UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 29 – Marzo de 2012

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 3-4
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.
Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Evaluadores

Diseño y maquetación

Colabora

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 5-6
ISSN: 1815-0640

Editorial

"Si enseñamos a los estudiantes de hoy
cómo enseñamos ayer,
les estamos robando el mañana"

John Dewey (1859-1952)

Estimados colegas y amigos:

Este es el primer número del nuevo período de nuestra dirección, queremos agradecer a todos ustedes por el acompañamiento y apoyo a lo largo de estos últimos tres años, a la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz, a los que nos asesoraron de manera incondicional, a los evaluadores de tantos artículos, a los autores de cada una de las entregas y, por supuesto, a los que son la razón de ser de esta publicación, nuestros lectores.

La publicación de UNIÓN continuará realizándose desde la plataforma de la OEI, lo que permite que llegue a una mayor cantidad de docentes de matemática en los distintos países.

En este volumen, el primero de este año, tenemos artículos de distintas temáticas, todos de excelente nivel, la firma invitada de este número es Agustín Carrillo de Albornoz Torres, quién además de ser Secretario General de la FISEM es uno de nuestros grandes colaboradores.

Hemos mantenido las secciones fijas, pero hemos agregado una más, la misma se titula *Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica*, fue agregada por sugerencia del Vicepresidente de la FISEM, Fredy González, transcribimos a continuación el texto explicativo que nos fuera enviado por él: "esta nueva sección está concebida como un espacio que permitirá "atender a la necesidad de profundizar en el intercambio entre investigadores y en la producción del conocimiento ligada a la historia de la educación matemática en América Latina, en Portugal y en España, mostrando las diversas perspectivas y metodologías que se han seguido hasta el momento. El interés por esta temática ha crecido enormemente en el ámbito de la Educación Matemática en todos estos países. Comisiones internacionales, revistas con números especiales sobre este asunto, grupos de trabajo, de investigación y muchos otros indicadores justifican un evento de esta naturaleza" tal como fuera expuesto en el I Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática, realizado del 26 al 29 de mayo de 2011, en la UBI - Universidade da Beira Interior, Covilhã"

Por último, los invitamos a seguir acompañándonos en este proyecto, que esperamos, día a día llegue a más docentes.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

.

Editorial

"Se ensinamos aos estudantes de hoje
como ensinamos ontem,
lhes estamos a roubar o manhã"

John Dewey (1859-1952)

Estimados colegas e amigos:

Este é o primeiro número do novo período de nossa direcção, queremos agradecer a todos vocês pelo acompañamiento e apoio ao longo destes últimos três anos, à Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz, aos que nos asesoraron de maneira incondicional, aos evaluadores de tantos artigos, aos autores da cada uma das entregas e, por suposto, aos que são a razão de ser desta publicação, nossos leitores.

A publicação de UNIÃO continuará realizando-se desde a plataforma da OEI, o que permite que chegue a uma maior quantidade de docentes de matemática nos diferentes países.

Neste volume, o primeiro deste ano, temos artigos de diferentes temáticas, todos de excelente nível, a assinatura convidada deste número é Agustín Carrillo de Albornoz Torres, quem além de ser Secretário Geral da FISEM é um de nossos grandes colaboradores.

Mantivemos as secções fixas, mas agregámos uma mais, a mesma titula-se História Social da Educação Matemática em Iberoamérica, foi agregada por sugestão do Vice-presidente da FISEM, Fredy González, transcribimos a seguir o texto explicativo que nos fosse enviado por ele: "esta nova secção está concebida como um espaço que permitirá "atender à necessidade de aprofundar no intercâmbio entre pesquisadores e na produção do conhecimento unida à história da educação matemática em América Latina, em Portugal e em Espanha, mostrando as diversas perspectivas e metodologías que se seguiram até o momento. O interesse por esta temática cresceu enormemente no âmbito da Educação Matemática em todos estes paísesComissões internacionais, revistas com números especiais sobre este assunto, grupos de trabalho, de investigação e muitos outros indicadores justificam um evento desta natureza" tal como fosse exposto no I Congresso Iberoamericano de História da Educação Matemática, realizado do 26 ao 29 de maio de 2011, na UBI - Universidade da Beira Interior, Covilhã"

Por último, convidamo-los a seguir acompanhando-nos neste projecto, que esperamos, dia a dia chegue a mais docentes.

Um abraço fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Marzo de 2012, Número 29, página 7-8
ISSN: 1815-0640

Agustín Carillo de Albornoz Torres

Breve Reseña

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada, Catedrático de Educación Secundaria de Matemáticas desde 1984, destinado en la actualidad la Universidad de Córdoba (España).

Ha impartido cursos de formación para el profesorado, tanto presenciales como a distancia, sobre distintos aspectos relacionados con la enseñanza de las matemáticas y sobre la utilización de las TIC como recurso para la enseñanza de las Matemáticas en Centros de Formación del Profesorado de toda España y en distintas universidades.

Ha participado en el programa de formación a distancia de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES siendo tutor en cursos sobre software libre aplicado a las matemáticas, geometría dinámica, cálculo simbólico o calculadoras gráficas y científicas desde el curso 2001-02.

En 2009 participó en la creación del Instituto GeoGebra de Andalucía.

Tutor en cursos de formación a distancia sobre Webquest y sobre GeoGebra convocados por el Instituto de Tecnologías Educativas (ITE) del Ministerio de Educación de España desde el año 2008. Entre los cursos tutorizados se encuentran varias ediciones destinadas al profesorado de Iberoamérica dentro del programa de cooperación internacional.

En la actualidad está coordinando el curso de formación a distancia para el profesorado de Matemáticas (Ñandutí) organizado por la OEI con participación del profesorado de Paraguay y administrando el Centro de Recursos Virtual creado con el apoyo de esta institución.

Ha publicado varios libros en la Editorial Ra-Ma sobre las posibilidades didácticas de programas de cálculo simbólico (DERIVE, MATHEMATICA, MAPLE) y de geometría dinámica (CABRI GÉOMÈTRE, GeoGebra), así como artículos en revistas como SUMA, EPSILON o UNIÓN entre otras, relacionados con las aplicaciones de las TIC a la enseñanza de las matemáticas.

Participante como ponente en distintos congresos regionales y nacionales sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Ha participado en congresos organizados por las dos Sociedades de Profesores de Matemáticas de Argentina o por la sociedad uruguaya (CUREM

2011), impartiendo conferencias y talleres, y como conferenciante en el último CIBEM celebrado en Puerto Montt (Chile, 2009).

Ha coordinado un Proyecto de incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación al aula en el IES Jándula de Andújar (Jaén) desde su aprobación en el curso 2003-04 por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, siendo este centro uno de los pioneros en Andalucía en la incorporación de las TIC.

En la actualidad es secretario general de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES y secretario general de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FISEM).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Marzo de 2012, Número 29, páginas 9-22
ISSN: 1815-0640
firma invitada

El dinamismo de GeoGebra

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Introducción

Ya hace algunos años, concretamente en 1985, desde que comencé mis relaciones con las TIC, aunque en esa época el nombre que recibían era el de “nuevas tecnologías” por la novedad que para los ámbitos educativos suponía la entrada de los computadores en las aulas. Desde entonces mi objetivo ha sido promover el uso de las TIC o de las NNTT (nuevas tecnologías) como recursos para la enseñanza y el aprendizaje en el área de matemáticas, lo que ha supuesto mi implicación en gran cantidad de actividades de formación dirigidas a los distintos niveles educativos para intentar que el profesorado conozca y sobre todo aproveche las posibilidades que estos recursos considero que ofrecen.

Esta tarea no es sencilla ya que cualquier cambio en el profesorado no es inmediato y mucho menos cuando supone un cambio metodológico.

A pesar de los esfuerzos que muchos docentes han realizado y, también a pesar de las políticas educativas que en los últimos años y en bastantes países han invertido y apostado para facilitar computadores a los centros educativos, sigo pensando que no se ha conseguido la integración real de las TIC en los procesos educativos.

Integración no es lo mismo que utilización. Es evidente, que hay que reconocer y valorar los esfuerzos del profesorado por utilizar las TIC en su trabajo en el aula, pero algo ha fallado para no alcanzar la integración esperada por la inversión realizada en cuanto a apoyo económico, en material y también en formación, por lo que toca seguir trabajando en esta línea, para que en algún momento sea posible lograr la integración.

Durante estos años, en las acciones de formación en las que he participado, he difundido el uso de ciertos recursos o programas de utilidad para el área de matemáticas como han sido los programas de geometría dinámica, de cálculo simbólico o las calculadoras, sin olvidar todo lo Internet pone a nuestra disposición.

De todas las opciones que las TIC ofrecen para su uso en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, quisiera dedicar las siguientes líneas de este artículo, a exponer algunas ideas sobre GeoGebra que puedan ser de utilidad para el profesorado que tenga como objetivo incorporar las TIC a su tarea diaria.

El dinamismo de GeoGebra

Recordando recursos utilizados en estos años, no podemos olvidar programas como Cabri Géomètre, Geometer's Sketchpad, Cinderella, Regla o compás y otros similares nacidos al amparo del desarrollo del software libre, que en distintos momentos han sido de gran ayuda para el profesorado, sobre todo cuando se trataba de aprovechar su posibilidades para desarrollar proyectos o contenidos de geometría que se convertía en dinámica con la ayuda de las herramientas que estos recursos ofrecían.

Las construcciones adquirían movimiento, permitían transformaciones sin más que arrastrar cualquier objeto con el ratón, lo que ofrecía la posibilidad de interactuar y por tanto investigar sobre una determinada construcción; lo que suponía ganar en dinamismo frente a la rigidez de los medios utilizados hasta ese momento.

Cada uno de los programas anteriores tiene su mérito, han ayudado y sobre todo han facilitado la incorporación de nuevos programas, como ha ocurrido con GeoGebra, ya que ha bastado realizar pequeños cambios para transformar lo que se hacía con ellos para adaptarlos al nuevo software.

GeoGebra mantiene la sencillez y el dinamismo, añadiendo algunos valores como ser libre y multiplataforma y sobre todo, permite trabajar casi todos los bloques de contenidos, por lo que no es solo geometría.

Además, al tener la consideración de software libre no requiere inversión para su uso y algo importante, su continua evolución que hace que nazcan nuevas versiones o que incorporen nuevas herramientas con las que aumenta su potencia y sus posibilidades didácticas.

Estoy convencido que las razones anteriores y alguna más, son las causantes de la generalización de GeoGebra que lo están convirtiendo en un recurso imprescindible para todo el profesorado interesado en trabajar con las TIC en su aula.

GeoGebra no es solo geometría (Geo), al menos como su nombre indica también es álgebra (Gebra), aunque la realidad es más, es cálculo, es análisis y también estadística; en definitiva GeoGebra supone una excelente opción para hacer unas matemáticas dinámicas sobre todo en los niveles educativos de Primaria, Secundaria y también Bachillerato.

Es evidente que GeoGebra no tiene la exclusividad como programa para la enseñanza, pero la gran variedad de opciones que ofrece hacen que su uso, no sea solo para dibujar o construir, sino también, como veremos a través de algunos ejemplos, permitirá proponer al alumnado sencillas tareas de investigación y experimentación, que en la mayoría de los casos no requerirán demasiados conocimientos técnicos ya que bastará con conocer algunas herramientas básicas y algunos comandos para afrontarlas.

Algunas propuestas para desarrollar con GeoGebra

Con GeoGebra se pueden realizar construcciones de muy diversa variedad y sobre todo complejidad, aunque lo ideal o recomendable es comenzar con propuestas sencillas, sobre todo cuando se trata de incorporarlo al aula, dejando para más adelante las propuestas que requieran un mayor esfuerzo en la construcción. Esto facilitará que apenas se pierda tiempo en los procesos técnicos y por tanto, se pueda dedicar todo el tiempo y el esfuerzo a la parte didáctica que es la que requiere el aprendizaje del alumnado.

Además, siempre nos queda aprovechar las excelentes construcciones disponibles en Internet, en las que solo hay que acceder para utilizarlas, aunque en ocasiones, quizás interese adaptarlas a las características de nuestro alumnado o de los contenidos que se deseen trabajar.

Al utilizar GeoGebra se podrá platear en cada momento, la realización de cualquier construcción geométrica que ayude al alumnado a familiarizarse con el significado de dinamismo y sobre todo a comprender la diferencia entre dibujar y construir.

Realizar una construcción a diferencia de dibujar supone establecer unas relaciones entre los objetos que intervienen, de manera que al mover cualquier objeto inicial se mantendrán las relaciones (matemáticas) entre los objetos de la construcción.

Una propuesta sencilla que puede ayudar a comprender estos conceptos puede ser: “dada una circunferencia de centro O, traza la circunferencia cuyo centro esté en un punto cualquiera P y sea tangente a la circunferencia anterior”.

Una vez dibujados los objetos iniciales: la circunferencia de centro O y un punto P, en este caso exterior; se dibujará una circunferencia que cumpla las condiciones pedidas. Para ello, bastaría con seleccionar la herramienta *Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos*, marcando P como centro y buscando un punto de tangencia en la circunferencia A, tal y como aparece en la imagen siguiente:

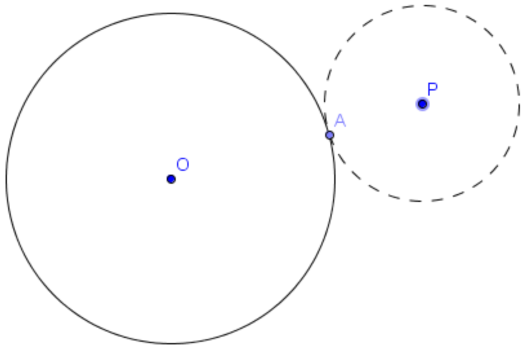


Figura 1

Es evidente que la construcción no es correcta ya que la circunferencia perderá la condición de tangencia al mover el punto P.

Al no establecer relaciones entre los objetos, lo que hemos hecho ha sido dibujar y no construir.

Sin embargo, si previamente trazamos el segmento o la recta que une los puntos O y P, para obtener a continuación, el punto A de intersección con la circunferencia y, posteriormente, dibujamos la circunferencia de centro P y radio PA, podemos observar que se mantendrá la relación de tangencia al mover el punto P: Por tanto, la construcción es correcta.

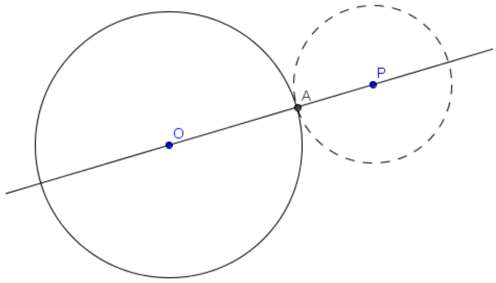


Figura 2

Es conveniente insistir en que los objetos en las dos construcciones anteriores son prácticamente los mismos y sin embargo hay una diferencia importante entre una solución y la otra. Además, podemos plantear si existe alguna razón en el color con el que GeoGebra ha representado el punto A en cada uno de los casos anteriores, lo cual permitirá introducir los conceptos de objetos dependientes e independientes que ayudarán a conocer algo más de GeoGebra.

Además, podemos plantear nuevas cuestiones como si la circunferencia tangente es única o no (evidentemente no, tal y como aparece en la imagen siguiente) o qué ocurre si el punto P es interior a la circunferencia inicial, o si es posible encontrar una circunferencia tangente cuando P pertenece a la circunferencia.

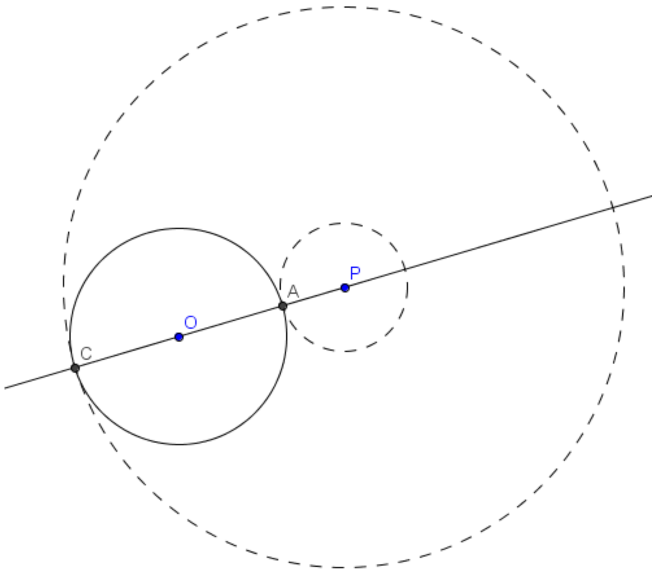


Figura 3

Esta propuesta es sencilla, requiere pocas herramientas y por tanto pocos conocimientos técnicos y sin embargo ofrece “algunas” posibilidades didácticas y algo importante que es promover la investigación y el descubrimiento en el alumnado.

Algo parecido puede ocurrir si le planteamos que determine cuántas circunferencias se pueden dibujar que pasen por un punto dado.

Ampliando a continuación el número de puntos a dos, tres o cuatro, podemos introducir algunos conceptos como mediatriz, circunferencia circunscrita, lugares geométricos o rastro como elemento propio de GeoGebra.

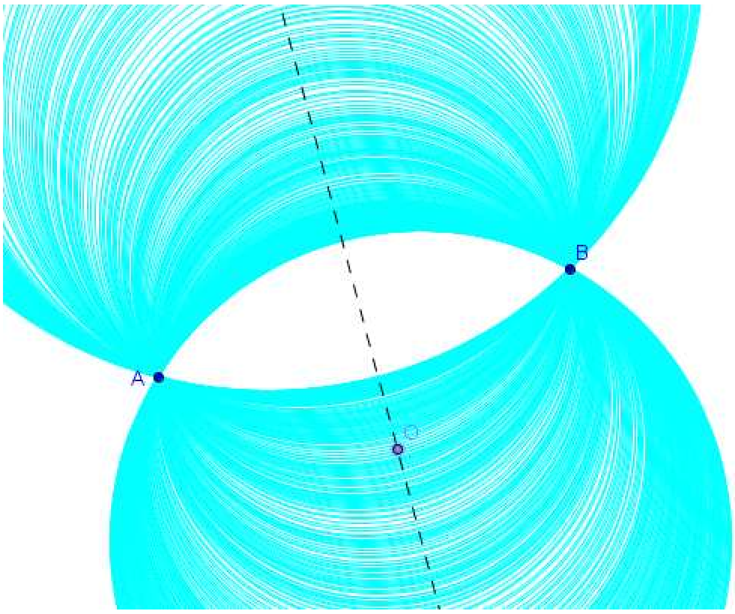


Figura 4

Cualquier ejemplo, por simple que parezca, siempre ofrecerá una gran variedad de posibilidades, a través de las que se podrán introducir nuevos conceptos o nuevas investigaciones, en la mayoría de los casos, sin demasiadas complejidades técnicas.

De manera similar, podemos plantear actividades que requieran además de la construcción, la manipulación de los objetos para determinar condiciones o relaciones entre los objetos que intervienen. Como muestra serviría la siguiente propuesta: “Si ABCD es un cuadrilátero y A´B´C´D´ es el cuadrilátero formado por los puntos medios de cada lado. Clasifica el cuadrilátero A´B´C´D´ según sea el cuadrilátero ABCD”.

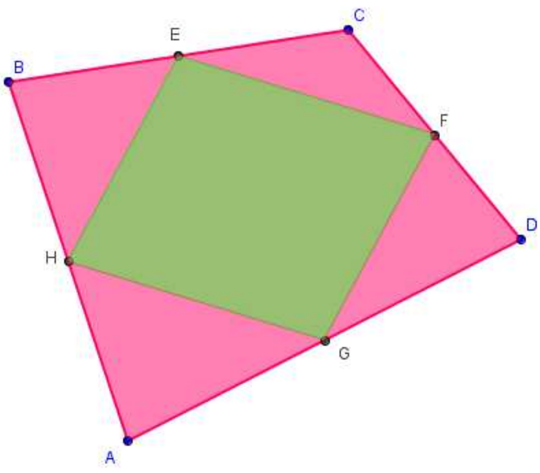


Figura 5

GeoGebra puede resultar de gran ayuda para visualizar ciertos conceptos o relaciones que en ocasiones consideramos triviales y por tanto, no le prestamos la atención necesaria.

Un ejemplo también sencillo, que podemos plantear, aunque requiere algunas herramientas más, sobre todo para logar el movimiento, es determinar de la expresión de ciertas áreas de figuras planas, por ejemplo la del área del triángulo.

El objetivo sería visualizar que el área del triángulo es la mitad del paralelogramo que se construye con la misma base y altura. Para ello, una vez dibujado el triángulo inicial, solo hay que lograr duplicarlo y girarlo para obtener un paralelogramo; acciones que conseguiremos con ayuda de un deslizador y una rotación.

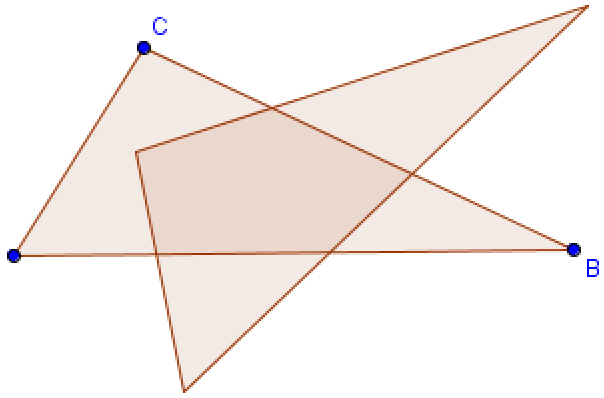


Figura 6

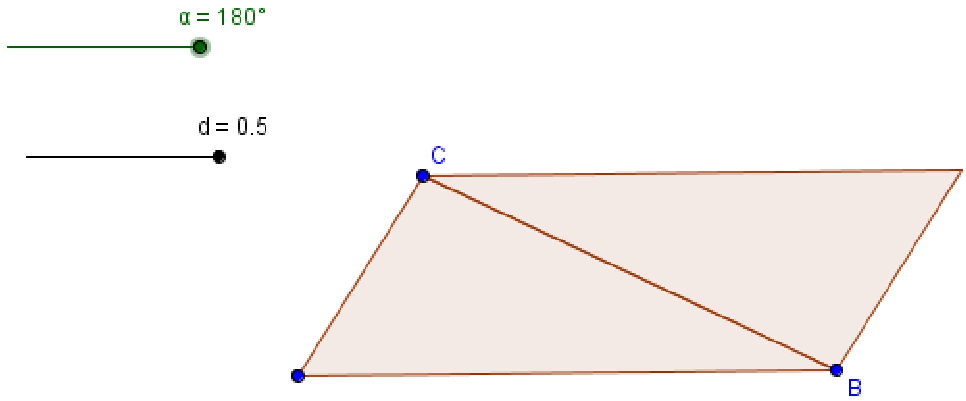


Figura 7

La observación facilitará que el alumnado comprenda y sobre todo no olvide que el área del triángulo es base por altura dividido entre dos que se deduce de ser el área de la mitad del paralelogramos construido sobre el triángulo.

No siempre es necesario realizar las construcciones para introducir o para trabajar conceptos, ya que basta con aprovechar las que encontramos en Internet, como ocurre con la visualización de las relaciones entre algunas áreas de figuras planas, para las que recomiendo acceder a las construcciones realizadas por Manuel Sada.

