al levantarlo una nueva ráfaga definitivamente se lo llevó y el cuento continuó. Mis estudiantes observaron de forma tangible lo estudiado sobre el pensamiento concreto de los niños y sus consecuencias.

La otra fue durante la representación del cuento de *Carlota, la mariquita viajera* en el colegio. Los niños levantaban sus dedos para poner el número de mariquitas que había en cada hoja, haciendo un total de seis, bajo la desaprobación de una de las maestras asistentes, incapaz de comprender el mensaje matemático del cuento: descomponer 6 de todas las maneras posibles utilizando las dos manos, excepto para 0 y 6 evidentemente, por lo que los niños levantan sucesivamente cinco dedos de la mano izquierda y uno de la derecha (5+1=6), cuatro y dos (4+2=6), tres y tres (3+3=6), dos y cuatro (2+4=6) y, por último, uno y cinco (1+5). Para ella la situación cinco dedos de la izquierda seguidos de uno de la derecha era correcta para describir el número 6, pero ya sólo dos de la izquierda seguidos de los cuatro en la derecha “estaba mal” para escribir este número. Es decir, la rutina no comprensiva estaba por encima de la comprensión del concepto numérico. La propia docente se había convertido en un escollo en el aprendizaje matemático de sus alumnos.

La actuación de esta maestra nos hizo reflexionar sobre lo que el hábito y la repetición de un quehacer sin reflexión podían depararnos a lo largo de nuestra experiencia docente.

## 4. Conclusiones

La actividad teatral fue gratificante para todos los implicados, consiguiéndose fundamentalmente el cambio de actitud de estos estudiantes hacia la asignatura mediante el recurso utilizado. Trabajamos tanto competencias específicas de la asignatura como transversales claves en la formación de un maestro, a saber: a) aprender a trabajar en equipo; b) organizar y animar situaciones de aprendizaje; c) aprender a utilizar recursos de enseñanza en principio alejados de nuestra temática; y d) implicar a los alumnos en su propio aprendizaje.

Personalmente resaltaría la reflexión en el valor de las matemáticas que realizó este grupo en particular y el global de 2º A en general a través de la actividad en sí misma y lo relatado en los cuentos. Estoy muy orgullosa de haber compartido con ellos mi lema y comprobar que les ha calado: “A*prende y enseña Matemáticas. Conseguirás muchas mentes felices*”. Por ello espero que se conviertan en unos docentes amantes de la buena práctica matemática.

Sólo nos queda agradecer a estos estudiantes que aceptaran el reto que les lancé y se pusieran manos a la obra para conseguir con su esfuerzo, tesón y alegría sacar adelante las tres representaciones teatrales a la vez que aprendían matemáticas y enseñaban a los niños.

## Bibliografía

Alpízar Vargas, M. y otros. *El teatro: Una estrategia novedosa para la Enseñanza de la Matemática*. [En línea]. Recuperado el 20 de agosto de 2012 de http://www.cicma.una.ac.cr/CICMA2008/REPOSITORIO/EL%20TEATRO%20UNA%20ESTRATEGIA%20NOVEDOSA%20PARA%20LA%20ENSENANZA%20DE%20LA%20MATEMATICA.pdf.

Biggs, J. (2006). *Calidad del aprendizaje universitario*. Narcea, Madrid. España.

Fernández Bravo, J.A. (2007). *Teatro, lógica y matemática en Educación Infantil. MULTIárea*, *Revista de Didáctica*, 2, 101-116.

Jiménez de Cisneros, C. (2010). *El teatro como recurso para la expresión oral en la clase de E.L.E.* [En línea]. Recuperado el 22 de agosto de 2012 de http://www.slideshare.net/najibadoua/el-teatro-como-recurso-para-la-expresin-oral-en-ele.

Marín Rodríguez, M. (1999). *El valor del cuento en la construcción de conceptos matemáticos. Números*, 39, 27-38.

-- (2007a). *El valor matemático de un cuento. SIGMA*, 31, 11-26.

-- (2007b). *Contar las matemáticas para enseñar mejor. MATEMATICALIA* [En línea], vol. 3, nos 4-5. Recuperado el 20 de agosto de 2012 de http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=433&Itemid=257.

-- (2010). *Retazos literarios para la reflexión matemática. MULTIárea, Revista de Didáctica,* 5, 129-150. Puede consultarse en línea en la dirección: https://ruidera.uclm.es/xmlui/bitstream/handle/10578/1338/fi_1316950332-MARINRODRIGUEZ2010.pdf?sequence=1. Recuperado el 28 de agosto de 2012.

Miguel Díaz, M. de (2006). *Metodologías de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo de competencias*. Alianza Editorial, Madrid. España.

Muñoz Santonja, J; Roldán Castro, I (2005). *Teatro y Matemáticas. Divulgamat* [En línea]. Recuperado el 20 de agosto de 2012 de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=8602:1-marzo-2005-teatro-y-matemcas&catid=69:teatro-y-matemcas&directory=67.

Núñez Castaín, A. y otro (2009). *Matemáticas en el teatro*. [En línea]. Recuperado de http://platea.pntic.mec.es/anunezca/experiencias/experiencias_AN_0809/2C/jaem2009_Matematicas_teatro.doc. el 24 de agosto de 2012.

N.C.T.M. (2004). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. S.A.E.M. THALES, Sevilla. España.

OCDE (2005). *Pisa 2003. Pruebas de Matemáticas y de solución de problemas.* MEC-inecse-SUMA, Madrid. España.

Roldán Castro, I. (1999). *Teatro y matemáticas*. *Números*, 39, 21-26.

Villa, A.; Poblete, M. (2007). *Aprendizaje basado en competencias*. Ediciones Mensajero, Bilbao. España.

**Margarita V.E. Marín Rodríguez:** es profesora Titular de Escuela Universitaria de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Castilla-La Mancha. Aunque su tesis doctoral se centró en la investigación del potencial didáctico del correo electrónico en el aprendizaje matemático, sus últimas investigaciones y publicaciones se han realizado en torno al análisis del valor de los recursos literarios para desarrollar la competencia matemática en alumnos tanto de Infantil, como de Primaria y Secundaria. Entre los proyectos de investigación dirigidos destaca el *Proyecto Kovalevskaya. Una investigación matemático-literaria en el aula de Primaria* que fue galardonado con el 2º Premio Nacional de Innovación Educativa 2005 (España).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 131-137
ISSN: 1815-0640

# El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

## *Creando problemas para educación primaria*

### Problema

*Margarita, por su cumpleaños, necesita comprar cierta cantidad de botellas de jugos, para ello cuenta con S/. 45,00. En la bodega de su barrio cada botella de jugo cuesta S/. 1,50, pero si las compra en la tienda mayorista la docena le cuesta S/. 15,00. ¿En qué tienda le conviene comprar a Margarita las botellas de jugo para su cumpleaños? ¿Por qué?*

---

Este problema fue propuesto por una alumna del octavo ciclo de estudios de la licenciatura en educación primaria, del Instituto Pedagógico Nacional Monterrico (IPNM)[1] de Lima. Fue la respuesta a un pedido más amplio sobre creación de problemas, al inicio de un taller con 39 alumnas, como parte de la investigación que vengo realizando sobre creación de problemas de matemáticas y la importancia de poner énfasis en estimular y desarrollar esta competencia en los profesores de primaria, para que éstos, a su vez, la incentiven a sus alumnos y la usen como una forma de aprendizaje activo. Consideramos tres casos y este problema corresponde al primero, en el que les presenté dos situaciones y les pedí que escojan una de ellas para inventar un problema relacionado con tal situación. A continuación copio parte del texto con el que hice este pedido:

> En cada uno de los siguientes casos, usa creativamente los conocimientos que tienes para **inventar** un problema que contribuya a que los alumnos de primaria aprendan el o los conceptos matemáticos correspondientes. En el primer caso se te presentan dos situaciones concretas y debes escoger **solo una de ellas** para inventar el problema relacionado con tal situación; en el segundo se te indica un tema específico; y en el tercero se te deja amplia libertad para crear el problema, con la única restricción que la respuesta final de tal problema creado sea un número determinado. En todos los casos, debes **escribir resumidamente la solución del problema que inventes.**
>
> 1. Escoge una de las siguientes situaciones para crear un problema relacionado con tal situación
>
>    **Situación 1**: En la bodega del barrio, el precio de cada botella de jugo es de S/. 1,50 y en una tienda mayorista venden el mismo producto sólo por docenas, a S/. 15,00 la docena.

[1] Mi agradecimiento a la gran acogida de autoridades, profesoras y profesores del IPNM y a la entusiasta participación de sus alumnas para apoyar estas exploraciones didácticas.

**Situación 2:** Juan recibe como premio un terreno rectangular y la posibilidad de precisar las dimensiones de tal terreno, con la única condición de tener un perímetro de 56 metros.

De 39 alumnas, 36 escogieron la situación 1 y la mayoría propuso problemas relacionados con la conveniencia de comprar un determinado número de botellas de jugo, teniendo en cuenta la diferencia de precios en la bodega y en la tienda mayorista. A continuación copio tres interesantes problemas en esta línea

**Prob. 1.** En la bodega del barrio, Carlitos compró 12 botellas de jugo a S/. 1,50 cada una. Su amiga María también necesitaba comprar 12 botellas de jugo, pero ella fue a la tienda mayorista, donde la docena de botellas de jugo cuesta S/. 15,00. ¿Quién gastó más? ¿Por qué?

**Prob. 2.** Mario desea comprar 18 botellas de jugo para su fiesta. En la bodega de su casa el precio de cada botella es de S/. 1,50 y en una tienda mayorista venden el mismo producto solo por docenas, a S/. 15,00 la docena. Si Mario desea gastar lo menos posible ¿cuál es la compra que debe realizar?

**Prob. 3.** Pedro compra en la bodega del barrio 7 botellas de jugo para el almuerzo y para la cena compra 5 botellas más. ¿Cuánto hubiera ahorrado si compraba todas las botellas de jugo en la tienda mayorista?

El mismo pedido de crear problemas lo hice también a profesores de primaria en ejercicio, en el distrito de Pomahuaca[2]. De 16 profesores, 7 escogieron la situación 1 y 9 la situación 2. A continuación copio el texto del problema de una de las profesoras, en referencia a la situación 1:

**Prob 4.** Juan compra jugos en una bodega a S/. 15,00 la docena de botellas y por unidad las vende a S/. 1,50 cada botella. ¿Cuánto gana en cada docena de jugos?

También, por iniciativa propia, algunos profesores del IPNM propusieron problemas referidos a la situación 1. Uno de los profesores elaboró con la información dada una pequeña situación familiar motivadora y propuso un problema que a continuación resumo. El texto completo, con su solución, está escaneado en el anexo.

**Prob. 5.** Si usualmente compro botellas de jugo por S/. 1,50 y tengo la posibilidad de comprarlas por docenas a S/. 15,00 la docena, ¿cuántas docenas debo comprar para generarme un ahorro de S/. 18,00?

A continuación me referiré más en detalle al problema propuesto al inicio de este artículo. A la información dada en la situación 1, la autora le ha añadido lo que en economía se denomina una "restricción de presupuesto" (Margarita dispone de S/. 45,00), que es frecuente en la vida diaria. Lo que pide es determinar en qué tienda conviene comprar las botellas de jugo, con la cantidad disponible de dinero. Con la cantidad de dinero que se da como dato en el problema, la solución parece obvia para un adulto; más aún al mencionarse explícitamente una tienda mayorista y al ser

[2] En el número anterior hay mayores referencias sobre la experiencia didáctica en Pomahuaca.

45 un múltiplo de 15, que es el precio en nuevos soles de la docena de botellas en tal tienda. Lo interesante es que la autora del problema pide una justificación de la respuesta y para dar una justificación objetiva, el niño de primaria tendrá que hacer cálculos y comparaciones, como lo hace la autora del problema en su solución del mismo (ver escaneado en anexo).

El enfoque del problema se presta para considerar otros casos de dificultad ligeramente mayor, con cantidades disponibles de dinero que no sean múltiplos de 15 y sin hacer la pregunta como una búsqueda de una de dos alternativas (así da implícitamente la información que comprar en una de las tiendas es más conveniente que comprar en la otra), sino como la búsqueda de una "combinación óptima" de posibilidades. Por ejemplo, considerando una cantidad disponible de 70 nuevos soles. De esta manera, el problema podría entenderse como uno de optimización: el de maximizar la cantidad de botellas que se puede comprar con una cantidad disponible de dinero, teniendo las dos posibilidades descritas. En términos formales, para una ilustración de sus potencialidades, para un nivel superior, podríamos tener el problema

Maximizar $(x + y)$

Sujeto a:

$15x + 18y \leq 70$

$x, y$ enteros no negativos,

donde $x$ e $y$ representan docenas de botellas de jugo a los precios S/.15 y S/. 18 respectivamente (en la bodega, la docena resulta a S/. 18)

La solución puede ilustrarse gráficamente; inclusive brinda la oportunidad de usar software matemático dinámico. Es claro que la solución óptima, en el contexto del problema, será $x = 4$, $y = 0$ (comprar solo 4 docenas en la tienda mayorista) y emplear el dinero sobrante (S/. 10) para comprar 6 botellas en la bodega. Así se compran en total 54 botellas. Es interesante notar que gráficamente se puede ver otras soluciones al problema formal enunciado, en cuanto a número total de docenas (4), pero que no permiten adquirir 54 botellas de jugo en total.

En el problema 2 hay también una situación de optimización, pues en ella, se busca minimizar el gasto para la compra de un determinado número de botellas de jugo, teniendo las dos alternativas. Resulta interesante la creación de problemas de optimización, siendo problemas creados libremente por estudiantes que no han sido orientados a poner énfasis en problemas de optimización desde la primaria. Esto abona a favor de la afirmación de la presencia de muchas situaciones de optimización en la vida diaria y a la existencia de una intuición optimizadora, a la que me he referido en artículos anteriores.

Al analizar cada uno de los problemas propuestos encontraremos las posibilidades que brindan para emplear diversos objetos matemáticos: adiciones, multiplicaciones, divisiones, sustracciones, ecuaciones, inecuaciones, gráficas en el plano, etc. Ciertamente, todo esto sin restringirse a sus potencialidades didácticas para alumnos de primaria sino pensando también en la formación matemática de los profesores y de los futuros profesores de los niños de primaria, como en el análisis que hicimos del problema inicial.

## Comentarios

En la hoja que repartí pidiéndoles los problemas, también había un espacio para que escriban algún comentario libre o simplemente tres palabras relacionadas con la experiencia de crear problemas de matemáticas. Las palabras más frecuentes fueron "creatividad", "interesante", "contexto", "razonamiento", "motivación", "imaginación" y "entretenimiento". Asimismo, todos los comentarios revelan que valoran positivamente la experiencia, nueva para todos. Algunos de ellos son:

> "También se puede utilizar con los niños para que ellos mismos creen sus propios problemas y así se diviertan y comprendan mejor el tema desarrollado"
>
> "Dinámica importante que se debería realizar a diario, como tarea docente"
>
> "Es muy importante, ya que algunas veces no se toma en cuenta el contexto en que vive el niño"

Los seis problemas expuestos – cuatro de futuras profesoras, uno de una profesora de primaria en ejercicio y uno de un formador de formadores – así como las palabras y comentarios en torno a la experiencia, son una muestra clara más de que existe un gran potencial para crear problemas y nos hace ver lo importante que puede resultar para nuestros niños que estimulemos a los profesores su capacidad de crear problemas de matemáticas, para que ellos a su vez la estimulen en sus clases.

Al trabajar creando problemas de matemáticas, es muy importante el análisis de los problemas creados por los alumnos, pues brinda valiosa información sobre su creatividad y la forma en que ellos manejan la información y los conceptos matemáticos en situaciones concretas, lo cual permite hacer ajustes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Todo esto es particularmente importante en los cursos de formación y capacitación de profesores, por el efecto multiplicador a los alumnos, y por ello es útil manejar algunos criterios de análisis, como:

- Manejo de la información
- Consistencia matemática
- Claridad en el texto
- Calidad de la dificultad

Ciertamente, este análisis debe complementarse con el análisis de las correspondientes soluciones de los problemas creados.

En el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (DCN) del Perú, vemos, con agrado, que se considera la actividad creativa de los alumnos en diversas áreas; en particular, en el área de matemáticas para primaria, encontramos párrafos que van en la línea de poner énfasis en la creación de problemas, a los cuales parece que no se le está dando la debida importancia en los planes de formación y capacitación de profesores de primaria y de secundaria:

> “La capacidad para plantear y resolver problemas, dado el carácter integrador de este proceso, posibilita la interacción con las demás áreas curriculares coadyuvando al desarrollo de otras capacidades; asimismo, posibilita la conexión de las ideas matemáticas con intereses y experiencias del estudiante.
>
> El desarrollo de estos procesos exige que los docentes planteen situaciones que constituyan desafíos para cada estudiante, promoviéndolos a observar, organizar datos, analizar, formular hipótesis, reflexionar, experimentar empleando diversos procedimientos, verificar y explicar las estrategias utilizadas al resolver un problema; es decir, valorar tanto los procesos matemáticos como los resultados obtenidos.” (p. 187)

Evidentemente, la capacidad de crear problemas que tengan los profesores, contribuirá fuertemente a estimular y desarrollar la capacidad creativa de sus alumnos. Es tarea de los formadores de los futuros profesores y de los profesores en ejercicio tener planes y propuestas en esta línea. A continuación algunas ideas a tener en cuenta:

- Seleccionar adecuadamente las situaciones sobre las cuales se pedirá crear problemas de matemáticas.
- Crear problemas en grupo.
- Proponer problemas con dificultades graduadas
- Compartir y analizar los problemas creados en torno a una situación dada, desde un punto de vista matemático y didáctico.
- Seleccionar y afinar objetivos para proponer problemas.

## Otros problemas en torno a la situación 1

En las experiencias que he desarrollado, al imaginar una situación o recogerla de la realidad para proponerla, he tenido el cuidado de previamente crear personalmente varios problemas en torno a ella, considerando diversos niveles de dificultad, como una manera de examinar el “potencial didáctico”, tanto de la situación como de los posibles problemas. Así, en torno a la situación 1, considerada en este artículo, con el propósito de suscitar discusión, pensé en el siguiente problema:

> En una bodega venden botellas de jugo a S/. 1,50 cada una y en una tienda mayorista venden las botellas de jugo solo por docenas, a S/. 15,00 cada docena. Si necesito comprar 35 botellas para llevar a una actividad del Colegio y solo tengo la posibilidad de comprarlas en estos lugares ¿cuál es la manera de hacer la compra para gastar lo menos posible?

Experimenté con dos alumnos y en ambos casos, la respuesta fue comprar dos docenas en la tienda y las 11 botellas faltantes en la bodega. Así el gasto total en nuevos soles es de 2x15 + 11x1,50 = 46,50.

Sin embargo, al comprar tres docenas en la tienda mayorista, el gasto total es de 45 nuevos soles, que evidentemente es menor que 46,50. Es verdad que se compra una botella más, pero se gasta menos y se cumple el objetivo de tener las 35 botellas. Esto invita a pensar en la posibilidad de crear problemas similares y a plantearse la pregunta de carácter más general ¿en qué casos se gasta menos comprando más de lo que se necesita? Una interesante ocasión para las conjeturas y para el ensayo y error inteligente.

Un amigo, Jorge Tipe, con gran experiencia creando problemas, ante mi pedido de que proponga un problema en torno a la situación 1, propuso el siguiente:

> El director de un colegio tiene que comprar varias docenas de jugo en botella para un evento que va a organizar. Él ha averiguado que en la bodega cerca del colegio cada botella la venden a S/ 1,50 y que en el mercado mayorista solamente venden los jugos por docena, y la docena cuesta S/ 15,00. Como no dispone de mucho tiempo para la compra, si va al mercado mayorista tendría que ir y regresar en taxi, para lo cual gastaría S/ 8,00 de ida y S/ 8,00 de vuelta. ¿A partir de cuántas docenas le sale más barato ir al mercado mayorista que hacer la compra en la tienda?

Le comenté que problema similar lo había usado para introducir el estudio de las funciones lineales y afines en la universidad y que la intersección de las gráficas de las funciones correspondientes permitía dar fácilmente la respuesta.

Podría ser interesante que el problema planteado por Jorge, los niños de primaria lo resuelvan elaborando un cuadro comparativo con columnas como las siguientes:

| **Número de docenas (*n*)** | **Gasto por compra en la bodega (18*n*)** | **Gasto por compra en el mercado mayorista (15*n* + 16)** |
|---|---|---|
| | | |

Al preguntarle a Jorge cómo había pensado la solución del problema, me dijo que considerando que en cada docena en la tienda mayorista se ahorra S/. 3,00, pero que al haber un gasto fijo de S/. 16,00 por transporte, el número de docenas debe ser tal que supere este gasto fijo, para lo cual se requiere por lo menos 6 docenas. Evidentemente, este razonamiento es el que subyace si se resuelve, para valores enteros de $n$, la inecuación

$$18n > 15\,n + 16.$$

Todo esto muestra una vez más, cómo la actividad de crear problemas lleva a pensar en nuevas situaciones de carácter más general, a entrelazar diversos razonamientos, a pensar en diversas formas de resolver un problema y a practicar inteligentemente el ensayo y error. Evidentemente, es una forma dinámica de enriquecer la formación matemática del docente y de los alumnos.

