UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 30 – Junio de 2012

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 3-4
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.
Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*****.**

Evaluadores

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio

Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo

Colaboran

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 5-6
ISSN: 1815-0640

Editorial

"*Desde los primeros pasos de su educación el niño debe experimentar el placer del descubrimiento*"

Alfred North Whitehead (1861-1947)

Estimados colegas y amigos:

Nuevamente nos encontramos en la web para compartir excelentes artículos y enriquecernos con las propuestas de destacados especialistas en el tema que nos ocupa. Compartimos con ustedes la alegría de la incorporación de un nuevo país a la FISEM, el Comité Latinoamericana de Matemática Educativa de República Dominicana.

En este número, la firma invitada es el Dr. Guillermo Martínez, autor de varios libros entre los que destacamos Crímenes imperceptibles, llevada al cine por el director Álex de la Iglesia, con el título Los crímenes de Oxford. Quien nos brinda un artículo sobre Borges y su afición por la matemática donde expresa:

> *…Fue seguramente también a través de Bertrand Russell que conoció las arenas movedizas de las paradojas lógicas, los infinitos matemáticos y las discusiones sobre los lenguajes formales que transformaría con el tiempo en piezas literarias….*

Continuamos con las secciones fijas donde se plasman propuestas para docentes de todos los niveles con la incorporación de software específico y metodologías innovadoras.

Además, los artículos seleccionados para este número, tratan temas sumamente interesantes que animan al profesorado hacia la innovación didáctica y a un análisis profundo de su propia práctica docente. El análisis del error en la representación geométrica, la metodología para alumnos especiales, la relación matemática, física y química, otros de enorme valor didáctico.

Como es nuestra costumbre agradecemos a los asesores, evaluadores, autores de cada edición y a nuestros lectores que nos siguen acompañando y fortaleciendo con su apoyo permanente.

La publicación de UNIÓN se realiza desde la plataforma de la OEI, con el aporte de la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz, lo que permite que llegue a una mayor cantidad de docentes de los distintos niveles en los distintos países.

Por último, los invitamos a continuar junto a nosotras para enriquecer este proyecto, que esperamos, día a día llegue a más docentes.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

.

Editorial

" Desde os primeiros estágios de sua formação, a criança deve experimentar a alegria da descoberta"

Alfred North Whitehead (1861-1947)

Caros Colegas e Amigos*:*

Mais uma vez estamos na web para compartilhar grandes artigos e enriquecido com as propostas dos principais especialistas no assunto em mãos. Nós compartilhamos com vocês a alegria de adicionar um novo país para FISEM, Comitê Latinoamericano de Educação Matemática na República Dominicana.

Nesta edição, os clientes de assinatura é o Dr. William Martinez, autor de vários livros entre os quais estão Crimes imperceptíveis, filmado pelo diretor Alex de la Iglesia, intitulado The Oxford Murders. Quem nos dá um artigo sobre Borges e seu amor pela matemática em que ele expressa:

> *…Foi certamente através de Bertrand Russell que se reuniram na areia movediça dos paradoxos lógicos, as discussões infinitas matemáticos e linguagens formais que se transformam ao longo do tempo em obras literárias….*

Continuamos com as seções regulares que definem propostas para os professores em todos os níveis com a adição de software específico e metodologias inovadoras.

Além disso, os artigos selecionados para este problema, tente temas muito interessantes que incentivam os professores para o ensino inovador e uma análise minuciosa de suas próprias práticas de ensino. A análise de erros na representação geométrica, a metodologia para alunos especiais, os outros matemáticos, físicos e químicos, de grande valor educativo.

Como é nosso costume de agradecer aos consultores, revisores, autores de cada edição e os nossos leitores que ainda estão conosco e reforçar o seu apoio contínuo.

A publicação da UNIÃO é realizada a partir da plataforma da OEI, com a entrada do Canary Foundation Carlos Salvador e Beatriz, o que permite alcançar um maior número de professores em diferentes níveis em diferentes países.

Finalmente, nós convidamos você a continuar a enriquecer-nos com este projecto, esperamos que, dia após dia para alcançar mais professores.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, página 7
ISSN: 1815-0640

Bienvenida al Comité Latinoamericano de Matemática Educativa República Dominicana

Con enorme alegría informamos del crecimiento de la FISEM, con la incorporación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativo de la República Dominicana (CLAMED) cuya adhesión ha sido recientemente aprobada por la Junta de Gobierno.

La nueva sociedad que ha sido incorporada se creó en el año 1997 y se encuentra presidida por Ángeles Martín. Además cuenta con una amplía e importante presencia en el ámbito de la educación matemática no solo en su país, donde organiza desde hace trece años la Reunión Dominicana de Matemática Educativa.

Solo nos queda alegrarnos por su incorporación con la seguridad de que su experiencia y trabajo ayudará al crecimiento de la FISEM.

CLAMED
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
República Dominicana

Está de más decir que invitamos a nuestros colegas dominicanos a que nos transmitan sus muchas experiencias e investigaciones para hacerlas llegar a los profesoras y profesores que nos visitan de manera continuada.

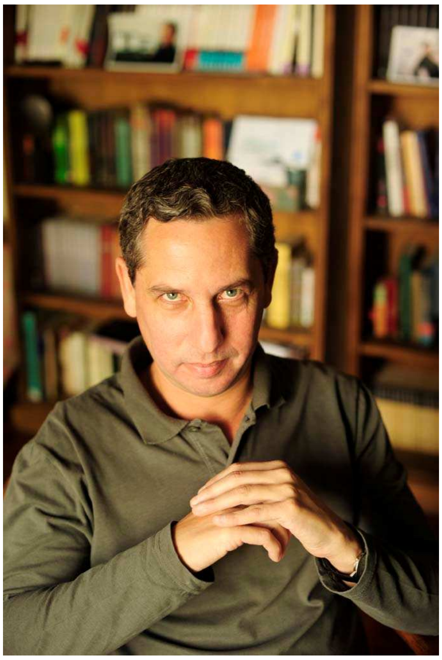
Con afecto.

Equipo Editor de UNIÓN

Junio de 2012, Número 30, página 9
ISSN: 1815-0640

Guillermo Martínez

Breve Reseña



Nació en la ciudad de Bahía Blanca, Argentina en 1962. Doctor en Ciencias Matemáticas de la UBA. Residió dos años en Oxford, Gran Bretaña, con una beca de postdoctorado del CONICET.

Fue hasta el año 2004 profesor de Lógica y Matemática en los departamentos de Matemática y de Computación de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Actualmente está únicamente dedicado a la literatura.

Es autor del libro de cuentos *Infierno grande*, de las novelas *Acerca de Roderer*, *La mujer del maestro*, *Crímenes imperceptibles* (traducida a treinta y cinco idiomas y llevada al cine por el director Alex de la Iglesia), *La muerte lenta de Luciana B.*, elegida en España entre los diez libros del año, y de *Yo también tuve una novia bisexual* (Planeta, 2011).

También escribió los libros de ensayos *Borges y la matemática*, *La fórmula de la inmortalidad* y *Gödel (para todos)*, este último en colaboración con Gustavo Piñeiro. Obtuvo entre otros el premio del Fondo Nacional de las Artes y el premio Planeta 2003.

Fue jurado de los principales premios literarios: Alfaguara, Planeta, Emecé, La Nación-Sudamericana, Fondo Nacional de las Artes.

Es uno de los escritores argentinos más traducidos en el mundo. Uno de sus cuentos ha sido publicado en The New Yorker.

Muchas de sus publicaciones pueden verse en la página: www.guillermomartinezweb.blogspot.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Junio de 2012, Número 30, páginas 11-14
ISSN: 1815-0640
firma invitada

Borges y tres paradojas matemáticas

Guillermo Martínez

(Extracto de una conferencia dictada en la Universidad de Boston y en la Universidad Armstrong Atlantic, en Savannah, octubre y noviembre de 2001)

Hay un fenómeno de apropiación del nombre de Borges, que a esta altura hace sonreír, y que permite la multiplicación de toda clase de libros que se titulan *Borges y...* casi cualquier cosa que se quiera escribir al lado. Es verdad que Borges escribió sobre una cantidad imponente de temas: estos autores hacen un salto al infinito y se proponen demostrarnos que no dejó *nada* de lado. Tanto mejor cuanto más lejana y débil es la conexión, porque pueden intentar libros más "sorprendentes" y "sagaces". Hay una excepción interesante a esta maquinaria, en una colección de ensayos que se llama *Borges y la ciencia*. Es un libro hecho por científicos argentinos: incluye un ensayo sobre Borges y la física, dos o tres irreprochables sobre Borges y la matemática... pero mi favorito fue uno que se llama "Borges y la biología". Luego de algunos rodeos, y algo desolado, casi disculpándose, el autor se decide a escribir que después de haber leído la obra completa de Borges tiene que decir que no hay ninguna vinculación entre Borges y la biología. ¡Ninguna! (risas). El hombre había descubierto con terror algo en este mundo –la biología- que Borges no había tocado...

Pero afortunadamente, para la buena definición de esta charla, como dirían los matemáticos, sí podemos decir que existe una conexión sólida, indudable, entre Borges y la matemática. Borges estudió matemática durante varios años, principalmente a través de la visión logicista de Bertrand Russell, quien trataba de reducir la matemática a sus métodos de demostración, a una "vasta tautología", un propósito, como se comprobaría luego, condenado al fracaso. Fue seguramente también a través de Russell que conoció las arenas movedizas de las paradojas lógicas, los infinitos matemáticos y las discusiones sobre los lenguajes formales que transformaría con el tiempo en piezas literarias. Hay una cantidad realmente asombrosa de rastros matemáticos, e incluso pequeñas lecciones de lógica y matemática a través de su obra, desde "El idioma analítico de John Wilkins" al "Examen de la obra de Herbert Quain", desde "La biblioteca de Babel" y "La lotería de Babilonia", hasta "La esfera de Pascal" y "Avatares de la tortuga", desde "La doctrina de los ciclos" y "Argumentum Ornithologicum", hasta "El disco" o "La muerte y la brújula", con múltiples ecos que llegan también a su obra poética. Pero a poco que uno relee estos textos, se advierte que hay un ejercicio de repetición y variaciones sobre lo que son en el fondo tres ideas principales. Estas tres ideas aparecen reunidas en el cuento "El Aleph" y podemos examinarlas desde allí.

La primera está vinculada a la elección del nombre del Aleph. "Para la *Mengenlehre*", dice Borges, "es el símbolo de los números transfinitos, *en los que el* *todo no es mayor que alguna de las partes*". La *Mengenlehre* es el nombre alemán de la teoría matemática de las cantidades; Borges encontraba particularmente curioso y perturbador este quiebre del antiguo postulado aristotélico según el cual el todo debe ser mayor que cualquiera de las partes. "Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros", dice en "Avatares de la tortuga": "No hablo del Mal, cuyo limitado imperio es la ética; hablo del infinito".

En el infinito matemático, en efecto, el todo no es necesariamente mayor que cualquiera de las partes. Para entender esto, pensemos primero en un niño que tiene un mazo de cartas pero sólo sabe contar hasta diez. El niño reparte las cartas con su padre, le da la primera, se queda con la segunda, le da la tercera, se queda con la cuarta, etc. Cuando termina de repartir el mazo, no podría decir cuántas cartas tiene en la mano, porque sólo sabe contar hasta diez, pero sí puede decir algo todavía, y es que él y su padre tienen la misma cantidad de cartas. De una manera parecida, en un desfile militar difícilmente podamos contar a golpe de vista la cantidad de jinetes, pero sí podemos decir algo, quizá no muy brillante, pero cierto, y es que hay la misma cantidad de jinetes que de caballos. Y bien, esta es la idea que encontraron los matemáticos para "contar" conjuntos infinitos. Dicen que un conjunto tiene "tantos elementos" como los números naturales si se puede asignar un número distinto a cada elemento, usando en esta asignación *todos* los números que empleamos para contar. Pero, y aquí aparece el quiebre que intriga tanto a Borges, el conjunto de los números pares tiene de este modo "tantos elementos" como los números naturales, ya que se puede asignar el 1 al primer número par 2, el 2 al 4, el 3 el 6, etc. Tenemos así una parte propia de los números naturales, digamos, una "mitad", los pares, que es "tan grande" como el todo.

La segunda idea es más bien geométrica y la encontramos un poco antes, cuando Borges intenta, con distintas analogías, describir el Aleph, el punto que concentra y guarda todas las imágenes. "Los místicos, en análogo trance", escribe, "prodigan los emblemas: para significar la divinidad, un persa habla de un pájaro que es todos los pájaros; Alanus de Insulis, de *una esfera cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna*."

Esta imagen puede parecer oscura, o un juego de palabras, pero es una metáfora magnífica, singularmente precisa, una vez que se conoce la explicación matemática: pensemos primeramente en el plano, por ejemplo, la superficie de este pizarrón. Yo pedí especialmente un pizarrón, ¡ahora tengo que usarlo! Dibujemos a partir de un punto cualquiera círculos con radio cada vez más grande. Estos círculos cubren más y más puntos del pizarrón, y por lejano que se encuentre un punto, es evidente que, eligiendo un radio suficientemente grande, puedo "enlazarlo" dentro de uno de mis círculos. Más aún, no importa dónde haya fijado en principio el centro de estos círculos, con radios suficientemente grandes llego desde cualquier centro tan lejos como quiera. Pero entonces, dando un pequeño salto con la imaginación, podemos reemplazar la idea de plano por la de un círculo cuyo centro está en todas partes y cuya circunferencia... ¿dónde dibujar la línea de la circunferencia? No llegamos a dibujarla porque el radio es infinito, la circunferencia está siempre más allá, como el horizonte, "en ninguna parte". Exactamente lo mismo podemos hacer en el espacio tridimensional, reemplazando los círculos por esferas. Así, la totalidad del espacio, o el universo visible que muestra el Aleph, puede considerarse una esfera cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna. Pero entonces -y aquí la analogía muestra su eficacia- uno puede imaginar una contracción de esta esfera gigantesca original, de modo que todas las imágenes aparezcan concentradas en la esferita minúscula que ve Borges al pie de la escalera: el Aleph como el universo en su inicio, antes del *big bang*, una pequeña esfera que aprisiona en un solo punto todas las imágenes.

La tercera idea es lo que yo llamaría la paradoja de magnificación, y aparece cada vez que Borges construye o alude a un mundo ficcional muy vasto y abarcatorio, que acaba por incluir a ese mismo mundo como un elemento, y a veces al narrador, o al lector, en sus reglas de juego. En "El Aleph" esto ocurre durante la célebre enumeración de imágenes: "...vi el Aleph, desde todos los puntos, vi en el Aleph la tierra, y en la tierra otra vez otra vez el Aleph..., vi mi cara y mis vísceras, vi tu cara...". Esta clase de paradojas, que provienen de postular objetos o mundos demasiado vastos, fueron letales en la fundamentación de la matemática y no hay duda de que Borges debía conocer la más famosa, debida a Russell, que muestra que no puede postularse la existencia de un conjunto universal, digamos, un aleph de conjuntos, que contenga en sí, como elementos, a todos los conjuntos imaginables. El mismo Bertrand Russell dio esta popularización de la paradoja: supongamos que exista un barbero que afeite únicamente a los hombres del pueblo que no se afeitan a sí mismos. Esto no parece en principio tan raro, se supone que esto es lo que hacen en general los barberos. Ahora bien, ¿debe este barbero afeitarse a sí mismo? Si se afeitara a sí mismo, estaría excluido de la clase de hombres a los que puede afeitar, por lo tanto no puede afeitarse a sí mismo. Pero si no se afeita a sí mismo, pasa a integrar la clase de hombres a los que sí debe afeitar, por lo tanto, debe afeitarse a sí mismo. En definitiva, el barbero está condenado a un limbo lógico, ¡en el que no puede afeitarse ni no afeitarse a sí mismo! (risas)

Dije antes que hay una multitud de rastros matemáticos en la obra de Borges. Esto es cierto, pero aún si no hubiera ninguno, aún en los textos que nada tienen que ver con la matemática, hay algo, un elemento de estilo en la escritura, que es particularmente grato a la estética matemática. Creo que la clave de ese elemento está expresada, inadvertidamente, en este pasaje extraordinario de "Historia de la Eternidad": "No quiero despedirme del platonismo (que parece glacial) sin comunicar esta observación, con esperanza de que la prosigan y justifiquen: *lo genérico puede ser más intenso que lo concreto*. Casos ilustrativos no faltan. De chico, veraneando en el norte de la provincia, la llanura redonda y los hombres que mateaban en la cocina me interesaron, pero mi felicidad fue terrible cuando supe que ese redondel era "pampa" y esos varones "gauchos". Lo genérico... prima sobre los rasgos individuales."

Cuando Borges escribe, típicamente acumula ejemplos, analogías, historias afines, variaciones de lo que se propone contar. De esta manera la ficción principal que desarrolla es a la vez particular y genérica, y sus textos resuenan como si el ejemplo particular llevara en sí y aludiera permanentemente a una forma universal. Del mismo modo proceden los matemáticos. Cuando estudian un ejemplo, un caso particular, lo examinan con la esperanza de descubrir en él un rasgo más intenso, y general, que puedan abstraer en un teorema. Borges, les gusta creer a los matemáticos, escribe exactamente como lo harían ellos si los pusieran a la prueba: con un orgulloso platonismo, como si existiera un cielo de ficciones perfectas y una noción de verdad para la literatura.

(*Clarín*, 8 de febrero de 2003)

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 15-40
ISSN: 1815-0640

Suma y resta mediante el uso de una pizarra digital en alumnado con Síndrome de Down[1]

Aurelia Noda, Alicia Bruno, Carina González, Lorenzo Moreno, Hilda Sanabria

Resumen

Se presenta una investigación sobre cómo efectúan operaciones de suma y resta un grupo de 9 estudiantes con Síndrome de Down. El estudio, de tipo descriptivo y cualitativo, detalla las estrategias, los procedimientos y los errores basándose en los estudios previos realizados sobre este tópico en personas sin discapacidad. Los datos se toman de la realización de algoritmos en una pizarra digital, la cual permite representar mediante bolas, los números implicados en las operaciones. Los resultados muestran que los estudiantes con Síndrome de Down presentan las mismas estrategias y procedimientos de la población sin discapacidad, aunque ningún alumno se sitúa en un nivel totalmente abstracto. El uso de los dedos o de las representaciones con bolas se muestra como un procedimiento fundamental en estos estudiantes. Los errores son muy variables según los alumnos y destacan los que se deben a un conocimiento incompleto del sistema de numeración decimal.

Abstract

We present research into how a group of 9 students with Down syndrome perform subtractions and additions. This descriptive and qualitative study uses previous research conducted in this area on people without disabilities to detail the strategies, procedures and errors involved. The data were gathered from algorithms performed on a digital board, which allows for the numbers used in the operations to be represented using balls. The results show that students with Down syndrome use the same strategies and procedures as normal students, though none of the subjects operated on a completely abstract level. The use of fingers or concrete representations (balls) appears as a fundamental process among these students. As for errors, these vary widely depending on the students, and can be attributed in their majority to an incomplete knowledge of the decimal number system.

Resumo

Apresenta-se nesse trabalho uma investigação sobre como um grupo de 9 estudantes com Síndrome de Down realizam operações de adição e subtração. A pesquisa, de cunho qualitativo e descritivo, detalha as estratégias, os procedimentos e os erros apresentados, que são comparados aos resultados apresentados em estudos prévios sobre esse tópico, em pessoas sem problemas cognitivos. Os dados foram coletados durante a realização de algoritmos em uma tela digital, a qual permite que os números envolvidos nas operações sejam representados por bolas. Os resultados mostram que os estudantes com SD apresentam as mesmas estratégias e procedimentos da população sem essa síndrome, mas nenhum aluno se encontra em um nível totalmente abstrato. O uso dos dedos ou das representações concretas (bolas) se mostra como um procedimento fundamental para esses estudantes. Aos erros são altamente variáveis entre os alunos investigados, e destacam-se aqueles que são devidos ao conhecimento incompleto do sistema de numeração decimal.

[1] Este trabajo forma parte del proyecto EDU2011-29324: “Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de primaria, de secundaria y de profesorado de primaria en formación” del Ministerio de Ciencias e Innovación (Madrid, España).

1. Introducción

En este trabajo presentamos un estudio sobre la realización de los algoritmos de sumar y restar en una población de personas con Síndrome de Down (SD). Estudiamos las estrategias y los procedimientos que emplean cuando efectúan operaciones en una pizarra digital, cuyo diseño permite que los alumnos procedan de la misma forma a cómo lo hacen con papel y lápiz, es decir, no sólo pueden utilizar los símbolos numéricos, sino que la pizarra permite modelizar mediante bolas, los procesos de conteo al efectuar las operaciones.

Las investigaciones sobre aprendizaje matemático en personas con SD se han centrado principalmente en conceptos numéricos, y menos en otras áreas de las matemáticas, como la geometría, la medida o la estadística. Dentro del conocimiento numérico, la mayoría de las investigaciones analizan el concepto de número, la cardinalidad y el conteo (Abdelhameed y Porter, 2006; Caycho, Gun, y Siegal, 1991; Gelman y Cohen, 1988; Nye, Fluck, y Buckley, 2001; Porter, 1999; Sloper, Cunningham, Turner, Knussen, 1990). También encontramos investigaciones que estudian cómo los alumnos con SD efectúan operaciones de suma y resta, las cuales indican que pueden llegar a tener éxito en situaciones aditivas usando estrategias de conteo concretas, por lo que las actividades de conteo de objetos son básicas para desarrollar habilidades más avanzadas con estos alumnos (Barody, 1987, citado en Porter, 2006). Otras investigaciones se han interesado en mostrar porcentajes de éxito al efectuar operaciones como medida de “lo que pueden lograr”. Así, Buckley y Sacks (1987) (citado en Monari, 2002) realizaron un estudio con 90 adolescentes con SD y observaron que sólo un 18% podía recitar más de 20 números, un 50% podía hacer alguna suma simple, pocos podían hacer una multiplicación o una división y un 6% fueron capaces de usar dinero de manera independiente. Encontramos menos investigaciones que profundicen en los procesos y métodos que utilizan las personas con SD en los pasos que requieren los algoritmos y cómo se asemejan, o no, a las actuaciones de la población sin discapacidad.

Pensamos que la amplia literatura sobre la ejecución de algoritmos de las operaciones en personas de desarrollo típico, ya consolidada, sirve como base para profundizar en las características de las personas con SD en este tópico.

Las tendencias actuales en la enseñanza de las operaciones básicas proponen reducir el tiempo dedicado a los cálculos con papel y lápiz, en favor de comprender y de utilizar las operaciones en problemas cotidianos, de hacer un mayor uso de calculadoras y ordenadores, y de desarrollar las destrezas para estimar y calcular mentalmente (NCTM, 2000). Este enfoque cobra especial sentido en personas con discapacidad cognitiva, ya que sus dificultades en el aprendizaje general, y de las matemáticas en particular, lleva a optar por una enseñanza básica, que incida en los conceptos y destrezas necesarios para desenvolverse en situaciones diarias. Sin embargo, al mismo tiempo, los niños con SD están cada vez más integrados en escuelas ordinarias, siguiendo un currículo adaptado a cada uno de ellos. Esto ha repercutido en una mayor integración social y en el aumento del aprendizaje de conocimientos en las diferentes áreas.

En nuestro entorno social, cada vez hay más niños con SD que aspiran a obtener el título de educación primaria y secundaria. Para ello, se les exige unos conocimientos mínimos adaptados a sus capacidades. En el área de matemáticas, el conocimiento de los algoritmos de las operaciones básicas forma parte de ese conocimiento mínimo. Por ello, a pesar de esta aparente contradicción (entre las tendencias de la enseñanza numérica y las exigencias curriculares para obtener el título de educación primaria), nos parece relevante conocer las dificultades que presenta esta población en la ejecución de procedimientos algorítmicos, con el objetivo final de poder proponer metodologías adecuadas que les ayuden a progresar en sus aprendizajes, considerando o teniendo en cuenta sus características cognitivas.

Es fundamental tener en cuenta que las alteraciones cerebrales genéticas asociadas con el SD no son las mismas en todos los individuos. Este factor, además de las influencias familiares, sociales y educativas, son causa de una gran variabilidad entre las personas con SD, incluso mayor que en la población general (Porter, 1999; Pueschel, 2002; Abdelhameed y Porter, 2006; Buckley, 2007). Por ello, es necesario tener en cuenta, que las personas con SD son cognitivamente diferentes, aunque hay unas características generales que pueden aparecer en diferentes grados (Chapman et al, 2000; Arranz, 2002; Troncoso et al 1999).

En general, las personas con SD reciben, procesan y organizan la información con dificultad y lentitud, al mismo tiempo que manifiestan impulsividad para dar respuestas a las tareas, lo que les lleva a responder sin haber realizado una reflexión previa, siendo esto causa de una menor calidad en sus respuestas y una mayor frecuencia de error (Pueschel, 1991; Flórez, 1991). Se muestran inseguros ante los imprevistos e incómodos ante cualquier variación o novedad, por lo que algunas actividades diarias las ejecutan de forma rutinaria, de la misma manera y sin ninguna modificación (Troncoso, del Cerro y Ruiz; 1999). Suelen tener dificultades para aplicar los conocimientos y generalizar a otras situaciones lo que han aprendido (Troncoso, del Cerro y Ruiz; 1999). Presentan un déficit en la memoria a corto plazo y largo, presentando una mejor percepción y retención visual que auditiva, por lo que se debe presentar la información, siempre que sea posible, a través de más de un sentido (Buckley, 1985; Marcell and Weeks, 1988; Bower and Hayes, 1994). Les cuesta retener varias instrucciones dadas en un orden secuencial (memoria secuencial), lo que tiene importancia en la mayoría de las actividades matemáticas y en especial, en la comprensión de los problemas, en los que se deben tener en cuenta varios datos o informaciones (Snart O`Grady y Das, 1982; Molina y Arraiz, 1993; Molina, 2002; Rondal et al., 2000).

Otro elemento que hemos considerado en este trabajo, es la utilización del ordenador en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las personas con SD. Diferentes investigaciones realizadas con esta población, han puesto de manifiesto beneficios educativos cuando utilizan el ordenador como una herramienta para el aprendizaje de contenidos curriculares (Valverde, 2005), debido a que el ordenador aporta la información por el canal visual y auditivo, lo que ayuda a captar la información, al mismo tiempo que incrementa la motivación y la atención hacia la tarea (Fuchs y Allinder, 1993; Scruggs y Mastropieri, 1993).

En cuanto a contenidos curriculares de matemáticas, Linares y Martínez (1994) utilizaron en su estudio un programa de ordenador para mejorar la manipulación, elección y reconocimiento de figuras geométricas y colores en una persona con SD.

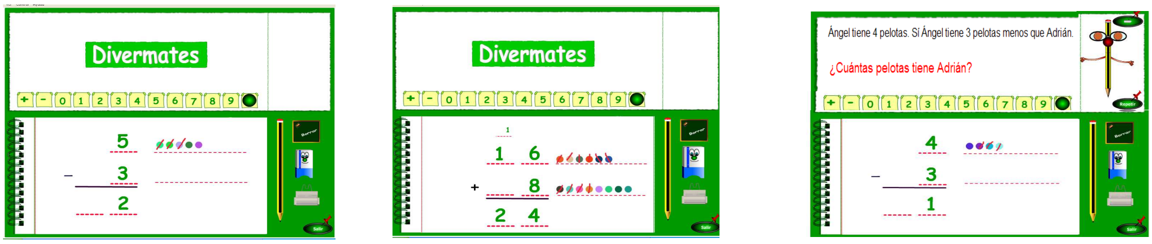
Su investigación puso de manifiesto diferencias significativas tras la intervención mediante el programa informático y demostró que dicha persona era capaz de realizar transferencias de los conceptos aprendidos fuera del ámbito del ordenador.

También se ha demostrado la eficacia de los programas informáticos para enseñar estrategias de resolución de problemas aritméticos a personas con retraso mental. Mastropieri, Scruggs y Shiah (1997) comprobaron la existencia de diferencias significativas en la resolución de problemas aritméticos, antes y después del tratamiento, además de encontrar en el ordenador una herramienta muy motivadora y divertida para las personas con retraso mental que participaron en el estudio.

Ortega (2003), pone de manifiesto en su investigación, la mejora de un grupo de personas con SD en el conocimiento numérico con el uso de software educativos., especialmente porque el ordenador aporta la información por el canal visual y auditivo lo que ayuda a captar la información, al mismo tiempo que atrae la atención de los estudiantes.

Actualmente existen multitud de programas informáticos que se adaptan a las necesidades de cada individuo y permiten realizar un trabajo remedial en el aprendizaje. Según Dowker (2005) dichos sistemas de instrucción individualizados por ordenador tienen ventajas e inconvenientes. Entre las ventajas de estos programas destaca la adaptabilidad a los modelos individuales de aprendizaje, la falta de presión social al ejecutar las tareas (ya que pueden dedicar a la tarea el tiempo que necesiten) y la alta motivación que sienten los alumnos con su uso. Y como desventajas señala el hecho de que muchos programas incentivan la respuesta correcta, pero no tienen en cuenta el proceso cognitivo al realizar la tarea. Los programas en el pasado tendían a señalar las respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes, sin analizar cómo ocurría el error (Hativa, 1988). Los programas más sofisticados hoy en día permiten diagnosticar e interpretar los errores, aunque como cualquier test, puede no tener en cuenta características individuales, especialmente si son respuestas atípicas de la población general.

El trabajo que presentamos forma parte de una investigación de un equipo multidisciplinar dedicado al aprendizaje de las matemáticas de alumnos con SD, en el que colabora personal relacionado con las áreas de Didáctica de la Matemática y de Ingeniería Informática de la Universidad de La Laguna. Este equipo multidisciplinar está desarrollando un sistema multimedia de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, habilidades sociales y autonomía personal, denominado Divermates (Diversidad y Matemáticas) (Bruno y Noda, 2010; González et al., 2006; 2007), destinado a alumnos con SD. Este sistema multimedia dispone de diferentes herramientas informáticas entre las que se encuentra una pizarra digital, diseñada para trabajar tanto operaciones como problemas aritméticos de sumas y restas de uno o dos dígitos, que presenta tres tipos de formatos diferentes (ver Fig. 1, Pizarra 1, 2 y 3), dispone de un sistema automático que registra las acciones y los resultados finales obtenidos por los alumnos en la realización de las tareas, y detecta los errores cometidos así como las causas potenciales de los mismos. Con la información obtenida se genera un informe personalizado para cada alumno que sirve de orientación al profesor.



Pizarra 1: Números de un dígito | **Pizarra 2: Números de dos dígitos** | **Pizarra 3: Resolución de problemas**

Figura 1. Pizarra digital

La pizarra consta de cinco zonas de interacción: *zona de enunciados; agente virtual; barra de números, bolas y signos; hoja de resolución;* y *caja de herramientas* (ver Figura 2).

Figura 2. Zonas de interacción de la pizarra digital

Dado que nuestros sujetos de estudio, presentan dificultades de comprensión de la lectura, la *zona de enunciados* y el *agente virtual*, presentes en la pizarra 3, se han diseñado con el objeto de facilitar dicha comprensión. Por ello, la presentación de los enunciados se hace en forma textual, gráfica y sonora, destacando la pregunta del problema en un color y tamaño diferente, y permitiendo repetir el enunciado las veces necesarias. La *barra de números*, *bolas y signos*, esta compuesta de números del 0 al 9, los signos y las bolitas para realizar los cálculos. Para el diseño de la caja de herramientas se utilizaron objetos cotidianos para los alumnos: lápiz, goma de borrar e impresora. La zona *hoja de resolución*, simula el cuaderno donde el alumno está acostumbrado a trabajar. Las operaciones se escriben en forma vertical y, si el alumno lo requiere, puede colocar bolas a la derecha de los números y tacharlas con el lápiz, como apoyo para efectuar la operación.

Para proporcionar una interacción adecuada a las necesidades de la población con SD, se ha realizado una adaptación del ratón, de manera que para manipular los números, las bolas, la goma y el lápiz, basta con hacer clic sobre ellos y depositarlos con otro clic en el sitio deseado. Los números pueden ser fácilmente reemplazados por otros números, con el mismo procedimiento, sin necesidad de borrar el número anterior. Para la colocación del símbolo de la operación basta con hacer clic sobre él, ya que la máquina lo coloca en su lugar correspondiente.

En este trabajo analizamos la ejecución de algoritmos utilizando las pizarras 1 y 2 por parte de niños con SD, y dejamos para posteriores trabajos el análisis de la resolución de problemas aditivos, correspondientes a la pizarra 3.

2. Investigaciones sobre la suma y resta

Entre los años 1970 y 1990 encontramos múltiples investigaciones, que provienen principalmente de Estados Unidos e Inglaterra, que analizan los errores en la ejecución de los algoritmos de las operaciones básicas en la población general, y que nos han servido como marco en el que apoyar nuestra investigación.

Partimos de la idea de que los errores suelen ser sistemáticos, y provienen de reglas erróneas que aplican los estudiantes (Ginsburg, 1977; Brown y Van Lehn, 1982). Sin embargo, el estudio de los errores, como indican Fiori and Zuccheri, (2005), lo entendemos como una etapa natural e inevitable en la construcción del conocimiento, que da información para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Las investigaciones realizadas con niños sin discapacidad muestran un abanico de errores muy amplio. A continuación describimos estos errores organizados en diferentes categorías y que hemos utilizado en este trabajo. Somos conscientes de que no exponemos todos los errores, pero es necesario desglosar al menos los que aparecerán a lo largo del trabajo y que se muestran a continuación en la tabla 1.

Tabla 1. Categorización de errores en los algoritmos de suma y resta

1. Grafomotriz	• Confundir números (3 y 5; 6 y 9; 4 y 7)
2. Algoritmo	• Comenzar a operar por la izquierda en operaciones con llevadas
3. Sistema numeración decimal	• Encolumnamiento (incorrecta alineación de los números en columnas) • Cambiar orden unidades (12 por 21) • Sumar o restar unidades de diferente orden (unidades con decenas)
4. Cero	• Cero en vez de sumar o restar (52+30=80) • Dar al cero el valor del otro término para sumar o restar (52+30=84) • Poner el valor del sustraendo en lugar de restar (40-13=33)
5. Significado operación	• Sumar y restar a la vez (63+21=82) • Sumar en lugar de restar y viceversa (63+21=42).
6. Llevada	• Olvidar la llevada (43 -37 = 16) • Error al reagrupar (24+18= 51) • Llevar siempre (42+23=75) • Escribir los resultados parciales intermedios completos (43+18=511)
7. Hechos numéricos	• Hechos numéricos inventados (2+3=6)
8. Otros	• Despistes/invención

Algunos de estos errores tienen que ver con dificultades sintácticas, como los errores *Grafomotrices* o de *Algoritmo*, mientras que los restantes son errores semánticos, que implican un desconocimiento de conceptos básicos de los números y las operaciones.

Roberts (1968) realizó un estudio sobre el fracaso en aritmética, con una población de 148 niños sin discapacidad de nueve años y encontró numerosos errores relacionados con el significado de las operaciones, de manera que aplicaban una operación distinta a la que se pedía o bien mezclaban las operaciones. Cox (1975) (citado en Dickson y Brown, 1984) estudió los errores en operaciones básicas cometidos por dos grupos de estudiantes de 8 a 14 años, una muestra tomada de escuelas ordinaria y otras de escuelas especiales (alumnos con discapacidad mental educable). Cox encontró que, de los 51 tipos de errores sistemáticos, 23 de ellos tenían que ver con la llevada. Descubrió que el error más frecuente en ambos grupos se producía en las restas con llevadas, y consistía en que los alumnos restaban el número mayor del menor, con independencia de si estaban en el minuendo o en el sustraendo, por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ 27 \\ \hline 22 \end{array}$$

Este error se produjo con muy elevada frecuencia en ambos grupos de alumnos. También en la suma, los principales errores tenían que ver con la llevada, por ejemplo, escribir los resultados parciales intermedios completos:

$$\begin{array}{r} 26 \\ +\ \ 7 \\ \hline 213 \end{array}$$

Indica Cox que los errores sistemáticos de los alumnos se deben a una deficiente comprensión del proceso algorítmico. Es importante analizar no sólo el error, sino las estrategias y los procedimientos que siguen los alumnos en la ejecución de los algoritmos, ya que pueden explicar algunos de los errores cometidos y de esta manera facilitar la fase remedial que debe acompañar a todo estudio de errores y dificultades.

Para analizar las estrategias y los procedimientos seguidos por los estudiantes, hemos utilizado los trabajos de Carpenter, Fennema, Franke, Levi & Empson (1999) y de Carpenter & Moser (1982) en los que se describen las estrategias de alumnos al resolver los problemas aditivos de enunciado verbal, las cuales se detallan en la tabla 2.

Tabla 2. Estrategias de suma y resta

Estrategias de Modelización (Utilización de objetos físicos)
Suma *Contar todo*. Se construyen dos conjuntos de objetos, se juntan y se cuentan todos los objetos. **Resta** *Quitar*. Se forma el conjunto mayor de objetos, después se separa de ellos, de una sola vez, un conjunto de objetos igual al sustraendo y se cuenta la cantidad de objetos que queda. *Añadir*. Se forma el conjunto de objetos correspondiente al sustraendo y se añade tantos objetos hasta tener el número que indica el minuendo. El número de objetos añadidos, es el resultado de la resta. *Correspondencia uno a uno*. Se forman los dos conjuntos de objetos y se emparejan. La solución es el número de objetos sin emparejar. *Quitar hasta*. Se forma el conjunto de objetos correspondiente al minuendo y se quitan objetos hasta que quede el número de objetos que indique el sustraendo. El resultado es el número de objetos que se han quitado.

Estrategias de conteo (Utilización de secuencias de conteo) **Suma** *Contar a partir del primero*. Se empieza a contar a partir del primer sumando dado. En 3+6, empieza por 3 y cuenta 4, 5, 6, 7, 8 y 9. *Contar a partir del mayor.* Se empieza a contar a partir del sumando mayor. En 3+6, dice 6 y cuenta 7, 8 y 9. **Resta** *Contar hasta*. Se cuenta hacia delante a partir del sustraendo, hasta llegar al minuendo. El resultado es el número de palabras recitadas. En 7-3 dice 4, 5, 6 y 7, el resultados es 4. *Contar hacia atrás*. Se cuenta a partir del minuendo tantos números como tiene el sustraendo. El resultado es el último número recitado. En 7 – 3 dice 6, 5 y 4. *Contar hacia atrás hasta*. Se cuenta a partir del minuendo hacia atrás, hasta llegar al sustraendo. El resultado es el número de palabras recitadas. En 7 – 3 dice 6, 5, 4 y 3. El resultado es 4.
Estrategias de hechos numéricos **Suma y resta** *Hecho memorizado*: Se memorizan las sumas o restas de los números de un dígito. *Hecho deducido*. A partir de un hecho conocido, se deduce otro por alguna propiedad (Si 3+4=7 entonces 3+5=8; Si 7-5 =2, entonces 7-4=3)

Nótese que las estrategias de *Añadir* y *Contar hasta* son semejantes, la primera se realiza con objetos y las segunda sólo con el uso de la secuencia numérica. Lo mismo podemos decir con las estrategias de *Quitar* y *Contar hacia atrás*. Indican los autores de estos trabajos que las estrategias de conteo pueden ir acompañadas de recuento con los dedos, que se usan para llevar la cuenta del número de palabras recitadas en la secuencia numérica, más que para representar los números físicamente.

Las estrategias de conteo son más abstractas que las de modelización con objetos físicos, ya que los niños demuestran que no necesitan construir y contar físicamente los conjuntos. Según Carpenter et al. (1999), al principio los niños utilizan estrategias de modelización que son sustituidas por estrategias de conteo y finalmente, acaban utilizando los hechos numéricos. El paso de una estrategia a otra no se produce de forma instantánea, y durante un tiempo pueden convivir estrategias de modelización y conteo, junto al uso de hechos numéricos recuperados de la memoria.

Aunque en los trabajos citados, las estrategias corresponden a la resolución de problemas de suma y resta, y no de algoritmos aislados, esta clasificación nos resulta válida para estudiar la ejecución de algoritmos, ya que como veremos, las estrategias utilizadas por los estudiantes de nuestro estudio se identifican con las anteriores.

3. Objetivos y Metodología

3.1. Objetivos

En este trabajo indagamos en la ejecución de los algoritmos de suma y resta por parte de un grupo de alumnos con SD (entre 9 y 29 años), utilizando la pizarra digital descrita anteriormente, con los siguientes objetivos de investigación:

1. *Analizar las estrategias y los procedimientos al efectuar operaciones de suma y resta.*
2. *Describir los errores que cometen los alumnos en la ejecución de algoritmos de*

suma y resta.

3. *Evaluar el uso de la pizarra digital por parte de los estudiantes. En concreto, evaluar la aceptación de la herramienta, el uso de las bolas, las dificultades de representación de los números y de las bolas.*

3.2. Metodología

Para realizar el estudio trabajamos con 9 estudiantes con SD, pertenecientes a la *Asociación Tinerfeña de Trisómicos 21* (ATT21, en Tenerife, España). De los 9 estudiantes, 6 están integrados en escuelas ordinarias (en primaria, secundaria o formación profesional) y reciben en la ATT21 clases de apoyo escolar en las diferentes disciplinas y 3 de ellos, que denominados de *Alfabetización*, son alumnos que por su edad ya no acuden a las aulas ordinarias, sino que están en centros especiales de inserción laboral y asisten a la ATT21 para proseguir con su formación académica. El criterio de selección de los alumnos lo determinó su nivel de conocimiento de las operaciones de suma y resta. Así, se seleccionaron los 9 alumnos de manera que hubiera tres de cada uno de los niveles de conocimiento de las operaciones de suma y resta que se describen a continuación:

- *Alumnos de nivel 1* (N1): Conocen los números hasta el 30 y están en fase de aprendizaje de sumas y restas con números de un dígito.
- *Alumnos de nivel 2* (N2): Conocen los números de dos dígitos, y están en fase de aprendizaje de sumas y restas con números de dos dígitos, sin llevadas.
- *Alumnos de nivel 3* (N3): Conocen los números hasta mil, y están en fase de aprendizaje de sumas y restas con números de dos dígitos, con llevadas.

En la tabla 3 se resumen los datos de los 9 alumnos participantes, teniendo en cuenta los niveles descritos anteriormente: a) la edad; b) el nivel curricular que siguen en matemáticas (Infantil, I; Primaria, P); c) si están integrados en escuelas ordinarias de Primaria (P), de Secundaria (S) o de formación profesional (FP) o bien, si son alumnos de Alfabetización, es decir, si trabajan en centros de inserción laboral (A).

Tabla 3. Alumnos: edad, nivel de integración, currículo seguido en matemáticas

	Nivel 1			Nivel 2			Nivel 3		
Alumnos	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**
Edad	18	11	22	11	29	15	20	19	21
Currículo de matemáticas	I	I	I	P	I/P	P	P	P	P
Integración	A	P	A	P	A	S	FP	S	FP

I: Infantil; P: Primaria; A: Alfabetización; FP Formación Profesional

Se plantearon a los alumnos operaciones de suma y resta adecuadas a su nivel, aunque el número de operaciones planteadas varió de un nivel a otro, ya que se quería cubrir la mayor tipología de operaciones (con y sin ceros, con y sin llevadas…). El número de operaciones planteadas en cada nivel fueron las siguientes:

- *Nivel 1*, siete sumas y seis restas de un dígito.
- *Nivel 2*, nueve sumas y ocho restas de dos dígitos, sin llevadas.
- *Nivel 3*, ocho sumas y ocho restas de dos dígitos, sin y con llevadas.

En los tres niveles, los alumnos resolvieron operaciones planteadas de tres maneras diferentes: a) el profesor las escribía en la pantalla, b) el profesor las dictaba y los alumnos las escribían en la pantalla y c) los alumnos las leían en papel escritas en horizontal y las copiaban en la pizarra con escritura vertical. En el Anexo 1 se muestran las operaciones de cada nivel.

Las sesiones de trabajo se videograbaron con el objetivo de observar todos movimientos de los alumnos en la ejecución completa de los algoritmos y así poder clasificar los procedimientos, las estrategias, los errores y todas las interacciones con la pizarra.

4. Resultados generales

Para mostrar los resultados, en primer lugar, se analiza el éxito en los dos tipos de operaciones, a continuación se desglosan las estrategias y los procedimientos de cada alumno, y se clasifican los errores que cometieron, mostrando diferentes ejemplos, y por último, se analiza el uso de la pizarra digital.

4.1 Éxito al efectuar operaciones

En la tabla 4 se muestra el éxito obtenido por los 9 alumnos al efectuar las operaciones. Recuérdese que sólo los alumnos de nivel 3 efectuaron operaciones con llevadas.

Tabla 4. Porcentaje de éxito de los 9 alumnos en las operaciones

	NIVEL 1			NIVEL 2			NIVEL 3		
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Sumas sin llevadas	100	14	71	89	55	55	100	100	100
Restas sin llevadas	0	0	0	100	50	37	100	100	100
Sumas con llevadas	-	-	-	-	-	-	20	80	80
Restas con llevadas	-	-	-	-	-	-	20	80	80
Nº operaciones	7 sumas y 6			9 sumas y 8			8 sumas y 8 restas		

En las operaciones sin llevadas observamos, que para los alumnos de los niveles 1 y 2, las restas son más complejas que las sumas (excepto para el alumno A4 que realiza correctamente 16 operaciones de las 17 planteadas). Especialmente llamativo es que los tres alumnos de nivel 1 fracasan al efectuar las restas debido a que las efectúan como si fueran sumas. Esta mayor dificultad en las restas es común en los alumnos sin dificultades de aprendizaje.

Los alumnos de nivel 3 resuelven con éxito tanto las sumas como las restas sin llevadas. En cambio, en las operaciones con llevadas, hay una diferencia considerable entre el alumno A7 y los otros dos alumnos, A8 y A9, ya que el primero presenta grandes dificultades en estas operaciones (solo resuelve con éxito un 20% de las sumas y un 20% de las restas con llevadas), sin embargo, los alumnos A8 y A9 resuelven con éxito un 80% de cada tipo de operación.

En la tabla 5 se muestra el éxito de los alumnos para escribir las operaciones en la pizarra, ya sea después de que el profesor las dicte en voz alta o después de que los alumnos las lean en el papel.

Tabla 5. Porcentaje de éxito de los alumnos en la escritura de los números en la pizarra

	NIVEL 1			NIVEL 2			NIVEL 3		
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Operaciones dictadas	100	50	100	100	0	75	25	100	100
Operaciones copiadas	100	60	100	100	100	50	50	100	100

Los alumnos A1, A3, A4, A8 y A9 no tienen dificultades de escritura en la pizarra, cuando las operaciones son dictadas o copiadas. Sin embargo, los restantes alumnos tuvieron dificultades en alguna o en ambas acciones (dictado o copiado), lo que les llevó, en general, al fracaso en dichas operaciones, y puso de manifiesto algunas de sus deficiencias numéricas. Es el caso de los ejemplos que se muestran en las Figuras 3, 4 y 5, pertenecientes a respuestas de los alumnos A2, A5 y A7.

Operación copiada desde el papel (9-3)	Operación dictada por el profesor (7+12)	Operación copiada desde el papel (6+27)
$\begin{array}{r} 3 \\ -\ 6 \\ \hline 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \\ +\ 12 \\ \hline 89 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \\ +\ 27 \\ \hline 87 \end{array}$
Figura 3. Escritura y resolución de una operación: alumno A2	**Figura 4. Escritura y resolución de una operación: alumno A5**	**Figura 5. Escritura y resolución de una operación: alumno A7**

Estos datos nos ayudan a situar el grado de conocimiento y las diferencias entre las operaciones de suma y resta, de cada alumno dentro de su nivel. Se observa la variabilidad entre los alumnos, lo cual es una característica de los alumnos con SD (Porter, 1999; Pueschel, 2002; Abdelhameed y Porter, 2006; Buckley, 2007).

4.2 Análisis de estrategias y procedimientos

Para facilitar el análisis de resultados, además de señalar las *estrategias* utilizadas por los estudiantes basándonos en las que están descritas en la Tabla 2, hemos separado los *procedimientos* que utilizan, distinguiendo entre: empleo de bolas en la pizarra, conteo con los dedos y uso de los símbolos.

4.2.1. Estrategias y procedimientos para la suma

En la tabla 6 se detallan las estrategias utilizadas por los alumnos en la realización de las sumas. En ocasiones, se observa que los alumnos utilizan diferentes estrategias en una misma operación, por esa razón se han detallado todas las estrategias encontradas.

En la tabla 7 hemos señalado el procedimiento utilizado, teniendo en cuenta si el alumno empleó bolas a la derecha de los números, si utilizó sus dedos, o si realizó, estrictamente, un manejo simbólico de los números. Todos los alumnos utilizan la pizarra digital, salvo el alumno A1 que la rechaza y prefiere realizar las operaciones en el papel y poner el resultado en la pizarra.

Tabla 6. Porcentaje de uso de estrategias para sumar de los 9 alumnos

Estrategias sumas	NIVEL 1			NIVEL 2			NIVEL 3		
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Contar todo	100	100	86	11					
Contar todo/Contar a partir del primero				11			12,5		
Contar a partir del primero				11	56		25		
Hecho memorizado/Contar todo				44				12,5	
Hecho memorizado/Contar a partir del primero				11	22	11	62,5	50	50
Hecho memorizado				11	11	89		37,5	50
Otros			14		11				
Número de sumas	N = 7			N = 9			N = 8		

Tabla 7. Porcentaje de uso de procedimientos para sumar de los 9 alumnos

Procedimientos sumas	**NIVEL 1**			**NIVEL 2**			**NIVEL 3**		
	A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**
Bolas	100	100	100		67				
Bolas /Símbolos numéricos					22	11			
Dedos				44,5			37,5	50	
Dedos/símbolos numéricos				44,5			62,5	12,50	50
Bolas-Dedos									
Símbolos numéricos				11	11	89		37,5	50
Número de sumas	N= 7			N= 9			N=8		

Las tablas 6 y 7 muestran cambios de estrategias y de procedimientos según los niveles de los alumnos que van de menos a más abstractas.

Los alumnos de nivel 1 utilizan como única estrategia, la estrategia básica de modelización denominada *contar todo;* para ello, representaron los dos sumandos con bolas a la derecha de cada número y contaron todas las bolas. El alumno A1 realizó este proceso en el papel y los alumnos A2 y A3 en la pizarra digital (ver figura 6).

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\,4 \\ \hline 9 \end{array}$$

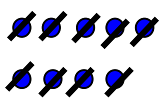


Figura 6. Estrategia "Contar todo" (Respuesta del alumno A3)

En el nivel 2 es donde se observa una mayor diversidad entre los alumnos tanto en las estrategias como en los procedimientos empleados. El alumno A4 utiliza los tres tipos de estrategias: de modelización (*contar todo),* de conteo (*contar a partir del primero*) y de hechos numéricos (*hechos memorizados*), utilizando sus dedos tanto para modelizar como para seguir la cuenta del número de palabras recitadas en la secuencia numérica. La predominante es la de *contar todo* y la de *hechos memorizados* la emplea únicamente en las sumas en las que hay un 0.

El alumno A5 utiliza la estrategia de conteo *contar a partir del primero*, y en los casos en los que debe sumar un número con 0, utiliza la de *hechos memorizados* con el manejo de los símbolos. Destaca el hecho del empleo de bolas en la estrategia de conteo, como se puede ver en la figura 7.

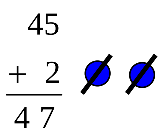


Figura 7. Estrategia "Contar a partir del primero" en unidades y "hechos memorizados" en decenas. (Respuesta del alumno A5)

Por último, en el alumno A6 domina la estrategia de *hechos memorizados* en 8 de las 9 sumas planteadas y muestra un manejo de los símbolos, procedimiento asociado a dicha estrategia. De hecho, de los 9 alumnos analizados, el alumno A6 es el que mayor uso hace de esta estrategia para las sumas.

En definitiva, observamos tres alumnos de nivel 2 con diferentes grados de abstracción en las estrategias y distintos procedimientos (A4-dedos para modelizar y seguir el conteo; A5-bolas para seguir el conteo; A6-símbolos numéricos).

En los alumnos de nivel 3, se distingue el alumno A7 de los otros dos, A8 y A9, los cuales tienen un comportamiento similar. El alumno A7 utiliza la estrategia *contar a partir del primero* en todas las operaciones, principalmente acompañada de la estrategia de *hechos memorizados* en las sumas con un 0. Para los alumnos A8 y A9 predominan los *hechos memorizados* (no sólo en las sumas con 0), aunque, en algunas ocasiones, *cuentan a partir del primero*.

Lo que distingue a los tres alumnos de nivel 3 es el abandono de estrategias de modelización a favor de estrategias de conteo con utilización de los dedos y del manejo simbólico al utilizar hechos memorizados, y por consiguiente, el abandono de procedimientos de representación con bolas.

En general, en la realización de las sumas se observa una evolución en las estrategias, que van desde la más básica (*contar todo*, usando bolas), a la más abstracta (*hechos memorizados* con manejo de símbolos). Aunque dicha evolución avanza según el nivel de los alumnos, hay diferencias dentro de un mismo nivel. También se observan cambios de estrategias en un mismo alumno, en función de los números implicados. Por ejemplo, el alumno A4 utiliza la estrategia *contar a partir del primero*, cuando los números son mayores que mayores que 5 y la estrategia *contar todo*, si son menores que 5.

4.2.2 Estrategias y procedimientos para la resta

En las siguientes tablas, 8 y 9, se muestran los porcentajes de las diferentes estrategias y procedimientos utilizados para efectuar las restas por parte de los 9 alumnos.

Tabla 8. Porcentaje de uso de estrategias para restar de los 9 alumnos

Estrategias restas	NIVEL 1			NIVEL 2			NIVEL 3		
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Contar todo	100	83	83						
Contar hasta							75	12,5	12,5
Quitar		17		37,5	12,5	12,5			
Quitar /Contar todo						25			
Contar a partir del primero					12,5				
Hecho memorizado/ Contar a partir del primero					12,5				
Hecho memorizado/Contar todo						12,5			
Hecho memorizado/ Quitar				50	25	37,5			
Hecho memorizado/Contar hasta							25	75	37,5
Hecho memorizado				12,5	12,5	12,5		12,5	50
Algoritmo Inventado			17		25				
Número de restas	N= 6			N= 8			N= 8		

Tabla 9. Porcentaje de uso de procedimientos para restar de los 9 alumnos

Procedimientos restas	**NIVEL 1**			**NIVEL 2**			**NIVEL 3**		
	A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**
Bolas	100	100	100	50	50	12,5			
Bolas/Símbolos numéricos				37,5	37,5	25			
Dedos						25	75	12,5	
Dedos/Símbolos numéricos						25	25	75	50
Bolas y Dedos									
Símbolos numéricos				12,5	12,5	12,5		12,5	50
Número de restas	N = 6			N = 8			N = 8		

La tabla 8 muestra cómo en la resta, las estrategias se diversifican, quizás debido a la mayor dificultad de esta operación para los alumnos. Al igual que en las sumas, en las restas hay cambios de estrategias y procedimientos en función del nivel de los alumnos.

Los alumnos de nivel 1 cometen el error de sumar en lugar de restar en la mayoría de las restas, por lo que la estrategia principal que siguen es la misma que habían utilizado en las sumas, es decir, *contar todo*, utilizando el procedimiento de representar el números de bolas que corresponden a cada número.

Se puede observar diversidad en los alumnos de nivel 2, como también ocurrió en la suma, no sólo en el éxito, sino en las estrategias y los procedimientos. En este nivel prevalecen dos estrategias: *Quitar* y *Hechos memorizados* (esta última estrategia en las operaciones en las que hay un cero en alguno de los términos). En muchas ocasiones, ambas estrategias se utilizan combinadas. En la figura 8 se puede observar la respuesta del alumno A5 a una resta en la que emplea bolas con el procedimiento *Quitar*.

$$\begin{array}{r} 36 \\ -\ 5 \\ \hline 31 \end{array}$$

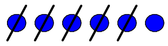


Figura 8. Estrategia "Quitar" en unidades y "hechos memorizados" en decenas. (Respuesta del alumno A5)

En cuanto a los procedimientos utilizados, los alumnos del nivel 2 necesitan ayudas (bolas y/o dedos) en la mayoría de las restas. Los alumnos A4 y A6 utilizan en las restas, procedimientos más básicos que en las sumas. Así, el alumno A4 usa los dedos en las sumas y recurre a las bolas en las restas, mientras que el alumno A6, emplea símbolos numéricos en las sumas y necesita representar bolas o contar con los dedos en las restas.

Entre los alumnos del nivel 3 se observa el uso de estrategias más básicas que las empleadas en las sumas, debido a la dificultad que encuentran en esta operación. Por otro lado, los tres alumnos utilizan, con porcentajes diferentes entre ellos, una estrategia de conteo que no se da entre los alumnos de los otros niveles, que es *Contar hasta*, apoyándose siempre en el empleo de los dedos (en ningún caso con bolas). También en este nivel encontramos dicha estrategia junto con el uso de *Hechos memorizados* en una misma operación, en especial, el alumno A9 (como también lo hacía en las sumas). El avance en este nivel es que la utilización de *Hechos memorizados* aparece también en restas en las que los dos números son distintos de cero; esto se observa en los alumnos A8 y A9.

En resumen, la resta es una operación más compleja para los estudiantes, lo cual se manifiesta no sólo por el éxito más bajo, sino por la necesidad de apoyarse en lo concreto, ya sean bolas o dedos, y por una diversidad en las estrategias. Se observa un desconocimiento de esta operación por parte de los alumnos de nivel 1, a pesar de que formaba parte de los objetivos escolares que estaban trabajando. Una justificación que encontramos a este hecho es que puede ser un reflejo de "la escasa flexibilidad para cambiar un procedimiento que se está siguiendo", lo cual es característico de los alumnos con SD. Es decir, el hecho de que las dos primeras operaciones planteadas fueran sumas, les pudo llevar a seguir efectuando este procedimiento en todos los casos que se les planteó. Otra explicación es que la mayor dificultad que tenían con la resta, les llevó a realizar la operación con la que sienten más seguridad, en este caso, la suma.

A continuación, y a modo de síntesis, mostramos las estrategias y los procedimientos más característicos de los 9 alumnos conjuntamente en las dos operaciones. El cuadro refleja la evolución de las estrategias desde las más básicas de modelización (como *Contar todo* y *Quitar*), pasando por las estrategias de conteo (*Contar a partir del primero* y *Contar hasta*), hasta las más abstractas (*Hechos numéricos*), según el nivel de los alumnos. Los procedimientos también cambian, y van desde el uso de las bolas para modelizar, al uso de bolas para apoyarse en el conteo, hasta la sustitución de las mismas por el empleo de dedos para apoyar el conteo, y el uso simbólico de los números.

Tabla 10. Resumen de las estrategias y procedimientos de los 9 alumnos

		SUMAS	RESTAS
Nivel 1	A1 A2 A3	**Con bolas** Contar todo	
Nivel 2	A4	**Con dedos** - Contar todo - Contar a partir del primero **Símbolos numéricos** - Cuando hay cero	**Con bolas** - Quitar **Símbolos numéricos** - Cuando hay cero
	A5	**Con bolas** - Contar a partir del primero **Símbolos numéricos** - Cuando hay cero	**Con bolas** - Quitar **Símbolos numéricos** - Cuando hay cero
	A6	**Con bolas** - Contar todo **Con dedos** - Contar a partir del primero **Símbolos numéricos** - Cuando hay cero	**Con dedos y con bolas** - Quitar **Símbolos numéricos** - Cuando hay cero
Nivel 3	A7	**Con dedos** - Contar a partir del primero **Símbolos numéricos**	**Con dedos** - Contar hasta **Símbolos numéricos** - Cuando hay cero
	A8	**Con dedos** - Contar a partir del primero **Símbolos numéricos**	**Con dedos** - Contar hasta **Símbolos numéricos**
	A9	**Con dedos** - Contar a partir del primero **Símbolos numéricos**	**Con dedos** - Contar hasta **Símbolos numéricos**

4.3. Estudio de los tipos de errores

En este apartado se desglosan los errores de los alumnos en las diferentes operaciones, sin diferenciar que provengan de sumas o restas. En la tabla 11 se presenta el número de veces que se da cada tipo de error en los 9 alumnos, siguiendo la clasificación dada en la tabla 1. En este caso no se dan porcentajes, debido a que muchas veces los alumnos cometen varios errores en una misma operación.

Los alumnos de nivel 1 cometen, principalmente, un error no recogido en la tabla 1, relativo al proceso de conteo de las bolas. Observamos que los alumnos presentan dificultades en algunos de los *principios de conteo* indicados por Gelman y Gallistel (1978), tales como, el *principio de orden estable* (no seguir la serie numérica al contar las bolas) o el *principio de correspondencia uno a uno* (saltarse alguna bola al contar) (ver figura 9).

Operación escrita en la pizarra por el tutor Errores: *Conteo* (se salta objetos y no sigue la serie numérica) *Grafomotriz (*confunde números 3 con 5) *Sistema de numeración decimal* (cambia unidades por decenas) **Estrategia**: *Contar todo*	
5 + 4	El alumno coloca tantas bolas como indican ambos sumandos.
5 + 4 51	Cuenta las bolas tachándolas y dice: "*uno, dos tres, cuatro, cinco*". Al saltar a la línea inferior continúa el conteo por once y deja una bola sin contar, dice: "*once, doce y trece*". Pero escribe 51.

Figura 9. Error de "Conteo", "Grafomotriz" y "Sistema de numeración decimal" (Respuesta del alumno A2)

Además, en este nivel 1 observamos otros errores que no se dan en los otros niveles. El alumno A2 en dos ocasiones confunde los números (error *Grafomotriz*) y cambia el orden de las unidades, ya que escribe las decenas en el lugar de unidades, 01 en lugar de 10, 51 en lugar de 15… Este último, es un error que indica una incomprensión del *Sistema de numeración decimal*. Ambos errores están ejemplificados en la figura 9.

Otro error que presentan los tres alumnos del nivel 1, está catalogado como un desconocimiento del *Significado de la operación*, debido a que suman en todas las restas planteadas. En la figura 10 se muestra la respuesta del alumno A2 a una resta que refleja este error.

Algoritmo que el alumno copia después de leerlo en papel (9-3) **Errores**: *Significado de la operación* (sumar en lugar de restar) **Estrategia**: *Contar todo*	
9 - 3 12	El alumno coloca 9 bolas del minuendo y 3 bolas del sustraendo y tacha contándolas.

Figura 10. Error de "Significado de la operación". (Respuesta del alumno A2)

El alumno A3 comete un error relacionado con el *Cero*, en concreto dar al cero el valor del otro término, como puede verse en la figura 11, error que aparece con un una escritura errónea del número 10.

Operación escrita en la pizarra por el tutor **Errores**: *Cero* (da al cero el valor del otro término) *Sistema de numeración decimal* (cambia unidades por decenas) **Estrategia**: *Contar todo*	
5 - 0 01	El alumno coloca 5 bolas al lado de cada número, las tacha y cuenta 10. Escribe 01.

Figura 11. Error de "Cero" y de "Sistema de numeración decimal". (Respuesta del alumno A3)

Como también ocurría en las estrategias y los procedimientos, en los alumnos del nivel 2 no observamos un patrón común. Destaca la actuación del alumno A4 que tiene un único error relacionado con el *Conteo*. En los otros dos alumnos observamos errores relacionados con el conocimiento del *Sistema de numeración decimal*, como la colocación incorrecta de los números (encolumnamiento), lo que les lleva a sumar o restar unidades con decenas (A5 y A6). Estos errores surgen cuando las operaciones son dictadas o copiadas (Ver figura 12).

Operación dictada por el profesor (siete más doce) **Errores**: *Sistema de numeración decimal* (encolumnamiento y sumar unidades con decenas) **Estrategia**: *Contar a partir del primer número dado*.	
7 + 1 2 $\emptyset$ $\emptyset$ 9	Escribe la operación de manera incorrecta. Representa con bolas las unidades del segundo sumando, y las sumas con las unidades que ha colocado en el lugar de las decenas. Escribe 9 en las unidades.
7 +1 2 $\emptyset$ 8 9	Luego borra las bolas, representa la decena del 12 con una bola y vuelve a sumarla con las unidades. Escribe 8

Figura 12. Error de "Sistema de numeración decimal2. (Respuesta del alumno A5)

Otros errores observados en los alumnos del nivel 2, indican un desconocimiento de las reglas del *Algoritmo*, como comenzar a operar por la izquierda (ver figura 13), y un desconocimiento del *Significado de la operación*, como sumar y restar en una misma operación, y sumar en lugar de restar (ver figura 3).

Operación escrita en la pizarra por el tutor **Errores**: *Algoritmo* (comienza por la izquierda) *Significado de la operación* (suma y resta a la vez). **Estrategia**: *Quitar* y *contar todo*	
36 −12 2	Representa con los dedos las decenas del minuendo (3) y baja tantos dedos como decenas hay en el sustraendo (1). El resultado son los dedos levantados (2).
36 ●●●●●● −12 ●● 28	Luego, representa con bolas las unidades del minuendo (6) y las del sustraendo (2) y procede a contarlas todas para obtener el resultado (8).

Figura 13. Error de "Algoritmo" y del "Significado de la operación".
(Respuesta del alumno A6)

Como ya comentamos en el apartado 2, el error más frecuente en la resta con niños de desarrollo típico tiene que ver con la llevada. Así ocurrió también en nuestro estudio con los tres alumnos de nivel 3, ya que el error característico de este grupo fue olvidarse de la *llevada* (ver figura 14). Además de esto, el alumno A7, presenta dificultades con el encolumnamiento cuando las operaciones son dictadas, y errores provocados por comenzar a operar por la izquierda.