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/areas.htm

En esta dirección encontraremos construcciones con carácter interactivo que fomentan la manipulación y por tanto la experimentación, como la mostrada en las imágenes siguientes:

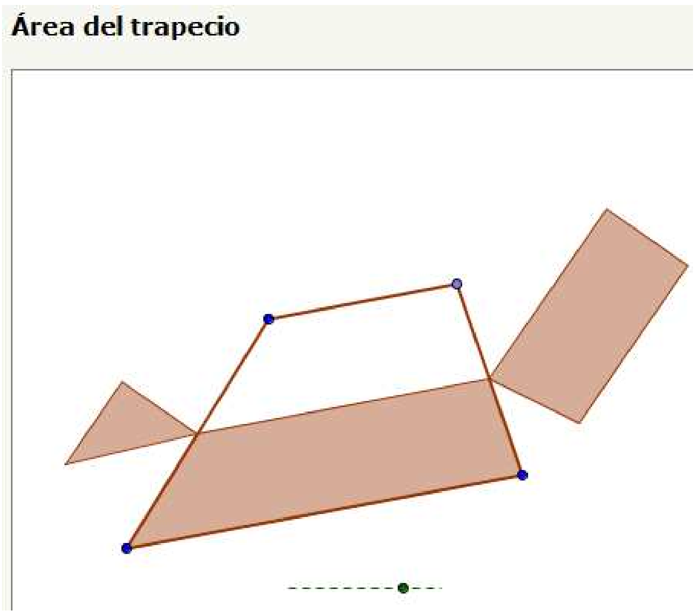


Figura 8

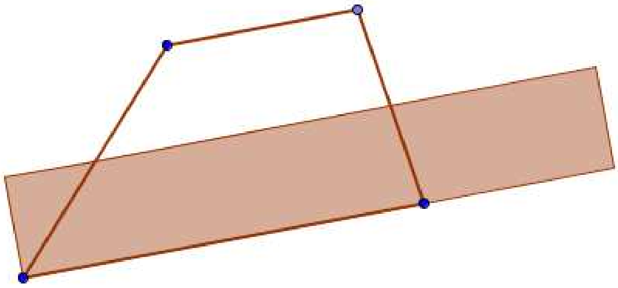


Figura 9

Algo parecido podemos proponer a nuestro alumnado para investigue o para que deduzca determinados teoremas, de los que un sencillo ejemplo sería el siguiente: “Si en un cuadrilátero cualquiera ABCD se construyen cuadrados sobre cada uno de sus lados, las rectas que unen los centros de los cuadrados correspondientes a lados opuestos son perpendiculares”.

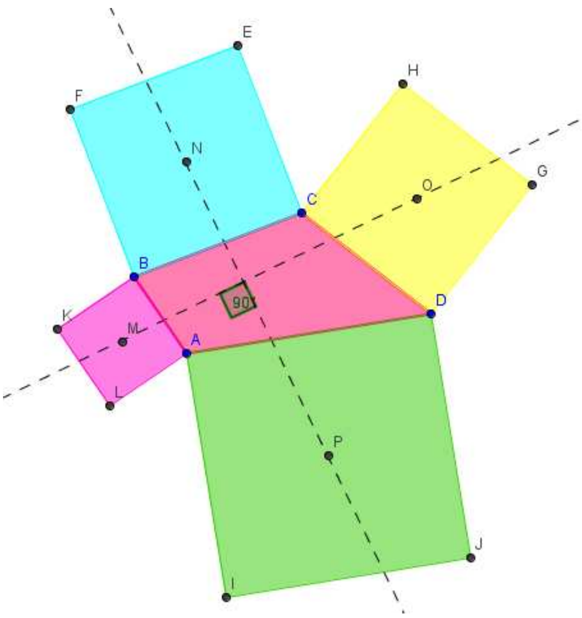


Figura 10

Acciones similares podemos seguir al plantear otros problemas geométricos que facilitarán la utilización de determinados conceptos o teoremas conocidos por el alumnado, como puede ocurrir con las dos siguientes propuestas:

1. Dados dos cuadrados, construir un nuevo cuadrado cuya área sea igual a la suma de las áreas de los dos cuadrados iniciales.
2. Dados dos cuadrados construir un nuevo cuadrado cuya área sea igual a la diferencia de áreas de los dos cuadrados dados.

Aunque GeoGebra ofrece las herramientas necesarias para resolver este problema de forma directa, es conveniente convencer al alumnado para que sea capaz de encontrar una solución geométrica.

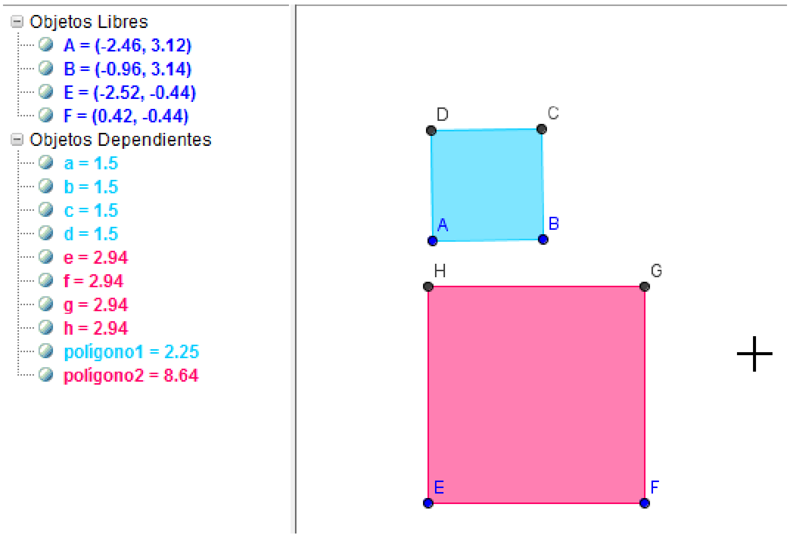


Figura 11

De esta forma podemos relacionar estos problemas con un teorema de sobra conocido por el alumnado como es el teorema de Pitágoras.

El cuadrado buscado será el construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales a los lados de cada uno de los cuadrados iniciales.

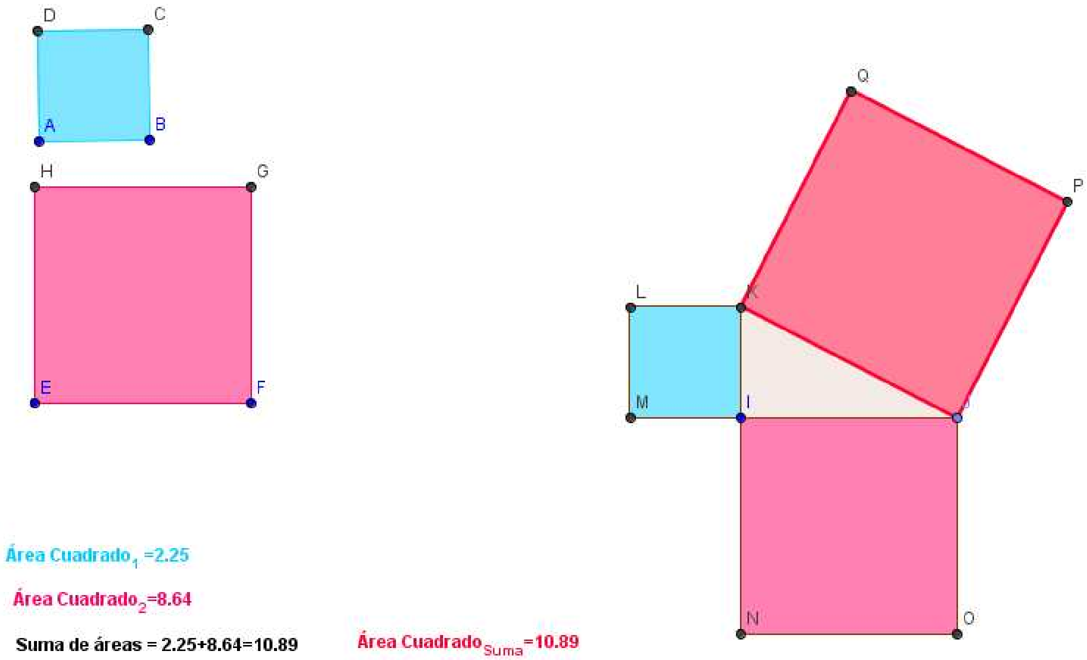


Figura 12

De manera análoga el cuadrado solución (área igual a la diferencia) del apartado 2 será el que construido sobre uno de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea igual al lado del cuadrado mayor y el otro cateto igual al área del cuadrado menos.

El objetivo de este trabajo no es exponer construcciones espectaculares realizadas con GeoGebra, todo lo contrario, es intentar ofrecer algunas ideas para facilitar el trabajo con GeoGebra, siempre a partir de ejemplos y construcciones lo más sencillas posibles.

Cuando se hace referencia a GeoGebra no se puede olvidar y por tanto citar, las construcciones y sobre todo las propuestas didácticas que ofrece el proyecto Gauss realizadas por Rafael Losada y José Luis Álvarez en el marco del Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado del Ministerio de de Educación, Cultura y Deporte del gobierno de España.

Estas actividades creadas para los niveles educativos de Primaria, Secundaria y ahora también para Bachillerato se pueden descargar en la Web:

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/

Continuando con las propuestas para utilizar GeoGebra para otros bloques de contenidos, podemos plantear su aplicación por ejemplo para el estudio y representación de funciones o para cálculo simbólico, aunque en este caso, será necesario esperar a que las nuevas versiones sean definitivas.

La continua evolución de GeoGebra hace que cada versión incorpore nuevas opciones y comandos, como ha ocurrido con la versión 4 en la que se ha ampliado el conjunto de funciones disponibles para la representación incluyendo desigualdades o funciones implícitas, además de otras novedades.

Esto nos permite, sin necesidad de utilizar otros programas, que GeoGebra pueda ser de gran utilidad para el estudio y representación de funciones o de conceptos relacionados con el análisis y el cálculo, como puede ser la interpretación de derivada, el concepto de límite o el significado de la integral definida que plantean dificultades al alumnado.

En el estudio y representación de funciones, aunque las opciones por ahora en cuanto a determinar elementos de una función están limitadas a funciones polinómicas, GeoGebra puede facilitar que el alumnado comprenda los efectos que los cambios en los parámetros de una función producen en su representación.

Para ello, basta con definir una función creando previamente un deslizador para cada uno de los coeficientes.

Por ejemplo, para funciones lineales $y = a\,x + b$, definiríamos los deslizadores a y b, introduciendo a continuación la expresión, tal cual de la función; por lo que ya solo quedaría modificar los valores de los deslizadores para observar que cambios producen en la representación y deducir el significado de cada coeficiente.

El mismo proceso se puede realizar para cualquier función, planteando cuestiones que requieran la manipulación de los objetos por parte del alumnado.

Por ejemplo, podemos plantear qué cambios producen en el periodo de la función *y = a sen (b x +c)* los coeficientes *a*, *b* y *c*.

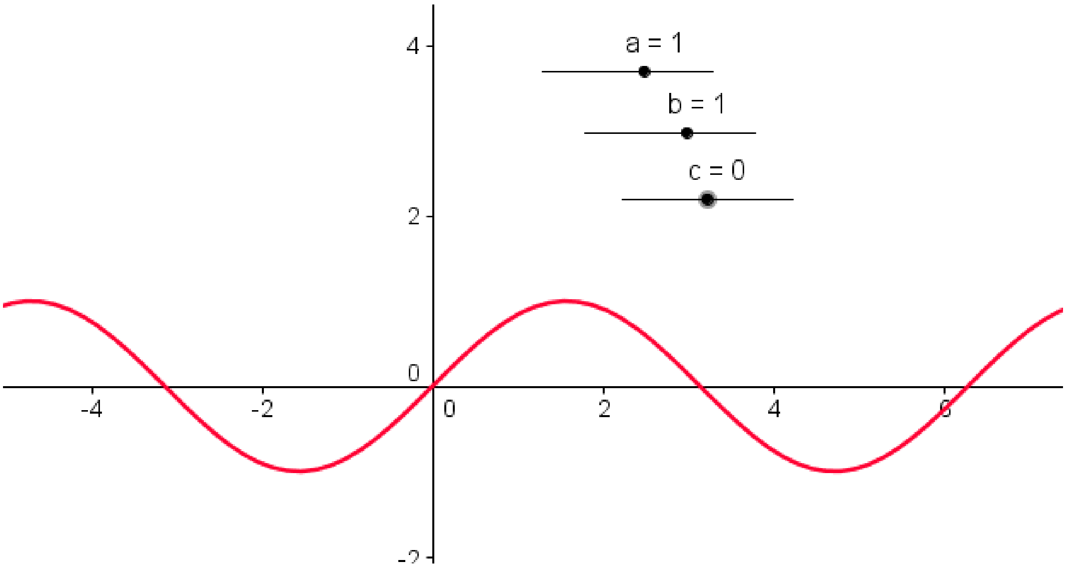


Figura 13

Antes de realizar cambios en los coeficientes conviene dibujar algunos valores para que sea más fácil determinar los periodos. Aprovechamos para introducir el comando *secuencias* si no lo hemos hecho hasta ahora, de manera que fácilmente se dibujarán las rectas $x = k\,\pi$.

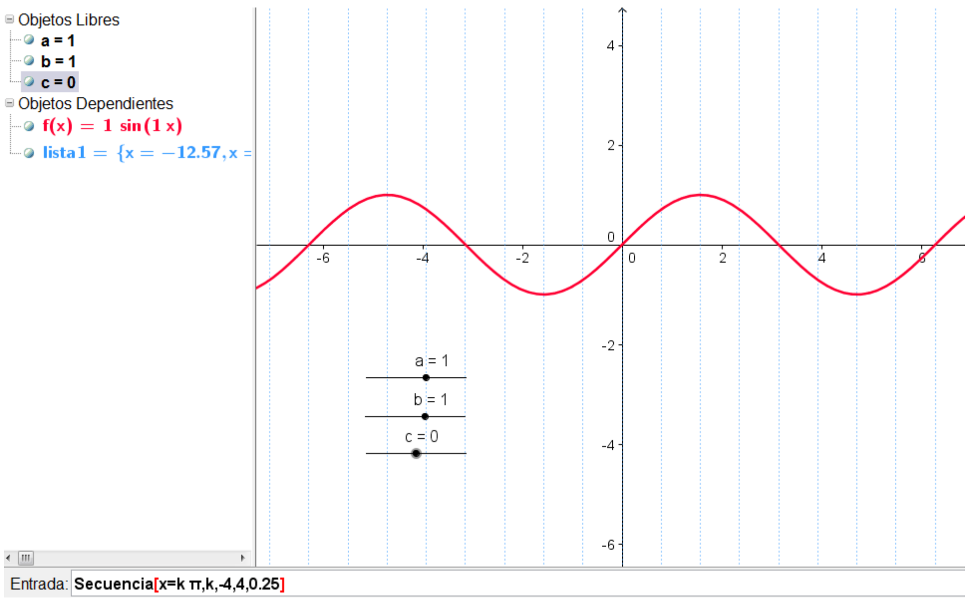


Figura 14

Ya solo queda mover los deslizadores para encontrar los efectos que producen *a*, *b* y *c* sobre el periodo de la función.

GeoGebra también será de ayuda para favorecer la interpretación de conceptos, de los que planteamos el siguiente ejemplo.

Para exponer el concepto de derivada de una función en un punto realizamos una construcción para visualizar que la recta tangente en un punto A a una función *y=f(x)* es el límite de las rectas secantes AB cuando B tiende al punto A. Para ello, solo necesitamos definir un deslizador para acercar y por tanto, hacer tender el punto B al punto A, tal y como aparece en la imagen siguiente:

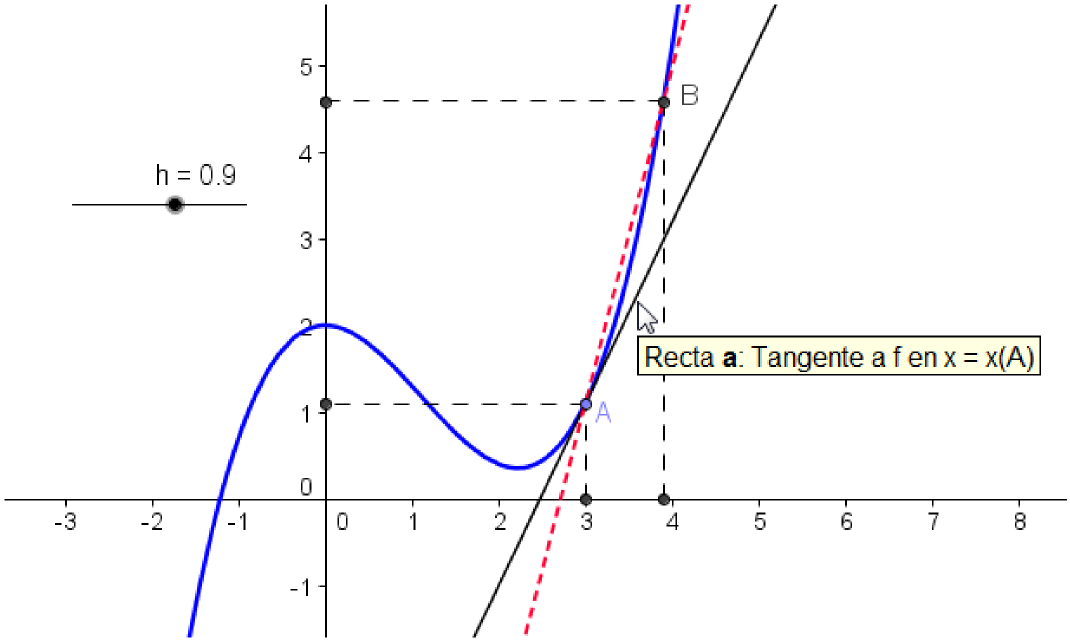


Figura 15

Con pocas modificaciones y con ayuda de las opciones que GeoGebra ofrece para obtener determinadas medidas, podemos calcular el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto A.

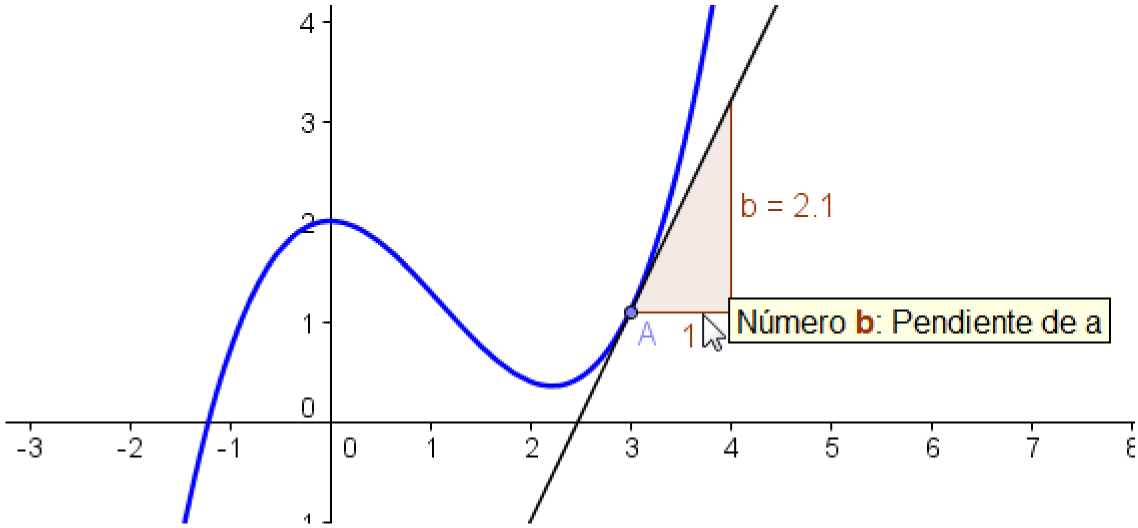


Figura 16

A continuación, para comprobar que el valor de la derivada en el punto A coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente, dibujamos la función derivada utilizando el correspondiente comando.

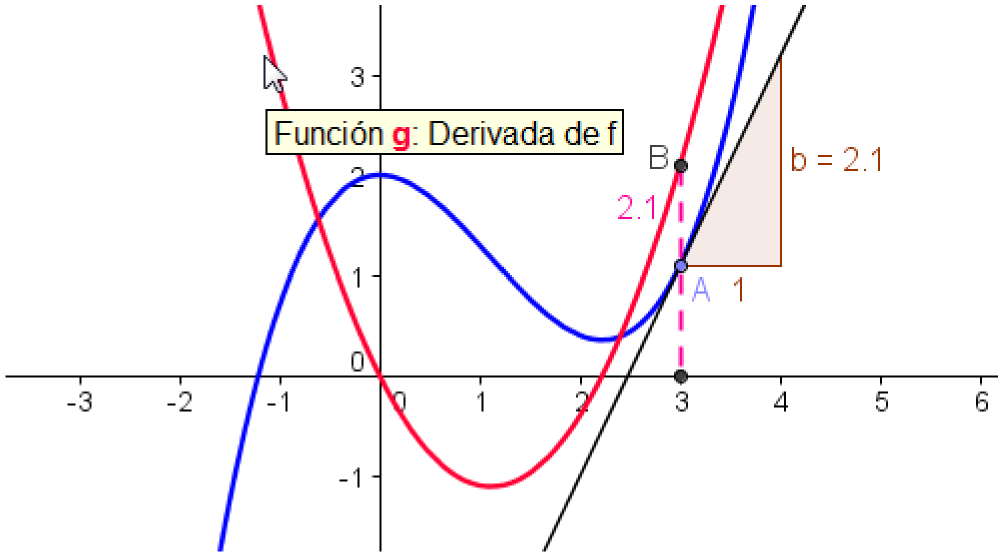


Figura 17

Aún es posible hacer algo más, como es obtener la función derivada utilizando el lugar geométrico o activando el rastro del punto cuya ordenada sea el valor de la pendiente en el punto A cuando recorre toda la función, lo que equivaldría a poder obtener el valor de la derivada en todos puntos de la función.

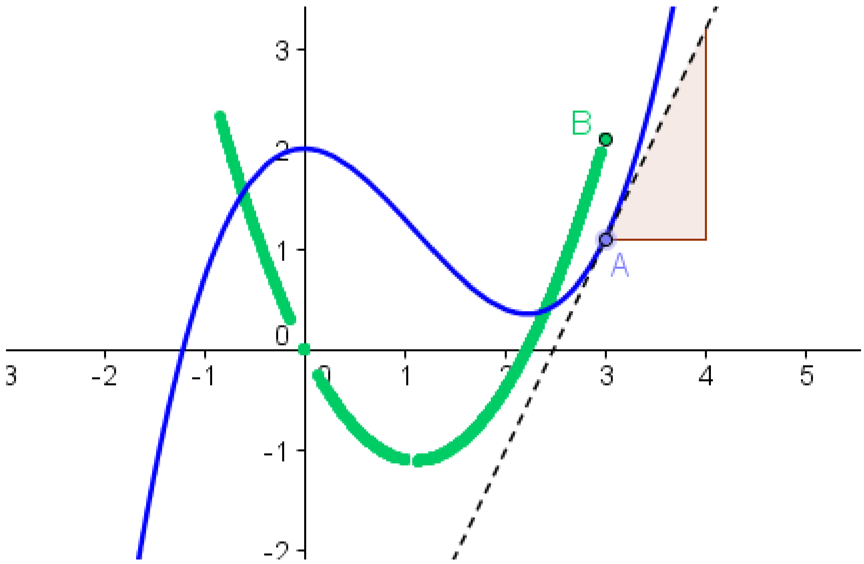
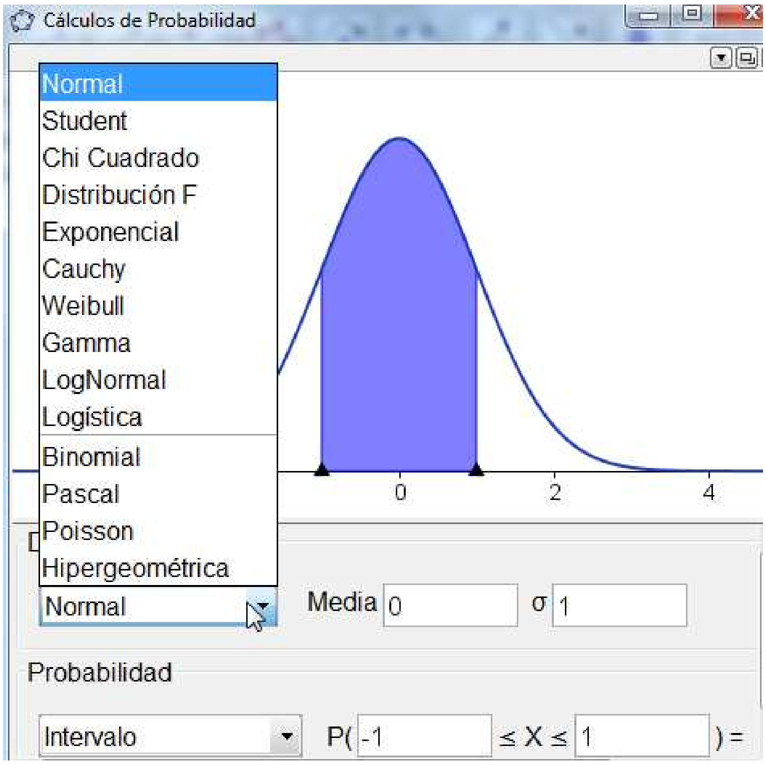


Figura 18

Quizás aún echemos de menos las opciones necesarias para poder utilizar GeoGebra como programa de cálculo simbólico o para realizar estudios estadísticos para los que a pesar de disponer en la última versión de opciones para realizar cálculos de probabilidades, como aparece en la imagen siguiente, o de otras herramientas y comandos que mejorarán y ampliarán en nuevas versiones, cuesta trabajo cuestionar las posibilidades que este software ofrece como recurso para el profesorado interesado en incorporar las TIC a su aula.