Las experiencias muestran que crear problemas contribuye a reforzar e interrelacionar lo aprendido, aplicándolo creativamente a situaciones concretas, con una perspectiva propia. Más aún, ayuda a ir tomando conciencia de manera natural que la matemática está en continua expansión, que no todos los problemas están escritos en los libros, ni todos los problemas están resueltos. Crear problemas contribuirá a que el alumno sienta que es posible colaborar a esa continua expansión de la matemática. Estimular esta capacidad, acompañada con la de resolver problemas, puede hacer percibir mejor la belleza de la matemática y su didáctica, y sentir que es posible contribuir a crear "obras de arte" en la matemática.

## Anexo

## Problema inicial

Texto del problema:

Margarita por su cumpleaños necesita comprar cierta cantidad de botellas de jugos; para ello cuenta con S/. 45,00. En la bodega de su barrio cada botella de jugo le sale a S/. 1.50, pero si lo compra en la tienda mayorista la docena le cuesta S/. 15.00 ¿En qué tienda le conviene comprar a Margarita las botellas de jugo para su cumpleaños? ¿Por qué?

Breve solución del problema

Bodega del barrio

C/botella → S/. 1.50

→ S/. 45 ⇒ 30 botellas de jugo

tienda Mayorista

Cada 12 → S/. 15.00

→ S/. 45 ⇒ 36 botellas de jugo

Rpta: Le conviene comprar en la tienda mayorista porque obtiene mayor cantidad de botellas de jugo para su cumpleaños que en la bodega de su barrio.

## Problema 5

Texto del problema:

Miguel Ángel Papá de Rodrigo y Camila de 7 y 8 años respectivamente llega a casa y les pregunta a sus hijos: ¿Desean ir al cine uno de estos días? responden Siiii.– ¡les cuento dijo el papá, al ingresar del trabajo observé un letrero donde decía "OFERTA, OFERTA ¡LA docena de jugos ~~cuesta~~ a solo S/. 15.00" y claro yo les compro una botellita a cada uno que me cuesta S/. 1,50 c/u. Si compro por docena podemos ahorrar me dije y con ello podemos irnos al cine.

~~Breve solución del problema~~ Si compro ¿cuántas docenas tendré que comprar para ahorrar el costo de la entrada al cine? Sabiendo que cada entrada cuesta S/ 6.00.

Resolución

ahorro x docena = S/ 3.00

gasto x docena comprando en la bodega

1,5 x 12 días = S/ 18 –

costo de una docena = S/. 15

ahorro = S/ 3

Rodrigo: 1 doc → 3, 1 doc → 3; ahorro 3 + 3 = 6 soles

Camila: 1 doc → 3, 1 doc → 3; 6 soles

Papa: 1 doc → 3, 1 doc → 3; 6 soles

∴ 6 docenas

El papá tendrá que comprar = 6 docenas

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 139- 151
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

# Blog de aula: la clase sigue en casa

**José María Sorando Muzás**

## Resumen

En este artículo se describe la experiencia de 3 años con un blog de aula en Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria: la motivación inicial, los objetivos, la estructura, el desarrollo y los resultados. En este tiempo, la implicación del alumnado ha ido creciendo hasta configurar el blog como un espacio común de intercamnbio que amplia el aula y la lleva a los hogares. Con propuestas variadas y divertidas, las Matemáticas van perdiendo ese rostro antipático que tantas veces se les atribuye, aparecen como una sucesión de retos interesantes y al alcance de todos, algo por lo que merece la pena esforzarse. El blog además crea lazos de comunicación y consolida una cultura de grupo en torno a las Matemáticas.

## Abstract

This article describes an experience of 3 years with a class blog in Secondary Education Mathematics: the initial motivation, objectives, structure, development and results. During this time, the involvement of the students has grown until it has formed the blog as a common space of exchange that widens the classroom and takes it to their houses. Through varied and fun proposals, Mathematics lose the severe face that is so often attributed, appearing both as a sucession of interesting challenges that is available to everyone, and as something for what it is worth to make an effort. The blog also contributes to create, communication links and develop a group culture around Mathematics.

## Resumo

Este artigo descreve a experiência de 3 anos com un blog em sala de aula em Matemática do Ensino Secundário: a motivaçâo inicial, os objetivos, estrutura, desenvolvimento e resultados. Neste momento, o envolvimento de alunos cresceu para configurar o blog como um espaço comum de intercamnbio que se estende da sala de aula e leva para as casas. Com propostas variadas e divertidas, Matemática estâo perdendo essa cara severa que muitas vezes é atribuída, aparecendo como una sucessao de desafios interessantes e disponíveis para todos. Vale a pena tentar. O blog também consegue criar laços de comunicaçâo e construir uma cultura de grupo em torno de Matemática.

## 1. Introducción

Aclararé, en primer lugar, que no sé mucho de aspectos técnicos informáticos y que tampoco me interesan especialmente. Si llevo adelante un blog de aula es al servicio del hecho educativo. Cada vez que debo satisfacer una nueva necesidad en mis clases de Matemáticas, busco los medios que preciso y entonces progreso en lo técnico, aunque sólo lo necesario. Así que el motor de esta experiencia no ha sido la herramienta informática del blog, sino una dinámica de aula que ha encontrado beneficios en su uso. En coherencia con lo dicho, antes de hablar del blog de aula debo recordar cuál es el contexto sociocultural en que desarrollo mi enseñanza y expresar mi propósito global en educación matemática.

Es un triste lugar común comprobar que las Matemáticas y sus profesores aparecemos como “ogros escolares”, repitiéndose la imagen estereotipada en teleseries, publicidad y comentarios de la calle. Dado que en el imaginario colectivo nuestra materia es el paradigma de la dificultad (para algunos, además, sin sentido), muchos alumnos, después adultos, encuentran en ello la disculpa fácil para caer en la indolencia anumérica. Esa actitud es fomentada con irresponsable desparpajo por “famosos”, y aún políticos, que declaran y airean sin rubor su incompetencia matemática.

Desde esta perspectiva, las Matemáticas serían tan sólo un filtro escolar, algo ajeno a la vida. Quienes así piensan ignoran cuántas veces las Matemáticas se cruzan en su camino y cuánto les podría ayudar saber usarlas: al planificar un viaje; al proyectar un trabajo de bricolage; al decidir la opción más ventajosa entre varias ofertas comerciales o bancarias; al analizar resultados y estrategias en su deporte favorito; para comprender el arte,  etc.

Se trata de una inercia negativa que los profesores debemos vencer, ofreciendo al alumnado unas Matemáticas útiles, interesantes, próximas, participativas y accesibles; aunque no por ello exentas de esfuerzo. Pero, en nuestro contexto social el esfuerzo no se puede presuponer, sino que en todo caso surgirá de la convicción. El empeño empieza por lo tanto con la construcción de una imagen cercana y positiva de las Matemáticas. Aunque demasiadas veces lo ignoremos, la primera batalla educativa se desarrolla en el terreno de la afectividad.

Esa nueva imagen ayuda a establecer un vínculo emocional positivo con lo matemático. Para ello propongo utilizar todo tipo de recursos y uno de los más eficaces es el blog de aula. Así se lo expresé a los alumnos en la primera clase, evitando el “sermón del primer día”, con un videoclip (¡primera sorpresa!), que a su vez fue la primera entrada del blog de 2º ESO (10-09-10): http://mateselaios2.blogspot.com/2010/09/empezamos.html

Pero, además de intentar despertar su interés por la materia al comenzar el curso, hay que recordarles “las reglas del juego”, tanto en lo que se refiere a las normas de convivencia, como a los métodos y criterios de evaluación y recuperación. También las correspondientes presentaciones fueron insertas en el blog (15-09-10): http://mateselaios2.blogspot.com/2010/09/las-reglas-del-juego.html. Desde el principio, el blog refleja lo que está siendo la clase.

## 2. ¿Para qué?

Una gran mayoría de los alumnos navega a diario por Internet. Mediante el blog de aula, también lo hacen extendiendo su actividad matemática más allá del espacio y tiempo escolares. Como decimos en la cabecera del blog: *¡La clase sigue en casa!* Con el blog de aula se pretende:

- Dejar constancia del desarrollo diario de la clase y de sus actividades, facilitando los repasos en casa, el control paterno y el seguimiento por alumnos ausentes por enfermedad.
- Estimular la responsabilidad, participación y cuidado de aspectos formales por parte de los alumnos, ante el compromiso de presentar artículos a sus compañeros.

- Dar cauce al interés de algunos alumnos (¡son más de los que pensamos!) ávidos por conocer más allá de lo que en clase se ofrece.
- Presentar variados recursos (aplicaciones interactivas, videos, fotos, artículos, humor, canciones, etc.) cuando hay dificultades para encajarlos en la clase por limitaciones de infraestructuras, organización escolar o dinámica del grupo.
- Fomentar la capacidad de resolver problemas y, como culminación del proceso, la participación en los concursos matemáticos que cada año se ofrecen (Olimpiada Matemática, Fotografía Matemática, Canguro Matemático y Rally Matemático sin Fronteras, en nuestro caso).
- Contribuir a la creación de una cultura de grupo, con el intercambio de propuestas, ideas y opiniones entre compañeros; valorando siempre positivamente a quien ofrece algo a los demás.
- Adiestrar la "mirada matemática" de los alumnos, mostrándoles la presencia matemática en su mundo próximo.
- Construir en la práctica un vínculo positivo con el conocimiento que excede las obligaciones pautadas.

## 3. ¿Por qué un blog?

Durante varios cursos había intentado ofrecer a los alumnos recursos interesantes y atractivos, complementarios a la clase, unos de producción propia y otros localizados en la red. Para ello hice la web *Matemáticas en tu mundo:* http://catedu.es/matematicas_mundo con numerosos artículos, fotos, videos, textos, curiosidades, etc. que muestran la presencia matemática en los deportes, en la Naturaleza, en la publicidad, en el arte, en el cine, en la prensa, etc. Esta web creció mucho, y lo sigue haciendo, gracias al apoyo y valoración de bastantes compañeros profesores… pero mis alumnos raramente entraban en ella.

Había creado una "gran despensa", tan grande y abarrotada que los alumnos sentían pereza para buscar en sus "estanterías" los productos adecuados a cada tema. Cuando lo hacían, además, eran consumidores pasivos. Era preciso ofrecerles "el plato del día", pequeñas dosis curriculares con recursos adaptados al desarrollo de cada clase y personalizadas al grupo de alumnos. Además, debía abrir vías a su participación. Todo esto lo permite el blog de aula:

- Gracias a su estructura de diario, el profesor puede secuenciar y dosificar los recursos y las actividades siguiendo el día a día de la clase. Cada vez que se accede al blog, tenemos ante nuestros ojos "lo último", sin necesidad de navegar por menús.

- Permite la participación de los alumnos, sea mediante comentarios a las entradas del profesor o publicando entradas propias; en ambos casos, como medida de seguridad, he establecido que sea necesaria mi aprobación como administrador-moderador del blog, antes de cualquier publicación.

- Su alojamiento es gratuito en las plataformas de blogs más populares.

- La tarea informática es mínima, pues la estructura está prefijada y el formato puede ser elegido entre varios predefinidos, de modo que el trabajo del profesor se centra en lo que le es más propio: la pedagogía y la didáctica.

- Permite la publicación e inserción de textos, fotos, videos, presentaciones, formularios y applets, con el apoyo de servicios y redes como Google Docs, Youtube, webs Geogebra, etc.

En resumen, frente a las webs tradicionales, los blogs de aula ofrecen frescura, vivacidad, participación, economía, sencillez y flexibilidad. Otra característica a tener en cuenta es la fugacidad de sus contenidos: al igual que ocurre con la prensa, el seguimiento del día a día pronto posterga a los contenidos de fechas pasadas.

## 4. ¿Cómo?

Tras conocer otros blogs (Alonso, 2009, p. 55-57) y recoger algunas experiencias anteriores con otros medios, en el curso 2009-10 (de 31-01-10 a 25-06-10) inicié mi primer blog de aula en 1º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) A y B (alumnos de 12 años): http://mateselaios1.blogspot.com


La experiencia continuó en el curso 2010-11 en 2º ESO E y F (alumnos de 13 años): http://mateselaios2.blogspot.com .


Y prosigue en el curso 2011-12 en 3º ESO C (alumnos de 14 años): http://mateselaios3.blogspot.com .


## 4.1. Contenidos

Las entradas del blog están etiquetadas según las siguientes categorías:

<u>Diario de clase</u>: cada día un alumno hace una breve reseña, dejando constancia de las tareas pendientes. Un ejemplo típico:

**<u>viernes 25 de febrero 2011 - Diario de clase: 2º F - Escrito por Marta:</u>**

*¡**H**ola! **H**oy en clase cuando ha entrado el profesor hemos hecho la última sesión de cálculo mental de monomios que nos quedaba. Luego hemos corregido los ejercicios que mandó ayer en la pizarra y el profesor nos ha explicado algunas cosas que teníamos mal. Y nos ha explicado las ecuaciones de segundo grado y el profesor nos ha dicho que había completas que son las que tienen una $x^2$ una x y un n**ú**mero sin x y también están las incompletas que son en las que falta uno de esos miembros (**términos**). Por ahora s**ó**lo vamos a dar las incompletas. Luego hemos hecho algunos ejemplos de ecuaciones de segundo grado. De deberes hay: Página 144... 38, 39, 43 y 45. ¡Buen fin de semana!*

Hay crónicas escuetas en exceso, otras saben resumir bien la clase y también las hay que son portadoras de cierta ironía.

<u>*Problema de la semana*</u>: cada jueves, presento un problema que haya sido propuesto en alguna edición de la Olimpiada Matemática Aragonesa de 2º ESO u otro concurso similar. Los alumnos envían sus soluciones mediante comentarios que retengo hasta el jueves siguiente. Ese día los hago públicos y comento las respuestas presentadas, explicando cuál es la correcta y analizando los errores. El número de respuestas recibidas a un problema ha oscilado entre 2 y 13.

Estos problemas no suelen corresponderse exactamente con los contenidos de un tema. Son, en cambio, situaciones más abiertas (enigmas lógicos, estrategias ganadoras, geometría combinatoria, etc.), que ponen a prueba la capacidad de enfrentarse a algo nuevo, lo cual permite que afloren métodos diferentes para resolver un mismo problema, que podamos compararlos y priorizarlos según criterios estéticos y de eficacia. Algunos ejemplos:

http://mateselaios2.blogspot.com/2010/12/problema-de-la-semana-estrategia.html

http://mateselaios2.blogspot.com/2010/11/problema-de-la-semana-areas.html

En ocasiones, para una mejor comprensión de las soluciones, se escanean y publican las hojas de trabajo de los alumnos. Ejemplo:

http://mateselaios3.blogspot.com.es/2012/04/solucion-al-problema-de-la-semana-sumas.html

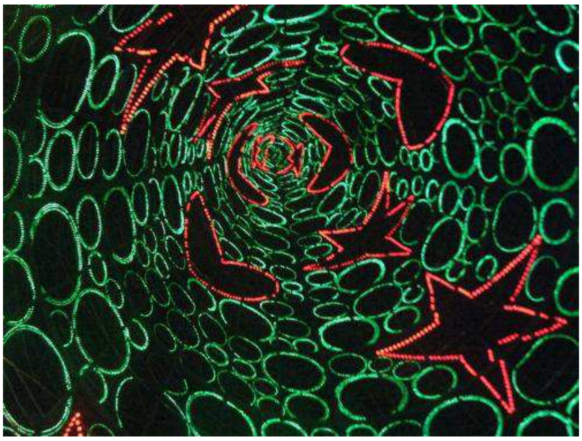
*El profesor propone*: sección en la que se ofrecen materiales para el repaso o la ampliación de cada tema de estudio. Siguen algunos ejemplos.

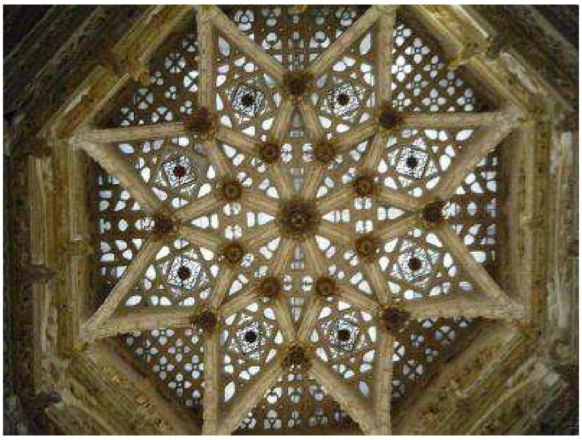
- Ampliación del tema “Medida” a partir de dos noticias de accidentes, espacial y aéreo: http://mateselaios2.blogspot.com/2010/11/medidas-universales.html
- Ampliación histórica sobre Pitágoras y su escuela, con un video: http://mateselaios2.blogspot.com/2011/03/quien-fue-pitagoras.html
- La canción y las rimas para memorizar las primeras cifras del número pi: http://mateselaios2.blogspot.com/2010/10/el-profesor-propone-la-cancion-del.html
  http://mateselaios2.blogspot.com/2010/10/el-profesor-propone-rimas-para-conocer.html
- Video introductorio al tema “Fracciones” con una escena de cine y humor: http://mateselaios2.blogspot.com/2010/10/matematicas-alrededor-las-fracciones.html
- Actividad de repaso previa a un examen: http://mateselaios2.blogspot.com/2011/02/repasa-las-expresiones-algebraicas.html

*Matemáticas alrededor*: en esta sección se destacan aspectos de la realidad próxima en los que aparecen los conceptos que estamos estudiando en clase (anuncios de TV, urbanismo de la ciudad, actualidad deportiva, prensa, etc.). Siguen algunos ejemplos.

- Noticia sobre una sentencia del Tribunal Supremo referida al redondeo bancario: http://mateselaios2.blogspot.com/2011/02/fraude-con-el-redondeo.html
- Los escaparates en rebajas:
  http://mateselaios2.blogspot.com/2010/11/matematicas-alrededor-fracciones-en-los_09.html
- El mal uso de los porcentajes en prensa y publicidad:
- http://mateselaios2.blogspot.com/2010/11/matematicas-alrededor-los-precios.html
- http://mateselaios1.blogspot.com/2010/03/problema-de-la-semana-matematicas.html

*Los alumnos proponen*: sección donde los propios alumnos aportan problemas que consideran curiosos o intrigantes, a veces de producción propia; también, fotos matemáticas que ellos mismos han realizado, noticias que encuentran, etc. Veamos unos ejemplos de fotos matemáticas enviadas por alumnos: Cristina, que en Navidad llevó su “mirada matemática” de viaje (Madrid y Burgos); e Iván, que hizo su paseo matemático por el barrio (Zaragoza):





Ejemplos de problemas inventados por alumnos. En algunos detalles son poco realistas, pero tienen como aspecto valioso su originalidad y que se refieren al entorno cercano:

**Miércoles 26-01-11 - María (2º F) propone un problema**

*En Zaragoza caen por lluvia unos 320 l/m$^2$ al año. La superficie aproximada del término municipal es de 1.000 km$^2$ y tiene 700.000 habitantes. Si se aprovecha un 72% del agua caída y cada habitante consume unos 100 litros al día, ¿cuántos litros de agua necesitamos coger del río al año?*

**Domingo 06-02-11 - Alejandro T. (2º F) propone un problema**

*Un hombre va a comprar una nevera al centro comercial Gran Casa en el "día sin I.V.A." (los precios están con IVA, impuesto que incrementa en un 18% el precio). La nevera vale 47 euros. Va a pagar y entrega un billete de 50 y le devuelven uno de 10 y otro de 5. ¿Le han cobrado bien? ¿Por qué? ¿Cuánto le tendrían que haber cobrado? ¿Y devuelto?*

Muchos consumidores creen que "quitar el IVA" sería descontar un 18%; y no es así.