<table>
<tr><td colspan="2">Operación dictada por el tutor (treinta y cuatro menos seis)
Error: Olvidar la llevada
Estrategia: Contar hasta y Hecho memorizado</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{r} 34 \\ -\quad 6 \\ \hline 38 \end{array}$</td><td>En las unidades, cuenta con sus dedos desde 6 hasta 14 y recuenta los dedos que ha utilizado, escribiendo un 8 en las unidades. A continuación, olvida la llevada y escribe directamente un 3 en las decenas.</td></tr>
</table>

Figura 14. Error de “Llevada”. (Respuesta del alumno A7)

Por último, algunos alumnos cometen errores no catalogados que entendemos provienen del despiste o de procedimientos difíciles de catalogar.

Tabla 11. Número de veces de los errores cometidos por los 9 alumnos

Errores de sumas y restas		NIVEL 1			NIVEL 2			NIVEL 3		
		A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**
CONTEO	Conteo de bolas	1	9	3	1					
GRAFOMOTRIZ	Confundir números		2							
ALGORITMO	Operar izquierda						5	2		
SISTEMA NUMERACIÓN DECIMAL	Encolumnamiento					4	3	3		
	Cambiar orden unidades		4	1						
	Sumar o restar unidades de diferente orden					4				
CERO	Cero en vez de sumar o restar					1				
	Dar al cero el valor del otro término			2						
SIGNIFICADO OPERACIÓN	Sumar y restar a la vez					1	4			
	Sumar en lugar de restar.	6	5	5		3				
LLEVADA	Olvidar la llevada							5	2	**1**
OTROS	**Despistes/invención**	**1**					**2**			**1**

4.4. Estudio del uso de la pizarra digital

En este apartado comentamos los resultados de la interacción del alumno con las diferentes zonas de la pizarra digital (ver figura 2): uso del ratón, colocación de números y bolas, borrado y tachado de bolas, colocación del signo de la operación y utilización de las áreas sensibles establecidas en la zona *hoja de trabajo*. Además analizamos el grado de autonomía de los alumnos al resolver las tareas, observando la necesidad o requerimiento del profesor.

Los alumnos se muestran entusiasmados con la pizarra digital y aunque se les ofrece el papel por si lo prefieren o necesitan, todos optan por trabajar en la pizarra, salvo el alumno A1 que decide realizar todas las operaciones en papel y, posteriormente, trasladar el resultado a la pizarra, y el alumno A3 que en dos ocasiones se ve aturdido con la operación y recurre al papel.

En cuanto a la interacción con la pizarra digital, tres alumnos, el A4, A8 y A9, no manifiestan ninguna dificultad y se muestran totalmente autónomos y seguros. En el resto de los alumnos aparecen algunas dificultades motrices en la utilización de determinados elementos de la pizarra digital que comentamos a continuación.

Tachado de las bolas

El tachado de las bolas con el lápiz requiere de movimientos cortos y precisos que generó dificultades a los alumnos A2, A3, A5 y A6. A tres de ellos (A3, A5 y A6) esta dificultad no les hizo cometer errores en las operaciones, procediendo en ocasiones a contar las bolas tocándolas con sus dedos sobre la pantalla. Sin embargo, en el alumno A2, esta dificultad favoreció la aparición de errores en el conteo, como fallar en la aplicación de los *principios de correspondencia uno a uno* y del *orden estable*, como se explica en lo que sigue:

- Al contar las bolas, las señala con el puntero del ratón y hace movimientos muy bruscos que le lleva a saltarse bolas que deja sin contar, es decir, falla en el *principio de correspondencia uno a uno*.
- Al contar las bolas, las tacha con el lápiz. Este proceso requiere movimientos ajustados que le lleva a concentrarse más en el tachado que en el conteo, y de esta manera pierde la cuenta de lo tachado al pasar de una fila de bolas a otra, por lo tanto, falla en el *principio del orden estable*.

Uso de la goma de borrar

La utilización de la goma para borrar los números y las bolas no genera dificultad, salvo en el alumno A3 que en algunas ocasiones tiene dificultad con el borrado de los números, al no recordar la acción a realizar.

Colocación del signo

La colocación del signo de la operación, cuando las operaciones eran dictadas o mostradas en papel y el alumno tenía que escribirlas en la pizarra, puso de manifiesto en algunos alumnos, el desconocimiento del significado del signo (alumnos A2 y A3) y la poca importancia que le dan al mismo, al limitarse a colocar los números y proceder a operar, dejando escrito el signo de la operación anterior (alumnos A5 y A6). En algunos casos, dejaban el signo de la suma cuando era una resta (o viceversa).

Escritura de las operaciones

La utilización de la *Hoja de resolución* (ver figura 2) provocó algunas dificultades:

- Cuando las operaciones son con números de un dígito y el resultado es mayor que 9, colocan primero las decenas en la posición de las unidades, y las unidades a su izquierda, en el lugar de las decenas (esto lo observamos en los alumnos A2 y A3). El ejemplo de la figura 15 corresponde al alumno A3 quien, por requerimiento de la profesora, realiza posteriormente la operación en papel y no comete dicho error, lo cual muestra que es un error provocado por el entorno de la pizarra digital, que muestra una falta de conocimiento del sistema posicional de los números.

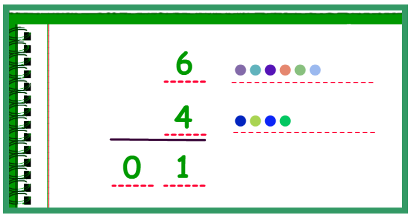


Figura 15. Respuesta del alumno A3

- Otra situación que se dio en las operaciones con números de un dígito, fue colocarlos en el lugar de las decenas, lo que llevó, en ocasiones, a un error de encolumnamiento, (ver el ejemplo del alumno A7, en la figura 16).

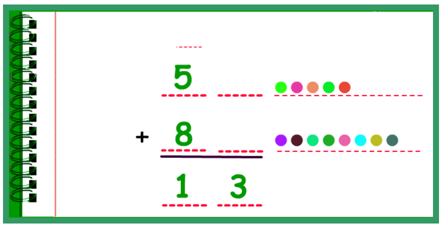


Figura 16. Respuesta del alumno A7

Autonomía

En cuanto a la autonomía de los alumnos al enfrentarse a tareas de resolver operaciones en la pizarra digital, excepto el alumno A1 que se muestra muy inseguro, el resto de los alumnos manifiestan una alta autonomía y seguridad, hasta tal punto que en algunas ocasiones, la profesora interviene para hacer alguna aclaración y es ignorada por parte de los alumnos, continuando con su proceso y tomando sus propias decisiones. La intervención de los profesores se limita a realizar aclaraciones puntuales o corregir errores por iniciativa propia, no por demanda de los alumnos.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos analizado las estrategias, procedimientos y errores de un grupo de alumnos con SD al efectuar algoritmos de suma y resta. Las investigaciones realizadas con niños sin discapacidad en este tópico, nos ha permitido tener un marco en el que analizar los resultados y de esta forma comprobar si hay estrategias y errores que aparecen con más fuerza en la población con SD analizada. El grupo de alumnos que participaron en la experiencia tenían diferente conocimiento numérico, lo que nos ha permitido observar cómo cambian tanto las estrategias como los errores según los niveles de conocimiento numérico de los alumnos.

Se observa que muchos errores no responden al azar, sino a procedimientos mal aprendidos, ya que suelen repetirse varias veces. Hemos observado una relación entre los niveles de los alumnos y el predominio de determinados errores. Así, en los alumnos de nivel 1, lo más característico es la ausencia del significado de la resta, ya que sumaron en todos los casos y los errores que tienen que ver con el proceso de conteo. En el nivel 2 los errores cambian según los alumnos y no se observa un patrón de errores característico. Y para los alumnos de nivel 3, es común el error de llevada, lo cual coincide con la población sin discapacidad.

Cuando los alumnos se enfrentan a tareas en las que las operaciones son dictadas o copiadas, aparecen errores que ponen de manifiesto una incomprensión del razonamiento subyacente a un algoritmo, de manera que parece que existe una laguna entre los procedimientos (reglas del algoritmo) y la comprensión del sistema de numeración decimal. Es decir, muestran un empleo mecánico de procedimientos aprendidos de memoria, por lo que parece necesario un ajuste en la enseñanza. Este aspecto hay que analizarlo en el entorno de la pizarra digital, en el sentido en que la forma de escritura de los números y operaciones en la misma, puede originar dificultades semánticas, reflejo del dominio incompleto del sistema de numeración decimal, como es el caso del error de encolumnamiento.

Para la población estudiada se observa que la resta es más difícil que la suma, como también ocurre con las personas sin discapacidad. Esto se ve no sólo en el menor porcentaje de éxito, sino en las estrategias y los procedimientos de ejecución, que para la resta son más básicos que para la suma.

En la población analizada, las estrategias y los procedimientos que utilizan, van evolucionando de manera similar a como se ha indicado para la población sin discapacidad. No ha aparecido ninguna estrategia diferente a las mostradas en la literatura, aunque también es cierto, que no se dan todas las referenciadas. La estrategia más utilizada por los alumnos de nivel 1 es la estrategia básica de *modelización*, y en los dos niveles siguientes aparecen estrategias de *conteo* y de *hechos numéricos*. Sin embargo, hemos encontrado que las estrategias de *conteo* se utilizan con el apoyo de los dedos y en ocasiones de las bolas, y no recitando la serie, lo cual es llamativo. Es decir, ningún alumno de los analizados utiliza las estrategias de conteo recitando los números, sino que han necesitado del apoyo de los dedos o bolas. Por otra parte, ningún alumno ha llegado al nivel de total abstracción que implica utilizar como única estrategias los *hechos numéricos*.

También evolucionan los procedimientos, así observamos que en el nivel 1, los alumnos modelizan con bolas, nunca con los dedos; en el nivel 2 utilizan bolas o dedos según los alumnos o según la operación, tanto para modelizar como para seguir el conteo; y en el nivel 3 ningún alumno utiliza representaciones con bolas, sino recurren a los dedos para apoyarse en el conteo, y aparecen con mayor frecuencia el manejo simbólico.

Por lo tanto, los resultados indican la importancia de las ayudas visuales (fichas, bolas, dedos…) en la enseñanza de la suma y la resta en las personas con SD, ya que para las casos más complejos debido a los números implicados, los alumnos recurren a estas ayudas y a estrategias menos abstractas.

El análisis del uso de la pizarra digital nos ha llevado a realizar algunos ajustes a la misma, como que cada vez que hay que hacer una nueva operación, la pizarra quede en blanco y no se pueda comenzar a operar hasta que el signo de la operación no esté colocado. Otra adaptación realizada es la incorporación de pantallas táctiles para los alumnos que tienen problemas de motricidad en el manejo del ratón o para aquellos que lo deseen. Frente a esto, la pizarra presentó ventajas para los alumnos que tienen problemas de escritura en general, y de los números en particular, ya que pueden centrarse en la operación y olvidar sus dificultades con la grafía.

Por último, encontramos que los alumnos se sintieron muy motivados hacia el uso de la pizarra, con lo cual es una herramienta que se está integrando en determinados programas multimedia, a modo de ayuda para resolver operaciones.

Nota: Este trabajo forma parte del proyecto EDU2011-29324: “Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de primaria, de secundaria y de profesorado de primaria en formación” del Ministerio de Ciencias e Innovación (España).

6. Bibliografía

Abdelhameed, H. y Porter, J. (2006). Counting in Egyptian children with Down Síndrome. *International Journal of Special Education*, 21(3), 176-187.

Arranz, P. (2002). *Niños y jóvenes con SÍNDROME DE DOWN*. Editorial Egido. Zaragoza.

Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategies for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 141-157.

Bird, G.; Buckley, S.J. (2001). Number skills for individuals with Down syndrome - An overview. *Down Syndrome Issues and Information*.

Bower, A.; Hayes, A. (1994). Short-term memory deficits and Down syndrome: A comparative study. *Down Syndrome Research and Practice*, 2 (2), 47-50.

Brown, J. S.; Van Lehn, K. (1982). Towards a generative theory of “bugs”. En Carpenter, T.; Moser, J, Romberg, T. (eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 117-135. LEA. New Jersey.

Bruno, A. Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de Down. En Moreno, M.M., Estrada, A.; Carrillo, J. y Sierra, T.A. (eds.). Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 141-162). Lleida: SEIEM.

Buckley y Sacks (1987). *The adolescent with Down’s Syndrome*. Portsmouth*:* Portsmouth Polytechnic.

Buckley, S. (1985). Attaining basic educational skills: Reading writing and number. In D. Lane & B. Stratford (eds.), *Current Approaches to Down* Syndrome*,* 315-343. Holt Rinehart & Winston. London.

Buckley, S. (2007). Teaching numeracy. *Down Syndrome Research and Practice*, 12 (1), 11-14.

Carpenter, T. Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En Carpenter, T.; Moser, J, Romberg, T. (eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. LEA. New Jersey.

Carpenter, T.; Fennema, E.; Franke, M.L.; Levi, L. y Empson S.B. (1999). *Children’s Mathematics. Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth, NH. Heinemann.

Caycho, L.; Gun, P. y Siegal, M. (1991), “Counting by children with Down’ Syndrome”, *American Journal on mental Retardation*, 95(5), 575-583.

Chapman, R.S. y Hesketh, L.J. (2000). Fenotipo conductual de las personas con Síndrome de Down. Rev. *Síndrome Down*, Vol. 17, 3: 66-79.

Cox, L.S. (1975). Systematic errors in the four algorithms in normal and handicapped populations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 6(4), 202-220.

Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics: A teacher’s guide recent research*. Cassell.

Dowker, A. (2005). *Individual differences in arithmetic*. Psychology Press. New York.

Fiori, C.; Zuccheri, L. (2005). An experimental research on errors patterns in written subtraction. *Educational Studies in Mathematics Education*, 60, 323-331.

Flórez, J.; Troncoso, M. V. (1991). *SÍNDROME DE DOWN y Educación.* Masson S.A. and Fundación Síndrome de Down de Cantabria. Barcelona.

Fuchs, L.S. y Allinder, R.M. (1993). Computer Applications in the schools for students with mild disabilities: Computer-Assisted Instruction and Computer-Managed Instruction. In Gable, R.A. y Warner, S.F.; *Strategies for Teaching Students with Mild to Severe Mental Retardation* (49-70). London: Jessica Kingsley Publishers.

Gelman, R. y Cohen, M. (1988), "Qualitative differences in the way Down syndrome and normal children solve a novel counting problem", en Nadel, L. (ed.) *The Psychology of Downs'Syndrome,* Cambridge, MA: MIT Press, 51-99.

Gelman, R; Gallistel, (1978). The child's understanding of number. Cambridge, MA: Harvard University Press

Ginsburg, H. (1977). Learning to Count. Computing with Written Numbers. Mistakes. In Ginsburg, H., *Children's Arithmetic: How They Learn It and How You Teach It*, pp. 1-29, 79-129. Pro-Ed. Austin, Texas.

González, C.; Guerra, D.; Noda, M; Bruno, A.; Sanabria, H.; Moreno, L (2007). Diagnóstico automático de errores aritméticos y ayudas adaptadas para niños con Síndrome de Down. *Educação Matemática Em Revista-RS*. 8, 77-88.

González, C; Sigut. J.; Sanabria, H.; Guerra, D.; Noda, A.; Bruno, A.; Hernández, B. Hernández, A.; Moreno, L. (2006). Diseño e implementación de interfaces accesibles para acercar las matemáticas a niños con Síndrome de Down. In Méndez-Vilas, A.; Solano A.; Mesa, J.A.; Mesa J. (eds.) *Technological Science Education, Collaborative Learning*, vol. 2, pp. 1090-1095. FORMATEX. Sevilla. (Design and implementation of accessible interfaces for facilitating mathematics in children with Down syndrome).

Hativa, N. (1988). Sigal's ineffective computer-based practice of arithmetic: A case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 195-214.

Linares, P.L. y Martínez, M. (1994). Aprendizaje computadorizado en una persona con Síndrome de Down. *Polibea*, 32, 4-10.

Marcell, M. M.; Weeks, S. L. (1988). Short-term memory difficulties and Down syndrome. *Journal of Mental Deficiency Research*, 32, 153-162.

Mastropieri, M.A.; Scruggs, T.E. and Shiah, R.L. (1997). Can computers teach problemsolving strategies to students with mild mental retardation?. *Remedial and Special Education*, 18, 3, 157-165.

Molina, S. (2002). *Psicopedagogía del niño con* Síndrome de Down. Arial, Granada. (*Psychology of children with Down syndrome*).

Molina, S.; Arraiz, A. (1993). *Procesos y estrategias cognitivas en niños deficientes mentales.* Pirámide, Madrid. (Cognitive processes and strategies in mentally handicapped children).

Monari, E. (2002). Learning Mathematics at schooll… and later on. *Down Syndrome News and Update* 2(1),19-23.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA

Nye, J.; Fluck, M. y Buckley, S. (2001). Counting and cardinal understanding in children with Dwn syndrome and typically developing children. *Down Syndrome Research and Practice*, vol. 7, núm. 2, pp. 68-78.

Ortega, J. M. (2003). *Nuevas tecnologías y aprendizaje matemático en niños con* Síndrome de Down. Federación Española de Síndrome de Down (FISEM) y Obra Social de Caja Madrid. Madrid.

Porter, J. (1999). Learning to count: A difficult task? *Down Syndrome Research and Practice*, 6(2), 85-94.

Pueschel, S. M. (1991). Causas del Síndrome de Down. En Pueschel, S.M. Síndrome de Down*: Hacia un futuro mejor* (37-48). Barcelona: Salvat.

Pueschel, S. M. (2002). *Sindrome de Down: Hacia un futuro mejor: Guía para padres*. Masson S.A. Santander: Fundación SÍNDROME DE DOWN de Cantabria (2ª edición). Barcelona.

Roberts, G. H. (1968). The failure strategies of third grade arithmetics pupils. *The Arithmetic Teacher,* 15, 442-446.

Rondal, J.; Perera, J.; Nadel, L. (2000). Síndrome de Down*. Revisión de los últimos conocimientos*. Espasa Calpe. Madrid. (Down syndrome. Review of the latest knowledge).

Scruggs, T.E. y Mastropieri, M.A. (1993). Teaching students with mild mental retardation. In Gable, R.A. y Warner, S.F.; Strategies for Teaching Students with Mild to Severe Mental Retardation (117-125). London: Jessica Kingsley Publishers.

Sloper, P.; Cunningham, C.; Turner, S.; Knussen, C. (1990). Factors relating to the academic attainments of children with Down' syndrome. *British Journal of Educational Psychology*, 60, 284-298.

Snart, F.; O'Grady, M.; Das, J. P. (1982). Cognitive processing by subgroups of moderately retarded children. *American Journal of Mental Deficiency*, 82(5), 645-472.

Troncoso, M. V., del Cerro, M. y Ruiz, E. (1999). El desarrollo de las personas con Síndrome de Down: una visión longitudinal. *Siglo Cero*, 30 (4), 184: 7-26.

Valverde M., S. (2005). *El aprendizaje de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en personas con* Síndrome de Down. Facultad de Educación. Universidad Complutense de Madrid. Madrid.

Aurelia Noda Doctora en Matemáticas por la Universidad de La Laguna. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. **mnoda@ull.es**

Alicia Bruno Doctora en Matemáticas por la Universidad de La Laguna. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. **abruno@ull.es**.

Carina González Doctora en Informática por la Universidad de La Laguna. Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática y Arquitectura tecnología de computadores. Universidad de La Laguna. **cjgonza@ull.es**.

Lorenzo Moreno Doctor en Física por la Universidad Complutense de Madrid. Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática y Arquitectura tecnología de computadores. Universidad de La Laguna. lmoreno@ull.es.

Hilda Sanabria Analista de Sistemas. Paraguay. hilda@isaatc.ull.es

.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 41-59
ISSN: 1815-0640

Método alterno para la gráfica de funciones polinómicas

José Albeiro Sánchez Cano

Resumen

En este artículo proponemos un método para encontrar los extremos y puntos de inflexión (si existen) de la gráfica de una función polinómica sin hacer uso de la derivada, aplicando solamente conceptos de álgebra elemental. En el Apéndice se demuestra un teorema que da soporte al método expuesto.

Abstract

In this paper we propose a method to find the extremes and inflection points (if any) of the graph of a polynomial function without the use of the derivative of a function, using only elementary algebra concepts. We prove a theorem in the appendix that supports the method described

Resumo

Neste trabalho, propomos um método para encontrar os extremos e os pontos de inflexão (se houver) do gráfico de uma função polinomial, sem a utilização do derivado de uma função, usando apenas os conceitos de álgebra elementar. Provamos um teorema no apêndice que suporta o método descrito.

1. Introducción

Es conocido por todo estudiante el método elemental de construir la gráfica de una función polinómica dada su ecuación en coordenadas cartesianas, el cual se realiza dando valores a la variable independiente y obtener el correspondiente valor de la variable dependiente y luego ubicarlos en el plano cartesiano. Dicho procedimiento resulta ser muy laborioso. Ahora bien, como lo que se desea es tener una idea de la forma general de una curva, el cálculo diferencial nos suministra métodos para poder determinar la forma de una curva con muy poco cálculo numérico.

La primera derivada nos da la pendiente de la curva en cualquier punto; la segunda derivada determina los intervalos dentro los cuales la curva es cóncava hacia abajo o hacia arriba, y los *puntos de inflexión* que separan estos intervalos; los puntos donde hay *máximo* son los puntos altos de la curva, y los puntos donde hay un *mínimo* son los puntos bajos.

El método que se propone es puramente algebraico, el cual se basa en el hecho que para que una función polinómica, tenga un extremo relativo, esto es, un máximo o un mínimo, se deberá cumplir que el polinomio tenga dos raíces reales e iguales.

2. Método

El teorema siguiente será crucial para el desarrollo del artículo. Dicho teorema fue construido precisamente para dar soporte al método expuesto (Método Algebraico Elemental (MAE)), y será probado en el apéndice.

Teorema. *La gráfica de la función polinómica de grado n,*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

tiene una recta tangente horizontal en el punto (α, k)*, si y sólo si la ecuación polinómica* $f(x) - k = 0$ *tiene una raíz real de multiplicidad algebraica dos,* $x = \alpha$*. En otras palabras,* $f(x) - k = 0$ *puede escribirse como*

$$f(x) - k = (x-\alpha)^2 P_{n-2}(x), \qquad P_{n-2}(\alpha) \neq 0 \tag{2}$$

donde $P_{n-2}(x)$ *es un polinomio de grado* $n-2$.

Nota 1: Cuando se ha encontrado el valor de $x = \alpha$ (raíz de multiplicidad algebraica dos) y para tal α se tiene que $k = 0$, esto es, el punto donde está la recta tangente horizontal a la gráfica de la función polinomio (1) es $(\alpha, 0)$, luego lo que se ha encontrado en este caso es una raíz (doble) del polinomio (1), es decir, se ha factorizado el polinomio (2) , o sea que para factorizar el polinomio (1) , lo que se haría sería factorizar el polinomio $P_{n-2}(x)$ que es un polinomio de grado $n-2$.

Nota 2: Si $P_{n-2}(\alpha) = 0$ entonces el punto $(\alpha, f(\alpha))$ es un punto de inflexión.

Nota 3: El método MAE, consiste entonces en igualar la función f a un parámetro k, k a encontrar, el cual resultará ser el valor extremo (si existe). No tiene nada que ver con obtener la función constante $f(x) = k$.

Los ejemplos siguientes serán adecuadamente fabricados de forma tal que los sistemas de ecuaciones para la obtención de los extremos resultaran relativamente fáciles de resolver, esto es para los polinomios de grado mayor que tres. En general, tales sistemas de ecuaciones resultan imposibles de resolver en forma exacta. Y en tales casos se utiliza un método numérico. Debe de quedar claro así como los ejercicios o ejemplos de los textos de Cálculo Diferencial han sido escogidos para obtener ecuaciones donde pueda ser factorizado, esos mismos ejemplos y/o ejercicios funcionan sin problema con este método.

2.1. Método Alternativo para la gráfica de funciones polinómicas

2.1.1. Método alternativo para la gráfica de una función cuadrática.

Sea la función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Para la gráfica de una ecuación cuadrática, nos basaremos en el hecho de que la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo (según el signo de a), luego deberá existir una recta tangente horizontal, sea ésta $y = k$.

Luego el método funciona como sigue:

Suponer que $f(x) - k$ tiene en $x = \alpha$ una raíz de multiplicidad algebraica dos, esto es:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c-k}{a} = (x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 \qquad (3)$$

Igualando coeficientes, se tiene el sistema:

$$\alpha^2 = \frac{c-k}{a} \qquad (4)$$

$$-2\alpha = \frac{b}{a} \qquad (5)$$

De (5) se tiene: $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Reemplazando en (4), encontramos que el valor de k es $k = c - \frac{b^2}{4a}$ .Luego el vértice de la parábola es $(\alpha, k) = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

2.1.2. Una segunda forma:

Hacemos $f(x) = k$, esto es, $ax^2 + bx + c = k$ o bien, $ax^2 + bx + (c-k) = 0$ cuyas soluciones son: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-k)}}{2a}$ con raíces reales e iguales: $x = -\frac{b}{2a}$, si $b^2 - 4a(c-k) = 0$, o mejor, despejando k: $k = c - \frac{b^2}{4a}$. (Obsérvese que el discriminante deberá ser mayor o igual a cero, luego el valor de k deberá ser $k \geq c - \frac{b^2}{4a}$).

Luego el vértice de la parábola es $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$. Dependiendo del signo de a, se sabe hacia dónde se abre la parábola.

Ejemplo 1. Realizar la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Solución: Se hará este ejemplo de dos formas:

Forma 1. (usando la extensión)

Hacemos $f(x) = k$, esto es, $x^2 - 3x + 2 = k$, o bien, $x^2 - 3x + (2-k) = 0$ cuyas soluciones son : $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2-k)}}{2}$ con raíces reales e iguales: $x = \frac{3}{2}$, si $9 - 4(2-k) = 0$ o bien, despejando *k*: $k = \frac{1}{4}$.

Observación: El discriminante deberá ser mayor o igual a cero, luego el valor de *k* deberá ser $k \geq \frac{1}{4}$). Luego el vértice de la parábola es $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$, y se abre hacia arriba, pues $k \geq \frac{1}{4}$ (tener presente que el valor de k, es precisamente el valor de la variable y, esto es, la extensión de la gráfica.) En resumen, se tiene una recta tangente horizontal en el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (ver Figura 1)

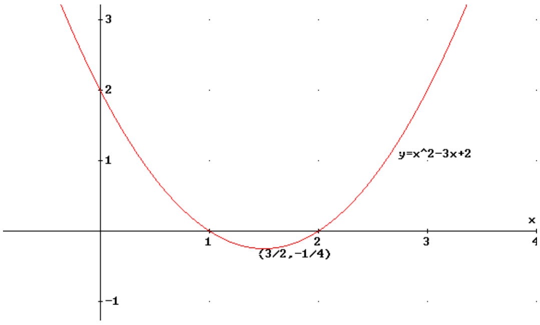


Figura 1

Forma 2.

Como lo que se quiere es obtener, en la cuadrática, raíces reales e iguales, suponemos entonces que la raíz es $x = \alpha$ entonces lo que se hace es igualar lo siguiente:

$$x^2 - 3x + 2 - k = (x - \alpha)^2 = x^2 - 2x\alpha + \alpha^2$$

Igualando los coeficientes se obtiene:

$$2\alpha = 3 \qquad (6)$$

$$\alpha^2 = 2 - k, \quad k \le 2 \qquad (7)$$

De (6) encontramos que el valor de la abscisa es $x = 3/2$, que al reemplazar en la (7) se tiene el valor de la ordenada, esto es,

$$\frac{9}{4} = 2 - k \Rightarrow k = \frac{1}{4}.$$

Luego el vértice es: $\left(3/2, -1/4\right)$

Cuando se usa esta segunda forma, en general se encuentra el valor extremo, pero no es concluyente con el tipo de extremo, como en este ejemplo, sabíamos que la parábola se abría hacia arriba pues el signo del coeficiente de x^2 es positivo.

Nota: La segunda forma resulta ser más efectiva para las funciones cuadráticas, pues de entrada da las coordenadas del vértice.

Ejemplo 2: Dibujar la gráfica con ecuación $4y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$

Solución: Hacemos $x = f(y) = k$ para obtener $4y^2 - 6y + (8k + 25) = 0$.

Resolviendo la ecuación para y, se tiene: $y = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 16(8k + 25)}}{8}$.

Por un lado se tiene que la ordenada del vértice es $y = 3/4$, el cual se obtiene al hacer el discriminante igual a cero: $36 - 16(8k + 25) = 0$ o bien, $k = -\dfrac{91}{32}$ y así que el vértice de la parábola es $\left(-\dfrac{91}{32}, \dfrac{3}{4}\right)$. Puesto que $k \le -\dfrac{91}{32}$, la parábola se abre hacia la izquierda, no hay intercepto con el eje y, pues haciendo $k=0$, se llega que el discriminante es -364 , el cual es menor que cero (Fig.2).

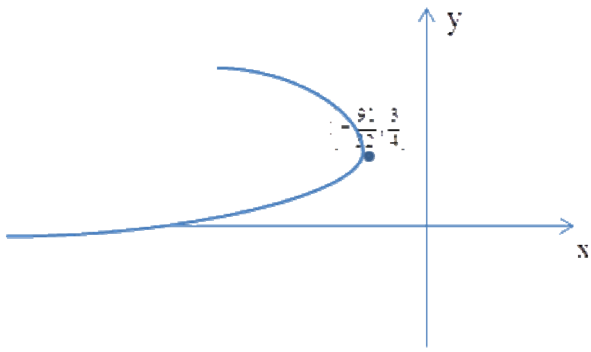


Figura 2

2.1.3. Método alternativo para la gráfica de una función cúbica

Sea la función cúbica $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

Según el método, hacemos $f(x)-k=(x-\alpha)^2 P_1(x)$, con $P_1(\alpha)\neq 0$, donde k es el valor extremo a encontrar (si existe) , para el cual $k=f(\alpha)$.

Para encontrar el punto de inflexión, usamos la ecuación (4´) del Apéndice, encontrando que $P_1(x)=x+2\alpha+a$. Haciendo $P_1(\alpha)=0$ para obtener $\alpha=-\frac{a}{3}$. con lo cual el punto de inflexión ocurre en $\left(-\frac{a}{3}, f\left(-\frac{a}{3}\right)\right)$.

Para encontrar el o los puntos críticos (si existe), hacemos $f(x)-k=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ o bien,

$$x^3+ax^2+bx+(c-k)=x^3-(\beta+2\alpha)x^2+\left(2\alpha\beta+\alpha^2\right)x-\alpha^2\beta$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema a resolver:

$$\begin{cases} \beta+2\alpha=-a \\ 2\alpha\beta+\alpha^2=b \\ -\alpha^2\beta=c-k \end{cases}$$

Aplicaremos el método en los siguientes ejemplos.

<u>Ejemplo 3</u>: Graficar las siguientes funciones cúbicas

a. $f(x)=x^3-x+1$

b. $f(x)=x^3-4x^2$

Solución. a) Sea $f(x)=x^3-x+1$ dada.

Encontremos el punto de inflexión. Para esto, hacemos $P_1(x) = x + 2\alpha$. Vemos fácilmente que el punto $(0,1)$ es el punto de inflexión, pues en este caso $\alpha = -\frac{a}{3} = 0$.

Se puede notar que $P_1(\alpha) = \frac{1}{2} f''(\alpha) = \frac{1}{2}(6\alpha) = 3\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$.

Ahora buscaremos el (los) punto(s) críticos (si existen). Para ello hacemos $f(x) = k$, esto es, $x^3 - x + (1-k) = 0$. Como exigimos que las raíces sean reales e iguales, podemos escribir

$$x^3 - x + (1-k) = x^3 - (\beta + 2\alpha)x^2 + (2\alpha\beta + \alpha^2)x - \alpha^2\beta$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema:

$$\beta + 2\alpha = 0 \qquad (8)$$

$$2\alpha\beta + \alpha^2 = -1 \qquad (9)$$

$$-\alpha^2\beta = 1 - k \qquad (10)$$

de (8) se tiene $\beta = -2\alpha$ que al reemplazar en (9) se obtiene $\alpha = \sqrt[3]{\frac{1-k}{2}}$, de aquí que $\beta = -2.\left(\sqrt[3]{\frac{1-k}{2}}\right)$. Ahora reemplazando los valores encontrados de α y β en la ecuación (10) se encuentra que $k = 1 - \frac{2}{\sqrt{27}}$ y $k = 1 + \frac{2}{\sqrt{27}}$. Estos valores son las ordenadas de los puntos donde la tangente es horizontal y ocurren precisamente cuando $x = \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ respectivamente.

Luego en los puntos $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ existen rectas tangentes horizontales. Se presenta en la siguiente tabla un resumen:

Tabla 1

α	k	tipo
$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$k = 1 + \frac{2}{\sqrt{27}}$	máximo
$\alpha = 0$	$k = 1$	inflexión
$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$k = 1 - \frac{2}{\sqrt{27}}$	mínimo

Se presenta su gráfica en la siguiente figura:

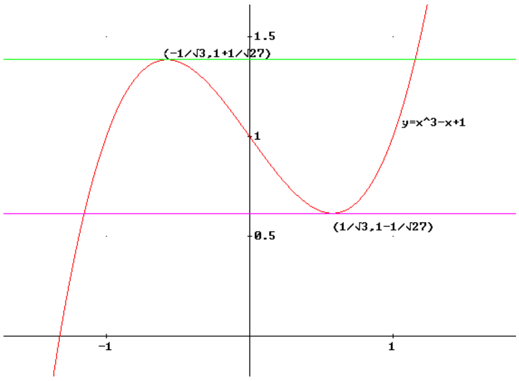


Figura 3

Solución. b): Para obtener la gráfica de la función, hacemos $f(x)=k$ con lo cual: $x^3-4x^2-k=0$. Como exigimos que las raíces sean reales e iguales, al menos dos de ellas, podemos escribir

$$x^3-4x^2-k=x^3-(\beta+2\alpha)x^2+(2\alpha\beta+\alpha^2)x-\alpha^2\beta$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema.

$$\beta+2\alpha=4 \qquad (11)$$

$$2\alpha\beta+\alpha^2=0 \qquad (12)$$

$$\alpha^2\beta=k \qquad (13)$$

de (11) se tiene $\beta=4-2\alpha$. Reemplazando este valor de β en (12) se obtiene:

$$2\alpha(4-2\alpha)+\alpha^2=0 \Rightarrow \alpha(8-3\alpha)=0$$

de la última ecuación se tiene dos casos:

<u>Caso 1</u> $\alpha=0$: luego $\beta=4$ remplazando estos valores en (13) se tiene $k=0$. Luego según el teorema, f(x) puede ser factorizado como $f(x)=x^3-4x^2=x^2(x-4)$ esto indica que la gráfica tiene una recta tangente en el punto $(0,0)$.

<u>Caso 2</u>. $\alpha=\frac{8}{3}$: luego $\beta=-\frac{4}{3}$ y así en (13) se tiene $k=-\frac{256}{27}$.Luego en los puntos $(0,0)$ y $\left(\frac{8}{3},-\frac{256}{27}\right)$ existen rectas tangentes horizontales.

Encontremos ahora el punto de inflexión**,** para esto usamos lo siguiente:

$$f(x)-k=(x-\alpha)^2P_1(x)=(x-\alpha)^2(x+2\alpha+a)$$

En nuestro caso: $x^3-4x^2-k=(x-\alpha)^2P_1(x)=(x-\alpha)^2(x+2\alpha-4)$

Aquí $P_1(x)=x+2\alpha-4$ de donde se tiene:

Punto de inflexión: $P_1(\alpha)=\alpha+2\alpha-4=3\alpha-4=0 \Rightarrow \alpha=\frac{4}{3.}$

Luego en el punto $\left(\frac{4}{3},-\frac{64}{27}\right)$ está el punto de inflexión.(ver Figura 4)

Se resume en la siguiente tabla:

Tabla 2

α	k	Tipo
$\alpha=0$	$k=0$	máximo
$\alpha=\frac{4}{3}$	$k=-\frac{64}{27}$.	inflexión
$\alpha=\frac{8}{3}$	$k=-\frac{256}{27}$.	mínimo

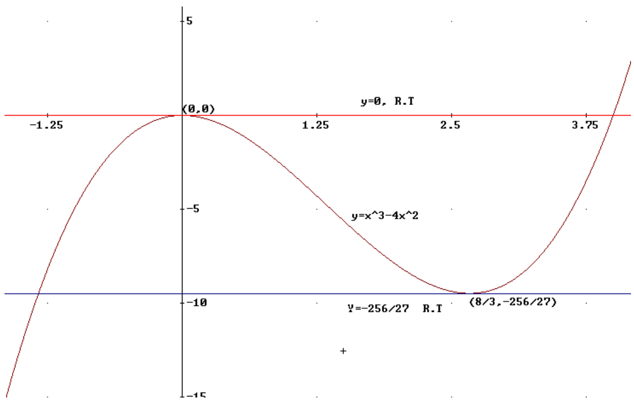


Figura 4

<u>Ejemplo 4</u>: Graficar $f(x)=x^3+4x^2+x+1$.

Solución: Según el método: $f(x)-k=x^3+4x^2+x+1-k=(x-\alpha)^2P_1(\alpha),\quad P_1(\alpha)\neq 0,$

donde $P_1(x)=x+2\alpha+4$.

Encontremos el punto de inflexión. Para ello, hacemos $P_1(\alpha)=0\Rightarrow\alpha+2\alpha+4=0,$ o bien, $\alpha=-\frac{4}{3}$. Luego $f\left(-\frac{4}{3}\right)=\left(-\frac{4}{3}\right)^3+4\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)+1=\frac{119}{27}$ con lo que el punto de inflexión es $\left(-\frac{4}{3},\frac{119}{27}\right)$.

Busquemos ahora, si existen, los puntos críticos.

Para obtener la gráfica de la función hacemos $f(x)=k$, con lo cual se obtiene $x^3+4x^2+x+(1-k)=0$. Ahora bien, como exigimos que las raíces sean reales e iguales, podemos escribir

$$x^3+4x^2+x+(1-k)=x^3-(\beta+2\alpha)x^2+\left(2\alpha\beta+\alpha^2\right)x-\alpha^2\beta$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema:

$$\beta + 2\alpha = -4 \qquad (14)$$

$$2\alpha\beta + \alpha^2 = 1 \qquad (15)$$

$$\alpha^2\beta = k - 1 \qquad (16)$$

de (14) se tiene $\beta = -4 - 2\alpha$ .Esto en (15) da una ecuación cuadrática en α, las cuales tiene como raíces: $\alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{13}}{3}$.

Para $\alpha = \frac{-4+\sqrt{13}}{3}$: se tiene que $\beta = -\frac{2}{3}\left(2+\sqrt{13}\right)$. Reemplazando estos valores en (16) se tiene $k = \frac{119-26\sqrt{13}}{27}$. Análogamente, para $\alpha = \frac{-4-\sqrt{13}}{3}$: se tiene que $\beta = -\frac{2}{3}\left(2-\sqrt{13}\right)$. Reemplazando estos valores en (16) se tiene $k = \frac{119+26\sqrt{13}}{27}$.

El resumen se presenta en la siguiente tabla

Tabla 3

α	k	Tipo
$\alpha = -\frac{4+\sqrt{13}}{3} \approx -2{,}532$	$k = \frac{119+26\sqrt{13}}{27} \approx 7{,}87942$	máximo
$\alpha = -\frac{4}{3} \approx -1.33333$	$k = \frac{119}{27} \approx 4{,}44074$	inflexión
$\alpha = \frac{-4+\sqrt{13}}{3} \approx -0{,}1311484$	$k = \frac{119-26\sqrt{13}}{27} \approx 0.9354$	mínimo

Y su gráfica;

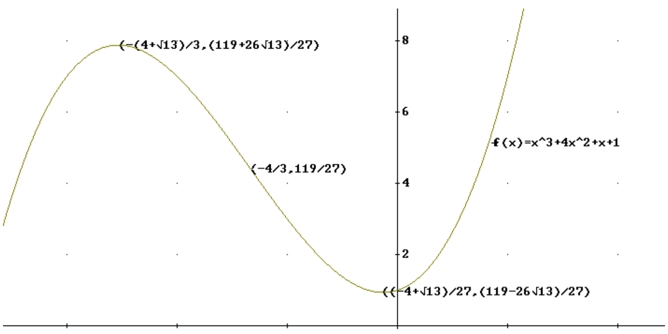


Figura 5

2.1.4. Método alternativo para la gráfica de una función cuártica.

Sea la función de grado cuatro: $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

Para la gráfica de una ecuación de grado cuatro, utilizamos el mismo procedimiento para la de grado tres, esto es, suponemos que la gráfica de la ecuación tiene rectas tangentes horizontales $y = k$, k a encontrar, si existe.

Según el método, hacemos $f(x)-k=(x-\alpha)^2 P_1(x)$, con $P_1(\alpha)\neq 0$, donde k es el valor óptimo a encontrar, si existe, para el cual $k = f(\alpha)$.

Para esto hacemos $f(x)=k$, esto es, $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=k$

o bien, $x^4+ax^3+bx^2+cx+(d-k)=0$

exigimos que dos de las raíces sean reales e iguales, esto es, podemos escribir:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+(d-k)=(x-\alpha)^2 P_2(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$$

al simplificar y reunir términos semejantes, tenemos

$$\begin{aligned}&x^4+ax^3+bx^2+cx+(d-k)\\ &\quad = x^4-[(\beta+\gamma)+2\alpha]x^3+[\alpha^2+2\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma]x^2-[\alpha^2(\beta+\gamma)+2\alpha\beta\gamma]x+\alpha^2\beta\gamma\end{aligned}$$

haciendo los siguientes cambios de variables: $\omega=\beta+\gamma,\quad \eta=\beta\gamma$:

$$\begin{aligned}&x^4+ax^3+bx^2+cx+(d-k)\\ &\quad = x^4-[\omega+2\alpha]x^3+[\alpha^2+2\alpha\omega+\eta]x^2-[\alpha^2\omega+2\alpha\eta]x+\alpha^2\eta\end{aligned}$$

igualando coeficientes, se obtiene el sistema resolver:

$$\begin{aligned}-[\omega+2\alpha]&=a\\ \alpha^2+2\alpha\omega+\eta&=b\\ -[\alpha^2\omega+2\alpha\eta]&=c\\ \alpha^2\eta&=d-k\end{aligned}$$

Para encontrar los puntos de inflexión de la curva, usamos nuevamente la ecuación (4´) del Apéndice, esto es,

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+(d-k)=(x-\alpha)^2P_2(x)=(x-\alpha)^2\left(x^2+(2\alpha+a)x+\left(3\alpha^2+2a\alpha+b\right)\right)$$

de donde $P_2(\alpha)=\alpha^2+(2\alpha+a)\alpha+\left(3\alpha^2+2a\alpha+b\right)=3\alpha^2+3a\alpha+b=0$

Resolviendo para α, se obtienen las abscisas de los puntos de inflexión son:

$$\alpha=\frac{-3a\pm\sqrt{9a^2-12b}}{6}.$$

<u>Ejemplo 5</u>: Graficar las siguientes funciones polinómicas de grado cuatro:

a. $f(x)=x^4-3x$

b. $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$

Solución. 5 a) Para obtener la gráfica de la función hacemos $f(x)=k$, con lo cual obtenemos: $x^4-3x-k=0$

Como exigimos que dos de las raíces sean reales e iguales, podemos escribir

$$x^4-3x-k=x^4-[(\beta+\gamma)+2\alpha]x^3+[\alpha^2+2\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma]x^2-[\alpha^2(\beta+\gamma)+2\alpha\beta\gamma]x+\alpha^2\beta\gamma$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema.

$$-[\omega+2\alpha]=0 \qquad (17)$$
$$\alpha^2+2\alpha\omega+\eta=0 \qquad (18)$$
$$-[\alpha^2\omega+2\alpha\eta]=-3 \qquad (19)$$
$$\alpha^2\eta=-k \qquad (20)$$

de (17) se tiene $\omega=-2\alpha$. Reemplazando $\omega=-2\alpha$ en (18) se obtiene:

$$\alpha^2+2\alpha\omega+\eta=0 \Rightarrow \alpha^2-4\alpha^2+\eta=0 \Rightarrow \eta=3\alpha^2$$

Reemplazando $\omega=-2\alpha$, y $\eta=3\alpha^2$ en (19)

$$\alpha^2\omega+2\alpha\eta=3 \Rightarrow \alpha^2(-2\alpha)+2\alpha(3\alpha^2)=3 \Rightarrow \alpha=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

luego $\eta=3\alpha^2=3\left(\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right)$. Reemplazando estos valores en (20) se obtiene el valor de k, a saber: $k=-\alpha^2(3\alpha^2)=-3\alpha^4=-3\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^4\approx-2.0442606$. Luego la recta tangente a la gráfica ocurre en el punto $(\alpha,k)=\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}},-3\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^4\right).\approx(0.90856,-2.0442602).$

Para encontrar los puntos de inflexión usamos $f(x)-k=(x-\alpha)^2P_2(x)$, donde $P_2(x)$ viene dada por: $P_2(x)=x^2+(2\alpha+a_1)x+3\alpha^2+2a_1\alpha+a_2$.

Con lo cual, se sigue que: $P_2(\alpha)=0 \Rightarrow P_2(\alpha)=\alpha^2+(2\alpha)\alpha+3\alpha^2=6\alpha^2 0 \Rightarrow \alpha=0.$

Luego el punto de inflexión es: $(0,0)$.ver gráfica de figura 6:

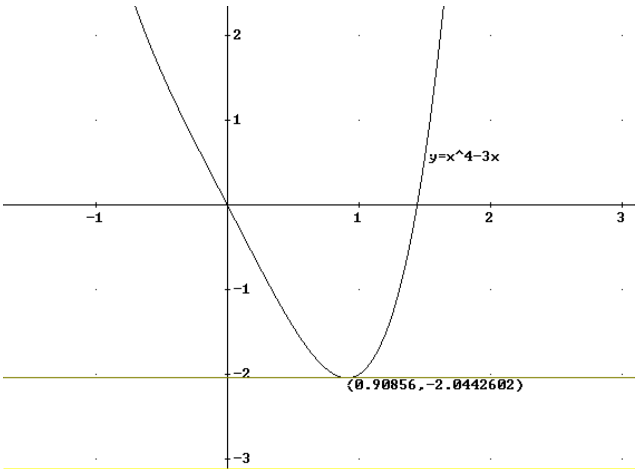


Figura 6

Solución. 5 b) Para obtener la gráfica de la función hacemos $f(x)=k$:

$$3x^4-4x^3-12x^2+(5-k)=0$$

Lo primero que se hace es dividir todo por el coeficiente de x^4. Como exigimos que dos de las raíces sean reales e iguales, podemos escribir

$$x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{(5-k)}{3} =$$
$$= x^4 - [\omega + 2\alpha]x^3 + [\alpha^2 + 2\alpha\omega + \eta]x^2 - [\alpha^2\omega + 2\alpha\eta]x + \alpha^2\eta$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema:

$$-[\omega + 2\alpha] = -\frac{4}{3} \tag{21}$$
$$\alpha^2 + 2\alpha\omega + \eta = -4 \tag{22}$$
$$-[\alpha^2\omega + 2\alpha\eta] = 0 \tag{23}$$
$$\alpha^2\eta = \frac{5-k}{3} \tag{24}$$

de (21) se tiene $\omega = \frac{4}{3} - 2\alpha$. Reemplazando ω en (22) se obtiene:

$$\alpha^2 + 2\alpha\omega + \eta = -4 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha\left(\frac{4}{3} - 2\alpha\right) + \eta = -4 \Rightarrow \eta = 3\alpha^2 - \frac{8}{3}\alpha - 4$$

Reemplazando $\omega = \frac{4}{3} - 2\alpha$, y $\eta = 3\alpha^2 - \frac{8}{3}\alpha - 4$ en (23):

$$\alpha^2\omega + 2\alpha\eta = 0$$
$$\Rightarrow \alpha^2\left(\frac{4}{3} - 2\alpha\right) + 2\alpha\left(3\alpha^2 - \frac{8}{3}\alpha - 4\right) = 0$$
$$\Rightarrow 12\alpha(\alpha^2 - \alpha - 2) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha = 0, \quad \alpha = -1, \quad \alpha = 2$$

Luego los puntos donde ocurren los extremos son:

- Para $\alpha = 0$: $f(0) = 5$, así $(0,5)$ es punto crítico.
- Para $\alpha = -1$: $f(-1) = 0$, así $(-1,0)$ es punto crítico.
- Para $\alpha = 2$: $f(2) = -27$, así $(2,-27)$ es punto crítico.

Nota: observar que una vez que se encuentran los $\alpha's$, no habrá necesidad de devolverse para encontrar los k, como en este ejemplo. El valor más grande de k será el valor máximo, y el valor más pequeño será el valor mínimo.

Nótese además que según el teorema, como $k = 0$, entonces f factoriza como:

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5 = (x+1)^2(3x^2 - 10x + 5).$$

Para encontrar los puntos de inflexión usamos la ecuación (2):

$$x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{(5-k)}{3} = (x-\alpha)^2 P_2(x) = (x-\alpha)^2(x^2 + (2\alpha + a)x + 3\alpha^2 + 2a\alpha + b)$$

donde $a=-\frac{4}{3}$, $b=-4$ y $P_2(x)=x^2+\left(2\alpha-\frac{4}{3}\right)x+3\alpha^2-\frac{8}{3}\alpha-4.$

por lo tanto $P_2(\alpha)=0\Rightarrow P_2(\alpha)=6\alpha^2-4\alpha-4=0\Rightarrow\alpha=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$

Luego los puntos de inflexión son: $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3},5\sqrt{7}-\frac{51}{4}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3},-\frac{80\sqrt{7}+149}{27}\right)$.

El resumen en la tabla 4 y su gráfica en figura figura 7:

Tabla 4

α	k	tipo
$\alpha=-1$	$k=0$:	mínimo
$\alpha=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$	$k=5\sqrt{7}-\frac{51}{4}\approx 0.478756$	inflexión
$\alpha=0$	$\alpha=1$:	máximo
$\alpha=\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	$k=-\frac{80\sqrt{7}+149}{27}\approx-13.35778$	inflexión
$\alpha=2$	$k=-27$	Mínimo absoluto

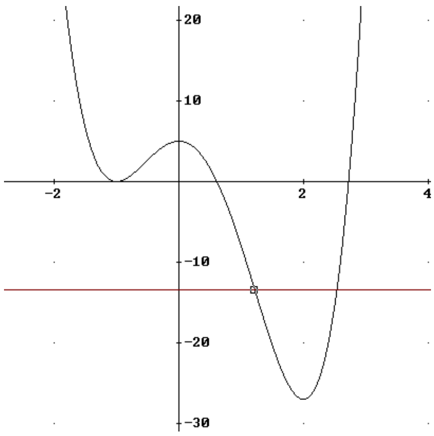


Figura 7

2.1.5. Método alternativo para la gráfica de una función de grado cinco.

Sea la función de grado cinco: $f(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

Para encontrar los extremos y los puntos de inflexión de la gráfica, usamos el mismo principio que en los casos anteriores, esto es, para encontrar los extremos, suponemos que la gráfica tiene rectas tangentes horizontales de la forma: $y=k$, k a encontrar, si existe. Para esto hacemos $f(x)=k$, esto es, $f(x)-k=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+(e-k)=0$

exigimos que dos de las raíces sean reales e iguales, esto es, podemos escribir:

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+(e-k)=(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)(x-\tau)$$

O bien, al simplificar y reunir términos semejantes

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+(e-k)=$$
$$=x^5-[2\alpha+(\beta+\gamma+\tau)]x^4+\left[\alpha^2+2\alpha(\beta+\gamma+\tau)+(\beta\gamma+\tau(\beta+\gamma))\right]x^3-$$
$$-\left[\alpha^2(\beta+\gamma+\tau)+2\alpha[\beta\gamma+\tau(\beta+\gamma)]+\beta\gamma\tau\right]x^2+\left[\alpha^2[\beta\gamma+\tau(\beta+\gamma)]+2\alpha\beta\gamma\tau\right]x-\alpha^2\beta\gamma\tau$$

Ya que, en principio, no nos importa encontrar los valores de β,γ y τ, podemos hacer el siguiente cambio: $\omega=\beta+\gamma+\tau,\quad \eta=\beta\gamma+\tau(\beta+\gamma),\quad \delta=\beta\gamma\tau$

Luego la igualdad anterior queda:

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+(e-k)=$$
$$=x^5-[2\alpha+\omega]x^4+\left[\alpha^2+2\alpha\omega+\eta\right]x^3-\left[\alpha^2\omega+2\alpha\eta+\delta\right]x^2+\left[\alpha^2\eta+2\alpha\delta\right]x-\alpha^2\delta$$

Luego tenemos que resolver el sistema:

$$2\alpha+\omega=-a$$
$$\alpha^2+2\alpha\omega+\eta=b$$
$$\alpha^2\omega+2\alpha\eta+\delta=-c$$
$$\alpha^2\eta+2\alpha\delta=d$$
$$\alpha^2\delta=-(e-k)$$

Para encontrar los puntos de inflexión de la curva utilizamos su polinomio correspondiente $P_3(x)$ dado por (4´) del Apéndice:

$$P_2(x)=x^3+(2\alpha+a)x^2+\left(3\alpha^2+2a\alpha+b\right)x+\left(4\alpha^3+3a\alpha^2+2b\alpha+c\right)$$

ya que se cumple: $P_3(\alpha)=\frac{1}{2}f''(\alpha)$. Veamos cómo se aplica en los próximos ejemplos

<u>Ejemplo 6:</u> Graficar las siguientes funciones cúbicas

a. $f(x)=x^5-5x^3-20x-2$

b. $f(x)=x^5+x+1$

Solución. 6(a) Para encontrar los puntos de inflexión usamos

$$P_3(x)=x^3+(2\alpha+a)x^2+\left(3\alpha^2+2a\alpha+a\right)x+\left(4\alpha^3+3a\alpha^2+2a\alpha+c\right)$$

donde $a=0,\ b=-5$ y $c=0,$ con lo cual $P_3(x)=x^3+2\alpha x^2+\left(3\alpha^2-5\right)x+4\alpha^3-10\alpha$

por lo tanto $P_3(\alpha)=0\Rightarrow P_3(\alpha)=10\alpha^3-15\alpha=0\Rightarrow \alpha=0,\ \alpha=-\sqrt{\frac{3}{2}},\ \ \alpha=\sqrt{\frac{3}{2}}.$

Luego los puntos de inflexión son: $(0,-2),\ \left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{101\sqrt{6}-16}{8}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{101\sqrt{6}+16}{8}\right).$

Para obtener los puntos críticos de f hacemos $f(x)=k$:

Como exigimos que dos de las raíces sean reales e iguales, podemos escribir

$$x^5-5x^3-20x-(2+k)=$$
$$=x^5-[2\alpha+\omega]x^4+[\alpha^2+2\alpha\omega+\eta]x^3-[\alpha^2\omega+2\alpha\eta+\delta]x^2+[\alpha^2\eta+2\alpha\delta]x-\alpha^2\delta$$

Donde los valores de ω,η y δ son como antes. Igualando coeficientes, se obtiene el sistema.

$$2\alpha+\omega=0 \quad (25)$$
$$\alpha^2+2\alpha\omega+\eta=-5 \quad (26)$$
$$\alpha^2\omega+2\alpha\eta+\delta=0 \quad (27)$$
$$\alpha^2\eta+2\alpha\delta=-20 \quad (28)$$
$$\alpha^2\delta=2+k \quad (29)$$

de (25) se tiene $\omega=-2\alpha$ que al reemplazar en (26) se obtiene

$$\alpha^2+2\alpha\omega+\eta=-5\Rightarrow\alpha^2-4\alpha^2+\eta=0\Rightarrow\eta=3\alpha^2-5$$

Reemplazando $\omega=-2\alpha$, y $\eta=3\alpha^2-5$ en (27)

$$\alpha^2\omega+2\alpha\eta+\delta=0\Rightarrow\alpha^2(-2\alpha)+2\alpha(3\alpha^2-5)+\delta=0\Rightarrow\delta=10\alpha-4\alpha^3$$

Reemplazando los valores encontrados de ω,η y δ , en (28) obtenemos:

$$\alpha^2\eta+2\alpha\delta=-20\Rightarrow\alpha^2(3\alpha^2-5)+2\alpha(10\alpha-4\alpha^3)=-20$$

De la última ecuación resulta: $\alpha^4-3\alpha^2-4=0\ \Rightarrow(\alpha^2-4)(\alpha^2+1)=0$

Por lo tanto se tienen dos puntos críticos, a saber: $\alpha=-2$ y $\alpha=2$.

$\alpha=-2$: en $\delta=10\alpha-4\alpha^3$ produce: $\delta=10(-2)-4(-2)^3=12$, reemplazando $\alpha=-2$ y $\delta=12$ en (29) , se tiene: $\alpha^2\delta=k+2\ \Rightarrow\ k=46$. Luego la recta tangente a la gráfica ocurre en el punto $(-2,46)$.

Análogamente, $\alpha=2$ en $\delta=10\alpha-4\alpha^3$ produce: $\delta=10(2)-4(2)^3=-12$, reemplazando $\alpha=2$ y $\delta=-12$ en (29), se tiene: $\alpha^2\delta=k+2\ \Rightarrow\ k=-50$. Luego la recta tangente a la gráfica ocurre en el punto $(2,-50)$. En resumen, se presenta la siguiente tabla

Tabla 5

α	k	tipo
$\alpha=-2$	$k=46$	máximo
$\alpha=-\sqrt{\frac{3}{2}}\approx-1.224745$	$k=\frac{101\sqrt{6}-16}{8}\approx 28{,}925$	inflexión
$\alpha=0$	$k=-2$	inflexión
$\alpha=\sqrt{\frac{3}{2}}\approx1.224745$	$k=-\frac{101\sqrt{6}+16}{8}\approx-32{,}925$	inflexión
$\alpha=2$	$k=-50$	Mínimo

Como se muestra en la gráfica de la figura siguiente.

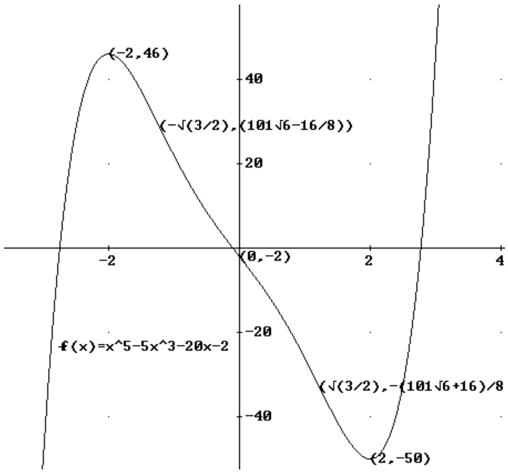


Figura 8

Solución 6 b) Sea $f(x)-k=x^5+x+(1-k)$
Resolvemos el siguiente sistema donde los valores de ω, η y δ son como antes.

$$2\alpha+\omega=0 \qquad (30)$$

$$\alpha^2+2\alpha\omega+\eta=0 \qquad (31)$$

$$\alpha^2\omega+2\alpha\eta+\delta=0 \qquad (32)$$

$$\alpha^2\eta+2\alpha\delta=1 \qquad (33)$$

$$\alpha^2\delta=k-1 \qquad (34)$$

de (30) se tiene $\omega=-2\alpha$ que al reemplazar en (31) se obtiene

$$\alpha^2+2\alpha\omega+\eta=0\Rightarrow\alpha^2-4\alpha^2+\eta=0\Rightarrow\eta=3\alpha^2$$

Reemplazando $\omega=-2\alpha$, y $\eta=3\alpha^2$ en (32)

$$\alpha^2\omega+2\alpha\eta+\delta=0\Rightarrow\alpha^2(-2\alpha)+2\alpha(3\alpha^2)+\delta=0\Rightarrow\delta=-4\alpha^3$$

Los valores encontrados de ω,η y δ en la ecuación (33) produce:

$$\alpha^2\eta+2\alpha\delta=-1\Rightarrow\alpha^2(3\alpha^2)+2\alpha(-4\alpha^3)=1\Rightarrow\alpha^4=-\frac{1}{5}$$

Concluimos de la última ecuación, que no existe valor alguno para α. En conclusión la gráfica de la función $f(x)=x^5+x+1$ no tiene tangentes horizontales por lo tanto no tiene extremos, ver figura 9.
Para encontrar los puntos de inflexión, resolvemos la ecuación:

$$P_3(x)=x^3+(2\alpha+a)x^2+(3\alpha^2+2a\alpha+b)x+(4\alpha^3+3a\alpha^2+2b\alpha+c)$$

Reemplazando $a=0,\ b=0$ y $c=0,$ se tiene entonces $P_3(x)=x^3+2\alpha x^2+3\alpha^2x+4\alpha^3$

Así $P_3(\alpha)=0\Rightarrow P_3(\alpha)=10\alpha^3=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=0.$ Luego el único punto de inflexión es $(0,1)$.

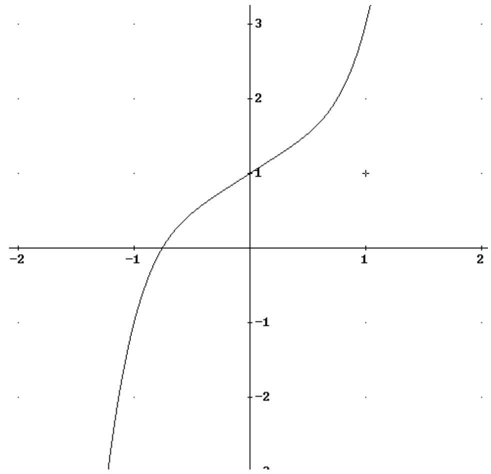


Figura 9

Conclusión

Hemos presentado un método algebraico muy elemental, el método MAE, el cual permite fácilmente encontrar los extremos de funciones polinómicas, así como también los puntos de inflexión. Este método puede ser enseñado a nivel de colegio y universitario.

En los ejemplos donde aparecen funciones polinómicas de grado mayor que tres, estos fueron adecuadamente fabricados de forma tal que los sistemas de ecuaciones para la obtención de los extremos resultaran relativamente fáciles de resolver. En general, tales sistemas de ecuaciones resultan imposibles de resolver en forma exacta. Y en tales casos se utiliza un método numérico.

Se ha trabajado con polinomios hasta de grado cinco, pero este método funciona realmente para funciones polinómicas de cualquier grado.

Bibliografía

Leithold, L. (1987). *El Cálculo con Geometría Analítica.* Ed. Harla. 5° Edición

Larson R., Hostetler, R., Edwards, B. (2006*). Cálculo*. Ed. Mc Graw Hill. 8° Edición.

José Albeiro Sánchez Cano. Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad Politécnica de Valencia (España). Profesor Titular del Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT, Medellín- Colombia. **josanche@eafit.edu.co**.

Apéndice

Demostración teorema.

Supongamos inicialmente que $f(x)-k$, f dada por (1), tiene una raíz de multiplicidad algebraica dos en $x=\alpha$, esto es

$$f(x)-k=(x-\alpha)^2 P_{n-2}(x), \quad p_{n-2}(\alpha)\neq 0, \quad n>2,$$

Luego derivando a ambos lados de la igualdad, se tiene

$$f'(x)=2(x-\alpha)P_{n-2}(x)+(x-\alpha)^2 P'_{n-2}(x),$$

que al evaluar en $x=\alpha$, obtenemos $f'(\alpha)=0$. Veamos que efectivamente $x=\alpha$ es un extremo.

En efecto, derivando nuevamente, obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2P_{n-2}(x)+2(x-\alpha)P'_{n-2}(x)+2(x-\alpha)P'_{n-2}(x)+(x-\alpha)^2 P''_{n-2}(x) \\ &= (x-\alpha)^2 P''_{n-2}(x)+4(x-\alpha)P'_{n-2}(x)+2P_{n-2}(x) \end{aligned}$$

Al evaluar en $x{=}\alpha$, se obtiene: $f''(\alpha)=2P_{n-2}(\alpha)\neq 0$

La última condición indica que f efectivamente tiene un extremo en $x=\alpha$.

Recíprocamente, veamos que $f(x)-k$ tiene una raíz doble en $x=\alpha$, con $f(\alpha)=k$.