Conclusión

Puede que GeoGebra represente la revolución necesaria que facilite la relación entre Matemáticas y TIC que favorezca el cambio en la metodología del trabajo en el aula necesaria para lograr una integración real de las TIC, hecho que hasta ahora considero, como indicaba al principio de este artículo, no se ha conseguido a pesar de la cantidad de programas que en estos años hemos tenido a nuestra disposición aunque seguro que algo habrán ayudado, por lo que en ningún caso se puede entender que utilizar GeoGebra supone despreciar el resto.

Todos han colaborado a que el profesorado de matemáticas pierda el miedo y sobre todo aproveche las TIC, algo que resulta habitual en el mundo de nuestro alumnado.

Para finalizar solo me resta animar, a quien no lo ha hecho hasta ahora, al uso de las TIC; negar su presencia o su utilidad no facilitará la actualización de la escuela a las exigencias del mundo actual y por tanto, solo producirá una escuela desfasada que no es capaz de aprovechar las posibilidades que las TIC ofrecen.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 23-34
ISSN: 1815-0640

Construyendo funciones derivadas

José Carlos Cortés Zavala

Resumen

En el siguiente artículo se propone un acercamiento gráfico-numérico para realizar gráficas de las funciones derivadas. Para ello se introducen las ideas de pendientes de líneas secantes y pendientes de líneas tangentes tanto en forma numérica como gráfica, y a partir de estas ideas iniciar la construcción de la gráfica de la función derivada. El que esto escribe diseño y desarrollo un software de apoyo a la introducción de estas ideas. Para abordar la temática se exponen ideas teóricas y una exposición de lo propuesto en el software.

Abstract

The following article presents a graphical-numerical approach for graphics functions under.This will introduce the ideas of outstanding drying lines and slopes of tangent lines both numerically and graphically, and from these ideas begin construction of graph of the derivative function. The writer designed and developed software to support the introduction of these ideas. To address the issue presents theoretical ideas and a statement of what is proposed in the software.

Resumo

O seguinte artigo apresenta uma abordagem gráfica numérica para funções de gráficos abaixo. Isto irá introducir as ideias do saldo de secagem linahas e pistas de retas tangentes de forma numérica e gráfica, ea partir dessas idéias começar a construção do gráfico da função derivada. O escritor projetou e desenvolveu um software para apoiar e introdução dessas idéias. Para resolver o problema apresenta idéias teóricas e uma declaração de que é proposto no software

1. Introducción

Es común la confusión didáctica que se genera en los estudiantes de cálculo diferencial entre el concepto de derivada y el de función derivada. Ello se debe a que por un lado se realiza una explicación geométrica sobre el concepto de derivada y se extrapola esta información, sin mediar una explicación, para el cálculo de funciones derivadas, lo cual por lo general es a través de aplicación de algoritmos (fórmulas de derivación), En Font (2000) se pone de manifiesto la gran complejidad semiótica que conlleva el paso de la derivada en un punto a la función derivada. De acuerdo con Neus y Font (2003) el análisis de los textos que realizó le permitió afirmar que, en general, sus autores no son conscientes de la dificultad de este paso o bien no le prestan la atención que se merece. Diverso investigadores han señala esta problemática de abordar la enseñanza de la derivada y de la función derivada a través de un proceso puramente algebraico Font (2008) menciona "*Las nociones de derivada en un punto y de función derivada son tradicionalmente difíciles de* *comprender para muchos de los alumnos de bachillerato. Las dificultades se encuentran precisamente en las definiciones de estas nociones usando límites, y no tanto en la aplicación de las reglas formales o en el uso de las fórmulas"*. Dentro de los actividades desarrolladas en esta investigación se realizó una entrevista a profesores que imparten el curso de cálculo diferencial en bachillerato en relación a determinar que conocimientos previos son necesarios en los estudiantes de bachillerato para que entiendan el concepto de derivada; Todos los profesores respondieron que es necesario que los estudiantes tengan un muy buen dominio del álgebra, ya que sin ello no entenderán el concepto de derivada.

Esta respuesta generalizada deja en evidencia que el proceso algebraico es el más importante en su forma de enseñanza.

Por otro lado, varios investigadores señalan la importancia de introducir el concepto de derivada a través del uso de razones de cambio y a partir de esto podemos introducir el concepto de función derivada.

En este artículo expondremos un acercamiento numérico y gráfico que permite visualizar la derivada de un punto y que permitirá construir la función derivada. Para ello iniciamos relatando la importancia de graficar funciones utilizando la graficación de incremento de variables y la graficación de razón de cambio; de esta manera se introduce de forma intuitiva, el concepto de derivada y de función derivada.

Basado en esta idea se diseñó y desarrolló un software, denominado "Funciones y Derivadas"[1] Cortés (2002). En él se incorporaron actividades que resaltan aspectos relacionados con diferencias, incrementos y razón de incrementos desde un punto de vista gráfico y numérico, tomando como base ideas visuales y que sirven de apoyo para la construcción del concepto de derivada y función derivada.

2. Marco Teórico

Hughes (1990) observó que muchos estudiantes calculan algebraicamente las derivadas de diversas funciones, pero no son capaces de determinar, en una gráfica, en qué lugares la función tiene derivada positiva y en cuales negativa. Además, la autora nota que pocas veces se utiliza un acercamiento numérico para enseñar este concepto. Confrey (1993) indica que la presencia de tablas numéricas puede (1) iluminar la conexión funcional de los valores contenidos en ellas y (2) la presentación algebraica. Scher (1993) realizó un estudio sobre la utilización de múltiples representaciones para conceptualizar la derivada. Él concluye que existe la necesidad de promover el uso de tales representaciones para que el estudiante obtenga un entendimiento adecuado de los conceptos del cálculo, menciona, por ejemplo, que "la noción de razón de cambio debe ser accesible para todos los estudiantes" (Scher, 1993, p. 16). Por su parte Cortés et al. (Cortés et al. 2005) hacen una propuesta basada en un acercamiento numérico para introducir el concepto de función derivada.

El tratamiento numérico y gráfico es usado poco. Propuestas como la de Duval (1988, 1993 y 1995), Confrey (1993), Scher (1993), Mejía (1997), Hitt (2002) y Pluvinage (2005) mencionan la importancia, que tiene para el aprendiz, el manejo

[1] "Funciones y Derivadas" es un software libre que puede ser obtenido de la dirección http://fismat.umich.mx/~jcortes

gráfico y numérico. Los aspectos numéricos, gráficos y algebraicos son representaciones de los objetos matemáticos y cada uno de ellos presenta cierto tipo de información del objeto, además permiten cierto tipo de actividades cognitivas en el sujeto. Cuando solamente se usa un tipo de representación se corre el riesgo, como lo menciona Duval (1988), de confundir al objeto con la representación, por lo que este investigador, propone el uso de múltiples representaciones de un objeto.

3. Exposición de la Propuesta

El planteamiento se ubica dentro de la teoría de sistemas semióticos de representación (Duval 1988, 1993 y 1995), ya que el software permite la manipulación de diferentes representaciones relativas a diferentes registros de representación, además de motivar las tareas de conversión entre representaciones; es decir, permite el tratamiento de representaciones en cada uno de los registros y conversión entre representaciones.

Se introducen las ideas de incrementos de variables tanto en forma numérica como gráfica. En la siguiente sección vamos a mostrar la forma en que se presenta la información para resaltar las ideas de incrementos de variables y la de razón de cambio.

3.1 Incrementos de Variables

En el tema de **Incrementos de variables** de forma numérica, estos se hacen explícitos a partir de una tabla que contiene 4 filas tal y como se muestra en la figura 1. El objetivo es introducir numéricamente esta noción ya que de acuerdo a los datos encontrados en una experimentación realizada no es fácil que los estudiantes comprendan la noción de incremento de variables. También se realiza la graficación de *x* y *y* como un punto, el *incremento de x* en forma horizontal (en el software se asigna el color amarillo) y *el incremento de y* de forma vertical (en el software se asigna el color verde) (ver figura 2).

Inc. x		1	1	1	1	1	1	1
x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	4.	6.	36.	118.	276.	534.	916.	1446.
Inc. y		2	30	82	158	258	382	530

Figura 1

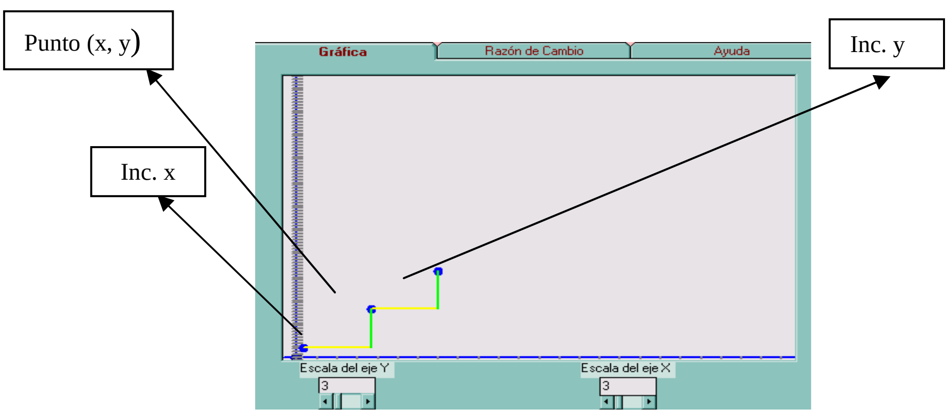


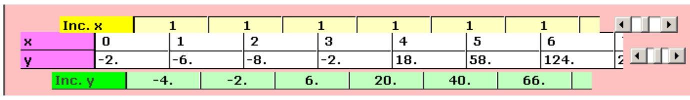
Figura 2

3.2. Razones de cambio

El acercamiento numérico y gráfico al concepto de **Razón de Cambio** se realiza a través del llenado de tablas de valores y de su reflejo en la construcción de graficas (para una mayor profundidad ver Cortés 2010). A través de este acercamiento se introduce la pendiente de una recta como la razón de incrementos, es decir, se da significado a lo que representa una razón de cambio. La opción **Razón de Cambio** se aborda como el cociente de dos incrementos, con este resultado se va llenando una tabla de valores la cual representará una nueva función que hemos denominado "*función razón de cambio*".

Por ejemplo, al seleccionar la función cúbica $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 2$ se generan los siguientes datos (figuras 3 a 12).

Datos correspondientes a la tabla de valores cuando se tiene un *incremento en x* de 1:



Inc. x	1	1	1	1	1	1	
x	0	1	2	3	4	5	6
y	-2.	-6.	-8.	-2.	18.	58.	124.
Inc. y	-4.	-2.	6.	20.	40.	66.	

Figura 3

Datos correspondientes a la gráfica de los puntos generados en la tabla anterior:

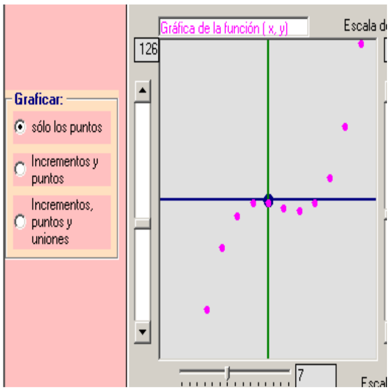


Figura 4

Datos correspondientes a la gráfica de los puntos y su unión a través de los incrementos

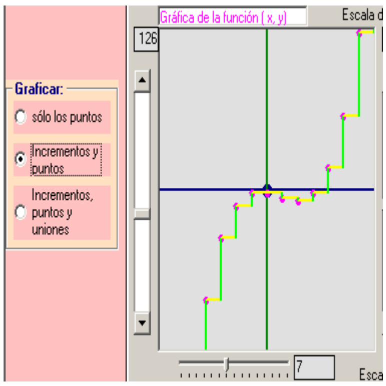


Figura 5

Datos correspondientes a la grafica de los puntos generados, su unión a través de los incrementos y su unión a través de una línea recta

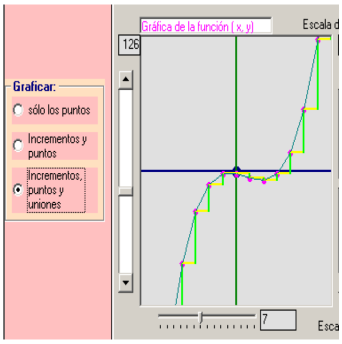


Figura 6

Datos correspondientes a la tabla en la que llenan los datos de la razón de cambio.

x	0	1	2	3	4	5	6
R. Cambic	-4	-2	6	20	40	66	

Figura 7

Datos correspondientes a la graficación de los puntos generados en la tabla de la razón de cambio y unidos por rectas.

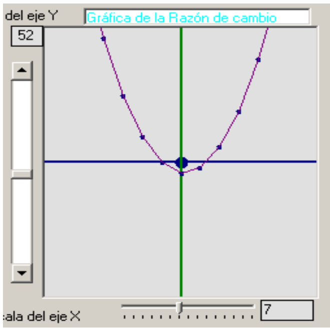


Figura 8

Datos correspondientes a la tabla de valores cuando se tiene un *incremento en x* de 0.7

Inc. x	.7	.7	.7	.7	.7	.7	
x	-.3	.4	1.1	1.8	2.5	3.2	3.9
y	-1.307	-3.456	-6.389	-8.048	-6.375	0.688	15.199
Inc. y	-2.149	-2.933	-1.659	1.673	7.063	14.511	2

Figura 9

Datos correspondientes a la gráfica de los puntos generados al tener un *incremento de x* de 0.7, su unión a través de los incrementos y su unión a través de una línea recta.

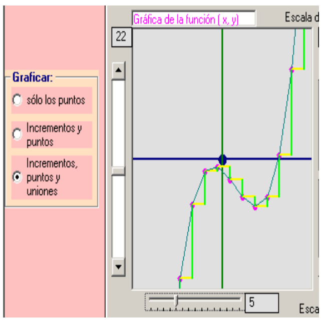


Figura 10

Datos correspondientes a la tabla de valores cuando se tiene un *incremento de x* de 0.7

Inc. x	.4	.4	.4	.4	.4	.4
x	-.6	-.2	.2	.6	1	1.4	1.8
y	-1.136	-1.488	-2.672	-4.304	-6.	-7.376	-8.048
Inc. y	-0.352	-1.184	-1.632	-1.696	-1.376	-0.672

Figura 11

Datos correspondientes a la graficación de los puntos generados al tener *incremento de x* de 0.4, su unión a través de los incrementos y su unión a través de una línea recta.

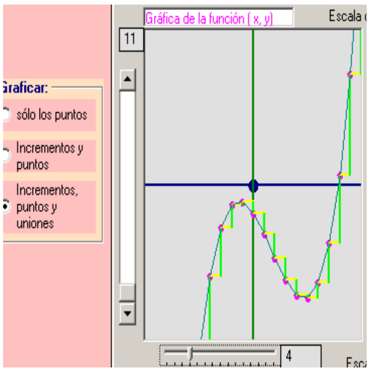


Figura 12

Se puede observar en las figuras 6, 10 y 12 que la unión de dos puntos se realiza a través de: *incremento de x* (línea horizontal), *incremento de y* (línea vertical) y *la unión directa* (línea entre los dos puntos, ver Figura 13), esto forma un triángulo en cada unión y podemos observar que, en este caso particular hay una variación de la pendiente en cada triángulo.

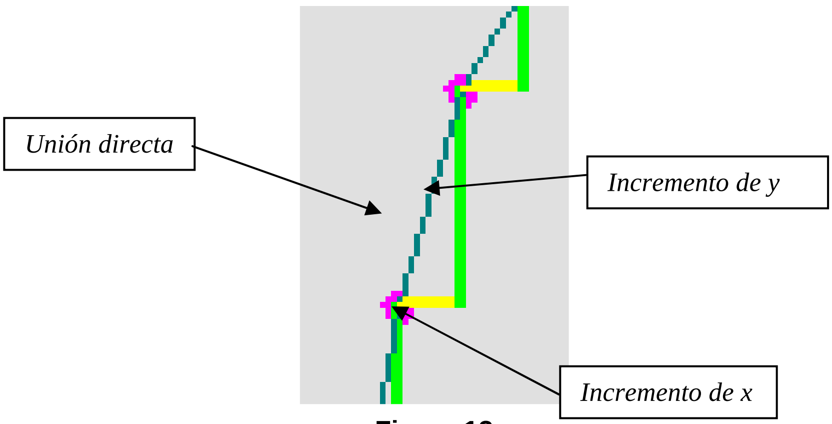


Figura 13

La Figura 7 representa una tabla de valores que es construida a través de obtener la pendiente de cada uno de los triángulos formados. Está tabla de valores representa una nueva función que denominamos "*Función Razón de cambio*" y viene dada por la relación $Funcion\_razon\_cambio = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, cada punto de esta nueva función representa la razón de cambio (o pendiente) entre dos puntos de la función original; son representados gráficamente en la figura 8. En la Figura 9 y 11 se representa la tabla de valores de la función original cuándo se tiene un *incremento de x* diferente de 1.

3.3. Graficación de la pendiente de la secante y de la pendiente de la tangente

A través de un ejemplo se explica la graficación de la función razón de cambio y de la función derivada.

Grafica de la función original $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 2$

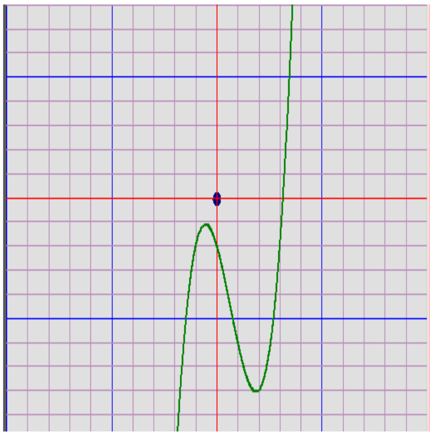


Figura 14

Línea secante, el valor de su pendiente es 3.4970

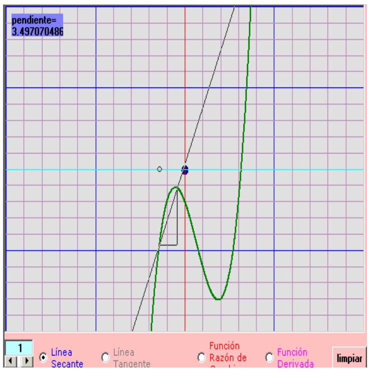


Figura 15

Línea secante, el valor de su pendiente es 1.0878

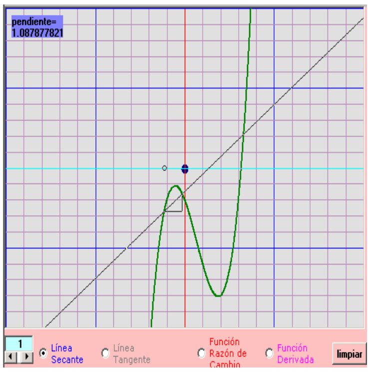


Figura 16

Línea secante, el valor de su pendiente es -2.5280

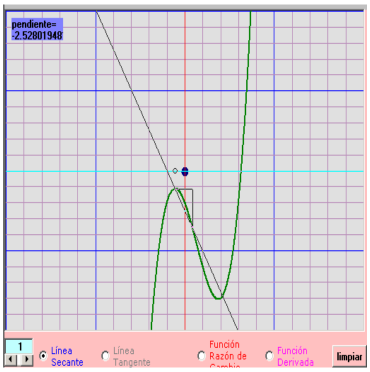


Figura 17

Tabla de los diferentes valores de la pendiente de la línea secante cuando variamos la *x* y mantenemos fijo el *incremento de la x*

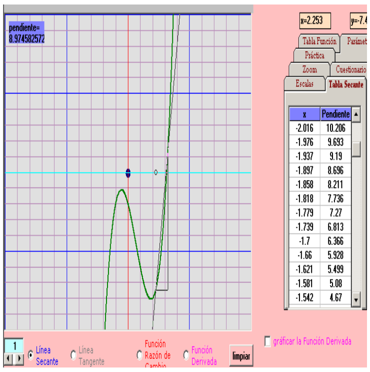


Figura 18

Grafica a través de puntos de los valores de la tabla de la pendiente de la línea secante, cada punto de la gráfica representa (*x, pendiente de la línea secante*)

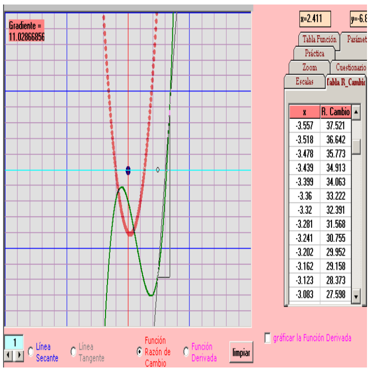


Figura 19

Línea tangente, el valor de su pendiente es 4.6802

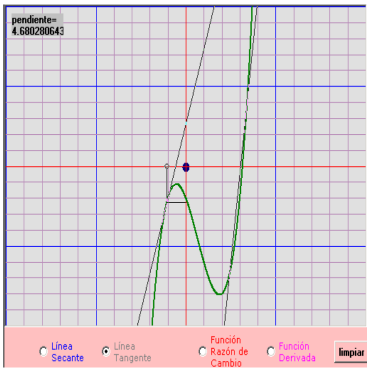


Figura 20

Línea tangente, el valor de su pendiente es -0.6970

Figura 21

Línea tangente, el valor de su pendiente es -1.8224

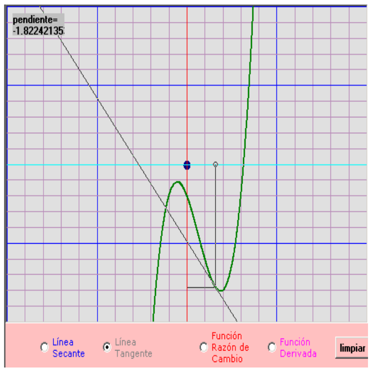


Figura 22

Tabla de los diferentes valores de la pendiente de la línea tangente cuando variamos la *x*

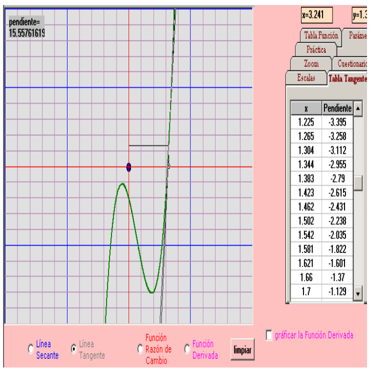


Figura 23

Grafica a través de puntos de los valores de la tabla de la pendiente de la línea tangente, cada punto de la gráfica representa (*x, pendiente de la línea tangente*)

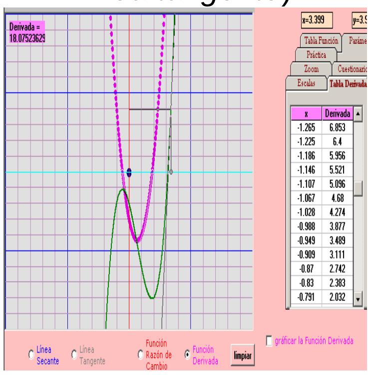


Figura 24

Gráfica de la función razón de cambio que está representada por (*x, pendiente de la línea secante*) cuando el *incremento de la x* es 1 y gráfica de la función derivada que es (*x, pendiente de la línea tangente*)

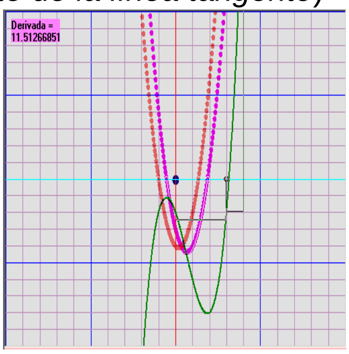


Figura 25

4. Experimentación

4.1. Escenario de la experimentación

La experimentación se practicó con cinco estudiantes de bachillerato durante doce horas, repartidas en cuatro sesiones como parte de una experimentación piloto Núñez (2006). Se trabajó en una sala equipada con tres computadoras, un pizarrón y dos cámaras de video. Se formaron tres equipos de trabajo (dos con dos estudiantes y uno de uno) y cada uno de ellos trabajó en una computadora con el software desarrollado. En la primera sesión se dio una instrucción sobre la navegación en el paquete, para que en las sesiones siguientes el estudiante navegara libremente los contenidos permitidos en el software. El instructor se desempeñó básicamente como un observador pero podía intervenir para contestar algunas preguntas cuando le eran requeridas o para hacer preguntas que propiciaran que los estudiantes encontraran por sí mismos la estrategia correcta.