*Encuestas*: mediante formularios se recoge la opinión de los alumnos, p.ej. sobre exámenes. Después se ofrece un resumen de resultados. Ejemplo tras la 1ª Evaluación:

http://mateselaios2.blogspot.com/2010/12/que-opinas-sobre-la-evaluacion.html

http://mateselaios2.blogspot.com/2010/12/encuesta-sobre-evaluacion-resultados.html

*No sólo Mates*: sección surgida de forma espontánea, donde los alumnos y el profesor pueden expresar otros asuntos de interés no matemáticos que sirven para "hacer grupo". Ejemplo del Día de Reyes:

http://mateselaios2.blogspot.com/2011/01/no-solo-mates-regalo-de-reyes.html

Además, el blog, de forma permanente ofrece a los alumnos y sus familias la información preceptiva sobre temas de la Programación Anual: sistema de recuperación, seguimiento de alumnos pendientes, contenidos mínimos y Prueba Extraordinaria de final de curso. También materiales impresos, por ejemplo: actividades de recuperación para vacaciones. Algunos de los contenidos de la sección *"El profesor propone"*, siendo interesantes, no siempre pueden ser ofrecidos en el aula. Entonces se ofrecen en casa, con carácter voluntario, gracias al blog. Así ocurrió, por ejemplo, en el curso 2009-10, en 1º ESO. Tuve algunos alumnos que recibían con burla el hecho de que el profesor utilizase metodologías y recursos poco tradicionales, en concreto escenas de cine que daban lugar a comentarios matemáticos (errores del guión, planteamiento de problemas en la película, etc.). Creían que aquello “no iba para examen” y se podía “tomar a broma”.

Desde el principio les transmití de palabra y con hechos que lo importante no tiene por qué ser aburrido y que algo sea divertido no significa que sea banal. Pero ese grado de conocimiento todavía estaba lejos de su alcance, de modo que llevar el cine a clase suponía un revuelo contraproducente. Sin embargo, una mayoría de alumnos lo deseaban, lo aceptaban con formalidad y lo agradecían.

¿Qué hacer? ¿Expulsar a aquellos alumnos o expulsar al cine de clase? Hice lo primero sólo cuando no quedó más remedio y dentro de las limitaciones normativas; evité lo segundo varias veces gracias al blog de aula. Cuando, según mi intuición, era lo aconsejable, algunas escenas fueron presentadas directamente en el blog, sin pasar por la clase. Fueron 13 videos de cine en 1º ESO y 21 en 2º ESO:

http://mateselaios1.blogspot.com/search/label/Cine

http://mateselaios2.blogspot.com/search/label/Cine

Al día siguiente constataba que una gran mayoría de los alumnos las habían visto. Otro tanto sucedió cuando su corta duración o el interés anecdótico de la escena y los inconvenientes de preparación así lo aconsejaban.

### 4.2. Participación

Los alumnos pueden participar en el blog de varias formas: Redactar el diario de clase, responder al problema de la semana y a los problemas propuestos por compañeros, publicar problemas, fotos y artículos, comentar las propuestas del profesor.y participar en las encuestas.

Cuando los textos enviados por los alumnos contienen faltas de ortografía, los corrijo en color rojo. Los errores u omisiones conceptuales los señalo en morado.

### 4.3. Privacidad

En la red los buenos propósitos pueden estrellarse ante nuevas formas de abusos que tristemente vamos conociendo, también en los centros educativos. Por ello, la privacidad y protección de los menores fue desde el principio una de mis prioridades en el blog.

El profesor actúa como moderador que autoriza los comentarios y artículos de los alumnos. Éstos participan como “usuarios anónimos”, identificados ante los compañeros por su nombre de pila. No hay por lo tanto perfiles, ni fotos, ni datos personales. Así se informa a los padres a comienzo de curso en una carta cuyo texto está permanentemente enlazado como “Nota a los Padres” en zona preferente del blog. A propósito de los padres, hay que decir que algunos chicos no participan en el blog por estar “castigados sin internet”.

### 4.4 El blog en clase.

El blog de aula es una actividad voluntaria. Ningún alumno puede verse desplazado por no poder acceder a la red en horario extraescolar (aunque todos pueden usar por la tarde ordenadores de la biblioteca del centro).

Por tal motivo, las actividades de aula no deben basarse en el blog, sino al revés. La clase es punto de apoyo para la actividad que en él se desarrolla, pero la clase se debe poder seguir perfectamente sin entrar en el blog.

En clase únicamente se recuerda quién escribe cada día el diario, se intenta mantener viva la actividad del blog cuando ésta decae o se comenta si en el blog ha surgido algo reseñable que puede enriquecer la clase, en cuyo caso se explica para todos, sin dar por supuesto que haya sido leído a través de Internet.

## 5. Resultados obtenidos

### 5.1 Participación.

La participación de los alumnos fue escasa en un principio, desconcertados por la novedad, pero creció enseguida. Varios factores han contribuido a ese crecimiento:

- Todo alumno participante ve incluido su nombre en una lista en lugar destacado.
- Toda propuesta de los alumnos es publicada.
- Hay un pequeño premio por participar: cada intervención de contenido matemático puede subir algunas décimas (según su calidad) en el próximo examen. La alumna más activa ha llegado a subir por tal concepto hasta 1,25 puntos.
- Los comentarios del profesor a las respuestas que dan los alumnos siempre valoran lo positivo de participar exponiéndose, no lo olvidemos, al juicio público. Los errores se analizan como ocasión para profundizar en el problema, sin comentarios de reprobación.

Se ha alcanzado un promedio de 65 visitas diarias en el último trimestre de curso, cuando la experiencia estaba consolidada, incluidos festivos, de las que 24 provienen de Zaragoza (nuestra ciudad), 25 del resto de España y 16 de paises americanos. Esto nos recuerda que el blog abre las puertas de nuestra clase al mundo. Es algo que debemos tener presentes y saber si estamos dispuestos a ello, a la vez que reafirma la importancia de asegurar la privacidad de los alumnos. Dicha “observación externa” sugiere que la experiencia aporta alguna idea a otros compañeros, lo cual recibo como un aliciente añadido. Estos son los datos:

| | Blog de 1º ESO A y B | Blog de 2º ESO E y F |
|---|---|---|
| Fechas | del 31-01-10 al 25-06-10 | del 10-09-10 al 25-06-11 |
| Alumnado participante activo | 24 de 36 (66,66%) | 40 de 49 (81,63%) |
| Artículos publicados | 183 | 426 |
| Media semanal de artículos (incluidas vacaciones) | 7 | 11 |
| Artículos del alumnado | 69 (37,70%) | 167 (39,20%) |
| Visitas recibidas | 3.142 | 16.893 |
| Media diaria de visitas (incluidos festivos) | 20 | 59 |
| Comentarios recibidos | 192 | 568 |

No se ofrecen datos del Blog de 3º ESO, dado que en el momento de escribir este artículo aún se encuentra en desarrollo.

El blog ha tenido continuidad en Vacaciones de Navidad, con una entrada diaria. Procuré que, dadas las fechas, fueran entradas más relajadas y amenas. Se mantuvieron las visitas de los alumnos y esa fidelidad me confirmó en el empeño. Para algunos de ellos, se habían borrado las fronteras entre la obligación y la afición, entre la imposición y el interés.

### 5.2 Contenidos curriculares

La sistematicidad de la sección "El problema de la semana" ha hecho que sea la resolución de problemas el contenido curricular más trabajado en el blog, aportando además algún hecho diferencial respecto al aula. La retención de las respuestas a cada problema propuesto durante una semana ha permitido la presentación de soluciones diferentes, expresando diversos estilos de pensamiento, una riqueza que en el aula queda a veces oculta por la aparición de una primera solución. Asimismo, la escenificación e intriga con que se presentaba cada problema, creaba una curiosidad y expectación inusuales.

Un hecho relevante, fue que los 12 alumnos del instituto participantes voluntarios en la XX Olimpiada Matemática Aragonesa, eran todos ellos participantes en el blog (en 1º ó en 2º ESO), de los cuales 4 pasaron a la Final. Para situar este hecho en su justo enfoque hay que considerar los siguientes números: en 2º ESO hay 154 alumnos matriculados en el instituto, de los cuales 63 han participado en el blog en 1º ó en 2º cursos; es decir, un 41% del total, reunidos en esos grupos por azar, sin selección alguna. De ese 41% ha salido el 100% de nuestros "olímpicos". A su vez, 12 de 63 es un 19% del alumnado (participante en el blog), un porcentaje mucho más alto que la participación usual en estos concursos.

No eran esos 12 alumnos todos brillantes, así que se puede concluir que ha habido una influencia positiva del blog en la confianza de los alumnos frente a los problemas. Al hablar de excelencia individual debemos ser más cautos y simplemente constatar que dos alumnos participantes en el blog ganaron sendos premios en la citada Olimpiada y en el Canguro Matemático Nacional. Fueron magníficas ocasiones aprovechadas para, además de valorar sus éxitos, compartirlos como un orgullo colectivo, fomentando los valores que forman parte de nuestros objetivos.

Respecto a los temas del programa, al haber dos artículos diarios: diario de clase más artículo relacionado con el tema en estudio, su presencia en el blog ha sido directamente proporcional a la dedicación de clases a cada uno de ellos. No parece adecuado ni fiable medir la posible influencia que el blog haya tenido en el rendimiento académico en dichos temas. Su influencia, dejando aparte el citado caso de la resolución de problemas, radica en otro ámbito, en el cambio de actitudes y valores.

### 5.3 Cambio actitudinal

Los alumnos descubren en el blog unas matemáticas que son mucho más que cuentas o ejercicios repetitivos. A través de noticias, curiosidades, acertijos, imágenes, videos, canciones, citas, relatos, problemas históricos, juegos de palabras, etc., aprenden a ver esta ciencia sin prejuicios, abiertos a la sorpresa de cada día y, en ocasiones, siendo ellos mismos quienes la traen al blog.

Algo parecido al caso comentado de la Olimpiada Matemática, ocurrió con el Concurso de Fotografía Matemática: en años anteriores se hizo campaña a favor de la participación de nuestro alumnado, con nulos resultados. Ahora, con el aliciente de la publicación en el blog, se presentaron 37 fotos. Se pueden ver en: http://catedu.es/matematicas_mundo/FOTOGRAFIAS/fotografia_alumnos.htm

Es un cambio que se percibe día a día. La constatación definitiva debía venir de la opinión de los alumnos. En la encuesta final, un 70% opinaba que “el blog ha servido para que aprecie más las Matemáticas”.

En dicha encuesta final, un 90% del alumnado opinaba que “el blog ha contribuido a mejorar el ambiente en la clase”. Puede extrañar, siendo que se trata de una actividad que se desarrolla sobre todo fuera de clase, pero tal vez se entienda mejor a través de los casos que se explican a continuación.

## 6. El blog nos acerca

Hay algo que no expresan los números y que no debo omitir: con el blog unos y otros hemos conseguido algunas satisfacciones y cierta complicidad en el proyecto; en definitiva, más cercanía.

*Carolina la tímida.-* Carolina era una alumna de 1º ESO introvertida, con una capacidad media-alta; aprobaba con notas de 7. Pero nunca intervenía en clase. Sin embargo, sí que participaba en el blog. En una visita de tutoría, el padre comentó su satisfacción porque a través del blog la chica lograba ese nivel de intervención que su carácter le impedía en el aula. Esta noticia, inicialmente positiva, me alertó sobre la posibilidad de que el blog fuera un sustitutivo del necesario e insustituible intercambio personal. Así que, con la excusa de comentar sus intervenciones del blog, conseguí un nuevo grado de confianza y aumentó su participación en la clase.

*Los cachorros de Elena.-* Elena es una chica de 2º, repetidora de curso, que el año anterior suspendió las Matemáticas. Se le veía insegura por ese historial académico reciente y por estar rodeada de compañeros nuevos y más jóvenes. Su actitud en el aula era como la de Carolina, aunque con menor capacidad. Temerosa de equivocarse en público, antes de enviar comentarios al blog con respuestas me los consultaba por e-mail. Entré en ese juego, dándole un trato especial para apoyar su autoestima. En un correo me sorprendió. Decía:

“*Regalo tres perros tienen ahora 15 días, son de tamaño grandecillo, si sabéis de alguien por favor decídmelo. Esos perros están en mi pueblo y son del pastor. Si no los colocamos en alguna casa, los sacrificará...* :( *Yo encantada de darlos con tal de que no los maten... Hay dos hembras y un macho*. *Os envío una fotico para que los veáis”.*

Aquello no era matemático, pero sí una muestra de la confianza alcanzada (en si misma y en los demás). Pensé que era algo valioso y su publicación abrió una nueva sección en el blog: *“No sólo Mates”.* Por cierto, los cachorros se salvaron.

*La madre de María.-* Un día me llegó un e-mail de la madre de María, una alumna despierta y participativa. No conocía a la señora. Me expresaba el estímulo que el blog estaba suponiendo para su hija, con palabras de reconocimiento del trabajo que esta iniciativa conlleva para el profesor, de gratitud y de ánimo. Terminaba diciendo*: “No le diga nada de esto a la chica, pues no sé si le gustaría”.* No estoy acostumbrado a estas muestras de apoyo y fue una alegría.

*Andrés y la Conjetura de Goldbach.-* Aprovechando la escena inicial de la película *"La habitación de Fermat"*, di a conocer en el blog el enunciado de la Conjetura de Goldbach (*"Todo número par puede ser expresado como suma de dos números primos"*). Pese a ser una cuestión matemática de la máxima dificultad (por eso es todavía una conjetura, aún no un teorema demostrado), su enunciado es comprensible por todos pues maneja conceptos sencillos. Allí quedó expuesta como simple información cultural, con una broma final: *"Si algún valiente se atreve con ella, ánimo... nos espera la fama mundial si lo consigue".*

Pues bien, Andrés, un chico de 13 años "con buena cabeza", lo tomó en serio y durante dos semanas le dio vueltas al asunto, intentando encontrar la fórmula que diera esos números primos. Expresó sus ideas en el blog y, personalmente, entre clases. Le fui comentando sus sucesivos errores, pero sin desalentarlo. Realmente nos haríamos famosos…

*El blog de Adela.-* Adela es una profesora de un instituto andaluz a quien no conocía. A comienzos de 2011 me escribió informándome de que seguía el blog y que eso le había decidido a comenzar el suyo en 1º ESO, siguiendo la misma idea, adaptada a su caso. En septiembre del mismo año, Marisa, otra profesora a quien no conozco en persona me comunicaba idéntica situación desde su colegio zaragozano. El blog encuentra "hermanos".

## 7. Conclusiones

Siempre es arriesgada la generalización, pero la experiencia diaria a lo largo de 3 cursos académicos me confirma estas conclusiones:

- El blog de aula es una actividad bien aceptada por el alumnado.
- El blog ofrece un ámbito idóneo para las actividades de resolución de problemas con un sentido investigador, no convencional y motivante.
- El blog permite incorporar elementos externos nuevos a la enseñanza, con repercusión en una mejora de la imagen de las Matemáticas, más amistosa y cercana.
- El blog aporta elementos que ayudan a tejer un sistema de buenas relaciones afectivas en el aula, favorecedor del crecimiento integral de los individuos.
- El blog tiene un valor dinamizador de sinergias positivas, que potencia la autoconfianza del alumnado y la expresión de sus capacidades, por ejemplo con su participación en concursos, aunque no se trate de alumnos brillantes.
- La validez de esta propuesta queda refrendada por su extensión a otros profesores y centros, de forma espontánea y natural.
- Es una actividad que exige al profesorado un trabajo voluntarioso y constante; pero llega a ser una labor bien recompensada por quienes le dan sentido, los alumnos.

## Bibliografía

Alonso, R. (2009). *Día a día con las Matemáticas: un blog de aula. Revista Aula de innovación educativa*, 181, 55-57.

Bohórquez, E. (2008). *El blog como recurso educativo. Revista Edutec* [en línea] 26, http://edutec.rediris.es/Revelec2/revelec26/articulos_n26_PDF/Edutec-E_Bohorquez_ Recuperado el 2 de mayo de 2012.

Gil, N., Blanco, L. y Guerrero E. (2005). *El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. Revista Unión* [en línea] 2, http://www.fisem.org/web/union/revistas/2/Union_002_004.pdf Recuperado el 2 de mayo de 2012.

Morales, M. (2009). *¡Anímate!... pon un blog en tu vida. Revista Números* [en línea] 75, recuperado el 2 de mayo de 2012, de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/75/Monografico_01.pdf

Nimier, J (1976), *Mathématique et affectivité.* Paris. Editions Stock.

Quevedo, J. (2008). *Bloggematica. Competencia matemática. Revista Unión* [en línea] 15, http://www.fisem.org/web/union/revistas/15/Union_015_015.pdf recuperado el 2 de mayo de 2012.

Recomendación del Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea. 2006/976/CE, de 18 de diciembre, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente (Diario Oficial de la Unión Europea 30-12-2006).

Servais, W. (1980). *Humanizar la enseñanza de la Matemática*. *Revista de Bachillerato*, suplemento del núm. 13, 3-22.

Sorando, J.M. (2009). *Matemáticas por todos los caminos. Actas XIV JAEM Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.* Girona. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

**José María Sorando Muzás**, Catedrático de Matemáticas en el IES Elaios de Zaragoza. Secretario de la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas. Temas de interés: didáctica y divulgación. Entre sus publicaciones: *La ciudad y las matemáticas*, cuaderno del Día Escolar de las Matemáticas 2009. Artículos de la sección de cine *CineMATEca* de la Revista Suma (FESPM).
Web: http://catedu.es/matematicas_mundo. Email: jmsorando@ono.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 153-160
ISSN: 1815-0640

## Ideas para Enseñar

# Modelización de problemas estadísticos mediante grafos

**Patricia Caro, Raquel Cognigni.**

## 1. Introducción

El concepto de probabilidad puede ser abordado en los distintos niveles educativos de acuerdo a las edades evolutivas de los estudiantes. En algunas situaciones se plantea desde lo netamente experimental, relacionándose así con el concepto de probabilidad “a posteriori” y en otras se trabaja el concepto de probabilidad “a priori”, llegando así a distintos grados de formalización. Las nociones de grafo y de dígrafo pueden ser trabajadas como un ente matemático, tienen numerosas aplicaciones y aportan a la comprensión y simplicidad en distintos temas matemáticos. En este trabajo, se muestra que, determinados problemas aleatorios, que pueden ser resueltos por diversos caminos, encuentran en los grafos una herramienta sencilla y práctica para llegar a la solución. La simulación de procesos aleatorios a través de grafos hace accesible a los alumnos problemas cuyo tratamiento formal o teórico es difícil o inadecuado, esto ocurre en procesos que dependen del tiempo y que a veces requieren de un intervalo temporal infinito.

Nuestra propuesta es la modelización mediante grafos de situaciones en las que cada estado o suceso se caracteriza por su distancia al origen. Cada uno de estos estados serán identificados con un vértice del grafo que representará al problema a trabajar y entre dos estados se dibuja una flecha que indica el paso de uno al otro, originándose los arcos del grafo correspondiente. En el próximo apartado se presenta un detalle de la construcción del grafo, de cómo se determinan las probabilidades de transición a cada estado, quedando disponible de una manera clara y accesible toda la información acerca de la situación problemática modelizada. Cabe aclarar que trabajaremos con el concepto de probabilidad “a priori” ya que está pensado para estudiantes universitarios.

## 2. Desarrollo del trabajo

### 2.1. Procesos estocásticos y grafos

Existen algunos procesos aleatorios simples en los que el árbol deja de ser una forma de representación adecuada ya que, de utilizarse, presentaría un número infinito de ramas.

En estos casos, es posible utilizar un grafo para representar el proceso. A continuación definiremos algunos conceptos de grafos.

<u>Definición 1</u>: Un dígrafo es una terna $G=(V,U,\Phi)$ que consiste en dos conjuntos no vacíos y disjuntos, *V* y *U*, de elementos llamados *vértices* y *arcos* respectivamente, y de una función $\Phi$, frecuentemente llamada *relación de incidencia*, que asocia a cada arco de *U* un par ordenado de vértices (no necesariamente distintos) de *G*. Si *u* es un arco y *a* y *b* vértices, tales que $\Phi(u)=[a,b]$ se dice que *u* tiene extremo inicial en

*a* y extremo final en *b*. Si un arco tiene extremo inicial igual al extremo final se dice que es un *bucle*.

Ejemplo 1: *Lanzar un dado cúbico hasta obtener un 5. La pregunta es: ¿Cuántas tiradas se necesitan para que vuelva a salir otro 5?*

Se tira el dado, si sale un 5 la experiencia finaliza y este es un estado final, con una probabilidad de transición de 1/6. Si sale un resultado distinto de 5, la probabilidad de transición es igual a 5/6 y hay que continuar lanzando, con lo cual puede salir 5 o no. Así el proceso se repite infinitamente.

A continuación se muestran las dos representaciones del experimento:

1) El árbol, el cual se considera que podría ramificarse infinitamente, si en ninguna tirada sale 5.
2) El grafo, en cuyo vértice identificado con la letra *I* se representa el estado inicial de búsqueda del resultado que nos interesa, o sea que salga 5, en cualquiera de las ramificaciones del árbol, no necesariamente en la primera tirada, de manera que, si sale 5 en la tirada siguiente, el camino se cierra y si no sale 5 se vuelve a recomenzar, lo que queda claramente graficado con el bucle.