En efecto,

$$f(x)-k=\left(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n\right)-\left(\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-2}\alpha^2+a_{n-1}\alpha+a_n\right)$$

Reorganizando se tiene,

$$f(x)-k=\left(\left(x^n-\alpha^n\right)+a_1\left(x^{n-1}-\alpha^{n-1}\right)+\cdots+a_{n-2}\left(x^2-\alpha^2\right)+a_{n-1}(x-\alpha)\right)$$

Realizando las factorizaciones y sacando factor común $x{-}\alpha$:

$$f(x)-k$$
$$=(x-\alpha)\begin{bmatrix}\left(x^{n-1}+\alpha x^{n-2}+\alpha^2x^{n-3}+\cdots+\alpha^{n-2}x+\alpha^{n-1}\right)+a_1\left(x^{n-2}+\alpha x^{n-3}+\cdots+\alpha^{n-3}x+\alpha^{n-2}\right)\\ +a_2\left(x^{n-3}+\alpha x^{n-4}+\alpha^2x^{n-5}+\cdots+\alpha^{n-4}x+\alpha^{n-3}\right)\\ +a_2\left(x^{n-3}+\alpha x^{n-4}+\alpha^2x^{n-5}+\cdots+\alpha^{n-4}x+\alpha^{n-3}\right)\\ \cdots+\cdots a_{n-3}\left(x^2+\alpha x+\alpha^2\right)+a_{n-2}(x+\alpha)+a_{n-1}\end{bmatrix}$$

Simplificando en términos de x, se tiene:

$$f(x)-k$$
$$=(x-\alpha)\begin{bmatrix}x^{n-1}+(\alpha+a_1)x^{n-2}+\left(\alpha^2+a_1\alpha+a_2\right)x^{n-3}+\left(\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3\right)x^{n-4}+\cdots\\ \cdots+\left(\alpha^{n-2}+a_1\alpha^{n-3}+a_2\alpha^{n-4}+\cdots+a_{n-2}\right)x+\\ +\left(\alpha^{n-1}+a_1\alpha^{n-2}+a_2\alpha^{n-3}+\cdots+a_{n-2}\alpha\right)+a_{n-1}\end{bmatrix}\qquad(1')$$

Ya que por hipótesis se tiene que f tiene un punto crítico en $x=\alpha$,esto es, $f'(\alpha){=}0$, o bien

$$f'(\alpha)=0\quad\Rightarrow\quad n\alpha^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2\alpha^{n-3}+\cdots+2a_{n-2}\alpha+a_{n-1}=0$$

De la última expresión, despejamos a_{n-1} para tener:

$$a_{n-1}=-n\alpha^{n-1}-(n-1)a_1x^{n-2}-(n-2)a_2\alpha^{n-3}-\cdots-2a_{n-2}\alpha$$

Reemplazando a_{n-1} en (1´) y sumado con los términos independientes se obtiene

$$f(x)-k=$$
$$(x-\alpha)\begin{bmatrix}x^{n-1}+(\alpha+a_1)x^{n-2}+\left(\alpha^2+a_1\alpha+a_2\right)x^{n-3}+\left(\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3\right)x^{n-4}+\cdots\\ \cdots+\left(\alpha^{n-2}+a_1\alpha^{n-3}+a_2\alpha^{n-4}+\cdots+a_{n-2}\right)x+\left(\alpha^{n-1}+a_1\alpha^{n-2}+a_2\alpha^{n-3}+\cdots+a_{n-2}\alpha\right)\\ -n\alpha^{n-1}-(n-1)a_1\alpha^{n-2}-(n-2)a_2\alpha^{n-3}-\cdots-2a_{n-2}\alpha\end{bmatrix}$$

Simplificando,

$$f(x)-k$$
$$=(x-\alpha)\left[\begin{array}{c} x^{n-1}+(\alpha+a_1)x^{n-2}+(\alpha^2+a_1\alpha+a_2)x^{n-3}+(\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3)x^{n-4}+\cdots \\ \cdots+(\alpha^{n-2}+a_1\alpha^{n-3}+a_2\alpha^{n-4}+\cdots+a_{n-2})x+ \\ -(n-1)\alpha^{n-1}-(n-2)a_1\alpha^{n-2}-(n-3)a_2\alpha^{n-3}-\cdots-2a_{n-1}\alpha^2-a_{n-2}\alpha \end{array}\right] \quad (2')$$

Deberá observarse que en (2´) aparecen $(n-1)$ términos de α^{n-1}, el cual deberá ser repartido $(n-1)$ veces, también aparecen $(n-2)$ términos de α^{n-2}, el cual deberá ser repartido $(n-2)$ veces, y así sucesivamente, hasta llegar a un solo término de α. Se hace todo esto con el fin de que vayan apareciendo expresiones de la forma $x^k-\alpha^k$. Resumiendo lo anterior, la expresión (2´) toma la forma:

$$f(x)-k=(x-\alpha)\left[\begin{array}{l} (x^{n-1}-\alpha^{n-1})+(x^{n-2}-\alpha^{n-2})(\alpha+a_1)+(x^{n-3}-\alpha^{n-3})(\alpha^2+a_1\alpha+a_2)+ \\ \quad (x^{n-4}-\alpha^{n-4})(\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3)+ \\ \quad\quad (x^{n-5}-\alpha^{n-5})(\alpha^4+a_1\alpha^3+a_2\alpha^2+a_3\alpha+a_4)+\cdots \\ \quad\quad\quad \vdots \\ \quad \cdots+(x^2-\alpha^2)(\alpha^{n-3}+a_1\alpha^{n-4}+a_2\alpha^{n-5}+\cdots+a_{n-4}\alpha+a_{n-3})+ \\ \quad\quad\quad (x-\alpha)(\alpha^{n-2}+a_1\alpha^{n-3}+a_2\alpha^{n-4}+\cdots+a_{n-3}\alpha+a_{n-2}) \end{array}\right] \quad (3')$$

Donde finalmente, se tiene que (3´) se puede escribir en la forma:

$$f(x)-k=(x-\alpha)^2P_{n-2}(x)$$

donde

$$\begin{aligned} P_{n-2}(x)=\; & x^{n-2}+(2\alpha+a_1)x^{n-3}+(3\alpha^2+2a_1\alpha+a_2)x^{n-4}+(4\alpha^3+3a_1\alpha^2+2a_2\alpha+a_3)x^{n-5} \\ & +(5\alpha^4+4a_1\alpha^3+3a_2\alpha^2+2a_3\alpha+a_4)x^{n-6}+\cdots \\ & +((n-2)\alpha^{n-3}+(n-3)a_1\alpha^{n-4}+(n-4)a_2\alpha^{n-5}+\cdots+3a_{n-5}\alpha^2+2a_{n-4}\alpha+a_{n-3})x \\ & +(n-1)\alpha^{n-2}+(n-2)a_1\alpha^{n-3}+(n-3)a_2\alpha^{n-4}+\cdots+3a_{n-4}\alpha^2+2a_{n-3}\alpha+a_{n-2}. \end{aligned} \quad (4')$$

Deberá notarse que precisamente, $P_{n-2}(\alpha)=\dfrac{1}{2}f''(\alpha)\neq 0.$

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 61-80
ISSN 1815-0640

Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos: un análisis ontosemiótico

María Laura Distéfano, María Andrea Aznar, Marcel David Pochulu

Resumen

Esta investigación tuvo por objetivo realizar un análisis de las dificultades y errores que se generan cuando los alumnos usan las representaciones aritmético-algebraica y geométrica-vectorial de los números complejos. Como marco teórico y metodológico se ha utilizado el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Se trabajó con las producciones escritas de 135 estudiantes de Álgebra, de una carrera de Ingeniería, quienes mostraron mayores dificultades cuando debieron hacer uso de una representación geométrica-vectorial.

Abstract

This research was aimed to analyse of the difficulties and errors that occur when students use arithmetical-algebraic and geometric-vectorial representations of complex numbers. As theoretical and methodological framework has been used the Mathematical Cognition Onto-semiotic Approach. It was worked on the written productions of 135 students of Algebra, of an engineering career, who showed more difficulties when they had to use a geometric-vectorial representation.

Resumo

Esta pesquisa teve como objetivo a realização duma análises das dificuldades e erros que se geram quando os alunos usam as representações aritmética- algébrica e geométrica-vetorial dos números complexos. Como marco teórico-metodológico tem sido usado o Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução matemática. Trabalhou-se com as produções escritas de 135 estudantes de Álgebra, numa carreira de Engenharia, que mostrou que tiveram mais dificuldades quando deveram fazer uso duma representação geométrica vetorial.

1. Introducción

Las dificultades que se generan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los números complejos han sido abordadas por diversos autores, desde diferentes marcos teóricos. Así, por ejemplo, Pardo y Gómez (2007) llevan a cabo un trabajo de investigación sobre esta temática, enmarcado en el enfoque denominado Modelos Teóricos Locales de Filloy, concluyendo que la enseñanza y aprendizaje de los números complejos no está teniendo en cuenta las dificultades e inconsistencias que han estado presentes a lo largo de la historia y que los estudiantes reproducen, en algunos casos, agravadas.

Posicionándose en un enfoque socioepistemológico de la Matemática, Martínez Sierra y Antonio (2009) indagan sobre las alternativas factibles para la construcción escolar del significado de los números complejos, considerando la hipótesis de que este significado puede ser construido a través del proceso de convención matemática bajo el cálculo de raíces de ecuaciones de la forma $x^n - 1 = 0$.

Por su parte, Bagni (2001) revisa la Historia de la Matemática y se propone examinar la efectividad de la introducción de los números imaginarios, en alumnos de preparatoria, mediante un ejemplo histórico. Concluye que la propuesta de presentarlos como un reclamo histórico puede resultar útil desde un punto de vista didáctico para estimular el interés y la motivación de los alumnos, pero no es siempre suficiente para garantizar el aprendizaje de los alumnos ni para que se acepten las cantidades imaginarias.

Considerando un enfoque cognitivista, y centrándose en las características de los procesos cognitivos asociados al uso de representaciones, planteado por la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval, el trabajo de Aznar, Distéfano, Prieto y Moler (2010) presenta un análisis sobre la conversión entre representaciones efectuadas de números complejos en los registros gráfico y algebraico, en estudiantes universitarios. Concluyen que es necesario abordar sistemáticamente esta tarea de conversión para favorecer la coordinación entre diferentes registros y la conceptualización del objeto matemático en estudio.

Es de destacar que mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas, de ahí su interés didáctico (Radford, 1998). Los obstáculos y conflictos que se generan a partir de su uso y cómo influyen en el aprendizaje constituyen un tema central de análisis que ha sido abordado por numerosos autores desde diversas teorías (Janvier, 1987; Kaput, 1991; Hitt, 2001, 2002; Duval, 2004; Radford, 1998; Font, Godino y D'Amore, 2007) y continúa siendo tema de marcado interés para su estudio, dada la complejidad de los fenómenos que involucran.

En el caso de los números complejos, las representaciones semióticas utilizadas pueden clasificarse en dos grupos: las aritmético-algebraicas y las geométricas. Entre las primeras se encuentran la forma de par ordenado, la forma binómica y la forma polar. Al segundo grupo pertenecen las representaciones puntual y vectorial. Ambos tipos de representaciones son necesarios en las aplicaciones que este campo numérico tiene en diversas áreas de la Física y la Ingeniería.

Dado que las representaciones condicionan las prácticas matemáticas que conforman el significado de los objetos involucrados, es fundamental que el alumno pueda interpretarlas y articularlas (Font, Godino y D'Amore, 2007), para una mejor comprensión del objeto matemático en cuestión. De ahí que el objetivo que se persigue, al enseñar números complejos, sea explorar los significados que los alumnos tienen construidos en relación al uso de sus representaciones.

En este trabajo se pretende realizar un análisis ontosemiótico de las dificultades y errores que se generan cuando los alumnos usan distintas representaciones de los números complejos, en un curso de Álgebra de nivel universitario. Como marco teórico y metodológico de la Didáctica de la Matemática se ha considerado el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) desarrollado por Godino y colaboradores. La elección de este enfoque se fundamenta en el hecho que el EOS considera el punto de vista de la dialéctica que se establece entre lo institucional y lo personal, analizando la distancia entre los *significados declarados* por los alumnos y los *significados pretendidos* por el profesor, en relación a las representaciones semióticas empleadas, lo cual podría ayudar a interpretar y comprender, desde otra perspectiva, lo que acontece en una clase de Matemática.

A su vez, las herramientas del EOS permiten estudiar, de manera conjunta, el pensamiento matemático, los ostensivos[1] que lo materializan, y las situaciones y factores que condicionan su desarrollo, permitiendo hacer una valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción.El interés de realizar un análisis de errores en el aprendizaje ha sido señalado por diversos autores, quienes piensan que son una parte inseparable de este proceso (Radatz, 1980; Borassi, 1987; Rico, 1995; Pochulu, 2004). A su vez, el interés radica en la posibilidad de caracterizar las regularidades con que se presentan los errores y de construir modelos explicativos, pues es una estrategia valiosa para clarificar dificultades en el aprendizaje matemático y permitiría plantear propuestas superadoras.

2. Marco teórico

El EOS considera a la Matemática en su triple aspecto: como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. En este marco teórico de la Didáctica de la Matemática, una *práctica matemática* se define como cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos (Godino, Batanero y Font, 2009).

A partir de este concepto surge la noción de *significado*, definido como *"el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas"* (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.7). Para el EOS, la cuestión del significado de los objetos matemáticos es de índole ontológica y epistemológica, puesto que se centra tanto en la naturaleza como en el origen de los mismos (Godino, Batanero y Font, 2009). En los casos en que el significado se atribuye a un individuo, se considera un *significado personal*, mientras que, si el significado es compartido por un grupo de individuos en el seno de una institución, se lo considera un *significado institucional*.

En este contexto, el aprendizaje supone la apropiación de los significados institucionales por parte del estudiante, mediante su participación en las comunidades de prácticas (Godino *et al*, 2007; Godino, Batanero y Font, 2009). Puesto que no siempre existirá concordancia entre los significados otorgados por los distintos actores que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, se generan diferencias que dan lugar a lo que bajo este enfoque se denomina *conflicto semiótico*. Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones).

Debido al rol preponderante que juegan los objetos, el EOS considera que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Así, la tipología de objetos primarios, u objetos de primer orden, según Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), está constituida por:

- *Situaciones-problemas:* aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios.

[1] Se entiende por *ostensivos* aquellos objetos que se pueden mostrar a otro directamente.

- *Elementos lingüísticos:* términos, expresiones, notaciones, gráficos, en diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)
- *Conceptos- definiciones:* introducidos mediante definiciones o descripciones (recta, punto, número, media, función)
- *Proposiciones:* enunciados sobre conceptos.
- *Procedimientos:* algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- *Argumentos:* enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos (deductivos o de otro tipo).

Las seis entidades primarias postuladas no son objetos aislados sino que se vinculan entre sí: las situaciones-problemas son el origen y motivación de la actividad, el lenguaje actúa como soporte para representar a las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción, los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que, conjuntamente con las definiciones, resuelven las situaciones-problemas. Estas relaciones entre los objetos primarios determinan las *configuraciones* (figura 1), definidas por Godino, Batanero y Font (2009) como *"las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos"* (p. 8). En los casos en que estas redes se refieren a acciones representativas de la institución y acordes a ella, se denominan *configuraciones epistémicas*. Paralelamente, las *configuraciones cognitivas*, son aquellas que describen los sistemas de práctica personales (Godino, Batanero y Font, 2009). Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones (epistémicas y cognitivas) se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, institucional y personal (Godino y Batanero, 1994).

Figura 1. Componentes de una configuración epistémica/cognitiva

Font, Godino y D'Amore (2007) consideran que todas las representaciones ostensivas tienen, por una parte, un valor representacional y, por otra parte, un valor instrumental, donde:

> El aspecto representacional nos lleva a entender la representación de una manera elemental 'algo' por 'algo'. En cambio, el valor instrumental nos lleva a entender la representación de una manera sistémica, como el 'iceberg' de un sistema complejo de prácticas que dicha representación posibilita (p. 13).

De esta manera, este enfoque subraya el rol que tienen las representaciones en las prácticas matemáticas y en la comprensión de un objeto. Esta comprensión, por parte del estudiante, se manifiesta en su competencia en el sistema de prácticas asociadas al mismo y cada subconjunto de ellas está condicionado por el par objeto/representación.

Todos los elementos que conforman las configuraciones pueden ejercer el rol de expresión o contenido de funciones semióticas. De este modo, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada tienen en cuenta la naturaleza relacional de la matemática y amplían el significado de representación.

Plantear el aprendizaje en términos de significados, otorga una relevancia central al proceso mediante el cual un sujeto crea un significado vinculando una expresión con un contenido a través de una *función semiótica*. Esta función es establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia.

De esta manera, la función semiótica destaca el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática y sirve para explicar algunas dificultades y errores de los alumnos, dado que los conflictos que causan equivocaciones en los alumnos no resultan de su falta de conocimientos, sino que son producto de no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica (Godino, Batanero y Font, 2009).

Más específicamente, la Teoría de las Funciones Semióticas que plantea el EOS establece que el significado de un objeto matemático lo constituye el par *configuración epistémica / prácticas que posibilita*, siendo la definición del concepto matemático sólo uno de los componentes de la configuración epistémica.

Este posicionamiento del EOS no invalida que un concepto tenga otra definición equivalente, el cual se puede incorporar a otro par *configuración epistémica/prácticas que posibilita* distinto del considerado inicialmente. En consecuencia, cada par constituye diferentes sentidos del concepto, mientras que el significado será el conjunto de todos los pares *configuración epistémica/prácticas que posibilita* que se obtienen.

Godino (2003) considera que los objetos iniciales y finales de una función semiótica podrían estar constituidos por uno o varios elementos primarios de un objeto (los que a su vez constituyen una configuración epistémica), dando lugar diferentes tipos funciones semióticas. Si consideramos el objeto final de una función semiótica, tendremos:

Tabla 1. Tipos de funciones semióticas

Tipo de función semiótica	Contenido
Lingüística	Término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico
Situacional	Situación-problema
Conceptual	Concepto, definición
Proposicional	Propiedad o atributo del objeto
Actuativa	Acción u operación, algoritmo o procedimiento
Argumentativa	Argumentación

3. Metodología

Se llevó a cabo una investigación de naturaleza exploratoria, en el sentido que pretendió recoger y analizar información que pudiera servir para orientar futuras investigaciones, y al mismo tiempo descriptiva, puesto que generó la construcción de categorías a partir de las producciones escritas de los alumnos de la asignatura Álgebra, de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.

Los datos se extrajeron a partir de las actividades escritas realizadas por 135 alumnos en dos ejercicios referidos al tema números complejos. Estos ejercicios pertenecían al primer examen parcial que se propuso desde la asignatura Álgebra, con la intención de evaluar los aprendizajes logrados por los estudiantes sobre la temática.. Uno de los ejercicios estaba ligado a la representación aritmético-algebraica (de aquí en más se lo llamará Ejercicio 1) y el otro a la geométrica-vectorial (de aquí en más se lo llamará Ejercicio 2).

En una primera fase del estudio se realizó una configuración epistémica de cada ejercicio, donde se pone de manifiesto el modo en que se articulan los objetos primarios involucrados en la actividad matemática que se propuso (situación problema, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje). Esta configuración epistémica constituye la solución experta de cada ejercicio, donde aparece su vinculación con las representaciones y significados asignados.

En una segunda fase, y usando el mismo criterio, se realizaron las configuraciones cognitivas, utilizando como base, la configuración epistémica, en tanto permitió elaborar un protocolo en el que se registraron los elementos más representativos consignados por los estudiantes en la resolución de la actividad. Esta configuración cognitiva permite apreciar el modo en que cada alumno articuló los seis objetos primarios que estaban presentes en la actividad, su vinculación con las representaciones y significados, los errores cometidos y los significados asignados.

En una tercera fase, se confrontaron las configuraciones cognitivas con la configuración epistémica, consignando en cada caso, si el uso de las representaciones aritmético-algebraica y geométrica-vectorial fue efectuado en forma correcta, parcialmente correcta o incorrecta. A su vez, esta comparación permitió determinar las dificultades que presentan los alumnos y la comprensión alcanzada en torno a los objetos matemáticos involucrados en las actividades.

4. Actividades propuestas y configuraciones epistémicas

En la siguiente sección se muestran los enunciados de los ejercicios, sus configuraciones epistémicas y las principales funciones semióticas involucradas. En el primer ejercicio propuesto se expone una proposición cuyos elementos están representados en lenguaje aritmético-algebraico. Su valor de verdad debe ser determinado por los alumnos a partir de la obtención de la parte imaginaria de la potencia de un número complejo expresado en forma binómica. Su configuración epistémica es la siguiente:

Tabla 2. Configuración epistémica del Ejercicio 1

Objetos primarios	Especificaciones
Situaciones-problema	Enunciado del problema: *Determinar si es verdadera o falsa la siguiente expresión: Si* $z=2-2\sqrt{3}i$ *i entonces* $\operatorname{Im}(z^{21})=1$
Lenguaje	- Simbólico: z, Im(z) - Lógico: si ... entonces ... - Aritmético: $2-2\sqrt{3}i$
Conceptos (definiciones)	- Forma binómica, forma polar y parte imaginaria de un número complejo. - Para $z=a+bi$ z ó z = (a,b): * Definición de módulo de un número complejo $\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$ * Definición de argumento de un números complejo no nulo: como una de las soluciones φ del sistema $\begin{cases}\operatorname{Cos}(\varphi)=\dfrac{a}{\lvert z\rvert}\\ \operatorname{Sen}(\varphi)=\dfrac{b}{\lvert z\rvert}\end{cases}$ - Una proposición de la forma *p entonces q* es falsa cuando siendo o suponiendo al antecedente *p* verdadero, resulta o se demuestra que *q* es falso.
Propiedades	- $\arg(z)=Arg(z)+2k\pi,\ k\in Z$ - De Moivre: Si $z=\lvert z\rvert\cdot(\cos(\varphi)+i\cdot sen(\varphi))$ entonces $z^n=\lvert z\rvert^n\cdot(\cos(n\cdot\varphi)+i\cdot sen(n\cdot\varphi))$ - Igualdad de complejos en forma polar (módulos iguales, argumentos congruentes) - Si $z=a+bi$ entonces $a=\lvert z\rvert\cdot\cos(\varphi)$ y $b=\lvert z\rvert\cdot sen(\varphi)$.
Procedimientos	- Cálculo del módulo de z, usando $\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}=4$ - Cálculo del argumento de z resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases}\operatorname{Cos}(\varphi)=\dfrac{2}{4}\\ \operatorname{Sen}(\varphi)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{4}\end{cases}$ - Selección, del conjunto de infinitas soluciones, del argumento φ que cumple que $0\le\varphi\le 2\pi$. - Obtención en forma polar de la potencia: $z^{21}=4^{21}\underline{\lvert 21.\tfrac{5}{3}\pi}=4^{21}\underline{\lvert \pi}$ - Obtención de la forma binómica de la potencia o, al menos, de su parte imaginaria $b=\lvert z\rvert\cdot sen(\varphi)\Rightarrow b=4^{21}\cdot sen(\pi)\Rightarrow b=4^{21}\cdot 0\Rightarrow b=0$
Argumentos	Como el antecedente se supone verdadero (ya que se trabaja con $z=2-2\sqrt{3}i$) y se llega que el valor de verdad del consecuente es falso (porque $\operatorname{Im}(z^{21})=0$) el valor de verdad de la implicación es falso.

En la configuración epistémica anterior pueden observarse múltiples expresiones a las que es necesario dotar de significado. Para ello, estableceremos una función semiótica que tendrá por antecedente a un objeto matemático (o la expresión que puede designarlo), y como consecuente al sistema de prácticas matemáticas realizadas por una persona (o compartida en el seno de una institución) ante una cierta clase de situaciones–problemas. No obstante, para simplificar la notación y el análisis, se hará corresponder el antecedente al objeto primario más relevante del conjunto de prácticas (operativas y discursivas) asociado. En ambos, la correspondencia se realizó a un procedimiento que resulta imprescindible conocer, por parte de los estudiantes, para resolver exitosamente el ejercicio propuesto en la evaluación:

Antecedente		**Consecuente**
Módulo de z	$\xrightarrow{F_1}$	Valor numérico resultante del cálculo $\sqrt{a^2+b^2}$
Argumento de z	$\xrightarrow{F_2}$	Una de las soluciones φ del sistema $\begin{cases} \text{Cos}(\varphi) = \dfrac{a}{\lvert z \rvert} \\ \text{Sen}(\varphi) = \dfrac{b}{\lvert z \rvert} \end{cases}$

Figura 2. Algunas funciones semióticas del Ejercicio 1.

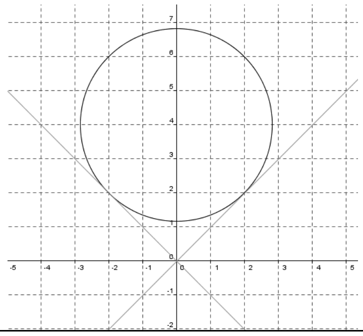
Las funciones F_1 y F_2 aluden, respectivamente, a significados actuativos (en el sentido que su contenido es una acción u operación, y en este caso, corresponde a un algoritmo o procedimiento) del módulo y del argumento de un número complejo, de la forma: $z = a + bi$, asociados a la representación aritmético-algebraica del mismo.

Por consiguiente, puede considerarse que, para la correcta resolución de este ejercicio, se requiere haber construido un significado actuativo aritmético-algebraico ligado a esta forma de representación de los números complejos.

En el Ejercicio 2 de la evaluación que se les administró a los alumnos, se muestran las representaciones gráficas de una circunferencia y de dos rectas tangentes a la misma que pasan por el origen de coordenadas. La circunferencia corresponde a un conjunto B de números complejos expresado por comprensión mediante una condición planteada como ecuación. Se les pregunta a los alumnos acerca de los valores del módulo y del argumento de los elementos del conjunto B.

En la Tabla 3 se distinguen los objetos primarios que conforman la configuración epistémica de este ejercicio.

Tabla 3. Configuración epistémica del Ejercicio 2.

Objetos primarios	Especificaciones
Situaciones-problema	Enunciado del problema: *A la derecha figura la representación de los números complejos del conjunto* $B=\{z\in C, \lvert z-4i\rvert=\sqrt{8}\}$. *a) Todos los números complejos del conjunto B ¿tienen el mismo módulo? ¿Por qué?* *b) ¿Entre qué valores varían los argumentos de los números complejos del conjunto B?* 
Lenguaje	- Coloquial :figura, complejos, conjunto, módulo, valores, argumentos - Simbólico: $B=\{z\in C, \lvert z-4i\rvert=\sqrt{8}\}$ - Gráfico: la representación, en el sistema cartesiano de una circunferencia que no está centrada en el origen y dos rectas tangentes a ella que pasan por el origen.
Conceptos (definiciones)	- Conjunto, pertenencia, módulo, argumento. - En un contexto aritmético-algebraico, para $z=a+bi$: * Definición de módulo de un número complejo: $\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$ * Definición de argumento de un número complejo no nulo: como una de las soluciones φ del sistema $\begin{cases}\text{Cos}(\varphi)=\dfrac{a}{\lvert z\rvert}\\ \text{Sen}(\varphi)=\dfrac{b}{\lvert z\rvert}\end{cases}$ - En un contexto geométrico: * Definición de módulo del número complejo: distancia del afijo de z al origen de coordenadas; longitud del vector z. * Definición de argumento de un número complejo no nulo: ángulo con lado inicial en el semieje positivo de las abscisas y lado final en la semirrecta que contiene al vector asociado al número complejo.
Propiedades	- Dado un conjunto definido por comprensión a través de una condición, cualquier elemento que pertenezca al conjunto debe satisfacer dicha condición. - Un número complejo pertenece a una circunferencia si su afijo pertenece a la misma.
Procedimientos	- Identificar, gráfica o analíticamente, varios números complejos pertenecientes al conjunto dado. - Identificar los módulos de los números complejos pertenecientes al conjunto B, ya sea con herramientas del contexto aritmético-algebraico o del contexto geométrico, y comparar sus medidas observando su diferencia. - Identificar los argumentos de los números complejos pertenecientes al conjunto B. - Determinar valores extremos del argumento de los números complejos que pertenecen a la gráfica, ya sea con herramientas del contexto aritmético-algebraico o del contexto geométrico.
Argumentos	- Fundamentar la respuesta negativa mostrando casos particulares de elementos de B que tienen distinto módulo. - Fundamentar, con afirmaciones generales que aluden a que todos los afijos de los números complejos que pertenecen al conjunto B, están a la misma distancia del centro de la circunferencia, pero no del origen de coordenadas. - Todos los números complejos del conjunto B se encuentran en el sector del plano limitado por las dos semirrectas incluidas en las rectas graficadas.

La resolución del inciso a) de este ejercicio puede hacerse utilizando únicamente herramientas del significado aritmético-algebraico, obteniendo elementos particulares del conjunto B y comparando sus módulos. Sin embargo, las mismas resultan insuficientes para la resolución del segundo inciso, que requiere la determinación de elementos de valores extremos de argumento del conjunto B y esto sólo puede realizarse a partir de la interpretación gráfica y geométrico-vectorial del mismo.

Considerando que las herramientas del significado geométrico son las más viables para que los alumnos resuelvan ambos incisos, fueron seleccionadas, algunas funciones semióticas que se presentan a continuación (figura 3) donde se rescata, del conjunto de prácticas matemáticas que posibilita el objeto en cuestión, sólo un elemento primario: concepto.

Antecedente		**Consecuente**
Número complejo z	$\xrightarrow{F_3}$	Vector con origen en (0,0) y extremo en su afijo (a,b)
Módulo de z	$\xrightarrow{F_4}$	Distancia del afijo al origen o longitud del vector
Argumento de z	$\xrightarrow{F_5}$	Ángulo con lado inicial en el semieje positivo de las abscisas y lado final en la semirrecta que contiene al vector asociado al número complejo.

Figura 3. Algunas funciones semióticas del Ejercicio 2.

Las funciones F_3, F_4 y F_5 hacen referencia al significado conceptual (en el sentido que se ha tenido en cuenta sólo un objeto primario del conjunto de prácticas: concepto, estableciéndose una correspondencia semiótica de tipo conceptual) asociado a la representación geométrica-vectorial de un número complejo $z = a + bi$, donde los significados de módulo y argumento se derivan del significado de vector.

Esto condiciona que la función semiótica F_3 pueda establecerse sí y solamente si las funciones F_4 y F_5 son construidas. Puede considerarse que, para la correcta resolución de este ejercicio, es necesario haber construido un significado conceptual geométrico de los números complejos asociado a esta forma de representación, lo cual implica haber establecido estas tres funciones semióticas.

5. Resultados y análisis

A partir de las configuraciones epistémicas y funciones semióticas detalladas para ambos ejercicios, puede inferirse que:

(a) La resolución del Ejercicio 1 requiere usar significados asociados a la representación aritmético-algebraica de los números complejos.

(b) La resolución del Ejercicio 2, presenta como necesario para su resolución, el uso del significado asociado a la representación geométrica-vectorial.

Los resultados observados en las producciones escritas de los alumnos, y de las configuraciones cognitivas construidas en torno al objeto matemático en cuestión, muestran una gran disparidad en el uso de ambas representaciones (aritmético-algebraica y geométrica-vectorial).

Dicha disparidad se manifestó en el hecho de que una gran proporción de estudiantes que habían resuelto correctamente el ejercicio vinculado a la representación aritmético-algebraica, no lograron hacerlo con el ligado a la representación geométrica-vectorial.

De los 135 alumnos que se presentaron al parcial sólo 49 resolvieron correctamente el Ejercicio 1. De estos 49 estudiantes, únicamente 11 resolvieron correctamente el Ejercicio 2 y los 38 restantes lo resolvieron mal, o directamente no pudieron hacerlo. Sólo en 4 casos se presentó la situación inversa; esto es, que resolvieron correctamente el Ejercicio 2 e incorrectamente el Ejercicio 1. Esta última situación no fue abordada en este trabajo por no considerarla significativa, ya que representa apenas el 3% del total de exámenes.

Para poder describir en profundidad las dificultades de los estudiantes en la resolución del Ejercicio 2, se elaboraron las configuraciones cognitivas (fase 2 del estudio) y se compararon con la configuración epistémica (fase 3 del estudio).

A partir de la configuración cognitiva de la resolución de cada alumno, se registró en un protocolo la manifestación del uso de las propiedades, procedimientos y argumentos con el siguiente criterio: 1 (correcto), 0.5 (parcialmente correcto), -1 (incorrecto) y 0 (no manifestado), tal como se describe en la tabla 4. A su vez, analizando la distribución de los valores de los códigos empleados, y el modo en que se articularon los objetos primarios en las configuraciones cognitivas de los alumnos y las funciones semióticas involucradas, surgieron categorías de resolución de los ejercicios cuyas tipologías se distinguen en numeración romana, se detallan en la figura 4, y se describen seguidamente.

Tabla 4. Protocolo de registro de propiedades, procedimientos y argumentos de las configuraciones cognitivas.

ELEMEN-TOS	ESPECIFICACIONES	CATEGORÍAS						
		I	II	III	IV	V	VI	VII
PROPIEDADES	Dado un conjunto definido por comprensión a través de una condición, cualquier elemento que pertenezca al conjunto debe satisfacer dicha condición.	1	1	1	1	1	1	0
	Un número complejo pertenece a una circunferencia si su afijo pertenece a la misma.	1	1	1	1	1	0	0
PROCEDIMIENTOS	Identificar, gráfica o analíticamente, varios números complejos pertenecientes al conjunto dado.	1	1	1	0.5	1	-1	0
	Identificar los módulos de los números complejos pertenecientes al conjunto B, ya sea con herramientas del contexto aritmético-algebraico o del contexto geométrico.	1	-1	-1	-1	-1	0	0
	Identificar los argumentos de los números complejos pertenecientes al conjunto B.	1	1	-1	-1	0	0	0
	Determinar los valores extremos del argumento de los números complejos que pertenecen a la gráfica, ya sea con herramientas del contexto aritmético-algebraico o del contexto geométrico-vectorial.	1	1	0	0	0	0	0
ARGUMENTOS	Fundamentar la respuesta negativa mostrando casos particulares de elementos de B que tienen el distinto módulo.	0	0	0	0	0	0	0
	Fundamentar con afirmaciones generales que aluden a que todos los afijos de los números complejos que pertenecen al conjunto B están a la misma distancia del afijo del centro de la circunferencia pero no del origen de coordenadas.	1	-1	-1	-1	0	0	0

Si se considera el uso que han hecho los alumnos de las representaciones vectoriales, estas categorías pueden organizarse en un sistema jerárquico. En la figura 4 se exhibe dicho sistema junto con las frecuencias relativas de cada categoría.

Ejercicio 2

- Resuelven correctamente 11/49
  - **I-** Evidencian uso de representación vectorial 11/49
- Resuelven incorrectamente 33/49
  - Evidencian uso de representación vectorial 26/49
    - **II-** Conviven dos representaciones vectoriales 7/49
    - Una representación vectorial con origen en el centro de la circunferencia 19/49
      - **III-** Módulo igual al radio y argumento entre 0 y 2π 11/49
      - **IV-** Módulo igual al radio y argumento asociado a raíces enésimas 5/49
      - **V-** Módulo igual al radio y no analizan argumento 3/49
  - **VI-** No evidencian uso de representación vectorial 7/49
- **VII-** No resuelven 5/49

Figura 4. Categorías de las resoluciones del ejercicio 2.

A continuación se describen las características de las categorías determinadas, exponiendo en los casos que corresponde los errores que las distinguen. Asimismo se detallan las funciones semióticas incorrectas detectadas, para las cuales se usará la notación $\overline{f_i}$, en tanto que la notación F_i se reserva para el caso de funciones semióticas correctamente establecidas.

Categoría I:

Corresponde a las resoluciones correctas de ambos incisos del ejercicio. Si bien utilizaron la definición aritmético-algebraica, lo hicieron para arribar a la ecuación de la circunferencia graficada, a partir de la cual emplearon definiciones y procedimientos derivados de definiciones geométricas. Los argumentos de los alumnos, expresados en frases como: *"Los vectores parten desde el origen y caen en la circunferencia"*, *"Salen del origen y no del centro de la circunferencia"* o *"La longitud del vector variará"*, reflejan el uso de una correcta representación geométrica de los números complejos como vectores.

Categoría II:
Corresponde a las resoluciones en las que el inciso "a" (*Todos los números complejos del conjunto B ¿tienen el mismo módulo? ¿Por qué?)* fue respondido incorrectamente, mientras que el inciso "b" (*¿Entre qué valores varían los argumentos de los números complejos del conjunto B?)* fue respondido correctamente. En el procedimiento de identificación de los elementos del conjunto B, puede observarse el uso de las representaciones aritmético-algebraica y geométrica-vectorial de manera similar a la detallada en la Categoría I. El procedimiento de identificación de los valores del módulo es realizado de manera errónea, pues los alumnos utilizaron una representación geométrica-vectorial no adecuada de los números complejos, en la que el origen del vector se encuentra en el centro de la circunferencia dada. Esto condujo a que interpretaran que todos los números complejos del conjunto tienen el mismo módulo, coincidente con el radio de la circunferencia. Aquí pareciera que, partiendo de la proposición "Todos los números complejos que tienen el mismo módulo conforman una circunferencia", realizaran una abducción interpretando que, si forman parte de una circunferencia, todos poseen idéntico módulo. Esto podría sugerir que, en lugar de establecerse la función semiótica conceptual F_4, estos alumnos establecen una función semiótica conceptual errónea $\overline{f}_4$ (Figura 5), donde se asocia a un objeto (Módulo de z) un concepto equivocado:

Antecedente		Consecuente
Módulo de z	$\xrightarrow{\overline{f}_4}$	Distancia del afijo al centro de la circunferencia a la cual pertenece

Figura 5. Función semiótica conceptual errónea asociada al módulo

Sin embargo, la identificación del argumento y sus valores extremos fue efectuada satisfactoriamente, vinculada a la función semiótica conceptual F_5. Esto es acorde con el uso de una representación vectorial en la que el origen de los vectores es el (0,0).

Esto pone de manifiesto que conviven dos representaciones vectoriales distintas, y marca la existencia de un *conflicto semiótico,* de tipo *cognitivo*[2] ya que los estudiantes hacen uso de dos funciones semióticas contradictorias: por un lado, aplican la función semiótica conceptual F_3 para establecer el argumento pero, para responder el ítem asociado al módulo, en lugar de F_3 estarían estableciendo la

[2] Para el EOS, un conflicto semiótico se denomina *cognitivo* cuando las diferencias de asignaciones de significado se producen entre prácticas que forman parte del significado personal de un mismo sujeto.

siguiente función semiótica conceptual errónea $\overline{f}_3$ (Figura 6), donde al objeto (número complejo z) se lo relaciona con un concepto equivocado:

Antecedente		Consecuente
Número complejo z	$\xrightarrow{\overline{f}_3}$	Vector con origen en el centro de la circunferencia a la que el afijo pertenece y extremo en su afijo (a,b)

Figura 6. Función semiótica conceptual errónea asociada al objeto número complejo

Categoría III:
Corresponde a resoluciones en las que ambos incisos fueron respondidos de manera inadecuada. En las mismas se manifiesta el uso de las representaciones aritmético-algebraica y geométrica de pertenencia al conjunto B, como en las categorías anteriores, y se evidencia que identifican correctamente los elementos del conjunto. Se detecta el empleo de una única representación vectorial errónea, donde el origen está situado en el centro de la circunferencia dada, por lo que también estos alumnos consideraron que el valor del módulo es constante y coincide con el radio de la misma. En cuanto a los valores del argumento del número complejo z, señalaron que toma infinitos valores, los que varían entre 0 y 2π. En este caso los significados "conceptuales" atribuidos al módulo y al argumento, si bien son erróneos, guardan coherencia entre sí.

Este error manifiesta un *conflicto semiótico* pues el significado que se asigna a dichas definiciones no coincide con el otorgado por las funciones semióticas conceptuales F_4 y F_5, anteriormente definidas. Esto pareciera producirse como consecuencia de una diferente asignación de significado vectorial al número complejo z. En lugar de la función semiótica conceptual F_3 estarían estableciendo la función semiótica conceptual errónea $\overline{f}_3$ anteriormente descripta.

Categoría IV:
También en estas resoluciones se presentaron respuestas erróneas a ambos incisos y el uso de los dos tipos de representaciones. La representación vectorial utilizada es semejante a la descripta en la categoría III en el sentido de que el origen del vector es ubicado en el centro de la circunferencia pero, en este caso los alumnos no realizan satisfactoriamente el procedimiento de identificación de los *infinitos* elementos del conjunto dado debido a que los asocian a las raíces enésimas de algún número complejo.

Aparentemente existe un razonamiento abductivo asociado a la siguiente propiedad: Las raíces enésimas de un número complejo w pertenecen a una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\sqrt[n]{|w|}$ y sus argumentos son de la forma $\frac{\varphi + 2k\pi}{n}$. La abducción los conduce a concluir que todos los números complejos que están representados en una circunferencia corresponden al conjunto de raíces enésimas de un número dado. Pareciera que se establece la siguiente función semiótica conceptual errónea $\overline{f_6}$ (Figura 7), que relaciona un objeto matemático equivocadamente con un concepto:

Antecedente		Consecuente
Números complejos cuyos afijos pertenecen a una circunferencia	$\xrightarrow{\overline{f_6}}$	Raíces enésimas de algún número complejo w.

Figura 7. Función semiótica conceptual errónea asociada a los afijos pertenecientes a una circunferencia.

Categoría V:
Comprende las resoluciones en las que los elementos del conjunto B fueron identificados correctamente, en algunos casos utilizando propiedades aritmético-algebraicas y, en otros, propiedades geométricas. El inciso "a" (correspondiente al módulo de un número complejo) fue respondido inadecuadamente, tal como en las categorías III y IV, y el inciso "b" (referido al argumento de un número complejo) no fue resuelto, con lo cual fue considerado inexistente el procedimiento de identificación del mismo.

Categoría VI:
Estas resoluciones realizadas por los estudiantes se diferencian de las anteriores por el uso exclusivo de la representación aritmético-algebraica para determinar la pertenencia al conjunto B. Los alumnos sólo trabajaron con fórmulas o expresiones algebraicas con las que, el procedimiento de identificación de elementos del conjunto dado, fue realizado en forma errónea y esto les impidió desarrollar los procedimientos posteriores. En algunos casos el error fue causado por la incorrecta interpretación de la expresión simbólica $|z-4i|$ a la que atribuyen el significado de $|z|$. Como en la definición del conjunto B se expresa que $|z-4i|=\sqrt{8}$, interpretan que es z quien tiene un módulo constante. Se establece una función semiótica conceptual errónea $\overline{f_7}$ (Figura 8), al relacionar equivocadamente un objeto con un concepto:

Antecedente		Consecuente
$\lvert z-4i \rvert$	$\xrightarrow{\overline{f_7}}$	Módulo de z

Figura 8. Función semiótica conceptual errónea asociada a $|z-4i|$

Categoría VII:
Abarca los casos de no resolución del ejercicio. Fueron considerados inexistentes los usos de las distintas propiedades, procedimientos y argumentaciones detallados.

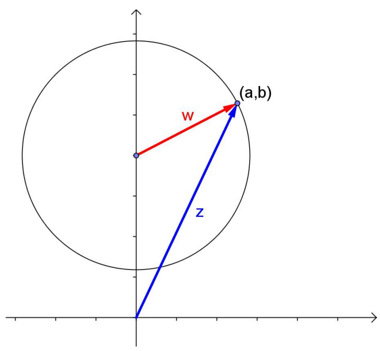
6. Conclusiones

En este trabajo se exploró el uso que realizan los alumnos de las representaciones aritmético-algebraica y geométrica-vectorial, cuando resuelven actividades donde están involucrados los números complejos, y los errores que pudieran estar desencadenando. A través del análisis de las configuraciones cognitivas de los dos ejercicios propuestos en la evaluación parcial, se comprobó que una gran proporción de alumnos sólo pudo hacer un uso correcto de la representación aritmético-algebraica, mientras que el uso de la representación geométrica-vectorial fue deficiente o nulo.

La categorización confeccionada sobre las producciones escritas del Ejercicio 2, con base en el registro de las configuraciones cognitivas, pone de manifiesto una fuerte relación entre el nivel de resolución y el uso de la representación vectorial. La presencia de conflictos semióticos no resueltos permitiría afirmar que, al momento de la evaluación, los alumnos no tenían construido un adecuado *significado geométrico* referido a los números complejos. Esto lleva a conjeturar que el sistema de prácticas desarrollado en las clases no contempló esta complejidad y posiblemente no se diseñaron suficientes actividades pertinentes al caso; lo cual plantea la necesidad de futuras indagaciones.

Asimismo, el trabajo pone en relieve algunos errores que cometen los alumnos cuando operan con números complejos, al instaurarse funciones semióticas donde se establece una dependencia representacional entre dos objetos: o bien uno de los objetos se pone en el lugar del otro, o un objeto es usado por el otro. En ese sentido, los errores más frecuentes que se encontraron son:

Tabla 5. Errores frecuentes al operar con números complejos

<table>
<tr><td colspan="2">a) Dado un conjunto de números complejos cuyo afijo se encuentra sobre una circunferencia, los alumnos interpretan que:</td></tr>
<tr><td>- El número complejo z es un vector (w) con origen en el centro de la circunferencia a la que el afijo pertenece y extremo en su afijo (a,b).</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>- Módulo de z es la distancia del afijo al centro de una circunferencia a la cual pertenece. Esto es: $|z| = |w|$</td></tr>
<tr><td>- Los números complejos cuyos afijos pertenecen a una circunferencia son las raíces de algún número complejo u.</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) Cualquier expresión con módulo, que contenga un número complejo, represente al módulo del mismo. Esto es: $|z - ai| = |z|$ con $a \in R$</td></tr>
</table>

Lo anteriormente expuesto confirma lo que expresan Font, Godino y D'Amore (2007) acerca del condicionamiento de los subsistemas de prácticas de la dupla objeto/representación y su complejidad ontosemiótica. Por otra parte, la dupla objeto/representación se constituye en una herramienta de evaluación de uno de los aspectos de la idoneidad cognitiva[3] de la trayectoria didáctica implementada: la distancia entre los significados pretendidos y los declarados. Esto promueve, como objetivo de futuras investigaciones, el análisis de las prácticas ligadas a la representación geométrica-vectorial de los números complejos.

Finalmente, con el trabajo se promueve un uso diferente de la evaluación, puesto que se la utiliza como instrumento para recolectar evidencias y valorar el aprendizaje, y no solamente para calificar a los estudiantes. La información recabada permitiría diseñar procesos de enseñanza que favorezcan la apropiación por parte de los alumnos de una pluralidad de representaciones, al mismo tiempo que ayuda a la comprensión de los conceptos involucrados.

Bibliografía

Aznar, M. A., Distéfano, M. L., Prieto, G., y Moler, E. (2010). Análisis de errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico. *Revista Premisa 12(47)*, 13-22.

Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 4(1)*, 45-62.

Borassi, R. (1987). Exploring Mathematics through the Analysis of Errors*. For the Learning of Mathematics* 7, 2-9.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). Enfoque Ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática. En M. J. Alderete y M. L. Porcar (Eds.), *Temas de Didáctica de las Matemáticas* (pp. 1-20). Mendoza: Universidad Nacional de Cuyo.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Universidad de Granada. Recuperado el 1 de octubre de 2011 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14(3)*, 325-355.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma XXVII (2)*, 221-252.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la

[3] La *idoneidad cognitiva* expresa el grado en que los significados institucionales pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados institucionales pretendidos/implementados (Godino, Batanero y Font, 2009).

Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en educación matemática. En P. Gómez y L. Rico. (Eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática*. (pp. 165–178). Universidad de Granada.

Hitt, F. (2002). *Representations and Mathematics visualization*. North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum A.P.Kaput, J. (1991). Notations and representations as Mediators of Constructive Processes. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 53-74). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Martínez Sierra, G. y Antonio, R. (2009). Una construcción del significado del número complejo. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias 4*(1), 1-10. Recuperado el 1 de agosto de 2011 de: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/Gustavo/2009_Martinez_%20Antonio.pdf.

Pardo, T. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. *PNA 2(1)*, 3-15. Recuperado el 30 de julio de 2011 de: http://www.pna.es/Numeros/pdf/Pardo2007La.pdf

Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación 35(4)*. Recuperado el 30 de agosto de 2011 de: www.campusoei.org/revista/deloslectores/849Pochulu.pdf.

Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematical Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics 1(1)*, 16-20.

Radford, L. (1998). On signs and representations. A cultural account. *Scientia Pedagogica Experimentalis 35*(1), 277-302. Recuperado el 1 de septiembre de 2011 de: http://healthservices.laurentian.ca/NR/rdonlyres/BD762C3F-3C8D-4D51-A91F-6648A04A626C/0/signs_and_rep.pdf

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. En J. Kilpatrick; P. Gómez y L. Rico Luis (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

María Laura Distéfano. Profesora en Matemática. Magister en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Docente e investigadora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. **mldistefano@fi.mdp.edu.ar**

María Andrea Aznar. Profesora en Matemática. Especialista en investigación educativa. Docente e investigadora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.

maznar@fi.mdp.edu.ar

Marcel David Pochulu. Profesor de Enseñanza Media de Matemática, Física y Cosmografía. Licenciado en Pedagogía Matemática. Magíster en Docencia Universitaria. Doctor en Didáctica de la Matemática por la UNED. Ha realizado estancias de investigación posdoctoral en la Universidad de Granada y Universidad de Barcelona. Docente e investigador de la Universidad Nacional de Villa María, Córdoba, Argentina. Coordinador del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Villa María. marcelpochulu@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 81-100
ISSN: 1815-0640

O ensino do conceito de número: uma leitura com base em Davydov

Josélia Euzebio da Rosa, Ademir Damazio

Resumo

O presente artigo analisa as proficuidades ao inserir as proposições de Davydov escola brasileira. Delimita-se ao ensino do conceito de número, com o envolvimento de quarenta e oito estudantes - entre cinco e sete anos - do primeiro e segundo ano do ensino fundamental. Foca-se o desenvolvimento, pelos alunos, de um sistema de tarefas, com base nos princípios davydovianos de que, desde a entrada da criança na escola, o ensino do número deve contemplar a idéia de medida, isto é, de número real, sem tricotomizar as significações aritméticas, geométricas e algébricas. Evidenciou-se que os estudantes desenvolvem raciocínios que expressam a inter-relação das três significações mencionadas, organizados num movimento que segue do geral ao particular, próprio do pensamento teórico numérico.

Abstract

The present article analyzes the usefulness of inserting propositions of Davydov, in a Brazilian school. The study is delimited by the teaching of number concepts for fifty students - between five and seven years old- from the first and second years of primary education. It was focused on the development of a task system by students based on Davydov's principles who claims that from the very early years of children in school, the teaching of number must include the idea of measurement of actual number, without using the trichotomy of arithmetic, geometric and algebraic and their meanings. It is highlighted that students develop reasoning that expresses the interrelation of the three meanings mentioned, and it is organized in a movement that runs from general to particular which is peculiar to theoretical thinking

Resumen

El presente artículo analiza las ventajas al incorporar las propuestas de Davydov en una escuela brasileña. Se delimita a la enseñanza del concepto de número, con la participación de cuarenta y ocho estudiantes - entre cinco y siete años - de primer y segundo año de enseñanza fundamental. Se enfatiza el desenvolvimiento, en los estudiantes, con base en los principios davydovianos de que, desde la entrada del niño en la escuela, la enseñanza del número debe contemplar la idea de medida - de número real - sin tricotomizar la áreas aritméticas, geométricas y algebraicas. Se evidenció que los estudiantes desenvuelven raciocinios que expresan la interrelación de las tres áreas mencionadas, organizadas en un movimiento que sigue de lo general a lo particular, propio del pensamiento teórico numérico.

1. A necessidade do estudo e sua base teórica

Um olhar para os documentos oficiais - por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) - sobre a organização do ensino da Matemática, em nosso país (Brasil), observamos que a sequência adotada distingue nitidamente os conceitos em: aritméticos, geométricos e algébricos. O foco maior para álgebra é dado, inicialmente, na 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental[1] e aprofunda-se na 7ª série/8º ano do Ensino Fundamental (Gil & Ruth, 2008). Desse modo, durante cinco anos, aos alunos é dada a oportunidade de desenvolver predominantemente o pensamento aritmético.

Também é visível que o primeiro contato com a Matemática no contexto escolar é com o conceito de número a partir da contagem de objetos discretos. Nesse sentido, vale citar estudos e proposições de ensino (kami, 1999; Fayol, 1996; Ceryno, 2001) que dão às crianças que iniciam na Matemática a noção numérica com enfoque na correspondência biunívoca.

Assim, a ideia corrente nessas literaturas é de que as significações algébricas e geométricas do referido conceito são adiadas para os anos escolares posteriores. Há, inclusive, uma desconexão como se fossem elementos de ciências distintas (khidir, 2006).

Tal tricotomia ainda se estabelece como algo natural e imutável na Educação Matemática brasileira. No entanto, entre outros pesquisadores, Damazio, juntamente com seus colaboradores, tem estudado as possibilidades de superação da referida tricotomia no processo de elaboração conceitual em situação escolar[2]. (Damazio, Colares e Pereira, 2005. e.g.)

O entendimento da referida separação, que ocorre nos sistemas de ensino escolares, remete-nos ao processo de evolução do próprio conhecimento científico matemático. Cita-se o conceito de número, objeto da presente investigação no âmbito do seu ensino que, com o tempo, adquiriu além da significação aritmética, a geométrica e a algébrica. Atualmente, é na inter-relação de tais acepções organizadas em um movimento conceitual e pedagógico orientado do geral para o particular, do abstrato para o concreto, que está a sua ideia central (Davydov, 1982).

Para Aleksandrov (1976), a aritmética e a geometria não só se aplicam uma à outra, como também, são fontes de métodos específicos, ideias e teorias gerais. Para medir o comprimento de um objeto adota-se certa unidade e se calcula quantas vezes é possível repetir a operação: o primeiro passo (aplicação) é de caráter geométrico, o segundo (cálculo) é de caráter aritmético.

Medir é o meio pelo qual duas entidades diferentes podem ser comparadas em termos numéricos. De acordo com Freudenthal (1975), na vida cotidiana, nenhum aspecto do número é tão importante quanto o de medida de grandezas. Para esse autor, no ensino, desde o início, pelo menos um modelo de grandeza deve ser considerado: o comprimento, “que é a mais matemática das grandezas e um dos conceitos fundamentais da geometria” (Freudenthal, 1975, p. 211). O comprimento é contextualizado, matematicamente, na reta numérica.

A tricotomia entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas, presente na organização atual do Ensino de Matemática, constitui em elemento motivador da pesquisa geradora do presente artigo, que procurou estudar o seguinte

[1] O Ensino Fundamental, tanto no Brasil quanto na Rússia é de nove anos. As crianças iniciam por volta de seis anos de idade e concluem por volta dos quinze anos.
[2] Tais estudos estão sendo realizadas no interior do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC) da Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC). Contato do grupo: gpemahc@unesc.net

problema: Quais as proficuidades de se considerar as proposições de Davydov para a introdução do ensino do conceito de número nos dois primeiros anos da educação escolar em um contexto brasileiro? Desse problema, desdobra-se outro questionamento: qual o movimento conceitual e pedagógico proposto por Davydov? E, por extensão, as seguintes perguntas de pesquisa: quais significações matemáticas são contempladas e como elas são inter-relacionadas? E, quais as possibilidades dessa proposta no processo de ensino e aprendizagem?

O respaldo teórico para a produção de possíveis respostas aos questionamentos anteriores ou levantamento de novas perguntas é buscado em Vasili Vasilievich Davydov[3]. O referido pesquisador e seus colaboradores, adeptos a teoria histórico-cultural, elaboraram e desenvolveram em sala de aula uma proposta de Ensino de Matemática que é recomendada, ainda hoje, pelo Ministério da Educação e Ciência da Federação Russa para o desenvolvimento em instituições de ensino daquele país (Editora Vita-Press, 2010). Além disso, é referência no cenário mundial, em países como Ucrânia, Cazaquistão, Noruega, França, Alemanha, Holanda, Canadá e Japão. É também investigado nos Estados Unidos, conforme Schmittau e Morris (2004) e Schmittau, (2005). Nesses locais, são produzidas pesquisas que também acenam para a potencialidade das contribuições do sistema em questão para o processo de ensino e aprendizagem.

No presente estudo, foram consideradas as obras de Davydov em espanhol, traduzidas diretamente do russo por Marta Shuare (Davídov, 1987; Davídov e Markova, 1987; Davidov, 1988; Davydov, 1982), em inglês (Davydov, 1988; Davydov, 1999), o livro didático para o primeiro ano do ensino fundamental, elaborado por Davidov, Gorbov, Mikulina e Savieliev (Давыдов et al, 1997) e as orientações metodológicas para o livro didático elaboradas pelo mesmo grupo de colaboradores e continuadores do sistema de Davydov, tais como Gorbov, Mikulina e Savieliev (ГОРБОВ et al, 2008). As obras em russo foram traduzidas para o português, por solicitação do GPEMAHC, por Elvira Kim[4]. O GPEMAHC, além de assumir a revisão e edição de imagens das traduções, também desenvolve pesquisa sobre o desenvolvimento da referida proposta de ensino em escolas da Rede Municipal de Educação de Criciúma, Estado de Santa Catarina, Brasil.

A Proposta de Ensino proposto por Davydov e seus colaboradores supera o divórcio existente entre a aritmética, a álgebra e a geometria no ensino da Matemática Escolar. Em concordância com Vigotski (2000), Davydov (1982) diz que o domínio da álgebra eleva ao nível superior o pensamento matemático, o que possibilita uma visão mais livre, mais abstrata e generalizada. A álgebra liberta o pensamento da criança da prisão das dependências numéricas concretas e o eleva a um nível mais generalizado.

Para Davydov (1982, p. 109), o ensino que segue o movimento da aritmética para a álgebra corresponde às "etapas fundamentais da história empírica" da Matemática. Ou seja: "no princípio os números eram o objeto fundamental (aritmética), depois as transformações idênticas e as equações (álgebra), mais tarde veio o cálculo diferencial e integral (análise Matemática), seguida das operações de conjuntos e as estruturas Matemáticas" (Davydov, 1982, p. 109-110).

[3] No decorrer do texto é adotada a grafia Davydov. Porém, nas citações e referências, adota-se a mesma escrita de autoria da obra.
[4] Professora de nacionalidade russa. Atualmente leciona a disciplina de Russo na Universidade Federal do Paraná, Brasil.

A história do desenvolvimento da ciência, diz Davydov, testemunha que, o aparecimento de algumas ideias não acontece como simples ampliação dos conhecimentos e maior precisão dos conceitos, mas a reestruturação de toda a ciência dada que se renova como sistema integral. Assim, a proposta é que “a estruturação das disciplinas devem considerar este momento transcendental do desenvolvimento das ciências, cujos fundamentos se estudam na escola” (Davydov, 1982, p. 107).

No entanto, Davydov (1988) chama a atenção que a apresentação da história de um conceito não é suficiente para que os estudantes atinjam o nível de pensamento teórico. Sua sugestão é que o professor, na elaboração do conjunto de tarefas a ser desenvolvida pelos alunos para a apropriação de um conceito matemático, coloque-os em atividade, considere a sua gênese, a origem, o que não significa reproduzir o processo empírico da história. Davydov (1982, 1988, 1998) é enfático ao se referir que o papel da educação escolar é tornar a criança contemporânea de sua época e a referência desse trabalho são os conceitos científicos.

Em seus trabalhos, Davydov procurou confirmar, experimentalmente, a tese de Vigotski que a educação das crianças determina o caráter de seu desenvolvimento psíquico (Davidov, 1988). Portanto, a peculiaridade inédita de sua proposta para a educação está no movimento oposto ao sugerido pelas atuais propostas de ensino. Ou seja, promover, desde o primeiro ano escolar, o desenvolvimento do pensamento teórico por meio da apropriação dos conceitos científicos. Isso implica em uma mudança transcendental do conteúdo e dos métodos de ensino. O foco é para o estágio mais desenvolvido da ciência.

No que diz respeito ao ensino da Matemática, Davydov (1982 e 1998) estabelece como uma das suas funções primordiais o desenvolvimento do pensamento teórico, de forma que ultrapasse os limites da aritmética para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Seu argumento é de que a aritmética tem fortes vínculos com o conhecimento empírico e, como tal, no processo ensino e aprendizagem, cria obstáculos para o desenvolvimento do pensamento teórico-matemático.

Desse modo, uma das singularidades da proposta de ensino de Davydov está no objetivo que estabelece para a educação escolar: desenvolver o pensamento teórico em detrimento do pensamento empírico. Este tem sua importância na vida cotidiana; porém, obstaculiza o caminho quando se pretende que o estudante compreenda os conceitos científicos e desenvolva o pensamento teórico (Davýdov, 1982). No entanto, o enfoque teórico não pode ser identificado como abstrato e o empírico como concreto. As relações entre ambos são bem mais complexas e exigem maior aprofundamento.

O conhecimento empírico pode ser elaborado por meio da comparação de objetos e das suas representações, o que permite separar neles as propriedades iguais, comuns. Nessa distinção, separa-se a propriedade geral, que permite catalogar objetos individuais/soltos em uma determinada classe formal, independentemente, de eles estarem ou não relacionados entre si (Davídov e Markova, 1987; Davydov, 1982). Por exemplo, no ensino do conceito de número, é proposto que os estudantes separem figuras de dois corações, duas estrelas e dois quadrados e extraiam a propriedade comum desses grupos, a quantidade dois (2).

Na base do conhecimento empírico se encontra a observação, que reflete só as propriedades externas dos objetos e, por isso, se apóia totalmente nas representações visuais. Formalmente, a propriedade geral e as particulares dos objetos são colocadas em um mesmo plano. A concretização do conhecimento empírico consiste na seleção de ilustrações e exemplos. O meio indispensável para fixar o conhecimento empírico é a palavra – termo (Davídov e Markova, 1987 e Davydov, 1982).

O conhecimento teórico, por sua vez, surge a partir da análise do papel e da função que cumpre certa relação entre as coisas, dentro do sistema desmembrado/desarticulado. Busca-se a relação, simultaneamente, real e especial como base genética de outras manifestações do sistema. Esta relação atua como forma geral ou essencial do todo reproduzido mentalmente. O conhecimento teórico, que surge com base na transformação dos objetos, reflete suas relações e enlaces internos (Davídov & Markova, 1987; Davydov, 1982).

Durante a reprodução do objeto em forma de conhecimento teórico, o pensamento sai dos limites das representações sensoriais, se fixa na conexão entre a relação geral e suas manifestações particulares. A concretização do conhecimento teórico requer sua conversão em uma teoria desenvolvida por via da dedução e explicação das manifestações particulares do sistema, a partir de sua fundamentação geral (Davídov e Markova, 1987; Davydov, 1982).

Assim, a fundamentação geral do conceito de número, de acordo com Davydov (1982), surge a partir do estudo das grandezas. Desse modo, o objetivo/finalidade principal do sistema de Matemática proposto por Davydov e seus colaboradores é que, ao finalizar o ensino fundamental, o estudante tenha formado uma concepção autêntica e completa do número real[5], cuja base é o conceito de grandeza. Ou seja, os números naturais e reais são um aspecto particular de um objeto matemático mais geral, o conceito de grandeza, conforme apresentamos na sequência.

2. Uma síntese da proposta de Davydov para o ensino do conceito de número

Na proposta de ensino de Davydov, as tarefas orientam o estudante para a apropriação das relações gerais de um determinado conceito matemático e, gradativamente, segue para as suas manifestações mais específicas e particulares. Davýdov (1982, p. 431-441) traduz seus pressupostos para o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, especificamente, para o conceito de número. Este, ao ser concebido em seu teor teórico de número real com a noção de medida, é apresentado no conjunto de tarefas como uma relação multiplicativa, isto é, na forma $\frac{a}{c} = n$ (*n* é qualquer número, *c* é a medida de qualquer objeto que se inclui *n* vezes em *a*). Para tanto, estabelece três etapas, a seguir sintetizadas.

Primeira etapa: a criança não tem contato com a contagem e nem com os algarismos. Primeiro, elas "assimilam com bastante detalhe os conhecimentos sobre grandezas" (Davydov, 1982, p. 431). Elas destacam nos objetos e figuras os parâmetros das grandezas (massa, volume, área, comprimento, etc.), além de

[5] Em Davídov, 1988, p. 185 há um erro de tradução, está escrito número natural em vez de número real.

estabelecer comparações entre uma e outra grandeza, com a especificação de igualdade ou desigualdade das mesmas. As crianças anotam "os resultados da comparação mediante fórmula literal, quer dizer, mediante a forma geral de representação de relações entre qualquer grandeza" (p. 431), conforme a figuras 1 2.

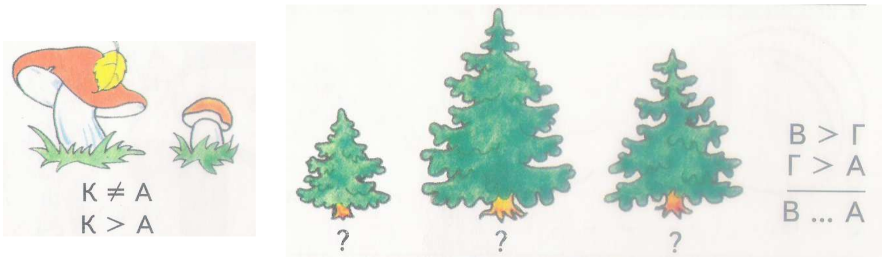


Figura 1: resultado da comparação entre grandezas mediante fórmula literal

Segunda etapa: Consiste em ensinar as crianças a anotarem as variações das grandezas com sinais de adição e subtração (figura 2).

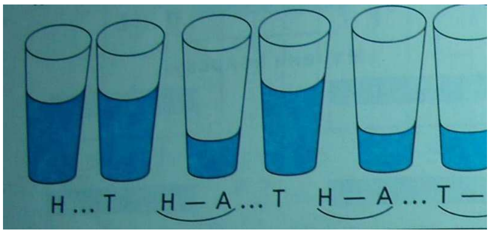
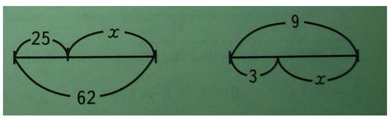


Figura 2: variações das grandezas

Esses conhecimentos permitem que elas resolvam "os mais diversos problemas relacionados com a necessidade de considerar o momento de 'equilíbrio' e as condições de sua manutenção" (Davydov, 1982, p. 432). No terceiro mês do primeiro ano escolar as crianças estudam os métodos de passar da desigualdade para a igualdade e da igualdade para a desigualdade, ou seja, "aprendem a formar e escrever equações" (Figura 3) (Davydov, 1982, p. 433). Por exemplo, "se $a < b$, da desigualdade cabe passar para a igualdade: $a + x = b$. O sentido de variação das grandezas se determina pelas condições do problema (se $a > b$, $a - x = b$) quando se requer igualar a em relação a b" (idem).