4.2 La selección de los alumnos

Los estudiantes que participaron en está experimentación piloto, cursaban el 4 semestre de bachillerato en el "Colegio Novel", la selección de estudiantes se hizo de la siguiente manera: tres estudiantes que cursan el bachillerato en el área de Físico-matemático y dos del área de Económico-Administrativo. Un estudiante con buen desempeño escolar, dos que tienen regular desempeño escolar y dos alumnos con bajo desempeño académico, de acuerdo con las calificaciones reportadas a lo largo de sus estudios.

5. Análisis de la experimentación en relación con los contenidos presentados

El análisis de esta experimentación se centrará en explicar con base en las videograbaciones y evidencia escrita, si las ideas de: Incremento de una variable, razón de cambio, línea secante, línea tangente, función razón de cambio y función derivada fueron entendidas por los estudiantes.

5.1. En Incrementos

- Las diferencias con las que ellos venían trabajando, aquí se denotaron como "incrementos".
- Observaron que en la gráfica se formaban "escaleras" con los incrementos (lado horizontal incremento de posición y lado vertical incremento de valor).
- Redefinieron lo que ellos llamaban "la constante", que en realidad es la razón de cambio dos veces, en el nivel I como $\frac{Inc.Valor}{IncPos}$, y en el nivel III como $\frac{IncY}{IncX}$.

5.2. En razón de cambio

- Ahora redefinen "su constante" como Razón de Cambio y se define como $R.C. = \frac{IncY}{IncX} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Con la anterior formulación descubren que la Razón de cambio es lo mismo que la pendiente en una línea recta.
- Las "escaleras" que observaron en incrementos ahora ven que se forman "triángulos".

- Descubren que los "triángulos" están formados por dos lados (que no pertenecen a la función) que son: los *incrementos* x (lado horizontal) e *incremento* y (lado vertical).
- Se les pide que observen con cuidado las gráficas de la función y de la razón de cambio (para las opciones función lineal, función cuadrática y función cúbica), que las analicen y comenten que es lo que ven y Vanesa responde:
- Entre una y otra tiene un grado menos, es decir si yo saco la derivada, por ejemplo de x^3 es $3.x^2$, de x^2 es 2 x, y de $4.x$ es 4.
- Descubren entonces por qué la razón de cambio en una función lineal es constante y en una función cuadrática o cúbica no lo es constante.
- Observando las graficas basan esta diferencia en el "recorrido de y" (incremento de y), ya que no es igual en todos los "triángulos" que tiene la gráfica de la función.

5.3 En tratamiento grafico

- Se les pide que observen la diferencia que hay entre una línea secante y una línea tangente.
- Karla observa que la línea secante toca dos puntos de la gráfica de la función y la línea tangente toca un solo punto de la gráfica de la función.
- Cindy observa que en una línea secante se forman "triángulos" y en la línea tangente se forman "cuadrados" (líneas que van a los ejes coordenados y dan las coordenadas del punto).
- Se pide observar la función razón de cambio y la función derivada de una función cúbica y que me digan qué diferencia tienen.
- Vanesa responde que las dos son parábolas.
- Cindy complementa, que además, una está recorrida respecto a la otra. Que una cruza el "origen" (vértice) de la otra.
- Por último todos juntos hacen una conclusión:
- El deslizamiento de una gráfica con respecto de la otra se debe al *incremento de* x, ya que en la razón de cambio ese incremento es igual a uno (para el ejercicio que tenemos).
- Además, en la función derivada este incremento tiende a cero (se les había pedido una sesión anterior que investigaran cual era la definición de la derivada de una función).

6. Resultados y Conclusión

Dentro del desarrollo de la presente experimentación se detectó que la idea de incremento de una variable no es entendida fácilmente por los estudiantes, lo cual dificulta entender la razón de cambio y por supuesto el concepto de derivada. A través del uso del software y de la intervención del profesor, la idea de incrementos de variables fue entendida por los estudiante, así como lo que es una razón de cambio y como se va construyendo una función derivada.

Se comprobó que por medio del uso de tablas de valores de funciones es posible que los estudiantes entiendan el concepto de diferencias e incrementos de variables, así mismo el uso de la gráficación de incrementos para delinear la gráfica de la función permitirá que el estudiante entienda lo que es una razón de cambio.

Utilizando a su vez la razón de cambio podrán construir una nueva función y a partir de ella, los educadores pueden introducir la función derivada.

Bibliografía

Cortés C. (2002). Desarrollo de software para la enseñanza del cálculo diferencial. Tesis de doctorado. Cinvestav-IPN. México,

Cortés et al (2005). Software para la enseñanza de la derivada. *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. México: Morevallado

Cortés, C. (2010). *Graficando los incrementos de las variables como apoyo a la construcción del concepto de función derivada.* Investigaciones y Propuestas. México: Ed. AMIUTEM. En prensa.

Confrey, J. (1993). *A constructivist research programme towards the reform of mathematics educations.* (Introduction to symposium for the Annual Meeting of American Education Research Association).

Duval R. (1988) Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Peter Lang, Suisse.

Font, V. (2000). Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.

Font (2008). Rappesentazioni attivate nel calcolo Della derivata, in G. Arrigo (ed.) *Atti del Convegno di didáctica Della matematica 2008* (13-24). Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza.

Hitt F. (2002) *Funciones en contexto*. Editorial Pearson Educación. México.

Hughes, D.(1990). Visualization and Calculus Reform. In *Visualization in Teaching and Learning Mathematics: A Project (MAA notes #19)*. Walter Zimmerman and Steven Cunningham, eds. Washington DC: Mathematical Association of America, 1-8.

Mejía, H.(1997). Geometría Analítica, Gráficas y Tablas. *Octavo seminario nacional de calculadoras y computadoras en educación matemática* Universidad de Sonora1997. 315-322.

Neus, I y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. *Proceddings de XIX Jornadas del SI-IDM*. Córdoba.

Nuñez, E. (2007). Investigación de ambientes interactivos tecnológicos para el aprendizaje de las matemáticas. Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Pluvinage F. (2005) Reflexiones sobre la recta numérica al servicio del cálculo en *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. México: Morevallado

Scher, D. (1993). Students' Conceptions of the Derivative across Multiple Representations. *Mathematics.*

José Carlos Cortés Zavala: Profesor Investigador de la Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana; Presidente de la Asociación Mexicana de Investigadores para el Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas (AMIUTEM) cortes.zavala.carlos@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 35-57
ISSN: 1815-0640

Matemáticas sin exámenes finales: Evaluación continua basada en la tutorización personalizada del alumnado

Ángel F. Tenorio Villalón y Eva Oliver García

Resumen

En el presente artículo mostramos el sistema de evaluación empleado en la asignatura “Métodos Matemáticos para la Ingeniería” del Grado en Ingeniería Informática en Sistemas de Información de la Universidad Pablo de Olavide. Dicho sistema se basa en realizar un seguimiento personalizado de cada estudiante y de su trabajo durante el semestre que dura la asignatura (mediante tutorización individualizada) y en primar la evaluación de la adquisición y aplicabilidad de competencias sobre la memorización de conceptos y repetición mecánica algoritmos de resolución. Para ello, realizamos una evaluación que sigue la técnica del portafolios y en la que cada estudiante genera durante el semestre una serie de actividades (supervisadas por el equipo docente), que no solo debe entregar sino también defender públicamente. Así, es el propio estudiante quien genera su evaluación durante el semestre, eliminándose el tradicional examen final que aportaba el principal porcentaje de calificación. Esta técnica de evaluación permite que cada estudiante corrija cualquier defecto o problema durante su proceso de enseñanza/aprendizaje antes de finalizar el semestre.

Abstract

This paper shows the assessment system used for the course ‘Mathematical Methods for Engineering’ in the bachelor’s degree in Computer Science Engineering in Information Systems, from Pablo de Olavide University. This system was based on carrying out a individualized tracking for each student in relation with his/her work during the semester (via individualized tutoring), as well as in assessing by giving priority to the acquisition and applicability of competencies over memorizing concepts and automatic repetition of solving algorithms. To do so, we assessed our students by following the portfolio technique, in which each student does several academic activities during the semester (under supervision of the teaching staff), which must be both presented on time and publicly defended. Thus, each student was generating his/her assessment data during the semester and this allowed us to remove the final examination which most of the numerical mark traditionally went to. Moreover, using this assessment system, each student could correct and improve any fault or problem during his/her learning-teaching process and before the end of the semester

Resumo

Neste trabalho nós mostramos o sistema de avaliação que usamos no curso "Métodos Matemáticos para Engenharia" na Engenharia da Computação em Sistemas de Informação, da Universidade Pablo de Olavide. Este sistema é baseado no seguimento personalizado do aluno e seu trabalho durante o semestre que dura o curso (mediante tutoria individualizada) e em primar a avaliação da aplicabilidade da aquisição de competências sobre do armazenamento e repetição mecânica de conceitos e algoritmos de resolução. Para este fim, nós realizamos uma avaliação seguindo a técnica do potfólio, em que cada estudante gera ao longo do semestre uma série de atividades (supervisionado pelo corpo docente) que deve entregar e defender publicamente. Assim, cada estudante está gerando a sua avaliação durante o semestre, eliminando o tradicional exame final, que contribuía com o maior percentual da nota. Esta técnica de avaliação permite que cada aluno corrija qualquer defeito ou problema no processo de ensino/aprendizagem, antes do final do semestre

1. Introducción

En el curso 2010/11, las Ingenierías Técnicas y Superiores comenzaron su proceso de extinción en España, dando paso a los Grados en Ingeniería. Como cualquier cambio educativo, viene acompañado de una nueva renovación didáctica y pedagógica en cuanto a metodología y evaluación que el profesorado universitario realiza para cumplir sus labores docentes para y con su alumnado. Todos estos cambios se supeditan a que el proceso de enseñanza/aprendizaje en nuestro alumnado se adecue correctamente a la docencia y filosofía formativa impulsada desde el proceso Bolonia para implantar el Sistema Europeo de Transferencia y Acumulación de Créditos (ECTS) con validez en todo el territorio del denominado Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), comprendiendo 47 países según el sitio oficial del Proceso Bolonia (Bologna Follow-up Group Secretariat, 2010). El EEES busca que el alumnado no sea formado exclusivamente para su profesión a corto plazo, sino que su formación le permita seguir actualizando conocimientos de forma autónoma tras egresar. Es decir, el profesorado universitario debe formar a su alumnado para que sea capaz de aprender a aprender y sea un ciudadano y profesional competente. Por tanto, la educación debe basarse en la adquisición de competencias tanto básicas para cualquier ciudadano como específicas de la profesión para la que se está formando (MECD, 2003; Martínez González, 2010).

2. Cambios necesarios en metodología y evaluación

Como indicamos antes, el Proceso Bolonia requiere una serie de cambios y replanteamientos tanto a nivel de docentes como de estudiantes. Estas modificaciones no se han debido a una implantación precipitada e irreflexiva (ni en España ni en ninguno de los países involucrados), sino todo lo contrario. El profesorado se ha involucrado en la implantación del ECTS y la filosofía educativa subyacente al Proceso Bolonia, generándose una amplia información y experimentación de cómo podría implantarse el EEES en nuestro país. La mayoría de esta información y experimentación se ha debido a las múltiples experiencias piloto de implantación del ECTS que se desarrollaron en las universidades españolas desde 2005 y que ahora están llegando a su fin natural con la implantación de los grados universitarios ya enmarcados formal y legalmente en el marco del EEES. Prácticamente, todas las titulaciones del catálogo español han dispuesto de alguna de estas experiencias piloto y en el caso de la Ingeniería Informática, la Universidad Pablo de Olavide (UPO) dispuso de una con la Ingeniería Técnica de Informática de Gestión, precursora del Grado en Ingenirería Informática en Sistemas de Información (GIISI) que actualmente se imparte en la UPO.

En relación a esta experimentación previa a los grados, Bermudo et al. (2006) expusieron cómo se podrían planificar asignaturas de matemáticas y estadística desde la perspectiva de una experiencia piloto para el caso concreto de las ingenierías. Dicha contribución ponía énfasis en organizar la docencia y parte de la evaluación en función del trabajo autónomo que el alumnado realizaba durante el curso y en las actividades dirigidas por el equipo docente, las cuales se iban entregando y permitían generar un informe de seguimiento (portafolios) que se convertía en una herramienta de evaluación complementaria al examen final (que persistía como principal elemento evaluador). Al referirse a actividades dirigidas, Bermudo et al. querían reflejar que no bastaba con mandar actividades que el alumnado resolviese por sí mismo para después ser calificadas con una puntuación, sino que dichas actividades debían realizarse bajo supervisión de un docente que orientase al alumnado en cada actividad y corrigiese aquellos defectos y errores que surgieran en el proceso de enseñanza/aprendizaje. Debido a cuestiones legales, esta propuesta seguía atribuyendo la mayor parte de la calificación al examen final, ya que el alumnado tenía el derecho a ser evaluado en, al menos, el 70% de su calificación con una prueba final de la asignatura. Esto conllevaba que el portafolios propuesto por estos autores quedase como un ente testimonial en cuanto a la calificación y se perdiese la mayor parte del valor añadido que supondría la evaluación continua e individualizada del alumnado. El lector interesado puede acudir a Pozo-Llorente y García-Lupión (2006) y las referencias en su interior para obtener una visión de la metodología del portafolio y de su funcionamiento.

Tal y como se apuntaba en el párrafo anterior para las matemáticas (pero contextualizable a cualquier otra área), las modificaciones en las técnicas y estrategias evaluativas requerían un cambio en la metodología docente del profesorado y, lo que era aún más importante, un cambio en su rol como agente en el proceso de enseñanza/aprendizaje del alumnado. Mientras que tradicionalmente el docente era el agente sobre el que recaían las sesiones presenciales, ahora su papel será más pasivo, siendo un orientador, asesor y gestor del aprendizaje del alumnado. Serán nuestras alumnas y alumnos, quienes tendrán el papel protagónico y activo en su aprendizaje para adquirir los conocimientos y las competencias que son objetivo de cada asignatura (Imbernon y Medina, 2005). Obsérvese que este planteamiento es acorde a las directrices que se desprenden de los documentos oficiales sobre implantación de grados (ANECA, 2005; MECD, 2003) y en los cuales el “aprender a aprender” resulta ser la competencia clave a desarrollar en el alumnado para que pueda generar autónomamente sus conocimientos y sepa adaptarse a futuras necesidades laborales y sociales según sea necesario.

Por tanto, para fomentar la participación activa del alumnado como motor de su aprendizaje y trabajar la competencia del autoaprendizaje, creemos apropiado plantear una propuesta de evaluación centrada en su trabajo personal y autónomo, donde el docente solo introduce los conceptos y procedimientos a asimilar y pasa a asesorar al alumnado en la adquisición de los mismos mediante su trabajo diario en la asignatura. Aunque hay muchas formas de abordar este tipo de evaluación, hemos optado por adoptar un sistema evaluativo plenamente basado en el portafolios y, así, suprimir el tradicional examen final como elemento evaluador.

Evaluar con portafolios conlleva la supervisión y corrección por el docente del trabajo realizado por su alumnado de manera contextualizada a los plazos de entrega. Por tanto, la tutoría no puede ya entenderse meramente como el número de horas semanales en las que el docente atiende dudas en su despacho, sino que debe replantearse como técnica y recurso adicional para el seguimiento y evaluación del alumnado durante el semestre. La concepción de la tutoría que aquí seguimos, puede encontrarse en la literatura con autores como Arbizu et al. (2005) y la sitúa como una de las actividades docentes más esenciales (quizás la más importante).

El docente debe poner a disposición del alumnado todo recurso que facilite y agilice la tutorización y realización de las actividades dirigidas encomendadas al alumnado. Esto obviamente incluye la tutorización virtual para atender al alumnado usando las herramientas digitales existentes para ello. Así, Sáenz Castro (2001) afirmó que la tutoría virtual es uno de los principales recursos para el seguimiento individualizado y personalizado del proceso de autoaprendizaje a distancia por el alumnado. El proceso del seguimiento a distancia es esencial en grupos con um alto número de estudiantes compatibilizando trabajo con estúdios, por lo que no pueden asistir a tutorías presenciales. Este precisamente es el caso del GIISI de la UPO.

3. Evaluación continua por competencias

La evaluación por competencias se centra en el propio proceso de enseñanza-aprendizaje del alumno y no solo en el resultado final, como ocurría con el clásico examen a final del semestre. Así, la evaluación toma en consideración la actividad del alumnado como actor principal en su proceso formativo. Obviamente, el docente debe asesorar, supervisar y tutelar su evolución, realizando parte de la evaluación en sesiones de seguimiento. A ese respecto, Imbernon y Medina (2005) afirman que la clave en la evaluación por competencias es la participación activa del alumnado en su aprendizaje y en las actividades encaminadas a adquirir sus competencias básicas y específicas. Pero si hablamos de evaluación por competencias, debemos aclarar previamente qué se entiende por competencia en el ámbito educativo.

La noción de competencia ha adquirido gran relevancia en educación en esta última década. Sin embargo, el primer trabajo sobre competencias no fue en este ámbito, sino en el económico cuando McClelland (1973) expuso sus conclusiones sobre la ineficacia de los test de inteligencia para determinar el éxito ocupacional y resaltó la necesidad de buscar una nueva noción que permitiese medir dicho éxito apropiadamente. Esa nueva noción era la de competencia y buscaba determinar si una persona podía o no realizar con éxito su actividad profesional. Su salto al mundo educativo fue posterior con múltiples definiciones formales, no siendo todas equivalentes. Como no queremos ser exhaustivos, solo resaltamos las definiciones de Mateo (2007) y Roe (2002) por ser las más afines a nuestro objetivo: Las competencias son habilidades para seleccionar, combinar y usar recursos y conocimientos varios para resolver problemas o situaciones en contexto. Según las habilidades desarrolladas, se habla de competencia matemática, lingüística, digital...

Al trabajar por competencias con nuestro alumnado, no debemos evaluar solo en base a conocimientos adquiridos, sino comprobando las siguientes habilidades:

a) Además de adquirir conocimientos, debe seleccionarlos, combinarlos y aplicarlos a diversos contextos y problemas.
b) Es capaz de actualizar y renovar sus conocimientos para resolver problemas surgidos tanto en contexto social como profesional.

Seguimos, pues, lo indicado por Le Boterf (2000) y Morin (2001), para los que la evaluación se centra en la habilidad de nuestro alumnado para manejar, cambiar y combinar conocimientos para resolver problemas contextualizados y académicos.

Por tanto, la evaluación no puede centrarse en cuantificar el porcentaje de temario adquirido por cada estudiante, dejando de tener sentido un aprendizaje basado en memorizar conocimientos que quedan obsoletos con rapidez. Buscamos, pues, formar estudiantes que sigan siendo competentes tras cualquier modificación en su carrera profesional. Esa es la razón principal por la que no podemos limitarnos a enseñar solo conocimientos, sino que debemos lograr que nuestro alumnado sea capaz de seleccionar, decidir y obtener la información y conocimiento requerido en cada momento; es decir, convertirlos en profesionales competentes.

Visto lo anterior, los criterios de evaluación no deben consistir en una simple calificación otorgada por repetición memorizada de conceptos y procedimientos, que posiblemente no se hayan entendido. Según Barberá (1999) y MacDonald et al. (2000), la evaluación del alumnado debe basarse en la aplicación coherente y reflexiva de los tópicos trabajados en la asignatura. Por tanto, no se reduce solo a cuantificar conceptos, sino que hemos de evaluar la evolución y progreso del alumnado durante el semestre para comprobar si es capaz (es decir, competente) en el uso y manejo de los problemas propuestos. Obviamente, una evaluación de tipo cualitativo suele ser sumamente complicada y nos fuerza a considerar nuevas técnicas y herramientas evaluativas, que deberían permitirnos recopilar la máxima información posible sobre la evolución del trabajo de cada estudiante durante el semestre. Pero aún usando todas las herramientas a disposición del equipo docente, dicha información debe ser posteriormente elaborada e interpretada para valorar lo más objetivamente posible dicha evolución y, de ese modo, aconsejar y tutelar al alumnado favoreciendo sus puntos fuertes y mejorando los débiles. Nuestra labor como asesores debe incluir el mostrarle sus errores para aumentar su nivel de competencia y propiciar dos de las funciones de la evaluación: la autorreguladora y la formativa. Con la evaluación continua por competencias, el docente va ajustando su docencia a las necesidades de su alumnado para corregir las carencias y errores de este en el proceso de enseñanza/aprendizaje, mientras que el estudiante es consciente de sus errores y cuáles son los aspectos que debe mejorar.

Así, el principal beneficio de la evaluación por competencias resulta ser la retroalimentación entre estudiante y docente, la cual genera información tanto cuantitativa como cualitativa sobre el nivel de competencias del alumnado. Aunque ya lo hemos indicado antes, creemos necesario recalcarlo nuevamente: Cuanta más información dispongamos de cada estudiante y de su evolución en el semestre, más fácil resultará determinar la adquisición de los objetivos de la asignatura por este y de más información dispondrá el alumnado para adquirir el nivel de competencia.

El proceso de evaluación que debería seguirse en cualquier asignatura es el que se describe a continuación:

a) Primero, el equipo docente debe determinar las competencias a trabajar por su alumnado y el nivel de adquisición en cada una de ellas para superar la asignatura.
b) Tras decidir las competencias, el equipo docente debería establecer los criterios de evaluación que considerará para cada competencia.
c) Posteriormente, el equipo docente selecciona el tipo de evaluación que considera apropiada para su asignatura y las competencias a evaluar. Entonces deberán elegirse las técnicas y herramientas evaluativas para obtener

información objetiva sobre la adquisición de competencias (e.g. observación directa, estudio de casos, resolución de problemas…). Este paso es esencial porque una selección apropiada de recursos para la evaluación facilitará tanto su posterior aplicación como la consiguiente recopilación de evidencias sobre el nivel alcanzado por el alumnado en conocimientos y competencias.

Como nuestra opción evaluativa es de tipo continuo y no de tipo final, debemos tener en cuenta que no basta solo con evaluar y continuar con el siguiente bloque de contenidos, sino que debe usarse la retroalimentación que dicha evaluación produce de manera natural para que el alumnado aprenda realmente de sus fallos. En nuestra opinión, una evaluación que se limita a calificar no conlleva el aprendizaje del alumnado y no aumenta el grado de adquisición de las competencias. Para habilitar el carácter formativo de la evaluación, tras calificar cualquier actividad, el alumnado debería disponer de algún recurso para aclarar con el docente las incorrecciones adquiridas y no solventadas en el proceso de enseñanza/aprendizaje, mostrando que aprende de sus errores y es competente realizando tales actividades.

No decimos que la evaluación no se use para calificar, ya que la calificación es necesaria administrativamente y permite al alumnado tener una percepción relativa a lo que se espera como media del grupo. Es decir, esa calificación no debería fijarse de manera definitiva en un primer estadio, así que se le permitiese al alumnado demostrar si ha evolucionado con respecto a los errores cometidos. Obviamente, eso conlleva que la calificación administrativa no corresponda a la primera obtenida. Con ello, estaríamos aplicando una evaluación realmente continua: la evolución del alumnado en la asignatura permite volver sobre la evaluación de ítems anteriores de manera que sean complementados e, incluso, corregidos.

4. Una breve descripción de nuestra asignatura

El GIISI consta de tres asignaturas de contenido matemático: Álgebra, Cálculo y Métodos Matemáticos para la Ingeniería (MMI), todas de primer curso y 6 créditos ECTS, siendo solo la última del segundo semestre. Su docencia se distribuye, por regla general, en sesiones teóricas y prácticas, ambas con cadencia semanal. Las asignaturas se imparten en una única línea de 60 estudiantes matriculados, que reciben las sesiones teóricas en gran grupo y que se subdividen en tres subgrupos de 20 estudiantes para las sesiones prácticas en aulas de informática.