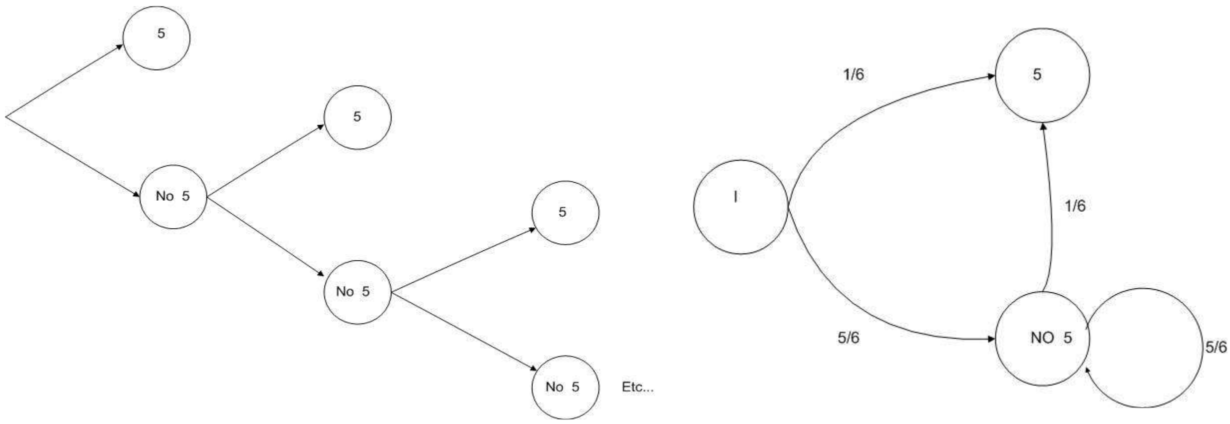



**Figura 1**

Si bien este es un ejemplo elemental y puede ser estudiado a partir de un enfoque frecuencial, la posibilidad de que el proceso sea infinito hace que por lo general no sea considerado en la enseñanza, pero trabajando con la modelización que nos permite el grafo, sí es posible tratar el tema en el aula. El grafo permite efectuar una síntesis de conceptos que pueden ser captados visualmente y se facilita la compresión con respecto a una posible descripción del proceso.

Definición 2: Un *proceso estocástico* es una familia indexada de variables aleatorias {X(t)}, las que representan una sucesión de estados en el tiempo *t*. El índice *t* puede tomar valores continuos o discretos, según si los cambios de estado se producen en todo momento o cada cierto intervalo de tiempo. Para determinar parámetros estadísticos es necesario trabajar con una variable discreta, de modo que el sistema tenga una cantidad finita o infinita numerable de estados. En este caso, el proceso se llama discreto en el tiempo.

Definición 3: El conjunto *S* de valores de las variables X(t) se llama *conjunto o espacio de estados.* Es un conjunto de estados $E_1$, $E_2$…, $E_k$ exhaustivos y mutuamente excluyentes de un experimento aleatorio en cualquier tiempo.

Definición 4: Un proceso estocástico se dice que evoluciona *sin memoria* cuando, en cada etapa, el cambio de estado sólo depende del estado en el que se encuentra actualmente.

Definición 5: Un proceso estocástico se llama *homogéneo en el tiempo* si las probabilidades de transición entre los estados no cambian con el tiempo.

Los procesos que cumplen con las definiciones 2, 3, 4 y 5 reciben el nombre de cadenas de Markov, discretas, homogéneas en el tiempo y con un número finito o infinito numerable de estados.

Ejemplo 2: *En un país lejano sólo existen dos posibilidades en el clima, seco y mojado. Un estudiante de meteorología sabe que la probabilidad de que el clima sea seco el 1° de enero del año en curso es* $a$ *y la probabilidad de que en dos días consecutivos el clima sea el mismo, tiene un valor* $p$*,* $0 < p < 1$*.*

Escribamos los elementos que identifican en este problema una cadena de Markov, sólo hay dos posibles estados, E1 es el estado Seco y E2 el estado Mojado. Estos estados son exhaustivos y mutuamente excluyentes en cualquier tiempo. Inicialmente en el tiempo $t_0$, el sistema puede estar en cualquiera de estos estados.

Sea $a_j^0 (j = 0,1,........,k)$ la probabilidad absoluta de que el sistema se encuentre en el estado $E_j$ en $t_0$. Definamos $p_{ij}$ como la probabilidad de transición de un paso de ir al estado *i* en $t_{n-1}$, al estado *j* en $t_n$, es decir, la probabilidad de que en el siguiente periodo (paso) se encuentre en $E_j$, dado que en el periodo (paso) inmediatamente anterior estuvo en $E_j$. En nuestro caso $a_1^0 = a \quad a_2^0 = 1 - a$

La matriz *P* de transición de un paso será:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Seco} & \text{Mojado} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Seco} \\ \text{Mojado} \end{array} & \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} \end{array}$$

Se observa en *P* que las probabilidades de clima seco un día, dado que el anterior fue seco; y de mojado un día, dado que el día anterior fue mojado son iguales a *p*. En cualquier otro caso tenemos una probabilidad igual a (1 - *p*). Las probabilidades $a_1^0$ y $a_2^0$, junto con *P*, determinan en este ejemplo una cadena de Markov.

A continuación llamaremos *S* al *conjunto de los estados* de un grafo y sea $p_{ij}(n)$ la *probabilidad de transición* desde el estado *i* al estado *j* en *n* pasos. El estado *i* se comunica con el *j* si hay al menos un camino de *i* a *j*, es decir, si $p_{ij}(n) > 0$. Un estado *i* de *S* se llama *absorbente* si $p_{ii} = 1$. El conjunto de los estados absorbentes de una cadena se llama *borde* de *S* y se representa con *B*. Puede ocurrir en algunos casos que *B* sea el conjunto vacío. Los estados que no pertenecen a *B* se llaman *interiores* y se representan con *T.*

Las probabilidades de transición cumplen las siguientes propiedades:

Propiedad 1: Sea $p_{ij}$ una probabilidad de transición del estado *i* al estado *j*, se verifica que $0 \leq p_{ij} \leq 1$.

Propiedad 2: $\sum p_{ij} = 1$, para un *i* fijo y *j* variable. Esto indica que la suma de las probabilidades de todas las aristas que parten de un estado es igual a 1.

Un proceso estocástico está completamente determinado si se conoce además de las probabilidades de transición $p_{ij}$, el estado inicial *I* en que se encuentra el sistema y la probabilidad absoluta de que el sistema se encuentre en el estado $E_j$ en $t_0$.

Ejemplo 3: *El siguiente grafo modeliza un proceso aleatorio.*

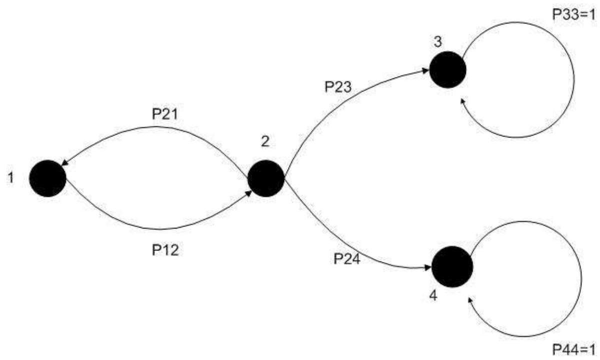



**Figura 2**

Estados finales como 3 y 4 se llaman absorbentes. En general, un estado *i* es absorbente cuando $p_{ii} = 1$. El borde es el conjunto $B = \{3,4\}$.

Un proceso estocástico se puede representar mediante recorridos en un grafo.

## 2.2. Reglas de los caminos y del valor medio

Estas reglas son aplicables a aquellos grafos que son diagramas de árbol.

Propiedad 4: La probabilidad de un camino dado es igual al producto de todas las probabilidades a lo largo de dicho camino.

Propiedad 5: La probabilidad $p_i$ de alcanzar un subconjunto *T* del borde *B* a partir de *i* es igual a la suma de las probabilidades de todos los caminos que conducen desde i hasta *T*.

Propiedad 6: La probabilidad de un estado interior es igual a la media ponderada de las probabilidades de sus estados vecinos. Es decir $p_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} . p_k$

Propiedad 7: $p_i = 1$ para todos los estados de *T*, $p_i = 0$ para todos los estados de *B* que no están en *T*.

## 2.3. Cadenas de Markov sin estados absorbentes con probabilidades de transición iguales para aquellos arcos que parten de un mismo estado

Definición 6: Un dígrafo $G(V,U)$ es *balanceado* si $gr^{+}(v) = gr^{-}(v)$ para todo vértice del conjunto *V*. En caso que el dígrafo sea balanceado y se verifique que $gr^{+}(v) = gr^{-}(v) = k$ para todo vértice *v* de *G* se dice que el dígrafo es *k-regular.*

A continuación se mostrarán distintas situaciones que conducen a la resolución a través de grafos balanceados, sean o no *k*-regular.

Ejemplo 4: *Calcular la probabilidad de cada estado, partiendo de cualquier estado inicial.*

Realizando el diagrama de árbol y utilizando las propiedades 2 y 9, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones.

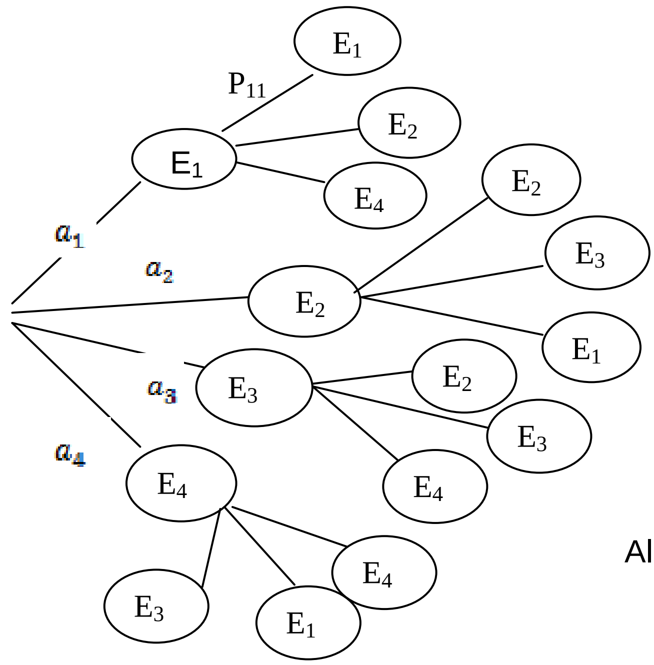



Figura 3

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$$
$$a_1 = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_4$$
$$a_2 = \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{3}a_1$$
$$a_3 = \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{3}a_4$$
$$a_4 = \frac{1}{3}a_4 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_3$$

Al resolver el sistema se obtiene:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{4}$$

Recurriendo a la resolución utilizando grafos nos queda determinado un **dígrafo k-regular y balanceado.**

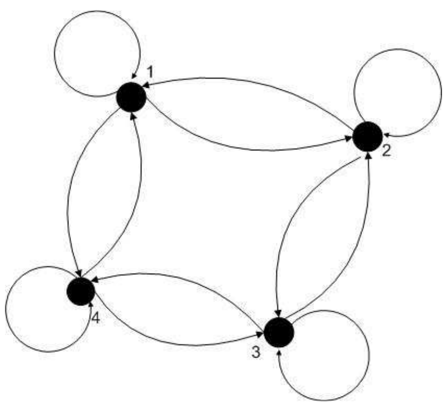



Figura 4

La probabilidad de llegar a cada estado partiendo de cualquier estado se obtiene dividiendo la cantidad de arcos que llegan a cada vértice por la cantidad total de arcos que tiene el dígrafo. Por ejemplo, en el vértice 1, llegan 3 arcos sobre los 12 totales que posee el dígrafo da una probabilidad de 1/4 .Como este digrafo, además de ser balanceado es *k*-regular, todos los vértices tienen la misma probabilidad

Ejemplo 5 : *Calcular la probabilidad de cada estado, partiendo de cualquier estado inicial.*

Realizando el diagrama de árbol y utilizando las propiedades 2 y 7, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones..

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2$$

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}a_3$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3$$

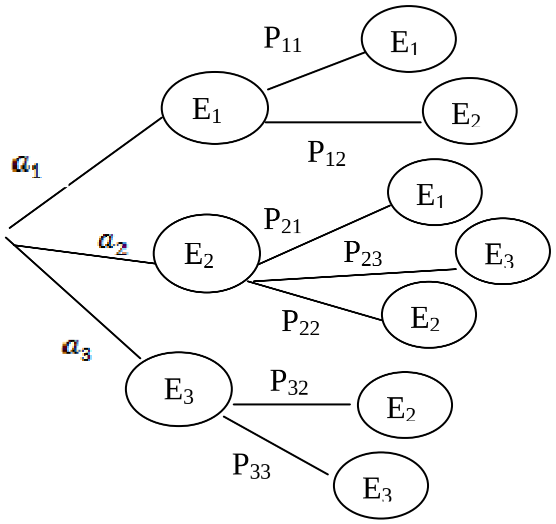



**Figura 5**

Al resolver el sistema se obtiene:

$$a_1 = \frac{2}{7} \quad , \quad a_2 = \frac{3}{7} \quad , \quad a_3 = \frac{2}{7}$$

Utilizando grafos, nos queda determinado un **dígrafo balanceado pero no k-regular.**

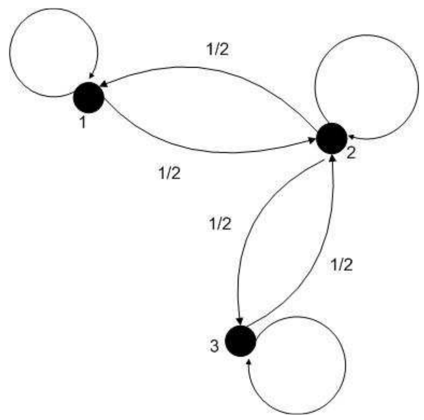



**Figura 6**

Como en el ejemplo 5, este mismo resultado se obtiene si se cuenta la cantidad de arcos que llegan a cada vértice y se divide por la cantidad total de arcos que tiene el dígrafo.
Verificando para el vértice 1 se ve que llegan 2 arcos y al dividir por los 7 que posee el dígrafo da una probabilidad de 2/7.

## 3. Algunas actividades de Aplicación

Actividad 1: Una partícula se desplaza aleatoriamente en tres compartimentos conectados. Si se encuentra en el compartimento 1 tiene probabilidad ½ de quedarse en el mismo y probabilidad ½ de ir al compartimento 2. Si se encuentra en el 2, tiene la misma probabilidad de quedarse, de ir a 1 o de ir a 3. Si se encuentra en 3 tiene probabilidad ½ de ir a 2 y ½ de quedarse en 3.¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre en el compartimento 2?
Siendo para esta actividad el grafo asociado:

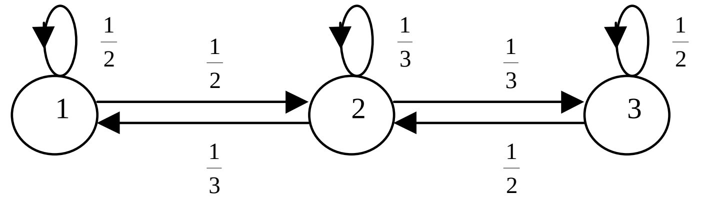



**Figura 7**

Actividad 2: el siguiente tablero, los ratones se mueven de acuerdo al resultado obtenido al lanzar una moneda. Pueden llegar al queso o al gato. ¿Cuál es la probabilidad de que un ratón llegue al queso? ¿Y al gato?

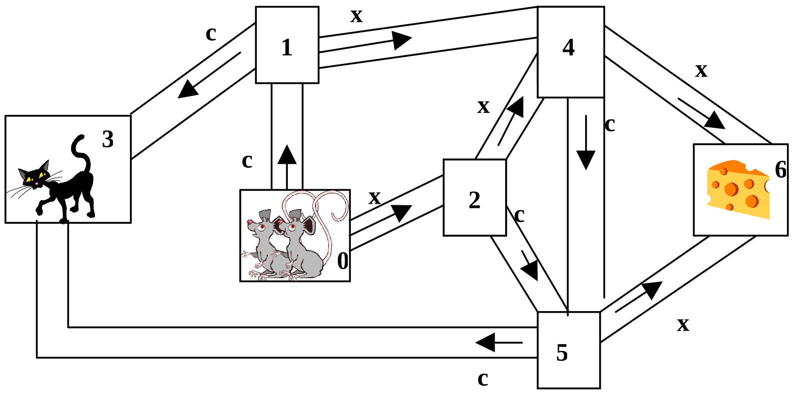



**Figura 8**

Siendo el grafos asociado:

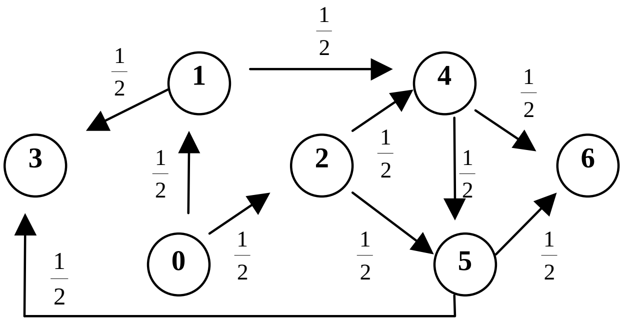



**Figura 9**

## 4. Conclusiones

Se pueden modelar los procesos estocásticos infinitos con grafos, de manera sencilla. Cuando los grafos son balanceados (sean *k*-regular o no) y las probabilidades de transición que parten de un mismo estado son iguales, se pueden obtener las probabilidades de cada estado (vértices) haciendo el cociente entre el número de arcos que llegan a un determinado vértice sobre el número de arcos total del grafo. De esta manera, se simplifica enormemente el trabajo algebraico.

En función de las conclusiones anteriores podemos decir que sería posible presentar el tema de esta manera en la formación de docentes, por supuesto, haciendo hincapié en la importancia de trabajar con modelización.

## Referencias bibliográficas

Braicovich, T.(2009). *Introducción a la Teoría de Grafos.* Buenos Aires: Docuprint S.A.

Contreras, M. (1998). Lenguaje simbólico y pruebas en la enseñanza de las matemáticas: un enfoque sociocognitivo. En G. Mugny y J. Pérez (Eds.), *Psicología social del desarrollo cognitivo*, Capítulo 2, pp. 265-288. Barcelona: Anthropos.

Contreras M. Probabilidad geométrica, grafos y procesos aleatorios.. http://www.mauriciocontreras.es/estadística4.pdf. Consultado el 02/03/2012

Lavalle. A. Rubio N (2003). El ábaco probabilístico en la Enseñanza. XXXI Coloquio Argentino de Estadística.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 161-182
ISSN: 1815-0640
Coordinada por Fredy González

## Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica

# Historia de la Matemática, Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática[1]

**Asdrúbal Belisario[2], Fredy Enrique González[3]**

## Resumen

Entre las tendencias investigativas en el campo de la Educación Matemática se destacan los estudios desarrollados desde la perspectiva del Análisis Histórico Epistemológico, los cuales toman en cuenta que la Historia de la Matemática muestra la transformación de los conceptos y procesos en esta disciplina así como el contexto socio-cultural en donde ella aparece y se desarrolla, considerando también su pertinente influencia tanto sobre su enseñanza y aprendizaje como sobre la investigación que se realiza en torno a estos procesos; sobre la base de esta premisa, en este trabajo la Historia (H), la Educación Matemática (EM), la educación matemática (em), y la Investigación en Educación Matemática (IEM) se tratan a través de un enfoque social, procurando establecer los vínculos existentes entre la Historia de la Matemática (HM) y la EM; y entre la HM y la IEM.

## Abstract

Among research trends in the field of Mathematics Education, highlights the studies developed from the perspective of historical analysis epistemological, which take into account that the history of mathematics shows the transformation of the concepts and processes in this discipline as well as the context socio-cultural environment in which it appears and develops, relevant considering their influence on both teaching and learning and on the research being done on these processes, based on this premise, in this study History (H), Mathematics Education (ME), mathematics education (em), and Research in Mathematics Education (IEM) are addressed through a social approach, seeking to establish the links between the History of Mathematics (HM) and MS and between the HM and the IEM.