$25 + x = 62$ e $9 = 3 + x$

Figura 3: formação e escrita de equações

Terceira etapa: O número é introduzido como caso particular de representação das relações gerais entre grandezas, ou seja, quando se toma uma delas como unidade de medida de cálculo da outra. O número é visto na reta numérica, onde também são, inicialmente, realizadas as operações fundamentais. Desse modo, o número é concebido como um conceito em movimento: tem seu lugar geométrico, pode ser representado genericamente e cada um deles tem uma relação determinada com os demais. Com base no ensino experimental, Davydov afirma que os "estudantes da primeira série passam a usar os conceitos anteriormente considerados inatingíveis para as crianças desta faixa etária” (Давыдов et al., 1997, p. 02).

3. A perspectiva de Davydov do ensino de número no contexto escolar

A partir das proposições de Davydov, apresentadas anteriormente, elaboramos um sistema de tarefas com os mesmos princípios da proposta de ensino do referido autor, e desenvolvemos em sala de aula numa escola localizada na região metropolitana de Curitiba, Estado do Paraná, Brasil. A escolha da escola ocorreu pela sua abertura às pesquisas sobre novas alternativas para o processo de ensino e aprendizagem. Em 2009, ano que fora realizada a pesquisa existia uma indefinição, no sistema educacional brasileiro, no que diz respeito ao início da sistematização conceitual, se deveria ter início no primeiro ou no segundo ano escolar. Isso ocorreu pelo prolongamento do Ensino Fundamental de oito para nove anos. Por isso, a pesquisa envolveu quarenta e oito estudantes dos referidos anos escolares, com idade que oscilava entre cinco e sete anos, no período regular das aulas.

Desde o início, a atenção em cada tarefa foi para que não se dispersasse da prioridade de atribuir ao conceito de número, as significações algébricas, geométricas e aritméticas. Na análise, o foco foi para as possibilidades dessas significações se inter-relacionarem no processo de ensino e aprendizagem do conceito de número. Por extensão, centramos nas proficuidades de se antecipar o processo de apropriação de tais significações para o primeiro ano do Ensino Fundamental, que normalmente, no sistema escolar brasileiro, acontece em anos escolares bem mais avançados.

Estudar um objeto de pesquisa dessa natureza exigiu uma série de precauções, uma vez que, o contexto era de uma atividade educativa com desdobramentos em atividade de ensino, executada pelas professoras; atividade de estudo, compartilhada pelas crianças; como também, da atividade de pesquisa, cuja responsabilidade era de um dos pesquisadores que se fez presente durante todo o desenvolvimento do sistema de tarefas.

Embora tenha suas especificidades, cada uma delas, requer centralidade de um tipo de sujeito na sua execução (estudante, professora e pesquisadora), mesmo assim, elas constituem uma “unidade”, que, segundo Triviños (1995) é característica do desenvolvimento das formações. Esses papéis definidos historicamente, trazem, portanto, posicionamentos contrários, mas têm existência movida por dependência de um em relação ao outro, apesar das peculiaridades essenciais de cada um. Há, pois, nessa relação dialética um movimento em que atividades se coexistem pela semelhança ou identidade de uma necessidade que as impulsionam: aprendizagem de conteúdos matemáticos e, nesse caso, o número.

Mas, o movimento e a unidade não ocorrem somente entre as três atividades mencionadas, pois o sistema educacional estabelece, na atividade, um local para suas execuções: a escola. Por isso, ela foi a referência inicial de aproximação para posteriormente, ocorrer o contato com os professores e com os estudantes. Sem perder de vista essa estrutura hierárquica é que ao chegarmos à escola, apresentamos o projeto à diretora e às pedagogas, que permitiram a apresentação aos professores. As incumbências no processo de pesquisa não são lineares, o que requer explicitações no primeiro contato. Assim foi combinado e acordado, que uma delas, o estudo do sistema de tarefas, durante as horas atividades que os professores dispunham para planejamento curricular estabelecido pela própria escola, nas quintas-feiras. Também ficou estabelecido que o desenvolvimento do estudo em sala de aula contaria com a parceria professoras/pesquisadora/crianças. Foram nove aulas em cada turma com a duração de, aproximadamente, uma hora e meia cada. O grupo do primeiro ano foi composto por vinte e cinco estudantes, entre cinco e seis anos de idade; e, o grupo do segundo ano por vinte e três estudantes, com idades de seis e sete anos.

O sistema de tarefas foi amplamente discutido, nas reuniões de estudo, para que a participação da pesquisadora e professoras, em sala de aula, ocorresse numa relação de igualdade e de reflexões. A adesão espontânea, por parte das professoras, foi uma manifestação de compromisso e interesse pelo estudo que contribuiu decisivamente para um envolvimento movido por reflexões no estudo dos pressupostos teóricos da proposta de Davydov, quanto ao sistema de tarefas, e, no planejamento do seu material objetal. Nesses momentos, observamos manifestações de entendimento do caráter inovador daquele que estava em estudo e em proposição.

Entretanto, essas compreensões não eram vistas como surpresa, mas como expressão de compromisso, uma vez que elas poderiam ser acomodadas por desânimo, pela não familiarização com o ensino do conceito de número com idéias de medida, com a preocupação de desenvolvimento do pensamento teórico. Ou seja, elas estavam diante de desafios a superar para que diante dos estudantes se apresentassem com a mesma segurança de quando adotavam a proposta convencional.

No processo de execução das tarefas, por parte dos estudantes, procurávamos ficar atentos à identificação de suas dificuldades, para planejar novas tarefas ou reorganizá-las com o intuito de garantir as formas mais elaboradas do pensamento conceitual. Essa produção constitui-se em momentos de esforços e apropriações que subsidiavam as orientações necessárias às crianças.

As análises se pautaram, empiricamente, nos procedimentos das crianças, registrados por meio de filmagens e, posteriormente, transcritos. Vale salientar que a inserção na sala de aula tinha uma base teórica que fundamentou não só a elaboração do sistema de tarefas de ensino, quanto à análise dos dados, qual seja: a teoria de Davydov. Para tanto, uma de suas orientações observadas é de que o processo de elaboração do conceito de número, pela criança, ocorre a partir do estudo das relações entre grandezas. Por extensão, se apresentam as significações aritméticas, geometrias e a algébricas.

A primeira etapa do sistema de tarefas, elaborado a partir das orientações de Davydov para a presente pesquisa, consistia na análise do material objetal, com a identificação de suas diferentes características e relações.

O material apresentado aos estudantes era composto por dez recortes de cartolina, conforme mostra a figura 4, com as seguintes medidas: recorte **A**: 3 cm x 3 cm; recorte **B**: 3 cm x 6 cm; recorte **C**: 3 cm x 9 cm; recorte **D**: 3 cm x 12 cm; recorte

E: 3 cm x 15 cm; recorte **F**: 3 cm x 18 cm; recorte **G**: 3 cm x 21 cm; recorte **H**: 3 cm x 24 cm; recorte **I**: 3 cm x 27 cm; recorte **J**: 3 cm x 30 cm.

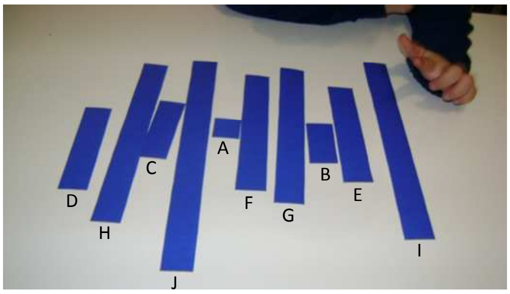


Figura 4: material apresentado aos estudantes

Em momentos anteriores à pesquisa as professoras titulares haviam abordado os conceitos de quadrado e retângulo, o que levou todas as crianças, de posse do material, adotarem a mesma denominação para os recortes.

Diante dessa denominação equivocada, as crianças foram orientadas a identificar a tridimensionalidade dos recortes e suas diferentes grandezas (comprimento da altura, da largura, da espessura e área das superfícies). Por isso, nas reflexões com as crianças, a atenção voltou-se para a necessidade da indicação de que não se tratavam de quadrados e de retângulos, pois tais figuras geométricas, que são bidimensionais, se apresentam nas faces dos recortes. Esses, por sua vez, apresentam três dimensões. A conclusão inicial das crianças tinha o seguinte teor: não dá para pegar um quadrado ou um retângulo na mão e sim um recorte, cujas faces apresentem as referidas formas. Em contraposição, se recorreu as orientações de Davydov, referente ao conceito teórico de quadrado. Nesse nível de escolaridade, extrapola-se a referida síntese, inicia-se com a ideia de linha quebrada fechada composta por quatro segmentos de retas interligados por quatro pontos dispostos em uma determinada posição.

A análise do próprio material requereu a reflexão sobre alguns conceitos que, a primeira vista, não estavam relacionados ao conceito de número, mas eram fundamentais uma vez que na metodologia adotada a gênese do referido conceito surge a partir das relações entre grandezas. O uso da expressão “dá para pegar na mão” era manifestação de que a atenção fosse redobrada para atender tripla necessidade. A primeira, que se evitasse a apresentação brusca de uma linguagem que não fosse tão distante daquela conhecida pela criança. A segunda, para atender as possibilidades intelectuais da criança. Ou conforme Vigotski (2000), estar no nível da zona de desenvolvimento imediato (ZDI), caracterizada pelas condições prospectivas de apropriação de novas significações. A terceira, pela oportunidade de explicitação de conceitos das grandezas, fundamentais ao conceito de número, de acordo com a perspectiva teórico-metodológica adotada. Isso ocorre com a identificação e inter-relação entre as diferentes dimensões: bidimensional e tridimensional.

Nesse momento, a análise dos estudantes volta-se para identificação de que cada recorte tem as seguintes características: seis faces, o comprimento da altura e da largura varia dependendo da posição (horizontal ou vertical) e o comprimento da espessura que era constante. Inicialmente, para se referir às áreas das bases, as crianças utilizavam expressões de seu vocabulário cotidiano: “parte de cima” e “parte de baixo”. Como forma de aquisição da linguagem conceitual científica, passamos a nomeá-las, respectivamente, de base superior e inferior, o que foi aceito sem objeção pelas crianças.

Feita essas orientações, as crianças identificaram dois parâmetros de grandeza (comprimento e área) e estabeleceram relações do tipo “maior”, “menor” e “igual” sem o uso do número. Utilizaram apenas os termos *mais curto, mais longo, maior que, menor que e igual a*.

Nessa etapa, para que a comparação incidisse nas grandezas e não nos recortes, as crianças foram orientadas para explicitação da grandeza em referência ao estabelecer a comparação, por exemplo, um recorte é maior que outro pelo comprimento da altura e não apenas, um recorte é maior que o outro. Tal orientação atende o propósito de Davydov de que o conceito de número surja, no processo de ensino e aprendizagem, a partir do estudo das grandezas apresentadas objetalmente, e não a partir de objetos em si.

Vale ressaltar que Davydov propõe o movimento do pensamento conceitual que segue do geral para o particular. O geral, por sua vez, é as diversas relações entre as grandezas representadas algébrica e geometricamente. O particular é o ponto de chegada, expresso no valor da medida da grandeza por meio de um número, ou seja, em sua significação aritmética. O referido valor é o resultado de uma lei elaborada com base nas relações gerais.

Nesse movimento, ainda no âmbito geral, ocorre a segunda etapa do sistema de tarefas que se caracteriza pela representação literal das grandezas, isto é, por meio de letras e suas relações por meio de símbolos. Para tanto, os estudantes organizaram os recortes, sobre a mesa, com adoção dos seguintes critérios: do menor para o maior e do maior para o menor, tendo como referência o comprimento da altura e base constante. Durante a execução, apenas um estudante precisou de nossa ajuda que, com algumas orientações, concluiu a tarefa, conforme a figura 5.

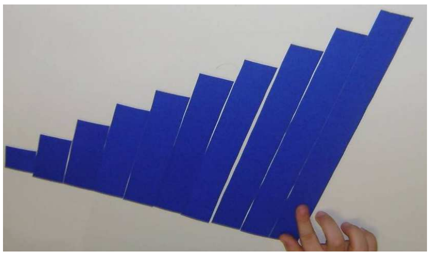


Figura 5: organização dos recortes do menor para o maior

Na sequência, propusemos aos estudantes que atribuíssem uma letra minúscula para representar a grandeza (área) de cada recorte. Combinamos que seguiríamos a sequência dos recortes, ou seja, de *a* até *j*. Em seguida comparamos as grandezas utilizando os símbolos propostos por Davydov. Os estudantes conheciam os termos maior, menor, igual e diferente, apresentamos, então, os seguintes símbolos: >, <, = e ≠. Desse modo, os símbolos são introduzidos para contribuir com o registro das comparações de um tipo especial de característica do material: a grandeza.

Combinamos com as crianças que os recortes seriam organizados verticalmente (Figura 6), que ao nos referir à área da base utilizaríamos simplesmente o termo base e para a área da face maior o termo área. O diálogo, a seguir, ocorreu no segundo ano entre a professora (**P**) e uma estudante (**M)** com sete anos, durante a comparação dos recortes **B (**3 cm x 6 cm) e **C** (3 cm x 9 cm).

Figura 6: Recortes B e C

> **M: -** *É igual*. **P: -** *O que é igual*? **M: -** *a base*. **P: -** *Como você descobriu*. **M: -** *Coloquei um sobre o outro*. **P: -** *Agora compare pela altura*. **M: -** *Diferentes*. **P: -** *Como você sabe que eles são diferentes pela altura*? **M: -** *Eu coloquei um sobre o outro*. **P: -** *Qual é maior*? **M: -** *O recorte C*. **P: -** *Tem outro jeito de descobrir qual é mais alto*? **M: -** *Tem, colocando um ao lado do outro*. **P: -** *E qual tem a área maior*? (M coloca um recorte ao lado do outro). **M: -** *O recorte C*. **P: -** *Por que*? **M: -** *O recorte C tem mais espaço para pintar.* **P: -** *Como você chegou a essa conclusão*? **M: -** *Eu coloquei um ao lado do outro*. **P: -** *E tem outra forma de verificar qual é maior na área da superfície*? (M sobrepõe os recortes). **M: -** *Colocando um sobre o outro.*

A estudante **M** executava, concomitantemente, a tarefa na forma verbal e escrita (no quadro negro), conforme figura 7:

BASE	ALTURA	AREA
$b = c$	$b < c$ e $c > b$	$b < c$ e $c > b$

Figura 7: Produção escrita da estudante M

Vale esclarecer que a representação com letras maiúsculas refere-se aos recortes e as letras minúsculas às grandezas (comprimento e área). Para Slovin e Venenciano (2008) essa primeira utilização de letras, proposta por Davydov, expressa o geral do pensamento conceitual em detrimento de quantidades específicas. Desse modo, de acordo Angle (2009), é que se introduz de forma significativa os elementos da álgebra abstrata. Para **M**, o *b* e o *c* representavam uma determinada grandeza, representada objetalmente nos recortes B e C.

Nessa etapa, as crianças: destacaram algumas grandezas (área, comprimento), fizeram comparações, determinaram a igualdade e desigualdade, designaram os objetos por letras maiúsculas e as grandezas por letras minúsculas, bem como, anotaram os resultados da comparação por meio de letras e símbolos. Além disso, as orientações possibilitaram para que as crianças percebessem que não bastava indicar a igualdade ou desigualdade das grandezas, mas era necessário nomeá-las. Além disso, elas se dedicaram à distinção e uso dos sinais "maior" e "menor", uma vez que são semelhantes apenas voltados para lados opostos. Outra conclusão dos estudantes foi que o registro de comparação pode começar por qualquer das duas grandezas, porém, ao se tratar da relação "maior – menor", o sinal muda.

Com base na segunda etapa proposta por Davydov, apresentamos algumas tarefas cujo teor era a passagem da desigualdade para a igualdade e vice-versa por meio da adição e subtração. Como forma de explicitar alguns resultados dos procedimentos dos estudantes, destacamos o diálogo, ocorrido no primeiro ano, entre a professora **P** e a estudante **E** (6 anos), ao analisarem os recortes **D** (3cm x 12cm) e **E** (3cm x 15cm)**:**

Figura 8: Recortes D e E

P: - *O que você vai fazer para ficar na mesma altura?* **Colegas: -** *Ah, quem não sabe*. (Em silêncio, **E** coloca o recorte **A** sobre o recorte **D**). **P: -** *Pessoal, ficou na mesma altura?* **Colegas: -** *Sim.* **P: -** *Como você registra o que você fez*? (**E** escreve a seguinte afirmação: *a* + *d* = *e*.) **P: -** *Por que você usou esse sinal* (+)? **E: -** *Porque eu juntei a altura do A com a Altura do B.* **P: -** *E esse sinal* (=), *você usou por quê?* **E: -** *Porque ficou igual na altura quando eu coloquei o A.*

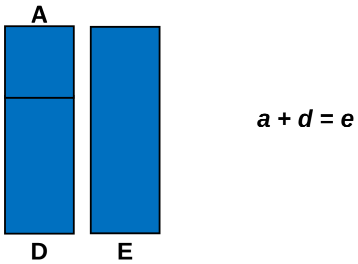


Figura 9: movimento realizado por E

Todas as crianças de ambos os anos escolares estabeleceram as relações corretamente e adotaram a mesma representação na forma literal. Por isso, a proposição subseqüente foi a tarefa de realização do movimento inverso, por meio da ideia de subtração. Objetalmente, os estudantes cortaram do recorte **E** uma parte igual ao comprimento da altura do recorte **A** e a equação formada foi: *e* – *a* = *d*.

No início, os estudantes precisavam manipular os recortes para resolver tarefas propostas. Porém, com o desenvolvimento das demais tarefas, aos poucos, deixavam os recortes sobre a mesa e apenas os observavam, para, posteriormente, apresentar a representação escrita da igualdade.

Na sequência, propomos aos estudantes uma tarefa para ser realizada individualmente, com figuras impressas, conforme a figura 10.

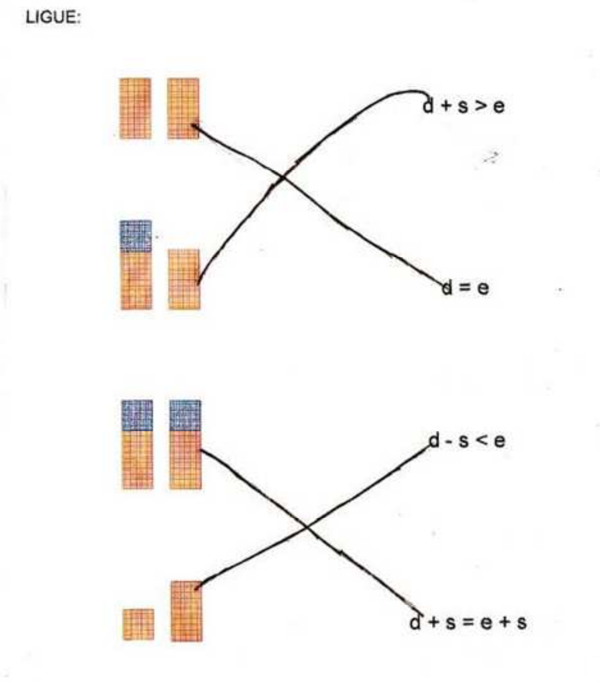


Figura 10: tarefa impressa

As crianças deveriam desenvolver a tarefa anterior considerando a altura ou a área das figuras. Após todos concluírem, solicitamos que explicassem como pensaram para desenvolvê-la. A seguir, apresentaremos o diálogo entre a professora **P** e o estudante **J** do segundo ano (7 anos):

> **J: -** *Eu vi que tem duas figuras do mesmo tamanho, e aqui* ***d*** *igual a* ***e****. Como lá são do mesmo tamanho, então eles são iguais.* **P: -** *E depois?* **J: -** *Depois eu já sabia qual era* ***d*** *e qual era* ***e****, e eles tinham a mesma altura. Mais o* ***s****, aí ficou maior que* ***e****.* **P: -** *E aí, como que você continuou?* **J: -** Depois *eu fiz esse* (último)*.* **P: -** *Como que você pensou esse?* **J: -** O **d** e o ***e*** *são do mesmo tamanho. O* ***d*** *cortou, fica* ***d*** *menos* ***s*** *menor que* ***e****.* **P: -** *Esse que cortou é do tamanho de qual figura?* **J: -** *Do* ***s****. Depois só sobrou esse.* **P: -** *Mas como que você pensa esse?* **J: -** *O* ***s*** *e o* ***s*** *são do mesmo tamanho,* ***d*** *mais* ***s*** *é igual* ***e*** *mais* ***s****.*

As interações que promovemos com os estudantes, mediadas pelo objeto de conhecimento, foram fundamentais para que as ideias fossem elaboradas para aquela tarefa apresentada. As crianças transitaram em princípios próprios do pensamento algébrico como: igualdade, equivalência e transitividade.

De acordo com Davídov (1988), os modelos expressos por letras, conforme apresentados nas tarefas anteriores, desempenham um importante papel na formação dos conceitos matemáticos. Eles unem o sentido abstrato com a concretização objetal. A abstração da relação matemática pode ser produzida só com ajuda das fórmulas expressas por meio de letras. Porém, nelas se fixam os resultados das ações realizadas real ou mentalmente com os objetos. As representações espaciais, no caso anterior às figuras impressas, por terem uma grandeza visível, permitem que as crianças realizem transformações reais, cujos resultados não só podem ser supostos como também observados. O diálogo anterior expressa a capacidade da criança para avaliar as relações abstratas dos objetos. Desse modo, confirma a afirmativa de Davydov quando este diz que, ao mudar os métodos e o conteúdo de ensino, as crianças são capazes de pensar abstratamente antes do que normalmente é previsto pelos sistemas tradicionais (1988).

Na elaboração do sistema de tarefas, o objetivo definido, com apoio em Davidov (Davydov, 1988 e Davidov, 1988), foi a apropriação da experiência socialmente elaborada (conhecimentos e capacidades) que supõe a formação, nos estudantes de menor idade, de abstrações e generalizações, características do pensamento teórico. Para tanto, as tarefas indicam os princípios dos conhecimentos de caráter geral e abstrato que precederam aqueles mais particulares e concretos que serão introduzidas na terceira etapa. Desse modo, o movimento parte da base universal para as manifestações particulares, ou seja, ascende do abstrato ao concreto. Vale ressaltar que até o final dessa segunda etapa ainda não fora introduzidas as particularidades da contagem, o que ocorre na sequência.

Nessa terceira etapa é inserida a quantificação. As tarefas não enfatizam mais os procedimentos de comparação direta das grandezas. Para resolvê-las, é necessário a mediação de uma unidade de medida. Nesse caso, o princípio comparativo é: A busca de quantas vezes a unidade de medida cabe naquilo que está sendo medido, o que leva à criança determinar a relação múltipla universal a ser modelada.

Com base na terceira etapa da proposta de Davydov, aos estudantes foi proposto que dividissem cada recorte em pedacinhos iguais à unidade *a*, ou seja, o recorte A**.** E, também, verificassem quantos, desse recorte, seria possível fazer com os demais. Em conformidade com os procedimentos dos estudantes, foi apresentada a notação escrita, acompanhada de ampla discussão com eles. O foco incidia na identificação da quantidade de unidade em cada recorte na comparação, conforme figura 11.

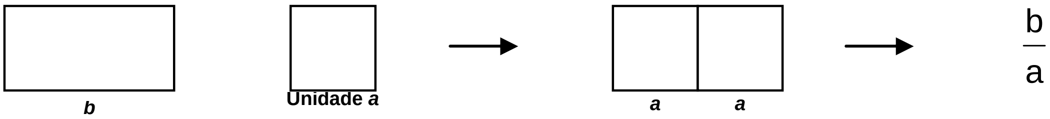


Figura 11: quantificação a partir da inter-relação entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas.

A área *b* corresponde à medida da superfície maior do recorte **B.** Por sua vez, a unidade *a* medida da superfície maior do recorte **A**. Observa-se que essa unidade coube duas vezes na superfície do recorte **B**, ou seja, a área com medida *b*, dividida em pedacinhos iguais ao *a* (unidade de medida), é igual a *dois*. Tal afirmação é traduzida na seguinte notação: $\frac{b}{a} = 2$. Nesse procedimento, as significações geométricas (comparação entre as áreas), algébricas (modelo genético do conceito de número: $\frac{a}{c} = n$) e aritméticas (resultado da medida: 2) constituem um todo indissociável.

O mesmo procedimento foi realizado com todos os recortes, cujos resultados foram traduzidos, conforme as igualdades a seguir:

$$J:\ \frac{j}{a}=10,\qquad I:\ \frac{i}{a}=9,\qquad H:\ \frac{h}{a}=8,\qquad G:\ \frac{g}{a}=7,\qquad F:\ \frac{f}{a}=6,$$

$$E:\ \frac{e}{a}=5,\qquad D:\ \frac{d}{a}=4,\qquad C:\ \frac{c}{a}=3,\qquad B:\ \frac{b}{a}=2,\qquad A:\ \frac{a}{a}=1$$

Observa-se que, na proposta de Ensino de Davydov, de acordo Slovin e Venenciano (2008), o número é expressão da relação entre uma unidade de medida escolhida e uma grandeza.

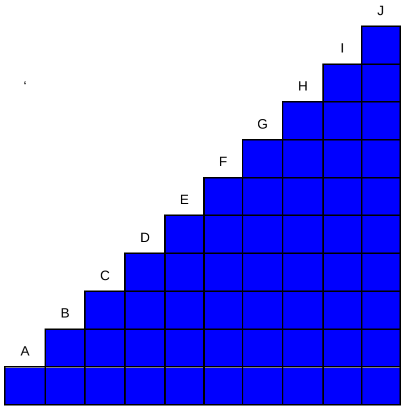
Todos os estudantes do segundo ano realizaram a ação proposta de traçar as unidades em cada recorte sem manifestar dificuldades. Entretanto, no primeiro ano, pois, alguns estudantes se equivocaram por subdividir a superfície a ser medida em tamanhos menores ou maiores que a unidade (*a*). Porém, eles percebiam o erro, ao comparar com o resultado dos colegas.

A partir da análise de quantas vezes a medida dada está contida na superfície a ser comparada, surge o modelo (formulado por letras) do processo, isto é, o resultado da diferenciação da relação múltipla: $\frac{a}{c}=n$. De acordo com Davydov (1982), esta fórmula geral do modelo possibilita que as crianças identifiquem qualquer relação múltipla particular.

A modelação ligada ao caráter visual é amplamente utilizada pela didática tradicional e reflete apenas as propriedades externamente observáveis. Porém, na Proposta de Ensino de Davídov, o caráter visual tem um conteúdo específico, por expressar as relações e as vinculações essenciais ou internas dos objetos e fenômenos. Diferentemente da didática tradicional, em que o visual concreto reflete apenas as propriedades externamente observáveis.

Os números naturais são abstrações que surgiram, historicamente, como contagem de coleções de objetos, isto é, de grandezas discretas. No entanto, as necessidades atuais da vida diária demandam a medição de grandezas contínuas. Para satisfazer as necessidades básicas relativas às medições, os números naturais se tornaram insuficientes, uma vez que raramente uma unidade de medida cabe um número exato de vezes naquilo que é medido. Surge, então, o número racional que é o quociente $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$, $Q \neq 0$, de dois números inteiros. O sistema dos números racionais contém todos os inteiros e todas as frações e é suficiente para fins práticos que envolvem medições (EVES, 2007). Por essa razão matemática, no sistema de Davydov, a gênese para os números naturais é a mesma dos racionais.

No contexto dessa base epistemológica é que os estudantes desenvolveram as tarefas que tinham como referência análise do material, movidos pela relação de comparação unidade/recortes. Eles concluíram, empiricamente, que o material organizado do maior para o menor ou do menor para o maior ‘formava uma escada’. Porém, avançaram em termos conceituais em relação à conclusão anterior, pois perceberam que: “seguindo a ordem do menor para o maior, cada novo recorte é mais alto um ***a***”. E “seguindo a ordem do maior para o menor, cada novo recorte é mais baixo um ***a***”. Com orientação e discussão sobre as dúvidas, cada estudante elaborou sua síntese, conforme figura 12, no verso de cada recorte correspondente.



$J = a + a + a + a + a + a + a + a + a + a = 10a$

$I = a + a + a + a + a + a + a + a + a = 9a$

$H = a + a + a + a + a + a + a + a = 8a$

$G = a + a + a + a + a + a + a = 7a$

$F = a + a + a + a + a + a = 6a$

$E = a + a + a + a + a = 5a$

$D = a + a + a + a = 4a$

$C = a + a + = 3a$

$B = a + a= 2a$

$A = a = 1a$

Figura 12: Síntese do processo de quantificação

Conforme mencionado, a gênese para os números naturais e racionais é a mesma. Portanto, o ponto de partida é essa origem comum, o geral, para o posterior estudo das particularidades, nesse caso, o número natural. Cada sucessor é maior que seu antecessor em uma unidade, como também, cada antecessor é menor que seu sucessor em uma unidade.

Seguindo a orientação de Davydov, na sequência, aos estudantes é proposta a tarefa de uma construção geométrica específica: a reta numérica. Para tal, foi apresentada uma reta, desenhada em cartolina, que eles analisaram com base nas seguintes condições: ponto inicial, direção e unidade (unidade *a*).

Inicialmente eles localizaram, na reta, a medida do comprimento da altura de cada recorte. Com base em experiências anteriores com o ensino da medida e em resultados de pesquisa (Fritzen, 2011), a atenção voltou-se para possíveis equívocos de algumas crianças de começar o processo de medição, em vez do zero, a partir da unidade ou do início da cartolina em que a reta estava desenhada. O que não aconteceu, pois consideraram o zero como referência inicial, conforme figura 13.

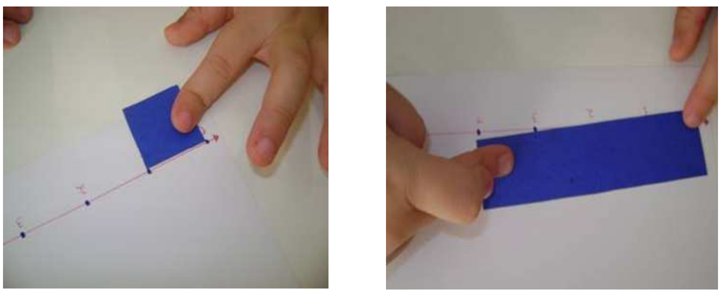


Figura 13: Medição dos recortes na reta numérica

Mesmo assim, tiveram que justificar a adoção de tal critério, ao que expressaram explicações similares a que segue: do *zero* ao *um* era *um a*, por isso, começar do *zero*, para não deixar um *a* para trás.

A formulação de tal síntese é decorrente do trabalho com as grandezas, em especial o comprimento, que contribuiu para que os estudantes não cometessem o equívoco conceitual ou dúvidas do ensino tradicional, qual seja: iniciar do um; do zero; quando se tratava do início da reta numérica e da régua.

Na continuidade, os recortes foram medidos também com a régua. Inicialmente a ideia de que na régua o resultado da medição era outro gerou polêmica. As crianças concluíram que na reta, naquele momento utilizada como régua de papel, possuía as medidas maiores, exatamente três vezes. Ou seja, cada unidade da reta numérica media três centímetros.

Observa-se que a maioria das tarefas tinha algo em comum: a ênfase na grandeza comprimento. Isso se justifica por ser a unidade básica mesmo quando se trata da medição de comprimentos, áreas,... isto é, desempenha um papel importante nas aplicações da matemática (Eves, 2007, p. 493).

Considerações finais

No decorrer do texto, foi exposto as etapas fundamentais para introdução do conceito de número como a inter-relação das significações aritméticas, algébricas e geométricas, a partir das proposições de Davydov. No início, a abordagem voltou-se às várias relações entre as grandezas e suas propriedades. Por meio da ação objetiva, as crianças reproduziram a base geral do conceito de número: a relação entre uma unidade de medida e uma grandeza, que é a forma geral de obtenção de qualquer número inteiro e fracionário. (Davydov, 1982).

O sistema de tarefas contemplava o desenvolvimento de raciocínios matemáticos complexos que requeriam que as crianças realizassem a reflexão no plano discursivo com auxílio das fórmulas literais. As manifestações e procedimentos dos estudantes são credenciais que remetem a Davydov ao dizer que a modificação substancial do conteúdo do ensino pode adiantar a transição ao nível das operações formais para muito antes dos 11 ou 12 anos, como prevê outras correntes teóricas. (Davydov, 1988; Davidov, 1988).

Com a execução do sistema de tarefas, o pensamento da criança percorreu, de forma orientada, o movimento de ascensão do abstrato ao concreto e do geral para o particular. Inicialmente as crianças não tiveram contato com os números e suas representações simbólicas. Em vez disso, estabeleceram comparações entre grandezas de forma geral, que estabelecia a inter-relação das significações algebricas e geométricas. Só mais tarde, atribuiam um valor numérico (significação aritmética) para a medida da grandeza.

O estudo dos números a partir das grandezas contribuiu para que as crianças realizassem a medida dos comprimentos de forma independente e sem erros. Tal constatação confirma outro princípio de Davydov (1982) de que, ao se apropriar da essência do conceito e de seu núcleo geral, a criança se orienta conceitualmente, e de forma autônoma, na realização de outras situações em que o conceito apreendido anteriormente for necessário. Portanto, se diferente do ensino que propicia apenas exemplos particulares do conceito, em que, ao se deparar com uma situação nova, a criança exclama: ainda não sei fazer desse tipo! (Davydov, 1982).

Uma síntese referente a presente pesquisa é a hipótese da possibilidade de desenvolvimento do pensamento teórico de número desde o primeiro ano do Ensino Fundamental. Para tanto, no seu ensino, faz-se necessário ultrapassar os limites das significações aritméticas, com predomínio do pensamento empírico, no ensino para ater-se, também, nas significações algébricas e geométricas.

Vale reafirmar que o estudo foi um primeiro esforço de desenvolver as proposições de Davydov em citação escolar brasileira. Por isso, algumas limitações se apresentam, pois na oportunidade, o sistema de tarefas apresentado aos estudantes foi elaborado com base nas leituras dos textos teóricos do referido autor e do livro didático. Atualmente, ao dispormos das “orientações para o uso do livro didático” produzidas pelos colaboradores de Davydov é que tivemos acesso ao sistema de tarefas e seus respectivos objetivos pormenorizadamente.

Referências

Aleksandrov, A. D. (1976). Visión General de la Matemática. In Aleksandrov A. D. et al. (ed.) La Matemática: su contenido, métodos y significado, 17-91. Alianza Universidade: Madrid.

Angle, D. (2009). Should Children Learn Math by Starting with Counting? MMA. http://www.maa.org/devlin/devlin_01_09.html Recuperado 15 de setembro de 2010,

Ceryno, E. (2001). Número e dinheiro. (Dissertação de mestrado, Universidade do Estado de Santa Catarina, 2001).

Damazio, A., Colares, C. B., & Pereira, I. S. (2005). A busca da superação da tricotomia álgebra/aritmética/geometria no processo de elaboração conceitual. In Fórum Nacional de Educação. (2 ed.) Formação, Trabalho e Educação, 1-15. ULBRA: Canoas.

Davydov, V. (1988). La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación teórica y experimental. Editorial Progresso: Moscú.

Davídov, V. V. (1987). Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. En Shuare, M. (ed.) La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS, 143-155. Editorial Progresso: Moscú.

Davídov, V. V., & Markova. A. (1987). El desarrollo del pensamiento en la edad escolar. En La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS, 173-174. Editorial Progresso: Moscú.

Davydov, V. V. (1998). Renovación de la educación y el desarrollo mental de los alumnos. Revista de Pedagogia, 403, 197-199.

Davydov, V. V. (1988a). Learning activity in the Younger school-age period. En Soviet Education “Problems of developmental teaching”, 3-47. M. E. Sharpe: New York.

Davydov, V. V. (1988b). Problems of the child’s Mental Development. En Soviet Education “Problems of developmental teaching”, 44-97. M. E. Sharpe: New York.

Davydov, V. V. (1988c). The Basic Concepts of contemporary Psychology. En Soviet Education “Problems of developmental teaching”, 3-43. M. E. Sharpe: New York.

Davydov, V. V. (1982). Tipos de generalización en la enseñanza. Editorial Pueblo y Educación: Habana.

Davydov, V. V. (1990). Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. National Council of Teachers of Mathematics: Reston, VA.

Davydov, V. V. (1999). What is real learning activity? En Hedegaard, M., Lompsher, J. (Eds.) Learning activity and development. Aarhus University Press: Aarhus.

Davydov, V.V. (1998). La renovación de la educación y el desarrollo mental de los alumnos. Revista de Pedagogía, 403, 197-199.

Eves, H. (2004). Introdução à história da Matemática. Editora da UNICAMP: São Paulo.

Fayol, M. (1996). A criança e o número: da contagem a resolução de problemas. Artes Médicas: Porto Alegre.

Fritzen, K. R. (2011). Estudo do sistema conceitual de trigonometria no Ensino Fundamental: Uma leitura Histórico-Cultural. (Dissertação de mestrado, Universidade do Extremo Sul Catarinense, 2011).

Freudenthal, H. (1975). Mathematics as an Educational Task. Reidel: The Netherlands.

Gil, K. H., & Ruth, P. (2008). Repensando as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra. In Borges, R. M. R., Rocha Filho, J. B., Basso, N. R. S. [org.]. Avaliação e interatividade na educação básica em ciências e Matemática, 115-127. Edipucrs: Porto Alegre.

Kamii, C. (1999). A criança e o número. (26 ed.) Papirus: São Paulo.

Khidir, K. S. (2006). Aprendizagem da álgebra: uma análise baseada na teoria do ensino desenvolvimental de Davídov. (Tese de doutorado, Universidade Católica de Goiás, 2006). 103.

Schmittau, J., & Morris, A. (2004). The development of algebra in Davydov's elementary curriculum. The Mathematics Educator. Recuperado em outubro de 2010, de math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV8_1/Schmittau.pdf

Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking: A Vygotskian perspective. International Review of Mathematics Education, 37, 16-22. Recuperado novembro de 2010 http://www.emis.de/journals/ZDM/zdm051i.html

Slovin, H., & Linda, V. (2008). Succes in algebra. Paper presented at the PME, 32. Recuperado em setembro de 2010, de http://www.pme32-na30.org.mx/about.htm

Triviños, A. N. S. (2008). Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação. Atlas: São Paulo.

Vigotski, L. S. (2000). A construção do pensamento e da linguagem. Martins fontes: São Paulo;

Vita-press, E. (2010). Rússia. http://www.vita-press.ru. Recuperado agosto de 2010,

Горбов С, Ф, et al, (2008). Обучение математике. En 1 класс: Пособие для учителей начальной школы (Система Д.Б.Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида., перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб.

Давыдов, В. В. О. et al. (1997). Математика, 1-Кjiacc. En Mockba: Mнpoc.

Josélia Euzebio da Rosa. Doutoranda do PPGE da Universidade Federal do Paraná com bolsa do CNPq. Integrante dos seguintes grupos de pesquisa: Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC) e Grupo de Estudos e Pesquisa Sobre a Atividade Pedagógica (GEPAPe).
joselia.euzebio@yahoo.com.br

Ademir Damazio. Professor do PPGE da Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC. Integrante dos seguintes grupos de pesquisa: Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC) e Grupo de Estudos e Pesquisa Sobre a Atividade Pedagógica (GEPAPe). Endereço: Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC.: **add@unesc.net**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 101-123
ISSN: 1815-0640

Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza

Lorenzo J. Blanco Nieto, Luis C. Contreras González

Resumen

Este trabajo se ubica en el marco del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) desarrollado por el equipo de Deborah Ball en la Universidad de Michigan. Se hace una breve revisión de la evolución de este marco teórico a partir de los trabajos de Lee Shulman y se exponen diversas experiencias prácticas de formación de profesores de matemáticas realizadas en España, una de las cuales se describe con detalle. Se ejemplifica con actividades de formación de maestros una forma de desarrollar el conocimiento del profesor en cada una de las subcategorias del MKT. Ello supone una reformulación de los trabajos realizados por los autores al amparo del marco teórico señalado.

Abstract

The theoretical framework of the present study is that of Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) developed by Deborah Ball's team at the University of Michigan. The evolution of this framework is briefly reviewed starting with the work of Lee Shulman, and some practical experiences in mathematics teacher education in Spain are presented, one of which is described in detail. Examples of primary teacher education activities illustrate one form of developing teachers' knowledge in each of the MKT subcategories. For the authors, this approach represents a reformulation of their work to be coherent with the aforementioned theoretical framework

Resumo

Este trabalho situa-se no enquadramento do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) desenvolvido pela equipa de Deborah Ball na Universidade de Michigan. Depois de se fazer uma breve revisão da evolução deste enquadramento teórico desde os trabalhos de Shulman, expõem-se diversas experiências práticas de formação de professores de matemática realizadas em Espanha, uma das quais se descreve em pormenor. Para isso, exemplifica-se com activdades de formação de professores primáriosuma forma de desenvolver o conhecimento do professorem cada uma das subcategorias do MKT naquilo que pressupõe uma reformulação dos trabalhos realizados pelos autores suportado pelo enquadramento teórico referido.

1. Introducción

Breve repaso a las aportaciones sobre el conocimiento del profesor

Uno de los trabajos probablemente más citados en el ámbito del conocimiento del profesor es el de Lee Shulman en sus distintas reformulaciones (Shulman, 1986, 1987; Grossman, Wilson y Shulman, 1989). Ball, Thames y Phelps (2008) afirman que existen más 1200 referencias de esos trabajos en diversas revistas especializadas y de diferentes disciplinas. Ello es, de alguna manera, una garantía de la vigencia de este marco teórico, del que, en una primera instancia, nos gustaría resaltar que establecía dos grandes componentes en el conocimiento del profesor; una referida a aspectos generales (conocimiento pedagógico general, conocimiento de las características de los aprendices, conocimiento del contexto educativo y conocimiento acerca de ojetivos educativos y valores), y otra referida al contenido específico que el profesor enseña (conocimiento del contenido, conocimiento del curriculum y conocimiento didáctico del contenido[1]).

Esta vigencia señalada no es óbice para que algunos autores hayan propuesto algunas reformulaciones que, probablemente, enriquecen el marco teórico. Así, por ejemplo, Meredith (1995) ha reclamado la inclusión dentro del PCK de formas alternativas[2] de enseñanza; Fennema y Franke (1992) han mostrado la ausencia en este modelo de las concepciones y creencias de los profesores acerca de la matemática y de sus procesos de enseñanza y aprendizaje y de las interacciones que se producen en el aula o de la naturaleza dinámica del conocimiento del profesor; Ball et al. (2008) han tratado de aclarar la frontera difusa que Shulman establece entre el conocimiento del contenido (SMK) y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK); Hashweh (2005) ha planteado la necesidad de establecer relaciones entre las categorías de Shulman, relaciones que sí han estudiado en el proyecto SKYMA (Subject Knowledge in Mathematics)(Rowland, 2005, 2007; Rowland, Huckstep and Thwaites, 2003), desde la propia práctica de los profesores, desde una perspectiva integradora que permite describir la práctica en acciones que explican el conocimiento del profesores desde cuatro categorías: fundamentos (*Foundations*), Transformaciones (*Transformations*), conexiones (*Connections*) y conteningencias (*Contingency*). Cabe citar también el Simposio sobre 'avances iberoamericanos en el Conocimiento Didáctico de Contenido', que se celebró en 2009 en Barcelona dentro del VIII Congreso de Enseñanza de las Ciencias[3].

Una de las ideas que ha permenecido hasta ahora es la identificación del conocimiento de la disciplina para la enseñanza como algo específico dentro de las diferentes aportaciones; en particular, en el ámbito de la educación matemática, del conocimiento matemático para la enseñanza. Es difícil entender que un profesor pueda enseñar matemáticas si no tiene un conocimiento adecuado de ellas, pero ese conocimiento va más allá de la propia matemática[4], es de diferente naturaleza del conocimiento matemático que utilizan otros profesionales (Blanco y Contreras, 2002).

En los últimos 15 años, los proyectos MTLT (Mathematics Teaching an Learning to Teach) y LMT (Learning Mathematics for Teaching), de la Universidad de

[1] La expresión *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) (Shulman, 1986) fue traducida inicialmente al castellano como *Conocimiento de Contenido Pedagógico* (Llinares, 1991; Blanco, 1991). Posteriormente, se utilizó la expresión *Conocimiento Didáctico del Contenido* (Marcelo, 1993; Mellado y Carracedo, 1993) que adoptamos desde 1995 (Blanco, Mellado y Ruiz, 1995) y que, actualmente, es la que mayor aceptación tienen en los trabajos actuales sobre el tema. Recientemente ha sido traducida, también, como *Conocimiento Pedagógico del Contenido* (Gómez, 2007).

[2] Alternativas a métodos tradicionales, como aquellas en las que el aprendiz es visto como constructor autónomo de su conocimiento y de los significados de la materia.

[3] Enseñanza de las Ciencias, Número Extra VIII Congreso Internacional sobre Investigación en Didáctica de las Ciencias, Barcelona. http://ice.uab.cat/congresos2009/eprints/cd_congres/propostes_htm/htm/inici.htm

[4] Entendida desde las perspectivas sustantiva y sintáctica establecida por Schwab (1978).

Michigan (Ball, Thames y Phepls, 2008; Ball, Hill, y Bass, 2005) han trabajado en una reelaboración del modelo de Shulman desde la perspectiva de determinar las características de este conocimiento específico. Manteniendo las dos grandes categorías de Shulman (SMK y PCK), han subdividido cada una de ellas en otras tres.

Así, en el ámbito del conocimiento del contenido de Shulman (SMK) han emergido el conocimiento matemático común (CCK), el conocimiento matemático especializado (SCK) y el conocimiento del horizonte matemático (de características similares a la categoría *connections* de Rowland et al., 2003, 2009); y en el conocimiento didáctico del contenido, por su parte, se mantiene el conocimiento del curriculum que ya estableciera Shulman, y emergen el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS) y el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT). Los propios autores manifiestan el carácter difuso de las fronteras[5] entre algunas de estas subdivisiones, pero si utilizamos este modelo más para comprender las características del conocimiento del profesor que para catalogar su conocimiento en la acción, nos puede ser de utilidad en los procesos de formación de profesores.

2. Algunas aportaciones españolas en el ámbito de la formación del profesorado

Desde una perspectiva integradora, la formación inicial de profesores debe proporcionar a los estudiantes para profesor (EPP) las herramientas, cognitivas y afectivas que les permitan analizar, comprender, diseñar, gestionar y evaluar las situaciones que pudieran presentárseles en su actividad profesional, partiendo de unos contenidos y procesos básicos que debieran ser el núcleo de los programas de nuestras titulaciones.

En referencia a la formación de profesores de Matemáticas, podemos encontrar en España diferentes trabajos que tratan de diseñar tareas para la formación inicial de profesores desde una perspectiva que, en la línea de Ruthven (2011), sería diferenciada, contextualizada, de carácter interactivo y matematizada[6]. Así, García y Sánchez, (2002 a y b), Llinares (2005), Valls, Llinares y Callejo (2006) y Sánchez y García (2009) trabajan con 'entornos de aprendizaje' creados "a partir de tareas diseñadas/seleccionadas por el formador de profesores" mediante una metodología que denominan 'Itinerarios de formación' o 'trayectoria hipotética de enseñanza/aprendizaje'. También, Burgués y Giménez (2006) extienden a la formación inicial de Maestros la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, reconsiderando sus componentes.

Cardeñoso y Azcárate (2002) y Azcárate, (2004) llaman 'ambitos de investigación profesional' al conjunto de problemas e ideas relacionadas con algún aspecto de la función docente y de la práctica educativa, susceptible de ser objeto

[5] Como señalan los autores, la respuesta de un profesor al descubrir un error inesperado (lo que supone una situación de contingencia, en al línea de Rowland et al. 2003, 2009) de uno de sus estudiantes requiere un conocimiento de distinta naturaleza al que se posee relativo al tratamiento de los errores usuales de los estudiantes en un tópico determinado. Este matiz permite diferenciar entre SCK y PCK.

[6] Diferenciada en cuanto el conocimiento matemático que se moviliza es especializado, contextualizada en la medida que se considera el contexto y la realidad del aula, de carácter interativo en la medida que considera los tres elementos del triángulo didáctico y matematizada en cuanto pretende evidenciar los procesos de construcción del conocimiento matemático.

de estudio en procesos formativos y que, a su vez, se establecen como núcleos organizadores del currículo del profesor (Azcárate, 2004). La resolución de estos problemas no es una mera aplicación del conocimiento didáctico-matemático ya elaborado, sino un proceso de construcción de dicho conocimiento (Azcárate, 1999).

Climent y Carrillo (2002) se refieren a situación matemática para la formación inicial para referirse a actividades en las que, partiendo del análisis del contenido matemático de Primaria, los estudiantes reflexionan sobre su enseñanza y aprendizaje, para construir su Conocimiento Pedagógico de la Matemática. Flores (1999) utiliza tareas, generalmente de carácter matemático, que permiten profundizar sobre los conocimientos matemáticos y reflexionar sobre aspectos didácticos, empleando diferentes recursos que permiten validar su conocimiento como base para interpretar las situaciones didácticas.

En Blanco y Contreras (2002) se establecen tres niveles, no secuenciados, de tareas para la formación del profesorado de Matemáticas, en función del contenido de la actividad propuesta y de la/las variables de las componentes del conocimiento de los profesores que se pretenda desarrollar (contenido matemático, sobre recursos y materiales, gestión de la práctica, análisis de producciones y/o errores de los alumnos, etc). Las 'tareas didácticas contextualizadas y personalizadas' serían más amplias y estarían relacionadas con actividades matemáticas analizadas en contextos de enseñanza. Estos niveles, vinculados por la relación de inclusión se establecen en función del trabajo sobre contenido matemático, sobre su enseñanza/aprendizaje y sobre análisis y gestión en el aula (figura 1).

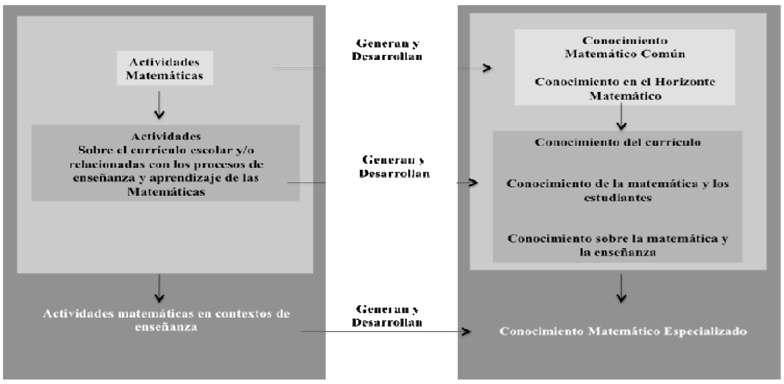


Figura 1. Diferentes niveles de tareas en la formación de profesores de matemáticas. Reformulación de Blanco y Contreras (2002, 106).

Estas tareas deberían tener, al menos, las siguientes características:

- Estar contextualizadas en algunos de los momentos que caracterizan los procesos de enseñanza y aprendizaje, principalmente en situaciones referidas al aula.
- Provocar algún tipo de reacción por parte del EPP que, desde ese momento, se vincule al desarrollo de la actividad, asumiendo básicamente su papel como profesor.
- Servir de vehículo para la construcción o reconstrucción de conocimiento matemático especializado, de conocimiento de la matemática y los estudiantes o de conocimiento de la matemática y la enseñanza, sirviendo además para tomar conciencia de los procesos de su construcción y para permitir que afloren

conceptos matemáticos y conceptos erróneos y concepciones sobre las matemáticas y sobre su E/A.

- Ayudar a la comprensión de las directrices que emanan de las reformas curriculares, para lo que debemos partir una idea didáctica interesante para la educación matemática, para permitir análisis sobre aportaciones elaboradas de educación matemática." (Blanco y Contreras, 2002, 106-107).

3. Profundizando en las situaciones de enseñana/aprendizaje

Vamos a describir un proceso de enseñanza/aprendizaje coherente entre el planteamiento y la resolución de las situaciones de E/A propuestas y el modelo de aprendizaje que proponemos para los estudiantes para profesores (Blanco, 1998); esto es, entre el modelo didáctico del formador y el modelo didáctico subyacente en la propuesta formativa.

En términos generales, asumimos la importancia de partir de la resolución de tareas/problemas/situaciones didácticas y profesionales como actividad necesaria para aprender a enseñar, que se resolverán en un proceso continuo, y no lineal, de acción-reflexión, en el que tendremos en cuenta la diferente naturaleza de los conocimientos *de* y *sobre* las matemáticas[7] y los conocimientos sobre enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Este proceso permitirá a los futuros profesores construir su propio Conocimiento Matemático Especializado y su Conocimiento Didáctico de las Matemáticas.

La identificación de las cuestiones profesionales relevantes y las reflexiones que de ellas se hagan deben procurar la relación entre la realidad docente y el conocimiento teórico (de fundamentos, para Rowland et al, 2005, 2007), tanto de índole matemático como didáctico. El estudio de caso[8] y las producciones de los alumnos y de los profesores suelen ser una buena fuente de información para la elaboración de estas situaciones problemas, y de ello tenemos múltiples ejemplos en las publicaciones al uso.

El proceso de resolución de la situación planteada debería considerarse a partir de un conocimiento y unas actividades que nos permitan compartir/discutir/negociar/evaluar los conocimientos y significados que los estudiantes van generando, derivados de su implicación en el mismo. Y como consecuencia de ello deberían reinterpretar su conocimiento y experiencias relativas al aprendizaje matemático y a 'su' enseñanza/aprendizaje, para provocar un nuevo conocimiento al que se puede acceder, y generar nuevas concepciones y actitudes en relación a las matemáticas escolares y al proceso de enseñanza/aprendizaje de las mismas (en la línea de las aportaciones al modelo de Shulman de Fennema y Franke, 1992).

[7] Reformulación de Ball (1991) de la propuesta ya citada de Schwab (1978).
[8] "Los casos suelen ser narraciones que describen alguna cuestión relativa a procesos de aprendizaje, o situaciones de enseñanza, contextualizadas en un tiempo y lugar particular (por ejemplo una tarea específica, con unos niños y curso determinado)… De esta manera se consideran como "fotografías" de un momento, de una situación de enseñanza-aprendizaje específica. Los casos proporcionan "informes" de profesores de cómo una determinada decisión instruccional ha funcionado, o cómo identificar un problema de aprendizaje." (Llinares, 1994).

Tenemos que recordar que el currículo de matemáticas nos habla de diferentes tipos de conocimiento de matemáticas. Así, encontramos conocimientos que permiten ser codificados en términos de proposiciones y que, por lo tanto, podrían desarrollarse con esquemas de enseñanza más tradicionales. Mientras que, por otra parte, aparecen contenidos y objetivos de carácter procedimental o actitudinal menos considerados y que los profesores tienen que desarrollar y evaluar en su actividad docente. El aprendizaje y evaluación en cada uno de ellos presenta características propias que tiene que considerarse en este proceso de formación de profesores.

Las actividades propuestas deben favorecer la creación de ambientes de aprendizaje, estimando que "en la misma manera en que nosotros consideramos un ambiente para que los estudiantes puedan aprender a explorar Matemáticas, tenemos que pensar que los EPPs no aprenden el "razonamiento pedagógico" porque les hablemos de ello. El ambiente que generemos tiene que ayudar a los EPPs a construir su propio conocimiento profesional” (Lappan y Theulen-Lubienski, 1994, 252).

En Oliveira y Hannula (2008) se asumen tres ideas para tener en cuenta en la formación de profesores, que nosotros consideramos en nuestro modelo. La primera, es actuar sobre sus creencias, muchas de las cuales son implícitas. Por ello, debemos explicitarlas y reflexionar sobre ellas, generando la oportunidad para que el cambio sea posible (en la línea ya citada de Fennema y Franke, 1992). La segunda, es implicar a los estudiantes para profesores en un proceso contructivista (en la línea propuesta por Meredith, 1995). En la tercera, indica que hay que proveer a los EPPs con experiencias de descubrimiento de las matemáticas que les permitan reconsiderar sus creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre su enseñanza y aprendizaje (Oliveira and Hannula, 2008; Fenema y Franke, 1992). En un sentido similar se expresan Corcoles y Valls (2006) al señalar que “las concepciones de los estudiantes para maestro no sólo han de entenderse como una referencia para la realización de una tarea, sino que, en los programas de formación, hay que intentar implicar a los estudiantes en tareas que les permitan explicitar y contrastar sus concepciones” (Corcoles y Valls, 2006, 9).

Estas actividades tendrán como núcleo aspectos matemáticos que los maestros deben poseer y dominar. Y deben permitir su construcción y contextualización.

La resolución de la actividad exigirá el uso de diferentes dimensiones de las componentes de conocimiento profesional (curriculum, recusos, sobre los alumnos, evaluación, etc.) mediante materiales, físicos e intelectuales, que serán suministrados por el formador de profesores y que permitan reflexionar, analizar, diseñar y fundamentar estrategias de intervención docente. Ello, les permitirá aproximarse a los diferentes dominios del conocimiento señalados por Ball et al. (2008) (CCK, SCK, KCS, KCT, conocimiento sobre el horizonte matemático y conocimiento del curriculum) para fundamentar las opciones y decisiones en su resolución. Además, les permitirá dotar de significado a las actividades propuestas, a los procedimientos desarrollados y a las herramientas utilizadas. Este proceso de teorización permitirá a los profesores fundamentar sus decisiones y su conocimiento profesional.

Además, el progreso de la actividad permitirá el desarrollo del razonamiento pedagógico de los EPPs y la explicitación y reconsideración de sus conocimientos y concepciones previas, ampliando o modificando su conocimiento (especialmente CCK y SCK). Los EPPs deberían asumir la construcción del conocimiento como un proceso de reflexión en la acción, que debe considerar diferentes documentos generados desde la investigación en formación de profesores de matemáticas. Asumimos que "el profesor necesita de un marco teórico que le sirva para dar sentido a su experiencia, pues la mera experiencia no sirve para producir aprendizajes" (Climent, 2002, 99). Sin estas referencias teóricas (*foundations*) el conocimiento puede convertirse en un conocimiento mecánico, rutinario y poco sistematizado.

En este proceso de metacognición se pondrán en valor las competencias que se indican para los estudiantes universitarios, y las específicas de la titulación, que se desean alcancen los estudiantes univesitarios y, específicamente, los estudiantes para Maestro.

Recordamos que los estudiantes asumen, consciente o inconscientemente, los modelos de enseñanza/aprendizaje que ellos experimentan, por lo que se hace necesario que esta reflexión se haga de una manera explícita y siguiendo modelos que permitan pensar sobre su propio proceso de aprendizaje o el del grupo y sobre el contexto donde este aprendizaje se ha producido, y ayudarles a verbalizar y reflexionar sobre las principales variables de este proceso (Petrou y Goulding, 2011).

De esta manera, el trabajo desarrollado sentará las base sobre los 'procedimientos que les permitirán continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de su vida' como se señala en referencia a las competencias a adquirir por los estudiantes para Maestro. Y ello sería así porque existiría una coherencia entre el modelo utilizado para resolver estas situaciones de aprendizaje, el contenido que queremos transmitir y la actividad docente que se le espera en el futuro, sentando las bases de su formación permanente.

La toma de decisiones como consecuencia de la resolución de problemas profesionales, requiere establecer un criterio que permita conocer qué es una buena elección, entre diferentes alternativas, y saber gestionarla. Ello implica, además, una valoración de cada alternativa, considerando las características de la misma, las bases sobre las que se sustenta y su influencia en el resultado final.

El proceso terminará a través de una síntesis que debe hacer el formador sobre el proceso seguido, de los diferentes dominios del conocimiento, concretos y generales, utilizados tanto en relación al conocmiento matemático como al conocimiento sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La última parte se relaciona con la evaluación donde se deberá tener en cuenta las diferentes dimensiones del conocimiento que se han abordado.

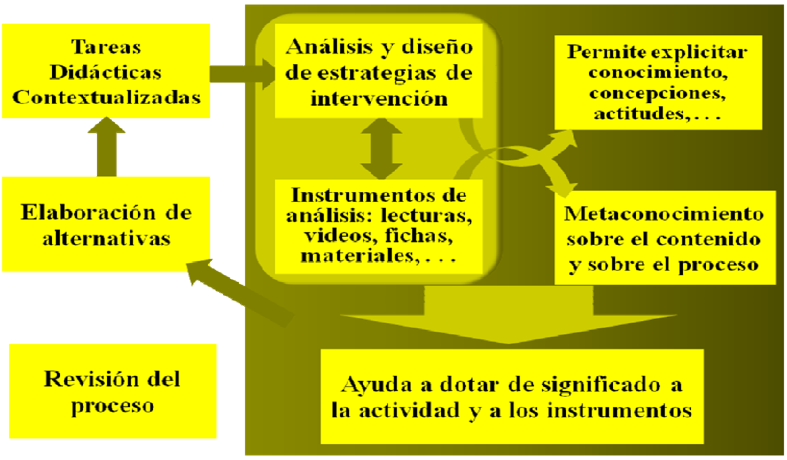


Figura 2. Tareas Didácticas y contextualizadas en la formación de profesores

En definitiva, asumimos que "la formación de profesores debe estar relacionada con la resolución de problemas relacionados con la actividad profesional, completados con una actividad reflexiva y teórica" (Cardeñoso, 1999, 126). De esta manera los futuros profesores serán enseñados de forma parecida a como ellos habrán de enseñar: Explorando, elaborando conjeturas, comunicándose, razonando en un contexto de resolución de problemas (MEC, 1992; NCTM, 1991 a y b). Y procurando una coherencia entre el conocimiento profesional que deseamos enseñar y el conocimiento pedagógico transmitido. Esta propuesta de trabajo implica no sólo una nueva forma de enfocar las actividades en la formación del profesorado, sino también una nueva actitud con la que abordar estas tareas. Específicamente creemos que debemos considerar:

a) Un nuevo papel del estudiante como resolutor de situaciones problemáticas relacionadas con su actividad profesional futura.

b) Un nuevo formato para la presentación de las tareas que deberán estar organizadas en torno a una idea matemática importante que provoque un contenido específico de la Didáctica de la Matemática.

c) Un nuevo papel del profesor en el aula que deberá gestionar las situaciones para alcanzar los objetivos.

d) Una organización diferente del aula, ya que los estudiantes tendrán oportunidad para trabajar en grupo o individualmente, comunicarse, presentar sus conclusiones, argumentarlas y defenderlas.

4. Un ejemplo de tarea didáctica contextualizada y personalizada sobre el concepto de altura y circuncentro de un triángulo y construcción de puntos notables de un triángulo[9].

La actividad docente que presentamos está diseñada para profesores de primaria y secundaria en formación. Hemos procurado extraer los elementos

[9] Este documento reproduce parte del capítulo de Blanco, L.J. y Contreras, L.C. (2002). Un modelo formativo de Maestros de Primaria, en el área de Matemáticas, en el ámbito de la Geometría. En Contreras, L.C. y Blanco, L.J. *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. 93 – 124.

esenciales con los que hemos pretendido desarrollar los dos primeros niveles reflejados en la figura 1.En el ámbito de la geometría, nos parece que es interesante partir de un vocabulario básico sobre nociones geométricas elementales y profundizar en su significado. Se trata de nociones que los estudiantes para profesor han abordado durante su etapa como estudiantes de la educación obligatoria y que, como veremos, es preciso reconstruir y enriquecer desde una perspectiva de profesional docente.

4.1 Ortocentro y circuncentro como pretexto. Dos actividades de primaria y primer curso de la ESO

Los problemas que los estudiantes para Maestro muestran al realizar actividades relacionadas con el concepto de altura de un triángulo (Gutiérrez y Jaime, 1996; Azcárate, 1997), y que hemos comprobado en nuestra experiencia con profesores en formación, nos sugirieron diferentes actividades docentes que nos han permitido trabajar aspectos relacionados con la introducción de conceptos geométricos en educación primaria y en secundaria (Blanco, 1987; Blanco, Cárdenas, Gómez y Caballero, 2011). El análisis de sus respuestas nos ha llevado a transformar estas producciones de los estudiantes en tareas didácticas contextualizadas y personalizadas que utilizamos en nuestras aulas.

Presentamos dos actividades que puedan formar parte de cualquier programación en primer curso de la ESO. La primera actividad (Actividad 1. Figura 3.) viene planteada a partir de la siguiente tarea matemática en la que se consideran los conceptos de altura y ortocentro de un triángulo.

- Definir altura de un triángulo
- Definir el ortocentro de un triángulo.
- Dibujar el ortocentro del siguiente triángulo

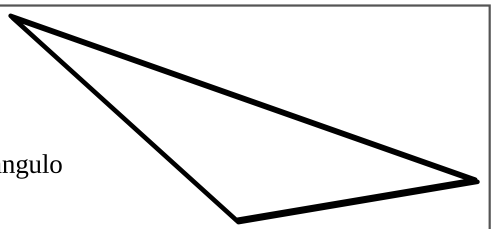


Figura 3. Actividad 1.

La segunda actividad (Actividad 2. Figura 4.), del mismo tipo, sería a partir de los conceptos de mediatriz y circuncentro.

- Definir mediatriz de un triángulo
- Definir el circuncentro de un triángulo.
- Dibujar el circuncentro del siguiente triángulo

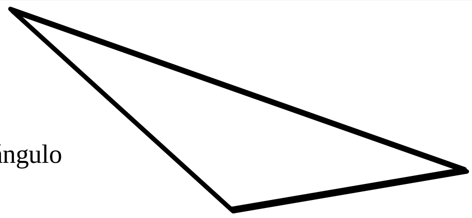


Figura 4. Actividad 2

La situación matemática planteada es una actividad que nos descubre importantes errores de concepto y de procedimiento de los estudiantes para Maestro (EM) en relación al concepto específico de altura y ortocentro de un triángulo (lo que formaría parte de su CCK), pero también en relación al proceso de enseñanza/aprendizaje de los conceptos geométricos (que supondría actuar sobre el SCK, el KCS y el KCT). Esto último es lo que justifica para nosotros la tarea que presentamos.