Impartir las sesiones prácticas en aulas de informática se debe al enfoque eminentemente práctico de nuestras asignaturas (siendo más acusado en el caso de MMI), basado en un aprendizaje mediante la resolución de problemas. Además, el uso de software computacional es una forma de que el alumnado pueda manipular los conceptos y le permita continuar su aprendizaje pese a posibles problemas operativos provenientes de etapas anteriores o aparecidos durante el semestre. Conste que no estamos diciendo que no nos preocupa el corregir tales defectos (los ya existentes y los que van a apareciendo), sino que podemos seguir avanzando en el temario de la asignatura al mismo tiempo que trabajamos los problemas concretos de cada estudiante (Daniels y Garner, 1999; Stainback et al., 1999). De este modo, ni ralentizamos el ritmo de aprendizaje para los que no tienen tales problemas ni hacemos imposible el seguimiento de la asignatura para los que tienen algún problema procedimental que haya que corregir haciendo uso de la evaluación.

En cualquier caso, en pleno siglo XXI y dentro del Proceso Bolonia, no podemos seguir impartiendo nuestra materia como en el siglo XIX. En el mundo actual, el uso de software profesional es esencial para desarrollar la competencia digital desde las matemáticas (Gewerc Barujel et al., 2011; Tenorio et al,. 2010). Esto es aún más acusado en nuestro caso con una ingeniería informática, ya que conocer cómo funciona un paquete de cálculo simbólico puede ser de interés en su futuro profesional.

Visto lo anterior, podría parecer que estuviésemos renegando del aprendizaje de algoritmos tradicionales “de papel y lápiz”. Nada más lejos de la verdad. Como indican Pérez-Jiménez (2005) y Montero (2006), los algoritmos tradicionales se enseñan porque permiten aprender mecanismos lógicos y de ejecución que son esenciales para las matemáticas y todas las ciencias en general (incluidas las técnicas). Pero deben enseñarse en su justa medida y teniendo en cuenta que el tratamiento computacional de un problema puede variar con respecto al tratamiento tradicional del mismo “a mano”. Por indicar un ejemplo, con ordenador, el cálculo de la inversa de una matriz regular consiste en ejecutar una simple orden y esperar unos segundos; mientras que, a mano, consiste en un mero ejercicio (pues solo ha de repetir lo que se ha explicado) pero que puede tardar unos veinte minutos. Más aún, hoy día nadie calcula inversas a mano, sino que se usa cualquiera de los múltiples software existentes (ni siquiera es necesario recurrir a una herramienta del nivel de un paquete de cálculo simbólico).

Tras esta pequeña digresión sobre la motivación de impartir las sesiones prácticas en aulas de informática, pasamos a exponer el contenido de la asignatura MMI, distribuido en tres bloques temáticos indicados en la Tabla 1: Teoría de Errores, Álgebra Numérica y Cálculo Numérico.

Tabla 1. Temario de la asignatura MMI

Tema 1: Teoría de Errores	Tema 4: Aproximación de funciones: Interpolación
Tema 2: Resolución numérica de ecuaciones lineales y no lineales	Tema 5: Métodos de derivación e integración numérica
Tema 3: Resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales	Tema 6: Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

Durante todo el semestre trabajamos con aproximaciones de números reales y buscamos estas para resolver diversos problemas que se van planteando. Al no trabajar con valores exactos, nuestras herramientas de trabajo serán los distintos procedimientos algorítmicos y fórmulas numéricas que permiten obtener tales aproximaciones. Obviamente, el tratamiento de un problema desde una perspectiva numérica presenta múltiples diferencias con respecto al tratamiento del mismo buscando la solución exacta. Desde un punto de vista práctico, la principal diferencia consiste en que el volumen de cálculos a realizar y la cantidad de cifras decimales que intervienen son considerables. Por tanto, la resolución tradicional de estos problemas “a mano” conllevaría que el tiempo consumido por un solo problema sería excesivo o que, realmente, no se podrían trabajar problemas, sino simples ejercicios en los que se observaría cómo se aplican las primeras iteraciones, pero sin entrar en las vicisitudes computacionales de la resolución de este tipo de problemas, como pueden ser: la pérdida de cifras decimales, la elección y testeo de un criterio de parada adecuado a las circunstancias del problema o el uso de datos con un elevado número de decimales, por poner algunos ejemplos.

La inclusión de los ordenadores y de software matemático (e.g. Tenorio, 2008; Tenorio, 2010) permite trabajar estos problemas de manera efectiva y centrándonos en evaluar los contenidos y competencias a desarrollar en la asignatura. Es más, no es necesario buscar problemas adecuando los datos a manejar, procurando que el problema se resuelva en no más de tres iteraciones o evitando la necesidad de reajustar la precisión de trabajo para no tener que repetir todo el problema. Todas esas dificultades, propias de un problema numérico y que el alumnado debería ser capaz de solventar, solo pueden trabajarse de manera adecuada con la ayuda de un paquete de cálculo simbólico (e.g. Tenorio, 2010; Tenorio et al., 2010). Ya no hay que preocuparse por números "manejables" por el alumnado o limitar las operaciones en una iteración del proceso algorítmico… No, ahora podemos preocuparnos de que el alumnado sepa manejar los distintos conceptos y procedimientos de que dispone para resolver numéricamente el problema planteado y dar una solución de las características solicitadas en el enunciado del problema, independientemente de la complejidad de los datos y del método.

De este modo, el tratamiento computacional pasa a ser una competencia más a desarrollar. No basta con alcanzarse las competencias propias del pensamiento científico y del tratamiento de problemas numéricos (competencias matemáticas), sino que también el correcto uso de los equipos informáticos y paquetes de cálculo simbólico (competencia digital). Así, queda claramente expuesto y justificado que la metodología seguida en la asignatura está basada en la resolución de problemas. De hecho, la filosofía seguida con nuestro alumnado durante el semestre fue la del constructivismo y el aprendizaje significativo, fomentando y favoreciendo que el/la propio/a estudiante construya el conocimiento a adquirir durante el semestre mediante su trabajo autónomo bajo supervisión del equipo docente. Todo va encaminado a adquirir las distintas competencias reflejadas en la guía docente y mostradas en Tablas 2 a 4.

Tabla 2. Competencias de la titulación desarrolladas en la asignatura MMI.

Que los estudiantes demuestren poseer y comprender conocimientos en el área de Álgebra numérica y Cálculo numérico, que parte de la base de la educación secundaria, y suelen encontrarse a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también aspectos que implican conocimientos de la vanguardia de su campo de estudio.
Que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos a su trabajo de forma profesional y que posean las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio.
Que los estudiantes puedan transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado.
Conocimiento de las materias básicas y tecnologías, que capaciten para el aprendizaje y desarrollo de nuevos métodos y tecnologías, así como las que les doten de una gran versatilidad para adaptarse a nuevas situaciones. Razonamiento lógico y crítico.
Capacidad para resolver problemas con iniciativa, toma de decisiones, autonomía y creatividad. Capacidad para saber comunicar y transmitir conocimientos, habilidades y destrezas de la profesión de Ingeniero Informático en Sistemas de Información.

Tabla 3. Competencias del módulo a desarrollar en la asignatura MMI.

Capacidad para resolver problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería. Aptitud para aplicar los conocimientos sobre métodos numéricos y algorítmica numérica.

Tabla 4. Competencias particulares de la Asignatura MMI.

Cognitivas: Conocimiento de conceptos y técnicas básicas de los Métodos Numéricos para resolver problemas relativos al Álgebra Numérica y al Cálculo Numérico; desarrollo en el alumnado del razonamiento lógico y algorítmico propio de la materia y adquisición de una visión global del contenido de la misma.
Procedimentales: Adquisición de las capacidades de análisis y creatividad para aplicar las técnicas expuestas al ámbito de un Ingeniero Informático en Sistemas de Información. Incentivación del trabajo en equipo y manejo de técnicas informáticas adecuadas.
Actitudinales: Fomentar la capacidad para ejercer la crítica sobre la conveniencia de utilizar los recursos a su alcance para solucionar problemas reales a los que se enfrenta. Desarrollar la capacidad en la toma de decisiones en la resolución de problemas.
Transversales: Expresión oral y escrita, en español e inglés. Capacidad de síntesis y análisis. Respeto a relaciones interpersonales. Pensamiento crítico. Razonamiento abstracto. Utilización de TIC y software informático.

Para fundamentar las sesiones prácticas encaminadas a la resolución de problemas, las sesiones teóricas se destinaban a explicar los conceptos y procedimientos aplicados a ejemplos numéricos simplificados y que mostraban en un primer estadio, las dificultades que el alumnado encontraría al resolver los problemas que se le encomendarían. Tras cada sesión teórica, se impartía una sesión práctica en aula de informática a cada subgrupo intentando dar la misma información en todos para no crear agravios comparativos. En dichas sesiones prácticas, el alumnado ponía en práctica, con el software adecuado y bajo supervisión del docente, los conocimientos teóricos previamente explicados. Más concretamente, el docente explicaba cómo abordar una serie de problemas seleccionados para resolver con estos en el aula en dichas sesiones. Como ya apuntamos antes, las prácticas se trabajaron con un alumno por ordenador para tratar computacionalmente los problemas con Mathematica, aunque todos los pasos, procedimientos y decisiones realizados debían razonarse y justificarse. Por ejemplo: Cada método numérico requiere de una serie de hipótesis iniciales que permiten su correcta aplicación con convergencia a una solución del problema y con una determinada velocidad. El alumnado para resolver el problema debe comprobar esas hipótesis iniciales o adaptar el problema para que tales hipótesis se satisfagan.

Hasta aquí, podría decirse que estamos ante una metodología más o menos tradicional, enfatizando que es el alumnado quien lleva el peso y el ritmo de cada sesión y es responsable del resultado final de su aprendizaje (obviamente todo supervisado y conducido por el equipo docente). Lo que sí es más novedoso es el siguiente tipo de actividad académica, sobre todo si tenemos en cuenta cómo afecta a la evaluación del alumnado. La actividad a la que nos referimos consiste en que, tras concluir cada sesión práctica, el docente encomienda al alumnado una serie de problemas sobre los contenidos trabajados y cuya complejidad va desde la tratada en la práctica hasta un nivel más elevado. Esta actividad debía realizarse en el marco temporal indicado (normalmente una semana o semana y media) bajo la supervisión del docente que les imparte las prácticas con el fin de que apliquen los contenidos y procedimientos ya trabajados a problemas computacionales concretos de manera efectiva, observando cómo se desenvuelve cada estudiante en situaciones que no son exactamente las mismas que las trabajadas en clase. En la próxima sección, dedicada a la evaluación de la asignatura, veremos concretamente la finalidad de estas actividades, su evaluación y su influencia en la evaluación global del proceso de enseñanza/aprendizaje del alumnado.

Aparte de las motivaciones basadas en el sistema de evaluación (que se verán en la sección siguiente), existe una razón adicional para emplear metodologías eminentemente prácticas en el aula, la cual ya hemos introducido anteriormente: el interés del equipo docente en formar profesionales competentes que sean capaces de pensar razonadamente y que sepan justificar las decisiones que toman y las conclusiones a las que llegan basándose, en nuestro caso, en el conocimiento matemático; y que sepan resolver los problemas profesionales que puedan surgirle en su ámbito laboral. Por ello, trabajamos problemas numéricos desde el contexto de la ingeniería informática. De este modo, cada estudiante debe modelizar problemas reales, argumentar y demostrar científicamente y manejar correctamente técnicas numéricas y software computacional para tratar tales problemas.

Nuestra propuesta educativa se basa pues en la comprensión y correcta aplicación de conceptos y resultados para resolver problemas de manera eficiente y apropiada, pudiendo el alumnado consultar siempre la formulación exacta de los mismos y no basando el proceso de enseñanza/aprendizaje en mera memorización.

5. Explicando el sistema de evaluación

Tras exponer la metodología y filosofía docente, queremos a continuación explicar cómo hemos evaluado el trabajo (autónomo) del alumnado durante el semestre por medio de una evaluación continua. Eso sí, no limitándonos a realizar meros exámenes parciales o finales que evalúen exclusivamente la capacidad de memorizar, pero no la de resolución comprensiva y efectiva de problemas.

Tras una seria reflexión, el equipo docente decidió que era momento de dar una nueva vuelta de tuerca a la evaluación tradicional en matemáticas y plantear la supresión del examen final de la asignatura. Para ello, debía implantarse un sistema de evaluación de tipo continuo, secuenciado y supervisado durante todo el semestre y en cada actividad que se encomendase al alumnado. No nos limitaríamos así a una ventana temporal de evaluación en una tarde o mañana de examen.

Queríamos una evaluación que no fuese un simple ranking del alumnado, sino que nos permitiese aprovechar al máximo las funciones formativa y reguladora de una buena evaluación. Con ello, el alumnado podría conocer sus errores conceptuales y procedimentales durante el semestre y no al final, pudiendo mostrar su capacidad para corregir sus fallos y reflejar esto en su calificación administrativa. Ante esta propuesta didáctica, nos vimos obligados a plantear técnicas y herramientas de evaluación que permitiesen evaluar durante todo el semestre y generasen información que devolver al alumnado para que corrigiese su aprendizaje en el propio semestre y asimilase correctamente contenidos y procedimientos.

Tomando en consideración lo ya comentado, el equipo docente optó por seleccionar la técnica evaluativa del portafolios como la que se ajustaba mejor a los objetivos propuesto en la asignatura MMI en relación a la evaluación del alumnado.

Como ya indicamos en la Sección 2, el portafolios es una herramienta evaluativa que proporciona muchísima información sobre la evolución y progreso del alumnado durante el semestre y sobre el grado de adquisición para cada una de las competencias indicadas en las Tablas 2 a 4. Esto se debe a que el portafolios no se limita a una serie de tareas que, tras encomendarlas, recogerlas y corregirlas, se archivan sin más historia. Todo lo contrario: tras su corrección, se devuelve al alumnado la información generada por la corrección sobre su aprendizaje y grado de adquisición de competencias relativas a la asignatura. Así, el alumnado puede trabajar sobre los errores que ha cometido y tiene la oportunidad de mostrar al equipo docente si ha podido asimilar correctamente los conocimientos y procedimientos que se trabajaban con la tarea en cuestión. Obsérvese que, de este modo, el equipo docente dispone de información tanto sobre qué hizo mal cada estudiante como sobre su capacidad para aprender de sus errores y subsanarlos bajo supervisión del docente. Conjugando la información previa y posterior a la evaluación de cada tarea, puede realizarse una evaluación equitativa sobre la adquisición de competencias por cada estudiante, no centrándose solo en una simple evaluación de trabajos entregados.

A continuación, concretamos nuestra aplicación del portafolios a la evaluación de MMI. Las etapas que seguimos para cada tarea encomendada son las siguientes:

1. Tras cada sesión práctica sobre resolución de problemas, se encomienda al alumnado una tarea con varios problemas relativos a dicha sesión, los cuales deben realizarse de manera autónoma y entregarse en el plazo indicado para su evaluación.
2. Durante la realización de la tarea, cada estudiante es asesorado por el equipo docente mediante tutorías (presenciales o virtuales) voluntarias, pudiendo plantear cualquier duda y dificultad aparecidas en relación a conceptos y procedimientos involucrados en las tareas. El docente no solo ayuda a solventar tales cuestiones, sino que procura corregir los errores que detecta en las actividades consultadas con su alumnado.
3. Tras la entrega (telemática) de la tarea, el docente la evalúa y emite un informe individualizado y desglosado problema por problema para cada estudiante, detallando los fallos conceptuales y procedimentales.
4. Ese informe personal debe ser utilizado cada estudiante para rehacer su tarea respondiendo a cada comentario o indicación realizado por el docente. Esa nueva versión de la tarea se reenvía (telemáticamente) para que el docente la reevalúe y use la información generada en el proceso para calificar a su estudiante.

En el semestre del curso 2010/11 se mandaron 8 tareas siguiendo la dinámica que acabamos de describir y que conllevaron un total de 16 entregas (2 por tarea) por parte del alumnado, aunque no todos hicieron uso de la segunda entrega.

Adicionalmente, se encomendó una novena tarea al final del semestre, que no podía reenviarse. Esta tarea consistió en elaborar un informe detallado explicando un método de resolución numérica para ecuaciones diferenciales ordinarias, exponiendo la justificación teórica del método, los principales resultados de aplicación y convergencia y un ejemplo de aplicación del mismo. Mientras que todas las tareas de la asignatura fueron individuales, esta última evaluaba no solo el tema de ecuaciones diferenciales ordinarias, sino que también la competencia del alumnado para trabajar en grupo. En este sentido, el alumnado se tuvo que distribuir de manera autónoma en grupos de tres miembros para llevarla a cabo y se dispusieron espacios en las sesiones teóricas y prácticas para elaborar el informe bajo supervisión del equipo docente (siendo este el motivo de no habilitar una segunda entrega). Indicar que solo tuvimos problemas en la creación de dos grupos. En uno de los casos, el problema no era fácilmente subsanable ya que se limitaba a asignar un alumno sin grupo en el día del reparto al único grupo con dos miembros que se formó. Por el contrario, el segundo caso fue sumamente problemático y más grave, siendo expuesto en detalle cuando hablemos de su evaluación.

Esta última tarea del semestre tuvo una estructura diferente a las anteriores:

1. Tras una sesión teórica explicándose las nociones fundamentales sobre ecuaciones diferenciales ordinarias a trabajar, se les dio una bibliografía básica con información para los múltiples métodos que podían asignarse, siendo esta realizada de manera aleatoria sin permitir la selección de un mismo método por dos grupos distintos.
2. Seguidamente se emplearon tres sesiones presenciales para que cada grupo trabajase su informe en el aula bajo el asesoramiento del equipo docente de la asignatura.
3. Para el método de resolución asignado, el grupo debía buscar la información tanto en la bibliografía básica como en otra existente en Internet hallada por el grupo, referenciando cualquiera de ellas correctamente en el informe. Para elaborar ese informe, los grupos tenían como ejemplo previo la documentación entregada por el equipo docente durante el semestre y en la que se estructuraban los distintos métodos numéricos trabajados. La guía entregada a cada grupo para elaborar el informe recogía los siguientes puntos:
   a) Exposición del método en cuestión, explicando las operaciones y razonamientos que llevan a la expresión del método en cuestión.
   b) Indicación del seudocódigo para el método. Bastaría con indicar cómo se trataría el método algorítmicamente.
   c) Si procede, indicar criterio de existencia, estabilidad y orden de convergencia del método.
   d) Si procede, indicar la fórmula para calcular o acotar el error cometido por la aproximación dada por el método.
   e) Ejemplo de aplicación del método con un problema de enunciado completamente desarrollado y resuelto.

Como el alumnado podía realizar las distintas tareas en casa, el equipo docente articuló los mecanismos necesarios para comprobar y controlar que cada estudiante realizaba autónomamente el trabajo o (en caso de ayuda externa) que lo había asimilado y comprendido correctamente. Para ello se habilitaron tres sesiones presenciales de control (en clase de prácticas) y que se denominaron defensas orales. En cada defensa oral, el alumnado realizaba una exposición oral ante sus compañeras y compañeros del problema o los problemas que el docente le indicase y respondía a una serie de preguntas que buscaban detectar el manejo que el/la alumno/a tenía del problema en cuestión y de la resolución que estaba explicando, testando así si había trabajado y asimilado la tarea.

En el caso de la tercera defensa oral, realizada el último día de clase y relativa a la tarea grupal, la única diferencia con las anteriores consistió en que la defensa era conjunta para los tres miembros del grupo.

En todas y cada una de las defensas, el equipo docente se centró, no en ver si el alumnado recibió ayuda para las tareas (ya que como mínimo recibió la nuestra), sino en ver su capacidad para explicar de manera comprensible cada una de las actividades y la asimilación de los contenidos, procedimientos y competencias asignados a los problemas preguntados.

Al evaluar dichas defensas, tuvimos algunas dificultades. En las dos primeras, nos encontramos con que el alumnado no preparó los problemas que podían preguntarse, por lo que sus respuestas eran dubitativas y sin una reflexión previa de lo hecho al elaborar la tarea y de lo que se le estaba preguntando concretamente. Indicar que, en general, se observó una gran mejoría en la segunda defensa a este respecto, aunque con unos niveles mínimos de capacitación. En nuestra opinión, las defensas orales mostraron las dificultades del alumnado para expresar sus ideas y argumentar coherentemente. Estas dificultades se trabajaron con el alumnado durante el semestre, consiguiéndose mejoras relativas razonables al final del mismo.

Al evaluar la tercera defensa oral, la mayoría de los grupos realizaron una buena presentación, respondiendo adecuada y correctamente la mayoría de las preguntas realizadas. Solo tuvimos problema con el grupo al que nos referimos anteriormente. Dicho grupo consistía en dos alumnas y un alumno que no asistieron a la sesión previa en la que se explicó y realizó la organización de grupos. Por ello, se les agrupó telemáticamente en un único grupo. Sus miembros no fueron capaces de funcionar correctamente como grupo. Su principal problema radicó en no establecer una dinámica de trabajo en equipo y entenderlo como realizar cada uno su parte del trabajo, sin preocuparse de la correcta elaboración del resto. Esto conllevó, por un lado, problemas de coherencia en el texto y, lo que fue más grave, no ser capaces de tomar decisiones consensuadas, incluida la fecha de exposición. Así, a escasas horas de su turno de defensa, cada miembro del grupo comenzó a enviar correos-e de manera independiente indicando por qué el resto no iba a la defensa y echándose mutuamente las culpas por no estar todos en la misma o no haber buscado fecha alternativa de defensa. Ya que una de las competencias que se evaluaban en esta defensa era la del trabajo en grupo, nos vimos avocados a evaluarla negativamente, aunque el informe sí se evaluó positivamente (aunque no remarcable), pues esa parte sí la realizaron dentro de los niveles de aceptación. Queremos remarcar que esto no habría pasado si hubiesen trabajado conjuntamente tomado decisiones consensuadas y negociando cualquier actuación a realizar.

Además de las defensas orales y como mecanismo no solo de control sino también de seguimiento personalizado de cada estudiante, la tutorización se volvió un elemento esencial durante el semestre. El equipo docente fomentó el uso de las tutorías (presenciales y virtuales) por el alumnado para que preguntase y solventase las dudas que fuesen surgiendo tanto al respecto de los contenidos explicados como de las tareas encomendadas. Insistimos en que realizaran consultas por correo-e y por el foro de la asignatura (usando la plataforma Blackboard) con el compromiso de respuesta en un plazo de 48 horas. Igualmente, se establecieron turnos de tutorías presenciales a concertar por cita previa, que buscaban evitar que el alumnado tuviese que estar esperando un tiempo que podía aprovechar en estudiar nuestra asignatura u otra del curso académico, al igual que permitir una atención adecuada y sosegada al alumnado sin que este se sintiese presionado por una cola de espera.

La tutoría fue para el equipo docente una fuente inagotable de información sobre cada estudiante de la asignatura y, por lo general, fue esencial para realizar un seguimiento adecuado de su evolución. Al querer fomentar las tutorías tanto para que el alumnado solventase sus dudas como para que el equipo docente dispusiese de información para una evaluación equitativa y justa, se tomó la decisión de asignar un porcentaje testimonial de la calificación en relación a su aprovechamiento.

Obviamente, asignar calificación por aprovechamiento de las tutorías conllevó imponer un mínimo de asistencia para dicha valoración. Es por ello que se realizó una sesión obligatoria de tutoría a mediado de curso para quienes no habían ido hasta esa fecha. Tras recibir las primeras calificaciones por sus tareas, el alumnado comprobó la importancia de las tutorías para una correcta realización de las tareas y adquisición de las competencias. Así, el número de asistentes a las tutorías presenciales comenzó a aumentar tras dichas calificaciones.

Hernández-Jiménez et al. (2008) ya propusieron anteriormente un plan integral de acción tutorial en asignaturas de matemáticas para ingeniería, pero manteniendo el peso principal de la evaluación en el examen final. El sistema de evaluación aquí presentado, pese a usar algunas ideas generales de dicho plan, se adapta a la supresión el examen final. Como ya se indicó antes, la tutoría fue un elemento esencial en la evaluación por el volumen de información que generó sobre cada estudiante, información que nos permitió interpretar las distintas respuestas que el alumnado daba en las tareas.