## Resumo

Entre as tendências investigativas no campo da Educação Matemática destacam-se os estudos desenvolvidos desde a perspectiva da Análise Histórica Epistemológico, os quais tomam em conta que a História da Matemática mostra a transformação dos conceitos e processos nesta disciplina bem como o contexto sócio-cultural em onde ela aparece e se desenvolve, considerando também seu pertinente influência tanto sobre seu ensino e aprendizagem como sobre a investigação que se realiza em torno destes processos; sobre a base desta premisa, neste trabalho a História (H), a Educação Matemática (EM), a educação matemática (em), e a Investigação em Educação Matemática (IEM) tratam-se através de um enfoque social, tentando estabelecer os vínculos existentes entre a História da Matemática (HM) e a EM; e entre a HM e a IEM

[1] Este artículo corresponde a una de las actividades de evaluación final del Seminario Doctoral intitulado "Perspectivas Teóricas de la Investigación en Educación Matemática" coordinado por el Dr. Fredy González en el Doctorado en Educación (UPEL Maracay), administrado durante el PA 2011-2 (Marzo– Junio)

[2] Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Núcleo Maracay). abel1910@gmail.com

[3] Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina". Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Núcleo Maracay). fredygonzalez1950@gmail.com

*La conciencia histórica representa, desde luego, una clara invitación a tomar seriamente en consideración nuestro estar constantemente insertos en la historia, hasta el punto que no podríamos comprendernos sin calificarnos como « personas históricas ».*
***G. Occhipinti***

## 1. Introducción

El marco institucional para la realización del estudio que se reporta en este artículo fue el Seminario Doctoral intitulado “Perspectivas de la Investigación en Educación Matemática” dictado en el Doctorado en Educación del Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara” (Núcleo Maracay) de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL-Maracay) cuyas actividades se iniciaron el día martes 29 de marzo de 2011, bajo la conducción del Dr. Fredy González, con la asistencia de seis participantes.

En su documento descriptivo (González, 2011), se establece que el propósito del Seminario es proporcionar a sus participantes experiencias de aprendizaje que les permitan:

a) Iniciarse en el análisis de la práctica de la investigación educativa en el campo de la Educación Matemática, teniendo como criterios, entre otros, los paradigmas, teorías y métodos subyacentes;

b) Adquirir conciencia de los compromisos cognitivos implicados en el proceso de generación de saberes relacionados con la teoría y la práctica de la investigación en Educación Matemática;

c) Fortalecer competencias para convertir en conocimiento socializado los problemas propios del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en los distintos niveles y modalidades del sistema educativo venezolano.

El Seminario se desarrolló en dos partes; en la primera se precisaron elementos teóricos y conceptuales, y abarcó contenidos temáticos acerca de la Educación Matemática (EM) como disciplina científica; la Investigación en Educación Matemática (IEM) como campo de producción de conocimientos que incluye a la educación matemática (em) en su praxis; y, los roles de la Teoría y la Historia de la Matemática en la EM y la IEM; en la segunda parte, relativa al tratamiento histórico dado a los objetos matemáticos en ciertas investigaciones venezolanas de EM, se examinaron investigaciones específicas fundamentadas en el Enfoque Onto-Semiótico (Godino, 2002), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1991), el Pensamiento Matemático Avanzado (Dreyfus, 1991) y la Etnomatemática (D’Ambrosio, 1984) .

Como producto de la actividad intelectual generada durante el Seminario ya indicado, se concluyó que en los estudios y trabajos de investigación en EM se debe explicitar la perspectiva histórica desde la cual se abordan tanto el objeto matemático en estudio como el asunto de interés indagatorio que, en relación con tal objeto, esté siendo tratado.

Además de lo anterior, en el Seminario también se evidenció la necesidad de iniciar un relevamiento documental de los trabajos en los que se resalta la importancia de considerar los aspectos históricos del conocimiento matemático en la realización indagaciones ubicables en el campo de la Educación Matemática, tal como lo reseña Gómez (2003); en esto se asume, como premisa, que cuando se hace investigación en relación a cómo enseñar determinado objeto matemático, resulta conveniente examinar la historia del mismo haciendo énfasis en la develación de los factores condicionantes de su emergencia e inserción en el ámbito matemático correspondiente; dicho examen tiene carácter histórico (por lo que se refiere al estudio del desenvolvimiento de las ideas) y epistemológico (en tanto que considera los avatares asociados con su proceso de constitución conceptual); así el trabajo de indagación del educador matemático se verá ampliamente beneficiado si incorpora las dimensiones histórica y epistemológica tal como acaba de ser señalado.

En consecuencia, interpretando a Gómez (Op. cit.) si, cuando se realiza Investigación en Educación Matemática, se revisa la historia será posible encontrar fundamentos y argumentos para sustentar hipótesis que ayuden a la comprensión de hechos o respuestas a interrogantes surgidas en el dominio de la formación en Matemática que reciben las personas que participan en procesos de escolarización asociados con esta ciencia. De conformidad con lo anterior, el objetivo del presente trabajo es establecer vínculos entre la Historia de la Matemática (HM) y la EM; y entre la HM y la IEM. Para esto se realizará una revisión documental interesada y concreta de trabajos en los cuales se haga uso explícito de la HM, teniéndose presente la relación que se muestra en la siguiente figura:

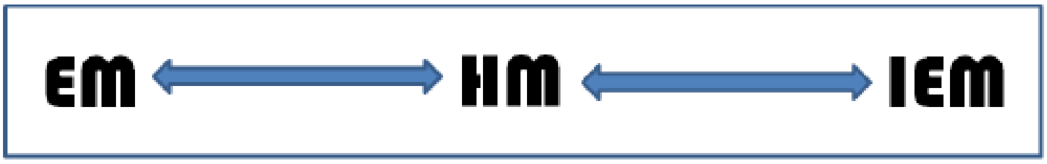



**Figura 1: Papel de la Historia de la Matemática en la Educación Matemática y en la Invetigación en Educación Matemática**

## Referentes Teórico-Conceptuales

### Consideraciones generales sobre la Historia como ciencia.

La palabra Historia se deriva de la voz griega «*ιστορία*» que significa relato o narración. Heródoto (Grecia, 484-425, a. C.), es generalmente considerado como el Padre de la Historia, la definió –brevemente- como «para que ni los sucesos de los hombres con el tiempo se extingan, ni las obras grandes y admirables queden no celebradas, y por qué causas guerrearon unos contra otros»[4]; para Vilar (1982) es "*la ciencia del todo social, y no de tal o cual parte, ciencia del fondo de los problemas sociales y no de sus formas, ciencia del tiempo y no del instante*"( p. 42); mientras que según Lucien Febvre (1982, p. 39) la historia es, por definición, absolutamente social y su misión es organizar el pasado en función del presente; eso es lo que podría denominarse función social de la historia; el análisis científico de esta acumulación de hechos es el objeto de la Historia como una ciencia.

[4] Proemio a sus historias. Herodoto. Libro 1. Traductor Antonio González Caballo (1994).

De acuerdo con Carr (1961), la Historia es un proceso continuo de interacción entre el historiador y los hechos, un diálogo sin fin entre el presente y el pasado. La Historia, en sus dos sentidos –la investigación llevada a cabo por el historiador y los hechos del pasado que él estudia- es un proceso social cuyo propósito es hacer que el hombre pueda comprender la sociedad del pasado, e incrementar su dominio de la sociedad del presente. La Historia consta de un cuerpo de hechos verificados, los cuales son encontrados en diferentes fuentes -primarias o secundarias- que son reunidos por el historiador quien posteriormente los organiza, describe e interpreta.

Aroca (2006), por su parte, propone el concepto de historia-conocimiento, asumido como un proceso comprensivo sobre eventos de gran alcance, considerados como históricos, en el nivel de la sociedad, la política y la economía. Junto con esta conceptualización, Aroca describe los siguientes "*modos*" de creación de la historia-conocimiento:

a) El *primer modo* consiste en partir de la cronología tradicional; permite organizar los datos sobre la base de una secuencia que tiene como eje un hecho o acontecimiento pasado de gran impacto o trascendencia histórica. Se fundamenta en un análisis de *hipótesis* que generalmente son de dos tipos a.1) empíricas son aquellas que enlazan datos por su cercanía elemental y evidente, ya sea cronológica, de entorno o de otro aspecto; también se les denomina *cronogenéticas*; a.2) hermenéuticas, las que enlazan datos por la vía comprensiva, denominadas por ello *filogenéticas*.

b) el *segundo modo* se basa en la comprensión de los fenómenos, y en tal sentido este modo se convierte en un modelo que puede ser construido en *tres formas* distintas: b.1) *analógica*, donde cierto conjunto de cualidades de un sistema A representa al sistema estudiado B; b.2) *iconística*, en la cual se representan propiedades o conjunto de propiedades de un sistema A en relación con un sistema estudiado B; b.3) *simbólica* cuando, con conceptos vinculados entre si, se simboliza a un conjunto de fenómenos y sus respectivas relaciones; en este caso el modelo es categórico y hace énfasis en lo comprehensivo.

c) el *tercer modo* se basa en la Filosofía de la Historia y es sistematizado a partir de axiomas de campos diversos, no necesariamente científicos. Su primordial propósito es el intento de universalización del conocimiento; es el más complejo, dado que origina o propicia la construcción de líneas de desarrollo que abarcan dilemas existenciales en niveles culturales y la civilizatorios globales.

Independientemente de la perspectiva histórica que se escoja, las fuentes y la concepción de temporalidad son fundamentales en la calidad del conocimiento producido. Por esta razón, de acuerdo con Guacaneme (2010), debe procurarse que las fuentes sean -en orden jerárquico- originales, secundarias o didácticas; orientadas con enfoque socio cultural; sobre el objeto de referencia de carácter biográfico; obras originales u objetos específicos. Respecto al tiempo, la periodización debe ser expresada en etapas o épocas ajustadas a la naturaleza del objeto de interés indagatorio; de manera cronológica, con períodos de tiempo dados en forma lineal determinados por fechas ordenadas o en forma filológica donde las etapas se determinan por la evolución de hechos, teorías, conceptos, eventos, etc. que se relacionan en un contexto.

Otra versión de la Historia es la expuesta por Cicerón (106-43 a. de C.) (citado por Reggini, 2011) quien expresó que «La historia es el testigo de los tiempos, la antorcha de la razón, la vida de la memoria, el maestro de la experiencia, el mensajero de la Antigüedad»; en esta acepción destaca una visión que busca en el pasado elementos para comprender el presente y avanzar hacia el futuro con lo cual se resalta de la historia su interés por considerar los acontecimientos sociales como fuentes para la generación de conocimientos que contribuyan a la formación de una conciencia y memoria social, tal como lo explica Benjamin (1991), quien expresa además que: "*el historiador está forzado a explicar de alguna manera los sucesos que le ocupan; bajo circunstancia alguna puede contentarse presentándolos como muestras del curso del mundo*" (p. 123) indicando con esto que el discurso histórico no debe consistir únicamente en una narración de eventos o circunstancias que hayan tenido lugar en tiempos pretéritos.

Por el contrario, el objeto de la Historia -como ciencia- es el análisis científico de hechos sociales, económicos, políticos y científicos entre otros (Anaya y Ramírez, 2001). Quien escribe Historia usa la información contenida en documentos escritos, testimonios orales, restos arqueológicos, gráficas o ilustraciones, entre otras fuentes, así que éstas constituyen la base de los estudios históricos; y las mismas se clasifican en: originales o reproducidas; primarias o secundarias; escritas u orales; y materiales. La calidad de la historia que se produce está asociada directamente con la de las fuentes que se usen para sustentarla. Otro aspecto importante en los estudios históricos es la temporalidad; al respecto Braudel (1968) denomina los tiempos que afectan a todos los procesos históricos como: corto, medio y largo.

- El *tiempo corto* es el de los acontecimientos que abarcan un lapso breve en relación con la capacidad humana para concebir la categoría temporal.
- El *tiempo medio* es el de la coyuntura, entendida ésta como el conjunto de factores (económicos, políticos, sociales o culturales) que caracterizan un determinado momento en la vida de una sociedad. Se caracteriza por su gran movilidad.
- El *tiempo largo* es el de las realidades que subyacen a los acontecimientos o cambios de la coyuntura económica, política o social. Está vinculado con hechos geográficos y es prácticamente inmóvil.

Los “tiempos históricos” propuestos por Braudel (Op. Cit) se pueden establecer en forma relativa (filogenética); absoluta, y a través de una línea temporal de fechas contables y ordenadas.

Según Topolsky (1982, p. 331), para realizar estudios históricos se puede aplicar la que él denomina Metodología Pragmática de la Historia, la cual implica realizar un análisis exhaustivo de los elementos constituyentes de algún hecho reproduciéndolo fielmente y encuadrándolo en su contexto cultural; a esto también se denomina Reconstrucción Histórica, que de acuerdo con Gibbon y Mommsen (citados por Le Goff, 2005, pág. 120), implica reconstruir lo vivido a partir de variadas fuentes cuyo contenido es analizado e interpretado con espíritu crítico. Los estudios históricos de carácter reconstructivo resultan idóneos en los esfuerzos que se realizan en torno a la dilucidación de la historia social de campos disciplinarios emergentes como lo es el caso de la Educación Matemática.

## Relaciones entre Historia (H), Matemática (M), educación matemática (em), Educación Matemática (EM) e Investigación en Educación Matemática (IEM).

En el presente estudio, la Historia (H) constituye el núcleo alrededor del cual se conforma un sistema que vincula Matemática (M), educación matemática (em), Educación Matemática (EM) e Investigación en Educación Matemática (IEM), tal como se muestra en la siguiente figura:

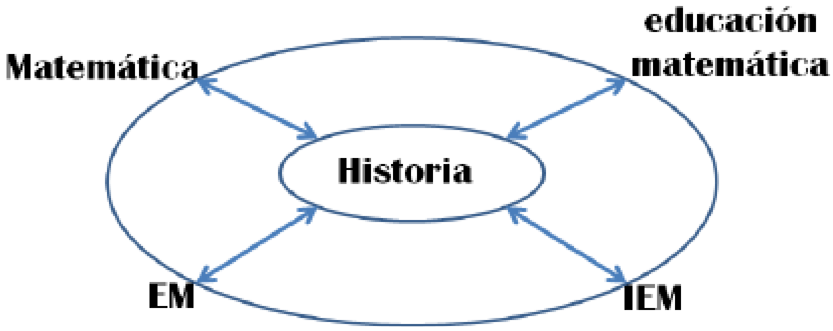



**Figura 2. La Historia como Epicentro vinculante de la Matemética, la eduación matemática,la Educación Matemática y la Investigación en Educación Matemática**

En la Figura 2 son apreciables las siguientes vinculaciones:

1. **[**H -- M] →HM: son los que se refieren explícitamente a la consideración histórica de la Matemática como un todo global, o de objetos matemáticos específicos.
2. **[**H -- EM] →HEM son aquellos en los que se examina el proceso de constitución de la EM como un campo disciplinario que posee especificidad propia.
3. **[**H -- IEM] →HIEM son los que se preocupan por dilucidar los pormenores de los procesos de emergencia, desarrollo y evolución de la IEM.
4. **[**H -- em] →Hem son aquellos en los que se examinarán los pormenores del proceso de enseñanza de la Matemática, tomando en cuenta circunstancias sociales, culturales, económicas, tecnológicas, etc.

Particularmente, las relaciones Hem, HEM y HIEM remiten, respectivamente, a los siguientes asuntos de interés indagatorio: particularidades de los procesos, prácticas y recursos que son puestos en juego para propiciar la formación en matemática de los miembros de una sociedad determinada (Hem); examen de los factores condicionantes del desarrollo de la EM como campo para la producción profesional de conocimientos y saberes acerca de la enseñanza, aprendizaje, estudio y evaluación de la Matemática en los más diversos contextos (HEM); y, revisión de la trayectoria descrita en la indagación de una multitud de asuntos que atraen la atención de quienes tienen interés por los procesos asociados con la producción, desarrollo y transmisión de objetos de la más diversa índole, propios de la Matemática (HIEM).

Por otro lado, la relación entre Historia (H) y Matemática (M) da lugar a un nuevo subespacio disciplinario: la Historia de la Matemática (HM); a partir de ésta se genera otro conjunto de relaciones complementarias a las anteriores; a saber:

1. **[**HM -- em] →HMem: aquí se incluyen los estudios que se interesan en averiguar cuál es el papel que puede desempeñar la HM en la formación matemática de las personas (em).

2. **[**HM -- EM] →HMEM: aquí se tienen presentes los trabajos que conciben a la Historia de la Matemática como un subcampo de la Educación Matematica
3. **[**HM -- IEM] →HMIEM: este rubro abarca los estudios que tienen a la Historia de la Matemática como uno de los asuntos de interés indagatorio de la Investigación en Educación Matemática.

A continuación se desarrollan sucintamente cada una de las siete relaciones antes identificadas.

## [Historia (H) — Matemática (M)] ↔ HM

La Matemática prácticamente se inicia en los albores de la humanidad, tal como lo testimonian los descubrimientos arqueológicos de pinturas y esculturas rupestres cuya antigüedad data de 20.000 años A.C., sobre cuya base es posible develar cómo fue la vida, cultura, actividades de supervivencia, y otros aspectos del desarrollo de los grupos sociales del entorno donde fueron realizados los hallazgos (Clark, 1980). Así, por ejemplo, a través de los jeroglíficos egipcios del 3400 al 525 A.C, se han podido conocer las costumbres sociales, el avance cultural y científico, la organización social y política, entre otras características del pueblo de Egipto; otros ejemplos análogos se tienen en relación con las culturas griega, fenicia, etrusca, babilónica y asiria.

También existen testimonios de la presencia de la Matemática desde la más remota antigüedad, como lo son las *marcas de cuenta* en un hueso de lobo hallado en Checoslovaquia (57 muescas agrupadas en 11 grupos de 5 con 2 sueltas) que datan de hace 30.000 años; otro hueso de hace 25.000 años fue encontrado en Ishango (Zaire); otro con 27.000 años de antigüedad, fue ubicado en Lebombo (Sudáfrica). Con el paso del tiempo, las marcas de cuenta que, se supone, referenciaban el mes lunar de 28 días, dieron paso a los símbolos numerales cuya aparición coincide con la creación –hacia el año 3000 A.C.- de la escritura cuneiforme por los Sumerios, así lo refiere Stewart (2008), quien también señala:

> *Las matemáticas nacieron con los números, y los números siguen siendo indispensables, incluso si la disciplina ya no se limita a los cálculos numéricos. Sobre la base de los números las Matemáticas han construido conceptos más sofisticados y se han desarrollado hasta constituir un área muy amplia y variada del pensamiento humano* (p. 15)

De este proceso da cuenta la HM la cual consiste en una exposición comprensiva, descriptiva e interpretativa de los eventos, personajes y procesos que han coadyuvado a la conversión de la Matemática en un cuerpo de conocimientos que permanece en constante transformación con el transcurrir del tiempo

La relación de la Historia con la Matemática puede apreciarse desde dos *perspectivas*; *general o macro* que, como lo plantea Ball (1960), implica el abordaje del "sumario histórico del desarrollo de las matemáticas, ilustrado por la vida y descubrimientos de aquellos a quienes se les atribuye principalmente el progreso de la ciencia" (p. v), mientras que la perspectiva *particular o micro*, se preocupa por responder preguntas tales como "¿Cuándo, cómo, dónde y por qué aparece? ¿Cuáles son las tradiciones más fuertes que se le atribuyen? ¿Quiénes son sus principales exponentes? ¿Qué aporte realizaron para ser considerados como tales?" (Cicerchia, 2007), como ejemplo ilustrativo del enfoque particular, se puede señalar el libro intitulado "*Matemáticos que cambiaron al Mundo*" (Jiménez, 2006), del cual Alberto Bagazgoitia (2007), miembro de la Real Sociedad Matemática Española, hace una reseña en la que puede leerse:

> *el tratamiento que se hace en el libro de las biografías y de las referencias a las circunstancias históricas, políticas o sociales de la época. […] Recomendable como lectura para los alumnos de la que surgirán -estoy convencido de ello- preguntas e inquietudes que contribuirán a un mejor y más provechoso aprendizaje. Y recomendable también para el profesor, quien no debe perder de vista y que debe poner de manifiesto el proceso histórico en la construcción del conocimiento matemático*

destacando en ella el llamado que hace en el sentido de que la historia de la “construcción de los conocimientos matemáticos” sea utilizada por quienes los enseñan, en su introducción, en los ámbitos escolares; así lo hizo Bagni (2000) quien utilizó un ejemplo extraído del texto ‘Algebra de Bombelli’, editado en 1572, para introducir los conceptos de *Grupo* y *Tabla de Cayley*, respectivamente, a estudiantes con edades entre 16 y 18 años; este ejemplo resalta la utilidad de usar elementos de la historia de los conceptos matemáticos en su enseñanza; en síntesis, el estudio de la Matemática, tanto como obra cultural y legado intelectual como campo de conocimientos específicos, se ve fortalecido si en ello se adopta la Historia.

En efecto, una fuente de la cual puede nutrirse la enseñanza actual de las Matemáticas es su historia; así se puede constatar revisando el recuento de Historia de la Matemática que hace Ball (1960); en esta obra se indica el hallazgo en Babilonia de una tabla de los valores de las potencias cuadradas de una serie de números enteros con base en la cual se puede asumir que ya para esa época eran estudiadas. También hay indicios de que en Tiro, una ciudad al sur del Líbano, se prestaba atención a la ciencia de los números, la navegación y la astronomía lo cual les servía en las relaciones comerciales que mantenían con sus vecinos de Caldea; además poseían un sistema regular de pesos y medidas semejantes a las usadas en Babilonia. Otra fuente escrita certificada, acerca de la aritmética que se usaba en Egipto, es el papiro –de la colección Rhind del Museo Británico- escrito por el escriba Ahmes; en el papiro de Rhind están impresas nociones relativas a los números fraccionarios, solución de ecuaciones numéricas sencillas y geometría.