El análisis de las respuestas de los estudiantes a las actividades demandadas nos presenta una situación contradictoria e interesante. Así, la mayoría de los estudiantes escriben correctamente las definiciones de ‘altura de un triángulo’, de ‘ortocentro’, de ‘mediatriz de un lado de un triángulo’ y de ‘circuncentro’. Sin embargo, las representaciones no suelen ser correctas. Así, dibujan incorrectamente algunas alturas, y consecuentemente, el ortocentro del triángulo de la figura. O dibujan incorrectamente algunas mediatrices, y consecuentemente el circuncentro del triángulo. A este respecto, suelen situar el ortocentro y cicuncentro en el interior del triángulo tal y como nos muestra las siguientes figuras que reproducen respuestas de nuestros estudiantes.

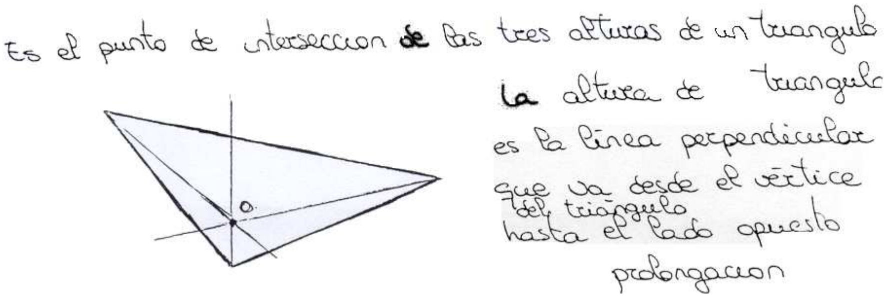


Figura 5. Copia de la respuesta de un Estudiante para Maestro a la actividad 1.

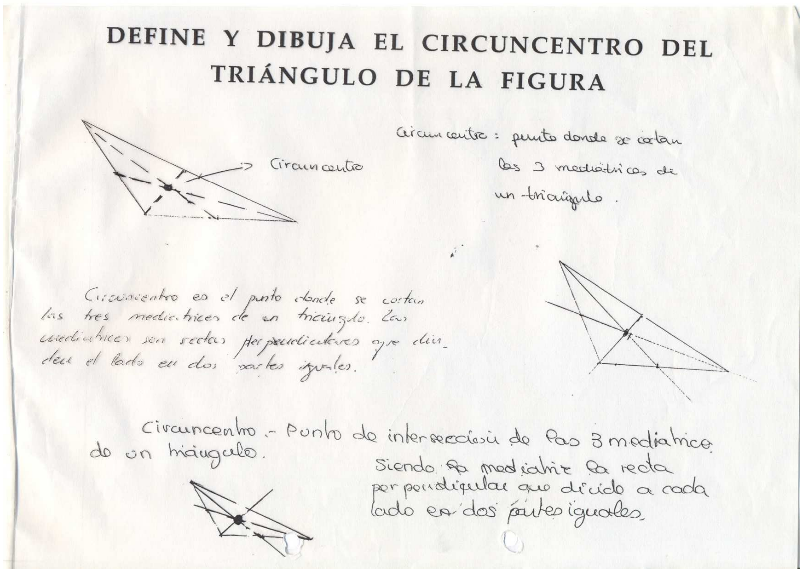


Figura 6. Copia de la respuesta de tres Estudiantes para Maestro a la actividad 2.

Pero más interesante, desde el punto de vista de la investigación en educación matemática, resulta constatar que los EM no son conscientes de la contradicción que presenta sus respuestas hasta que iniciamos, con ellos, un análisis de los conceptos matemáticos implicados y del proceso que han seguido para resolver la actividad. El reconocimiento del error es un punto de partida eficaz, interesante y motivador, para continuar con la actividad y proponer otras más específicas encaminadas a evitar estas lagunas en su conocimiento matemático común, y sobre la enseñanza de la Geometría.

Y es por ello que decidimos transformar estas dos producciones de los estudiantes en una situación problemática que nos puede permitir profundizar en el proceso de adquisición de conceptos geométricos partiendo de su propio proceso de aprendizaje de los conceptos que nos ocupan, facilitando la referencia de que los fututros profesores debieran trabajar en las aulas de formación de manera similar a cómo se espera que realicen su función de profesor de matemáticas. De esta manera, proponemos la siguiente Tarea Didáctica: *“Analizad vuestras repuestas en las actividades anteriores, describiendo las posibles causas de esta situación y proponiendo alternativas didácticas para evitar estos errores.”* En el desarrollo de la tarea tenemos en cuenta algunos pasos que describimos a continuación.

4.2 Análisis del Conocimiento Matemático implicado y marco curricular

En un primer lugar, parece conveniente identificar y recordar los conceptos y procesos matemáticos implicados en las actividades, aún asumiendo que su reconstrucción (conocimiento matemático común) formará parte del proceso de resolución de la tarea didáctica planteada. Además, identificaremos en el currículo las referencias específicas a los contenidos que señalemos (conocimiento del curriculum).

Cuando recordamos la definición de altura o mediatriz de un triángulo, haciendo especial incidencia en la necesidad de la perpendicularidad, es cuando algunos estudiantes comprenden que su representación no es correcta. En este punto, admiten la dificultad que tendrían para hacer una nueva representación que se adecuara a la definición dada.

Esta situación es muy interesante ya que sirve para que los estudiantes para maestro tomen conciencia de la necesidad de profundizar sobre su conocimiento matemático común y muestran deseos comprender porque esa contradicción (conocimiento de las matemáticas y de los estudiantes) y de iniciar un proceso de reflexión sobre su propio proceso de aprendizaje que nos servirá de base para la elaboración consecuente de propuestas de enseñanza (conocimiento de la matemática y para la enseñanza de la matemática). Desde este momento se hace difícil separar las tareas conducentes a la reconstrucción de ese conocimiento matemático, de las reflexiones sobre las causas que han provocado la contradicción en sus respuestas. Es decir, se hace difícil separar la construcción de los tres tipos de conocimiento implicados (ya señalamos el carácter difuso entre las fronteras de las categorías establecidas por Ball et al., 2008).

a) Definición y Concepto

La situación descripta con anterioridad nos da pie para hablar de la complejidad de los conceptos matemáticos (lo que forma parte del SCK y del KCS), de las variables que hay que considerar en su construcción (que implica KCT y conocimiento sobre el horizonte matemático), de la importancia de uso recursos didácticos y de los libros de textos y de una metodología adecuada (conocimiento del curriculum).

De manera inmediata, nos permite evidenciar la falta de conexión entre la definición de un concepto y su representación (SCK y KCS). Y nos recuerda la aportación de Tall y Vinner (1981) al diferenciar dos aspectos importantes en el proceso de adquisición de un concepto: Imagen del concepto y definición del concepto. Memorizamos la definición mientras que la imagen del concepto se construye a partir de diferentes actividades, ejemplos y representaciones.

Somos conscientes que la presentación y la organización de la mayoría de los libros de texto y de buena parte de las clases de matemáticas parecen basarse en la presunción de que los conceptos se adquieren a partir de la definición y de que los estudiantes utilizarán las definiciones en la realización de tareas o la resolución de problemas como forma de activar la mente o para controlar el proceso (Azcárate, 1997). Asumimos que “saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado” (Azcárate, 1997, 29) y que la situación descrita es contradictiroa con una perspectiva constructivista.

Para Vinner (1991), entre definición y concepto existe un conflicto que representa el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales (CCK) y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos (KCS). Skemp (1971) considera los conceptos como objetos puramente mentales, formado a partir de experiencias, situaciones o descripciones que tienen algo en común y que, por un proceso de identificación y abtracción, tomamos conciencia de sus semejanzas. Estas características tienen a permanecer en la memoria como una representación particular de la experiencia.

Su adquisición es más compleja y requiere asociar otras variables a la palabra que designa el concepto: definición, conceptos previos, partículas lógicas que unen o cuantifican los atributos, imagen mental ligada a representaciones externas (símbólica, diagrama, gráfica, etc) e internas, propiedades, reglas de construcción, experiencias desarrolladas asociadas al concepto, aplicaciones, ejemplos (CCK), relación con otros conceptos (horizonte matemático), etc. (Hershkowitz, 1989; Azcárate, 1995, 1997). Los atributos relevantes de un concepto son las características básicas que un objeto debe poseer para ser considerado un ejemplo de ese concepto (Wilson, 1990).

Parece evidente que considerar la adquisición de los *conceptos* como un proceso dinámico que requiere su aplicación a situaciones concretas, que los doten de significado para los estudiantes**.** Las matemáticas tienen sentido cuando los estudiantes llegan a asimilar sus conceptos y a entender sus significados, ejemplos e interpretaciones**.** Para evaluar el grado de desarrollo en la adquisición de un concepto se deberá tener en cuenta los diferentes aspectos que condicionan el aprendizaje del mismo, como la capacidad de reconocer las condiciones y propiedades que lo determinan; de identificar ejemplos validos y no validos; de reconocer sus distintos significados; de aplicarlos a las situaciones que así lo requieran y de conectarlo con otros conceptos (KCS).

b) Esquema y construcción de los conceptos de altura y ortocento

En la construcción del concepto de altura de un triángulo tendremos que incidir, por una parte, en el análisis de los conceptos previos y procesos implicados (lo que supone parte del SCK) y, de otra, asumir que el procedimiento de resolución seguido por los estudiantes está estrechamente relacionado con su etapa como alumnos de la escuela primaria. Es decir, los errores que manifiestan los estudiantes encuentran su base, principalmente, en el proceso de enseñanza/aprendizaje que experimentaron en la escuela primaria, y que están muy arraigados en sus conocimiento y concepciones (KCS). En la figura siguiente mostramos los conceptos previos implicados en el concepto de altura y que serán básicos en la correcta representación del ortocentro (figura 7). Estos conceptos son: Segmento, rectas perpendiculares, vértice de un triángulo, lado de un triángulo, lado opuesto a un vértice, perpendicular a un segmento desde un punto exterior.

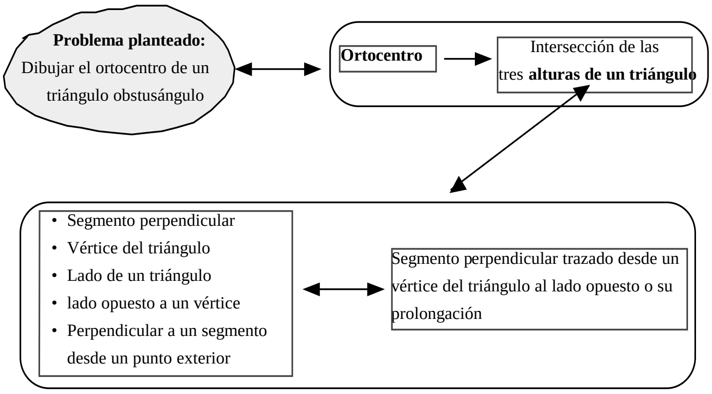


Figura 7. Variables de la definición del concepto de altura y ortocentro.

Teniendo en cuenta el esquema representado en la figura anterior iremos reconociendo cada uno de los conceptos y subconceptos señalados e incidiendo en su adecuada representación[10]. En este punto recordaremos y incidiremos en dos referencias de autores como son los Principios de Variabilidad Matemática y de Variablidad Perceptiva de Dienes (1970) y los niveles de visualización y análisis de Van Hiele (Alsina et al, 1987 y Jaime y Gutiérrez, 1990). Gutiérrez y Jaime (1996) señalan los siguientes subconceptos del concepto altura y actividades asociadas:

1) El subconcepto de perpendicularidad: Trazar una recta perpendicular a otra recta dada.

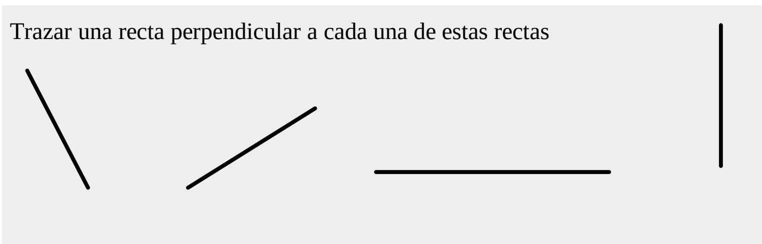


Figura 8. Tarea para trazar una recta perpendicular

[10] Este conocimiento es de diferente naturaleza del conocimiento matemático común (CCK) en la medida que su análisis en partes tiene sentido exclusivamente en situaciones de enseñanza. La discusión sobre diferentes repersentciones forma parte del conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT).

2) El subconcepto de perpendicularidad desde un punto: Trazar la recta perpendicular desde un punto dado hasta un segmento dado o su prolongación.

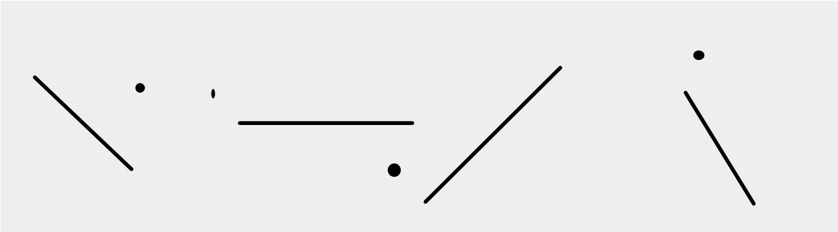


Figura 9. Tarea para trazar una recta perpendicular desde un punto

3) El subconcepto de vértice opuesto: Identificar el vértice de un triángulo opuesto a cierto lado·

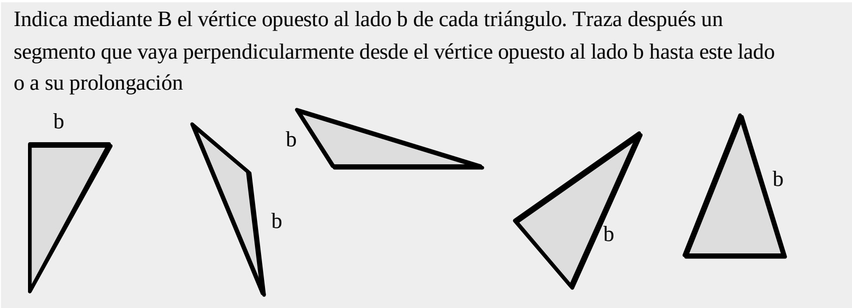


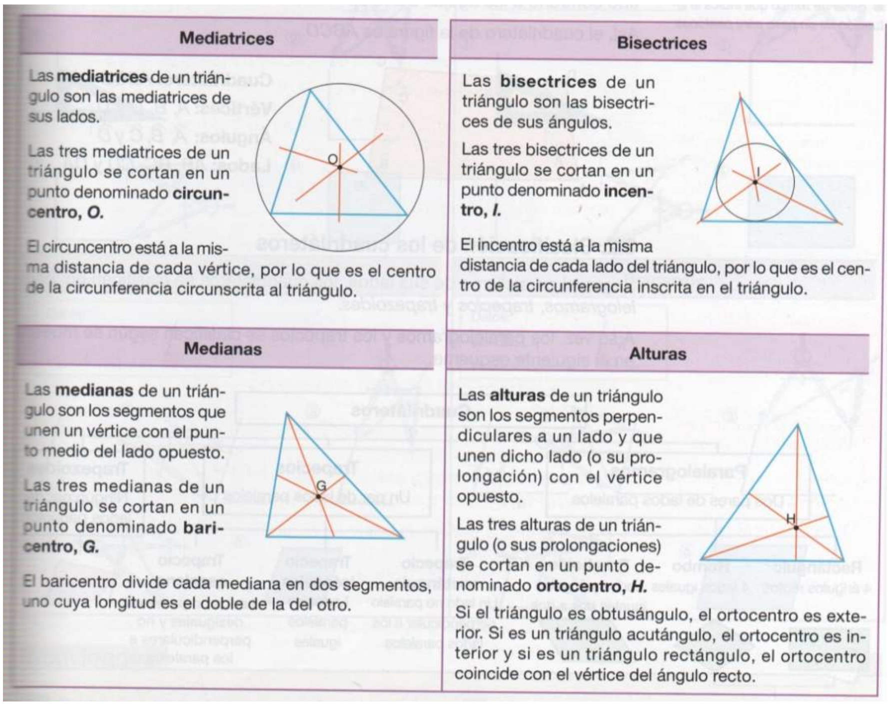
Figura 10. Tarea para trazar las alturas de un triángulo

4) El concepto de altura de un triángulo: Trazar la altura de un triángulo sobre cierto lado. “ (Gutiérrez y Jaime, 1996).

Es en este momento cuando podemos volver a proponer las actividades iniciales en referencia a dibujar el ortocentro y circuncrento de diferentes tirángulos que podremos resolver teniendo en cuenta estas variables que estamos enunciando y el procedimiento seguido. Esta situación nos permite reflexionar sobre la complejidad de los conceptos geométricos, difirenciando entre conceptos y procesos a seguir en la resolución de este tipo de tareas.

c) Análisis de los libros de textos y de la enseñanza recibida

La resolución de la tarea matemática nos permite estar en disposición de analizar los libros de textos para ver cómo reflejan la construción de los conceptos y de los procesos que hemos trabajado (conocimiento del curriculum y conocimiento de las matemáticas y los estudiantes, KCS). En nuestro caso, podemos utilizar textos de primaria o secundaria ya que, en ambos niveles, se reflejan los contenidos que hemos desarrollado, lo que nos permite analizar las diferentes representaciones que utilizan los libros de texto para ilustrar las definiciones o en las actividades que proponen (KCT). Un repaso por diferentes libros de texto no permite observar el abuso de los triángulos apoyados en una base horizontal en los que tanto los puntos notables de un triángulo (ortocentro, circuncentro, baricentro e incentro) siempre están en el interior de la figura, y las consecuencias que ello tiene en la construcción de estos conceptos y sus representacciones (KCS).



Mediatrices

Las **mediatrices** de un triángulo son las mediatrices de sus lados.

Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto denominado **circuncentro, *O*.**

El circuncentro está a la misma distancia de cada vértice, por lo que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Bisectrices

Las **bisectrices** de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos.

Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto denominado **incentro, *I*.**

El incentro está a la misma distancia de cada lado del triángulo, por lo que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Medianas

Las **medianas** de un triángulo son los segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto denominado **baricentro, *G*.**

El baricentro divide cada mediana en dos segmentos, uno cuya longitud es el doble de la del otro.

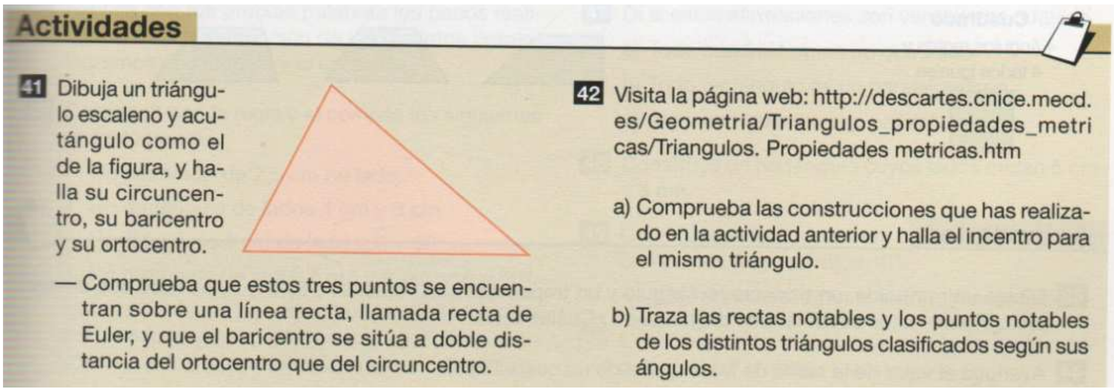
Alturas

Las **alturas** de un triángulo son los segmentos perpendiculares a un lado y que unen dicho lado (o su prolongación) con el vértice opuesto.

Las tres alturas de un triángulo (o sus prolongaciones) se cortan en un punto denominado **ortocentro, *H*.**

Si el triángulo es obtusángulo, el ortocentro es exterior. Si es un triángulo acutángulo, el ortocentro es interior y si es un triángulo rectángulo, el ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto.

Figura 11. Imagen que transmite que los puntos notables de los triángulos están en el interior del mismo



Actividades

41 Dibuja un triángulo escaleno y acutángulo como el de la figura, y halla su circuncentro, su baricentro y su ortocentro.

— Comprueba que estos tres puntos se encuentran sobre una línea recta, llamada recta de Euler, y que el baricentro se sitúa a doble distancia del ortocentro que del circuncentro.

42 Visita la página web: http://descartes.cnice.mecd.es/Geometria/Triangulos_propiedades_metricas/Triangulos. Propiedades metricas.htm

a) Comprueba las construcciones que has realizado en la actividad anterior y halla el incentro para el mismo triángulo.

b) Traza las rectas notables y los puntos notables de los distintos triángulos clasificados según sus ángulos.

Fig. 12. Imagen que reflja la posición estandar en los triángulos de los libros de texto

Al recordar su etapa como alumnos de enseñanza primaria y secundaria los estudiantes reconocen una imagen asociada a la altura de un triángulo, usualmente, acutángulo y apoyado sobre una base horizontal dispuesto de tal manera que la representación de la altura del triángulo quede en el interior del mismo y con un trazo vertical. En algunos libros hemos encontrado otros ejemplos pero siguen manteniendo la base horizontal lo que lleva a identificar el concepto de “la” altura de un triángulo con una línea vertical como se refleja en la actividad de la figura 13

Figura 13. La actividad transmite una imagen de "la" altura del triángulo como un segmento vertical

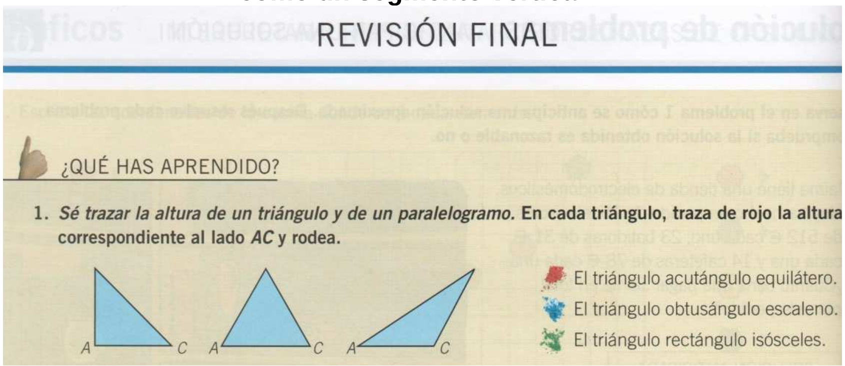


Figura 14. Actividad que habla de "la" altura de un triángulo

El abuso de esta representación, en la que sólo aparece la altura correspondiente al lado horizontal, sugiere la imagen de "la" altura del triángulo como segmento vertical, perpendicular a la base, y único para cada triángulo. La expresión "la altura de un triángulo" que aparece en la figura 14 es coherente con ello. Por otra parte, esta idea tiene su campo de validez en el uso común del vocablo altura como la distancia del punto más alto a la base horizontal, y justificaría que algunos estudiantes resuelvan la siguiente actividad en el sentido que se indica en la misma figura 15.

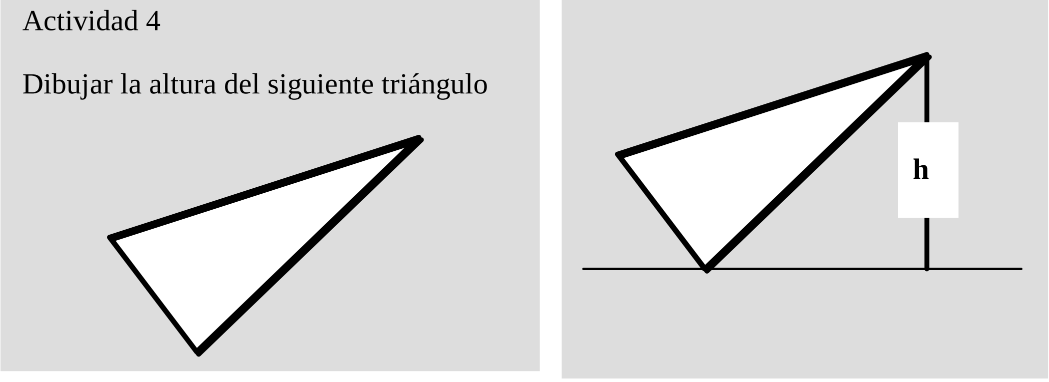


Figura 15. Actividad que refleja confusión en el uso del vocablo altura

d) La enseñanza/aprendizaje de conceptos geométricos en primaria

El análisis de los libros de texto se relaciona con el recuerdo de la experiencia vivida como alumnos de enseñanza obligatoria, lo que nos permite establecer algunos pasos que mostraría una inadecuada enseñanza de la geometría escolar (KCT).

i. Ejemplos prototípicos que visualizaban los diferentes conceptos. Así, los triángulos solían presentarse en la misma posición, las alturas de los triángulos se trazaban, normalmente, sobre triángulos equiláteros y acutángulos apoyados en una base horizontal.

ii. Mayor énfasis en la definición obviando el análisis de los subconceptos y sin darle importancia al hecho de que la visualización produce un efecto más duradero e influyente que el texto oral o escrito. De hecho los EM tienen dificultades para identificar los subconceptos claves implicados en los conceptos de altura de un triángulo, dificultades extensibles a sus futuros extudiantes (KCS).

iii. Las actividades reflejaban un proceso estático y repetitivo sobre ejemplos tipos escogidos casi exclusivamente del libro de texto.

iv. Falta de experiencias concretas o ausencia de utilización de software de geometría dinámica sobre otras situaciones posibles que profundizaran en la comprensión de los conceptos y ayudaran a transferir conocimiento para otros problemas

v. Escasez de recursos y materiales. En la mayoría de los casos, el libro de texto era casi el único recurso según declaraciones de los propios EM.

A partir de estas referencias retomamos las propuestas curriculares (conocimiento curricular) que señalan la necesidad de que los estudiantes participen en la construcción de los conceptos matemáticos de una manera activa y creativa, potenciando la comunicación, la elaboración de conjeturas e investigación. Y ello en un contexto de resolución de problemas que no se corresponde con los puntos anteriores.

e) Otras situaciones similares como actividades de evaluación

Cuando trabajamos la simetría axial se produce una situación similar que puede transformarse en una teara didáctica o en una situación de evaluación según el trabajo programado en el aula.

Así, podemos proponer:

> *"Analizad la siguiente situación para evaluar la resolución de la actividad y proponed justificadamente actividades de enseñanza que evite el error reflejado en la figura."*

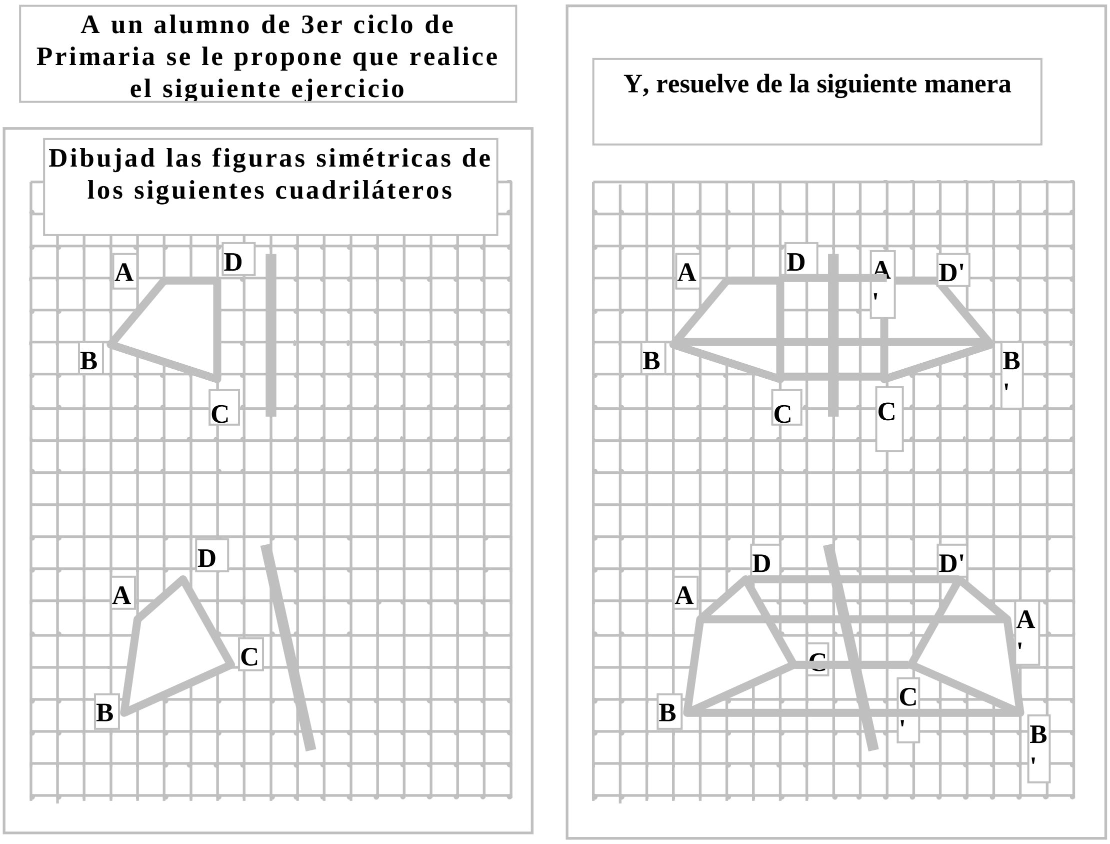


Figura 16. Tarea de evaluación que se les propone a los EM

Otra situación que tiene las mismas raíces de las situaciones anteriores se produce cuando les indicamos a los estudiantes que *identifiquen algunos prismas particulares entre todos los que aparecen en cualquier listado de poliedros*.

Esta actividad nos descubre dificultades de los estudiantes (CCK) para analizar las variables de un concepto debido a la imagen que tienen asociada a casos particulares de los mismos. Asimismo, muestran dificultades para encontrar semejanzas y diferencias o relaciones de inclusión entre conceptos geométricos (horizonte matemático), lo que dificulta profundizar en sus características y reconocer y utilizar diferentes criterios de clasificación.

A pesar de enunciar la definición de prisma y de manejar un diccionario de definiciones de conceptos geométricos, los estudiantes para maestro tienen dificultades para reconocer ejemplos de prismas más allá del prisma recto u oblicuo o el prisma triangular o pentagonal que específicamente aparecen en el diccionario. En la mayoría de los casos no identifican al cubo o al ortoedro como ejemplos particulares de prismas.

5. A modo de síntesis

Hemos pretendido evidenciar nuestra forma de entender el proceso para llegar a ser profesor de Matemáticas desde la óptica de la Educación Matemática. Nuestro punto de partida es un conocimiento específico del contenido matemático, que en el segundo apartado denominábamos conocimiento matemático especializado. No se trata tan sólo de una reconstrucción de conceptos que deberían haber sido correctamente aprendidos durante la educación obligatoria; es también, y sobre todo, una forma distinta de saber y saber hacer matemáticas. No se trata solamente de tomar conciencia de los errores, sino de iniciar un camino que conduzca a una nueva enculturación matemática, una nueva forma de entender qué es saber matemáticas. A veces, las nuevas concepciones que comienzan a generarse en este proceso formativo, parecen llegar tarde para el profesor en formación desde su perspectiva de aprendiz matemático, pero son una fuerte inversión de futuro en su papel como educador matemático.

Es precisamente ese cambio de rol lo que inspira nuestra propuesta. En los dos niveles que se han desarrollado se hacen inmersiones en la práctica escolar, a veces desde el recuerdo del propio aprendizaje. Estas inmersiones se complementan con momentos vinculados con la práctica real, en actividades que suponen la toma de decisiones, como análisis comparativos de textos escolares, diseño de unidades didácticas, o estudio de casos. Pero, sin duda, el reto sigue siendo, la relación entre estas actividades y el practicum, en lo que podría denominarse práctica específica de asignatura, un reto que para que podamos abordarlo pasa por una reforma profunda de los actuales planes de estudio.

Bibliografía

Alsina et al. (1987). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Síntesis: Madrid.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *Uno*, 4, 53-61.

Azcárate, C. (1997) Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo?. *Suma*, 23-30.

Azcárate, P. (1999). Estrategias metodológicas para la formación de Maestros. En Carrillo, J. y Climent, N. *Modelos de formación de maestros en Matemáticas*. Universidad de Huelva. 17-40.

Azcárate, P. (2000). El conocimiento profesional, naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante*, 8(12), 111-138.

Azcárate, P. (2004). Los procesos de formación: en busca de estrategias y recursos. En Castro, E. y De la Torre, E. *Investigación en Educación Matemática. VIIII SEIEM*. 43 – 60

Ball, D.L. (1991). Reserach on teaching mathematics: Making subject-matter knowledge part of the equation: In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching*, (1-48). JAI Press: Greenwich.

Ball, D.L.; Hill, H.C. y Bass, H. (2005). Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *Amercian Educator*, 29(1), 14-46.

Ball, D.L.; Thames, M.H. y Phelps, G. (2008).Content knowledge for teaching: Whats makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Blanco, L. J. y Márquez, L. (1987). En torno al teorema de Pict: Una experiencia de enseñanza de la Geometría. *Números nº 16*. 41 - 53.

Blanco, L.J. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas, de profesores de E.G.B., y estudiantes para profesores.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. Cáceres.

Blanco, L. J. (1998): Otro nivel de aprendizaje: perspectivas y dificultades de aprender a enseñar Matemáticas. *Cultura y Educación, 9*, 77-96.

Blanco, L.J.; Cárdenas, J.A.; Gómez, R. y Caballero, A. (2011). Aprender a enseñar Geometría en Primaria. Una experiencia en la formación de Maestros, Grupo DEPROFE. Badajoz

Blanco, L.J. y Contreras, L.C. (2002). Un modelo formativo de Maestros de Primaria, en el área de Matemáticas, en el ámbito de la Geometría. En L.C. Contreras y L.J. Blanco (Eds.), *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente,* (93-124). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura: Cáceres.

Blanco, L.J.; Mellado, V. y Ruiz, C. (1995). Conocimiento Didáctico del Contenido de Ciencias y Matemáticas y Formación de Profesores. *Revista de Educación*, 307. 427-446.

Burgués, C. y Giménez, J. (2006). Las Trayectorias Hiportéticas de Formación Inicial como instrumento para el análisis del desarrollo profesional. Análisis de un caso en a formación de futuros docentes e primaria. Penalva, M.C.; Escudero, I. y Barba, D. *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de Matemáticas*. 49 - 70

Cardeñoso, J.M. (1999). Sobre el conocimiento profesional, en relación con el área de Didáctica de las matemática, que construimos en las aulas de foración de profesores. En Carrillo, J. y Climent, N. (Eds.), *Modelos de formación de maestros en Matemáticas,* (119-132). Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva.

Cardeñoso, J.M. y Azcárate, P. (2002). Una estrategia de formación de Maestros de Matemáticas, basada en los ámbitos de investigación profesional. En Contreras, L.C. y Blanco, L.J. (2002). *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. 181 – 226.

Carrillo, J. y Climent, N. (1999). *Modelos de formación de maestros en Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso.* Tesis Doctoral. Universidad de Huelva

Climent, N. y Carrillo, J. (2002) Ejemplificación de una propuesta formativa: el uso de situaciones de primaria en la formación inicial. Contreras, L.C. y Blanco, L.J. (2002). *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. 125 – 180

Córcoles, A.C. y Valls, J. (2006). Debates virtuales y concepciones de estudiantes para maestro sobre resolución de problemas. *ZETETIKÉ, v. 14, nº 25*, 7-28.

Dienes, Z.P. (1970). *La construcción de las matemáticas*. Vicens-Vives: Barcelona.

Flores, P. (1999). Conocimiento profesional en el área de Didáctica de las matemática,en el primer curso de la formación de maestros e educación primaria. En J. Carrillo y N. Climent (Eds.), *Modelos de formación de maestros en Matemáticas,* (91-110). Universidad de Huelva: Huelva.

García, M. y Sánchez, V. (2002a). Una propuesta de formación de Maestros desde la educación matemática: adorptando una perspectiva situada. Contreras, L.C. y Blanco, L.J. *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. 59 – 91.

García, M. y Sánchez, V. (2002b). Diseño, puesta en práctica y evaluación de entornos geométricos en la formación inicial de maestros. *Revista de Educación Universitaria nº 19,* 89-100.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial del profesores de Matemáticas de secundaria.* Dpto de Didáctica de las Matemática. Universidad de Granada.

Grossman, P., Wilson, S. y Shulman, L.S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. En M. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher,* (23-36). Pergamon Press: Oxford.

Gutiérrez, A, y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares, y M.V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, (143-170). Comares: Granada.

Hashweh, M.Z. (2005). Teacher pedagogical constructions: A reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 11(3), 273-292.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry-two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación matemática*, (295-384). Alfar: Sevilla.

Lappan, G. y Theule-Lubienski, S. (1994). “Training teachers or educating professiónal?. What are the issues and how are they being resolved?”. Robitaille, D.F. et al. *Selected lectures from of the 7th International Congress on Mathematical Education.* Les presses de L'Université Laval. Sainte-Foy (Canadá) 249-261

Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de Matemáticas*. GID: Sevilla.

Llinares, S. (1994). El profesor de Matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y desarrollo profesional. Santaló, L.A. et al.: *La enseñanza de las Matemáticas en la educación intermedia*. Rialp. Madrid. 296-337.

Llinares, S. (2005). *Relación entre teorías sobreel aprendizaje del profesor de matemáticas y diseño de entornos de aprendizaje*. Conferencia invitada en el CIBEM – Oporto, Juio de 2005.

Marcelo, C. (1993). Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido. En L. Montero y M. Vez (Eds.), *Las didácticas específicas en la formación del profesorado,* (151-186). Tórculo: Santiago.

Mellado, V. y Carracedo, D. (1993). Contribuciones de la filosofía de la ciencia a la didáctica de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias, 11(3),* 331-339.

Meredith, A. (1995). Terry's learning: Some limitations of Shulman's pedagogical content knowledge. *Cambridge Journal of Education*, 25(2), 175-187.

M.E.C. (1992). *Educación Primaria. Matemáticas*. MEC: Madrid.

N.C.T.M. (1991 a). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. SAEM Thales: Sevilla.

N.C.T.M. (1991 b). *Profesional standards for teaching Mathematics*. The Council: Reston, Va.

Oliveira, H. & Hannula, M. S. (2008). Individual prospective Mathematics Teachers. In K. Krainer & T. Wood (eds.). *Participants in Mathematics Teacher Education,* 13 - 34. Rotterdam : Sense Publishers.

Petrou, M. y Goulding, M. (2011). Conceptualisign teachers' mathematical knowledge in teaching. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching,* (9-25). Springer: New York.

Rowland, T. (2005). The Knowledge Quartet: A tool for developing mathematics teaching. En A. Gagatsis (Ed.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education,* (69-81). Cyprus Mathematical Society: Nicosia.

Rowland, T. (2007). Developing knowledge for teaching: A theoretical loop. En S. Close, D. Corcoran y T. Dooley (Eds.), *Proceedings of the 2nd National Conference on Research in Mathematics Education,* (14-27). St. Patrick' College: Dublin.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2003). The Knowledge Quartet. En J. Williams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 23(3), 97-102.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching*. SAGE: Londres.

Sánchez, V & García, M.V. (2009). Task for Primary student teachers: a task of mathematics teacher educators. In Clarke, B.; Grevholm, B. Millman, R. (Edts.)

Tsaks in Primary Mathematics teacher education. Purpose, use and exemplears, 37-49. Springer

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review,Vol. 57,* nº 1. 1-22.

Schwab, J.J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N.J. Wilkof (Eds.), *Science curriculum and liberal education,* (229-272). University of Chicago Press: Chicago.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational studies in mthematics*, 12, 151-169.

Valls, J.; Llinares, S. y Callejo, M.L. (2006). Video-clips y análisis de la enseñanza: construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas. Penalva, M.C.; Escudero, I. y Barba, D. *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de Matemáticas*. 11 – 43.

Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin: Middlesex.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Kluver: Dardrecht.

Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus in Learning Problems in Mathematics*, 12(3-4), 31-47.

Lorenzo J. Blanco Nieto, Catedrático de Universidad de Extremadura, España; lblanco@unex.es

Luis C. Contreras González, Titular de Universidad de Huelva, España; lcarlos@uhu.es; Facultad de ciencias de la Educación, Campus El Carmen.

Ambos autores trabajan sobre aspectos relacionados con la Formación de Profesores de Matemáticas y con la Resolución de Problemas. Fruto de esta colaboración surge, en 2002, el libro *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente,* publicado por la Universidad de Extremadura. Y, en 2011, el capítulo de libro The use and classification of examples in learning the concept of function: A case study. Progress in Education, Vol. 19 de Nova Science Publishers, entre otras publicaciones.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 125-135
ISSN: 1815-0640

Matemática, Física y Química: Un posible cruce de caminos

Mara Olavegogeascoechea, Patricia Leguizamón, Andrea Didoné

Resumen

La propuesta pretende mejorar la comprensión de algunos temas complejos para alumnos de 4º año de la escuela media, como son la química nuclear y los modelos exponenciales. Se abordan estos temas desde diversas disciplinas, desde la química, la física y la matemática, para resolver un problema real, el de averiguar la edad de un determinado objeto religioso, empleando el método de datación de carbono 14. También se busca que los alumnos conozcan la forma en que se construye el conocimiento científico para poder asumir posturas críticas. Se proponen, como cierre y síntesis, algunas actividades que tienden a identificar los conceptos trabajados, a establecer vinculaciones entre ellos y a resolver problemas, en este caso de aplicación. Los problemas son, en la secuencia, un motor que moviliza los conocimientos y les da sentido, pero a las vez, son la oportunidad para reinvertir lo aprendido.

Abstract

La propuesta pretende mejorar la comprensión de algunos temas complejos para alumnos de 4º año de la escuela media, como son la química nuclear y los modelos exponenciales. Se abordan estos temas desde diversas disciplinas, desde la química, la física y la matemática, para resolver un problema real, el de averiguar la edad de un determinado objeto religioso, empleando el método de datación de carbono 14. También se busca que los alumnos conozcan la forma en que se construye el conocimiento científico para poder asumir posturas críticas. Se proponen, como cierre y síntesis, algunas actividades que tienden a identificar los conceptos trabajados, a establecer vinculaciones entre ellos y a resolver problemas, en este caso de aplicación. Los problemas son, en la secuencia, un motor que moviliza los conocimientos y les da sentido, pero a las vez, son la oportunidad para reinvertir lo aprendido

Resumo

La propuesta pretende mejorar la comprensión de algunos temas complejos para alumnos de 4º año de la escuela media, como son la química nuclear y los modelos exponenciales. Se abordan estos temas desde diversas disciplinas, desde la química, la física y la matemática, para resolver un problema real, el de averiguar la edad de un determinado objeto religioso, empleando el método de datación de carbono 14. También se busca que los alumnos conozcan la forma en que se construye el conocimiento científico para poder asumir posturas críticas. Se proponen, como cierre y síntesis, algunas actividades que tienden a identificar los conceptos trabajados, a establecer vinculaciones entre ellos y a resolver problemas, en este caso de aplicación. Los problemas son, en la secuencia, un motor que moviliza los conocimientos y les da sentido, pero a las vez, son la oportunidad para reinvertir lo aprendido

1. Introducción

Nuestra propuesta pretende mejorar la comprensión de algunos temas complejos para alumnos de 4º año de la escuela media, como son la química nuclear y los modelos exponenciales.

Decidimos abordar estos temas desde diversas disciplinas, respetando la didáctica específica de cada una. Desde la química y la física, nuestra secuencia plantea comenzar trabajando los conceptos de isótopos, radioisótopos, rayos alfa, beta y gama, familia de decaimiento, para luego poder aplicar estos conocimientos en la interpretación del concepto de vida media y en la resolución de problemas reales, como el de averiguar la edad de un determinado objeto religioso, empleando el método de datación de carbono 14.

Además se intenta, que los alumnos conozcan la forma en que se construye el conocimiento científico para poder asumir posturas críticas.

Este camino se cruza con las nociones matemáticas que intervienen, y en este caso el sentido del recorrido es inverso. Las nociones matemáticas surgen a partir de la experiencia como un modelo explicativo de la realidad, que al poder expresarse en términos de una ecuación, permite predecir determinado comportamiento. Por otra parte, se propone analizar los resultados de la experiencia en términos probabilísticos para comprender que los sucesos son frecuentemente aleatorios. Luego este modelo exponencial se convierte en objeto de estudio, pero ya descontexualizado y analizado desde una mirada matemática, contemplando todas sus representaciones.

A fin de que los alumnos puedan realizar un proceso metacognitivo, se propone como cierre y síntesis algunas actividades que tienden a identificar los conceptos trabajados, a establecer vinculaciones entre ellos y a resolver problemas, en este caso de aplicación. Los problemas son, en la secuencia, un motor que moviliza los conocimientos y les da sentido, pero a las vez, son la oportunidad para reinvertir lo aprendido.

Esta experiencia está pensada para alumnos de 4º año del Instituto Nuestra Señora de Fátima**,** escuela pública de gestión privada dependiente del Obispado del Alto Valle, con orientación en idiomas e informática. Estos estudiantes tienen 4 horas semanales de informática, lo que permite desarrollar en este espacio, el uso de las herramientas tecnológicas que proponemos como recursos. Se requiere que tengan algunos conocimientos matemáticos como propiedades de la potenciación de números reales con exponente racional y habilidades para representar gráficamente un conjunto de valores dados. En el caso de química deberán tener el concepto de elemento químico, estructura atómica, número atómico, número másico y principio de conservación de masa. Deberán poder dibujar e interpretar distintos modelos atómicos y tener dominio de la lectura de la tabla periódica.

2. Fundamentación

Nuestra propuesta de trabajo apunta a mejorar la comprensión de algunos temas complejos para alumnos de 4º año, como son la desintegración radiactiva y los modelos exponenciales. Decidimos abordar estos temas desde distintas disciplinas, en algunos momentos en forma conjunta y en otros por separado, respetando la especificidad de cada una de las asignaturas involucradas: la matemática, la física y la química, buscando analizar la realidad de una manera holística, viendo las partes en el todo y el todo en cada una de las partes.

¿Por qué elegimos abordar la temática de datación por radioisótopos como eje de la propuesta? En primer lugar porque consideramos que la radiación es un tema de actualidad que nos permite vincular algunos conceptos que se desarrollan en matemática, en física y en química de la escuela media. Por otra parte, es un tema que llama la atención al ciudadano común y en cierta medida lo inquieta, dado que se habla de radiación en temas muy diversos. Se la suele vincular a estudios y tratamientos médicos, a la generación de energía, a la actividad bélica, a la construcción de armas nucleares, a accidentes en plantas donde funcionan reactores nucleares, así como también a la reconstrucción del pasado a partir de los datos que pueden brindar algunos restos arqueológicos. Por esta razón, el problema central que presentamos, está vinculado al método de datación de carbono 14.

Nos propusimos abordar esta secuencia de enseñanza desde las cuatro dimensiones de la comprensión, teniendo en cuenta el contenido, el método, el propósito y las formas de comunicación. Intentamos entonces, que estas metas de comprensión obraran como hilos conductores de nuestra planificación para lograr una propuesta balanceada.

Respecto del contenido, esperamos que los alumnos trasciendan las intuiciones y puedan moverse flexiblemente entre ejemplos y generalizaciones, dentro de una red más amplia de conceptos interrelacionados para poder lograr una postura crítica frente a la situación planteada. Esta red de contenidos se irá construyendo a lo largo de la secuencia partiendo de nociones puramente químicas y físicas para entrecruzarse con conceptos matemáticos.

La dimensión del método se contempla por cuanto nos proponemos promover “un sano escepticismo” por la información que recibimos. Los alumnos deberán cuestionar la información sobre la veracidad de la “sábana santa” hallada y moverse entre lo que conocen y se dice, como así también evaluar si la técnica empleada para validar dicha información es aceptable o no, es decir, evaluar el método, sus alcances y limitaciones.

En cuanto a la dimensión del propósito, pretendemos que, el estudiante, explique, reinterprete y opere con datos que pueden ser reales. Pero también esperamos que pueda trascender este plano, interpretándolo y modelizándolo, para estar en mejores condiciones de responder, en parte, a algunos de estos interrogantes: ¿Por qué interesa estudiar modelos matemáticos? ¿Se comporta el mundo, la naturaleza, las sustancias aproximándose a estos modelos? ¿Es seguro que esto suceda, o es probable?

Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo (matemático) de la realidad que queremos estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos para contestar a las cuestiones inicialmente planteadas. Entendemos a *la modelización* como parte del trabajo matemático, en el que entran en juego las traducciones entre distintas representaciones de ese modelo. Ésta constituirá el centro de la actividad matemática planteada, debiendo asimismo entender a los modelos en términos probabilísticos. Consideramos que el realizar concretamente una experiencia con una caja y fichas que simulan lo que sucede a nivel de los átomos de sustancias radiactivas, colocará a los alumnos en una mejor situación, para comprender el concepto de vida media.

Y por último, la forma de comunicar será también considerada, ya que deberán dar cuenta de la apropiación que hicieron del conocimiento. Esperamos que en la presentación que les solicitamos como una de las tareas de esta propuesta, sean capaces de encontrar argumentos sólidos para responder a la problemática inicial, que puedan expresarse correctamente, que hayan incorporado vocabulario propio de la disciplina y que puedan organizar con claridad las ideas para enunciar conclusiones. Es posible que para algunos alumnos esta propuesta se vea como una tarea compleja, ya que deben integrar conceptos de varias disciplinas y finalmente, tomar una postura crítica respecto del problema planteado inicialmente. No estamos seguras de que todos los alumnos puedan lograr este nivel de comprensión, pero la propuesta permite, en la interacción con sus compañeros, mejorarla. Consideramos que, aunque no todos los alumnos lo logren al mismo tiempo, vale la pena el esfuerzo de intentarlo.

Respecto del lugar que ocupan los problemas, pensamos que en algunas partes, éstos son los que movilizan los conocimientos a estudiar, ya que generan un verdadero desafío, debiendo los alumnos reconocer los datos, buscar si son suficientes o no, encontrar modelos matemáticos que permitan resolverlos y luego arribar a una conclusión. Pero en otros momentos de la secuencia los problemas ocupan un lugar diferente y constituyen instancias de reinversión de lo aprendido, de fijación o aplicación de los conceptos involucrados para poder ser estudiados. Creemos, como dice Chevellard, que el estudio es "*hoy el eslabón perdido entre una enseñanza que parece querer controlar todo el proceso didáctico y un aprendizaje cada vez más debilitado por la exigencia que se produzca como consecuencia, casi instantánea, de la enseñanza"* (Chevellard, Bosch, Gascón, 1997). Por esta razón consideramos que tenemos que asumir, como parte de nuestra secuencia, momentos de estudio de los temas, propiedades y conceptos que fueron tratados a lo largo de la misma, siendo conscientes de que podemos mejorar los aprendizajes, pero que, en última instancia el proceso de estudio es responsabilidad del alumno. Devolverle al alumno sus responsabilidades es parte de la tarea docente, el profesor puede sólo ayudar al alumno a estudiar, pero no puede estudiar, ni mucho menos, aprender en su lugar.

Una cuestión que nos resulta interesante de destacar es que al entender que la matemática, la química y la física son un producto cultural y social, intentamos que cada una de estas disciplinas, se vivan en la secuencia de esta manera, descubriendo a los hombre de ciencia que hay detrás de las ideas y entendiendo al conocimiento como una construcción histórica y social con sus límites y alcances.

Por otra parte, queremos señalar que se intentó respetar la didáctica específica de cada una de las disciplinas. Desde la perspectiva de la resolución de problemas, consideramos que el problema de determinar la edad de la sábana santa, puede desafiar a los alumnos, generarle preguntas, movilizar sus conocimientos, producir intercambios entre sus compañeros e iniciar nuevas búsquedas. Creemos que es posible que los alumnos realicen un trabajo intelectual de este tipo, que les permita sentir que sus ideas son valoradas. De esta manera estaremos contribuyendo a entender que el principal objetivo de la escuela no es el de acreditar aprendizaje, sino el de hacer de ella un lugar de producción de conocimientos. Este modo de ver nuestra tarea docente, nos posiciona en un lugar muy distinto al del control de los aprendizajes, mucho más ligado al de promover confianza en las posibilidades de los alumnos y en el de colaborar para entender a la escuela como una comunidad en donde todos aprendemos.

3. Descripción de la propuesta

La secuencia consta de cinco partes que se detallan a continuación, en cada una de ellas se indican objetivos, contenidos y actividades.

3.1. Parte 1:

Esta es un primer acercamiento a los conceptos de desintegración radiactiva, tipos de radiación y aplicaciones

Objetivos:

- Lograr describir, explicar y representar la transmutación de elementos químicos radiactivos.
- Extender el contexto al campo de la medicina, alimentación, investigación y obtención de energía.

Contenidos:

Isótopos, radioisótopos, rayos alfa, beta y gama, familia de decaimiento.

Actividades:

- Torbellino de ideas: Qué me sugiere la palabra “nuclear.”
- Proyección de video: “Nuestro amigo el átomo”, Walt Disney.
- Explicación, utilizando modelo de Bohr, del significado de transmutación a partir de la emisión de rayos alfa, beta o gama.
- Escritura de transmutaciones de distintos elementos en lenguaje químico.
- Guía de lectura bibliográfica: marco sociohistórico.
- Charla con profesionales del área de la salud encargados de las bombas de cobalto de la zona y/o profesionales dedicados a la investigación de trazadores de tritio en la industria petrolera.
- Elaboración de una red o mapa conceptual vinculando las ideas planteadas inicialmente en el torbellino con los conceptos trabajados.

3.2. Parte 2:

Se realiza en esta parte una experiencia sobre vida media.

Objetivos:

- Realizar una experiencia que simule la desintegración radiactiva.
- Comprender a ésta en términos probabilísticos.
- Interpretar un modelo matemático que permita predecir qué ocurre con el total de los átomos de una sustancia radiactiva cuando emite radiación y transmutan a un elemento diferente.
- Establecer una analogía entre el concepto de vida media y la experiencia realizada.

Contenidos:

Probabilidad de sucesos simples. Ley de los grandes números. Modelos matemáticos: modelo exponencial. Vida media.

Actividad: Experiencia de vida media (ver detalle en anexo)
Se propone a los alumnos realizar una experiencia con fichas que simulan los átomos de un isótopo radiactivo. Al colocarlas en una caja cerrada y agitarla, la probabilidad de que éstas se inviertan, se aproxima a la idea de vida media, ya que es probable que, la mitad de las fichas muestren su otra cara y esto sería lo que ocurre con el total de los átomos de algunos radioisótopos.
Por otra parte, es esperable que con más observaciones la probabilidad de que las fichas se inviertan sea más cercana a la probabilidad teórica. Esto será objeto de análisis a partir de comparar los valores obtenidos por un grupo en particular y los de toda la clase. A partir de estas comparaciones y de la representación gráfica de los valores obtenidos, esperamos que los alumnos puedan identificar la fórmula que mejor expresa la relación entre las variables que intervienen y de este modo introducir la ecuación de una función exponencial.

3.3. Parte 3:

En esta parte se resuelve un problema en donde se cruzan los caminos de la matemática, la física y la química

Objetivos:

- Vincular los conceptos de radioisótopos, vida media y desintegración radiactiva con los hombres de ciencia, sus ideas y los problemas que ellos intentan resolver.
- Discutir y reflexionar sobre los alcances y límites que tiene la ciencia y sus métodos.
- Comunicar las conclusiones con rigor científico.

Contenidos:

Métodos de datación por carbono 14.Marco histórico y social. Alcances y límites del método.

Actividad:

Resolución de una situación problemática planteada a partir de la WebQuest, (que se puede encontrar en http://www.zunal/webquest.php?w=65985) que se titula "Carbono 14: un cronómetro del pasado".

En esta actividad se plantea a los alumnos, evaluar la posibilidad de que la sábana de lino, que se encuentra como reliquia religiosa en la catedral de Turín, corresponda al manto que envolvió el cuerpo de Jesucristo luego de su muerte, a partir del método de carbono 14.

Para ello se les da como referencia la relación de masa carbono 12/carbono14 que se ha detectado en la misma. El problema está planteado como un rompecabezas, ya que para poder llegar a una respuesta, deberán en primer lugar, detectar cuál es el problema, con qué datos cuentan, cuáles les faltan, qué conceptos deben conocer para poder evaluar la relación entre datos e incógnitas.

En los recursos de la WebQuest, cuentan con videos, material bibliográfico, reportes periodísticos, que les facilitarán armar este rompecabezas y así resolver el problema. A partir de analizarlos podrán llegar a una conclusión que deberán plasmar en una presentación grupal para luego exponer a toda la clase y defender críticamente.

Esperamos que puedan comprender, a partir de esta actividad, que todo trabajo científico, así como los métodos que se emplean están enmarcados en un momento histórico y social, tienen un determinado campo de acción y limitaciones.

3.4. Parte 4

Estudio de la función exponencial

Objetivos:

- Representar gráficamente funciones del tipo $y=k.a^x$
- Comparar distintas gráficas según la variación de los parámetros k y a.
- Explicar las vinculaciones entre las representaciones gráficas y las fórmulas.
- Predecir el comportamiento de una función exponencial a partir del análisis de la misma.
- Observar distintos gráficos y encontrar la fórmula de la función correspondiente.

Contenidos:

Función exponencial de la forma $y= a^x$ y de la forma $y= k.a^x$ .Variación de los parámetros k y a, puntos de intersección con los ejes coordenados. Dominio e imagen.

Actividades:

Antes de comenzar con las actividades de interpretación de gráficos de funciones exponenciales, se propone proyectar el capítulo 4 de "*Alterados por Pi*", en el cual Adrián Paenza explica la noción de crecimiento exponencial.
Para iniciar a los alumnos en el análisis de este tipo de funciones y familiarizarse con el uso de geogebra, se realizarán algunas de las actividades planteadas en las "Fichas para la modalidad 1 a 1" del programa Inclusión digital, como por ejemplo graficar las sucesión de potencias de 2, para visualizar sus valores siempre positivos, su crecimiento permanente y la rapidez con la que se elevan los puntos a medida que crecen los exponentes.
Luego se propone realizar la actividad 2 propuesta en esta ficha. En esta actividad podrán explorar distintas funciones exponenciales empleando los deslizadores. A medida que vayan modificando alguno de los parámetros que caracterizan a la función exponencial, podrán ir respondiendo a los interrogantes que allí se plantean para enunciar a continuación algunas conclusiones al respecto.
Como cierre se sugiere visitar algunos de los sitios de interés recomendados en esta ficha, para compartir con el resto de la clase algunas aplicaciones de la función exponencial, como así también resolver algunos ejercicios de aplicación.
http://inclusiondigital.gov.ar/recursos-y-estrategias/ficha-para-la-modalidad-1-a-1-funcion-exponencial-parte-i/

3.5. Parte 5:

Esla etapa del cierre y la síntesis

Objetivos:

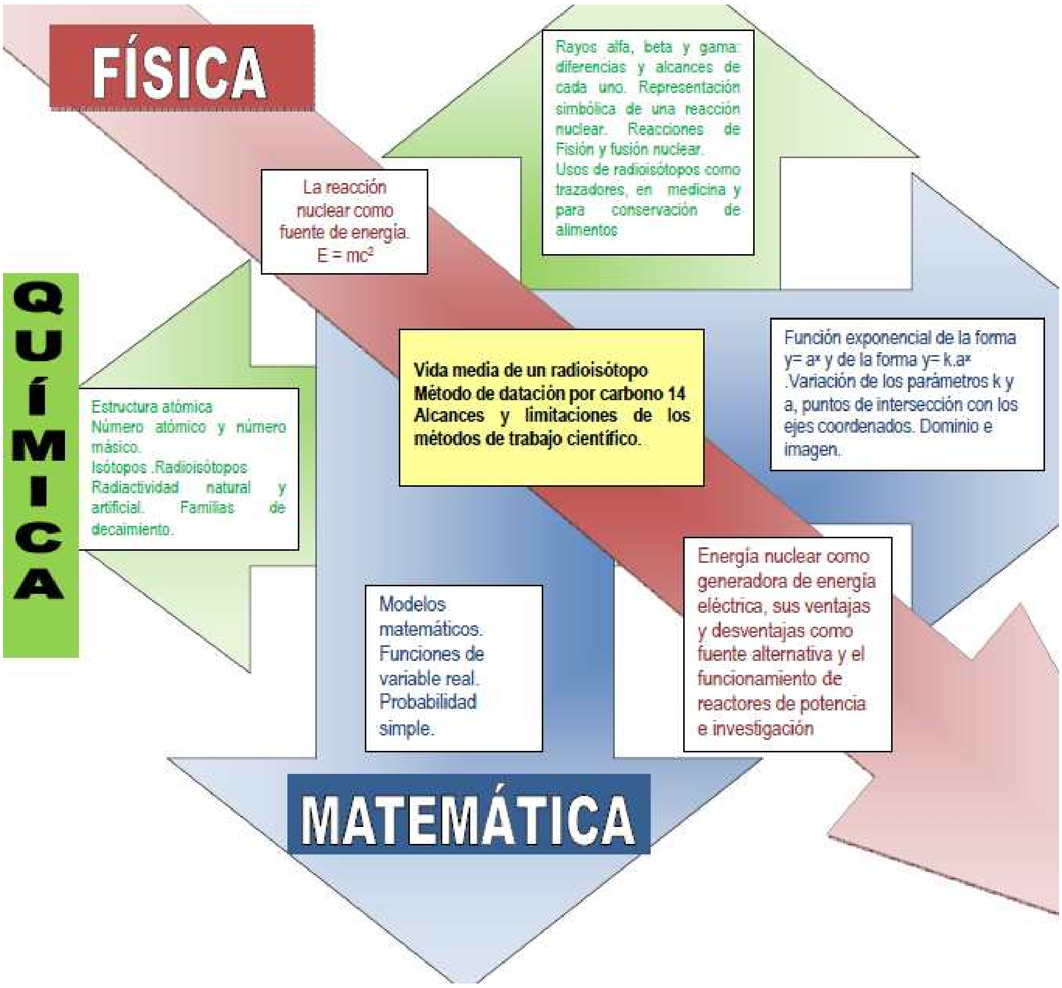
A partir de los conceptos trabajados en la secuencia:

- Aplicarlos en la resolución de situaciones problemáticas.
- Establecer vinculaciones entre ellos.
- Tomar conciencia de lo aprendido.

Actividades:

- Resolución de algunas situaciones problemáticas planteadas en la sección Quiz de la WebQuest.
- Resolución de una autoevaluación empleando un software libre, Jclick.
- Elaboración de una red o mapa conceptual empleando un software libre (Cmap tool)

El cuadro que se presenta a continuación, intenta mostrar los contenidos que serán desarrollados en cada uno de los espacios curriculares:



4. Evaluación

En primer lugar consideramos necesario aclarar que adherimos a una visión de la evaluación como proceso que permite reorientar lo planificado, distinguiendo los momentos en que la evaluación tendrá carácter de acreditación.

Entendiendo a su vez que la planificación es un instrumento flexible y que la misma necesitará ajustes y modificaciones a medida que se vayan implementando las distintas etapas en la que fue organizada.

Esta evaluación continua, cuyos datos se obtendrán a partir de la observación del desempeño de los alumnos, de la identificación y registro de los obstáculos que se presenten, exigirá algunos cambios en las actividades que por un lado faciliten las tareas siguientes y que por el otro reafirmen los conceptos y nociones que sean necesarias para las etapas posteriores.

La evaluación como acreditación tendrá carácter individual y/o grupal e intentará proporcionar al alumno el estado de avance de su trabajo y la valoración que el docente realiza del mismo. Analizando en detalle el modo de evaluar la secuencia, nos resulta muy difícil contemplar todos los aspectos que pueden ser evaluados. Cuando planteamos trabajos grupales estamos intentando que aprendan a trabajar con otros, a respetar ideas, a escucharse, a colaborar, a asumir distintos roles y estos aprendizajes son a largo plazo. La observación y la escucha atenta del desempeño de los grupos nos brindará la información para poder intervenir reorientando la tarea.

Los instrumentos a emplear serán variados de acuerdo a lo que se pretende evaluar, se presenta sucintamente a continuación según las distintas partes consideradas en el apartado anterior:

Parte 1: La construcción de la red que relaciona ideas previas, evaluación formal escrita con ejercicios donde deba reconocer, completar, justificar, definir los conceptos trabajados, preguntas antes y después de la charla con profesionales.

Parte 2: La actividad experimental plantea otros objetivos relacionados con lo procedimental y actitudinal vinculados con lo grupal más que con lo individual, por lo que el instrumento de evaluación será una planilla de observación del trabajo realizado. Analizar un artículo periodístico sobre vida media**.**

Parte 3:Se detalla en la Web Quest, en http://www.zunal/webquest.php?w=65985

Parte 4: Evaluación formal escrita con ejercicios donde deba reconocer, completar, justificar, definir los conceptos trabajados.

Parte 5: Elaboración de una red conceptual y resolución de problemas.

Bibliografía

Chevellard,Y., Bosch, M., Gascón,J..(1997) *Estudiar matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona, España. Editorial Horsori.

Claro Huneeus, F. (1995) *A la sombra del asombro*. Santiago de Chile , Chile, Editorial Andrés Bello.