Seguidamente mostramos los porcentajes sobre la calificación asignados a cada herramienta evaluativa en la asignatura, que se superaba si se alcanzaba un porcentaje del 50% sobre la calificación total:

Tabla 5. Porcentaje en la calificación de las distintas herramientas de evaluación

Actividad	Tareas	Defensas	Tutoría
Porcentaje	60%	30%	10%

6. Resultados de la evaluación en el curso 2010/11

Como se indicó anteriormente, la evaluación se realizó durante el semestre de manera continua y sin examen final. En nuestra opinión, dicho examen no aportaba mejor información sobre las competencias alcanzadas que la generada por tareas asesoradas por el equipo docente. Nuestra propuesta de evaluación continua sin prueba final ha tenido en el curso 2010/11 los resultados indicados en esta sección.

Este curso hemos contado con 60 estudiantes matriculados. Tras dos semanas de clases, comenzó a producirse el abandono de la asignatura por parte del alumnado, estabilizándose en un total de 27 estudiantes, que continuaron el curso hasta el final del semestre (i. e., 45% de los matriculados). Disponemos de alguna información proporcionada por el alumnado sobre las posibles causas de abandono, ya que poco antes de pasar el ecuador del semestre, escribimos un correo al alumnado que no estaba dando señales de vida para preguntar al respecto y los pocos que contestaron hacían referencia a dos factores esencialmente: el primero se debía tanto al número de años transcurridos desde la última vez que cursaron una asignatura de matemáticas (un alto porcentaje del alumnado proviene de ciclos formativos o bachilleratos distintos del científico-técnico); y el segundo correspondía al enfoque metodológico y evaluativo de la asignatura, ya que no terminaban de adaptarse a una dinámica de trabajo con entrega semanal ó quincenal y que dichas tareas tuviesen que ser entregadas con un mínimo de calidad para su evaluación positiva. Es curioso, pero nuestra percepción de los comentarios recibidos hace que nos decantemos por el segundo factor como el más influyente. Estamos a la espera de disponer de una mayor cantidad de datos en este curso para poder realizar esta afirmación de manera concluyente.

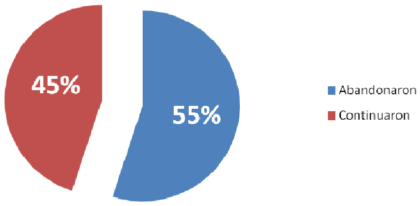


Figura 1. Porcentajes de estudiantes que abandonaron y que continuaron.

A partir de aquí, todos los datos mostrados corresponden solo al alumnado que continuó la asignatura durante el semestre completo; es decir, nos referiremos continuamente a los 27 estudiantes que finalizaron el curso. Las calificaciones obtenidas por el alumnado permitió obtener un 100% de estudiantes superando el curso con calificaciones que iban desde el aprobado hasta el sobresaliente y que se desglosan en la Tabla 6 numéricamente y en la Figura 2 porcentualmente, donde puede observarse que el 100% del alumnado que prosiguió con la asignatura aprobó, siendo las calificaciones más habituales la de Bien y Notable.

Tabla 6. Desglose de calificaciones finales en la asignatura MMI

	Aprobado (A)	Bien (B)	Notable (N)	Sobresaliente (Sb)
Nº estudiantes	4	11	10	2

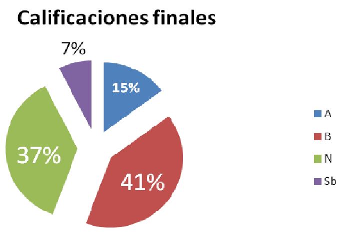


Figura 2. Porcentajes en las calificaciones finales en la asignatura MMI.

Para analizar los resultados del sistema de evaluación, desglosamos un poco más la calificación de la asignatura viendo por separado la evaluación de las tareas y de las defensas orales. Respecto a estas últimas, observamos en la Figura 3 las calificaciones para cada una, las cuales mejoraron en la segunda defensa respecto a la primera, especialmente en referencia al número de Suspenso (Su). De hecho, todas las calificaciones en la segunda defensa disminuyeron con respecto de la primera defensa, salvo las calificaciones Notable (N) y Sobresaliente (Sb), con un considerable incremento. Las calificaciones de la tercera defensa fueron inferiores a las de la segunda, en parte porque la calificación era la misma para todos los miembros del grupo y eso hizo que las calificaciones se normalizasen porque el alumnado no se distribuyó en grupos homogéneos con respecto a los niveles de competencia. También queremos resaltar que el número de No Presentados (NP) a esta defensa fue sorprendentemente superior con respecto al de las defensas anteriores (casi inexistentes). Esto pudiera deberse en parte a que dicha defensa se realizó al final del semestre, disponiendo el alumnado de bastante información sobre su evaluación e incluso porque la práctica totalidad del alumnado tenía conocimiento de haber superado la asignatura. Al igual que hacemos esta interpretación del número de No Presentados, querríamos remarcar que ese número fue solo de 6 estudiantes (22% de los que acabaron la asignatura), realizando el restante 78% dicha defensa siendo la calificación Notable la de mayor frecuencia.

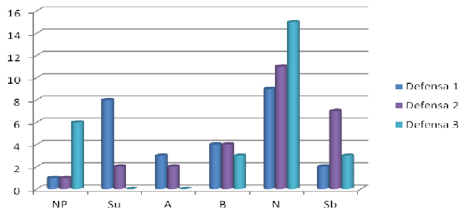


Figura 3. Número de estudiantes por calificaciones en las defensas orales.

Para que nos hagamos una idea numérica sobre las calificaciones que obtuvo nuestro alumnado en las defensas orales, mostramos en la Figura 4 el gráfico sectorial indicando el porcentaje de dichas calificaciones. Recuérdese que las defensas solo proporcionaban un 30% de la calificación o, lo que es lo mismo, 3 puntos. Puede observarse que el 71% del alumnado obtuvo una calificación entre 2 y 3 puntos, siendo un 30% los que superaron los 2.5 puntos. Esto lo consideramos un buen resultado respecto de las calificaciones de las defensas orales

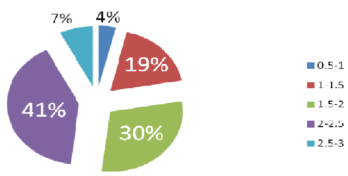


Figura 4. Porcentaje de cada calificación en las defensas orales.

Este mismo estudio lo hemos hecho para las tareas realizadas por el alumnado, consistente en un 60% de la calificación (i. e. 6 puntos). Recuérdese que la calificación de cada tarea se realizó en dos etapas: La primera etapa consistía en una evaluación tras la primera entrega y conllevaba elaborar un informe para el alumnado; mientras que la segunda etapa se realizaba tras la segunda entrega y señalaba la calificación que se le asignaría a cada estudiante. En la Figura 5 mostramos las calificaciones obtenidas tras la primera entrega para cada tarea, indicando el número de estudiantes alcanzando dicha calificación. Puede observarse que el número de Suspenso fue decreciendo a partir de la tercera tarea, con algún ligero repunte pero sin alcanzar el valor de las tres primeras. Igualmente, el número de Sobresaliente y Notable también aumentó considerablemente de una tarea a otra. La tarea grupal, la novena, empeoró las calificaciones con un elevado número de No Presentado y de Aprobado por los motivos ya indicados al hablar de la tercera defensa oral. Como puede verse en la Figura 6, más del 80% del alumnado consiguió alcanzar un mínimo de 3 puntos por la entrega de tareas tras la primera entrega, siendo un 30% el porcentaje en la franja de 4 a 5 puntos. En esta primera entrega, ninguno de los estudiantes entregó un trabajo que pudiese alcanzar una calificación más elevada, de 5 a 6 puntos.

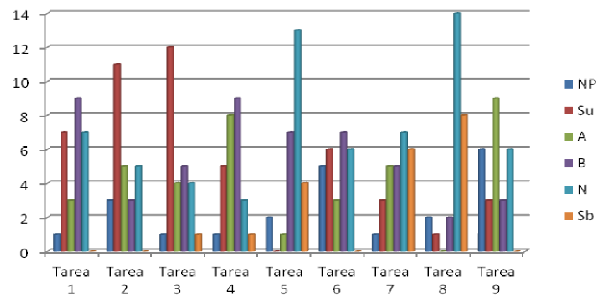


Figura 5. Número de estudiantes por calificación en tareas tras primera entrega.

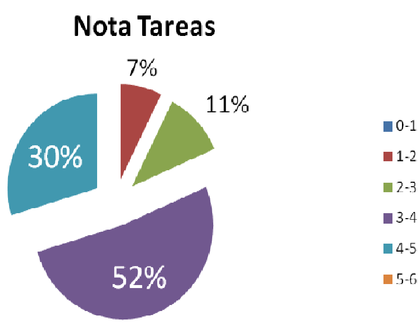


Figura 6. Porcentaje de cada calificación en las tareas tras primera entrega.

Las calificaciones de la segunda entrega para las tareas 1 a 8 (la novena no permitía segunda entrega) se observan en la Figura 7. Queremos resaltar que, por lo general, el alumnado aprovechó la oportunidad de subir una segunda versión de la tarea, trabajando los informes individualizados que se hicieron llegar y aprovechando las tutorías presenciales y virtuales con el equipo docente para corregir los errores cometidos en la primera entrega. El número de Notable y Sobresaliente aumentó considerablemente con respecto a la primera entrega. Más aún, en comparación con la primera entrega, las calificaciones No Presentado y Suspenso llegaron a ser residuales e incluso inexistentes. Si comparamos las Figuras 5 y 7, podemos comprobar que el sistema de portafolios permite al alumnado ir corrigiendo sus errores y aprender de los mismos para alcanzar un nivel de competencia adecuado en la resolución de los problemas tratados en la asignatura.

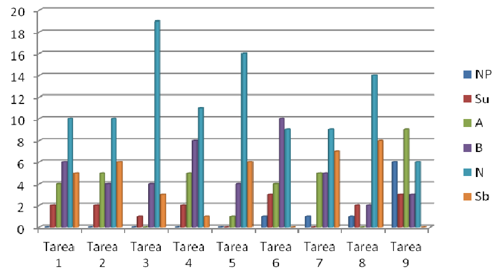


Figura 7. Número de estudiantes por calificación en tareas tras segunda entrega.

En la Figura 8, vemos la distribución porcentual de las calificaciones de 0 a 6 puntos obtenidas en las tareas. Casi el 75% del alumnado pasó a tener una calificación superior a 4 puntos en las tareas, frente al 80% que en la primera entrega superó los 3 puntos. Más aún, en esta segunda entrega ningún estudiante obtuvo menos de 3 puntos. Pese al aumento de las calificaciones de todo el alumnado, solo uno alcanzó el nivel de calificación entre 5 y 6 puntos.

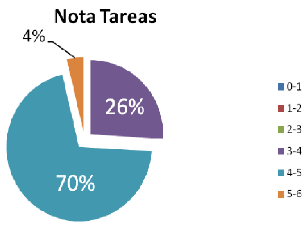


Figura 8. Porcentaje de cada calificación en las tareas tras segunda entrega.

En vista de los datos descritos, creemos estar en disposición de afirmar que, con el sistema de evaluación seguido en esta asignatura, se puede lograr que el alumnado alcance unos niveles de competencia adecuados para superar la asignatura acorde a la guía docente. Además, el alumnado se ha sentido motivado durante el semestre viendo la evolución de sus calificaciones y, por tanto, se ha evitado un mayor abandono de la asignatura y que el propio alumnado se implique en superarla después de haber trabajado considerablemente en la misma.

7. Ejemplo de problema a evaluar

A modo de ejemplo, mostramos cómo evaluar un problema trabajado con Mathematica. Hemos optado por un ejemplo de álgebra numérica relativo a resolver una ecuación no lineal usando el método de bisección:

Enunciado: Encontrar un valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$ mediante el método de bisección con 3 cifras decimales exactas.

Resolución: El alumno debe responder adecuadamente los siguientes ítems:

a) Elegir la función adecuada f que permita aproximar el valor que piden como si fuese una solución de una ecuación $f(x)=0$.

b) Obtener un intervalo de los números reales en el que la ecuación $f(x)=0$ solo contenga una única solución.

c) Comprobar en dicho intervalo las hipótesis del Teorema de Bolzano.

d) Aplicar correctamente el criterio de parada para decidir en qué iteración paramos para obtener la precisión o exactitud exigida en el enunciado.

e) Presentar la solución de forma coherente, interpretando los resultados obtenidos mediante el tratamiento computacional.

El apartado a) corresponde a traducir el cálculo de una raíz cúbica a resolver una ecuación no lineal. El alumnado debe considerar que está buscando el valor de la variable $x=\sqrt[3]{2}$, que al despejar el número 2, nos lleva a la ecuación $x^3-2=0$ y, por tanto, la función f buscada en este apartado resulta ser $f(x)=x^3-2$.

Una vez obtenida la función f, pasaríamos al apartado b) con el fin de localizar y separar las soluciones en intervalos disjuntos conteniendo una única solución. Para ello, el alumnado puede hacer uso del estudio de la monotonía de la función f. Bastaría con estudiar la primera derivada de la función, que resulta ser $f'(x)=3x^2$. La única solución de esta derivada (i.e. punto crítico de la función f) se encuentra precisamente en $x=0$ y, en consecuencia, los dos intervalos de monotonía resultan ser $(-\infty,0)$ y $(0,+\infty)$. Eso quiere decir que la ecuación que estamos resolviendo tiene, a lo sumo, dos soluciones: una posible en cada intervalo.

Tras separar las posibles soluciones en intervalos disjuntos, quedaría ver si estos contienen soluciones. Aquí debe usarse con criterio el Teorema de Bolzano. Al ser intervalo de monotonía, el Teorema de Bolzano tiene un enunciado más potente: La existencia de cambio de signo de una función continua en los extremos de un intervalo equivale a la existencia de una única solución en dicho intervalo. Por tanto, si hay cambio de signo, el intervalo contiene una única solución y, en caso contrario, no contendría soluciones. Por tanto, pasaremos al punto c) y comprobaremos las hipótesis del Teorema de Bolzano a la vez que terminamos el apartado b).

La función f es continua en todo número real por ser polinómica. Por tanto, el Teorema de Bolzano es aplicable y solo restaría estudiar el cambio de signo en los extremos de los intervalos anteriormente obtenidos. Aquí es donde el alumnado podría empezar a usar el Mathematica como herramienta. Puede evaluar la función en los extremos de los dos intervalos anteriormente indicados:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty<0 \qquad f(0)=-2<0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty>0$$

El único cambio de signo para la función f ocurre en el intervalo $(0,+\infty)$ y la ecuación $f(x)=0$ solo tiene una solución, que está en dicho intervalo. Ahora, el problema de nuestro alumnado radicaría en que el método de bisección necesita de un intervalo de tipo finito y el que tiene es de tipo infinito. Por tanto, debería buscar un subintervalo de $(0,+\infty)$ con alternancia de signo para la función f en sus extremos. Aquí hay múltiples opciones, recomendándosele que utilicen un intervalo con la menor amplitud posible. Para continuar con nuestro ejemplo, consideraremos el intervalo [1, 1.5] que presenta cambio de signo en los extremos:

$$f(1)=-1<0 \qquad f(1.5)\approx 1.375>0$$

Una vez se dispone de un intervalo finito (de amplitud no muy grande) y con alternancia de signo para la función f en sus extremos, podemos aplicar el método de bisección a f en ese intervalo. Con las iteraciones iniciales $x_0=1$ y $x_1=1.5$, se calcula el punto medio de ambos puntos, obteniéndose la siguiente aproximación del valor $\sqrt[3]{2}$:

$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2} = 1.25$$

Ahora habría que estimar el error absoluto cometido con esta aproximación respecto del valor exacto. Dicho error se estimaría como $E_A \approx |x_2 - x_1| = 0.25$.

Como buscamos una aproximación con tres cifras decimales exactas, el alumnado debería de interpretar esa condición como la de obtener un error absoluto menor que 10^{-3}. Al no ser este el orden del error cometido, se calcularía la siguiente iteración. Para ello, debemos saber si aplicar la fórmula del punto medio al intervalo $[x_0, x_2]$ o al $[x_2, x_1]$. La elección dependerá de que el intervalo contenga la solución buscada; es decir, que la función f presente cambio de signos en sus extremos:

$$f(x_0) = f(1) = -1 < 0 \qquad f(x_2) = f(1.25) \approx -0.046 < 0 \qquad f(x_1) = f(1.5) \approx 1.375 > 0$$

El cambio de signo ocurre pues en el intervalo $[x_2, x_1]$ y este es el intervalo que utilizamos para calcular la siguiente iteración:

$$x_3 = \frac{x_2 + x_1}{2} = 1.375$$

y su correspondiente error absoluto $E_A \approx |x_3 - x_2| = 0.125$. Como el error es mayor del que pedimos, tenemos que determinar si el siguiente intervalo sería $[x_2, x_3]$ o $[x_3, x_1]$. Continuaríamos aplicando este procedimiento, estudiando los extremos de los dos subintervalos hasta obtener un error absoluto del nivel que se ha exigido. En Tabla 7 aparecen las nueve iteraciones necesarias para obtener un error absoluto menor que 10^{-3}.

Tabla 7. Iteraciones necesarias para obtener aproximación de la solución con error absoluto menor que 10^{-3}.

Iteración	Extremo inferior	Extremo superior	x_n	Imagen de extremo inferior	Imagen de extremo superior	$f(x_n)$
2	$x_0 = 1$	$x_1 = 1.5$	$x_2 = 1.25$	-	+	-
3	$x_2 = 1.25$	$x_1 = 1.5$	$x_3 = 1.375$	-	+	+
4	$x_2 = 1.25$	$x_3 = 1.375$	$x_4 = 1.3125$	-	+	+
5	$x_2 = 1.25$	$x_4 = 1.3125$	$x_5 = 1.28125$	-	+	+
6	$x_2 = 1.25$	$x_5 = 1.28125$	$x_6 = 1.265625$	-	+	+
7	$x_2 = 1.25$	$x_6 = 1.265625$	$x_7 = 1.2578125$	-	+	-
8	$x_7 = 1.2578125$	$x_6 = 1.265625$	$x_8 = 1.26171875$	-	+	+
9	$x_7 = 1.2578125$	$x_8 = 1.26171875$	$x_9 = 1.259765625$	-	+	-
10	$x_9 = 1.259765625$	$x_8 = 1.26171875$	$x_{10} = 1.2607421875$	-	+	+
11	$x_9 = 1.259765625$	$x_{10} = 1.2607421875$	$x_{11} = 1.26025390625$	-	+	+

Todos los cálculos se harían con la ayuda de Mathematica y el alumnado tras razonar las primeras iteraciones debería concluir que la aproximación solicitada en el enunciado era $x \approx 1.260$ ya que $E_A \approx |x_{11} - x_{10}| \approx 0.0004 < 10^{-3}$.

8. Conclusiones

En el presente trabajo hemos presentado el sistema de evaluación usado en la asignatura MMI, que hemos basado en la estrategia del portafolios y con el que el alumnado ha ido realizando una serie de actividades en el semestre que fueron evaluadas y pudieron corregir antes de darle su evaluación final en la asignatura. Esta estrategia de evaluación nos ha permitido usar eficazmente las funciones reguladora y formativa existentes en toda evaluación continua. También hemos explicado la distribución de las actividades evaluativas durante el semestre, indicando su secuenciación. Igualmente, hemos argumentado la decisión de suprimir el examen final, mostrando la validez de una evaluación continua sin dicha prueba.

Con ello hemos procurado que el alumnado fuese obteniendo y mostrando su capacitación (competencia) en los tópicos trabajados en la asignatura durante el transcurso del mismo.

La dinámica de entrega de tareas de evaluación por el alumnado ha funcionado bastante bien, una vez que el alumnado asimiló la misma y la necesidad de un mínimo de calidad en sus tareas desde un punto de vista técnico y formal.

También hemos expuesto la importancia tanto del trabajo autónomo del alumnado como del aprovechamiento de la acción tutorial ofertada y fomentada por el equipo docente. Esta acción tutorial no se limitó a atender tutorías en el despacho, sino que se extendió a supervisar y responder consultas realizadas telemáticamente y fuera de horario, enfatizando el uso de las tutorías virtuales con las herramientas de comunicación de Blackboard. Estas agilizaron y potenciaron la comunicación docente-estudiante, estudiante-estudiante o docente-docente, dándoles las mismas posibilidades a quienes no podían asistir a las tutorías presenciales.

No todo ha sido positivo. Se intentó llevar un diario de seguimiento de cada estudiante, pero por el volumen de trabajo que conllevó la evaluación no se realizó dicho diario y nos tuvimos que limitar a las anotaciones tomadas en clase. Por otra parte, también deberíamos de resaltar que el éxito de la metodología y el sistema de evaluación empleados es un triunfo a medias, pues la tasa de abandono en las dos primeras semanas del cuatrimestre fue medio-alta y esto, en parte, facilitó en gran manera una tutorización individualizada durante el curso 2010/11.

Bibliografía

ANECA (2005). *Libro blanco del título de grado en ingeniería informática.* Madrid: Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación.

Arbizu, F., Lobato, C., del Castillo, L. (2005). Algunos modelos de abordaje de la tutoría universitaria. *Revista de Psicodidáctica*, 1, 7-22.

Barberá, E. (1999). *Evaluación de la enseñanza, evaluación del aprendizaje*. Barcelona: Edebé.

Bermudo, S.; Moreno, P., Tenorio, A.F. (2006). Una experiencia piloto en la Universidad Pablo de Olavide: Fundamentos Matemáticos de la Informática I y II y

Estadística de la Ingeniería Técnica en Informática de Gestión. En *Actas de I Jornadas Nacionales de Intercambio de Experiencias Piloto de Implantación de Metodologías ECTS* (8pp.). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Bologna Follow-Up Group Secretariat (2010). The Official Bologna Process Website [en línea]. Recuperado 11/10/2011, de http://www.ehea.info/members.aspx.

Daniels, H. and Garner, P. (1999). *Inclusive Education*. London: Kogam.

Gewerc Barujel, A.; Montero Mesa, L. y Pernas Morado, E. (2011). Competencia digital y planes de estudio universitarios. En busca del eslabón perdido. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, 8(2), 14-30.

Hernández-Jiménez, B., Moreno, P. y Tenorio, A.F. (2008). La tutoría: un apoyo sustancial de la Estadística–Matemáticas en la Ingeniería Técnica en Informática de Gestión de la Universidad Pablo de Olavide. En M. Zapata-Ros (Ed.), *Actas del Seminario Internacional RED-U 2-08: La acción tutorial en la Universidad del siglo XXI*. (8pp.) Murcia: Red-U.

Imbernon, F. y Medina, J.L. (2005). *Metodología participativa en el aula universitaria. La participación del alumnado*. Barcelona: Editorial Octaedro.

Le Boterf, G. (2000). *Ingeniería de las competencias*. Barcelona: Gestión 2000/EPISE.

McDonald, R.; Boud, D.; Francis, J. y Gonczi, A. (2000). Nuevas perspectivas sobre la evaluación. *Boletín Técnico Interamericano de Formación Profesional*, 149, 41-72.

Martínez González, J.A. (2010). La naturaleza de las competencias en el Espacio Europeo de Educación Superior. *Cuadernos de Educación y Desarrollo*, 2, 22. [en línea] Recuperado 1/10/2011, de. http://www.eumed.net/rev/ced/22/jamg.htm.

Mateo, J. (2007). Interpretando la realidad, construyendo nuevas formas de conocimiento: el desarrollo competencial y su evaluación. *Revista de Investigación Educativa*, 25, 513-531.

MECD (2003). *La integración del sistema universitario español en el Espacio Europeo de Enseñanza Superior. Documento-marco*. Madrid: Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte.

McClelland, D. (1973). Testing for Competence Rather Than for Intelligence. *American Psychologist*, 28, 1-14.

Montero, L. (2006). Enseñanza de la Matemática dominada por algoritmos versus una enseñanza más conceptual. En J. Segura (Ed.), *Actas digitales I Encuentro de Enseñanza de la Matemática*. Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.

Morin, E. (2001). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. Barcelona: Seix Barral.

Pérez-Jiménez, A.J. (2005). Algoritmos en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1, 37-44.

Pozo-Llorente, M.T. y B. García-Lupión (2006). El portafolios del alumnado: una investigación-acción en el aula universitaria. *Revista de Educación*, 341, 737-756.