Otro aspecto importante es el valor social atribuido a la Matemática en las grandes civilizaciones antiguas, lo cual puede inducirse con base en el surgimiento de “escuelas” donde se enseñaban cuestiones propias de la Geometría y la Aritmética. Entre 600 A.C y 400 A.C. surgen las escuelas jónica y pitagórica en las que se destaca el desarrollo de la geometría; teniendo como maestros a Thales y Pitágoras, respectivamente.

Otras escuelas griegas fueron la Escuela de Chios (Oenopides), la de Elea (Xenophanes, Parménides, Zeno y Melissus) y la de Thrace (Leuccipus, Democritus y Epicurus). También, dignas de mención son las escuelas de Atenas y Cyzicus, con Aristóteles, Eudoxus, Hipócrates y Platón, fundadas en los años 420-300 A.C y las de Alejandría, creadas entre los años 30 A.C y 641 D.C, con Euclídes, Arquímedes, Apolonio, Hero, Ptolomeo, Pappus, Hypatia y otros matemáticos reconocidos.

Un estudio de la trayectoria de las escuelas antes mencionadas, lo cual es asunto propio, entre muchos otros, de la Historia de la Matemática, muestra la transformación que a lo largo del tiempo han sufrido los conceptos y procesos de esta ciencia, en sintonía con su respectivo contexto socio-cultural de emergencia; esta información que brinda la Historia ha de tener influencia en el ámbito curricular.

En la relación **[H — M]** ↔ **HM** quedan incluidos los trabajos que consideran a la Matemática como un todo, globalmente; o a algún objeto matemático especificado; de esta clase son los trabajos de Arrigo & D'Amore (2004), Gómez Chacón (2005) y González (2009), en el ámbito internacional; y los de Orellana (1980) y Freites (2000) en el contexto venezolano.

Arrigo & D'Amore (2004) abordan el asunto relativo a la evolución filogenética del concepto de Infinito Matemático considerando los teoremas prepuestos por George Cantor referidos a la equipotencialidad de **R** y **Q** , en el intervalo [0,1]; a la de segmentos y rectas consideradas como conjuntos de puntos; y a la numerabilidad de **Q** y la no-numerabilidad **R**; las anteriores se interesan por los obstáculos epistemológicos asociados con la comprensión del mencionado concepto los que, a su vez, se vinculan con los obstáculos de tipo didáctico e implicaciones didácticas de los avatares por los que ha transitado el proceso de emergencia, evolución y desarrollo de los objetos matemáticos mencionados.

El hilo conductor asumido por Gómez Chacón (2005) son los Problemas Matemáticos; examinando el proceso puesto en juego para su resolución, esta autora pasa revista a los valores y actitudes que se expresan en la actividad resolutoria de problemas, considerado como el "corazón de la matemática" (Halmos, 1980); de este modo se acude a la historia de uno de sus aspectos fundamentales (la Resolución de Problemas) para resaltar los factores estéticos de la Matemática. Por lo tanto puede inferirse que en la formación matemática de los estudiantes debe destacarse la relevancia que tiene el juicio estético como una componente importante en la evaluación tanto de la solución de un problema como del proceso implementado para alcanzarla.

González (2009), hace un recorrido histórico, en clave anecdótica, de las relaciones que a lo largo de diferentes épocas se han establecido entre la Matemática y la Filosofía de las Artes, la Religión, la Política, el Lenguaje y muchos otros ámbitos humanísticos; este autor utiliza la narración histórica para resaltar la "dimensión cultural de las matemáticas" dejando ver que éstas son un "logro colectivo de toda la humanidad"; este trabajo sirve de soporte para aquellos planteamientos de acuerdo con los cuales en la enseñanza de la Matemática han de destacarse los vínculos que ésta tiene con los múltiples ámbitos sociales.

Los otros dos trabajos clasificables en la relación H→M, son los de Orellana (1980) y Freites (2000); la temática que complementariamente se aborda en estos trabajos, es la Historia de la Matemática en Venezuela; Yajaira Freites abarca el período transcurrido desde la época en que este país fue colonia española hasta finales del siglo XIX, haciendo énfasis en la enseñanza universitaria y los inicios de la investigación matemática en Venezuela; mientras que Mauricio Orellana, examina un período más reciente: las dos décadas transcurridas desde 1960 hasta 1980; así que en conjunto estos trabajos permiten obtener una visión panorámica de la emergencia de la Matemática en nuestro país y su progresiva consolidación como campo disciplinario y de investigación, cuestión que se evidencia en el surgimiento de programas de postgrado (especialización, maestría, doctorado) con sus respectivas líneas de investigación, la producción de revistas especializadas, la constitución de grupos organizados alrededor del estudio de temáticas de interés común, y la realización periódica de eventos académicos-científicos donde los investigadores de la Matemática exponen y someten a escrutinio público por sus pares, los resultados de sus indagaciones.

En síntesis, puede señalarse por una parte que el abordaje histórico de la Matemática hace posible reconocerla como una creación humana de carácter universal pero con especificidades locales en cuanto a sus procesos y ritmos de producción; y por la otra que el estudio de la Historia de la Matemática puede ayudar a reconocer la fuente de algunos de los obstáculos que los estudiantes han de superar durante su aprendizaje; a enaltecer sus valores estéticos; y, a develar sus vínculos con múltiples disciplinas humanísticas.

### [Historia (H) — Educación Matemática (EM)] ↔ HEM

Otra relación importante es la que puede establecerse entre la Historia y la EM; en este caso el interés está centrado en la génesis y desarrollo de EM como disciplina por derecho propio (HEM). Para el análisis de los vínculos entre la Historia y la EM se asumirá la concepción acerca de esta última propuesta por González (1995):

> *la Educación Matemática constituye una disciplina que tiene como campo de estudio la problemática específica de la transmisión y adquisición de contenidos, conceptos, teorías, y operaciones matemáticas en el contexto de las diversas instituciones escolares y otras instancias educativas (formalizadas o no), y que se expresa en forma de conocimientos teóricos y prácticos, relativos a dicha problemática, generados por el quehacer académico que, en conferencias, grupos de estudio, ponencias, congresos y exposiciones, llevan a cabo los miembros de la comunidad matemática internacional que se ocupan de la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina y que se materializa, tanto en los informes, libros y artículos que son publicados en revistas u otros medios especializados que le sirven de soporte, como en las expresiones orales y en los artefactos producidos por diferentes comunidades.* (p. 6)

En la anterior definición de la EM se destacan: su campo de estudio; la forma que adquieren los resultados de las indagaciones que en dicho campo se realizan; los espacios de circulación de sus producciones; quiénes son sus practicantes; y, las modalidades de manifestación de los resultados (publicaciones, disertaciones y artefactos) de los estudios realizados en torno de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

El logro de este estatus de la EM es consecuencia de un largo proceso cuyos pormenores reclaman cada vez más atención.

### [Historia (H) — Investigación en Educación Matemática (IEM)] ↔ HIEM

Según Kilpatrick (1994), la IEM tiene sus orígenes en el siglo XIX cuando “las universidades graduaban profesores de matemáticas para la escuela secundaria, pero la instrucción en la enseñanza de las matemáticas era, en el mejor de los casos, una parte separada y menor que la de preparación del profesor”. Félix Klein (1849-1925), quien fuera Presidente y fundador del ICMI –desde 1908 hasta 1920- fue promotor de programas de metodología y formación para profesores de matemáticas y un visionario en asuntos relativos a la EM. Esta modalidad fue seguida por otras universidades en diferentes países de Europa como fueron

Inglaterra y Francia, de tal manera que la EM empezó a desarrollarse como campo de estudio para dar respuesta a la necesidad de aumentar la cantidad de profesores bien preparados.

Surge, entonces, en 1871 la primera agrupación de profesores de Matemáticas, creada en el Reino Unido, denominada “Asociación para la mejora de la enseñanza de la geometría” - la AIGT o Association for the Improvement of Geometrical Teaching- y que resultó ser la precursora de la “Mathematical Association”. Estas iniciativas vieron coronados frutos, ya en el siglo XX, con la aparición de centros de estudios en educación superior con el propósito de formar profesores de Matemáticas en países como USA, Reino Unido, Alemania y Bélgica. Con el tiempo, y en formas diversas según los países, la EM fue reconocida como tema de estudio a nivel de las universidades, y con ello el compromiso de las personas promotoras de la formación de profesores de Matemáticas en éstas instituciones a no sólo enseñar sino también a investigar. Así se dio inicio a la actividad investigativa en EM.

En el proceso antes descrito, dos disciplinas han tenido una influencia determinante en el desarrollo de la IEM. La primera ha sido la Matemática misma pues los matemáticos siempre se han interesado en el asunto de la enseñanza y el aprendizaje de su ciencia; por ello realizaron estudios históricos, filosóficos, y algunas investigaciones empíricas que contribuyeron al crecimiento de la problemática que los investigadores actuales acometen. La segunda influencia importante en la IEM fue aportada por la perspectiva psicológica a través de la cual pudieron asociarse los patrones cognitivos y las dificultades de aprendizaje, entre otros factores psicológicos, asociados a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. En este sentido surgieron grupos de investigación relativos a este campo investigativo, como por ejemplo el PME (International Study Group for the Psichology of Mathematics Education).

La IEM actualmente cubre una gran variedad de temas desde cómo aprende el niño a contar hasta cómo el adolescente asimila el proceso de integración en el cálculo; como también los efectos del aprendizaje tecnológicamente asistido y la estructura de los cursos generales y las clases particulares; abarcando con esto tanto la enseñanza y el aprendizaje como el desarrollo curricular y metodologías de investigación, además de los procesos afectivos y de cognición surgidos de la contextualización social de la EM.

De acuerdo con lo anterior Rico (1999a), define la IEM como una actividad humana que se propone elaborar sistemáticamente conocimiento fundado en: el diseño, desarrollo y evaluación del currículo, la formación del profesorado y su desarrollo profesional, en un marco teórico en que se plantean problemas y cuestiones de la EM, sostenido por la Matemática, la Epistemología e Historia de la Ciencia, la Pedagogía, la Psicología y la Sociología de la Educación.

Por otro lado, Gómez (2000) hace un estudio personalizado y analiza la perspectiva de la IEM, en el contexto de los países subdesarrollados de Latinoamérica, extrapolando la experiencia aportada por su grupo de investigación denominado “Una Empresa Docente”; refiere este autor que en un principio surgieron interrogantes que a la postre permitieron definir su direccionalidad en el campo disciplinario de la IEM. En función de la actividad docente los investigadores en Educación Matemática intentaban centrarse en aspectos bastante particulares de alguna problemática y buscaban explorar esos aspectos de manera sistemática y metódica. De este modo, luego de intensas cavilaciones, encuentran la siguiente caracterización de la IEM: “la investigación en Educación Matemática es lo que hacen aquellas personas que pertenecen a la comunidad de investigadores en Educación Matemática y que es aceptado por esa comunidad”. Se añade, así, que el significado de la investigación en Educación Matemática lo construye la misma comunidad con lo que hace y con lo que acepta como válido para publicación.

Como los educadores en Matemáticas se plantean la misión de mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la investigación es un elemento que articula el resto de las actividades de formación y desarrollo profesional de los profesores; y en los últimos tiempos han continuado trabajando en diferentes áreas de la Educación Matemática: la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, la problemática de las matemáticas escolares desde un punto de vista institucional y la problemática de la enseñanza y aprendizaje del pre-cálculo con la presencia de la tecnología.

Sin embargo Gómez (Ob. Cit.) observa algunas características de los países en vía de desarrollo que aparecen junto con la actividad investigativa en EM y atentan contra su progreso. Una de ellas es que la comunidad de investigación en Educación Matemática considera que ésta no tiene que asumir una responsabilidad directa con los problemas prácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, mientras que muchos actores sociales (la opinión pública, los padres de familia, los directivos docentes, los funcionarios de la administración y los alumnos) tienden a pensar que esa sí es una responsabilidad de esa comunidad. Mientras los profesionales de distintas disciplinas –por ejemplo médicos, economistas y otros- son entrenados para interpretar y utilizar los resultados de sus investigaciones en sus respectivos campos de conocimientos, los profesores de matemáticas no tienen necesariamente esa capacidad, ni están siendo necesariamente entrenados para desarrollarla. Y en la práctica están aislados de otras disciplinas como la Psicología y la Sociología relacionadas, en causa y efecto, tanto a la formación matemática de los alumnos como la de los docentes.

En conclusión, la preocupación de la investigación en educación matemática por “elevar la calidad de su enseñanza–aprendizaje” debe ir más allá de la práctica docente en el aula y debe tener en cuenta aquellas otras prácticas que, a nivel institucional y nacional, también afectan la formación matemática de los alumnos; y, debe, por demás, mostrar qué es lo que se está haciendo en el país para establecer un sistema referencial respecto a otras naciones que permita calificar su desarrollo. En el contexto venezolano, González (2000) opina que:

> *Desde el punto de vista epistemológico, la definición de Investigación en Educación Matemática puede ser mirada como proceso de producción de saber por parte de un sujeto en relación con un objeto. Tal sujeto es colectivo en tanto que cada investigador no puede dejar de ser visto como miembro de una comunidad. El objeto, por su parte, alude a situaciones sociales (clases, implantaciones curriculares, recursos didácticos) que involucran al propio sujeto que lo aborda. Esto le asigna un carácter específico a la relación sujeto-objeto en la Investigación en Educación Matemática, la cual tiene implicaciones importantes en relación con lo metodológico, es decir, con las maneras como se llevan a cabo las indagaciones en este ámbito. El objeto principal de indagación*

> *en la investigación en Educación Matemática tiene que ver con la búsqueda de respuestas, entre otras, a interrogantes tales como: qué es la Matemática y cómo ésta puede o debe ser enseñada y cómo es aprendida en las instituciones educativas, que atraen cada vez más la atención de educadores y matemáticos profesionales.* (p. 13)

De acuerdo con el razonamiento anterior, González (2011) señala que siendo la Matemática tanto un bien cultural asociado al desarrollo de la humanidad como una ciencia en cuya construcción y desarrollo ha participado el hombre usando múltiples prácticas sociales, que han servido de base para la elaboración de las nociones constitutivas del campo de la Matemática, es meritorio el estudio de la evolución de su institucionalización a través de los procesos de construcción, difusión, transmisión y apropiación de los conocimientos y saberes matemáticos. Así, la IEM se ocupa de examinar indagatoriamente estos procesos, mediante los cuales ha resultado un campo disciplinario para la producción profesional de conocimientos, donde despliegan su actividad quienes asumen a la Educación Matemática como el campo de su desempeño profesional en todo el mundo.

### [Historia (H) — educación matemática (em)] ↔ Hem

La relación **Hem incluye** los trabajos que hacen referencia a cómo se ha enseñado la Matemática a través del tiempo, tales como el de Beyer (2012), Schubring (2005, 2008), y Arbelález Rojas (2011); Beyer (2012) realizón un estudio histórico-documental crítico-interpretativo que tuvo como objeto principal de análisis al conjunto de obras didácticas, producidas en Venezuela entre 1826 y 1969, usadas para la enseñanza de las matemáticas elementales. En el ámbito internacional destacan las obras de autores como Schubring (2008) quien mediante el estudio de “una tabla logarítmica alemana” realizó descubrimientos epistemológicos en torno a la naturaleza y el desarrollo de la matemática, y a la relación entre la matemática pura y la matemática aplicada, mienras que Arbeláez Rojas (2011) hace un análisis del proceso de instauración de unos elementos epistemológicos que transformaron los fundamentos del análisis matemático, en el contexto de algunas instituciones de educación superior en Colombia entre los años 1850 y 1950.

### [Historia de la Matemática (HM) — educación matemática (em)] ↔ HMem

El vínculo HM ↔ em remite a la puesta en juego de la HM en la práctica del docente, es decir, en el trabajo que éste realiza en el aula de clases, mediante la creación de estrategias para la enseñanza y la elaboración de recursos para el aprendizaje de la matemática que involucran la historia de las nociones matemáticas que se pretenden enseñar.

Uno de los autores que ofrece argumentos que justifican el uso de HM en la educación matemática es De Guzmán (1992) quien afirma que la historia se puede y se debe utilizar, por ejemplo, para ayudar a los alumnos a comprender una idea matemática difícil de un modo adecuado, puesto que si no tienen en cuenta las vueltas y revueltas que el pensamiento matemático ha recorrido hasta dar con la noción, rigurosamente formalizada del objeto matemático que se está enseñando, se corre el riesgo de introducirlo a través de su concepción más elemental o menos elaborada. Además, el conocimiento de la historia de la matemática y de la biografía de sus creadores más significativos nos hace plenamente conscientes del carácter esencialmente humano de la Matemática, es decir, dependiente de las circunstancias sociales, económicas y políticas del momento, y de los prejuicios vigentes en una determinada época, con lo cual se pone de manifiesto la notable influencia que la filosofía, la tecnología, otras ciencias y la cultura en general han ejercido en el desarrollo de la Matemática.

De acuerdo con De Guzmán (Ob. Cit), cuando en la enseñanza de la Matemática (em) se hace uso de su historia, se pueden lograr, entre otros, los siguientes objetivos:

- hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas.
- enmarcar temporal y espacialmente grandes ideas y problemas, junto con su motivación y precedentes.
- señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente.
- apuntar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes.

A continuación se ilustra la posibilidad de fundamentar en su historia la enseñanza de métodos para calcular integrales. En efecto, se tienen noticias según las cuales los griegos calculaban áreas de regiones mediante métodos geométricos que les permitían convertirlas en un cuadrado equivalente, en este caso se planteaban problemas de cuadraturas; el mismo asunto – en el siglo XVII- se resolvía con el método exhaustivo usando una serie de figuras de área conocida; tiempo después -en el siglo XIX- se estableció la definición analítica de la integral definida, junto con su interpretación geométrica, mediante el concepto de límite y las denominadas sumas de Riemann. A posteriori, apareció una generalización de esta definición, dando lugar a una concepción moderna llamada Integral de Lebesgue; finalmente al uso de la integral en la Física para caracterizar el concepto de flujo a través de una superficie, con lo cual un concepto matemático trasciende hacia otra disciplina.

Por su parte, Sierra (1997) afirma que "en los últimos años ha crecido extraordinariamente el interés por introducir una perspectiva histórica en la enseñanza de las matemáticas. […] Los trabajos pioneros de Branford, Smith, Rey Pastor y Puig Adam son una muestra de ello" (p. 93); este autor agrega que en las conferencias del International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics (HPM) se pueden encontrar planteamientos teóricos y ejemplos prácticos referentes al papel de la historia en la enseñanza de la Matemática.

En sus Notas de Historia de las Matemáticas para el currículo de secundaria, Sierra (1997) indica que la incorporación de la HM en los estudios de esta disciplina, hace posible: (a) examinar el papel desempeñado por el correspondiente contexto socio-cultural en la evolución de los conceptos matemáticos y de los procedimientos asociados con éstos; (b) develar la trayectoria descrita por la emergencia, desarrollo y evolución de las teorías matemáticas; (c) revisar la evolución y transformaciones que han sufrido, a lo largo del tiempo, las demostraciones de ciertas verdades matemáticas; (d) apreciar los modos de emergencia y evolución de los conocimientos matemáticos en correspondencia con las características de la sociedad en la que tales modos tienen lugar.

Según lo expuesto, la integración de la HM en su enseñanza propicia un cambio de perspectiva sobre la misma, restableciéndole su estatus de actividad cultural y humana, ayudando con ello a motivar su aprendizaje.

### [Historia de la Matemática (HM) — Educación Matemática (EM)] ↔ HMEM

Esta relación hace referencia a los trabajos en los que la HM constituye un asunto de indagación pertinente y de interés para la EM; en este ámbito se ubican los trabajos de Vidal, Quintanilla y Maz (2010); González, (2010); Fried (2008); Sierra (1997); Furinghetti (2007); González (1991); Furinghetti & Radford (2008).

La formación de profesores de Matemática es uno de los asuntos de interés indagatorio que convoca mayor atención en el campo de la EM, y Vidal, Quintanilla y Maz (2010) destacan que la HM ha de ser un componente importante en la preparación del profesorado que se desempeñara profesionalmente en la enseñanza de las Matemáticas.

Por su parte, González (2010) admite que en la enseñanza de algún objeto matemático puede resultar muy provechoso conocer tanto sus circunstancias históricas, como todo el conjunto de otras cuestiones que con él se relacionan directa o indirectamente; a este proceso se le designa como análisis epistemológico de un objeto matemático, lo cual requiere del conocimiento de asuntos tales como: hechos históricos relevantes asociados con el objeto, los períodos históricos cuando ocurrieron y los marcos de referencia predominantes durante tales períodos; así como también las rupturas de las que formó parte, los obstáculos que dificultaron su comprensión, así como el estado de su inserción en la estructura de la Matemática contemporánea actual; todo este conocimiento de naturaleza histórica y epistemológica constituye una notable herramienta para el trabajo en el aula llevado a cabo por el docente de matemáticas.