Escanola, H. *QuimCom, Quimica en comunidad* Naucalpan, México. Editorial Addison Wesley Longman, 1998.

Hill J., Kolb, D. (1999) *Química para el nuevo milenio*. Naucalpan, México. Editorial Prentice Hall.

Sadosky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos, desafíos*. Buenos Aires, Argentina. Editorial Libros del Zorzal,

Segal, S, Giuliani, D. (2008) *Modelización matemática en el aula. Posibilidades y necesidades.* Bs As, Argentina. Editorial Libros del Zorzal.

Andrea Didoné: es Profesora de Matemática y Licenciada en Gestión Educativa. Dicta clases de Didáctica de la Matemática en el profesorado de Nivel Inicial y Primario del Instituto Superior de Formación Docente Nº 6 y es miembro del equipo del Centro Único de Apoyo Pedagógico e Investigación del Consejo Provincial de Educación de Neuquén, Argentina. **andrea.didone@yahoo.com.ar**

Patricia Leguizamón: es Profesora de Matemática, Física y Cosmografía. Dicta clases en el nivel medio en el CET Nº9 de la ciudad de Cipolletti, Río Negro, Argentina

Mara Olavegogeascoechea: es Ingeniera Industrial con orientación Química y Profesora de Química. Dicta clases en el Nivel Medio del Instituto Nuestra Señora de Fátima de la ciudad de Cipolletti, Río Negro y es ayudante del Departamento Física en la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Comahue, Argentina. **maraolavego@gmail.com**

Anexo

Actividad experimental para trabajar el concepto de vida media

Los materiales necesarios son: 80 fichas o chapitas con una de sus caras marcadas con una cruz y una caja con tapa.

En esta actividad vas a simular la desintegración radioactiva con fichas o chapitas las cuales vas a marcar con una cruz en una de sus caras. Nos van a servir para descubrir la relación entre el paso del tiempo y el número de núcleos radiactivos que se desintegran.

Supón que una ficha con la cara cruz hacia arriba representa un átomo de un isótopo radiactivo de un determinado elemento, la desintegración de ese isótopo va a estar representada por una ficha con la cruz hacia abajo.

Procedimiento

1) Coloca las 80 fichas en la caja con la cruz hacia arriba, representará la composición inicial de nuestro radioisótopo.
2) Cierra la caja y sacúdela vigorosamente.
3) Antes de abrir la caja: ¿Qué piensas que sucedió con las fichas?
4) Abre la caja. Retira de la misma todas las fichas que se han invertido. Registra este dato en la tabla de más abajo.
5) Repite los pasos 2 y 4, tres veces. Al finalizar deberás tener cinco números en la segunda columna de tu tabla de datos.
6) De acuerdo con las indicaciones de tu profesor, concentra los datos de toda la clase en la tercera columna.
7) Utiliza tus propios datos y los datos concentrados de toda la clase para elaborar una gráfica representando en el eje de abscisas el número de veces que agitaste la caja y en el eje de ordenadas el número de fichas que se invierten.

Número de veces que agitas la caja	Número de fichas que se invierten	Datos de toda la clase
0		
1		
2		
3		
4		

Para pensar después de la experiencia

1) Imagina la curva que une los puntos obtenidos en cada caso. ¿Qué forma tienen? ¿Crecen o decrecen?

2) Analiza la analogía entre la experiencia y la desintegración radiactiva, ordenando los pares correspondientes de tarjetas según lo que a tu criterio representan:

Átomo	Elemento X	Elemento Y	Condiciones	Límites del sistema
Agitar la caja	La caja	Cara marcada	Fichas	Cara no marcada

3) Llamamos **vida media** al tiempo necesario para que la cantidad de átomos de una muestra de material radiactivo **se desintegre a la mitad**. En nuestra analogía, cada vez que agitaste la caja representó una vida media. Observa ambas tablas y responde: ¿Cuál conjunto de datos ofrece la demostración más convincente de la idea de vida media? ¿Por qué crees que ocurre esto?

Esto se conoce como **ley de los grandes números**. Esta ley afirma que cuando se aumenta la cantidad de observaciones de un experimento aleatorio, la frecuencia relativa de un suceso toma valores que se aproximan cada vez más a la probabilidad de ese suceso. Es decir que la **probabilidad experimental y la probabilidad teórica**, si puede calcularse, **tienden a coincidir cuando el número de experimentos es grande.**

Las curvas que construiste en esta actividad se aplican a la desintegración de los isótopos radiactivos, pero la diferencia importante es que **la vida media es especial para cada isótopo**. Una vida media puede ser de millones de años, o de unas cuantas fracciones de segundo.

Resuelve las siguientes situaciones:

1) ¿Cuántos núcleos quedarán sin desintegrar, de una muestra de 600 núcleos, luego de tres vidas medias?

2) Si restan 175 núcleos de una muestra original de 2800 núcleos, ¿cuántas vidas medias tendrán que haber transcurrido?

3) ¿Cuántas vidas medias serían necesarias para que un mol de átomos radiactivos cualesquiera ($6{,}28 \times 10^{23}$ átomos) se desintegrara hasta quedar el 6,25% ($0{,}376 \times 10^{23}$ átomos) del número original de átomos?

4) Teniendo en cuenta los problemas que resolviste anteriormente, ¿cuál de las siguientes expresiones matemáticas expresa la relación existente entre el número de átomos de una muestra (n_0) y el número de átomos sin desintegrar (n_p) después de un periodo (p)?:

a) $n_p = n_0 \cdot 2^p$ b) $n_p = (½)^p \cdot n_0$ c) $n_p = n_0 - (½)^p$

Esta fórmula que señalaste, corresponde a una **función exponencial.**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 137-150
ISSN: 1815-0640

Dinamización Matemática:
Soy el rectángulo. ¡Nadie me quiere!

Luis Balbuena Castellano

Resumen

Este trabajo recoge bastante fielmente lo que he dictado a un humano. Soy el rectángulo y he querido presentarles a algunos de mis parientes más populares. Y me he decidido a hacerlo porque, aunque hay muchas figuras geométricas en nuestro entorno (hasta el punto de que se ha llegado a decir que la naturaleza está escrita con el lenguaje de la geometría), a nosotros se nos tiene en poca estima y no logro entenderlo ¡porque mira que, además de abundantes, somos guapos! Espero que si llegas a leer hasta el final, termines cambiando tu opinión sobre nosotros, los rectángulos.

Abstract

This piece of work describes accurately what I've dictated to a human being. I am the rectangle and I wanted to introduce you to some of my most popular relatives. I have decided to do it because, although there are many geometric figures around us (it is said that Nature is written with the language of geometry), people don't appreciate us and I don't understand it because we are abundant but also handsome. If you read to the end, I hope you change your opinion about us, the rectangles.

Resumo

Este trabalho recolhe bastante fielmente o que ditei a um humano. Sou o rectángulo e quis apresentar-lhes a alguns de meus parentes mais populares E decidi-me a fazê-lo porque, ainda que há muitas figuras geométricas em nosso meio (até o ponto de que se chegou a dizer que a natureza está escrita com a linguagem da geometría), a nós se nos tem em pouca estima e não consigo o entender ¡porque olha que, além de abundantes, somos guapos! Espero que se chegas a ler até o final, termines mudando tua opinião sobre nós, os rectángulos.

1. Introducción

Sí, soy el rectángulo, esa figura de cuatro lados que es tan familiar a la gente, y que, sin embargo, casi nadie valora o repara en nuestra presencia, o sea, *¡que pasan de nosotros!*

Fíjate (permíteme que te tutee; es que me siento más cómodo así), hasta qué punto estoy en todas partes. Hazme el favor de parar de leer este texto y mira a tu alrededor durante unos segundos. Me verás en muchos sitios sin necesidad de moverte de donde estás: me tienes en la puerta, en las ventanas, en las páginas de los libros, los folios, en la pantalla de tu ordenador, en los marcos de los cuadros que están colgados en la pared, los poster; la planta de la habitación en la que estás, es casi seguro que es uno de los míos y así podríamos seguir y encontraríamos muchos más. ¿Habías reparado en ello? Y, para que veas cómo es verdad que se suele pasar de nosotros, te voy a relatar algo que posiblemente te haya sucedido a ti también. Imagínate que estás delante de la fachada de un edificio que tiene los elementos habituales. Las ventanas son, como casi siempre, rectangulares pero hay una que es circular. Estoy convencido de que esa es la ventana que llamará la atención de todos los que miren la fachada. Dirán algo así como: *¡Mira! hay una ventana circular, ¡qué original!...,* todos se fijarán en ella y que conste que no tengo nada contra esa figura. Total, que como soy muy abundante, aparentemente *¡nadie me quiere!…*

Menos mal que hay algo que sí nos reconocen los humanos. Se trata de la fórmula que se usa para calcular nuestra área. Esa de *área igual a base por altura*. Es de las cosas que se aprenden en la Escuela y no se olvidan. No es de extrañar teniendo en cuenta lo sencilla y gráfica que es su deducción. No tienes más que mirar la figura 1 para comprenderlo y memorizarlo.

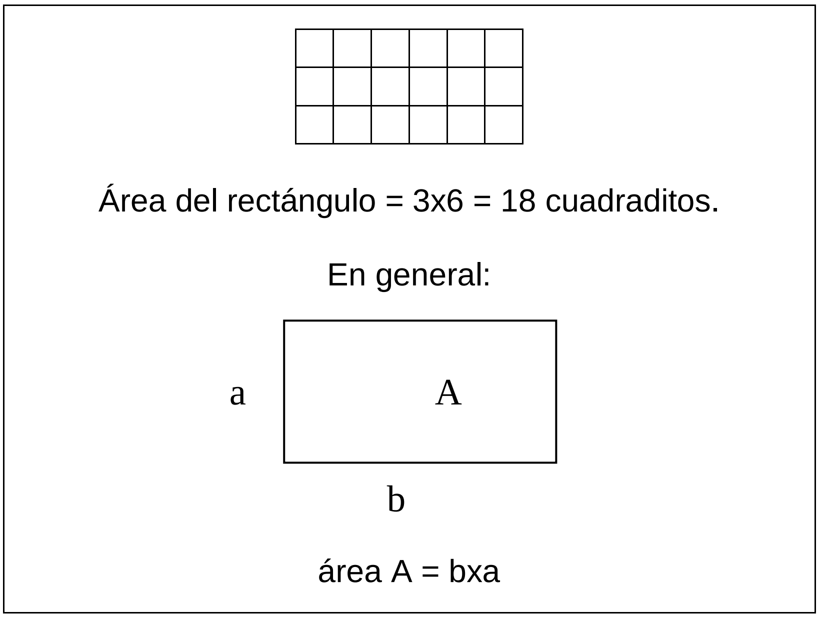


Figura 1

Pues bien, a continuación voy a tratar de probar que somos importantes. Que hay miembros muy notables y queridos en nuestra infinita familia. Algunos son tan destacados que la humanidad les ha dedicado muchas horas a estudiarlos llegando a influir en cuestiones relacionadas con el arte, las finanzas, etc. Por otra parte, estos estudios que giran en torno a nosotros, además, son estupendos temas para ser desarrollados como talleres con grupos de estudiantes. Basta con que el profesorado prepare el material necesario que es muy sencillo. Se aprende mucho con nosotros…

2. De proporción irracional

Sin duda, el más conocido de nuestra familia es ese al que los humanos llaman *rectángulo áureo*. Su nombre le proviene del hecho de que sus lados tienen unas dimensiones tales que la relación entre ellas (es decir, el número que resulta de dividir el largo entre el ancho o al revés) es la llamada *proporción áurea* que algunos llegan a denominar la *divina proporción*, hasta esos extremos llega su veneración.

¿Y por qué a los humanos les gusta tanto esta proporción? Eso se lo preguntas a ellos porque yo nunca lo he sabido. Los artistas renacentistas, por ejemplo, admiraron mucho esta proporción: Leonardo, Boticelli,… Ellos, los renacentistas, fueron los que le pusieron el mote de *divina proporción*. Pero no solo ellos. Te transcribo, por si no la conoces, la poesía que le dedicó el gaditano Rafael Alberti (1902,1999), uno de esos grandes poetas andaluces luminosos y cercanos:

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Sobre esta proporción se ha escrito mucho y si acudes a algún buscador de internet seguro que encontrarás muchos estudios que te permitirán conocerla más a fondo. Me voy a limitar a explicarte cómo conseguir un rectángulo que tenga la proporción áurea y deducir después el valor de esa famosa proporción.

Para ello, fíjate en la figura 2 y haz lo que te indico: dibuja un cuadrado y marca el punto medio de la base. Pincha un compás en ese punto y el vértice A lo llevas sobre la prolongación de la base. Al cerrar el rectángulo tienes dibujado a mi pariente más famoso: el *rectángulo áureo*.

¿Cuánto vale la proporción de los lados de ese rectángulo? Con unos sencillos cálculos la vamos a obtener:

Observa:

Voy a calcular primero cuánto mide el segmento que va desde el punto medio del lado del cuadrado hasta A y que notaré como S. Como ves es una sencilla aplicación del teorema de Pitágoras:

$$S=\sqrt{h^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{h^2+\frac{h^2}{2^2}}=\sqrt{\frac{4h^2+h^2}{4}}=\frac{h\sqrt{5}}{2}$$

Con ese dato, podemos calcular cuánto mide la base del rectángulo:

$$base=\frac{h}{2}+\frac{h\sqrt{5}}{2}=\frac{h(1+\sqrt{5})}{2}$$

No sé si sabes que se suele utilizar la letra griega phi (Φ) para representar a la proporción áurea. Pues bien, tendremos entonces que:

$$\Phi = \frac{base}{altura} = \frac{\frac{h(1+\sqrt{5})}{2}}{h} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989...$$

El carácter de irracional le viene de la presencia de esa raíz cuadrada que, al no ser el 5 un cuadrado perfecto, entonces es un número de infinitas cifras decimales no periódicas. Hay otras formas de llegar a este número pero esta me parece que es muy clara y directa.

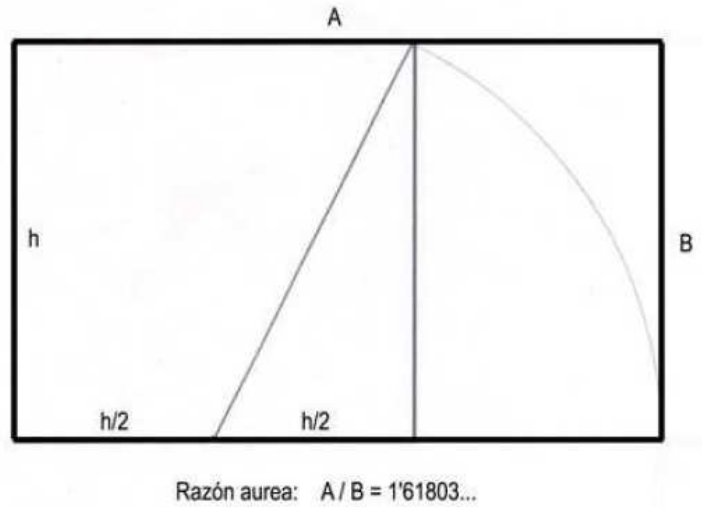


Figura 2

Como te indicaba antes, de la proporción áurea podemos estar un largo rato hablando pero te repito lo de que busques información en internet. Verás la cantidad de páginas que se le dedican y las aplicaciones que tiene, en el arte sobre todo.

Antes de pasar al siguiente rectángulo notable, te indico una curiosidad para que la compruebes contigo, que eres humano. Es esta: para saber si un cuerpo (humano, claro) tiene la proporción áurea, se mide la estatura y la distancia que hay desde el ombligo hasta el suelo (figura 3). Las divides y cuanto más próximo está ese número a 1,61 más áureo es tu cuerpo… Esto hazlo en la intimidad…

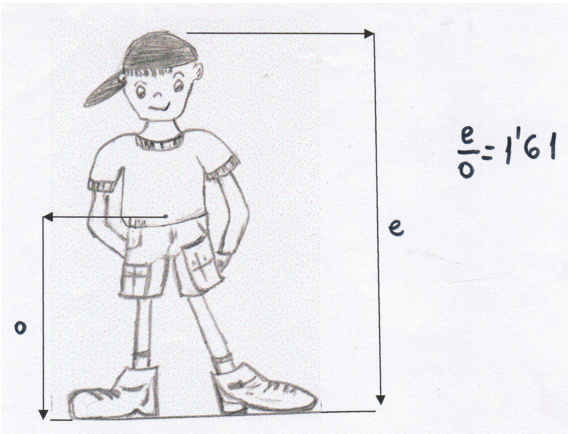


Figura 3

Paso a otro rectángulo que, tal vez, utilizarás a diario y, casi seguro que tampoco le prestarás mucha atención. Me refiero a los folios, esos en cuyos paquetes leerás DIN A4. Se trata de unos rectángulos que tienen también una proporción irracional que te la cuento por si la desconoces. Debo aclararte primero que DIN es un acróstico *DIN = Deutsches Institut fur Normung = Instituto alemán de normalización*. Este Instituto dio una directriz para los folios que data de 1922, con el fin de regularizar el formato de este tipo de papel.

Igual que hice antes con el áureo, te voy a decir cómo conseguir un rectángulo que pertenezca a esta familia para pasar a calcular después la proporción entre sus lados: Observa la figura 4 y haz lo que te indico. Dibuja un cuadrado y traza la diagonal. Yo lo he hecho a mano alzada pero tú puedes usar escuadra y cartabón para que el cuadrado te salga perfecto.

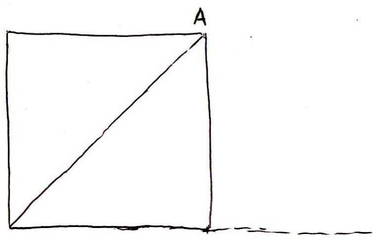


Figura 4

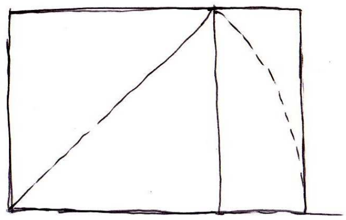


Figura 5

Pincha el compás en el extremo inferior de la diagonal y abate el punto A sobre la prolongación del lado. Al cerrar, como se hace en la figura 5, tienes un rectángulo con la proporción DIN A. Te informo que el DIN A0 es un rectángulo que tiene esa misma forma pero con un área igual a un metro cuadrado.

Voy a calcular ahora la proporción en la que están los lados de este rectángulo. Una forma sencilla de conseguirlo pasa por considerar que el lado del cuadrado de partida mide la unidad. En ese caso, la diagonal dibujada mide:

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Por lo tanto, la proporción en la que están los lados del rectángulo es:

$$\frac{lado\,mayor}{lado\,menor} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = 1{,}4142135...$$

Pero la gran virtualidad de este pariente mío es que cuando lo partes por la mitad doblando el lado mayor (figura 6), los dos rectángulos que quedan son semejantes al anterior.

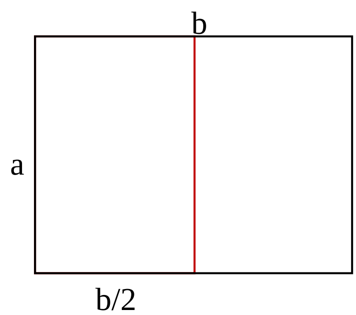


Figura 6

Dicho de otra forma: los DIN A0, DIN A1, DIN A2, DIN A3,… son rectángulos semejantes. Si quieres entretenerte un poco, parte un folio en la forma que te he indicado y hazlo de forma sucesiva con los trozos que vas obteniendo. Si después colocas un trozo de cada tamaño en la forma de la figura 7 verán que ¡la diagonal es la misma!… esa es una prueba gráfica de que son semejantes.

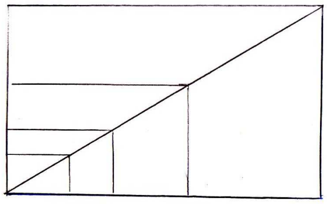


Figura 7

Además, por la forma en la que se van cortando, es evidente que el área del DIN Aj es la mitad del DIN A(j-1). Por tanto, el área del DIN A1 es de 0,5 m^2; la del DIN A2 es 0,25 m^2; la del DIN A3, 0,125 m^2 y la del folio corriente, el DIN A4, es de 0,0625 m^2 o, si lo prefieres, 625 cm^2. He querido llegar hasta el DIN A4 para proponerte ahora un entretenimiento y es que como conoces el área y también la proporción en la que se encuentran los lados, con esos datos puedes responder a la siguiente pregunta: ¿Cuánto miden sus lados?

Pero creo que me estoy desviando de mi cometido de presentarte a más rectángulos notables.

Procedo, por tanto, a darte noticias de otro de mis parientes. Este es el más codiciado porque se trata de dinero. Es el rectángulo que enmarca a todos los billetes de dólares. Supongo que sabes que los billetes de 1, 2, 5, 10, 20, 50, y 100 dólares están en el mismo rectángulo (figura 8). No es como en los billetes de euros que entre el de 5 y el de 500 hay una diferencia notable de tamaño y creo que ni siquiera son semejantes. Bueno, esto lo supongo porque es que nunca he podido tener uno de 500 para poder compararlos…

Figura 8

Sí, ya sé que todos los billetes son rectángulos pero ese del dólar (cuya forma también tienen billetes de otros países), posee una propiedad geométrica muy curiosa.

Te la voy a relatar: toma un billete de dólar (o una fotocopia…) y sigue el proceso que ves en las imágenes que vienen a continuación (figura 9) y que trataré de explicar con palabras a continuación por si hay algo que no está claro.

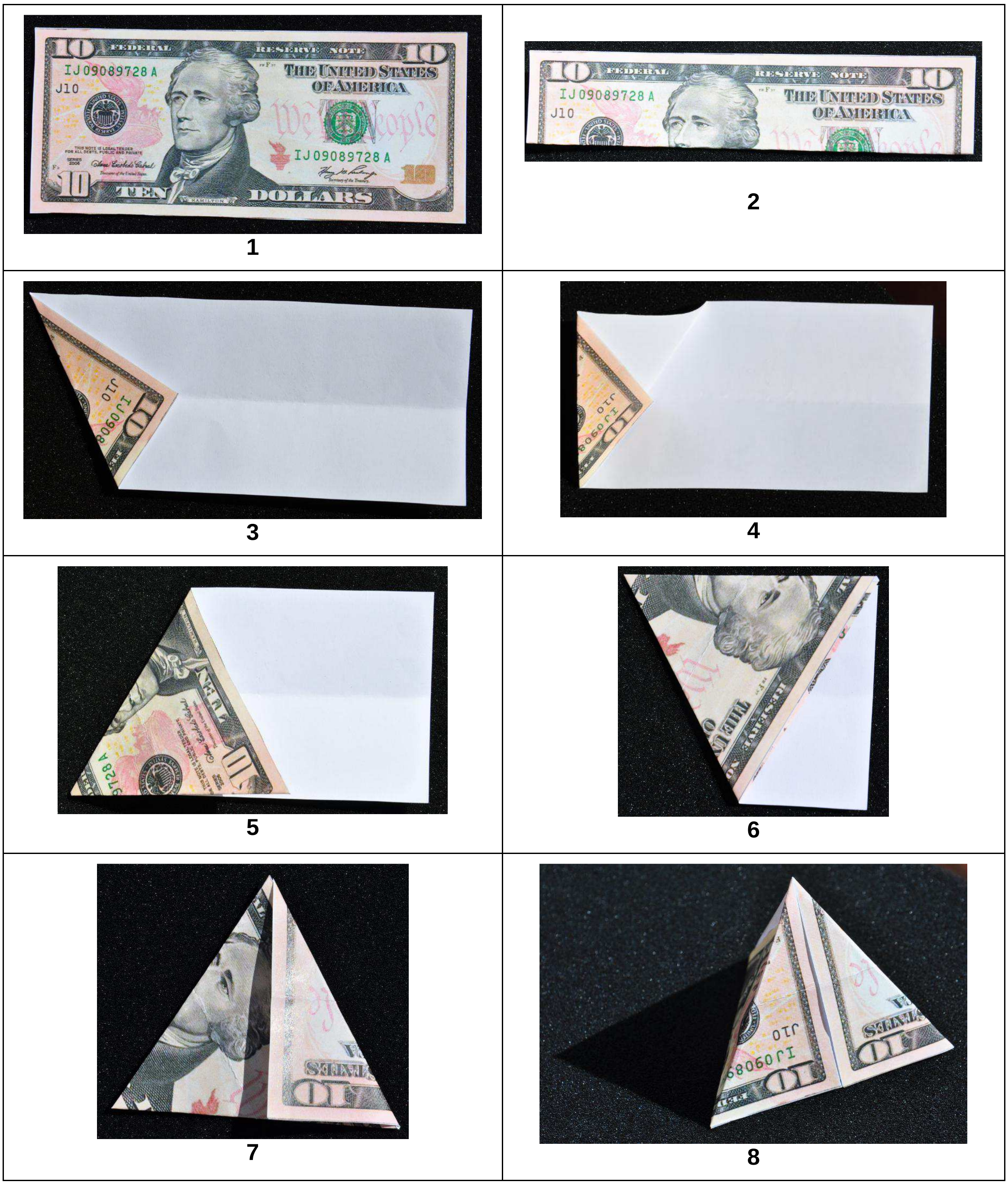


Figura 9

1. Fotocopia de un billete de 10 dólares.
2. Doblar el billete por la mitad.

3. Llevar la esquina a la línea que marca la mitad del billete. Comprobar que el ángulo que se forma en la esquina superior izquierda es de 30º.
4. Se dobla por el cateto menor del triángulo anterior.
5. Al doblar de la forma indicada en la foto anterior, aparece un triángulo equilátero.
6. Se dobla de nuevo a lo largo del lado del triángulo equilátero y aparece también un triángulo equilátero encima del otro. Queda una solapa.
7. Al doblar la solapa debe quedar un triángulo equilátero.
8. Pues bien, si ahora se despliegan los dobleces realizados observamos que ¡se puede formar un tetraedro!

Tras este proceso, queda claro que los billetes de dólar vienen a ser el desarrollo de ese poliedro regular. Observa los cuatro triángulos equiláteros de la figura 10. Se trata de una de las formas de desarrollar el tetraedro. Pasando el triángulo rectángulo de la izquierda a la parte derecha se tiene el rectángulo de la familia del dólar. Interesante, ¿verdad?

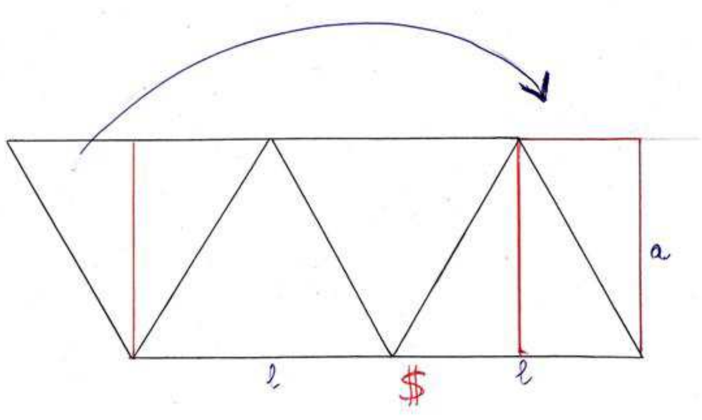


Figura 10

Veamos ahora cuál es el valor de la proporción que mantienen el largo y el ancho de un billete de dólar. Pero antes de hacerlo con la ayuda de la geometría, toma una regla graduada, mide el largo, mide el ancho y divide estas dos cantidades. Déjalo anotado.

Para proceder geométricamente, observa en la figura 10 que el largo del billete es igual a dos veces el lado *l* del triángulo equilátero. Ahora se necesita calcular el valor de la altura *a* del triángulo. Aplicando el teorema de Pitágoras verás que no resulta complicado llegar a este resultado:

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Con este dato podemos ya calcular la proporción de los lados:

$$\frac{lado\,mayor}{lado\,menor} = \frac{2l}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2{,}3094...$$

Revisa el valor que obtuviste empíricamente. Debes tener anotado 2,3…

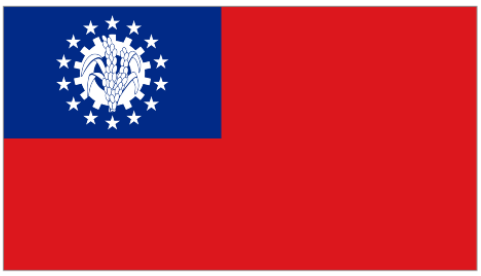
3. De proporción racional

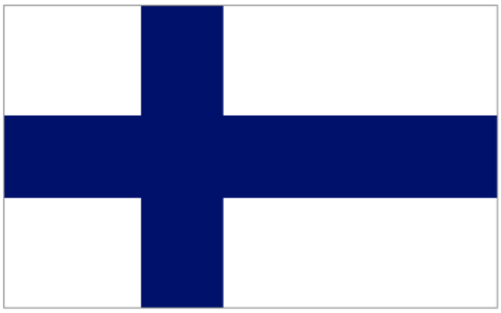
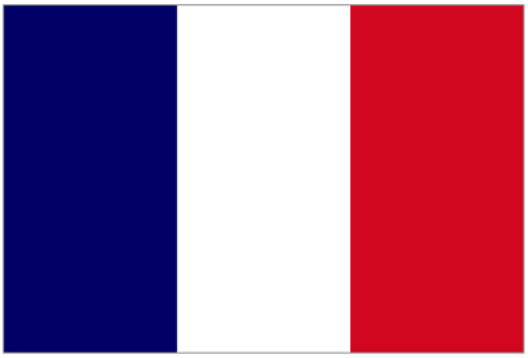
Pero todos esos notables rectángulos que te he nombrado tienen en común que las proporciones de sus lados son números irracionales. Sin embargo existe un interesante conjunto de rectángulos de proporciones racionales que son muy, pero que muy populares y, en general, son unos desconocidos. Más bien se debe a que mucha gente ignora que los rectángulos en los que se enmarcan las banderas del mundo, no tienen todos la misma proporción, es decir, que la relación entre su ancho y su largo, no es igual para todos sino que existen nada menos que 22 modelos diferentes que te voy a mostrar con la imagen de un ejemplar de bandera de cada uno de los modelos. Esa proporción, que llamo *índice de cuadratura (i)*, viene dada, como te digo, por la relación que existe entre el ancho (a) y el largo (b) es decir,

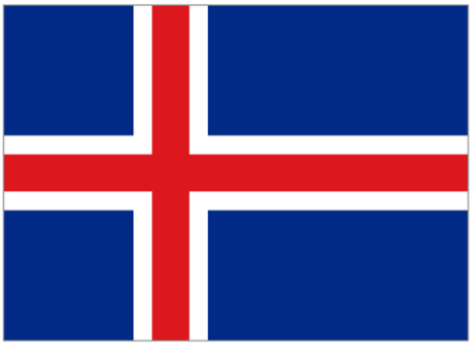
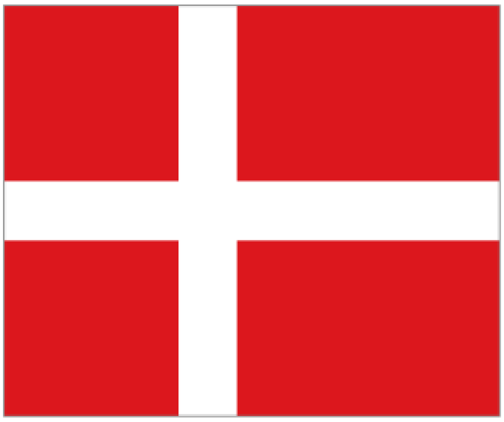
$$i = \frac{a}{b}$$

Con esta definición del índice de cuadratura, es evidente que si la bandera es cuadrada, el índice toma el valor 1 porque las dos dimensiones son iguales. Te informo que solo hay dos banderas cuadradas: las de Suiza y Vaticano. Las demás, tienen índices menores que 1 siendo el más pequeño el de la bandera de Qatar que vale 11:28, es decir, que si quisiésemos hacer el rectángulo en el que se enmarca la bandera de esta país, tendría 11 unidades de ancho por 28 de largo. Pero antes de seguir debo decirte que existe una bandera, que es la de Nepal, que no está enmarcada en un rectángulo sino en un pentágono cóncavo. Seguro que si la has visto habrás dicho; *¡Qué original!*... Pero ya estoy acostumbrado a esos desplantes… Sigamos.

Te voy a presentar, por tanto, a todos estos rectángulos famosos y fíjate cómo, poco a poco, las banderas se van cuadrando hasta llegar a las que tienen el índice de cuadratura igual a 1 (figura 11).

 **Qatar 11:28**	 **Reino Unido 1:2**
 **Estados Unidos de Norteamérica 10:19**	 **Myanmar 5:9**

 **El Salvador 189:335**	 **México 4:7**
 **Alemania 3:5**	 **Finlandia 11:18**
 **Guatemala 5:8**	 **Estonia 7:11**
 **Francia 2:3**	 **Bolivia 15:22**

 **Brasil 7:10**	 **Albania 5:7**
 **Islandia 18:25**	 **Israel 8:11**
 **Papúa Nueva Guinea 3:4**	 **Dinamarca 28:37**
 **Mónaco 4:5**	 **Bélgica 13:15**

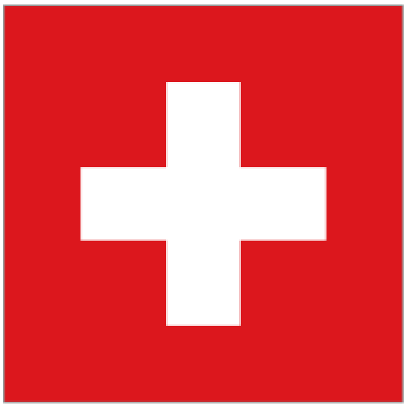
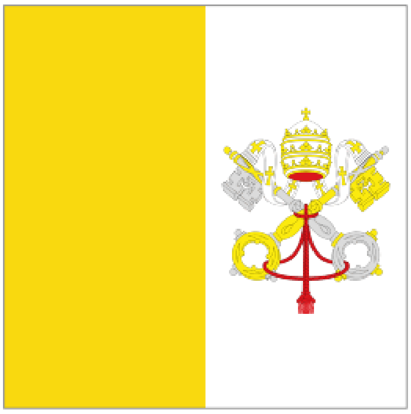
 **Suiza 1:1**	 **Vaticano 1:1**

Figura 11

4. A modo de conclusión

Bueno, llego al final de este breve relato y presentación de algunos elementos de mi familia y espero que, a partir de ahora, sepas apreciarnos un poco más… Has comprobado que, entre los rectángulos, los hay importantes y populares.

Conozco una curiosa experiencia que sé que la han realizado en más de una ocasión y que te paso por si la quieres repetir en tu entorno de amistades y parientes…

Se trata de pasarles una hoja como la que te adjunto en la figura 13 en la que hay varios rectángulos entre los que se encuentra uno de proporción áurea. La experiencia consiste en decirle a la persona que de todos ellos, elija aquel que le parezca más bello, más equilibrado, vamos, que le produzca más *tilín*… Según quienes han estudiado el asunto parece que hay una destacada proporción de personas que se decantan por el áureo…

Por cierto que no me resisto a explicarte el llamado *test de Paula* para saber si un rectángulo que estés mirando es o no áureo. Es muy sencillo. Basta con que tengas en tus manos un rectángulo que sepas que es áureo (una tarjeta de crédito, por ejemplo, puede servir…) (figura 12). Te colocas delante del rectángulo que quieres testar. Sitúa la tarjeta áurea entre tu ojo y ese rectángulo tratando de comprobar si encajan. Si lo logras, entonces es áureo.

Figura 12

Se acabó. Gracias por haber tenido la paciencia de llegar hasta aquí…

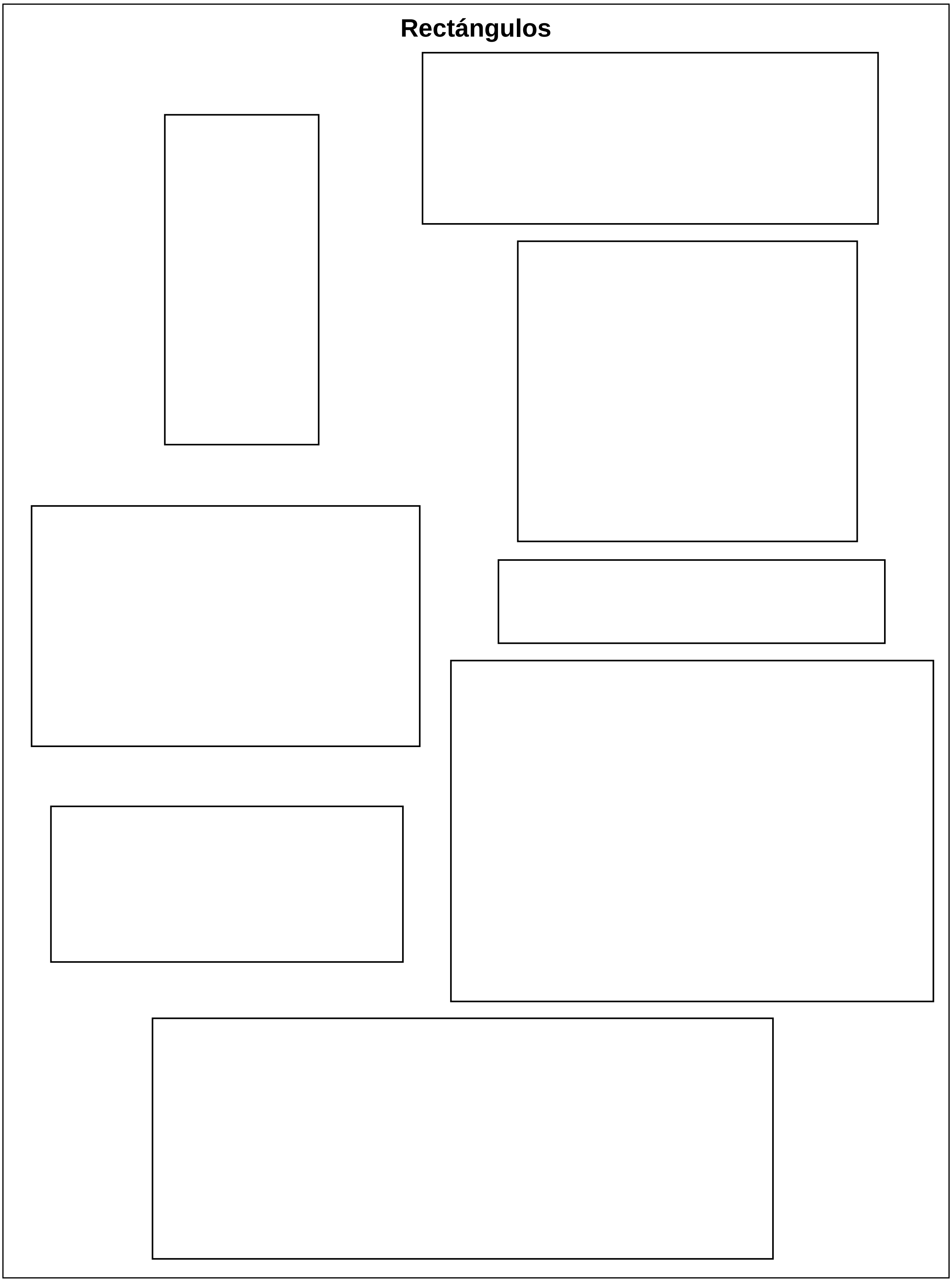


Figura 13

Bibliografía

Balbuena, L. (2000): *Naciones y Banderas*. Proyecto Sur de Ediciones. Granada.
Corbalán, Fernando (2010): *La proporción áurea*. RBA coleccionables S.A.
Erbez, J.; Balbuena, L. (2008): *Colores al viento.* La Laguna
Erbez, J.; Balbuena, L. (2008): Poster de banderas de naciones del mundo, 2ª edición.
Garfunkel, S. (1998): *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley Iberoamericana España, S.A.

Luis Balbuena Castellano, Maestro Nacional y licenciado en Matemáticas. Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria. Asesor de la OEI. Codirector del curso *Ñandutí* de didáctica de las matemáticas para el nivel secundario. Ha sido Secretario General de la Sociedad Isaac Newton, de la Federación Española y de la FISEM. Ha trabajado la popularización de las matemáticas en los medios de comunicación. Ha ganado cuatro premios *Giner de los Ríos* y tres de *Educación e Inventiva*.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 151-158
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Resolviendo y creando problemas con profesores de educación básica

Problema

Claudia construye cuadrados en fila, usando palitos de madera del mismo tamaño, de modo que para cada lado de un cuadrado usa un palito. Las figuras que va construyendo las ubica en fila, como se muestra a continuación

Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

Encontrar, con tres razonamientos diferentes, una expresión general que permita determinar el número de palitos de madera que tiene la figura que ocupa el lugar n en la secuencia.

Este problema lo propuse en un curso-taller recientemente realizado en este mes de junio, por iniciativa de su alcalde, con 21 profesores de primaria y 15 de secundaria en Pomahuaca, un distrito de la provincia de Jaén, del departamento de Cajamarca, en la selva alta del norte del Perú, rodeado por cerros de la cadena occidental de los andes. La experiencia fue sumamente interesante tanto académica como humanamente, pues desde las 2 y 30 p.m. del viernes 8 hasta el domingo 10 a las 12 y 30 p.m. compartimos con entusiasmo 16 horas en sesiones de trabajo muy participativas. Compartí la conducción del taller con Estela Vallejo Vargas, bachiller en Matemáticas y alumna de posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Trabajamos muchos problemas, poniendo énfasis en la creación de éstos, por su importancia en la actividad docente al enseñar y aprender matemáticas. Un 50% del tiempo estuvo dedicado a las funciones afines y el otro 50% a la divisibilidad[1].

En este artículo, comparto con los lectores de UNION la experiencia académica de la mañana del sábado 9. Durante 4 horas, con una pausa de 15 minutos, desarrollamos una dinámica en cinco fases que describo a continuación. Ciertamente, en todas las fases hubo un acompañamiento de parte de los conductores del taller, contribuyendo a aclarar dudas y estimulando ideas de los(as) profesores(as) participantes.

<u>*Fase 1*</u>. *Presentación de la situación y trabajo individual*.
Repartimos una hoja en la que se presenta la situación descrita en la primera parte del problema enunciado al inicio de este artículo y se pide desarrollar individualmente tres actividades:

[1] Tema tratado por Estela Vallejo en su tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas.

a) Julio afirma: “Claudia ha usado 13 palitos de madera en la figura 4 entonces en la figura 8 usará el doble; o sea 26 palitos de madera”. La proposición expresada por Julio ¿es verdadera o falsa?¿Por qué?
   Detalla de manera escrita tu respuesta, a partir de las regularidades que hayas encontrado o de las operaciones que hayas hecho.

b) ¿Cuántos palitos de madera usará Claudia al construir la figura 25? ¿Por qué?

c) ¿Cuántos palitos de madera usaría Claudia al construir la figura 548? ¿Por qué?

Las actividades van llevando a la búsqueda de regularidades y al descubrimiento de un patrón al relacionar el número que indica la posición de una figura en la secuencia de figuras con el número de palitos que se usen para su construcción, pasando de una “generalización próxima” a una “generalización lejana”[2].

Fase 2. Trabajo grupal con actividades de mayor dificultad e ideas para crear problemas.
Pedimos que se constituyan en grupos de a lo más cuatro profesores (solo excepcionalmente de cinco profesores) y repartimos otra hoja, en la que se pide desarrollar las siguientes actividades:

1. Comparar y discutir las respuestas dadas por los integrantes del grupo en las actividades individuales.
2. Determinar qué lugar en la fila ocuparía la figura que construya Claudia con 517 palitos de madera. Justificar.
3. Encontrar, con tres razonamientos diferentes, una expresión general que permita determinar el número de palitos de madera que tiene la figura que ocupa el lugar n en la secuencia.
4. Mostrar gráficamente cómo cambia el número de palitos de madera conforme cambia el número de orden de la figura.
5. Hacer actividades similares a las anteriores, considerando que los palitos de madera que se cuentan en cada figura **son sólo los del perímetro de la figura.**
6. Proponer actividades similares a las propuestas con esta situación, considerando triángulos, pentágonos u otras figuras de forma poligonal. Dar la solución correspondiente.

Notar que la actividad 2 induce a pensar en el “problema inverso”, en relación a la característica de los problemas de la parte individual; la actividad 3 es la que aparece en el problema enunciado al inicio de este artículo y pide explícitamente una formalización de las observaciones hechas – del patrón encontrado – para resolver los problemas anteriores; más aún, lleva a pensar en razonamientos diferentes para obtener tal formalización. La actividad 4 lleva a usar una representación gráfica de la función que define la relación entre el número de la figura y el número de palitos; y las actividades 5 y 6 dan ideas para crear nuevos problemas.

[2] Expresiones que usa García Cruz, J. (1999) La generalización en un tipo particular de sucesiones aritméticas: los problemas de generalización lineal. *Números*, 38 pp. 3-20

Los grupos, voluntariamente, expusieron los resultados de sus discusiones y hubo socialización de ideas.

Fase 3. Trabajo grupal para crear un problema que será resuelto por otro grupo.
Repartimos una hoja, denominada A, en la que se explicita el objetivo de imaginar una situación similar a las que se han presentado con las secuencias de figuras geométricas e inventar y resolver un problema de matemáticas para alumnos de educación básica. Se pide que se describa una situación, que se escriba el texto de un problema, que se especifique el nivel y grado al que va orientado el problema que se crea, que se escriba una solución del problema, y que se escriban dos comentarios a la experiencia de crear un problema de matemáticas.

Repartimos también otra hoja, denominada B, en la que cada grupo debe copiar el texto del problema creado. Hay un espacio destinado a la solución del problema, pero éste debe ser llenado por otro grupo que será determinado al azar. En la hoja B, además, hay un espacio para que el grupo que resuelva el problema escriba sus comentarios y sugerencias sobre el problema que le tocó resolver.

Fase 4. Trabajo grupal para resolver el problema que inventó otro grupo
Un integrante de cada grupo escogió al azar una hoja B y la llevó a su grupo para resolver el problema en ella escrito.

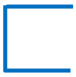
Fase 5. Exposición de los problemas resueltos por los grupos.
Los grupos, también seleccionados al azar, expusieron los problemas que resolvieron e hicieron sus comentarios y sugerencias referidos a tal problema.

Comentarios

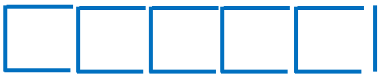
1. El entusiasmo y la participación de los(as) profesores(as) fue muy grande, tanto por el clima de confianza que se había generado como porque percibían que las dificultades a las que se enfrentaban eran alcanzables y aplicables a estudiantes de primaria y de secundaria.
2. Las actividades individuales *a* y *b* fueron correctamente resueltas por todos los participantes. En la actividad *c* hubo algunos errores operativos. Lo importante es que se había percibido el patrón: el número correspondiente al lugar que ocupa la figura en la secuencia es igual al número de cuadrados que tiene tal figura y conociendo tal número, su número de palitos se determina multiplicando ese número por 3 y luego sumándole 1.
3. La actividad grupal 2 fue resuelta dividiendo 517 entre 3. La profesora de primaria que resolvió en la pizarra dijo que el cociente de 517 entre 3, o sea 172, corresponde al número de cuadrados que tendría la figura, pues se podrían armar 171 cuadrados completos y uno con solo 3 palitos, pero que siendo el residuo 1, tal palito lo usaría para cerrar y obtener el último cuadrado.
   Un profesor de secundaria resolvió la ecuación $3n + 1 = 517$ y obtuvo $n = 172$.
4. En la actividad grupal 3, todos coincidieron en que "la fórmula" es $3n + 1$, y ésta fue obtenida por razonamiento inductivo, observando que el número de palitos de una figura a la siguiente siempre se incrementa en 3. Les resultó sorprendente y motivador que se pidan tres razonamientos diferentes. Explicamos que con lo que habían hecho ya teníamos uno y sugerimos que piensen en argumentos geométricos, observando cuidadosamente cómo construyen las figuras de la secuencia.

Una profesora de primaria – que no era de las más jóvenes – explicó que, por ejemplo, en la figura 4 usaba 4 palitos en la parte de arriba, otros cuatro palitos en la parte de abajo y 5 palitos para ir armando los cuadraditos. Así usaba en total 4 + 4 + 5 = 13. Tomamos este argumento para la figura *n* y entonces, en diálogo con los(as) profesores(as), concluimos que deberíamos usar *n* palitos arriba (formando una fila horizontal), *n* palitos abajo (formando otra fila paralela a la formada por los *n* palitos anteriores) y $n + 1$ palitos (verticales) para armar los cuadrados; así, en total deberíamos usar $n + n + (n + 1)$ palitos, que es lo mismo que decir $3n + 1$ palitos. Se advirtió que este resultado coincide con “la fórmula obtenida” por razonamiento inductivo algebraico.

Teniendo claro el razonamiento geométrico expuesto a partir de la idea de la profesora de primaria, invitamos a pensar en otro razonamiento geométrico, siempre observando cómo construyen las figuras de la secuencia. Una profesora de secundaria nos dijo que, por ejemplo la figura 5 la formaba con 5 estructuras de 3 palitos cada una, de la forma



más un palito adicional para cerrar la última de estas estructuras y tener el último cuadrado.



Así usaba 3x5 + 1 palitos; es decir 16 palitos. En consecuencia la figura *n*, de *n* cuadrados, se podía construir poniendo una a continuación de otra *n* estructuras de la forma descrita, más un palito para cerrar el último cuadrado; en consecuencia, la figura *n* tiene $3n + 1$ palitos.

Así obtuvimos, participativamente, tres razonamientos diferentes que nos conducen a la misma expresión algebraica, $3n + 1$, para el número de palitos de la figura *n* (o de la figura de la secuencia, que tiene *n* cuadrados).

Les comenté que hay por lo menos un razonamiento geométrico más. No lo expuse y despertó su curiosidad, como espero que también la despierte en los amigos lectores de este artículo.

5. La actividad 4 – que busca una representación gráfica de la función, que podemos llamar *p*, que hace corresponder al número de orden *n* de la figura el número de palitos $3n + 1$; es decir, la función $p(n) = 3n + 1$ – no fue desarrollada por grupo alguno. Consideramos que una razón para ello fue el no haber usado la palabra función en el texto de la actividad, pues al hacer explícita la función, varios profesores de secundaria, de la especialidad de matemáticas, advirtieron que se trataba de graficar tal función, aunque no tomaron en cuenta que la gráfica no es una recta, por tomar la variable independiente solamente valores naturales a partir de 1. Esto lleva a reflexionar una vez más sobre la importancia de internalizar el concepto de función a partir de observaciones y experiencias, más allá del manejo formal de funciones ya explícitas en forma algebraica.

6. Las actividades grupales 5 y 6 las trabajaron en cada grupo y tuvimos conversaciones con los integrantes de los grupos, pero ya no hubo tiempo de hacer socializaciones. Más aún, las omitimos, teniendo en cuenta la *fase 3* de este taller particular.

7. La *fase 3* fue de intensa actividad y pudimos percibir que en los ocho grupos habían comprendido cómo determinar el número de palitos que tiene la figura *n*, en una secuencia formada por filas de polígonos “pegados” por uno de sus lados. Cuatro grupos crearon problemas con secuencias de triángulos y un grupo con secuencias de hexágonos. Los otros tres grupos no crearon problemas con secuencias de polígonos. Uno de ellos fue sobre conteo de triángulos, cuadrados y rectángulos; otro de secuencias de “pirámides” formadas por ladrillos; y el restante de secuencias de “pirámides” de círculos.

   A continuación copio los textos de los problemas creados por algunos de los grupos:

   <u>*Grupo 8*</u>

   Este grupo estuvo integrado por cuatro profesores de primaria y uno de secundaria (no de la especialidad de matemáticas).

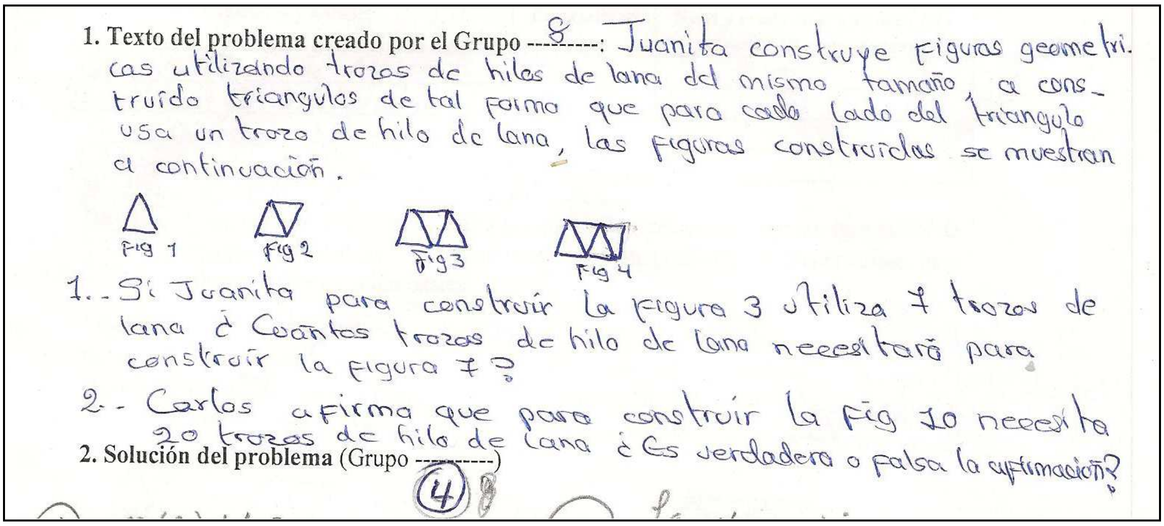

1. Texto del problema creado por el Grupo ---8---: Juanita construye figuras geometricas utilizando trozos de hilos de lana del mismo tamaño, a construido triángulos de tal forma que para cada lado del triangulo usa un trozo de hilo de lana, las figuras construidas se muestran a continuación.

Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

1.- Si Juanita para construir la figura 3 utiliza 7 trozos de lana ¿Cuantos trozos de hilo de lana necesitará para construir la figura 7?

2.- Carlos afirma que para construir la Fig 10 necesita 20 trozos de hilo de lana ¿Es verdadera o falsa la afirmación?

2. Solución del problema (Grupo ----------) 4

Figura 1. Problema creado por el Grupo 8

Lo copiado es lo que escribieron en su hoja B. Manifestaron que el problema lo podrían aplicar con alumnos de tercer grado de primaria. Ellos resolvieron la parte 1 del problema considerando explícitamente que tendrían 4 palitos arriba, 3 palitos abajo y8 palitos oblicuos. También escribieron la expresión 2n + 1, como “fórmula general” del número de palitos. Al Grupo 4 le tocó resolver este problema y lo hicieron usando esta expresión general y ambas partes fueron correctamente respondidas.

Consideramos un buen trabajo de creación y presentación del problema en el contexto del taller.

<u>*Grupo 7*</u>

Este grupo estuvo integrado por cuatro profesores de primaria.


1. Texto del problema creado por el Grupo 7:

Roberto construye figuras exagonales con palitos de chupete del mismo tamaño en forma consecutiva y en fila. ¿Cuántos palitos de chupete necesita para construir la figura N° 28.?

6 - 11 - 16 - 21 - ...

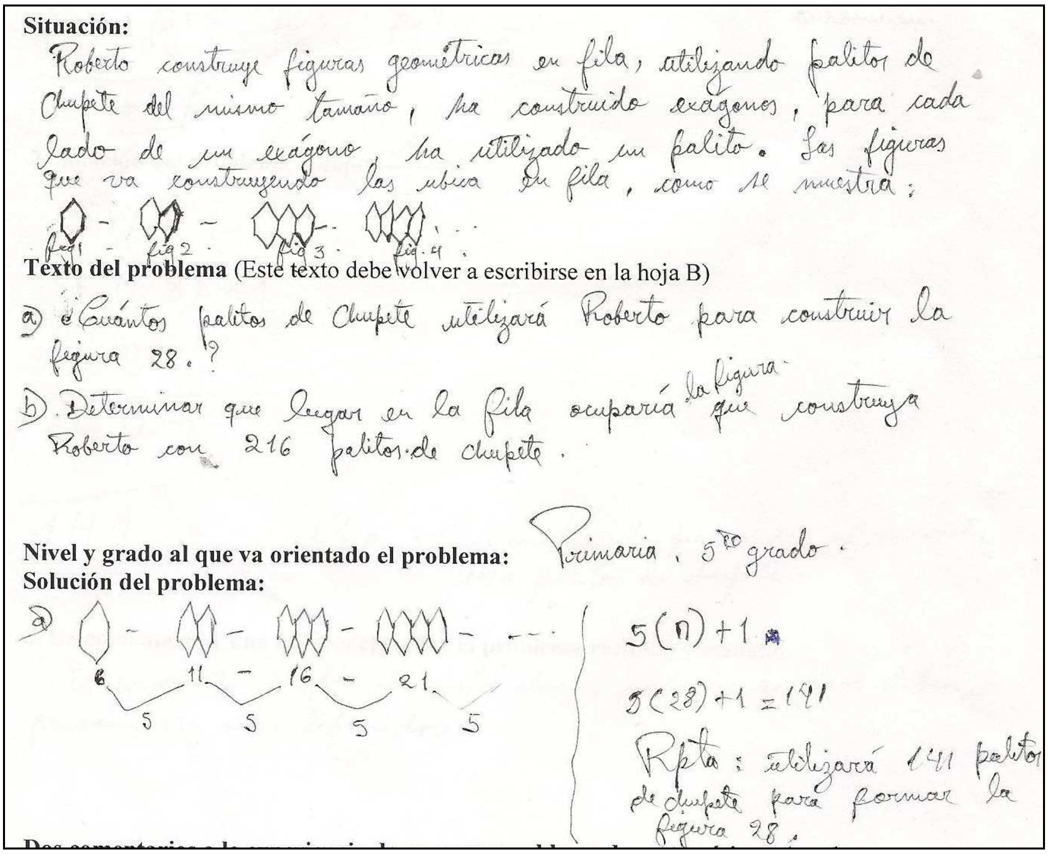
fig 1 - fig 2 - fig 3 - fig 4 ...

5 5 5 5

$\boxed{5n+1}$.

Figura 2. Problema creado por el Grupo 7

El texto copiado en la Figura 2, escrito por el Grupo 7 en su hoja B, no es exactamente el mismo que el que escribieron en su hoja A. La explicación que dieron fue el apuro y algunas discrepancias sobre el nivel educativo en el que lo aplicarían. Consideramos importante copiar también el texto que escribieron en su hoja A.


Situación:

Roberto construye figuras geométricas en fila, utilizando palitos de chupete del mismo tamaño, ha construido exágonos, para cada lado de un exágono, ha utilizado un palito. Las figuras que va construyendo las ubica en fila, como se muestra:

fig 1 - fig 2 - fig 3 - fig 4 ...

Texto del problema (Este texto debe volver a escribirse en la hoja B)

a) ¿Cuántos palitos de chupete utilizará Roberto para construir la figura 28.?

b). Determinar que lugar en la fila ocuparía la figura que construya Roberto con 216 palitos de chupete.

Nivel y grado al que va orientado el problema: Primaria, 5to grado.

Solución del problema:

a) 6 - 11 - 16 - 21 - ...

5 5 5 5

$5(n)+1$

$5(28)+1=141$

Rpta: utilizará 141 palitos de chupete para formar la figura 28.

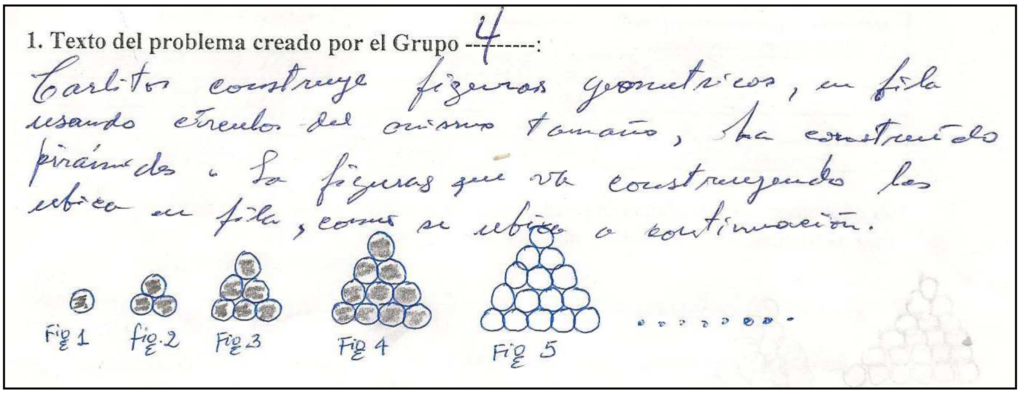
Figura 3. Problema creado por el Grupo 7(Hoja A)

En esta hoja (A) consideraron bien la situación, pero no la incluyeron en el espacio destinado al texto del problema. Advirtieron que tenían que hacerlo en su hoja B para que pueda ser entendido y resuelto por otro grupo, pero al hacerlo, “por el apuro” y ciertos puntos de vista diferentes – como me dijeron – escribieron parte de la solución y ya no consideraron la parte *b* que pensaron ponerla inicialmente.

Más allá de los detalles expuestos líneas arriba, consideramos que hubo un buen trabajo de creación del problema en el contexto del taller.

Grupo 4

Este grupo estuvo integrado por tres profesores de primaria y un profesor de secundaria, de la especialidad de matemáticas. Tuvieron una idea interesante, usando círculos, que fue más allá de secuencias de polígonos en línea "pegados" por una arista. No quisieron abandonar la idea y les tomó buena parte del tiempo encontrar el patrón y resolver el problema que estaban creando. Finalmente, resolvieron el problema, pero - según manifestaron - esta preocupación y el tiempo que resultó corto, hizo que olvidaran poner la pregunta del problema en su hoja B, como se muestra a continuación.


1. Texto del problema creado por el Grupo 4:

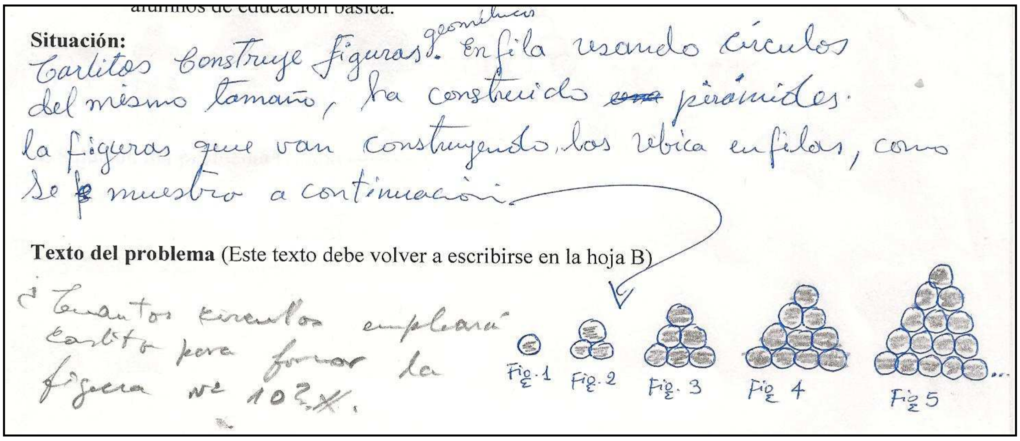
Carlitos construye figuras geométricas, en fila usando círculos del mismo tamaño, ha construido pirámides. La figuras que va construyendo las ubica en fila, como se ubica a continuación.

Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4 Fig 5

Figura 4. Problema creado por el Grupo 4 (Hoja B)

El grupo 8, al que le tocó resolver este problema, no lo hizo por no tener tal pregunta en la hoja B que recibieron.

A continuación copio la versión del problema que tenían en la hoja A


alumnos de educación básica.

Situación: Carlitos construye figuras geométricas en fila usando círculos del mismo tamaño, ha construido pirámides. la figuras que van construyendo, los ubica en filas, como se muestra a continuación.

Texto del problema (Este texto debe volver a escribirse en la hoja B)

¿Cuántos círculos empleará Carlitos para formar la figura nº 10?

Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4 Fig 5

Figura 5. Problema creado por el Grupo 4 (Hoja A)

Más allá de los detalles expuestos líneas arriba, consideramos que hubo un buen trabajo de creación del problema. Es una muestra clara de que el espíritu creativo lleva a situaciones de gran entusiasmo y a tocar aspectos que pueden ir más lejos de las ideas iniciales. Este problema resultó muy similar al que presentó el grupo 3 (de los ladrillos) y fue una oportunidad para aclarar conceptos relacionados con la suma de los elementos de una progresión aritmética.

8. En la *fase 4* todos los grupos resolvieron los problemas creados y escritos en las hojas B, salvo el grupo 8, que debió resolver el problema creado por el grupo 4. Por razones de tiempo solo pudieron exponer algunos grupos en la *fase 5*, pero fue una excelente ocasión de intercambiar opiniones, ideas y métodos de resolución de problemas

9. Todos los comentarios a la experiencia de crear problemas fueron positivos. A continuación transcribimos algunos:
   - *"Crear problemas es divertido y didáctico, utilizando juegos y material concreto"*
   - *"Contribuye a la familiarización y participación de profesores y alumnos"*
   - *"Potencia las capacidades de creación y resolución de problemas"*
   - *"Es interesante, nos permite despertar nuestra capacidad creativa"*
   - *"Permite utilizar el método inductivo y el deductivo"*
   - *"Ayuda a distinguir los niveles de dificultad para crear los problemas para los distintos grados"*

   En conversaciones fuera del aula, varios profesores nos comentaron que varios de ellos tenían a su cargo aulas con alumnos de primaria de diversos grados y que encontraban particularmente útil la creación de problemas y el trabajo en grupos para sus tareas docentes en este tipo de aulas.