Roé, R.A. (2002). What makes a competent psycologist? *European Psycologist*, 7, 192-202.

Sáenz Castro, C. (2001). Una nueva función formativa: la tutoría telemática. *Tarbiya: Revista de Investigación e Innovación Educativa*, 29, 119-133.

Stainback, W.; Stainback, S. y Moravec, J. (1999). Un currículo para crear aulas inclusivas. En S. Stainback y W. Stainback (Eds.). *Aulas inclusivas* (pp. 83-101). Madrid: Narcea.

Tenorio, A.F. (2008). Propuesta de actividades con calculadora gráfica para el tratamiento de operaciones matriciales en el aula. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15, 171-190.

Tenorio, A.F. (2010). Resolución de problemas asistida por software matemático: evaluando conocimientos y procedimientos en el alumnado. En *Actas VI Congreso Internacional de Docencia e Innovación Universitaria* (23pp.). Barcelona: Universitat Politecnica de Catalunya.

Tenorio, A.F.; Paralera, C. y Martín, A.M. (2010). Evaluación mediante competencias digitales: una experiencia con Mathematica. *Epsilón: Revista de la SAEM THALES*, 75, 123-136.

Ángel F. Tenorio Villalón. Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla y Doctor por esa misma universidad. Actualmente es Profesor Contratado Doctor en la Universidad Pablo de Olavide y miembro de la Junta Directiva Provincial de la S.A.E.M. THALES en Sevilla, de la cual ha sido Secretario y Delegado Provincial. Sus publicaciones son referentes a la Teoría de Lie, la Historia de las Matemáticas y la metodología ECTS en las universidades españolas.

Eva Oliver García. Licenciada en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Actualmente es Profesora Asociada en la Universidad Pablo de Olavide. Ha realizado varias contribuciones a congresos en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas en el ámbito de la docencia universitaria.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 59-84
ISSN: 1815-0640

Enseñanza de la Geometría en Secundaria. Caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas

Silvia Villarroel, Natalia Sgreccia

Resumen

En este trabajo se caracterizan los materiales didácticos concretos para enseñar Geometría en primer año de la Educación Secundaria (alumnos de 13 años de edad) y se reconocen habilidades geométricas que el uso de tales materiales permite desarrollar. Se identifican siete grandes grupos de materiales: modelos fijos 2D y 3D, rompecabezas geométricos, tangram, geoplano, transformaciones dinámicas, origami o papiroflexia y objetos del entorno real. Dependiendo de la intencionalidad didáctica, pueden a su vez identificarse nueve criterios de agrupamiento: cualidad, materia prima, disponibilidad, movilidad, dimensión, contenidos conceptuales, modelo de razonamiento, habilidades geométricas y versatilidad. Se concluye que una utilización especialmente pensada de materiales didácticos concretos puede favorecer el desarrollo de habilidades geométricas.

Abstract

In this paper we characterize the didactical concrete materials for teaching Geometry in the first year of secondary school (pupils of 13 years old) and we recognize the geometrical skills that such materials allow to develop. Seven groups of materials are identified: 2D and 3D fixed models, geometrical puzzles, tangram, geoboard, dynamical transformations, origami and objects of the real environment. Depending on the didactical intention, it is possible to identify other nine criterions of grouping: quality, prime matter, availability, mobility, dimension, conceptual contents, model of reasoning, geometrical skills and versatility. We conclude that a specially thought use of didactical concrete materials may contribute to develop geometrical skills.

Resumo

Neste trabalho se caracterizam materiais didáticos concretos para ensinar Geometria no primeiro ano do Ensino Médio (alunos de 13 anos de idade) e se reconhecem habilidades geométricas que o uso desses materiais permite desenvolver. São identificados sete grandes grupos de materiais: modelos fixos em 2D e em 3D, quebra-cabeças geométricos, tangram, geoboard, transformações dinâmicas, origami ou papiroflexia e objetos do ambiente real. Dependendo da intenção didática, podem se identificar nove critérios de agrupamento: qualidade, matéria-prima, disponibilidade, mobilidade, dimensão, conteúdos conceituais, modelo de raciocínio, habilidades geométricas e versatilidade. Conclui-se que uma utilização especialmente pensada de materiais didáticos concretos pode favorecer o desenvolvimento de habilidades geométricas

1. Introducción

En este artículo se presentan los materiales existentes en el mercado y aquellos que, sin ser comercializados, pueden realizar importantes aportes cuando se los utiliza en las clases de Geometría de 1° Año de la Educación Secundaria (alumnos de 13 años de edad). Además se identifican las habilidades geométricas que la utilización de dichos materiales puede favorecer a desarrollar.

Se pretende aportar al reconocimiento del potencial didáctico de los materiales didácticos concretos y propiciar así una difusión fundamentada de los mismos.

Cuatro son los conceptos teóricos clave a los que se hará referencia en este trabajo:

- <u>Contenidos geométricos</u>: A fin de organizar el tratamiento de los contenidos conceptuales citados en el Diseño Curricular Jurisdiccional vigente en Argentina (Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, 1999) mediante el uso de materiales didácticos concretos, se consideran los siguientes: Posiciones entre rectas y planos; Sistemas de referencia para la ubicación de puntos en el plano; Cuerpos poliedros y redondos; Ángulos; Lugares geométricos -Circunferencia y círculo, Mediatriz y bisectriz, Alturas y medianas-; Polígonos; Transformaciones; Teorema de Thales; Semejanza.
- <u>Habilidades geométricas</u>: Según Hoffer (1981), las habilidades básicas que una buena enseñanza de la Geometría debería ayudar a desarrollar son clasificadas en cinco: Visuales; De comunicación; De dibujo y construcción; Lógicas o de razonamiento; De aplicación o transferencia.
- <u>Materiales didácticos concretos</u>: Se entiende por materiales didácticos concretos a todos aquellos objetos usados por el profesor o los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática con el fin de lograr ciertos objetivos específicos (Alsina, Burgués y Fortuny, 1988). Cabe aclarar que no se considerarán a los instrumentos de dibujo geométrico de uso elemental (regla, compás), ya que los mismos merecen un tratamiento en particular.
- <u>Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje</u>: Van Hiele (1986) asocia el razonamiento geométrico con un proceso inductivo en cinco niveles, coherente con la construcción del espacio, cuyo respeto posibilita un aprendizaje significativo y gradual: 1. Visualización; 2. Análisis; 3. Deducción informal; 4. Deducción formal; 5. Rigor. Las fases de enseñanza/aprendizaje a las que alude este autor se refieren a las directrices para que los profesores puedan ayudar a sus alumnos a subir al siguiente nivel de razonamiento. Se trata de etapas en la graduación y organización de las actividades propuestas para tal fin y son cinco: 1. Información/Indagación; 2. Orientación dirigida; 3. Explicitación; 4. Orientación libre; 5. Integración.

2. Registro de materiales didácticos concretos

Metodológicamente, se realizó un recorrido por variadas fuentes de información provenientes de Iberoamérica. Para el procesamiento se construyeron tres dimensiones de análisis, cada una con tres categorías:

Tabla 1. Dimensiones y categorías de análisis para el Registro de materiales didácticos concretos

Dimensiones	Categorías
Descripción del material. Caracterización y composición del material	Características generales
	Variantes/Integrantes
	Construcción y accesibilidad
Interés didáctico-matemático. Aporte a la Educación Matemática que cada material puede realizar	Contenidos geométricos
	Habilidades geométricas
	Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje
Versatilidad del material. Flexibilidad del material, su aplicación y/o adaptación a niveles más avanzados del aprendizaje	Adaptación a diversos contenidos geométricos
	Vinculación con otros ejes del área
	Uso en otros niveles de escolaridad

A continuación se detalla el *Registro de materiales didácticos concretos* identificado, abarcando siete grandes grupos de materiales. Para ejemplos de actividades para el aula sugerimos consultar Villarroel y Sgreccia (2011).

2.1. Modelos fijos 2D Y 3D

2.1.1. Descripción del material

Características generales:

Permiten acercarse a conceptos y habilidades geométricas mediante su carácter fijo o estático. Son considerados como referentes, en su correspondiente dimensión, permitiendo la incorporación de contenidos y las relaciones entre ellos. Favorecen la formación de representaciones mentales, facilitando la ejemplificación de las ideas matemáticas y permitiendo la modelización de situaciones u objetos del entorno.

Variantes/Integrantes:

a. *Bloques lógicos de Dienes* (Fig. 1): Se considera como su creador a William Hull (1882-1952) por ser el primero en utilizarlos, tal como lo reconociera el matemático húngaro Zoltan Paul Dienes (1916-…). Este último fue quien los difundió. Este material está compuesto por 48 piezas de diferentes figuras planas (cuadrados, triángulos equiláteros, círculos y rectángulos) de diferentes colores (rojo, azul y amarillo), grosor (grueso y delgado) y tamaño (grande y pequeño). Es conocido también con el nombre de bloques multibase.

b. *Cuerpos geométricos rígidos* (Fig. 2): Son modelos de cuerpos espaciales, como poliedros y redondos. Según el modo en que estén fabricados, es posible analizar diferentes propiedades, como por ejemplo en los cuerpos de plástico transparente o acrílico aparecen sus secciones planas.

Figura 1

Figura 2

Construcción y accesibilidad:

Los Bloques lógicos pueden ser fabricados por el docente o los alumnos, en cartón o algún papel con bastante rigidez como la cartulina, también pueden ser construidos en madera o goma eva o conseguirse en el mercado de plástico o acrílico. Los cuerpos geométricos rígidos pueden conseguirse en madera, plástico, telgopor o acrílico. En el caso de no contar con ellos, pueden utilizarse objetos que estén al alcance del alumno, como latas de conserva, cajas de medicamentos, golosinas, etc., los cuales pueden utilizarse con los mismos fines. Por ello, tanto unos como otros son de muy fácil acceso.

2.1.2. Interés didáctico-matemático

Contenidos geométricos:

Bloques lógicos de Dienes: Reconocimiento de figuras planas y sus elementos; Clasificación de los bloques de acuerdo a algún criterio específico; Establecimiento de relaciones entre las piezas; Comparación de áreas y perímetros; Relaciones de equivalencias de áreas y perímetros; Cubrimiento del plano mediante teselaciones.

Cuerpos geométricos rígidos: Presentación de los cuerpos espaciales más importantes; Estudio de las propiedades geométricas y sus relaciones: lados, ángulos, secciones, diagonales, etc.; Comparación de volúmenes; Construcción de desarrollos planos en papel; Estudio de las sombras de cuerpos sobre una pantalla empleando un foco luminoso; Armado de distintas clasificaciones; Obtención de nuevos poliedros a partir de poliedros dados, considerándose, por ejemplo, como vértices del nuevo poliedro los baricentros de las caras del poliedro dado; Análisis de las simetrías de cuerpos espaciales.

Habilidades geométricas:

Las *habilidades visuales* que desarrollan son: coordinación visomotora, percepción figura-fondo, constancia perceptual, percepción de la posición en el espacio y de relaciones espaciales entre objetos, discriminación visual y memoria visual.

Las *habilidades de dibujo y construcción* que fomentan son: representación de figuras o cuerpos, reproducción a partir de modelos dados, construcción sobre la base de datos dados en forma oral, escrita o gráfica.

Las *habilidades de comunicación* que promueve son: interpretación de información geométrica y socialización de dicha información, en forma oral o escrita.

Las *habilidades de razonamiento* que anima son: invención, imaginación e intuición de situaciones, así como exploración y descubrimiento de conceptos, regularidades y relaciones.

Las *habilidades de aplicación o transferencia* que promueve son: sensibilización geométrica, representación, descripción y explicación de ideas en términos geométricos, y análisis de representaciones geométricas.

Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje:

Son de gran importancia en alumnos que se encuentran en el nivel 1 o 2, ya que durante su tránsito hacia niveles superiores necesitan referirse a imágenes visuales para, por ejemplo, caracterizar las figuras. Pueden utilizarse en las fases de información u orientación dirigida, ya que funcionan como ilustrativos de los conceptos, y su manipulación favorece la incorporación de conceptos y la exploración de los mismos.

2.1.3. Versatilidad del material

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Favorecen principalmente el desarrollo de las nociones geométricas elementales y las propiedades básicas. No obstante, sin desmerecer tamaña importancia, presentan limitaciones para favorecer la incorporación de conceptos más complejos, como por ejemplo la interpretación o demostración de teoremas.

Vinculación con otros ejes del área: Existe vinculación con el eje Medidas al permitir, por ejemplo, el establecimiento de equivalencias entre áreas y perímetros o la comparación de volúmenes.

Uso en otros niveles de escolaridad: Debido a la simplicidad de sus características y a la importancia en la formación de las nociones básicas, pueden ser aplicados desde el nivel inicial, pasando por el nivel primario, pero no más allá de los primeros años de la escolaridad secundaria. Esto se debe a que su utilización no necesariamente favorece el desarrollo del pensamiento lógico formal.

2.2. Rompecabezas geométricos

2.2.1. Descripción del material

Características generales: Son figuras geométricas multidimensionales compuestas por la conjunción, sin superposición, de varias piezas (en una cantidad finita). Se pueden considerar distintos tipos de rompecabezas geométricos: *por unión* -dadas las piezas se compone una figura o un cuerpo- o *por disección* -implica cortar de manera específica para obtener otras-.

Variantes/Integrantes: Por la amplia variedad que existe de este tipo de materiales, se han considerado sólo algunos ejemplos. Además uno de ellos, el Tangram, incluido en el segundo tipo, se ha desarrollado en forma separada debido a la riqueza histórico-cultural que presenta, a la diversidad dentro de sí mismo que se puede encontrar y, por qué no decirlo, a su popularidad.

2.2.2. Rompecabezas geométricos por unión

a. *Poliominós y poliamantes* (Fig. 3): Son polígonos construidos por la unión de cuadrados unitarios a lo largo de, por lo menos, uno de sus lados, de modo tal que no queden huecos en la estructura resultante. Se consideran poliominós diferentes a aquellos que no pueden obtenerse de otro dado, por rotación o reflexión. Los poliamantes se diseñan respetando las mismas propiedades que los anteriores pero utilizando en su construcción triángulos equiláteros.

b. *Rompecabezas de la T, de la H, de la casita o la cruz griega* (Fig. 4): Son de pocas piezas y sus formas son sencillas. Por ejemplo, en la Fig. 4 se pueden observar tres piezas convexas (un paralelogramo rectángulo, un triángulo isósceles y un pentágono irregular) y dos piezas cóncavas (un pentágono y un hexágono, ambos irregulares).

c. *Rompecabezas de las cuatro T* (Fig. 5): Está formado por cuatro piezas en forma de T, las cuales deben encajarse en dos recintos cuadrados de diferente tamaño. Las soluciones para el recinto de mayor tamaño son varias; en cambio, para el recinto menor existe sólo una solución.

d. *Rompecabezas de piezas idénticas* (Fig. 6): Dentro de este tipo se encuentran los conocidos con el nombre de IZZI e IZZI 2. El primero de ellos está formado por 64 piezas cuadradas, cada una de ellas divididas de diferente manera en regiones blancas y negras. El objetivo es ubicar las piezas dentro de un cuadrado de 8 x 8 piezas, de modo tal que los bordes por los que se unen las piezas sean del mismo color: blanco toca blanco y negro toca negro. El IZZI 2 está compuesto por 12 piezas en forma de rombo, cada una de ellas divididas en cuatro regiones de diferente color (rojo, verde, amarillo y azul). El objetivo es formar un hexágono ubicando las 12 piezas de tal manera que los bordes por los que se unen sean del mismo color. Otros ejemplos de este tipo de rompecabezas son el Q-Pak, el cual está formado por 8 triángulos rectángulos isósceles, y el Crack formado por 4 cuadriláteros idénticos con un único ángulo recto. En estos últimos el objetivo es crear diferentes figuras geométricas, símbolos, etc., utilizando todas las piezas.

e. *Cubos y policubos* (Fig. 7): Por cubo se considera al correspondiente cuerpo geométrico de arista unitaria. En algunas ocasiones, presenta la posibilidad de encastrarlos dando origen a los policubos. Estos podrían considerarse como el equivalente en el espacio de los poliominós. Pueden obtenerse como una sola pieza o bien por apilamiento de cubos unitarios.

Se pueden considerar diferentes colecciones de agrupaciones de cubos, entre ellas una de las más conocidas es el cubo Soma (Fig. 8), formado por siete agrupaciones (un tricubo y seis tetracubos), diseñado por el danés Piet Hein (1905-1997) en el año 1936. El objetivo de este rompecabezas es colocar las piezas de manera que todas juntas formen un cubo.

Otro rompecabezas muy famoso es el cubo de Rubik o cubo mágico (Fig. 9), inventado por el húngaro Ernö Rubik (1944-…) en 1974, el cual está formado por un conjunto (finito) de cubos. En el cubo típico cada una de sus seis caras está dividida en nueve partes iguales, lo que conforma 26 piezas (3x3x3 -1, no hay pieza central), unidos por un mecanismo ubicado en el lugar de la pieza central, que permite cambiarlos de posición. En cada uno de los cubos que lo componen, las caras son de un color diferente (hay cubos que tienen más de una cara coloreada). Cuando el cubo de Rubik está resuelto (como el de la Fig. 9), cada cara está construida por partes de un único color.


Figura 3

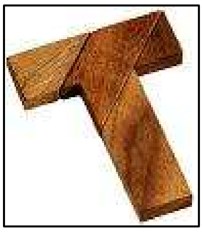


Figura 4


Figura 5

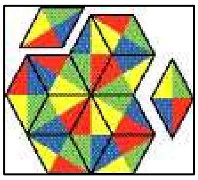


Figura 6


Figura 7

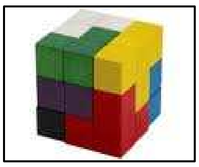


Figura 8

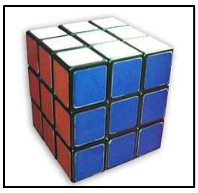


Figura 9

2.2.3. Rompecabezas geométricos por disección

a. *Demostraciones dinámicas* (Fig. 10): Las piezas colocadas de diferentes maneras demuestran un teorema. Por ejemplo, cuatro triángulos rectángulos idénticos de catetos b, c e hipotenusa a, y tres cuadrados de lados respectivos a, b y c permiten la demostración del teorema de Pitágoras.

b. *Rompecabezas de mosaicos de Van Hiele* (Fig. 11): Formado por siete piezas, cuatro de ellas son triángulos y las restantes tres son cuadriláteros. Todas ellas, dispuestas en su posición inicial, forman un rectángulo.

c. *Rompecabezas por cuadratura* (Fig. 12): Se considera como cuadratura a las divisiones que hay que realizar en una figura plana (por ejemplo, un polígono regular) de forma que, con las piezas obtenidas, pueda construirse un cuadrado. La cuadratura más conocida es la del triángulo equilátero, pero se pueden encontrar rompecabezas por cuadratura en base a pentágonos, octógonos y hexágonos.

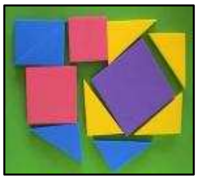


Figura 10

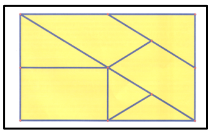


Figura11

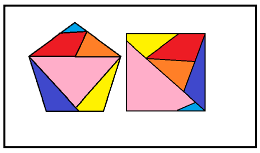


Figura 12

<u>Construcción y accesibilidad</u>: Dependiendo del uso que de los mismos se realice, los rompecabezas pueden fabricarse, por el docente o el alumno, en cartón, papel, cartulina, madera, goma eva; o bien, conseguirse en el mercado, fabricados de plástico.

2.2.4. Interés didáctico-matemático

<u>Contenidos geométricos</u>:

Poliominós y poliamantes: Generación de formas distintas a partir de un número fijo de piezas; Interpretación de formas compuestas, como desarrollos planos de poliedros; Estudio de polígonos semejantes, relaciones entre lados correspondientes y entre áreas; Clasificación de formas cóncavas y convexas; Determinación del número máximo de ángulos cóncavos y, por lo tanto, del número mínimo de ángulos convexos; Estudio de polígonos isoperimétricos y equivalentes; Algoritmo de cálculo de áreas a partir de la descomposición en formas más sencillas o por transformación en polígonos equivalentes; Resolución de problemas de recubrimiento o teselaciones del plano.

Rompecabezas de la T, de la H, de la casita ó la cruz griega: Identificación de figuras cóncavas y convexas; Multidireccionalidad, trascendiendo lo horizontal-vertical.

Rompecabezas de las cuatro T: Multidireccionalidad, trascendiendo lo horizontal-vertical; Cubrimiento del espacio.

Rompecabezas de piezas idénticas: Construcción de figuras simétricas y utilización de la simetría para resolver el rompecabezas; Resolución de problemas combinatorios; Cubrimiento del espacio.

Cubos y policubos: Construcción de poliedros equivalentes por superposición de cubos; Empaquetamiento del espacio con cubos o con diferentes policubos; Descripción aproximada de superficies; Generación combinatoria de formas hechas con un número fijo de cubos; Representaciones isométricas de distintas agrupaciones de cubos; Relación y conservación de área/volumen; Medida y cálculo de volúmenes aproximados empleando cubos; Experimentación de las distintas posiciones en el espacio y descripción de los movimientos generados; Trabajo con las proyecciones ortogonales y los planos de simetría; Estudio de las simetrías del cubo; Estudio de rotaciones espaciales y sus combinaciones.

Demostraciones dinámicas: Realización de demostraciones geométricas basadas en la equivalencia de áreas; Construcción de materiales para "demostrar" otras propiedades, como por ejemplo el cuadrado o cubo de un binomio.

Rompecabezas de mosaicos de Van Hiele: Generación de formas distintas a partir de un número fijo de piezas; Composición y descomposición de diferentes polígonos; Medición de áreas utilizando la pieza menor; Ordenamiento de piezas por áreas; Relaciones de adición y sustracción entre piezas; Composición de distintos polígonos, fijado un número de piezas, y observación de sus características; Realización de diferentes clasificaciones (figuras isoperimétricas, equisuperficiales, simétricas antisimétricas, etc.); Convexidad y concavidad de figuras; Estudio de figuras semejantes; Estudio de las relaciones de proporcionalidad entre piezas.

Rompecabezas por cuadratura: Relaciones de adición y sustracción entre piezas; Estudio de ángulos mediante la clasificación, comparación, ordenación, suma e igualdad; Generación de un cuadrado o el polígono del cual deriva (triángulo equilátero, pentágono, hexágono u octógono), a partir de la composición de diferentes piezas; Estudio de polígonos con igual área pero distinto perímetro.

Habilidades geométricas: Coinciden con las que pueden desarrollar los distintos tipos de Tangram (que se presentan más adelante), ya que los mismos están incluidos en este grupo de materiales.

Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje: Pueden ser aplicados en los primeros tres niveles de razonamiento. Las actividades propuestas pueden adaptarse tanto a alumnos que manejen únicamente información visual (nivel 1) como a aquellos que empiezan a reconocer la presencia de propiedades geométricas en los objetos (nivel 2) o que comienzan a clasificar y a desarrollar un razonamiento más riguroso (nivel 3). Tienen dos propiedades: son estimuladores de la actividad intelectual y generadores de problemas debido a su carácter lúdico. Por ello, además de entretener, pueden ser utilizados por los docentes para: visualizar formas y propiedades contribuyendo a mejorar las representaciones mentales (fase 1), explorar las formas resolviendo actividades y problemas propuestos por el docente (fase 2), incrementar el vocabulario geométrico a través de la ejercitación de descripciones (fase 3), aplicar y combinar los conocimientos adquiridos para resolver nuevas actividades (fase 4) y probar propiedades geométricas y métricas encerradas en ellos mismos (fase 5).

2.2.5. Versatilidad del material

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Posibilita el tratamiento de varios contenidos geométricos, en su mayoría relacionados con el plano, aunque algunos de ellos, como los cubos y policubos o el cubo Soma o de Rubik, pueden ser utilizados para abordar contenidos de la Geometría tridimensional.

Vinculación con otros ejes del área: Pueden establecerse vinculaciones con el eje: Estadística y Probabilidades al generar, por ejemplo, formas distintas a partir de un número fijo de piezas; Medidas al estudiar, entre otras cosas, los polígonos isoperimétricos o equisuperficiales; Números y Operaciones al realizar cálculos de, por ejemplo, áreas y volúmenes.