Tomando en consideración que no puede haber Educación Matemática (EM) sin Matemática (M), Fried (2008b) aborda el asunto relativo al papel que desempeña la HM en la prospectiva de la EM y su impacto en la consolidación de ésta como disciplina científica; he aquí un argumento justificativo para examinar, en conjunto, la historia de la Matemática y la de la EM considerando que esta última estás íntimamente vinculada con la trayectoria seguida por la International Comission of Mathematics Instruction (ICMI).

Uno de los aspectos clave en el desenvolvimiento de disciplinario de la EM es la formación de profesores, asunto éste donde se reconoce la importancia que tiene el conocimiento que éstos tengan tanto de la HM, globalmente considerada, como la de los objetos matemáticos con los que se han de lidiar escolarmente en las aulas de clase.

A la relación HM - EM, vía formación de profesores, están consagrados los trabajos de Sierra (1997) y Furinghetti (2007). Sierra considera que de ser incluida la HM en el currículo de la educación secundaria entonces en la formación de los docentes de Matemáticas, que vayan a desempeñarse en este nivel educativo, debe haber un componente importante de la HM que pueda ser utilizado con fines didácticos; para ilustrar cómo podría hacerse esto, Sierra presenta ejemplos referidos a: números y operaciones; medidas; geometría (Teorema de Pitágoras), tratamiento de la información y tratamiento del azar.

Por su parte Furinghetti plantea que la HM puede constituir el contexto que los estudiantes para Profesor de Matemática, requieren para enseñar los temas de una manera diferente; esta autora ejemplifica su planteamiento apelando al caso del Álgebra mediante el cual muestra cómo la historia podría ser utilizada en la construcción de secuencias de enseñanza; adicionalmente Furinghetti & Radford (2008) develan posibles conexiones y vínculos susceptibles de ser establecidos entre el desarrollo histórico de los conceptos matemáticos y el aprendizaje de éstos en el aula de clases; así que, de acuerdo con estos autores, se puede relacionar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes con el desenvolvimiento histórico que han tenido los conceptos de la Matemática.

De tal manera que la Historia sirve, no sólo para obtener un mejor conocimiento de la Matemática, sino que puede ser concebida como un medio para transformar la enseñanza de ésta; el uso didáctico de la HM permitiría entrelazar el conocimiento acerca de la evolución de los conceptos matemáticos con el diseño de actividades de aula que coadyuven al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

En la misma dirección que Furinghetti & Radford (2008) se orienta el trabajo de González (1991) quien considera que la HM ha de ser una fuente de inspiración y de auto formación permanente del profesor de matemáticas, así como de orientación para la actividad que lleva a cabo en el aula; este autor, además, afirma que no puede lograrse una comprensión completa y profunda de las Matemáticas, ni de ninguna otra ciencia si no se conoce su historia; sobre estas premisas el autor señala que conocer la HM permite des-dogmatizar y enriquecer culturalmente su enseñanza, al tiempo que constituye un relevante instrumento didáctico.

Entre la amplia literatura en la que se trata la relación HM - EM se destacan los trabajos de Anacona (2003) y Fauvel & Maanen (2000); la autora, del primero de los mencionados, destaca los siguientes tres vínculos: Historia y Epistemología de las Matemáticas; Historia y Enseñanza de las Matemáticas; e, Historia Social de las Matemáticas; el inicial remite a la consideración de la trayectoria descrita por los procesos de construcción de las teorías, conceptos y demás objetos constitutivos de la Matemática como disciplina científica; en el segundo, se tratan los variados usos que puede dársele a cuestiones históricas de la matemática para la enseñanza de esta ciencia; y, en el tercero se ponen de relieve los pormenores de las dinámicas sociales que han estado implicadas con el desarrollo conceptual de la Matemática.

El trabajo de Fauvel y Maanen es el resultado de un estudio encargado por la ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), con el fin de responder la interrogante ¿Qué papel tiene la historia de la Matemática en la educación matemática? Para ello, los responsables del estudio se propusieron: estudiar y evaluar el estado actual de todo el campo de la educación matemática; servir como recurso para docentes e investigadores, y para quienes participan en el desarrollo curricular; indicar futuras líneas de actividad investigativa; dar orientación e información a los responsables de las políticas y problemas relacionados con el uso de la historia en la pedagogía.

Los asuntos abordados por el estudio fueron: el contexto de políticas; cuestiones filosóficas, interdisciplinarias y multiculturales; integración de la historia: perspectivas de investigación; Historia de las Matemáticas para la Formación de Profesores; formación Histórica y entendimiento estudiantil de las matemáticas; la

Historia como apoyo de diversas exigencias educativas – oportunidades para el cambio; integración de la Historia de la matemática en el aula de clases: un estudio analítico; soporte histórico para temas particulares; el uso de fuentes originales en el aula de clases; y, medios de comunicación no tradicionales y otros recursos. Una descripción muy completa y resumida de estos temas puede verse en Furingghetti (2006).

Además de lo anterior, en el estudio también aparece un listado de los países donde se explica el papel que ocupaba, en el momento, la historia de la Matemática en sus programas educacionales; del continente americano se hace referencia a Argentina, Brasil y Estados Unidos de América, y –curiosamente- a pesar de su conocida reputación en el campo de la Matemática Educativa, México está ausente en el estudio; la obra escrita de Fauvel & Maanen (2000), en síntesis, constituye un manual donde se puede obtener valiosa información acerca de las vinculaciones entre la Historia, la EM, la em (educación matemática referida a la práctica en el aula de clases, la enseñanza y el aprendizaje) y la IEM.

En el ámbito venezolano, también han sido identificadas algunas fuentes con las que se pone de relieve la perspectiva histórica; tal es el caso de Orellana (1980), que examina la dinámica del desarrollo de la formación de matemáticos venezolanos durante los años 1960-1980; Serres (2004) aborda el desenvolvimiento de la comunidad venezolana de educadores matemáticos; Freites (2000) examina la evolución constitutiva de la Matemática en Venezuela desde la época de la colonización española hasta la actualidad. Estos tres trabajos ofrecen una visión macroscópica de la relación entre La Historia y la EM.

Una visión microscópica es la que nos ofrece, por ejemplo, León (2006, 2007) cuando hace uso de la HM con fines instructivos; en León (2006), se toma al uso o no de la HM como elemento motivador de algún concepto matemático, como uno de los criterios para evaluar libros de texto usados en la enseñanza de la probabilidad a nivel de la Educación Básica mientras que en León (2007) se examina la línea cronológica, temporal, de emergencia de los conceptos sobre cuya base se construyo la Teoría de las Probabilidades, tales como incertidumbre, desorden, caos, complejidad, entre otros.

### [Historia de la Matemática (HM)-Investigación en Educación Matemática (IEM)]↔HMIEM

Esta conexión alude a los trabajos de investigación en EM que tienen a la HM entre sus asuntos de interés indagatorio como son los casos de los estudios realizados por Capace y Arrieche (2007) y Valdivé & Garbin (2008); los primeros nombrados realizan un análisis epistemológico sobre el Cálculo Integral en una variable real, profundizando en su origen, desarrollo y consolidación; para ello identifican los diferentes significados institucionales de este objeto matemático, lo cual utilizan en el diseño de estrategias didácticas para enseñarlo; además, identifican configuraciones epistémicas de la integral al revisar las soluciones a problemas que se plantearon desde su origen, su arraigo y generalización. Como metodología usan la narración, con periodización filogenética, y el concepto de la integral presentado en forma explícita como objeto de la investigación para develar su evolución conceptual e identificar configuraciones epistemológicas del mismo.

Por su parte, Valdivé, & Garbin (2008), al investigar acerca de los esquemas epistemológicos asociados con la noción de infinitesimal, presentan la caracterización, análisis, modelos conceptuales y epistemológicos que se han hecho presentes a lo largo de su evolución histórica, identificando así cuestiones epistémicas tales como: una razón; un indivisible; una diferencia; un incremento; una razón de cambio; un símbolo; y una función. Se advierten las ideas, los métodos, los enfoques y problemas que los matemáticos abordaron en un cierto contexto. El examen histórico de la evolución de la definición de infinitesimal permitió a las autoras calificar los prototipos, los métodos, el contexto y los conceptos asociados a ésta, a partir del trabajo realizado por matemáticos representativos;e así se realizaron, Así, se realiza una periodización evolutiva -de línea temporal filogenética- para la descripción y caracterización del concepto de infinitésimo desde el 500 a.c. hasta el siglo XIX.

La conexión HM - IEM también alude a los trabajos de investigación en EM que vinculan la HM con su correspondiente asunto de interés indagatorio; un ejemplo es el caso del trabajo de González Urbaneja (1991) quien considera que para la enseñanza de los conceptos matemáticos se pueden extraer orientaciones a partir de la génesis histórica de los mismos, argumentando que una comprensión profunda de los conceptos de cualquier ciencia requiere del conocimiento de su historia.

## Conclusiones

Extrapolando a la EM, y por ende a la IEM, lo dicho acerca de la Historia en relación con la Matemática, se pude inferir que cuando se abordan la EM y la IEM con una perspectiva histórica, es posible:

- Precisar cómo han surgido los planteamientos teóricos propios de la EM.
- Identificar cuáles son los problemas abiertos en la EM, en cada periodo histórico, su evolución y su situación en la actualidad.
- Enmarcar en tiempo y espacio, los asuntos de interés indagatorio que han llamado la atención de los investigadores en EM.
- Señalar las conexiones de la Matemática con otras ciencias, de cuyas mutuas y fuertes controversias han surgido tradicionalmente muchas ideas importantes.

D’Amore (2005), quien refiere casi sin distinción la EM, la Didáctica de la Matemática y la Matemática Educativa, señala que la investigación actual en EM está “direccionada a centrar la atención sobre el fenómeno del aprendizaje, antes que en la enseñanza afrontando la Didáctica como epistemología del aprendizaje”. Estas dos propuestas acerca de la IEM, lejos de ser antagónicas, son complementarias y evidencian el carácter polisémico del concepto EM.

Los campos temáticos contextuales usados con más frecuencia, para la IEM según la búsqueda que los autores del presente estudio realizaron fueron: Filosofía, Epistemología e Historia de la EM, Formación de profesores, Obstáculos epistemológicos, Historia de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, Resolución de problemas, Enculturación Histórica de la EM, Evolución Histórica de conceptos, objetos y Teorías de la Matemática, Desarrollo del Currículo, Evaluación, Recursos para el aprendizaje, Aspectos Axiológicos de la Matemática, Rol de la HM en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Estos temas de investigación tienen gran coincidencia con la propuesta de campos temáticos de especialización en EM señalada en Rico (1999 b).

La revisión de fuentes permitió ubicar los siguientes autores con estudios asociados a la HM: Capace & Arrieche (2007); Valdivé & Garbin (2008); y González Urbaneja (1991). Los trabajos realizados por Capace & Arrieche (2007) y Valdivé & Garbin (2008) justifican el uso de la H de objetos y conceptos matemáticos; en efecto el primero de estos, Capace & Arrieche, utilizan el enfoque Onto-Semiótico (Godino, 2003) para indagar acerca de los significados institucionales e identificar las configuraciones epistémicas en el concepto de integral, de una función en una variable real; en el segundo, Valdivé & Garbin, realizan el estudio del concepto de infinitesimal generando esquemas conceptuales y epistemológicos, a través de la perspectiva del Pensamiento Matemático Avanzado; ambos estudios, íntimamente relacionados en el dominio del Cálculo infinitesimal e integral, además de abordar los obstáculos epistemológicos en el aprendizaje, develan la evolución histórica de sus respectivas concepciones.

## Bibliografía

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemáticas*. Revista EMA, Vol 8*, Nº1, 30-46, Colombia.

Anaya H, y Ramírez Sánchez, M.(2001). *Historia General. Curso preparatorio de Acceso a la Universidad para mayores de 25 años.* Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Las Palmas de Gran Canaria. pp. 15-32

Arbeláez Rojas, G. I. (2011). *Proceso de instauración del análisis matemático en Colombia: 1850-1950.* Tesis Doctoral No Publicada. Cali, Colombia: Universidad del Valle. Resumen Disponible en: http://iep.univalle.edu.co/iep2007/archivos/CENDOPU/Tesis%20de%20educacion%20doctorado%20a%20junio%2025%20de%202012.pdf

Aroca, R. (2006). Criterios de Construcción y Uso de la Historia – Conocimiento.*Facultad de Filosofía – Universidad Católica de Santiago de Guayaquil.* Guayaquil. Ecuador .Pág. VII-XIII.

Arrigo, G. & D'Amore, B (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, Agosto, año/vol. 16, número 002- pp 5-19, Mexico: Santillana.

Bagazgoitia, A. (2007). Reseña de libro "Matemáticos que cambiaron al mundo" de Luis Jiménez. *Sigma.* Nº 31. Noviembre. Pág 243. Departamento de Educación del Gobierno Vasco. Euzkadi. España.

Bagni, G.T. (2000), 'The role of the history of mathematics in mathematics education: reflections and examples', in I. Schwank (editor), *Proceedings of CERME-1* (Osnabrück), v.II, Pág. 220-231.

Ball, W.W.R. (1960). *A Short Account of de History of Mathematics.* Dover Publications. New York. U.S.A.

Benjamin, W. (1991). *Para una crítica de la violencia y otros ensayos.* Iluminación IV. Madrid, España: Editorial Taurus.

Beyer, W. (2012). *Estudio evolutivo de la enseñanza de las matemáticas elementales en Venezuela a través de los textos escolares: 1826-1960.* La Paz (Bolivia): III del Convenio Andrés Beyo.

Braudel, F. (1968), *La Historia y las Ciencias Sociales.* Madrid: Alianza Editorial.

Capace, L. y Arrieche, M. (2007) Algunas Configuraciones Epistémicas de la Integral en una Variable Real Desde su Origen hasta su Consolidación. *Enseñanza de la Matemática.* Vol. 12- 16 (pp 35- 52). ASOVEMAT.

Carr, E. (1961), *¿Qué es la Historia?* Buenos Aires: Editorial Planeta. 3ª Edición 2010.
Chevallard, Y. (1991) *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*, Aique, Buenos Aires. Argentina.
Cicerchia, L. (2007) *La Matemática y la Cosmovisión del Mundo* (Informe Preliminar). [Documento en línea] Undécimas Jornadas "Investigaciones en la Facultad" de Ciencias Económicas y Estadística, Dpto. de Matemática, Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas, Escuela de Estadística. Disponible: www.fcecon.unr.edu.ar/web/?q=investigacion/actasdelasjornadas/...
Clark, G. (1980). *Arqueología y Sociedad.* Madrid, España: Ediciones Akal/Universitaria. Cap VII.
D'Ambrosio, U. (1984). Socio-cultural bases for mathematical education. *Proceedings of Icmi-5.*Adelaide. Australia.
De Guzmán, M. (1992) . Tendencias innovadoras en Educación Matemáticas. *Olimpíadas Matemáticas Argentinas.* Buenos Aires.
Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical thinking process . En Tall (Ed) *Advanced Mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 25-41.
Fauvel, J. & Van Maanen, J. (2000, 63-66). *History in mathematics education: the ICMI Study.*(Eds) Kluwer, Dordrecht,. Evelyne Barbin, Giorgio T. Bagni, Lucia Grugnetti, Manfred Kronfellner, Ewa Lakoma, Marta Menghini.
Febvre, L. (1982): *Combates por la historia*. Barcelona, España: Ed. Ariel
Freites, Y. (2000). *Un Esbozo Histórico de las Matemáticas en Venezuela. I Parte: Desde la Colonia Hasta Finales del Siglo XIX*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. VII, 1 y 2
Fried, M. (2008). History of Mathematics in Mathematics Education: a Saussurean Perspective. *The Montana Mathematics Enthusiast*, ISSN 1551-3440, Vol. 5, nos.2&3, pp.185-198. Montana Council of Teachers of Mathematics & Information Age Publishing.
Fried; M. (2008). *History of Mathematics and the future of Mathematics Education.* Mathematics Education: an ICMI perspective (WG5).
Furinghetti, F. (2006). *A Report on the 10th ICMI Study: The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics.* Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction No. 58 - pp. 38-45.
Furinghetti, F. (2007). *Teacher education through the history of mathematics.* Educational Studies in Mathematics 66, 131-143.
Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: From Philogenesis and Ontogenesis Theory to classroom practice. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 631-654). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherchesen Didactique des Mathématiques*. 22, 2/3, pp. 237-284.
Gómez, B. (2003). *La investigación histórica en Didáctica de la Matemática.* Investigación en Educación Matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 79-86). Granada: Universidad de Granada.
Gómez, P.(2000). Investigación en Educación Matemática y Enseñanza de las matemáticas en países en desarrollo. *Educación Matemática.* 12(1). Pp. 93-106.

Gómez-Chacón, I. (2005) *Valores y conocimiento matemático: la belleza matemática*. Diálogo Filosófico 62. pp. 285-306.

González U. P. (1991). Historia de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su ensenanza. *Historia y Epistemología de las Ciencias.* Seminario Permanente de Historia de las Matemáticas. ICE de la Universidad Politécnica de Catalunya. IB «Sant Josep de Calassanq» C/ Sant Quintí,08026 Barcelona. (pp. 32-50)

González U. P. (2009). *Historia de la Matemática y Dimensión Cultural de las Matemáticas.* ACTES D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LATÈCNICA NOVA ÈPOCA / VOLUM 2 (1) / p. 337-346.IES SANT JOSEP DE CALASSANÇ, BARCELONA. ESPAÑA.

González, F. (1995). La Investigación en Educación Matemática: una revisión interesada. En González, F. (1995). *La Investigación en Educación Matemática*. Maracay: Ediciones COPIHER, Cap. 14, pp. 1-42

González, F. (2000). *Programa ALIEM XXI: Agenda Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática para el Siglo XXI.*

González, F. (2000). *Programa ALIEM XXI: Agenda Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática para el Siglo XXI.*

González, F. (2011). Inventario de Historia de la Educación Matemática en Venezuela. . *XIII CIAEM-IACME,* Pág. 2. Recife. Brasil.

González, F. (2011). *Seminario Doctoral Perspectivas de la Investigación en Educación Matemática.* Trabajo no publicado. Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara de Maracay. Maracay. Aragua. Venezuela.

González, J. L. (2010). *Las relaciones entre la Epistemología y la Educación Matemática* [Documento en línea] Formato de archivo: PDF/Fundamentos de la Educación Matemática. EPISTEMOLOGÍA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Disponible en www.gonzalezmari.es/Ep_y_E_M_reflex.pdf.

Guacaneme, A. (2010). *¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor?* [Documento en línea] Formato de archivo: PDF / *Universidad Pedagógica Nacional.* Disponible en portales.puj.edu.co/.../...

*Halmos, P. (1980). The Heart of Mathematics. American Mathematical Monthly. 87(7), pp 519-524. USA.*

Jiménez, D. (2006) *Matemáticos que cambiaron al mundo*. Editorial: Los Libros de El Nacional - CEC, S.A. Distrito Capital. Venezuela.

Kilpatrick, J. (1994). Historia de la investigación en Educación Matemática. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra (eds.), Educación *Matemática e Investigación*. Madrid: Síntesis.

Le Goff, J. (2006). *Pensar la historia. Modernidad, presente, progreso*. Ediciones Paidós Ibéricas S.A. Barcelona. España.

León, N. (2009). *La historia como elemento motivador hacia el estudio de la probabilidad: el problema de la apuesta interrumpida.* Sapiens. Revista Universitaria de Investigación, Año 10, Nº. 1,

León, N. (2007). Un Recorrido de lo Certero a lo Probable por los Caminos de la Ciencia y de nuestra Acción Ciudadana. *Enseñanza de la Matemática.* Vol. 12-16 (pp 19-34). ASOVEMAT.

Orellana, M. (1980). *Dos décadas de matemática en Venezuela*. Caracas, Venezuela: UNA.

Reggini, H.(2011). *El futuro sigue sin ser lo que era*. Academia Nacional de Educación/ 1a. ed./ Pág. 174. Buenos Aires. Argentina.

Rico, L. (1999 b). *Producción Científica Clasificada por Campos Temáticos*. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada. Granada. España.

Rico, L. (1999 a). Matemáticas, Universidad y Formación del Profesorado. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 34, pp. 245-262

Ruiz, A. (1989). *Historia de la Ciencia y la tecnología: el avance de una disciplina*, Editorial Tecnológica de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.

Schubring, G. (2005). *Pesquisar sobre a história do ensino da matemática: metodologia, abordagens e perspectivas*. In Moreira, D. e Matos, J. M. (Org.), *História do Ensino da Matemática em Portugal*. Lisboa, Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Schubring, G. (2008) Gauss e a tábua dos logaritmos. Relime [online]. Vol.11, n.3 [citado 2012-09-22], pp. 383-412 . Disponible en: <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000300004&lng=es&nrm=iso>. ISSN 1665-2436.