10. La experiencia realizada muestra que es importante y posible desarrollar la competencia de crear problemas en los profesores de educación básica. Evidentemente, esta importancia es para profesores de todos los niveles educativos y será sumamente interesante desarrollar un taller similar con profesores de nivel superior y particularmente con formadores de formadores. Hay instituciones educativas, sobre todo de nivel superior, en las que es usual crear problemas para evaluar – generalmente solo adaptando problemas de otras fuentes – pero se pone poco énfasis en crear problemas para ayudar a aprender.

11. La creación de problemas es un tema de investigación con diversas facetas, como parte de la enseñanza y del aprendizaje. El taller realizado con profesores en Pomahuaca nos brinda valiosos elementos de reflexión y nos confirma que la experiencia misma de crear problemas lleva a descubrir y profundizar aspectos del objeto matemático que se está tratando, a plantearse nuevas preguntas y a aclarar conceptos y proposiciones relacionados con objetos afines.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 159- 170
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

O Ensino de Funções com Recursos do Software Geogebra como Facilitador de Transformações Semióticas

Vanessa Jurinic Cassol, Lori Viali, Regis Alexandre Lahm

Resumo

Este trabalho tem por objetivo refletir acerca do Ensino de Funções, por meio da conversão do registro algébrico para o registro gráfico das funções afim, linear e quadrática, com o auxílio do software Geogebra. A pesquisa fundamentou-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a qual pautou a proposição de quatro atividades de função linear e cinco atividades de função quadrática com um grupo de alunos do 1º Ano do Ensino Médio. As explorações se deram por intermédio de registros escritos pelos alunos que serviram como base para a análise, na perspectiva de investigar a compreensão do papel dos coeficientes dessas funções e as conversões realizadas pelos mesmos. A pesquisa indicou que houve uma evolução na construção de significados dos coeficientes da representação algébrica associado a sua representação gráfica com o uso do software.

Abstract

This work aims to reflect on the teaching of functions by algebraic conversion of the record for the graphic recording of affine functions, linear and quadratic with the Geogebra software. The research was based on the Theory of Semiotic Representation of Records, which proposed four activities of linear and quadratic function of five activities with a group of students from the 1st year of high school. The holdings are given by way of written records by the students who served as the basis for analysis, with a view to investigating the understanding of the role of the coefficients of these functions and conversions performed by them. The research showed that there was an evolution in meaning of the coefficients of the algebraic representation associated with its graphic representation and use of software Geogebra provided a new way of developing the teaching of functions.

Resumen

Este trabajo tiene por objetivo reflexionar sobre la Enseñanza de Funciones, por medio de la conversión del registro algebraico en un registro gráfico de las funciones afines, lineares y cuadráticas, con la ayuda del software Geogebra. La investigación se ha fundamentado en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica, la cual pautó una propuesta de cuatro actividades sobre las funciones lineares y cinco actividades de funciones cuadráticas. La recogida de datos se realizó por medio de escritos hechos por los alumnos, los cuales servirán como base para el análisis, con el fin de investigar la comprensión del papel de los coeficientes de esas funciones y las conversiones realizadas por los mismos. La investigación indicó que hubo una evolución en la construcción de significados de los coeficientes de representación algebraica asociado a su representación gráfica del software.

Introdução

Esta pesquisa trás reflexões sobre o Ensino de Funções, por meio da análise das atividades de conversão do registro algébrico para o gráfico das funções linear e quadrática, com o auxílio de um *software* educativo, para um grupo de alunos com idade média de 15 anos, do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual, de um município do interior do Rio Grande do Sul. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003) serviu como referencial para a realização do trabalho.

Segundo Nehring (1997), Santos (2002), Damm (1999) e Mariani (2006), os alunos apresentam dificuldades em relação aos diferentes conceitos matemáticos. Na maioria das vezes o objeto representado não é identificado ou ele é confundido em suas distintas formas de representação.

Este trabalho é uma tentativa de verificar se a tecnologia com seu apelo visual e pela facilidade de realizar a representação gráfica poderá auxiliar no entendimento dos conceitos das funções afim, linear e quadrática.

> *Nas escolas, o aspecto visual é normalmente deixado em segundo plano. O estudo de funções quadráticas é mais dominado pelo aspecto algébrico. Os exercícios propostos aos alunos envolvem, em geral, apenas manipulação algébrica e construção dos gráficos por meio de uma tabela de pontos que satisfaçam à expressão analítica* (Garcias & Borba, 1999, p. 63).

Para ilustrar as contribuições da tecnologia na aprendizagem de Matemática, será utilizado um recurso dinâmico proporcionado por um *software* educacional denominado de *Geogebra*. Este software foi criado por Markus Hohenwarter, professor de educação matemática da universidade Johannes Kepler de Linz, Áustria. O objetivo é servir de auxílio para o ensino de matemática nos vários níveis. Ele reúne facilidades para o ensino de geometria, álgebra, estatística e probabilidade, possibilitando a utilização da álgebra simbólica integrados em um único ambiente. Ele pode apresentar diferentes representações de um mesmo objeto. Foi escrito em Java e está disponível em várias línguas, incluindo o Português, e para os sistemas operacionais Windows, Linus e Mac.

Inicialmente será apresentado um quadro sobre o ensino de Funções, o uso de novas tecnologias no processo de ensino-aprendizagem e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003). Em seguida, será feito uma análise dos protocolos produzidos pelos alunos e finalmente serão feitas algumas considerações sobre como um grupo de alunos, do 1° ano do Ensino Médio, realizou a conversão do registro algébrico para o registro gráfico de diversas funções. Estas conversões foram realizadas com o auxílio do *software Geogebra*.

O ensino de funções

Poucos assuntos na matemática têm tanta aplicação prática como às funções. Entre as mais utilizadas estão a função afim, linear e a quadrática.

O ensino de funções ocorre, em geral, definindo-se a função; depois, são introduzidos alguns exemplos, normalmente, não relacionados e finalmente são apresentadas as representações gráfica e tabular, além de comentários sobre raízes e o assunto é encerrado com as inequações. Algumas das características que seriam mais úteis, mais tarde, na aprendizagem do cálculo como, por exemplo, a determinação do vértice (máximo ou mínimo), a concavidade (convexidade), bem como a variação do sinal não são apresentados ou quando o são, isto é, feito de forma não integrada com a representação gráfica.

Dessa forma, é priorizada a formalização do conteúdo, em detrimento dos aspectos tabular e gráfico. A aprendizagem fica assim prejudicada e quando ocorre, em geral, não é significativa.

Uma possível solução para tais problemas consistiria em uma exploração mais aprofundada do conteúdo por parte dos alunos, ou seja, os alunos precisam manipular e transitar entre as diferentes representações (analítica, tabular e gráfica) de modo a realizar suas próprias descobertas e formar convicções. Para tal os softwares podem ser um recurso didático que pode facilitar o trânsito entre as diferentes representações, proporcionando, desta forma, uma aprendizagem efetiva.

O uso de novas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem

As tecnologias, em diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas conseqüências no cotidiano das pessoas.

Os computadores estão cada vez mais inseridos nas escolas. Tal fato, no entanto, não significa a ocorrência de mudanças significativas no processo de ensino e aprendizagem. Assim, o computador pode ser utilizado para reforçar práticas pedagógicas tradicionais. Nesta abordagem, o computador é utilizado para transmitir informações e conteúdos, mantendo o aluno passivo no processo de aprendizagem.

Por outro lado, o computador pode auxiliar a construção do conhecimento e a compreensão de uma ação. No entanto, a criação de um ambiente de aprendizagem que facilite a construção do conhecimento e o desenvolvimento da habilidade de pensar, não depende somente do *software* escolhido, mas também do professor, da sua ação, da metodologia utilizada e sua compreensão sobre Educação.

Dessa forma, não estamos preocupados somente com a introdução dos computadores nas escolas, mas com a postura do professor e as atitudes do professor e do aluno, com os ambientes de aprendizagem criados, ou seja, a interação entre professor-aluno-*software*.

O que se pretende não é a informatização do processo ensino e aprendizagem, mas sim, uma transformação no processo educacional, que promova:

> *A aprendizagem ao invés do ensino, que coloca o controle do processo de aprendizagem nas mãos do aprendiz, e que auxilia o professor a entender que a educação não é somente a transferência de conhecimento, mas um processo de construção do conhecimento pelo aluno, como produto do seu próprio engajamento*. (Valente, 1993, p.40).

Uma das vantagens assinaladas por vários autores, como (Souza, 1996), a respeito do uso do computador no processo ensino e aprendizagem de funções, consiste no fato dos ambientes computacionais favorecerem abordagens matemáticas mais experimentais, caracterizadas pela formulação, rejeição, verificação e reformulação de hipóteses, bem como gerações de padrões e antecipação de resultados.

Borba (2001) afirma que as calculadoras gráficas e os *softwares* que possibilitam o traçado dos gráficos de funções têm sido utilizados de forma acentuada nos últimos anos. As atividades, além de trazerem a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental: a experimentação. Desta forma, a realização de atividades com o ambiente computacional proporciona a realização de experimentos que seriam impraticáveis de serem realizados na sala de aula tradicional. Borba (2001) afirma, ainda, que o uso do *software* permite que o aluno experimente de modo semelhante ao que faz em aulas práticas de biologia ou de física. Levando em conta estas ponderações o *software Geogebra* foi utilizado como uma ferramenta para agilizar a elaboração das representações gráficas a fim de permitir e facilitar a alternância entre os registros algébricos e gráficos.

A aprendizagem matemática a partir dos registros de representação semiótica

A teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003), tem sido relevante instrumento de pesquisa em relação à aquisição e organização de situações de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, considerando-se a necessidade de apreensão conceitual significativa dos conceitos matemáticos.

Duval (2003) salienta em sua Teoria que, diferente de outras áreas do conhecimento, em Matemática, nem tudo é perceptível ou observável através de objetos concretos, ou seja, os conceitos e conteúdos são abstrações desencadeadas por processos de generalização, com a necessidade das representações semióticas para que ocorra uma verdadeira apreensão e “evolução do pensamento matemático”.

As representações semióticas utilizadas em Matemática são classificadas por Duval (2003), em quatro tipos de registros distintos: Língua Natural, que consiste em uma representação na forma de associações verbais e conceituais; Figuras Geométricas, que são configurações em dimensão zero, um, dois ou três; Sistemas de Escrita, que consistem em representações numéricas, algébricas ou simbólicas e Gráficos Cartesianos. Essa diversidade de representações semióticas possibilita o trânsito entre os diversos registros, podendo ser denominada em dois tipos distintos de transformações das representações semióticas: o Tratamento e a Conversão. O tratamento é a transformação de uma representação em outra, dentro do mesmo registro, assim ele é uma transformação estritamente interna a um registro. A conversão são operações que transformam uma representação pela mudança de registro, por exemplo, a passagem do registro gráfico para o de escrita simbólica e vice-versa.

Segundo Mariani (2006), o fato de um aluno saber resolver uma atividade envolvendo um objeto matemático na sua representação algébrica ou qualquer outra representação não garante que ele tenha adquirido o conceito desse objeto. Nessa ótica, Duval (2003), propõe que o aluno se aproprie de ao menos dois Registros de Representações Semióticas. Sendo possível afirmar ainda que:

> *a apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível a partir da coordenação, pelo sujeito que aprende, de vários registros de representação. Ou seja, quanto maior for a mobilidade com registros de representação diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto*. (Damm, 1999 apud Nehring e Pozzobon, 2008, p.6).

Esta afirmação nos permite perceber a importância dos Registros de Representações Semióticas e das transformações entre eles, no ensino de Matemática, pois permite que ocorra uma melhor compreensão do objeto matemático, estabelecendo um vínculo entre o aprender e entender Matemática, através da conversão entre os registros, ou seja, compreender o objeto matemático, em suas diferentes dimensões.

Duval (2003) propõe que a compreensão em Matemática envolva a coordenação de ao menos dois Registros de Representação Semiótica. Podemos afirmar que, a apreensão conceitual em Matemática, somente é possível a partir da coordenação de vários Registros de Representação, pois quanto maior a mobilização entre eles, maior a apreensão conceitual do objeto matemático (Damm, 1999), ou seja, os Registros de Representação Semiótica e a conversão entre eles propiciam a compreensão do objeto matemático em suas diferentes dimensões.

Procedimentos metodológicos

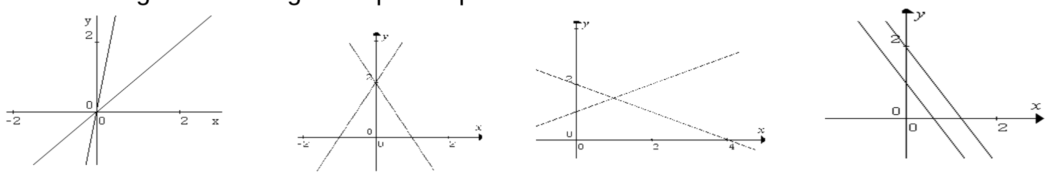
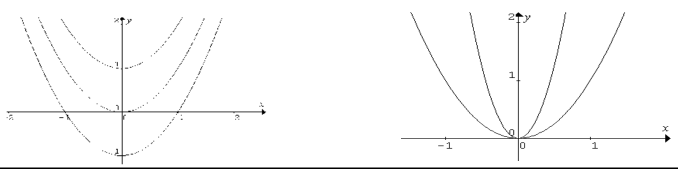
A pesquisa fundamentou-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, destacando o papel da identificação das variáveis visuais pertinentes, no traçado de gráficos, nos tratamentos, nas conversões e argumentações na língua natural. A metodologia utilizada foi a de uma pesquisa qualitativa aliada a um estudo de caso.

O trabalho foi realizado no segundo semestre de 2010, em um turno inverso as aulas normais e envolveu cinco duplas de alunos, do primeiro ano do Ensino Médio, de uma Escola Pública Estadual, de um município do interior do estado do Rio Grande do Sul. Os alunos foram escolhidos pelo professor regente da turma entre os que se dispuseram a vir a todos os encontros. Os participantes estudavam no turno da manhã e desta forma o trabalho foi executado no turno da tarde. Estes alunos não costumavam se utilizar de recursos de informática nas aulas de matemática.

O trabalho foi desenvolvido a partir de quatro atividades envolvendo a função afim e linear e de cinco envolvendo a função quadrática. A realização das atividades ocorreu no laboratório de informática da escola. Este ambiente era formado por quinze computadores, todos com acesso a Internet e, como ocorre em boa parte dos estabelecimentos de ensino, não contou com pessoal de suporte às atividades, ficando tudo por conta do professor. As explorações se deram por intermédio de registros escritos disponibilizados aos alunos que, da mesma forma, produziram material que serviram de base para a análise da compreensão dos conceitos das funções afim, linear e quadrática e das principais dificuldades vivenciadas tanto as de forma conceitual quanto as de utilização do aplicativo.

O Quadro 1 relata as atividades que foram propostas. Todas tiveram como objetivo a exploração de conhecimentos sobre a representação gráfica das funções consideradas.

Quadro 1. Relação das atividades propostas

	Atividades
A1	**a)** Digite a função $y = x$ no aplicativo e deixe o seu gráfico para comparar com os demais; **b)** Digite outras funções do tipo $y = ax$, atribuindo diferentes valores reais para o coeficiente “a”, por exemplo: $y = 2x$, $y = -3x$ e outros; **c)** Compare os gráficos das funções $y = ax$ com o gráfico da função $y = x$ e escreva o que você percebeu sobre as alterações ocorridas nos gráficos, com a variação deste coeficiente (inclinação).
A2	**a)** Digite a função $y = 2x$ no aplicativo e deixe o seu gráfico para comparar com os demais; **b)** Digite outras funções do tipo $y = 2x + b$, atribuindo diferentes valores reais para o coeficiente “b”, por exemplo: $y = 2x + 1$, $y = 2x - 3$ e outros; **c)** Compare os gráficos das funções $y = 2x + b$ com o gráfico da função $y = 2x$ e escreva o que você percebeu sobre as alterações ocorridas nos gráficos, com a variação deste coeficiente. Determine os pontos de intersecção com os eixos x e y.
A3	Considere as funções: $y = x - 2$ e $y = -2x + 6$. Trace seus gráficos e determine: **a)** Quais os pontos em que as retas cortam o eixo x? Anote os resultados. **b)** Que relação existe entre os pontos A(2, 0) e B(3, 0) e as retas? **c)** Como é possível saber algebricamente qual o ponto de intersecção da reta com o eixo x?
A4	Observe os gráficos a seguir e aponte qual coeficiente foi alterado. 
A5	**a)** Digite a função $y = x^2$ no aplicativo e deixe o seu gráfico para comparar com os demais; **b)** Digite outras funções do tipo $y = ax^2$, atribuindo diferentes valores reais para o coeficiente “a”, por exemplo: $y = 2x^2$, $y = -3x^2$ e outros; **c)** Compare os gráficos das funções $y = ax^2$ com o gráfico da função $y = x^2$ e escreva o que você percebeu sobre as alterações ocorridas nos gráficos, com a variação deste coeficiente.
A6	**a)** Digite a função $y = 2x^2$ no aplicativo e determine o seu gráfico para comparar **b)** Digite outras funções do tipo $y = 2x^2 + bx$, atribuindo diferentes valores reais para o coeficiente “b”, como, por exemplo: $y = 2x^2 + x$, $y = 2x^2 - x$; **c)** Compare os gráficos das funções $y = 2x^2 + bx$ com o gráfico da função $y = 2x^2$ e escreva o que você percebeu sobre as alterações ocorridas nos gráficos, com a variação deste coeficiente. Determine os pontos de intersecção com os eixos x e y.
A7	**a)** Digite a função $y = 2x^2$ no aplicativo e deixe o seu gráfico para comparar com os demais; **b)** Digite outras funções do tipo $y = 2x^2 + c$, atribuindo diferentes valores reais para o coeficiente “c”, por exemplo: $y = 2x^2 + 1$, $y = 2x^2 - 1$ e outros; **c)** Compare os gráficos das funções $y = 2x^2 + c$ com o gráfico da função $y = 2x^2$ e escreva o que você percebeu sobre as alterações ocorridas nos gráficos, com a variação deste coeficiente. Determine os pontos de intersecção com os eixos x e y.
A8	Observe os gráficos a seguir e aponte qual coeficiente foi alterado. 
A9	Marque a(s) alternativa(s) que representa(m) uma função quadrática: a) $y = 3x^2 + 7x + 4$ b) $y = x^2 - x + 3$ c) $y = x - x^2$ d) $y = 3x + 7$ e) $y = 2^x$ f) $y = x - 2$ g) $y = x^2$ h) $y = x(x+1)$ i) $y = (x+1)^2$ j) $y = x^2 - x^3$ k) $y = x^3$ l) $y = (x+1)(x-1)$

As nove atividades, quatro envolvendo as funções afim e linear e cinco a quadrática, foram identificadas como A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 e A9. A análise foi realizada por meio dos registros escritos elaborados pelos alunos no desenvolvimento das questões propostas nas nove atividades. Foram analisadas as conversões e os tratamentos realizados pelos alunos e também o auxílio proporcionado pelo computador.

Descrição e análise das atividades

Os encontros ocorreram no mês de Novembro de 2010 e contaram com a participação de 10 alunos voluntários do primeiro ano do Ensino Médio. As atividades foram realizadas em duplas e tiveram como finalidade realizar a articulação entre os registros gráfico e o algébrico e procurou-se trabalhar mais no sentido unidirecional do algébrico para o gráfico.

Na elaboração das atividades tentou-se dar destaque a formulação de conjecturas, de questionamentos e de validação dos resultados, por parte do aluno. As atividades estavam disponíveis na área de trabalho do aplicativo. Para ter acesso a elas bastava que o aluno iniciasse o software. O objetivo era que o aluno colocasse as respostas logo abaixo do enunciado de cada questão. O professor teve o papel de orientador do processo, gerenciando as atividades dos alunos e fazendo intervenções somente quando fosse necessário.

Nas atividades A1, A2, A5, A6 e A7 foram propostas conversões que partiam do registro algébrico na direção do gráfico. Ao final de cada atividade era requisitado que o aluno comparasse os diversos gráficos quando um determinado coeficiente era alterado e desse a sua interpretação do ocorrido. Com isso, pretendia-se promover justificativas em língua natural que expressassem os conhecimentos que foram mobilizados. O registro simbólico não foi utilizado por nenhuma dupla.

Após a explicação de como se desenrolaria a atividade .os alunos ficaram olhando um para o outro e perguntaram: *"mas o que é para fazer?"*. Então foi explicado novamente que era para: *"explorar, alterar os valores e verificar o que ocorreria, ou seja, agir sobre o programa!".* Aos poucos eles foram se motivando e respondendo ao que foi solicitado. A atividade A1 (Figura 1) teve por objetivo levar o aluno a perceber que o coeficiente angular é responsável pela inclinação da reta em relação ao eixo x. Os alunos conseguiram por intermédio da visualização perceber isto, como pode-se notar na resposta de um aluno: *"quando o **a** é positivo ela se move no sentido anti-horário. Quando o **a** é negativo ela se move no sentido horário".*

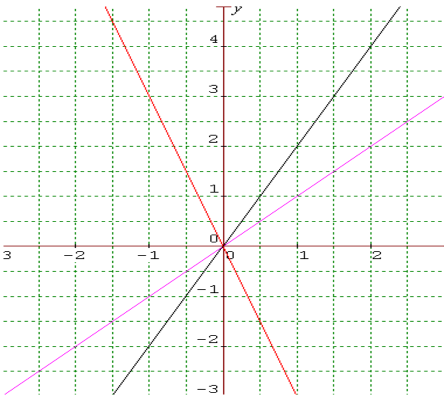


Figura 1. Atividade 1

O objetivo da atividade A2 (Figura 2) foi levar o aluno a verificar que por meio da variação do coeficiente linear seria possível realizar translações verticais da reta e que isto corresponde ao ponto (ordenada) em que a linha corta o eixo y. O coeficiente angular permaneceu fixo, pois de acordo com Duval:

> *para que o aluno discrimine as unidades significantes de uma representação gráfica, é elementar, em todo método experimental, a mudança de uma só variável mantendo constantes os valores das outras variáveis* (1999, p. 13).

Esperava-se que a estratégia utilizada pelos alunos para a resolução dessa questão fosse a manipulação intensiva do *software*, para que com isto tivessem a oportunidade de descobrir, por meio da visualização, o que acontece com este coeficiente ao variá-lo, mantendo o coeficiente angular constante. Dessa forma, acreditava-se que os alunos não teriam dificuldades em reconhecer o significado geométrico do coeficiente linear e dos saberes associados a ele (sinal, ordem, translação).

Resposta de um aluno a respeito da atividade A2*: "quando o **b** é positivo, a reta se move para a esquerda; quando o **b** é negativo, ela se move para a direita; quando ele é nulo fica em cima do eixo do plano cartesiano".*

Na atividade A3 (Figura 3) o objetivo era que o aluno percebesse que o ponto de intersecção da reta com o eixo x, equivale à raiz da função e que para encontrá-la algebricamente, basta igualar y = 0 e resolver a equação resultante. Já era esperado que os alunos encontrassem dificuldades em responder a esta questão, pois, segundo Duval (1988), o ponto de intersecção da reta com o eixo das abscissas, desempenha um papel "perturbador" na associação visual da variável e sua respectiva expressão algébrica.

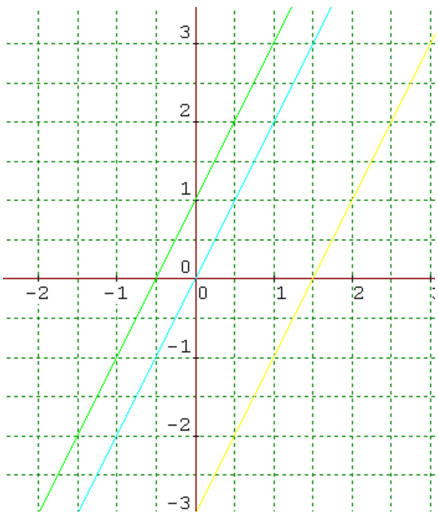


Figura 2. Atividade 2

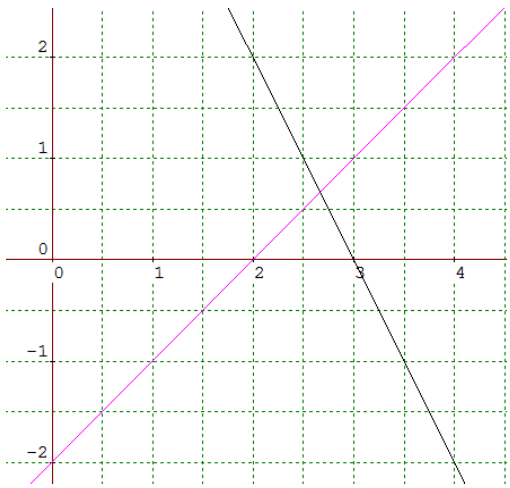


Figura 3. Atividade 3

Apenas uma dupla conseguiu responder a todos os itens desta questão corretamente, fazendo o seguinte comentário: *"os pontos que cortam o eixo x são o 2 e o 3. Determine a posição da reta em relação aos eixos x e y. Com a função y=ax + b devemos igualar o y a zero".*

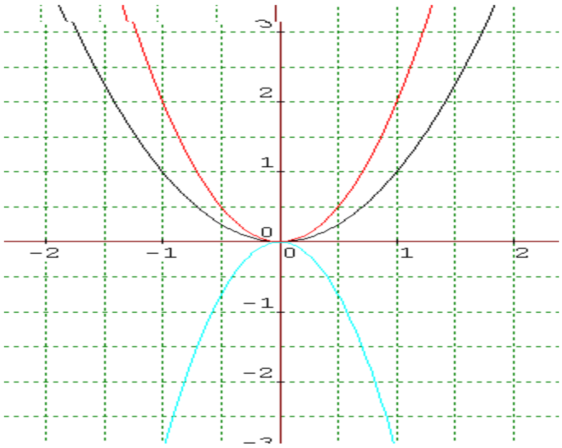


Figura 4. Atividade 5

Na atividade A4 foi proposta a conversão do registro gráfico para o registro em linguagem natural. O objetivo era que, sem a equação da função e com o gráfico já traçado fosse identificado qual dos coeficientes foi alterado. Os alunos encontraram bastante dificuldade, porém, três duplas identificaram corretamente os coeficientes em todos os gráficos, uma dupla em três gráficos e uma outra dupla não respondeu a esta questão.

A atividade A5 (Figura 4) tinha por objetivo levar o aluno a perceber que o coeficiente **a** é responsável pela convexidade ou concavidade da função. Os alunos tiveram facilidade em compreender o papel deste coeficiente, pois todas as duplas responderam corretamente. Para ilustrar segue o comentário de um aluno: *"para um **a** positivo a abertura é voltada para cima e para um **a** negativo ela é virada para baixo".*

Na atividade A6 (Figura 5) o objetivo foi levar o aluno a perceber que ao mudarmos os valores do coeficiente **b** mudamos a simetria, onde o eixo de simetria em todos os gráficos é o eixo y.

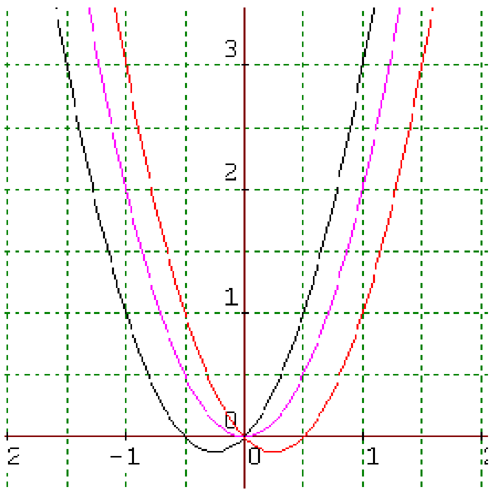


Figura 5. Atividade 6

Comentário de uma dupla: *"ao mudar o valor da variável **b**, percebe-se que apenas mudou a posição das parábolas. Quando o **b** é positivo se desloca para a esquerda, quando é negativo se desloca para a direita".* Em relação aos pontos de intersecção, todas as duplas responderam corretamente.

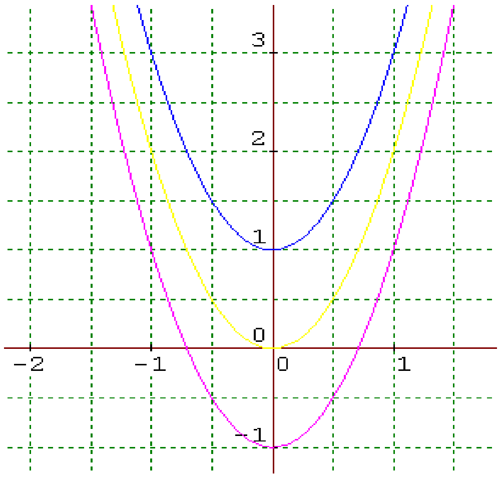


Figura 6. Atividade 7

O objetivo da atividade A7 (Figura 6) foi levar o aluno a perceber que o coeficiente **c** é o responsável pela intersecção da parábola com o eixo y. As duplas não encontraram dificuldades para resolver esta parte da atividade. No entanto, quando solicitadas a determinar o ponto de intersecção uma dupla encontrou dificuldade e não respondeu. Acredita-se que isso tenha acontecido porque a função $x^2 + 1$ não intercepta o eixo x. As demais foram respondidas corretamente.

Comentário de uma dupla: *"Se o **c** é positivo o vértice mantém a curvatura, mas sobe no gráfico. Se for negativo se desloca para baixo"*.

A atividade A8 tinha a mesma proposta e o mesmo objetivo da atividade A4, isto é, explorar a conversão do registro gráfico para o registro em linguagem natural e tinha como objetivo, que identificassem que coeficiente foi alterado, sem o conhecimento da equação da função. Nesta atividade os alunos responderam com bastante facilidade, pois os dois gráficos eram iguais aos das atividades A5 e A7, onde os coeficientes alterados foram o **a** e o **c**, respectivamente. Finalmente na atividade A9 o aluno deveria marcar as alternativas que representam uma função quadrática, realizando assim, um tratamento algébrico. Todos os alunos realizaram corretamente esta atividade.

Considerações Finais

O presente trabalho teve como objetivo investigar os benefícios do *software* educativo *Geogebra* para o Ensino de Funções como facilitador da conversão do registro algébrico para o registro gráfico das funções linear e quadrática.

A pesquisa fundamentou-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003), a qual pautou a proposição de quatro atividades envolvendo a função linear e cinco atividades envolvendo a função quadrática, partindo do registro algébrico em direção ao registro gráfico com um grupo de alunos do 1º Ano do Ensino Médio.

As análises se deram por intermédio dos registros escritos pelos alunos e os seguintes resultados podem ser destacados:

- Inicialmente, os alunos apresentaram certa resistência e algumas dificuldades em relação à proposta de trabalho. No entanto, logo passaram a demonstrar entusiasmo, motivação e, sobretudo, comprometimento.

- As atividades possibilitaram a exploração das variáveis pertinentes, como por exemplo, crescimento/decrescimento, intersecção com os eixos x e y e a relação com a variação dos coeficientes a, b e c (exigindo assim, o tratamento do registro gráfico).
- As experimentações tendem, portanto, a comprovar que a aquisição de saberes relacionados aos coeficientes das funções por meio da articulação dos registros algébrico e gráfico, em geral resistente ao ensino usual, é, no entanto, susceptível de saltos qualitativos importantes via a interação aluno-*software,*ainda que de curta duração, com um ambiente informático.
- A experimentação e a visualização tiveram um importante papel na compreensão de alguns saberes ligados aos coeficientes das funções.

> *A importância da visualização não deve ser utilitária, no sentido de ajudar na compreensão da álgebra como ela realmente é ou resolver os problemas da educação matemática; a visualização deve ser vista como um modo particular de conhecer, dentre muitos, que é parte da atividade matemática* (Borba, 2001).

Este trabalho procurou mostrar que um recurso computacional bem utilizado, pode se constituir em uma ajuda efetiva à aprendizagem. Enfim, pode-se concluir que a inserção do ambiente computacional pode conduzir a uma melhora no ensino de funções, na capacidade de precisar e estimar os coeficientes e estabelecer relações entre suas variações e comportamento da representação gráfica das mesmas.

Referências

Borba, M. C., Penteado, M. G. (2001) *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Damm, R. F. (1999) Registros de Representação. In: Machado, Silvia Dias Alcântara et al. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, p. 135-153.

Duval, R. (2003) .Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (Org). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, SP: Papirus, p. 11-33. (Coleção Papirus Educação).

Duval, R. (1999) *Aprendizagens Intelectua*is. Caderno do curso ministrado na PUC – SP.

Duval, R. (1988) *Graphiques et equations: L'Articulacion de deux registrtes.* In: Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg.

Garcias, T. S., Borba, M. C. (1999). Calculadoras gráficas e funções quadráticas. In: Borba, M. C. *Calculadoras Gráficas e Educação Matemática*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Art Bureau, p. 59-74,.

Mariani, R. C. P. (2006). A *transição da Educação Básica para o Ensino Superior: A coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de cálculo.* Tese de doutorado, PUC/SP.

Nehring, C. M. (1997). *A multiplicação e seus Registros de Representação nas Séries Iniciais*. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis.

Santos, E. P. (2002.).*Função afim y= ax+b: a articulação entre os registros gráfico e algébrico com auxílio de um software educativo*. Dissertação de Mestrado, PUC-SP,

Souza, T. A. (1996). *Calculadoras Gráficas: uma proposta Didático-pedagógica para o tema funções quadráticas*. Dissertação de mestrado. UNESP-SP,.

Valente, J. A. (1993). Por que o computador na educação? In: Valente, J. A. *Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação*, Campinas: Unicamp.

Vanessa Jurinic Cassol vanessacassol@yahoo.com.br
Lori Viali Viali@pucrs.br
Regis Alexandre Lahm lahm@pucrs.br
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS)
Porto Alegre – RS - Brasil

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 171-185
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar

Una propuesta para el trabajo en Geometría en la formación inicial de profesores de matemática

Mario Dalcín, Verónica Molfino.

Resumen

Relatamos el trabajo en clase en torno a dos actividades, una referida a polígonos y otra referida a poliedros. Las mismas se llevaron adelante como parte de las actividades curriculares del curso de Geometría, en dos grupos de primer año del profesorado de matemática. A través de estas dos actividades, buscamos comunicar las virtudes y desafíos que implica el diseño y puesta en práctica de un curso centrado en la actividad matemática de los estudiantes.

Abstract

We relate the class work on two activities, one referring to polygons, and another referred to polyhedra. They were carried out as part of curricular activities of a Geometry course in two groups of first year in math teacher's study. Through these activities we seek to communicate the virtues and challenges of the design and implementation of a course focused on students' mathematical activity

Resumo

Relatamos o trabalho da classe em duas atividades, uma referindo-se a polígonos e outro referindo-se a poliedros. Eles foram realizadas como parte das atividades curriculares do curso de Geometria, em dois grupos de professores de matemática do primeiro ano. Através destas atividades, buscamos comunicar as virtudes e os desafios da concepção e implementação de um curso com foco na atividade matemática dos alunos

Introducción

Después de una larga tradición de una extensa diversidad de planes de estudio para formación docente, en Uruguay, a partir del año 2008, rige un Plan único para profesores de matemática de enseñanza media. Esto fue y es posible debido a una tradición que buscó elaborar planes únicos que afectaran a todo el país (también a nivel medio e inicial); a la extensión territorial relativamente pequeña de nuestro país, donde no hay diferencias culturales tan marcadas que hagan necesario pensar en diversidad de planes; y a un proceso de discusión que involucró a docentes y autoridades en la formulación del mismo y que también implica un compromiso de los involucrados en llevarlo adelante.

Los estudiantes pueden ingresar al profesorado de matemática habiendo cursado cualquier orientación del Bachillerato Diversificado (que abarca los tres últimos años de la enseñanza media), lo que implica que estos estudiantes inicien el profesorado con experiencias personales muy variadas en lo que a la matemática se refiere, ya que las distintas orientaciones del Bachillerato tienen diferentes cargas horarias y distintos programas.

El compromiso de llevar adelante este plan 2008 de formación de profesores de matemática de enseñanza media implica el desafío de diseñar cursos que estén acordes a los conocimientos matemáticos con los que ingresan los estudiantes y que a su vez les permitan desarrollarse, tanto en lo referido a los contenidos como a los procesos cognitivos propios de la matemática, que les sean de utilidad para seguir avanzando en la carrera y para su futura tarea como docentes de enseñanza media. En este último sentido hacemos hincapié en que la forma de trabajo debe ser acorde a la que es deseable que ellos desarrollen en dicha tarea.

¿Cómo concebir la geometría y la actividad geométrica?

Houdement y Kuzniak (1993) plantean tres geometrías:

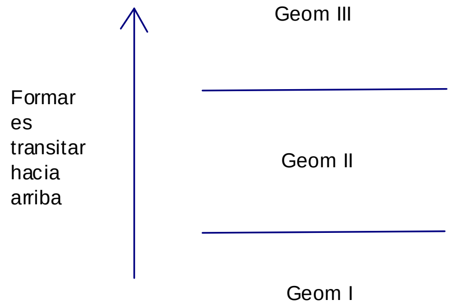
Geometría I. La geometría natural. La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos.

Geometría II. La geometría axiomática natural. La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático preciso. Pero dicho sistema axiomático pretende responder, en la medida de las posibilidades, a lo observable por el humano.

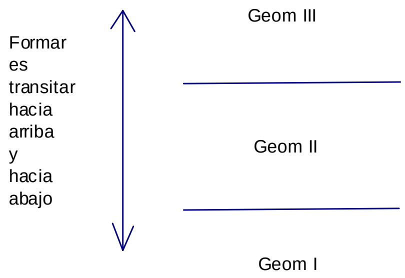
Geometría III. La geometría axiomática formalista. Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

Estas tres geometrías nos dan un marco desde el cuál dar cuenta de toda la geometría, desde la que se trabaja en la enseñanza primaria hasta aquella con la que trabaja un matemático. Estas podrían pensarse en un primer momento como niveles a través de los cuales los estudiantes deberían transitar, concebirlas como una jerarquía, la Geometría II mejor que la Geometría I, la Geometría III mejor que la Geometría II.

Así es como ha sido concebida tradicionalmente la enseñanza de la geometría, un camino unidireccional, siempre ascendente:



Sin embargo, no se trata de dirimir cuál de estas geometrías es mejor, no es eso lo que está planteado: los autores postulan tres geometrías posibles, tres enfoques distintos de un mismo hecho, pero donde ninguno niega a los otros. Las prácticas permiten ver en cuál se está trabajando en cada momento, son tres dimensiones distintas, el camino deductivo es uno de esos caminos (Geometría II), pero el camino puede ser el de constatar mediante mediciones (Geometría I), o validar al interior de un sistema axiomático formal (Geometría III). Cada una de estas dimensiones no niega a la otra. Esto permite concebir la formación de un estudiante en el ámbito de la geometría como un tránsito continuo entre estas tres dimensiones.



Por otro lado, Houdement y Kuzniak plantean un vínculo entre su modelo de las Geometrías I, II, III y los niveles de van Hiele, lo cual facilita establecer conexiones entre un modelo medianamente difundido y manejado por los docentes como es el de van Hiele y este nuevo modelo. Quien desee profundizar en este aspecto, puede remitirse a Kuzniak, A. (2006). *Paradigmes et espaces de travail geometriques. Elements d'un cadre theorique pour I'enseignement et la formation des enseignants en geometrie*. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 6 (2), April, pp. 167–187.

Consideramos que dadas las características antes mencionadas de los estudiantes que ingresan al profesorado de matemática, así como de la amplitud del modelo de Houdement y Kuzniak (1993) de las Geometrías I, II, III, este nos puede ser de utilidad para entender el trabajo geométrico de nuestros estudiantes y así poder contribuir a su desarrollo. Las producciones de nuestros estudiantes al iniciar sus estudios de profesorado pueden ser ubicadas dentro de la Geometría I o la Geometría II, dependiendo de la actividad en que estén trabajando.

Una propuesta de curso

Las actividades que relatamos aquí forman parte de un curso organizado en base a fichas de trabajo armadas centralmente en base a tareas que el estudiante debe resolver. Las mismas se encuentran disponibles en la página http://www.depdematematica.org/ipa/sitio/login/index.php.

Algunas de dichas tareas están compuestas por preguntas que plantean distintas situaciones problemáticas. Otras proponen la búsqueda de información en libros de texto de geometría o en Internet, ya sea acerca de contenidos específicos de geometría, como de la época, vida y obra de distintos matemáticos. En otros casos se plantea la construcción de modelos en Geometría Dinámica y también se proponen ejercicios de aplicación de contenidos ya tratados en clase. El diseño de un curso de este tipo es una alternativa a la forma en que tradicionalmente se ha enseñado la geometría, en la que el conocimiento geométrico ya está escrito en los textos y llega al estudiante a través de la exposición del profesor. En esta propuesta de curso las actividades son planteadas para que los estudiantes las trabajen en equipos en clase (equipos que se mantienen para el trabajo domiciliario) y donde la formulación de preguntas y conjeturas es cosa cotidiana. La responsabilidad del docente está en diseñar las actividades y en organizar el desarrollo de la clase, buscando que sean los estudiantes quienes lleven adelante las tareas propuestas y, claro está, organizando las puestas en común, institucionalizando los acuerdos alcanzados, organizando las preguntas que van surgiendo en el transcurso de la clase y que muchas veces implican la propuesta de nuevas actividades para poder responderlas.

A continuación relatamos lo acontecido con dos actividades, una referida al trabajo con polígonos y otra al trabajo con poliedros y que tuvieron una vinculación entre sí en el desarrollo del curso. Las actividades fueron planteadas en dos grupos de primer año del profesorado de matemática –de 20 estudiantes cada uno y de los cuales somos respectivamente profesores–, en el curso de Geometría Euclidiana (curso anual de 8 horas semanales de 45 minutos). Los estudiantes trabajan en grupos de cuatro, cinco o seis integrantes. Las 8 horas semanales están agrupadas en dos módulos de 4 horas cada uno. El relato está hecho en primera persona pero pueden referir a hechos acontecidos en uno u otro grupo.

Una actividad con polígonos regulares

La actividad que se les planteó a los estudiantes fue la siguiente:

"Si usamos un solo tipo de polígono regular por vez y los vértices de los polígonos deben coincidir, ¿qué polígonos regulares pueden ser usados para embaldosar una superficie plana ilimitada?"

La primera pregunta que surgió en algunos grupos fue ¿qué es un polígono regular? Sus respuestas fueron:

1) polígono con lados iguales e inscriptible,

2) polígono con lados iguales y ángulos iguales,

3) polígono con lados iguales,

4) polígono con ángulos iguales.

- Hubo estudiantes que afirmaban que la definición 3 implicaba la definición 4 y también otros que decían que la definición 4 implicaba la definición 3.
- Para fundamentar estas afirmaciones algunos estudiantes sostenían que en el triángulo equilátero esto era así, por lo que en el resto de los polígonos [regulares] también debería ser así.
- Al no haber acuerdo en todo el grupo de que esto debería ser así en todos los polígonos regulares, se siguieron buscando argumentos y surgió -para la proposición en que la definición 4 implicaba la definición 3- el caso del rectángulo como contraejemplo para ver que no era cierta.

- Les costó un poco más resolver acerca de la validez de la proposición en que la definición 3 implicaba la definición 4, pero en algún momento un estudiante sugirió el rombo como caso donde no se cumplía.
- Les propuse 'acomodar' las proposiciones anteriores excluyendo a los cuadriláteros y afirmándoles que en todos los otros polígonos sí se cumplía.
- Les llevó un buen tiempo dibujar un polígono que sirviera de contraejemplo para alguna de las dos proposiciones. Por lo general dibujaban hexágonos regulares. Después de buscar unos cuantos minutos algunos estudiantes llegaron al pentágono equilátero formado por un cuadrado y un triángulo equilátero pegados por un lado. (Figura 1)
- Más trabajo aún llevó encontrar un polígono que tuviera ángulos iguales y que no tuviera lados iguales. Finalmente surgió un hexágono a partir de un hexágono regular al que le trazaron un nuevo lado paralelo a uno de los lados. (Figura 2)

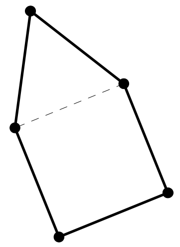


Figura 1

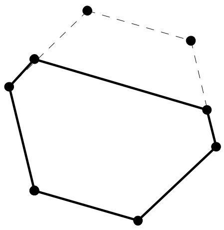


Figura 2

En base a lo anterior, se vio la necesidad de la igualdad de los lados y la igualdad de los ángulos para definir polígono regular. Acordamos que las definiciones 1 y 2 eran correctas, dejando claro que su equivalencia en ese momento del desarrollo del curso no la podíamos justificar más allá de no poder encontrar contraejemplos donde se cumpliera una y no la otra.

Recién ahora empezamos con la pregunta del embaldosado.

- Algunos grupos usaron la estrategia de dibujar a mano distintos embaldosados. Dadas las imperfecciones de sus figuras también admiten el pentágono regular como posible baldosa.
- Otros, después de empezar dibujando, pensaron en la cantidad de ángulos que confluyen en un mismo vértice. Como el ángulo del polígono no puede ser llano, tendrá que haber como mínimo 3 polígonos, entonces: 360/3 = 120 y tenían el exágono, 360/4 = 90, 360/5 = 108, 360/6 = 60 y "ángulo más chico que 60 no había ningún polígono regular que tuviera". Concluían entonces, sin intentar dibujar el embaldosado, que las posibles baldosas eran de 3, 4, 5 y 6 lados.

Inicialmente admiten el pentágono regular como posible baldosa, basándose tanto en argumentos visuales como en argumentos algebraicos (como los mencionados).

- La estrategia de dos equipos fue dividir 360 entre la medida del ángulo interior del polígono y buscar que el resultado sea un número natural. Les sugiero a estos dos equipos hacer una tabla de dos columnas para ordenar sus observaciones.

Tabla 1

Medida del ángulo interior del polígono	*360/medida de la primer columna*
60	*6*
90	*4*
108	*3 y algo*
120	*3*
…	*…*
Se aproxima a 180	*Se aproxima a 2*

Con esta búsqueda podían seguir considerando polígonos de cualquier número de lados. Les propongo ahora agregar las dos columnas de los costados:

Tabla 2

Polígono	*Medida del ángulo interior del polígono*	*360/medida de la primer columna*	*Significado de la 3er columna*
Triángulo equilátero	*60*	*6*	*Cantidad de polígonos regulares en torno a un mismo vértice*
Cuadrado	*90*	*4*	
Pentágono Regular	*108*	*3 y algo*	
Hexágono Regular	*120*	*3*	
	…	*…*	
	Se aproxima a 180	*Se aproxima a 2*	

De esta forma pudieron ver que entre 3 y 2 no hay ningún polígono más, que 3 es el mínimo.

- Un estudiante graficó la medida del ángulo interior del polígono en función de 360/medida de la primer columna (los valores de la tercer columna). Al hacerlo en el pizarrón el grupo entero puede ver una nueva manera de interpretar los datos de las tablas.

- Otros, después, a partir de que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados viene dada por la expresión 180(n-2), hallaron una expresión general para cada ángulo del polígono regular [180(n-2)/n] y concluían que la expresión 360/180(n-2)/n tenía que ser natural para que el problema tuviera solución, agregando que n debía ser mayor o igual a 3. Simplificando la expresión anterior llegan a que 2n/(n-2) tiene que ser natural. Van dando valores a n: 3, 4, 5, 6, 7… Y como se puede seguir indefinidamente se ven obligados a interpretar los números que van obteniendo.

- También hay quien usando la calculadora se equivoca en las cuentas. Ante la pregunta ¿el decágono sirve? hace 1440/10 = 144 y al calcular 360/144 obtienen un número natural.

- Otro grupo, que había intentado hacer un embaldosado con pentágonos, aclaró que no se podía y explicó por qué, mediante el cálculo de la medida de los ángulos interiores de un pentágono.

- Otro grupo llega a que con 7 lados o más no se puede.

- Quedó pendiente para alguna clase futura si con cualquier baldosa triangular se podía embaldosar el plano, lo mismo con baldosas de 4 lados (algunos ya mencionaron rectángulos o trapecios isósceles; veremos si llegan a que cualquier cuadrilátero sirve). El estudiante que había ideado el pentágono equilátero pegando cuadrado y triángulo equilátero dice que su baldosa sirve para recubrir el plano. También surgió la pregunta si combinando polígonos regulares se podía.

Una actividad con poliedros

La actividad es la primera de una serie de actividades que buscan concluir con la construcción, definición y fundamentación de por qué los poliedros regulares son cinco.

"¿Es posible construir poliedros convexos cuyas caras sean polígonos regulares de un solo tipo?"

En otras palabras:

¿Es posible construir poliedros convexos cuyas caras sean exclusivamente triángulos equiláteros?

¿Es posible construir poliedros convexos cuyas caras sean exclusivamente cuadrados?

¿Es posible construir poliedros convexos cuyas caras sean exclusivamente pentágonos regulares?

¿Es posible construir poliedros convexos cuyas caras sean exclusivamente hexágonos regulares?

"¿Cuántos poliedros distintos puedes construir en cada caso?"

Se llevaron a clase varillas plásticas usadas para el cableado (tienen forma cilíndrica, miden dos metros de longitud y un centímetro de diámetro, se consiguen en cualquier ferretería, son relativamente baratas y fáciles de cortar), algunos cuchillos y piola. Un primer problema a resolver fue el de cortar las varillas de dos metros en varillas iguales para de esa forma poder trabajar todos los equipos de la clase con las mismas varillas y a su vez surgió la idea de sugerir al otro grupo que también usaran esa misma medida. Los estudiantes de cada grupo cotidianamente trabajan en equipos en el curso de Geometría, en esta ocasión no es distinto.

- Los poliedros convexos que construyeron cuyas caras son exclusivamente triángulos equiláteros fueron los siguientes:

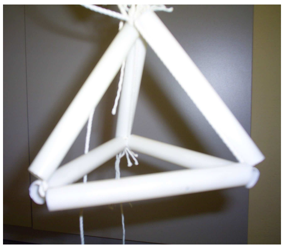


Figura 3

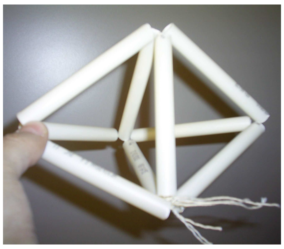


Figura 4

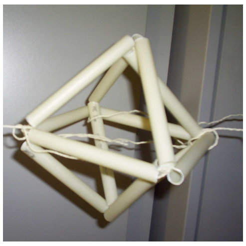


Figura 5

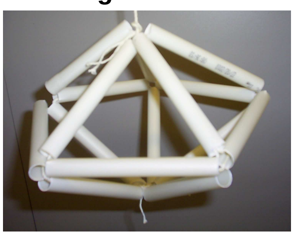


Figura 6

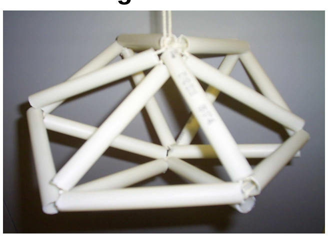


Figura 7

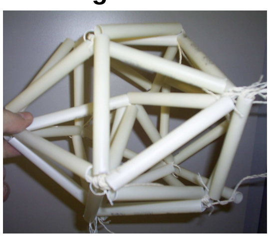


Figura 8

Uno o dos estudiantes han visto previamente el icosaedro y dudan respecto a si su nombre es icosaedro o dodecaedro.

- Con caras que sean cuadrados construyen el siguiente poliedro (que todos recuerdan se llama cubo). (Figura 9)
- Con caras que sean pentágonos regulares construyen el siguiente poliedro (que algunos pocos estudiantes reconocen como dodecaedro). (Figura 10)
- Inspirados por la construcción del dodecaedro, un equipo de estudiantes emprende la construcción de un poliedro con caras hexagonales y construyen el siguiente poliedro (Figura 11)

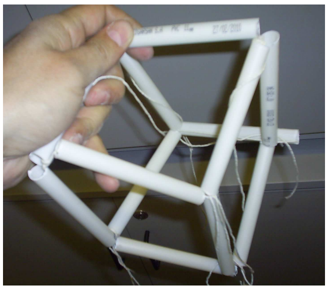


Figura 9

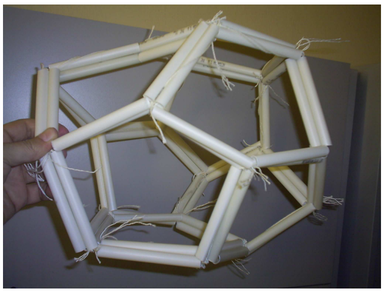


Figura 10

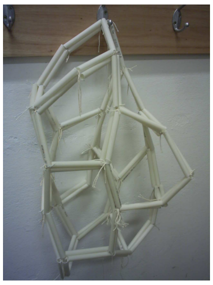


Figura 11

Estos poliedros fueron construidos en la primera clase (4 horas) en que se planteó la actividad.

Haciendo un balance de lo trabajado hasta el momento –y previendo el profesor los problemas a resolver en la clase siguiente- se observa que de entre los poliedros convexos cuyas caras son triángulos equiláteros hay algunos que fueron construidos siguiendo una misma idea ‘de pegar dos pirámides por la base’: así se construyó la bipirámide triangular (Figura 4), bipirámide cuadrada (octaedro regular, Figura 5), bipirámide pentagonal (Figura 6) y bipirámide hexagonal (Figura 7).

Se les pide a los estudiantes que para la clase siguiente construyan desarrollos de dichas pirámides de bases triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares, hexágonos regulares. Se acuerda usar una misma medida de arista (al igual que se usaron con la varillas plásticas) para alivianar el trabajo a hacer por cada uno y además que en la clase siguiente se pudieran armar los poliedros usando partes construidas por distintos estudiantes.

La pregunta que queda pendiente para la próxima clase es si habrá otros poliedros (además de los ya construidos) cuyas caras sean polígonos regulares de un solo tipo.

A la clase siguiente los estudiantes traen los poliedros construidos:

- Planteado a los integrantes del grupo qué opinan del poliedro de la Fig. 12 algunos estudiantes dicen que dicho poliedro no corresponde a lo que planteaba la actividad, ya que todas las caras tenían que ser del mismo tipo.

El profesor deja planteada la pregunta acerca de si habrán otros poliedros cuyas caras sean polígonos regulares de más de un tipo. Anuncia que más adelante se abordará el estudio de estos poliedros.

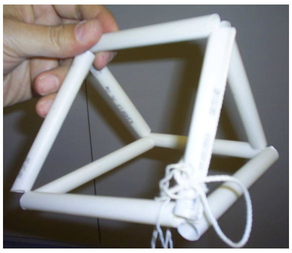


Figura 12

Los poliedros de las Figuras 13 y 14 (mostramos dos imágenes de cada uno para que se pueda apreciar mejor de qué poliedro se trata) no son admitidos por algunos estudiantes como parte de la respuesta a la actividad por no ser convexos.

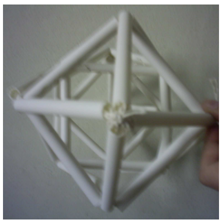


Figura 13

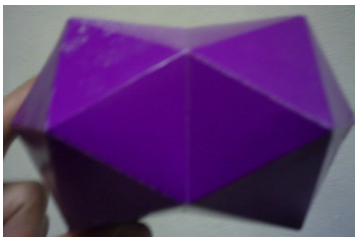


Figura 14

- El profesor plantea la pregunta acerca de si habrá infinitos poliedros no convexos cuyas caras sean triángulos equiláteros.

Algunos estudiantes proponen que a partir del poliedro de la Figura 13 se le puede cortar una de las tapas [pirámide de base cuadrada] y pegándole un poliedro idéntico obtener un poliedro de más caras. Este procedimiento se podría repetir con el nuevo poliedro que se formó.

Otros observan que el mismo procedimiento también se podría usar con el poliedro de la Figura 14.

Se concluye entonces que los poliedros no convexos de caras triángulos equiláteros son infinitos.

- El profesor deja planteada la pregunta: ¿Serán infinitos los poliedros convexos cuyas caras sean triángulos equiláteros?

La intención es que en las clases siguientes sigan intentando construir otros poliedros de este tipo y que frente a las dificultades de hallar nuevos, surja en el grupo la idea de que son un conjunto finito. Se planteará en ese momento buscar construir todos los poliedros convexos de la familia y elaborar una demostración de por qué son un número finito.

- Un tema que había quedado pendiente de la clase anterior era el del ‘poliedro’ bipirámide hexagonal. Como docentes, y en la modalidad de trabajo que nos planteamos para el curso, la presencia física, material de este ‘poliedro’ nos genera un (bienvenido) problema. Buscando ser coherente con la propuesta, el profesor no dice que dicho ‘poliedro’ no existe y después explica por qué no existe. De hacer eso estaríamos apelando a nuestra autoridad, y haciendo que el conocimiento llegue a la clase por medio del profesor, contrariando así la intención de que las idea surjan de los propios estudiantes. En nuestra propuesta de trabajo buscamos que sean ellos quienes elaboren respuestas para las situaciones que se van planteando –como esta, muchas surgen del desarrollo de la clase-, que las discutan con los integrantes de su equipo y que después las expliquen y defiendan frente al grupo.

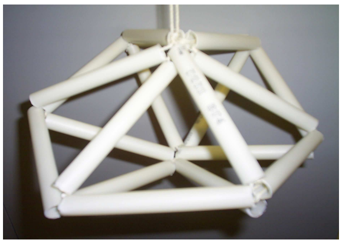


Figura 15

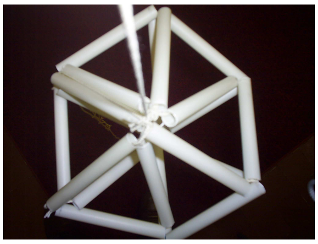


Figura 16

Las características del material concreto con el que trabajan hacen posible que dicho poliedro se pueda construir. El hecho de que 6 triángulos equiláteros confluyeran a un mismo vértice no les generaba ningún conflicto, el peso de la evidencia material era tal que incluso recordando lo que ya habíamos trabajado algunos días antes con los embaldosados del plano con polígonos regulares de un solo tipo (y donde los triángulos equiláteros eran una de las posibles respuestas) admiten las dos posibilidades: que funcione en el plano y que ahora también se pueda usar para construir esta ‘bipirámide hexagonal’.

En la clase anterior se les había pedido que construyeran desarrollos de pirámides de bases triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares, hexágonos regulares. Según sus propias palabras, ‘pegando dos de estas pirámides por sus bases’, se podían obtener los poliedros construidos con las varillas.

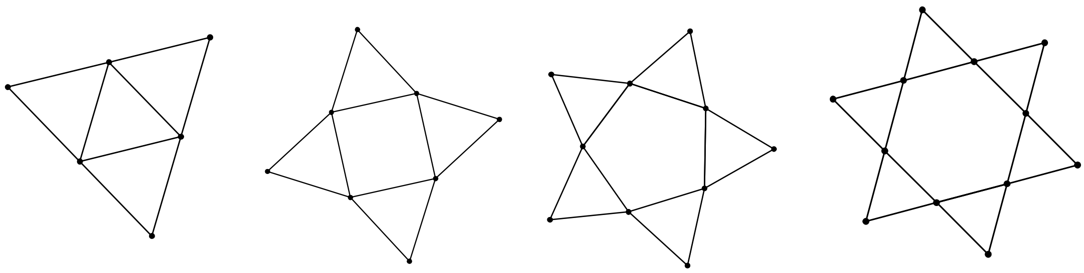


Figura 17

Estos desarrollos que tienen dibujados en papel pero sin recortar (Figura 17), no les sirven para observar ninguna contradicción en la existencia de la ‘bipirámide hexagonal’

Quien primero se da cuenta de la imposibilidad de tal 'poliedro' es un estudiante que construyó los desarrollos de las pirámides en cartón. Uniendo las vértices libres de los triángulos equiláteros muestra cómo formar una pirámide de base triangulas, una de base cuadrada, una de base pentagonal y cuando intenta armar la de base hexagonal observa que todos los vértices coinciden en un mismo punto del plano de la base.

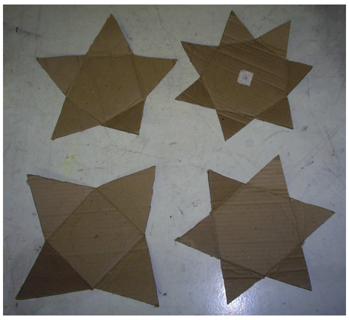


Figura 18

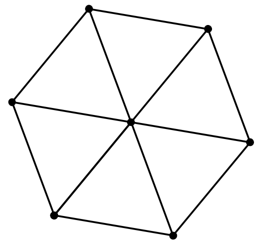


Figura 19

Recién ahora comprenden dónde estaba el problema en el armado de la inexistente 'bipirámide hexagonal'. Recién en este momento algún estudiante reconoce que esto mismo ya se había visto al tratar el embaldosado del plano usando polígonos regulares de un solo tipo.

El trabajar con las varillas permitió el armado de la 'bipirámide hexagonal' (estamos trabajando aquí en la Geometría I que plantean Houdement y Kuzniak); por otro lado el recurrir a argumentos ya acordados previamente (suma de ángulos interiores de un polígono) permitió enfocar el problema desde un punto de vista deductivo (estamos trabajando aquí en la Geometría II).

Provocados por el profesor, quien les cuestionaba 'cómo era posible que afirmaran que dicho poliedro no existía si el estaba mostrando uno', los estudiantes dicen ahora que eso era posible debido a lo flojo que había quedado el hilo mediante el cual se ataron las varillas. Estuvieron presente así en esta discusión los criterios para establecer la validez de una afirmación en geometría. En este caso el argumento deductivo les resultó más potente que el empírico.

- El profesor pregunta si será posible construir pirámides de base heptagonal y cuyas caras sean triángulos equiláteros. Tienen dificultades en imaginarse dicha pirámide: hay quienes creen que sí se podrá y hay quienes creen que no. Estos últimos argumentan que 'si con la base hexagonal los seis triángulos entraron justito, con la base heptagonal los triángulos [equiláteros] se van a superponer'. Deciden construirse un desarrollo de dicha 'pirámide'. Al buscar armarla se les presenta la siguiente situación que les confirma que no se puede construir pero que confronta su intuición de que los triángulos se iban a superponer.

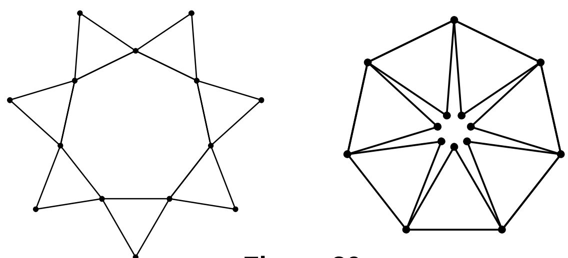


Figura 20

Otro poliedro que habían construido la clase anterior fue el de caras hexágonos regulares. Algunos habían iniciado esta construcción pensando que se trataba de la 'pelota de fútbol' pero entre ellos mismos aclararon que en el caso de la pelota habían hexágonos y pentágonos regulares. El profesor aprovecha para dejar planteada una nueva pregunta a ser contestada en el desarrollo del curso: ¿Cuántos poliedros convexos cuyas caras sean polígonos regulares –ahora combinando polígonos de distinto tipo- se podrán construir?

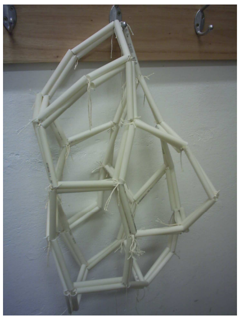


Figura 21

Al buscar sostenerlo para que quedara 'parado', que no se deformara debido a su propio peso, los estudiantes empiezan a desconfiar de que dicho poliedro podría no ser convexo.

Nuevamente el profesor busca recordar los embaldosados planos -donde tres hexágonos era una de las posibilidades- y al igual que con la 'bipirámide hexagonal' los estudiantes admiten las dos posibilidades como viables: la plana y la del poliedro de caras hexagonales. Son consideradas como dos posibilidades no contradictorias.

Llegados a este punto el profesor no sabe cómo salir de la situación.

A una estudiante se le ocurrió construir en papel, y después recortar, tres hexágonos pegados y cortar la arista AC.

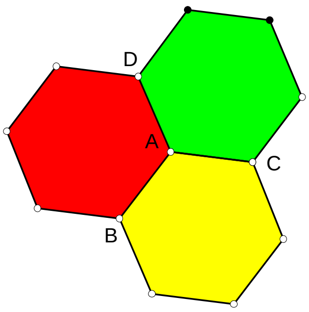


Figura 22

A partir de esta figura plana la estudiante empieza a buscar que no queden los tres hexágonos en un mismo plano. Manteniendo por ejemplo fijo el hexágono rojo levantó un poco el hexágono verde (así no quedaban rojo y verde en un mismo plano) y lo que observó fue que el hexágono amarillo (unido al hexágono rojo a través de AB) empezaba a superponerse al hexágono verde. El argumento que propone la estudiante cabe dentro de la Geometría I. Bienvenido sea ya que permitió ver la situación desde otro ángulo.