Serres V., Y. (2004). *Una visión de la Comunidad Venezolana de Educación Matemática.* Relime, Vol. 7, Núm. 1, pp. 79-108.

Sierra V. M. (1997). *Notas de historia de las Matemáticas para el currículo de Secundaria.* La educación matemática en la enseñanza secundaría. Luis Rico Romero (et al), págs. 179-194. Ed. Horsori : Universidad de Barcelona, Instituto de Ciencias de la Educación. España.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas: en los últimos 10.000 años.* Barcelona, España: CRITICA S.L.

Topolsky. J, (1982: 331) *Metodología de la historia* Madrid : Cátedra. ES.

Valdive, C.y Garbin, S. (2008) *Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. pp. 413-450. vol.11, nº3. México D.F, México.

Vidal, R.; Quintanilla, M.; Maz, A. (2010)**.** La historia de la matemática: un valioso componente para la formación del profesorado de matemáticas. E: Revista Chilena de Educación Matemática. Volumen 5 de 2010. Sociedad Chilena de Educación Matemática, ISSN 0718- 1213 Pp. 3- 18.

Vilar, P. (1982). *Iniciación al vocabulario del análisis histórico*, Ed. Crítica, Grijalbo, Barcelona, p. 42.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, página 183
ISSN: 1815-0640

# Libros


## Recreamáticas.
## Recreaciones matemáticas para jóvenes y adultos

**Autor:**
Juan Diego Sánchez Torres

**Edición**: **abril 2012**

**ISBN**: 978-84-321-4178-2

**Editorial**: **RIALP**

Es un libro de divulgación matemática cuya primera edición es muy reciente, a continuación se transcribe el texto que podemos leer en la contraportada:

> ***190 retos matemáticos, de ingenio y de razonamiento lógico, con un lenguaje sencillo y directo. También incluye las soluciones, por si te atascas.***
>
> *¿Un libro de Matemáticas Recreativas en la era de Internet? Precisamente ahora. En Internet hay muy buenos blogs y webs, pero también muy malos... Con Recreamáticas no tienes que buscar; el autor ya lo ha hecho por ti.*
>
> *¿Qué tipo de retos hay? Son muy variados, tanto por su dificultad como por su temática: números, letras, secuencias, Geometría, lógica, recuento, ajedrez... Podrás encontrar incluso dos “roscos” similares a los del concurso “Pasapalabra”, y algo de Historia de las Matemáticas. Algunos son del propio autor y otros son clásicos casi olvidados. Por ello, Recreamáticas es un libro tanto para “expertos” en Matemáticas Recreativas como para quienes quieren serlo.*
>
> *¿Tengo que saber mucho de Matemáticas? Es suficiente con lo que sabe un niño de 12 o 13 años. Recreamáticas está dirigido tanto a jóvenes adolescentes como a adultos.*

**Equipo Editorial.**

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 185-186
ISSN: 1815-0640

# Matemáticas en la Red

## Grupo de investigación en Teoría antropológica de lo didáctico

**Dirección:** http://www.atd-tad.org/

Esta página es desarrollada por un grupo de investigadores de distintas universidades que trabajan en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), colaborando en proyectos de investigación, innovación educativa y formación del profesorado, en todos los niveles educativos.

Al acceder a la dirección indicada aparecerá en pantalla:


**Figura 1**

En la figura anterior se pueden observar las distintas secciones a las que se puede acceder, de las que se hará un sucinto comentario:

- Home: es la presentación de la página. Se accede a las últimas noticias, por ejemplo, referidas a congresos y encuentros de la TAD.
- Grupo TAD: En esta sección se presentan los docentes investigadores que trabajan en el marco de la TAD, se da una breve reseña de cada uno de ellos y se puede acceder a los trabajos que han realizado.
- I+D: En este apartado se encuentran las principales producciones del grupo en investigación y desarrollo, es agrupada en proyectos o ejes de investigación y tesis doctorales. En la parte de desarrollo, se encuentran materiales docentes de miembros del grupo, experimentaciones de aula y propuestas para la formación del profesorado. También se encuentran las tesis realizadas.
- Documentos: Se puede encontrar la producción publicada del grupo: artículos, tesis, capítulos de libro, conferencias, materiales docentes, etc. Existe un buscador para filtrar según período de publicación, autor, idioma y tema.

- Enlaces: Se encuentran enlaces a los siguientes sitios de interés:
  - 4e Congrès International sur la TAD
  - Centro de Recursos – Guy Brousseau
  - Centro Felix Klein, Chile
  - European project COMPASS
  - European project LEMA
  - European project PRIMAS
  - Yves Chevallard personal web
- Contacto: Se encuentra habilitada la posibilidad de mandar mensajes a los integrantes del grupo.

Al entrar en la página anteriormente citada se encuentra en la parte lateral un buscador y accesos directos según los siguientes temas: modelo epistemológico de referencia, Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), formación de maestros, educación secundaria, transposición didáctica, recorridos de estudios e investigación, modelización matemática, el paso de aritmética al álgebra, enseñanza universitaria, modelización algebraica, organización matemática, números negativos, educación infantil, proporcionalidad, los sistemas de numeración, entre otros.

**Equipo Editorial.**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 187-194
ISSN: 1815-0640

# Información

## Becas al estudio en Canarias: 2012-2013

### FUNDACIÓN CANARIA *CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ*

El Patronato de la Fundación es consciente de la grave crisis económica y de sus repercusiones. Entre ellas destaca el alto índice de paro de las Islas. Por ello, el pasado curso 2011-12 abrió una línea de ayudas al estudio con el fin de tratar de conseguir que puedan continuar estudios alumnos y alumnas de niveles postobligatorios, cuyas familias tengan dificultades económicas y que presenten una buena trayectoria académica. Con esos criterios y tras la correspondiente convocatoria pública, se  adjudicaron a principios de curso un total de 15 ayudas repartidas en distintos lugares del Archipiélago. Se estableció una cuantía única de 400 euros para cubrir gastos de libros y material académico.

Pues bien, en estos momentos está ya abierta la convocatoria para el curso 2012-13. La Fundación, en vista de que la situación económica no mejora, ha decidido incrementar el número de becas y se tratará de llegar a las siete Islas Canarias. La solicitud que los aspirantes han de cumplimentar, dirigida a la Fundación, ha de contar con un informe del profesorado tutor, departamento de orientación y Consejo Escolar del centro educativo en el que ha cursado sus estudios. Además, los solicitantes deberán expresar en el escrito las razones por las que piden la ayuda.


**Instituto de Enseñanza Secundaria de La Guancha, Tenerife**.

Como es sabido, en España el curso escolar comienza en el mes de septiembre y ha sido el día 5 de ese mes cuando se envió información precisa y detallada a todos los centros de enseñanza secundaria de Canarias incluyendo una carta de la Fundación, la convocatoria de las ayudas y el modelo de solicitud que han de rellenar los aspirantes. El plazo de presentación termina el 31 de octubre de 2012.

### Jornada Médica en Conchud (Perú)

Dentro de las actividades que promociona y financia la Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz* hay que resaltar como novedosa en su programa, la cita de una Jornada Médica realizada en Conchud, en el norte de Perú.

La actividad, no obstante, tiene un prólogo pues todo comenzó con una colaboración con los profesores de Chiclayo José F. Ventura Vegas y su esposa Gladys Zorrilla de Ventura y el envío de material escolar para 90 alumnos y alumnas con un presupuesto de 1283 € sufragados por la Fundación y para ser distribuidos en la Institución Educativa Nº 10469 de la comunidad de Conchud, distrito de Tacabamba, provincia de Chota, en la región de Cajamarca, en la zona andina del Norte del Perú, a 2486 metros de altitud. La entrega se hizo por medio de estos dos profesores peruanos, en un decidido gesto de solidaridad y cooperación, y a los que la Fundación ha ofrecido su agradecimiento por su esfuerzo y entusiasmo en ayudar a los más desfavorecidos.

En conversaciones y contactos con el Vicepresidente, Luis Balbuena Castellano y otros miembros del Patronato, los dos profesores peruanos informaron que su hijo, José Carlos, era médico y que estaba dispuesto a realizar una Jornada Médica en dicho lugar el último día del mes de agosto.

En cuanto a la financiación de esta actividad, la Asociación de Antiguos Alumnos y Amigos de la Universidad de La Laguna (AAAA) entró en contacto con nuestra Fundación ofreciéndose a colaborar en alguna de nuestras actividades. En una Asamblea, habían acordado dedicar el 0,7% de su presupuesto a una acción solidaria en el exterior. Para dar formalidad a tal situación, el 16 de junio de 2012 ambas instituciones firmaron un convenio de colaboración haciéndose entrega de su donación cifrada en 250 euros que se destinaron íntegramente a la acción mencionada.

**Convenio de colaboración Fundación y AAAA. Abajo, izq: Salvador Pérez, Zenaido Hernández, Loly Mejías. Arriba Izq. Gabriel Felipe, Alberto Brito, Luis Balbuena**

## Información

### Atención a 127 pacientes y presupuesto de cerca de 300 €

La Fundación aportó a esta actividad la cantidad de 298,90 € lo que hizo un presupuesto total de 548,90 €. La acción fue liderada por el Dr. José Carlos Ventura Zorrilla con quien colaboraron hasta siete personas entre médicos, enfermeras y otros técnicos voluntarios del Centro de Salud de La Púcara. Para llegar hasta la Comunidad de Conchud, el Dr. Ventura tuvo que desplazarse desde Chiclayo, donde reside, hasta ese lugar con un viaje de 17 horas, la última por caminos de herradura a lomos de caballos.

**Jornada Médica en Conchud: entrega de materiales sanitarios**

El éxito de la Jornada fue total. Se atendieron a 127 pacientes (122 registrados con huella digital y DNI), más cinco pacientes en La Púcara. A cada uno de ellos, además de la correspondiente revisión médica, se le entregó la medicina prescrita y un paquete con dos jabones, peine grande y dos botes de champú.


**Dr. José C. Ventura (al centro) y su equipo de voluntariado**

## Información

### Nuevo colegio en Incacocha (Perú)

Sigue caminando a buen ritmo este proyecto, también en Perú. En este caso se cuenta con la inestimable colaboración de la institución *Asinky Perú* (*Sonríe Perú*), institución sin fines de lucro receptora de donaciones para la mejora de la calidad de vida de personas en extrema pobreza, y con cuya presidenta, Flor de María Basauri Rojas, nos hemos entrevistado personalmente, a través de nuestro Vicepresidente, Luis Balbuena Castellano que aprovechó para ese fin su visita a Perú invitado a participar en un congreso de Educación Matemática. La Fundación aportó la cantidad de dinero necesaria para adquirir el material escolar de los escolares del lugar y para que recibieran un obsequio durante la Navidad del año 2011.

Pero como en ocasiones anteriores, la Fundación quiere ir más allá y está colaborando en un proyecto en ese mismo lugar de Incacocha, Centro Educativo Nº 32682, Distrito de Churabamba, Departamento de Huánuco, a 16 horas de Lima, la capital de Perú. Se trata de la construcción de un aula para 23 alumnos, nueva cocina (la actual es "*tétrica, negra e insalubre*"), nuevos baños ("*ahora pequeños cubículos de un metro sin intimidad*") y un nuevo comedor.

Es un lugar con malas comunicaciones pues baste decir el dato que desde Huánuco a Incacocha son 67 kilómetros pero se tardan cuatro horas en realizar el recorrido. Este año además, el clima no ha ayudado pues ha sido época de verano en la sierra con días de lluvia muy fuerte. Hasta ahora el presupuesto aportado por la Fundación asciende a 3000 € pero faltan cantidades para culminarlo.

Hay mucha más información de la Fundación en la página web:

**www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com**

**¡¡Aquí les esperamos!!**

# Bolsas para estudar nas Canárias: 2012-2013

## FUNDAÇÃO CANARIA *CARLOS SALVADOR E BEATRIZ*

O Patronato da Fundação é consciente da grave crise económica e de suas repercussões. Entre elas destaca o alto índice de desemprego das Ilhas. Por isso, o passado curso 2011-12 abriu uma linha de ajudas ao estudo com o fim de tratar de conseguir que possam continuar estudos alunos e alunas de níveis postobligatorios, cujas famílias tenham dificuldades económicas e que apresentem uma boa trajectória académica. Com esses critérios e depois da correspondente convocação pública, se adjudicaron a princípios de curso um total de 15 ajudas repartidas em diferentes lugares do Archipiélago. Estabeleceu-se uma quantia única de 400 euros para cobrir gastos de livros e material académico.

Pois bem, nestes momentos está já aberta a convocação para o curso 2012-13. A Fundação, em vista de que a situação económica não melhora, decidiu incrementar o número de bolsas e tratar-se-á de chegar às sete Ilhas Canárias.

A solicitação que os aspirantes têm de cumplimentar, dirigida à Fundação, tem de contar com um relatório do profesorado tutor, departamento de orientação e Conselho Escolar do centro educativo no que tem cursado seus estudos. Ademais, os solicitantes deverão expressar no escrito as razões pelas que pedem a ajuda.


**Instituto de Ensino Secundário de La Guancha, Tenerife**.

Como é sabido, em Espanha o curso escolar começa no mês de setembro e foi no dia 5 desse mês quando se enviou informação precisa e detalhada a todos os centros de ensino secundário de Canárias incluindo uma carta da Fundação, a convocação das ajudas e o modelo de solicitação que têm de rechear os aspirantes. O prazo de apresentação termina o 31 de outubro de 2012.

## Información

### Jornada Médica em Conchud (Peru)

Dentro das actividades que promociona e financia a Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz há que ressaltar como inovadora em seu programa, a cita de uma Jornada Médica realizada em Conchud, no norte de Peru.

A actividade, não obstante, tem um prólogo pois todo começou com uma colaboração com os professores de Chiclayo José F. Ventura Vegas e sua esposa Gladys Zorrilla de Ventura e o envio de material escolar para 90 alunos e alunas com um orçamento de 1283 € sufragados pela Fundação e para ser distribuídos na Instituição Educativa Nº 10469 da comunidade de Conchud, distrito de Tacabamba, província de Chota, na região de Cajamarca, na zona andina do Norte do Peru, a 2486 metros de altitude. A entrega fez-se por médio destes dois professores peruanos, num decidido gesto de solidariedade e cooperação, e aos que a Fundação ofereceu sua agradecimiento por seu esforço e entusiasmo em ajudar aos mais desfavorecidos.

Em conversas e contactos com o Vice-presidente, Luis Balbuena Castellano e outros membros do Patronato, os dois professores peruanos informaram que seu filho, José Carlos, era médico e que estava disposto a realizar uma Jornada Médica em dito lugar no último dia do mês de agosto. Em quanto ao financiamento desta actividade, a Associação de Antigos Alunos e Amigos da Universidade da Laguna (AAAA) entrou em contacto com nossa Fundação oferecendo-se a colaborar em alguma de nossas actividades. Numa Assembleia, tinham lembrado dedicar o 0,7% de seu orçamento a uma acção solidaria no exterior. Para dar formalidad a tal situação, o 16 de junho de 2012 ambas instituições assinaram um convênio de colaboração se fazendo entrega de sua doação cifrada em 250 euros que se destinaram integralmente à acção mencionada.

**Convênio de colaboração Fundação e AAAA. Abaixo, esquerda: Salvador Pérez, Zenaido Hernández, Loly Mejías. Acima esquerda. Gabriel Felipe, Alberto Brito, Luis Balbuena**

## Atenção a 127 pacientes e orçamento de perto de 300 €

A Fundação contribuiu a esta actividade a quantidade de 298,90 € o que fez um orçamento total de 548,90 €. A acção foi liderada pelo Dr. José Carlos Ventura Zorrilla com quem colaboraram até sete pessoas entre médicos, enfermeiras e outros técnicos voluntários do Centro de Saúde da Púcara. Para chegar até a Comunidade de Conchud, o Dr. Ventura teve que se deslocar desde Chiclayo, onde reside, até esse lugar com uma viagem de 17 horas, a última por caminhos de herradura a lombos de cavalos.

**Jornada Médica em Conchud: entrega de materiais sanitários**

O sucesso da Jornada foi total. Atenderam-se a 127 pacientes (122 registados com impressão digital e RG), mais cinco pacientes na Púcara. À cada um deles, além da correspondente revisão médica, se lhe entregou a medicina prescrita e um pacote com dois jabones, peine grande e dois botes de champú.


**Dr. José C. Ventura (ao centro) e sua equipa de voluntariado**

## Novo colégio em Incacocha (Perú)

Segue caminhando a bom ritmo este projecto, também em Peru. Neste caso conta-se com a inestimable colaboração da instituição Asinky Peru (Sorrri Peru), instituição sem fins de lucro receptora de doações para a melhora da qualidade de vida de pessoas em extrema pobreza, e com cuja presidenta, Flor de María Basauri Rojas, entrevistámos-nos pessoalmente, através de nosso Vice-presidente, Luis Balbuena Castellano que aproveitou para esse fim sua visita a Peru convidado a participar num congresso de Educação Matemática. A Fundação contribuiu a quantidade de dinheiro necessária para adquirir o material escolar dos escolares do lugar e para que recebessem um obsequio durante a Navidad do ano 2011.

Mas como em ocasiões anteriores, a Fundação quer ir para além e está a colaborar num projecto nesse mesmo lugar de Incacocha, Centro Educativo Nº 32682, Distrito de Churabamba, Departamento de Huánuco, a 16 horas de Lima, a capital de Peru. Trata-se da construção de um aula para 23 alunos, nova cocina (a actual é “tétrica, negra e insalubre”), novos baños (“agora pequenos cubículos de um metro sem intimidai”) e um novo comedor.

É um lugar com más comunicações pois baste dizer o dado que desde Huánuco a Incacocha são 67 quilómetros mas se demoram quatro horas em realizar o percurso. Neste ano ademais, o clima não ajudou pois foi época de verão na sierra com dias de chuva muito forte. Até agora o orçamento contribuído pela Fundação ascende a 3000 € mas faltam quantidades para o culminar.

Muito mais informação no site da Fundação:

[www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com](http://www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com)

**¡¡Aqui eu espero!!**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 195-197
ISSN: 1815-0640

# Convocatorias y eventos

## AÑO 2012

### Profmat 2012

Convocan: Associação de Professores de Matemática (APM).
Lugar: Coimbra, Portugal.
Fecha: 5 al 7 de octubre de 2012.
Información: **http://www.apm.pt/**

### 13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. ECME—13

Convocan: Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME) y las Universidades de Antioquía y de Medellín.
Lugar: Ciudad de Medellín, Colombia.
Fecha: 11al 13 de octubre de 2012.
Información: **www.asocolme.com**

### V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Organiza: Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).
Lugar: Petrópolis, Rio de janeiro, Brasil.
Fecha: 28 al 31 de octubre de 2012.
Información: **http://sipem-sbem.lematec.net/**

**Conferencia Latinoamericana de GeoGebra Uruguay 2012**

Lugar: Instituto de Profesores Artigas. Montevideo, Uruguay.
Fecha: 8 al 10 de noviembre de 2012
Información: **http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php**

**Decimosextas Jornadas Nacionales de Educación Matemática**

Convocan: Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM) y la Universidad San Sebastián
Lugar: Santiago de Chile.
Fecha: 29 y 30 de noviembre de 2012
Información: **www.sochiem.cl**

## AÑO 2013

**III Taller Internacional la Matemática, la Informática y la Física en el siglo XXI (FIMAT XXI)**

Lugar**:** Ciudad de Holguín. Cuba.
Convoca**:** Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la luz y Caballero
Fecha: 27 al29 de marzo de 2013.
Información: **http://www.ucp.ho.rimed.cu/fitmatxxi/**

**4º congreso internacional sobre la Teoría antropológica de lo didáctico CITAD-4**

Lugar**:** Toulouse, Francia.
Convoca**:** Grupo de investigación en Teoría antropológica de lo didáctico
Fecha: 21 al 26 de abril de 2013.
Información: **http://www.atd-tad.org/**


**XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas**

Convoca**:** Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
Organiza: Sociedad Balear de Matemática (SBM)
Lugar**:** Palma, España.
Fecha: 2 al 5 de julio de 2013.
Información: **http://xvi.jaem.es/**

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educatva

27° Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 27)
Lugar: Buenos Aires. Argentina
Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Fecha: Julio de 2013
Información: **www.clame.org.mx**

**Del 16 al 20 de septiembre en Montevideo - Uruguay**

VII CIBEM
VII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**www.cibem7.semur.edu.uy**

**Convoca la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, página 199-200
ISSN: 1815-0640

# Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@gmail.com**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “Arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Fig. 1, Fig. 2,... Tabla 1, Tabla 2,...(Arial, negrita, tamaño 10)**
4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

**Para libro:**
Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

**Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:**

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

**Para artículo de revista:**

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

**Para artículo de revista electrónica o información en Internet:**

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

**NOTA:** Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com