- En la clase anterior se había construido el cubo con varillas. Se observa que en cada vértice concurren tres caras cuadradas. El profesor pregunta acerca de si no será posible construir otro poliedro cuyas caras sean cuadrados y en el cual confluyan cuatro cuadrados en cada vértice. Buscando usar una idea análoga a la de la estudiante con los exágonos, les propone a los estudiantes que se dibujen cuatro cuadrados pegados y que después intenten armar lo que sería un vértice del poliedro. Después de que algunos manifiestan ciertas dificultades al intentar armar dicho vértice, un estudiante propone eliminar uno de los cuadrados y medir el ángulo que forman las dos 'aristas' que se levantan:

Figura 23

Midiendo el ángulo MLN, después de levantados los cuadrados azul y verde hacia un mismo semiespacio de los determinados por el cuadrado rojo, pudieron constatar que el ángulo era menor que 90º. Si seguían levantando los cuadrados azul y verde podían constatar a simple vista que dicho ángulo era menor.

También en este caso los argumentos dados son dentro de la Geometría I. Queda como tarea pendiente para los profesores el cómo se podría abordar esta misma situación a partir de la Geometría II.

¿Cómo se continuó?

Como ya se mencionó antes, la actividad con poliedros recién reportada era la primera de una serie de actividades que buscan concluir con la construcción, definición y fundamentación de por qué los poliedros regulares son cinco.

- La construcción de los poliedros regulares con material concreto fue hecha por los estudiantes en la actividad anterior.
- A esto siguió una actividad donde los estudiantes, trabajando en la sala de informática con el programa Poly, tenían que completar una tabla donde para cada familia de poliedros que incluye Poly debían responder si eran convexos, tenían caras que son polígonos regulares, tenían caras uniformes (iguales entre si), tenían aristas uniformes (todas están incluidas en el mismo par de caras) y si tenían vértices uniformes (concurren la misma cantidad de caras y del mismo tipo). Se definieron como poliedros regulares a aquellos poliedros que cumplían todas las propiedades a la vez.
- Respecto a la fundamentación de por qué los poliedros regulares son cinco, se les planteó las siguientes actividades:

<u>Actividad 1</u>

Veamos lo que nos dice Euclides hace 2300 años, en la Proposición 18 del Libro XIII, de sus Elementos.

a) Lee atentamente lo planteado por Euclides y reescribe la demostración del teorema usando tus propias palabras.

> *“Digo ahora que, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura comprendida por figuras equiláteras y equiangulares iguales entre sí. Porque no se construye un ángulo sólido con dos triángulos o, en absoluto, con dos planos. Sino que el ángulo de la pirámide se construye con tres triángulos, el del octaedro con cuatro, el del icosaedro con cinco; pero no se construirá un ángulo sólido mediante seis triángulos equiláteros y equiangulares [colocados] en un solo punto; porque si el ángulo del triángulo equilátero es dos tercios de un recto, los seis serán iguales a dos rectos; lo cual es imposible, porque todo ángulo sólido es*

> *comprendido por menos de cuatro rectos [Libro XI, Proposición 21]. Por lo mismo, tampoco se construye un ángulo sólido con más de seis ángulos planos. Y el ángulo del cubo es comprendido por tres cuadrados; por cuatro es imposible, porque serán a su vez cuatro rectos. Y el [ángulo] del dodecaedro es comprendido por tres pentágonos equiláteros y equiangulares; por cuatro es imposible, porque, siendo el ángulo del pentágono equilátero un recto más un quinto, los cuatro ángulos serán mayores que cuatro rectos; lo cual es imposible. Y un ángulo sólido tampoco será comprendido por otros polígonos en razón de la misma imposibilidad. Por consiguiente, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura sólida comprendida por figuras equiláteras y equiangulares. Q.E.D.”*

b) ¿Qué dice la Proposición 21 del Libro XI de los Elementos que se menciona en la demostración anterior?

Puedes encontrar todos los enunciados de las proposiciones de los Elementos accediendo a: http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

La Proposición 21 de los *Elementos* es verificada midiendo en varios poliedros (Geometría I). ¿Se cumple si el poliedro no es convexo? Analizando los poliedros de las Figs. 13 y 15 se concluye que la proposición no tiene por qué cumplirse si el poliedro no es convexo. Esta proposición establecida en la Geometría I es asumida como punto de partida para abordar la siguiente actividad donde se busca elaborar una demostración de que los poliedros platónicos son solo cinco trabajando en la Geometría II.

Actividad 2

Una demostración alternativa del teorema anterior puede hacerse a partir de la Proposición 21:

a) Si m es la cantidad de polígonos regulares de n lados que concurren en un vértice de un poliedro, se cumple:

$$\frac{m(n-2).180^{\circ}}{n} < 360^{\circ}$$

¿Por qué?

b) La inecuación anterior es equivalente a:

$$(m-2)\,(n-2) < 4$$

¿Por qué?

c) ¿Para qué parejas de valores (m,n) *se cumple la desigualdad anterior? Explica.*

d) ¿A qué poliedro te conduce cada pareja de valores (m,n) *obtenidos previamente?*

Es llamativa la dificultad que presenta la parte b) para la gran mayoría de los equipos. Si bien la actividad 2 presenta una guía de la demostración y la misma requiere ciertos conocimientos algebraicos, estos remiten en todo momento a su significado geométrico.

Reflexión final

Las actividades relatadas anteriormente pueden resultar pueriles a un docente acostumbrado al trabajo en clase en forma expositiva y pueden considerarse inapropiadas para un primer año de un profesorado de matemática.

Consideramos que este tipo de actividades, donde la responsabilidad de la actividad matemática tiene su centro en el estudiante, son un camino a transitar si buscamos formar docentes que sean capaces de desarrollar sus propias capacidades argumentativas y de concebir la práctica educativa desde una óptica que otorgue al estudiante de nivel medio un rol activo en su aprendizaje.

Tan importante como el tipo de actividades a proponer consideramos la forma de trabajo en clase: equipos de estudiantes poniéndose de acuerdo en torno a las distintas ideas y argumentos que van surgiendo; cada equipo exponiendo sus ideas al grupo y defendiéndolas de las críticas. Esta forma de trabajo nos parece que contribuirá a formar un estudiante capaz de trabajar en equipo y de promover a su vez esta forma de trabajo cuando sea docente en enseñanza media.

Bibliografía

Castela, C., Consigliere, L., Guzmán; I. Houdement, C., Kuzniak, A. Rauscher, J. (2006). *Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. Un étude comparative de l'enseignement de la géométrie dans les systèmes scolaires chilien et français. Cahier de Didirem, Spécial* n°6 *:* IREM de Paris 7.

Houdement, C. Kuzniak, A. (1993). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x,* 51, 5-21.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 6 (2), 167-187.

Mario Dalcín es egresado del Instituto de Profesores 'Artigas' (Montevideo-Uruguay) y Magister en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Tiene especial interés en la Geometría y en Historia de la Matemática y en sus procesos de enseñanza. Sobre estos temas ha escrito en Revista do Professor de Matemática, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Forum Geometricorum. Actualmente integra el Departamento de Matemática de Formación Docente teniendo a cargo cursos de Geometría en el Instituto de Profesores 'Artigas'. **mdalcin00@gmail.com.**

Verónica Molfino es egresada del Instituto de Profesores 'Artigas' (Montevideo-Uruguay) y Doctora en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Tiene especial interés en la Geometría y los procesos de institucionalización del conocimiento matemático. Sobre estos temas ha escrito en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa y en las revistas Educación Matemática (Santillana) y Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias. Actualmente integra el Departamento de Matemática de Formación Docente teniendo a cargo cursos de Geometría y Topología en el Instituto de Profesores 'Artigas'. **veromolfino@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 187-197
ISSN: 1815-0640
Coordinada por Fredy González

Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica

Pesquisa em história da Matemática na Pós-graduação Brasileira e suas dimensões epistemológica, sociológica e pedagógica

Iran Abreu Mendes

Resumo

Este artigo dimensiona as tendências das pesquisas em História da Matemática no Brasil entre 1990 e 2010, baseado em um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas em Programas de pós-graduação em Educação, Educação Matemática e Ensino de Ciências e Matemática, de universidades Brasileiras, entre 1990 e 2010. Os resultados mostram que as pesquisas se agrupam em três dimensões: epistemológica, sociológica e pedagógica.

Abstract

This paper assesses the trends of the researches in the history of Mathematics in Brazil between 1990 and 2010, based on a study focused on the dissertations and theses defendes in post-graduation programs in Education, Mathematics Education and Teaching of Science and Mathematics in Brazilian universities, between 1990 and 2010. The results show that the polls are grouped in three dimensions: epistemological, sociological and pedagogical.

Resumen

Este artículo evalúa las tendencias de la investigación en la Historia de la Matemática en Brasil entre 1990 y 2010, sobre la base de un estudio centrado en disertaciones y tesis en los programas de postgrado en Educación, Educación Matemática y Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas en las universidades brasileñas, entre 1990 y 2010. Los resultados muestran que las investigaciones se agrupan en tres dimensiones: epistemológica, sociológica y pedagógica.

1. Primeiras considerações

Os estudos em História da Matemática, História da Educação Matemática e História no Ensino da Matemática, têm gerado valiosos resultados e apontado novos caminhos e focos de abordagem para a melhoria do processo de formação docente e de aprendizagem na Educação Matemática. Isso possivelmente ocorre porque as reflexões sobre tais estudos evidenciam a importância do processo formativo na superação de obstáculos encontrados na trajetória dos sujeitos da docência em Matemática.

Desde 2008 iniciei uma pesquisa sobre a produção dessas três subáreas que compreendem a área de História da Matemática inciando com a análise da produção nos Anais dos Seminários Nacionais de História da Matemática. Em 2010 ampliei o estudo focando a produção desta área por meio de um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990-2010[1]", com a finalidade principal de catalogar a produção cientifica na área de História da Matemática nos programas de pós-graduação *stritu sensu* do país, das áreas de Educação, Educação Matemática, Ensino de Ciências Naturais e Matemática e áreas afins. A meta é traçar uma cartografia dos estudos em História da Matemática oriundos das pesquisas realizadas pelos estudantes de pós-graduação dos diversos programas existentes no Brasil entre 1990 e 2010, com vistas a dimensionar as tendências das pesquisa em História da Matemática das dissertações e teses em três dimensões: a epistemologica, a sociológica e a pedagógica. A pesquisa em desenvolvimento baseia-se, principalmente, em uma investigação documental nos arquivos da CAPES e dos programas de Pós-graduação, existentes no país, que focam seus estudos no tema objeto desta pesquisa.

Para melhor encaminhamento dessa discussão temática, tomei como fundamentos de apoio às possiveis interlocuções, a diversidade de fontes na pesquisa historiográfica, as tendências da pesquisa em História e Antropologia, suas relações e implicações nas pesquisas em história da Matemática, visando assim, apontar contribuições dessas abordagens para a área de História e Educação Matemática.

Para a realização de minha análise sobre as dissertações e teses, agrupei os trabalhos de acordo com as temáticas dos mesmos, organizando-os em três eixos: o epistemológico, o sociológico e o pedagógico, de modo a agupar os trabalhos sobre História da Matemática, História da Educação Matemática e História no Ensino da Matemática. Com base em um levantamento realizado, identifiquei cerca de 200 dissertações de mestrado (acadêmico e profissional) e 100 teses de doutorado) cujos objetos de estudos focavam a história da Matemática em suas três subáreas – História e Epistemologia da Matemática, História da Educação Matemática e História e Pedagogia da Matemática. Diante do levantamento foi possível analizar parcialmente as dissertações e teses com vistas a estabelecer proposições conclusivas sobre as tendências das pesquisas em História da Matemática que originaram tais dissertações e teses.

Este artigo se insere em um estudo mais ampliado que estou desenvolvendo desde 2008 com a finalidade de caracterizar as tendências das pesquisas em História da Matemática no Brasil no período compreendido entre 1990 e 2010. Motivado por este objeto de estudo, em 2008 investiguei e analisei a produção publicada nos anais dos seminários nacionais de História da Matemática realizados entre 1995 e 2007. A partir dessa produção ampliei o foco da pesquisa, incluindo os anais de 2009. Em 2010 iniciei novos estudos sobre a produção da área de História da Matemática, centrando as investigações nas dissertações e teses defendidas em programas de Pós-graduação das universidades brasileiras, no período de 1990 a 2010. Tal pesquisa ainda está em desenvolvimento e os resultados até agora obtidos apontam um conjunto de tendências que se agrupam nas dimensões epistemológica, sociológica e pedagógica.

Neste artigo apresento os primeiros resultados de uma catalogação da produção cientifica na área de História da Matemática nos programas de pós-graduação *stritu sensu* do país, das áreas de Educação, Educação Matemática,

[1] Pesquisa financiada pelo CNPq por meio do programa de Bolsa Produtividade em Pesquisa.

Ensino de Ciências Naturais e Matemática e áreas afins, que está sendo realizada no âmbito de uma pesquisa mais ampla sobre as cartografias da produção em História da Matemática no Brasil, cujo estudo está centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990-2010[2].

Se fizermos uma caracterização da pesquisa em História da Matemática no Brasil a partir de dois campos investigados é possível asegurar que a pesquisa em História da Matemática possui uma grande abrangência, sendo permeada por diferentes linhas e por uma gama de sub-especialidades que estão intimamente ligadas. A discussão relativa às relações entre História, Pedagogia e Matemática são objetos de investigação na comunidade internacional, tendo como marco referencial em 1983 a criação do International Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM), grupo filiando à Comissão Internacional de Ensino de Matemática (ICMI) e criado durante a realização do Workshop História na Educação Matemática, ocorrido na cidade de Toronto, no Canadá, em 1983. Se focarmos nosso olhar no universo das pesquisas em história da matemática publicadas nos principais periódicos internacionais, verificamos que o campo da investigação se divide em grandes temas.

No que diz respeito ao movimento científico/acadêmico da História da Matemática no Brasil, podemos dizer que esse campo de pesquisa é bastante recente, tendo se intensificado a partir da criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), no III Seminário Nacional de Historia da Matemática, ocorrido em março de 1999, na cidade de Vitória, no Espírito Santo. Todavia, identificamos que alguns estudos isolados relacionados a essa temática tiveram seu início na década de 1990 o que, sobremaneira, influenciou a criação da sociedade supracitada. Nesse sentido, a tendência de crescimento de pesquisas nessa área, em nosso país é evidente, com o aumento de apresentação de trabalhos referentes a este tema durante os seminários nacionais e outros eventos similares.

O movimento em torno da História da Matemática é bastante diversificado, tendo em seu interior vários campos de pesquisas autônomos que se interligam, principalmente, pela preocupação de interligarem História, Matemática e Educação. Dentre tais campos de investigação, destacam-se o campo da História da Matemática propriamente dita, o campo da História da Educação Matemática e o campo da História no Ensino de Matemática. De acordo com Mendes (2012), dos três campos supracitados, os campos da História da Educação Matemática e da História da Matemática, vêm apontando valiosos caminhos e focos de abordagem que têm como finalidade buscar uma forma mais adequada para conduzir o processo da formação docente e de aprendizagem na Educação Matemática.

Destacamos que as abordagens adotadas nas pesquisas em história da Matemática e da Educação Matemática se caracterizam pelo uso de multi-referencialidade teórica na investigação e análise dos objetos de estudos investigados. O campo da História da Educação Matemática contempla as histórias da disciplina Matemática, das instituições sociais e educacionais, das (auto)biografias de matemáticos e professores de Matemática do passado (antigo e recente). Já o campo da história da Matemática enfoca estudos sobre a

[2] Pesquisa financiada pelo CNPq e em desenvlvimento desde Janeiro de 2011.

epistemologia da matemática e o desenvolvimento da matemática enquanto conteúdo científico.

Vale ressaltar que esses dois campos foram se incorporando às pesquisas em Educação Matemática e oportunizando o surgimento de contribuições importantes para a formação de professores de Matemática e para a melhoria do ensino da Matemática escolar, além de contribuírem para a constituição dos acervos documentais, das memórias e do patrimônio da Educação Matemática brasileira.

Sobre os fundamentos teóricos das pesquisas

Outro indicativo verificado no estudo é que as pesquisas realizadas por estudiosos da área de Ciências Humanas e Sociais têm contribuído fortemente para que outras áreas que se desenvolvem com base na pesquisa histórica ou no exercício da historiografia. A história da Matemática e a história da Educação Matemática, por exemplo, puderam ampliar as possibilidades de construção dos seus objetos de estudos, bem como dar uma conotação científica às verdades estabelecidas no processo historiográfico a partir do uso dessas modalidades metodológicas adotados pelas Ciências Humanas e Sociais, quando incorporadas em suas pesquisas.

Para Michel de Certeau (1991, p. 28), por exemplo, “a Antropologia insinua na História uma outra relação com o tempo: já não se trata de um tempo que se repete, que evolui em espiral, que tem nós e volta atrás, um tempo manhoso, enganador e cheio de sinuosidade”. Essa perspectiva implica que ao emergirmos num processo de observação, descrição e interpretação da realidade pesquisada, é necessário estabelecermos alguns patamares de comparação nos quais deve ficar evidente que

> a diferença entre a história do presente e a do passado não deve fazer esquecer um terceiro elemento que já não diz respeito ao objeto estudado, mas à perspectiva em que se faz o estudo, ou seja, uma historicização da própria história. O que está, então, em jogo é a capacidade da história se explicar como efeito de técnicas contemporâneas, de um meio social de posições econômicas e políticas. (Certeau, 1991, p. 29).

O autor afirma, ainda, que o trabalho histórico inscreve-se no interior das lutas sócio-econômicas e ideológicas presentes nas narrativas da escrita de si e na história de vida reconstruída. A partir de reflexões como a apresentada por Certeau, fica evidente que cada uma dos envolvidos no processo de descrição histórica, deixa transparecer a sua forma de ver e analisar o mundo com todos os seus aspectos em cada época e local, dando a historiografia construída uma evidência do seu foco de olhar sobre o objeto descrito.

A respeito dos estudos referentes à historiografia da ciência e tecnologia contemporâneas, Söderqvist (1997) nos apresenta um balanço temporal acerca dessa história mostrando que a atual orientação a respeito dos estudos da área tem se manifestado na direção de uma sociologia da ciência, dos estudos sociais, do conhecimento científico, dos estudos sobre a construção social do conhecimento científico, dos estudos bibliográficos críticos, dos estudos sobre controvérsias científicas e da retórica da ciência. Esses e outros temas que evidenciam os estudos de casos na história da ciência recente apontam uma variedade de tendências teórico-metodológicas das pesquisas na nova história da ciência mostrando as contribuições que essas tendências têm dado para a emergência de novos estudos históricos com significado para a ciência recente.

Todavia, os historiadores da ciência atual têm enfrentado uma série de obstáculos que interferem na legitimação das informações obtidas por meio de determinadas fontes utilizadas. Dentre elas está o problema de acesso aos documentos originais e a utilização de comentadores desses materiais. Outro fato refere-se ao enquadramento quantitativo das informações obtidas desses documentos e da sintetização crítica de tais materiais históricos. A opção adotada pelos pesquisadores é a utilização de métodos apoiados pela pesquisa antropológica em todas as suas dimensões visando assim, diminuir o caráter de exatidão exigido nas informações, mas garantindo, de antemão, a abordagem científica necessária para validação do estudo histórico.

Um das modalidades que melhor vem se estruturando nesse movimento de reconstrução da recente história da ciência refere-se à localização e exploração das informações mantidas por interlocutores que estiveram incluídos direta ou indiretamente nos fatos históricos pesquisados. O modo de se praticar esse exercício de pesquisa se manifesta fortemente nos estudos sobre memória e história, via uma abordagem apoiada na história oral ou na abordagem biográfica e história de vida.

As tendências atuais das pesquisas em História da Matemática, incluindo a História da Educação Matemática, têm mostrado algumas modalidades que se caracterizam pela migração conceitual e pela hibridação conceitual, ou seja, as informações são rearranjadas de modo a dar significados aos estudos realizados. Isso significa que há uma reorganização de técnicas e formas de conceber e construir a verdade na história do conhecimento tendo em vista tecer um novo panorama da história em diversos contextos, áreas e épocas. É dessa reorganização metodológica de pesquisa caracterizada por uma bricolagem de técnicas que o historiador traça seus planos de estudos e pesquisas de modo a aproximar-se, o máximo possível, da verdade que pretende instituir no seu percurso historiográfico. Desse movimento surgiu, então, uma série de relações que implicaram nas novas tendências nas pesquisas em história da Matemática.

Relações e as teórias e as pesquisas em História da Matemática no Brasil

A respeito das relações e implicações das tendências em História da Matemática, consideramos oportuno iniciar nossos comentários sobre esse aspecto, com um questionamento atribuído a Certeau (1991) quando indaga por que é que a Matemática ocupou um lugar da história, ou seja, daquilo que foi, durante muito tempo, o fundamento de identificação e justificação de um poder social. Certeau (1991) afirma que esse fato ocorreu porque os critérios de seleção social mudaram. Uma sociedade privilegia, nos seus modos de iniciação, o que é privilegiado no seu funcionamento.

Com base nesse questionamento Certeau afirma que

> a Matemática desempenha atualmente, o papel ocupado anteriormente, pela retórica, o latim e a história. Isso se deve a mudança nos programas escolares. É necessário, entretanto, nos interrogarmos a respeito dos fatores que ocasionaram tais mudanças atribuindo à

> matemática a função de uma taxonomia socialmente eficaz e à história a figura de narrativas para o serão e para os tempos livres da televisão, narrativas tanto mais manipuláveis quanto dizem respeito a fatos que já deixaram de existir. (Certeau, 1991, p. 12-13).

É nessa perspectiva que a pesquisa voltada para a construção de uma historiografia para a Matemática e para a Educação Matemática que encontramos uma ampliação do campo referente aos métodos e abordagens de pesquisa nessa área, nos Seminários Nacionais de História da Matemática, nos Seminários Luso-brasileiros de História da Matemática, bem como nos estudos e pesquisas realizados por meio das teses e dissertações realizadas em programas de pós-graduação que envolvem essa área de estudos. Nesse sentido, apresentamos a seguir o quadro referente ao número de trabalhos publicados nos Anais desses eventos e seu enquadramento em algumas dessas tendências da pesquisa na área. O referencial teórico está apoiado em documentos e estudos que abordam essa questão da pesquisa, da pós-graduação em Educação Matemática.

O corpus de nossa pesquisa é a produção científica em História da Matemática e suas relações epistemológicas sociais e didáticas com a Educação Matemática, geradas nos programas de pós-graduação *stritu sensu* do país, na área da Educação Matemática, no período de 1990 a 2010. O recorte temporal proposto deve-se ao fato de que a partir da década de 1990 que efetivamente se inicia a produção científica, em programas de pós-graduação, na temática objeto deste artigo em um processo mais sistemático e definido.

Para operacionalização da pesquisa, fizemos uma investigação documental no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal em Nível Superior - CAPES, bem como junto às bibliotecas dos programas de pós-graduação existentes no país, que focam seus estudos na temática supracitada. Até o momento catalogamos cerca de 200 dissertações e 100 teses, ligadas à área da Educação Matemática, vinculadas a programas de pós-graduação em educação, Educação Matemática, Ensino de Ciências natiarais e Matemática ou afins. Em um segundo momento, separamos os trabalhos em três grupos: História e Epistemología da Matemática, História da Educação Matemática e História e Pedagogia da Matemática. Em seguida identificamos os temas centrais de cada trabalho, seus objetos do estudo e seus pressupostos teóricos-metodológicos, com vistas a identificar: a) os conteúdos ou problemáticas das pesquisas; b) os objetos e sujeitos das pesquisas referidas; c) os autores e escolas de pensamento indicados na produção científica; d) o lócus onde foram desenvolvidas.

Após o levantamento, organização e uma primeira análise do material de pesquisa foi possível assegurar que a produção gerada na pesquisa se constitui em contribuições importantes para que os pesquisadores em História da Matemática, História da Educação Matemática e História e Pedagogia da matemática possam compreender o processo de construção metodológica dessa área de estudos e pesquisas bem como a produção originada nas pesquisas dessa área no Brasil e suas contribuições para a organização do patrimônio da Matemática e da Educação Matemática Brasileira.

A investigação efetivada nas dissertações e teses com enfoques dessas três subáreas apontou até o presente momento apontam algumas considerações conclusivas sobre a complementaridade estabelecida entre os métodos de pesquisa nessas duas áreas e os modos de abordagem construídos ou reestruturados nos últimos 20 anos.

Tabla 1: Pesquisas em História da Matemática investigadas

Categoria	Tendência da pesquisa	Mestrado		Doutorado	Total geral
		Acadêmico	Profissional		
A	Estudos e Pesquisas em História e Epistemologia da Matemática	80	03	29	112
B	Estudos e Pesquisas em História da Educação Matemática	64	02	44	110
C	Estudos e Pesquisas em História e Pedagogia da Matemática	48	25	15	88
	Total	192	30	88	310

De um total de 310 trabalhos catalogados, entre dissertações e teses, verificou-se que 112 (36%) focaram-se na área de História e Epistemologia da Matemática e 110 (35,5%) incluem-se na categoría de História da Educação Matemática. Os outros 88 (28,5%) concentraram-se na categoria referente aos estudos e pesquisas sobre a área da História e Pedagogia da Matemática.

Das 222 dissertações de mestrado catalogadas, 83 (37,4%) referem-se aos estudos sobre História e Epistemologia da Matemática, 66 (29,7%) incluem-se na área de História da Educação Matemática e os outros 73 (32,9%) correspondem aos estudos focados na área de História e Pedagogia da Matemática. Desse total de 222 dissertação, 30 (13,5%) correspondem às dissertações de mestrado profissional.

Sobre as teses de doutorado, a catalogação evidenciou que do total de 88, 29 (33%) dos trabalhos referem-se a área de História e Epistemologia da Matemática, enquanto 44 (50%) incluem-se na categoría de estudos sobre História da educação matemática. As outras 15 teses (17%) focaram seus estudos sobre História e Pedagogia da matemática.

A catalogação mostrou ainda que de um modo geral as produções da área de História da Matemática na Pós-graduação brasileira estão atualmente distribuídas de forma bastante harmônica em termos quantitativos, uma vez que as três categorias de estudos e pesquisas estão na relação percentual de 36%; 35,5% e 28,5%. É preciso ressaltar no entanto que, o levantamento realizado nas universidades investigadas, aponta que as áreas de História da Educação Matemática e História e Pedagogia da Matemática, tiveram uma avnaço quantitativo significativo nos últimos 10 anos, pois foi entre 2000 e 2010 que o número de trabalhos cresceu nessas duas áreas tal como já foi apkntado por Mendes (2008, 2010, 2011, 2012) com relação aos trabalhos publicados nos Anais dos Seminários Nacionais de História da Matemática.

O dados apresentados anteriormente mostram uma sintese dos trabalhos analisados, distribuídos em três categoría. É importante ressaltar, porém, que os estudos e pesquisas voltados para a História e Epistemologia da Matemática constituíram a categoría que marcou o inicio dos trabalhos na área de história da Matemática, posto que as outras categorías surgiram posteriormente, justificando portanto a diferença entre o número de trabalhos ser um pouco menor sobre os estudos e pesquisas em História da Educação Matemática e em História e Pedagogia da Matemática. Esta última categoria surgiu na década de 1990 de forma incipiente, com apenas dois trabalhos, vindo a avançar um pouco mais após 10 anos. Outro detalhe relevante é que ese tipo de trabalho (História e pedagogía da matemática) ampliou-se com a criação dos mestrados profissionais, no inicio da primeira década do seculo XXI (entre 2002 e 2005).

As conclusões parciais mostradas neste artigo apontam que houve um crescimento significativo na qualidade e quantidade dos trabalhos elaborados, significando um exercício de criatividade na pesquisa histórica em Educação Matemática, ocasionado também por um acréscimo valioso na variedade de abordagens e na conjunção de tendências, de modo a gerar formas mistas de investigação e analise das informações históricas que tecem um painel dos caminhos da história da Matemática e da Educação Matemática no mesmo pesquisado.

Há uma tendência para a hibridação do modelo de pesquisa com vistas ao estabelecimento da complementaridade dos fatores que sustentam a busca de verdades históricas por meio das pesquisas. A inclusão da literatura como uma fonte suplementar de contextualização do momento histórico já se mostra como uma forte aliada das pesquisas com vistas a dar melhor composição explicativa da verdade histórica a ser estabelecida.

A retomada dos princípios da arqueologia como forma de construção dos discursos e proposições da verdade histórica em construção se mostra como outro fator importante para se estabelecer processos de conexões entre aspectos de constituição da realidade histórica nas quais poder-se-á mostrar uma convergência dos divergentes e a (re)união dos convergentes, ou seja, uma história da Matemática na qual as histórias hegemônicas, consideradas convergentes, se conectam às histórias das culturas matemáticas, não hegemônicas, mas que também são convergentes, podendo assim complementar-se.

Nesse contexto de finalização, é importante mencionar que a partir desses primeiros apontamentos, a busca de uma cartografia das pesquisas em história da matemática e história da Educação Matemática no Brasil apontam claramente que não nos é possível tomar a unicidade do método histórico como caminho para a construção dessa historiografia, uma vez que a pesquisa histórica é um processo cognitivo, no qual as informações das fontes são buscadas, apreendidas e elaboradas para concretizar ou modificar empiricamente as perspectivas (teóricas) referentes às experiências humanas vividas, memorizadas e narradas por outros.

É, portanto, o critério de adoção de alguns métodos de pesquisa sobre história das práticas matemáticas em suas três dimensões que terminam por tecer em todos os momentos da pesquisa, uma aproximação entre as abordagens sobre história da obra e da vida de matemáticos e professores de Matemática ou trabalhadores de outras áreas profissionais, história das instituições, história da arte, história das disciplinas escolares, dentre outras atividades sociais e culturais. Dessa tentativa de aproximação se constituem as bases das interlocuções nas quais a diversidade de fontes na pesquisa historiográfica com origens na pesquisa em história, antropologia e sociologia podem viabilizar o estabelecimento de relações e implicações para uma compreensão possível acerca de uma história social da Educação Matemática e das práticas matemáticas no contexto da sociedade e da cultura.

Ao refletir sobre a pesquisa na área da educação, não podemos deixar de nos remeter a figura do pesquisador, que é compreendido como um sujeito que está permanentemente na busca de novos conhecimentos e na procura de conhecer e compreender o seu objeto de investigação. A busca pelo conhecer, a indagação dos "porquês" e dos "comos", a inquietação frente à realidade, a postura crítica, a leitura da realidade, devem ser inerentes à realidade do pesquisador. Assim, a pesquisa possibilita ao pesquisador uma compreensão da realidade à qual está inserido, com vistas a sua transformação.

Apontamentos finais

Consideramos que os resultados preliminares apontados neste artigo, aliados aos demais que futuramente serão trabalhados no âmbito da pesquisa em desenvolvimento, serão extremamente importantes para pesquisadores e professores de matemática, bem como aos futuros professores de Matemática, além da comunidade de educadores matemáticos em geral.

Outro aspecto importante é que a pesquisa asume que pode não ter contemplado todas as produções inerentes a todas as universidades que possuem pós-graudação relacionadas á área em estudo. No entanto, sabe-se que muitas produções podem não ter sido incluídas no banco de Teses da CAPES ou não ter sido possível localizar os originais nas bilbiotecas pesquisadas, Nesse sentido, este primeiro levantamento, embora se pretendesse exaustivo, deverá passar tanto por complementações quanto por retificações que se mostrarem procedentes.

A produção gerada na pesquisa se constituirá em contribuições importantes para que os professores de Matemática possam contar com mais uma possibilidade didática no processo de construção significativa do conhecimento matemático por meio de situações didáticas e atividades para o ensino de Matemática apoiado no uso dos materiais produzidos nas pesquisas em História da Matemática no Brasil. Partindo desse pressuposto é que pretendemos colher os resultados deste estudo, a fim de trazer contribuições para o campo de pesquisa em História e Epistemologia da Matemática e História da Educação Matemática e História e Pedagogia da Matemática, bem como a materialização dos resultados dessas pesquisas no contexto da Educação Básica e da formação de profesores de Matemática.

Entendemos que se tornam cada vez mais necessárias análises tanto de aspectos quantitativos, quanto qualitativos da pesquisa produzida no âmbito da História da Matemática. Isto significa voltarmos nossa atenção para como se tem processado a própria concepção de ciência nessa área, o que implica em questionar sobre os pressupostos e os fundamentos teórico-filosóficos e epistemológicos que têm orientado a produção do conhecimento reconhecido como científico na área de História da Matemática no Brasil.

Desta forma, faz se necessário a realização freqüente de análises a respeito do que vem sendo desenvolvido, em termos de pesquisa científica, nas diversas áreas supracitadas vinculadas aos Programas de Pós-Graduação *strito-sensu*, visto que estes concretizam espaços privilegiados de produção de conhecimento nas áreas de História da Matemática.

Os resultados analisados apontam que houve um crescimento significativo na qualidade dos trabalhos, bem como um acréscimo valioso na variedade de abordagens e na conjunção de tendências de modo a gerar formas mistas de investigação e análise das informações históricas que possam contribuir para se tecer um painel mais detalhado dos caminhos pelos quais a história da Matemática, história no Ensino da Matemática e da Educação Matemática seguiram ao longo dos últimos 20 anos.

Finalizando, espera-se que o presente estudo possa evidenciar a necessidade de uma especial atenção sobre as tendências da pesquisa em História da Matemática no Brasil, considerando a criatividade na produção científica inerente ao campo da História da Matemática como recurso pedagógico e como posibilidades de reconstrução do nosso patrimonio intelectual referente à área de Matemática e Educação Matemática Brasileira, no qual tem um caráter inédito, a fim de que se ampliem os conhecimentos sobre a temática e se forneça subsídios para o desenvolvimento de pesquisas nessa área que se aproximem mais do campo educacional, particularmente das salas de aula de Matemática.

Referências

Bacellar, C. (2005) Fontes documentais. Uso e mau uso dos arquivos. In: Pinsky, Carla Bassanezi (Org.). Fontes históricas. Sâo Paulo: Contexto. (p. 23-79).

Burke, P. (1992) (Org.). *A escrita da história. Novas perspectivas*. Tradução Magda Lopes. 3ª Reimpressão. São Paulo: Ed. da UNESP. (Coleção Biblioteca Básica).

Burke, P.(1997) *A escola dos Annales* (1929-1989). A revolução francesa da historiografia. Tradução Nilo Odalia. 3ª Reimpressão. São Paulo: Ed. da UNESP.

Burke, P. (2005) *O que é história cultural*? Tradução Sérgio Góes de Paula. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Certeau, M.(1991) A história: uma paixão nova. In: LE GOFF, Jacques et al. A nova história. Lisboa: edições 70. Série Lugar da história.

Duby, G. (1993) *A história continua*. Tradução Clóvis Marques. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Fossa, J. A. (2001) (Ed.). Anais. Seminário Nacional de História da Matemática. Rio Claro: SBHMat.

Fossa, J.(2005) A. (Org.). Anais. I Colóquio Brasileiro de História da Matemática e IV Encontro Luso-brasileiro de História da Matemática. Natal: SBHMat; EDUFRN.

Foucault, M.(2000) *Arqueologia do saber*. Tradução Luiz Felipe Baeta Neves. 6. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária.

Funari, P. (2005) *Fontes arqueológicas. Os historiadores e a cultura material*. In: Pinsky, Carla Bassanezi (Org.) Fontes históricas. Sâo Paulo: Contexto. (p. 81-110).

KRAGH. Helge. An introduction to the historiography of science. Cambridge: Cambridge university press, 1989.

Le Goff, J. et al. (1991) A nova história. Lisboa: Edições 70. (Série Lugar da história).

Le Goff, J. (1996) *História e memória*. 4. ed. Campinas: Ed. da UNICAMP.

Lombardi, J. C.; Nascimento, M. (2004) (Orgs.). Fontes, história e historiografia da educação. Campinas: Autores Associados: Histedbr; Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR); Palmas, PR: Centro Universitário Diocesano do Sudoeste do Paraná (UNICS); Ponta Grossa: Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). (Coleção Memória da Educação).

Mendes, I. (2012). *Pesquisas em história da Educação Matemática no Brasil em três dimensões*. Quipu, vol. 14, núm. 1. p. 69-92.

Mendes, I. (2010) Cartografias da produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990-2010. Projeto de Pesquisa", Natal: UFRN.

Mendes, I. (2008) (a) "Uma radiografia dos textos publicados nos Anais dos SNHM", Anais. 11º *Seminário Nacional de História da Ciência e Tecnologia*, Niterói, SBHC, pp. 1-11.

Mendes, I. (2008) (b). Conversas profissionais: memórias de professores e história da Educação Matemática. In: Anais. III Congresso Internacional de Pesquisa (Auto)Biográfica. CR-ROM. Natal: EDUFRN. p. 1-14.

Mendes, I. (2011) História na Educação Matemática no Brasil: uma caracterização dos seminários nacionais. Covilhã (Portugal): *Congresso Iberoamericano de História da educação Matemática.*

Mendes, I.; Chaquiam, M. (2009). (Orgs.). Anais do VIII Seminário Nacional de História da matemática. CD-ROM. Belém: SBHMat.

Nobre, S. (1997) (Ed.). Anais. II Seminário Nacional de História da Matemática e II Encontro Luso-brasileiro de História da Matemática. Rio Claro: UNESP.

Pacheco, E., Valente, W. (2007) (Orgs.). Caderno de Resumos. VII Seminário Nacional de História da Matemática. Guarapuava: Ed. da UNICENTRO.

Pinsky, C. (2005) (Org.). Fontes históricas. Sâo Paulo: Contexto.

Reis, J. (2005). *A história entre a filosofia e a ciência*. Belo Horizonte: Autêntica.

Sad, L. (2005) (Ed.). Anais. VI Seminário Nacional de História da Matemática. Rio Claro: SBHMat.

Schaff, A. (1994) *História e verdade*. 2. ed. Lisboa: Estampa.

Silva, C. da. (1999) (Ed.). Anais. III Seminário Nacional de História da Matemática. Vitória: EDUFES.

Söderqvist, T. (1997). Who Will Short out the hundred or more Paul Ehrlichs. Remarks on the historiography of recent and contemporary technoscience. In: Söderqvist, T. (Ed.). The historiography of comtemporary science and technology. Amsterdam: Harwood academic publishers. (Coleção Studies in the history o science, technology and medicine, v. 14).

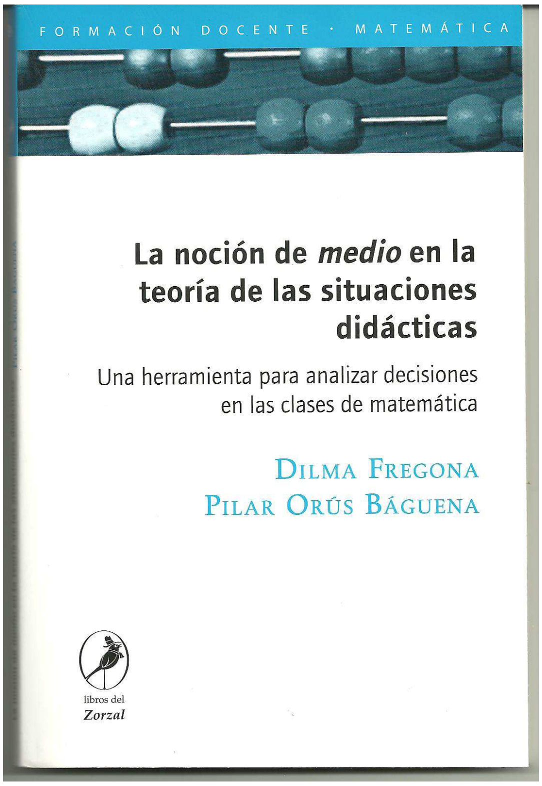
Teixeira; M. V. Nobre, S. R. (2003) Anais. V Seminário Nacional de História da Matemática. Rio Claro: SBHMat.

Iran Abreu Mendes. É professor do Departamento de Práticas Educacionais e Currículo da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Licenciado em Matemática e Especialista em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Mestre e Doutor em Educação (Educação Matemática) pela UFRN. Pós-Doutorado em educação Matemática pela UNESP/Rio Claro (Brasil). Bolsista de Produtividade em pesquisa, nível 2, do CNPq. Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, ambos da UFRN. Atualmente desenvolve estudos e pesquisas sobre Cultura Matemática, seus fundamentos históricos-epistemológicos e didáticos com desdobramentos para a Formação de Professores que ensinam Matemática. **iamendes1@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 199-200
ISSN: 1815-0640

Libros



La noción de *medio* en la teoría de las situaciones didácticas.

Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática

Autores:
Dilma Fregona
Pilar Orús Báguena

Serie:
Formación Docente: Matemática

Año de primera edición: 2011

ISBN: 978-987-599-183-5

Editorial: Libros del Zorzal

El texto que reseñamos ahonda en el estudio de nociones desarrolladas en el marco de la teoría de las situaciones didácticas, frecuentemente utilizada en investigaciones sobre enseñanza de la matemática y documentos de apoyo a docentes. Se enmarca en la Didáctica de la Matemática entendida como área de investigación que trata los fenómenos de comunicación de los saberes matemáticos y sus transformaciones.

En particular aborda la noción de *medio* que permite enriquecer las interpretaciones acerca de lo que sucede en el aula. Consideramos que este texto, si bien no da receta alguna, es de gran utilidad para comprender las decisiones que toman tanto docentes como alumnos en el proceso de enseñanza aprendizaje de un tema de matemática.

El libro consta de 3 capítulos, que sucintamente presentamos a continuación:

- En el primer capítulo se definen las nociones de *medio* y de *situación.* Para ello, a partir de plantear dos situaciones de enseñanza ("vasitos y pinceles, un problema de distribución"- "el juego de comunicación de figuras"), las autoras caracterizan dichas nociones poniendo en relieve las condiciones que subyacen en cada caso.

De esta manera se analizan las cuestiones a tener en cuenta para la puesta en marcha de la situación en el aula, como así también lo que sucede cuando se desarrolla la clase y lo producido efectivamente. Esto da pistas para pensar no sólo en lo concerniente a los alcances y límites de una situación de enseñanza sino también sobre las intervenciones docentes.

- En el segundo capítulo, a partir del análisis de una situación de comunicación de figuras, las autoras proponen un estudio detallado de los diferentes componentes del medio (alumnos, profesor, medio material) mostrando la complejidad de las decisiones que cada uno toma en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.
- En el capítulo 3 se abocan específicamente al profesor. El análisis realizado ofrece indicios acerca de la gestión de diferentes situaciones de enseñanza. Para ello, las autoras analizan las decisiones e intervenciones docentes, tanto a la hora de pensar una clase, como de darla efectivamente. Este estudio permitiría hacer avanzar el proceso de aprendizaje de sus alumnos o de la enseñanza.

Marta Porras y Rosa Martínez.
Facultad de Ciencias de la Educación.
Universidad Nacional del Comahue. Argentina.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 201-202
ISSN: 1815-0640

Matemáticas en la Red

Proyecto Descartes

Dirección: http://recursostic.educacion.es/descartes/web

El proyecto Descartes buscó, desde sus inicios, presentar nuevas maneras de enseñanza y aprendizaje utilizando en el aula las nuevas tecnologías como herramientas didácticas. Se inició en el año 1998 con la intención de cambiar la enseñanza tradicional, la utilización de estos materiales ayuda a usar metodologías activas, creativas, cooperativas pero también individualizadas.

Al acceder a la dirección indicada aparecerá una pantalla similar a la que mostramos a continuación:

Figura 1

Se transcribe a continuación, textualmente, lo que podemos leer en la presentación de la página:

> "*Se ha desarrollado una muy potente herramienta para confeccionar páginas interactivas de Matemáticas, donde los gráficos y los cálculos cobran vida a través de escenas configurables que permiten a los alumnos: investigar propiedades, adquirir conceptos y relacionarlos, aventurar hipótesis y comprobar su validez, hacer deducciones, establecer propiedades y teoremas y plantear y resolver problemas*".

En la parte superior derecha de la pantalla copiada anteriormente podemos encontrar distintos links:

- Unidades didácticas: aquí se pueden encontrar distintos temas organizados según el nivel educativo, desde 2° a 6° primaria, 1° a 4° Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) y bachiller.
- Aplicaciones: En este link nos encontramos con la siguiente pantalla:

Figura 2

En la misma se cuenta con el índice de las aplicaciones en cada uno de las cinco siguientes áreas: Álgebra, Geometría, Análisis, Estadística y Probabilidad y Matemática Aplicada. En cada una de estas aplicaciones hay distintos temas para trabajar, que a su vez abren nuevos subtemas.

- Miscelánea: en este link se encuentran diversas y variadas actividades, las mismas están organizadas de acuerdo al curso, a la edad, al bloque (los cinco mencionados en aplicaciones más juegos de ingenio) y también según el idioma.
- Experimentación Didáctica en el Aula (EDA): es un proyecto que pretende ayudar a los profesores y profesoras a incorporar las TIC a su actividad en el aula, detectar las ventajas e inconvenientes de utilizar estas nuevas tecnologías y encontrar nuevos enfoques didácticos de enseñanza y aprendizaje. Aunque inicialmente se inició sólo para matemáticas, EDA se ha extendido en los últimos años a otras áreas, niveles así como a otros proyectos más amplios. Se encuentra promovido por el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF).

En la parte inferior de la pantalla mostrada en figura 1, se indica: matemagia y en la presentación se indica "*Pasen y Vean la magia interactiva, telepatía, tangrams, animaciones, puzzles, ilusiones ópticas, paradojas geométricas, teselaciones dinámicas, astucias para comprender las matemáticas...*". También se indica enlaces y nos permite acceder a muchas y variadas páginas relacionadas con la enseñanza del aprendizaje.

Marcia Elena Oropeza.
Dpto. de Matemática.
Facultad de Economía y Administración.
Universidad Nacional del Comahue. Argentina.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 203-214
ISSN: 1815-0640

Información

Material escolar en Perú: Crónicas de viajes emocionantes

FUNDACIÓN CANARIA *CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ*

1. Conchud

Entre las diversas actividades que realiza la Fundación hay que destacar el envío de material escolar a países americanos. En el mes de marzo se ha visto la realidad concreta de la entrega en una alejada escuela, una institución educativa de difícil orografía, en Cajamarca, Perú. La crónica de este viaje solidario es emocionante y con la ayuda de las fotografías y del video que pueden visionar en nuestra web, podemos afirmar que una imagen sí vale más que mil palabras…

Se ha enviado **material escolar** para 90 alumnos, con la cantidad de 1283 € a la Institución Educativa Nº 10469 de la comunidad de Conchud, distrito de Tacabamba, provincia de Chota, en la región de Cajamarca, en la zona andina del Norte del Perú, a 2486 metros de altitud. La entrega ha sido posible gracias a un decidido gesto de solidaridad y cooperación de dos profesores peruanos.

Foto 1: Preparados para partir

Ellos son José F. Ventura Vegas y su esposa Gladys Zorrilla Cieza de Ventura a los que la Fundación ha transmitido su agradecimiento por el esfuerzo realizado y por el entusiasmo mostrado para culminar con éxito esta ayuda a los más desfavorecidos.

Información

La población atendida vive sujeta a una limitada situación económica lo que dificulta que los estudiantes cuenten con los útiles necesarios para desarrollar sus actividades y obtener un adecuado aprendizaje, nos precisaban el director y docentes del lugar. Los 90 escolares van desde primero a sexto grado y el proyecto se ha llamado: "Útiles para todos".

Foto 2: El camino embarrado

En la descripción geográfica del colegio hay que señalar que se halla a una altitud de 2846 msnm, en la margen izquierda del río Llaucano y con un relieve muy accidentado. En la crónica se puede leer:

> *Día 09 de Marzo: Viaja Gladys de Chiclayo a Chota (sale 20:00h llegó: 05:00h del día 10 de Marzo)*
> *Día 10 de Marzo: Trasladan el material en la combi de Chota a Conchud. Se tomó la decisión de contratar a la combi íntegramente para trasladar las 28 cajas y el paquete para evitar que estos por la lluvia intensa en esos días pudieran deteriorar los materiales.*
> *Se contó con el apoyo de los docentes del Instituto Superior Pedagógico "Nuestra Señora de Chota" (Chota) para ubicar a la IE ubicada en zona de extrema pobreza, así como se contó con su apoyo para el traslado y la entrega de los materiales. Como se puede apreciar en el video.*
> *Salieron de Chota 05:30h, llegando a las 12:00h aproximadamente a Conchud, en una trocha muy deteriorada por las lluvias como lo observarán tanto en las fotos como en el video.*
> *Los padres de familia apoyaron el traslado del material en sus caballos durante la hora que dura el trayecto de La Púcara a Conchud*

Foto 3: El último tramo a lomos de bestias

El material para los estudiantes y para las aulas fue comprado en una casa comercial mayorista, la Librería *Vitteri*, que ha ofrecido los mejores precios. El 7 de marzo se recoge el material en la casa comercial (28 cajas y un paquete grande) y se embala, asegura y se traslada a una camioneta de transporte. Se trata de cuadernos, cajas de colores, juegos de reglas, compás, lápices, lapiceros, gomas, borradores, cajas de plastilina, caja de témperas, tijeras, folios, cajas de tizas, cartulinas y otros útiles escolares para los alumnos y el propio colegio.

Foto 4: Llegando a Conchud

El viaje lo realiza Gladys porque su esposo, José Ventura Vegas, no pudo ir por problemas de salud. El recibimiento fue efusivo, con banda de la comunidad, baile de los profesores visitantes con padres de familia y profesores de la institución educativa.

Almuerzo preparado por los padres de familia, preparación de los paquetes –de forma individual- para cada uno de los niños y niñas. La ceremonia de entrega se inicia con el canto del himno nacional y se continúa con la lectura de una carta del Presidente de la Fundación y un saludo de Gladys Zorrilla, que, con frases precisas y emocionadas, agradeció la colaboración de todos para llegar al éxito final. Durante la entrega se levantó un acta firmada por los padres y con la huella digital de cada escolar.

Foto 5: Todos reunidos.

Y, finalmente, el regreso: salida de La Púcara a las 17 horas llegando a las 18,30 para arribar a Chota a las 00,00 horas (12 de la noche). El 11 de marzo viaje de Chota a Cajamarca saliendo a las 11 horas y llegada a las 16 horas. Se hizo por una ruta diferente por que la trocha de Chiclayo a Chota se había interrumpido por un deslizamiento de tierra que cubrió la carretera. El viaje de Cajamarca a Chiclayo comenzó a las 23 horas con llegada a las 4 de la madrugada.

Foto 6: Ceremonia de entrega: entonación del himno nacional

En el mensaje final enviado por José Ventura y Gladys Zorrilla se da cuenta del agradecimiento de las gentes de esa zona del Perú indicando expresiones como *es la primera vez que se acuerdan de ellos en una comunidad tan lejana y que hacen que valoren aún más lo recibido.*

Foto 7: Misión cumplida

2. Asinky Perú

La Fundación ha colaborado también con la asociación *Asinky Perú* (*Sonríe Perú*) en otra entrega de **material escolar.** En este caso la ayuda llegó a 150 escolares de las dos comunidades Marcapuyan y Antijirca, en Churubamba-Huánuco, que se encuentra, respectivamente a 3800 y 3600 msnm. Con la cantidad de 1100 € la asociación, liderada por Flor de María Basauri Rojas, -que está realizando una gran labor en el país-, preparó un kit escolar con mochila, cuadernos, lapiceros, colores, etc. para cada uno de los escolares.

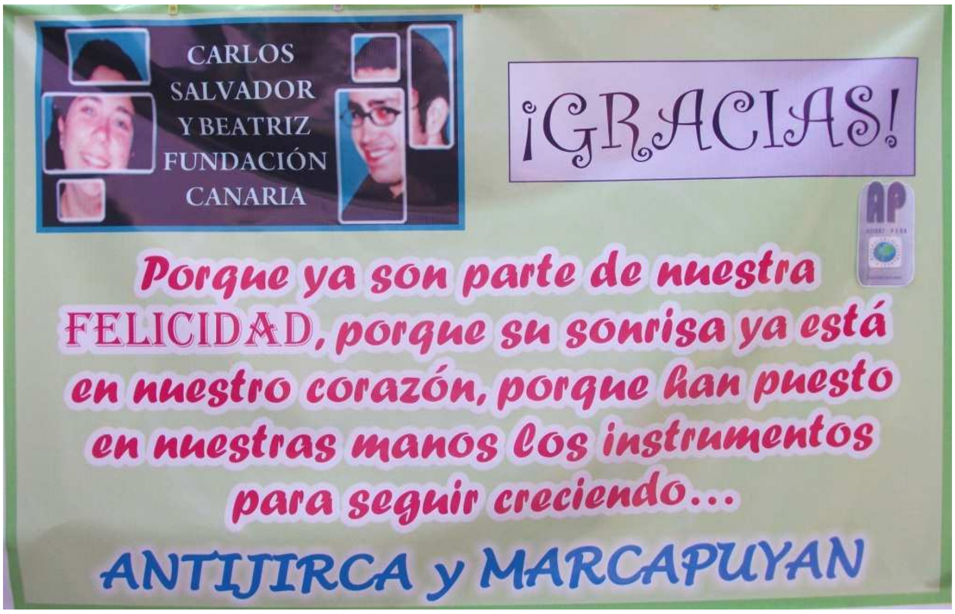


Foto 8: Recibimiento

El día estaba frio, el calor del rencuentro con los profesores y el de la conversación nos hizo más llevadero el viaje, la primera traba que encontramos ha sido el desborde del rio a la salida de la ciudad de Huánuco, pero la pudimos pasar sin problemas, la lluvia que asomaba no se animaba a mostrarse. Pasamos por algunos pueblos ya conocidos, hasta Uthao, desde *el que se halla un desvío que nos llevaría a Marcapuyán, como siempre gozamos de la compañía en el camino de rebaños que la gente a esas horas lleva al pasteo, el camino no es tan bueno pero tenemos la ventaja de la calidad de la tierra… muchas curvas que nos van elevando junto al friecito que también se eleva conjuntamente a la altitud que vamos alcanzando.*

Foto 9: En camino

La acción de entrega ha sido muy emotiva, ver a los niños en formación impecable, la curiosidad en los ojitos, la expresión de sorpresa en algunos, ver flamear la bandera peruana en esas alturas, nos calienta el alma y escuchar a los niños el Himno Nacional ha sido muy emocionante, las palabras de agradecimiento de los Directores, de los Presidentes de cada Comunidad y Presidentes de la Asociación de Padres de Familia las hemos escuchado con la atención que merecen y traslado esos agradecimientos muy sentidos a cada uno de los miembros de la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz, sé que hemos estado muy cerca de Salvador y Beatriz a esa altura, pues sentimos su sonrisa en cada uno de nosotros.

Foto 10: Material entregado

Hay mucha más información de la Fundación en la página web:

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

¡¡Aquí les esperamos!!

Material escolar em Peru: Crônicas de viagens emocionantes

FUNDAÇÃO CANARIA *CARLOS SALVADOR E BEATRIZ*

1. Conchud

Entre as diversas atividades que realiza a Fundação há que destacar o envio de material escolar a países americanos. No mês de março viu-se a realidade concreta da entrega numa afastada escola, uma instituição educativa de difícil orografía, em Cajamarca, Peru. A crônica desta viagem solidária é emocionante e com a ajuda das fotografias e do video que podem visionar em nosso site, podemos afirmar que uma imagem sim vale mais que mil palavras …

Ele tem enviado material escolar para 90 alunos, com a quantidade de 1283 € para a Instituição Educacional n º 10469 da comunidade de Conchud, distrito Tacabamba, província de Chota, na região Cajamarca, nos Andes do Norte do Peru, em 2486 metros de altitude. A entrega foi possível graças a um gesto forte de solidariedade e cooperação de dois professores peruanos

Foto 1: Pronto para ir

Eles são Joseph F. Ventura e sua esposa Gladys Vegas Zorrilla Cieza de Ventura para que a Fundação tem vindo a manifestar o seu apreço pelo esforço e entusiasmo demonstrado para completar com sucesso esta ajuda aos mais desfavorecidos.

A população coberta vive sujeito à situação econômica limitada torna difícil para que os alunos tenham as ferramentas necessárias para desenvolver suas atividades e obter uma formação adequada, precisávamos do diretor e os professores do local. Os 90 alunos que vão do primeiro ao sexto ano eo projeto tem sido chamado de "útil para todos."

Foto 2: A estrada enlameada

Na descrição geográfica da escola deve-se notar que a uma altitude de 2846 metros, na margem esquerda do rio Llaucano e um relevo muito irregular. Na crônica diz:

> *Dia 09 de março: Curso de Chiclayo para Chota Gladys (20:00 h saiu: 05h00 em 10 de março)*
>
> *Dia 10 de março: Eles mover o material na combinação de Chota para Conchud. Foi decidido contratar a combinação completa para mover as caixas de 28 eo pacote para evitar estes pela chuva forte nesses dias podem danificar os materiais*
>
> *Ele tinha o apoio de professores do Instituto Superior Pedagógico "Nossa Senhora de Chota" (Chota) para localizar o IE localizado em área de extrema pobreza, e contou com seu apoio para a transferência e entrega de materiais. Como pode ser visto no vídeo.*
>
> *Eles deixaram Chota 05:30 h, chegando a cerca de 12:00 Conchud em uma trilha bastante danificada pelas chuvas, como observado tanto em fotos e em vídeo.*
>
> *Os pais apoiaram a transferência do material em seus cavalos durante a viagem horas ao longo da Pucara para Conchud*

O material para os alunos ea sala de aula foi comprado de um comercial atacadista Biblioteca Vitteri, que ofereceu os melhores preços. Em 7 de Março inclui o material no comercial (28 caixas e um pacote grande) e embalada, fixada e transferida para um van de transporte. Esses notebooks, caixas coloridas, regras do jogo, compasso, lápis, canetas, elásticos, borrachas, caixas de argila, caixa de aguarelas, tesoura, papel, caixas de giz, cartões e outros materiais escolares para os alunos ea si mesmo escola.

Foto 3: A última seção sobre as costas de bestas

A viagem é realizada por Gladys porque seu marido, Joseph Ventura Vegas, não pôde comparecer devido a problemas de saúde. A recepção foi calorosa, com a banda comunidade, dançar as professoras visitantes com os pais e professores da escola.

Foto 4: Alcançando Conchud

O almoço preparado pelos pais, pacotes de preparar, individualmente, para cada uma das crianças. A cerimônia começou com o canto do hino nacional, e continuou com a leitura de uma carta do Presidente da Fundação e uma salva de Gladys Zorrilla, que, com precisão e animado, agradeceu a colaboração de todos para o sucesso final. Durante a entrega subiu um relatório assinado pelos pais e da impressão digital de cada escola

Foto 5: Tudo junto.

E, finalmente, o retorno: fora da Pucara menos 17 horas que chegam às 18h30 para chegar a Chota para as 00h00 (12 horas). Em março de viagem de 11 para Cajamarca Chota out às 11 horas e terminam às 16 horas. Foi feito por um caminho diferente que a pista de Chiclayo para Chota foi interrompida por um deslizamento de terra cobriu a estrada. A viagem de Cajamarca para Chiclayo começou às 23 horas, com chegada às 4 da manhã.

Foto 6: Cerimônia: Hino Nacional

Na mensagem final enviada por José Zorrilla Ventura e Gladys perceber a gratidão do povo de que a área de expressões Peru indicam como é a primeira vez que me lembro deles em uma comunidade tão longe e torná-lo ainda mais valor recebido.

Foto 7: Missão cumprida

2. Asinky Perú

A Fundação também tem trabalhado com a associação Asinky Peru (Peru Smiles) em uma outra parcela de escola. Neste caso, a ajuda chegou a 150 escolas nas duas comunidades e Marcapuyan Antijirca em Churubamba-Huánuco, localizadas respectivamente em 3800 e 3600 m. Com a quantidade de 1100 € a associação, liderada por Maria Flor Basauri Rojas, que está fazendo um grande trabalho no país, preparou um kit escolar com mochila, cadernos, canetas, cores, etc. para cada um dos escola.

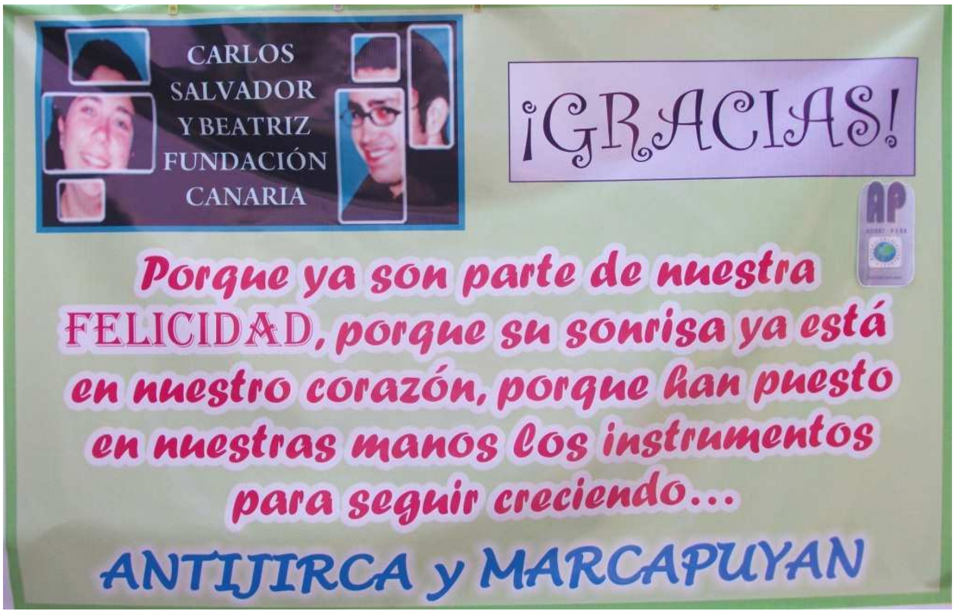


Foto 8: Recepção

O dia estava frio, o calor do reencontro com os professores ea conversa tornou-se mais suportável viajamos, nos deparamos com o primeiro obstáculo foi o transbordamento do rio mesmo à saída da cidade de Huánuco, mas fomos capazes de mover-se suavemente , a chuva se aproximando não se atreveu a aparecer. Passamos algumas aldeias *conhecidos Uthao, a partir do qual é um desvio que nos levaria a Marcapuyán, como sempre gostava da companhia dos rebanhos na maneira que as pessoas naquele tempo leva para o pasto, a estrada não é tão bom mas têm a vantagem de a qualidade da terra ... muitas curvas que são reunindo o friecito juntos também se eleva para a altitude que estão a atingir*

Foto 9: Na strada

O ato de entrega foi muito emocionante ver as crianças em formação impecável, a curiosidade nos olhos, a expressão de surpresa em alguns, ver bandeira peruana voar nessas alturas, nós aquecer a alma e ouvir Hino crianças nacional tem sido muito emocionante, os agradecimentos da Administração, os presidentes de cada comunidade e presidentes de Associação de Pais ouvimos com a atenção que merecem e transferir esses agradecimentos muito sentidos a cada um dos membros da Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz, eu sei que estive muito perto de Salvador e Beatriz naquele momento, pois sentimos o seu sorriso em cada um de nós.

Foto 10: Material entregue

Muito mais informação no site da Fundação:

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

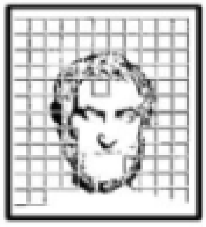
¡¡Aqui eu espero!!

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 30, páginas 215-218
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2012



XIV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Organiza: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
Lugar: Málaga, España.
Fecha: 4 al 6 de julio de 2012.
Información: **http://xiv.thalesceam.es/**

12 th. Internacional Congreso on Mathematical Education

Lugar: Seúl, Korea.
Fecha: 8 al 15 de julio de 2012.
Información: **http://www.icme12.org/**

IX REUNION DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA DEL CONO SUR

Organiza: Sociedad Boliviana de Educación Matemática. SOBOEDMA.
Lugar: Cochabamba, Bolivia.
Fecha: 8 al 15 de julio de 2012.
Información: **bgrigoriu@gmail.com**

26° Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 26)
Lugar: Ouro Preto. Mina Gerais. Brasil
Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Fecha: 23 al 27 de Julio de 2012
Información: **www.clame.org.mx**

IV CONGRESO LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICOS

Lugar: Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba, Argentina
Convoca: Unión Matemática de América Latina y el Caribe.
Fecha: 6al 10 de Agosto de 2012
Información: **http://www.famaf.unc.edu.ar/clam2012/**

IV Reunión Pampeana de Educación Matemática

Organiza: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa.
Lugar: Santa Rosa, La Pampa. Argentina.
Fecha: 22 al 24 de agosto de 2012.
Información: **http://online2.exactas.unlpam.edu.ar/repem**

XI EGEM
XI Encontro Gaúcho de Educação Matemática

Organiza: Centro Universitario UNIVATES.
Lugar: Lajeado. Rio Grande do Sul. Brasil.
Fecha: 22 al 25 de agosto de 2012.
Información: **www.univates.br/egem/**

X CAREM
X Conferencia Argentina de Educación Matemática

Lugar**:** Buenos Aires. Argentina.
Convoca**:** Sociedad Argentina de Educación Matemática. (SOAREM)
Fecha: 6 al 8 de septiembre de 2012.
Información: **www.soarem.org.ar**

CUREM4
4° CONGRESO URUGUAYO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Organiza: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.
Lugar: Montevideo, Uruguay.
Fecha: 19 al 21 de septiembre de 2012
Información: **www.semur.edu.uy**

Conferencia Latinoamericana de GeoGebra Uruguay 2012

URUGUAY 2012

Lugar: instituto de profesores Artigas. Montevideo, Uruguay.
Fecha: 8al 10 de noviembre de 2012
Información: **http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php**

AÑO 2013

Del 16 al 20 de septiembre en Uruguay

VII CIBEM
VII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.cibem7.semur.edu.uy

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, página 219-220
ISSN: 1815-0640

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@gmail.com**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.

2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.

3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**

4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.

5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.

6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.

7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

Para libro:
Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista:

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com