Uso en otros niveles de escolaridad: Este material puede ser utilizado en cualquier nivel, ya que los rompecabezas son fundamentales para el desarrollo de muchas habilidades, no solamente geométricas. Sin embargo, los que aquí se presentan están orientados a alumnos de los últimos años del nivel primario o que cursen el nivel secundario.

2.3. Tangram

2.3.1. Descripción del material

Características generales: Es un rompecabezas formado por un conjunto de piezas poligonales, conocidas con el nombre de tans, que se obtienen al diseccionar una figura plana. Su finalidad es la disposición de las piezas para formar diferentes siluetas. Tales figuras se conocen con el nombre de tangramas. Al hacerlo, las piezas no deben superponerse entre sí y deben utilizarse en su totalidad. Este rompecabezas es fundamentalmente planimétrico, exceptuando el caso particular del tangram espacial.

Variantes/Integrantes:

a. *Tangram Chino* (Fig. 13): Es muy antiguo, no se sabe con certeza quién lo creó pero se cree que es originario de China, donde se lo conoce con el nombre de *"Chi Chiao Pan*" que significa "juego de los siete elementos" o "tabla de la sabiduría". También es conocido con el nombre de Tangram tradicional. Está formado por siete piezas: un cuadrado, cinco triángulos rectángulos de diferentes tamaños y un paralelogramo. Estas piezas se originan a partir de la disección de un cuadrado. Entre ellas existen algunas de distinta forma con la misma superficie, por ejemplo el cuadrado y el triángulo rectángulo mediano y/o el paralelogramo.

b. *Tangram de Fletcher* (Fig. 14): Está formado por siete piezas (dos cuadrados de distinto tamaño, cuatro triángulos rectángulos -dos a dos de igual tamaño- y un paralelogramo). Estas piezas se originan a partir de la disección de un cuadrado. Algunas de ellas, como por ejemplo el triángulo rectángulo grande y el cuadrado pequeño, tienen la misma superficie pero -claro está- distinta forma.

c. *CardioTangram* (Fig. 15): Su nombre se origina por la ubicación inicial en que se disponen las piezas, la cual tiene forma de corazón. Está compuesto por nueve piezas: un cuadrado, un triángulo rectángulo, un paralelogramo, un trapecio y cinco sectores circulares de diferentes tamaños (tres sectores circulares correspondientes a un ángulo recto y dos sectores circulares correspondientes a un ángulo de 45º).

d. *Tangram hexagonal* (Fig. 16): Obtenido a partir de la disección de un hexágono regular, lo que da origen a su nombre. Está formado por seis piezas: dos rombos de distinto tamaño, dos triángulos equiláteros de diferente tamaño, un trapecio y un hexágono regular. Cada una de las piezas contiene una cantidad entera de veces al triángulo de menor área. Este hecho puede ser utilizado como herramienta para su construcción.

e. *Tangram pentagonal* (Fig. 17): También conocido como pentagrama, debido a que sus piezas se originan por la disección de un pentágono regular. Está formado por siete triángulos: dos de ellos son congruentes entre sí, un triángulo isósceles y los demás son triángulos semejantes entre sí, dado que están contenidos entre rectas paralelas cortadas por dos secantes.

f. *Tangram triangular* (Fig. 18): Está formado por ocho piezas (dos triángulos equiláteros, dos rombos, tres trapecios isósceles y un hexágono regular), que resultan de hacer cortes especiales en un triángulo equilátero. Tiene la particularidad de que todas sus piezas son de diferente tamaño. A pesar de ello, todas contienen una cantidad entera de veces al triángulo equilátero de menor tamaño. Este hecho puede ser utilizado como herramienta para su construcción.

g. *Tangram de Lloyd* (Fig. 19): Se obtiene a partir de la disección de un cuadrado en cinco piezas (un cuadrado, un triángulo rectángulo, un triángulo escaleno, un trapecio y un polígono cóncavo). Se puede observar que todas sus piezas tienen diferente forma y tamaño. El nombre se debe a su inventor, el estadounidense Samuel Lloyd (1841-1911).

h. *Tangram pitagórico* (Fig. 20): Se construye por una disección de un rectángulo de 4 x 5 unidades. Este procedimiento da origen a siete piezas: dos triángulos rectángulos de igual tamaño, cuatro trapecios rectángulos (dos de los cuales son congruentes entre sí) y un pentágono.

i. *Tangram de Brügner* (Fig. 21): Se forma por la disección de un rectángulo en tres triángulos rectángulos semejantes. Fue diseñado de manera tal que se optimice la cantidad de polígonos convexos que puedan construirse. Por ello se lo conoce con el nombre de tangram mínimo. Fue inventado por el alemán Georg Brügner en 1984. Su creador mostró que con las tres piezas que lo forman es posible construir 16 polígonos convexos, mientras que con las siete piezas del tangram tradicional (chino) sólo pueden formarse 13 figuras convexas.

j. *Stomachion* (Fig. 22): Conocido también como Loculus Archimedius -el cuadrado o caja de Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.)-, en honor a su creador, aunque no es seguro que él lo haya creado, o también como Syntemachion. Consiste en la disección de un cuadrado en 14 piezas poligonales: once triángulos, dos cuadriláteros y un pentágono.

k. *Tangram ovoide* (Fig. 23): Es conocido, también, con el nombre de ovotangram o tangram del huevo. Se origina a partir de la disección de un ovoide. Está compuesto por nueve piezas: dos triángulos isósceles curvos -se llama triángulo isósceles curvo a aquel que tiene dos lados rectos iguales y el tercero es un arco de circunferencia cuyo centro es el vértice opuesto a dicho lado-, dos triángulos rectángulos curvos, dos triángulos rectángulos grandes y uno pequeño, y dos trapecios curvos.

l. *Tangram espacial* (Fig. 24): Es la representación en tres dimensiones del tangram chino en una de las caras (y su opuesta) de un cubo. Está formado por siete prismas rectos (cinco de base triangular y dos de base cuadrangular), originados por cortes ortogonales del cubo sobre una de sus caras.

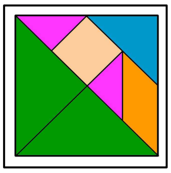


Figura 13

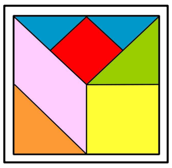


Figura 14

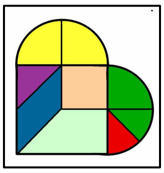


Figura 15

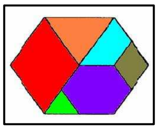


Figura 16

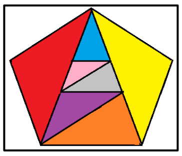


Figura 17

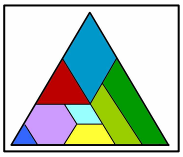


Figura 18

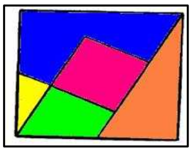


Figura 19

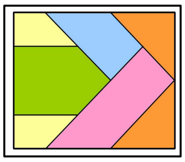


Figura 20

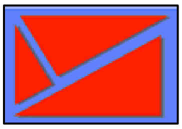


Figura 21

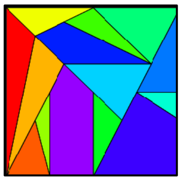


Figura 22

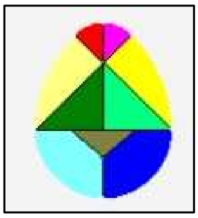


Figura 23

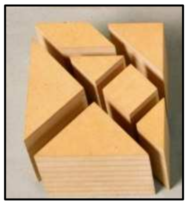


Figura 24

Construcción y accesibilidad: Para construirlos, se requieren conocimientos geométricos básicos y pueden emplearse diversos materiales, como ser: madera, plástico, cartón, cartulina, papel, goma eva. Debido a esto, puede ser fabricado por el docente y/o los alumnos a muy bajo costo.

2.3.2. Interés didáctico-matemático

Contenidos geométricos:

Tangram Chino y Tangram de Lloyd: Comprobación del teorema de Pitágoras.

CardioTangram: Composición y descomposición de diferentes polígonos o figuras circulares; Estudio de las nociones de radio, diámetro, cuerda y ángulos en el círculo.

Tangram pentagonal: Comprobación de relaciones con el número de oro.

Tangram de Brügner: Estudio de figuras semejantes, especialmente de triángulos; Estudio del número de oro a través de las relaciones que se dan entre las piezas.

Tangram ovoide: Cálculo de área y perímetro de figuras sencillas, considerando entre ellas figuras circulares.

Tangram espacial: En este caso se pueden trabajar todas las nociones comunes a los demás, pero considerando su ampliación a la tercera dimensión. Particularmente, es posible la comprobación del teorema de Pitágoras en tres dimensiones.

Habilidades geométricas:

Las *habilidades visuales* que permite desarrollar son: coordinación visomotora, percepción figura-fondo, constancia perceptual o de forma, tamaño y posición; percepción de la posición en el espacio y de relaciones espaciales entre objetos, discriminación y memoria visual.

Las *habilidades de dibujo y construcción* que promueve son: reproducción y construcción a partir de modelos y datos dados en forma oral, escrita o gráfica.

Las *habilidades de comunicación* que fomenta son las relacionadas con la interpretación y socialización de información geométrica.

Las *habilidades de razonamiento* que anima son: invención, imaginación e intuición de situaciones, exploración y descubrimiento de conceptos y regularidades.

Las *habilidades de aplicación o transferencia* que promueve son: indagación de propiedades de modelos y conceptos, representación, descripción y explicación de distintos fenómenos físicos mediante modelos geométricos.

Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/enseñanza: Puede implementarse con alumnos cuyo razonamiento se encuentre en los niveles 1, 2 y 3. Los alumnos pueden, por ejemplo, percibir figuras geométricas en su totalidad, descubrir las partes que las forman, usar las representaciones gráficas como una forma de verificar deducciones o teoremas, como el teorema de Pitágoras.

Debido a la gran cantidad de variantes que presenta el Tangram, puede ser utilizado en varias fases. Por ejemplo, durante la fase de información puede usarse, entre otras cosas, para introducir vocabulario; en la fase de orientación dirigida los alumnos pueden explorar conceptos y propiedades y en la de explicitación pueden expresar e intercambiar observaciones realizadas mediante su manipulación.

2.3.3. Versatilidad del material

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Permite el tratamiento de varios contenidos geométricos: posiciones de rectas, ángulos, polígonos, simetrías, congruencia y semejanza de figuras, teorema de Pitágoras, poliedros, circunferencia y círculo, etc. Si bien la mayoría de las variantes corresponden a representaciones en el plano (existe sólo un tangram en tres dimensiones -el espacial-), su utilización favorece el trabajo en ambas dimensiones debido a que pueden trabajarse los mismos conceptos convenientemente.

Vinculación con otros ejes del área: Tiene gran vinculación con el eje Medida ya que posibilita el tratamiento de conceptos tales como perímetro, área y volumen. También puede vincularse con el eje Números y Operaciones debido a que permite el estudio de números racionales e irracionales.

Uso en otros niveles de escolaridad: Puede ser aplicado en los últimos años de la escolaridad primaria y en los primeros años de la escolaridad secundaria. En niveles educativos posteriores, la utilización de este material didáctico es relativa, ya que su empleo no promueve el suficiente rigor que se requiere en tales niveles.

2.4. Geoplano

2.4.1. Descripción del material

Características generales: Tablero de madera o material similar de forma cuadrada en el que se distribuye una cierta cantidad de clavos de cabeza plana, clavados parcialmente y equidistantes entre sí. Se acompaña con bandas elásticas de distintos tamaños y colores. La variedad de colores ayuda a diferenciar líneas, permite superponer e inscribir figuras, señalar ejes de simetría, etc. Además supone una motivación para los alumnos. La diversidad de tamaños de las bandas es imprescindible, ya que pueden utilizarse varias bandas para cada representación o bien formar la figura con una sola banda. Algunas veces puede usarse hilo o algún material similar que no se estire, por ejemplo, para construir distintos polígonos con perímetro constante.

Variantes/Integrantes: La disposición de los clavos puede ser en forma (Fig. 25):

a. *Cuadrada u ortogonal*: geoplano cuadrado u ortogonal.

b. *Triangular o isométrica*: geoplano triangular o isométrico.

c. *Circular*: geoplano circular.

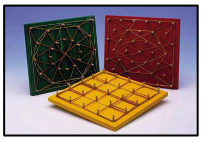


Figura 25

Construcción y accesibilidad: Puede ser confeccionado por el docente y los alumnos bajo la supervisión de un adulto. Su costo es relativamente económico y para llevar a cabo dicha construcción se ponen en juego conocimientos matemáticos. También pueden construirse geoplanos en papel. Estos son mallas o tramas puntuales ortogonales, isométricas o circulares sobre las que se realizan trazos uniendo los distintos puntos en lápiz negro, lápices de colores y/o lapicera. En estos últimos, al realizar un trazo no puede ser modificado rápidamente como sí lo permiten las bandas elásticas o los hilos, en el de madera, por lo cual esta característica se presenta como una desventaja de los geoplanos de papel. Sin embargo, puede suplirse proveyendo a los alumnos de varios ejemplares en los cuales puedan realizar sus construcciones y así poder compararlas.

2.4.2. Interés didáctico-matemático

Contenidos geométricos:

Geoplano cuadrado u ortogonal: Cálculo de la distancia entre dos puntos; Utilización de coordenadas cartesianas enteras; Gráficas; Diseño y obtención de mosaicos a partir de uno dado; Comprobación del teorema de Pitágoras y del de Thales

Geoplano Triangular o Isométrico: Estudio de poliedros; Identificación de caras, aristas y vértices; Representación bidimensional de cuerpos desde distintas perspectivas; Estudio de polígonos que incluyen ángulos (interiores o exteriores) de 60°, especialmente de triángulos equiláteros y hexá gonos; Cálculo de la distancia entre dos puntos; Utilización de coordenadas cartesianas enteras; Gráficas; Diseño y obtención de mosaicos a partir de uno dado; Comprobación del teorema de Pitágoras y del de Thales

Geoplano Circular: Estudio de circunferencia y círculo; Identificación de radio, diámetro, cuerdas, rectas tangentes y secantes; Determinación de circunferencias interiores, exteriores, tangentes y secantes; Identificación de ángulos en una circunferencia: centrales, inscriptos y semi-inscriptos; Estudio de polígonos inscriptos, circunscriptos y estrellados; Determinación de la congruencia de polígonos y figuras circulares.

Habilidades geométricas:

Las *habilidades visuales* que desarrollan son: coordinación visomotora, percepción figura-fondo, constancia perceptual o de forma, tamaño y posición, percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales entre objetos, discriminación visual.

Las *habilidades de dibujo y construcción* que fomenta son: reproducción a partir de modelos dados y construcción de figuras que cumplan determinadas propiedades.

Las *habilidades de comunicación* que anima son: interpretación y socialización de información geométrica, al otorgar significado a los conceptos y describir los procedimientos geométricos realizados.

Las *habilidades de razonamiento* que desarrolla son: invención, imaginación e intuición de situaciones así como exploración y descubrimiento de conceptos, regularidades y relaciones.

Las *habilidades de aplicación o transferencia* que promueve son: interrogación, representación, descripción y explicación, así como análisis de representaciones.

Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje: Puede ser utilizado por alumnos que se encuentren en los niveles 1 y 2 de razonamiento geométrico. Esto se debe a que mediante su utilización, el alumno podrá aprender vocabulario geométrico, identificar determinadas formas dentro de un conjunto y reproducirlas. Además podrá reconocer, informalmente, las propiedades esenciales de las figuras mediante la observación y la experimentación con dicho material.

Si bien este material puede utilizarse durante la fase de información, se considera más provechoso que el alumno investigue por sí mismo los contenidos, por lo cual se recomienda su uso durante las fases de orientación dirigida y orientación libre. Además, favorece la manipulación de los conceptos y la aplicación de los mismos, por lo que puede ser utilizado en la fase de explicitación.

2.4.3. Versatilidad del material

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Permite el abordaje de gran cantidad de contenidos geométricos: segmentos, poligonales, ángulos, polígonos, isometrías planas, congruencia y semejanza de figuras, teorema de Pitágoras, poliedros, circunferencia y círculo, polígonos inscriptos y circunscriptos, etc. Sin embargo, su uso es particularmente importante en el estudio del plano, ya que solamente el geoplano isométrico permite el abordaje de conceptos relacionados con el espacio.

Vinculación con otros ejes del área: Tiene gran vinculación con el eje Medidas por permitir trabajar los conceptos de perímetro y área. Además se lo puede relacionar con el eje Funciones al posibilitar la ubicación de puntos en el plano cartesiano.

Uso en otros niveles de escolaridad: Es de gran aplicabilidad en el nivel inicial, la escolaridad primaria y en los primeros años de la escolaridad secundaria. Su uso es limitado en niveles educativos posteriores, ya que no necesariamente favorece la profundización/formalización de los contenidos.

2.5. Transformaciones dinámicas

2.5.1. Descripción del material

Características generales: Permiten una aproximación a conceptos y habilidades geométricas relacionadas especialmente con el pasaje de la segunda dimensión (el plano bidimensional) a la tercera dimensión (el espacio tridimensional) mediante el carácter dinámico que los caracteriza. Las figuras geométricas pueden encontrar en estos materiales un buen medio de representación y así recuperar el aprendizaje del espacio tridimensional y de la vinculación entre dimensiones, cuya enseñanza suele relegarse en el nivel secundario.

Variantes/Integrantes:

a. *Poliformas* (Fig. 26): Piezas de cartón o plástico en forma de polígonos regulares de igual lado. Las piezas se pueden engarzar lado con lado haciendo coincidir los vértices por medio de cinta adhesiva y sujetando las pestañas que contienen con bandas elásticas o por medio de adecuados diseños de entrantes y salientes en los correspondientes lados de las piezas.
b. *Varillas de mecano* (Fig. 27): Barras de metal, madera o material similar, con agujeros equidistantes y de diferentes longitudes. Se acompaña de tornillos con tuerca llamados “gancho mariposa”; bandas elásticas que pueden ser de diferentes colores e hilo de distintas longitudes.
c. *Retículas* (Fig. 28): Colección de barras y nudos para conectarlas. El material puede ser plástico, madera o metal. Los nudos pueden ser elásticos, de plástico, alambre, fijos de metal o madera con conectores apropiados para recibir las barras.
d. *Desarrollos planos* (Fig. 29): Cartulina, papel vegetal, cartón o cualquier papel consistente de color uniforme en el cual puedan representarse los desarrollos de los distintos cuerpos geométricos. Para su armado es necesario utilizar goma de pegar o bien, si presentan pestañas, bandas elásticas.


Figura 26


Figura 27

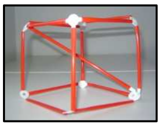


Figura 28


Figura 29

Construcción y accesibilidad: Aunque para la construcción de estos materiales no se requieren materiales costosos o de difícil acceso, debido a los usos que de ellos se hacen, se recomienda adquirir los que se ofrecen en el mercado, excepto en el caso de los desarrollos planos, cuya construcción involucra contenidos geométricos específicos. Para el tratamiento de algunos contenidos, como por ejemplo la clasificación de polígonos, las varillas de mecano pueden ser fabricadas, por el alumno o el docente, en cartón o papel.

2.5.2. Interés didáctico-matemático

Contenidos geométricos:

Poliformas: Generación de todos los posibles ángulos poliédricos cuyas caras son polígonos regulares iguales; Generación de todos los poliedros con caras y vértices congruentes; Comprobación experimental de su existencia; Análisis de sus posibles desarrollos planos; Generación combinatoria de formas poliédricas hechas con más de un tipo de pieza; Clasificación según familias de simetrías; Iniciación en procesos inductivos y deductivos; Descubrimiento de relaciones entre caras, vértices y aristas; Generación de poliedros semirregulares a partir de truncamientos sucesivos de cubos; Validación de la existencia de poliedros convexos ensayando diferentes teorías numéricas; Soluciones de la ecuación de Euler: $C + V – A = 2$; Medidas y cálculos de ángulos diedros y ángulos de las caras.

Varillas de mecano: Estudio de las condiciones fundamentales de construcción de los distintos polígonos; Comprobación de propiedades como la rigidez del triángulo y la deformabilidad de los otros polígonos; Clasificación de polígonos y relaciones entre ellos; Estudio de las características de las figuras: lados, diagonales, alturas, ángulos interiores y exteriores; Construcción de polígonos isoperimétricos; Área máxima y mínima.

Retículas: Construcción de estructuras de poliedros; Visualización de sus relaciones estructurales; Análisis de su estabilidad, rigidez, resistencia, etc.; Diseño de diferentes tipos de mallas enfatizando su rigidez y capacidad de cubrir amplios espacios; Interpretación y diseño de distintos tipos de grafos conectados que representen situaciones reales.

Desarrollos planos: Obtención de modelos de cuerpos espaciales a partir de desarrollos planos; Estudio de los posibles desarrollos planos de un cuerpo sencillo: cubo, ortoedro, pirámide triangular, etc.; Obtención de desarrollos planos a partir de modelos estáticos de cuerpos sencillos; Condiciones que ha de reunir una serie de polígonos adosados para que se pueda construir con ellos un cuerpo espacial; Relación entre el número de aristas, vértices y caras de un poliedro cualquiera.

Habilidades geométricas:

Las *habilidades visuales* que desarrollan son: coordinación visomotora, percepción figura-fondo, constancia perceptual o de forma, tamaño y posición, percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales entre objetos, discriminación y memoria visual.

Las *habilidades de dibujo y construcción* que animan son: representación de figuras o cuerpos, reproducción a partir de modelos dados, construcción sobre la base de datos dados en forma oral, escrita o gráfica.

Las *habilidades de comunicación* que fomentan son: interpretación y socialización de información geométrica.

Las *habilidades de razonamiento* que animan son: invención, imaginación e intuición de situaciones, exploración y descubrimiento de conceptos, regularidades y relaciones.

Las *habilidades de aplicación o transferencia* que promueven son: sensibilización geométrica, interrogación, representación, descripción y explicación de ideas en términos geométricos, además del análisis de representaciones.

Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje: Pueden ser usados por alumnos que se encuentren o transiten por los niveles 1 y 2. Adquieren particular importancia en este segundo nivel, ya que los estudiantes pueden descubrir que las figuras están formadas por partes y que están dotadas de propiedades, además pueden describir cada una de sus partes y utilizar sus propiedades para clasificarlas, etc. De esta manera, aunque la utilización de estos materiales no les permita la deducción ni el establecimiento de relaciones entre las propiedades, colaboran en la formación del razonamiento necesario para superar este estadio y alcanzar uno superior.

El docente puede utilizar cualquiera de estos materiales para orientar a sus alumnos en las diferentes fases. Esto se debe a que su utilización le posibilita obtener información importante respecto al dominio de los conceptos involucrados y al empleo del vocabulario asociado. Además le ayuda a introducir a sus alumnos en el estudio específico, ya sea guiándolos o en forma libre. Le permite favorecer en sus alumnos la integración de los nuevos aprendizajes a su red de conocimientos.

2.5.3. Versatilidad del material

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Al igual que los demás materiales concretos analizados, permite el desarrollo de muchos contenidos geométricos. En este caso es importante destacar la posibilidad que brindan cada una de las variantes de relacionar el plano con el espacio, contribuyendo al desarrollo de la noción espacial de los objetos y a la modelización de los mismos.

Vinculación con otros ejes del área: Puede establecerse vinculación con el eje Medidas, al favorecer el desarrollo de conceptos tales como el cálculo del área máxima y mínima en polígonos isoperimétricos o la medida de ángulos diedros, entre otros. También favorece el desarrollo del pensamiento combinatorio, con lo cual se relaciona con el eje Estadística y Probabilidades.

Uso en otros niveles de escolaridad: El carácter dinámico de este material ofrece la posibilidad de utilizarlo a partir del segundo ciclo del nivel primario; ya que requiere de cierto desarrollo en la motricidad para realizar las construcciones; y puede ser utilizado hasta los primeros años de la Escuela Secundaria. Su aplicabilidad en niveles superiores es limitada, pues el dinamismo que favorece y la colaboración al desarrollo de las habilidades mencionadas, no promueve el rigor requerido en niveles más avanzados del conocimiento.

2.6. Origami o papiroflexia

2.6.1. Descripción del material

Características generales: Es una técnica, o bien un conjunto de técnicas, que permite obtener y representar figuras y cuerpos de diversa complejidad a través del empleo y doblado de papel. Su nombre surge de las palabras oru (doblar) y kami (papel). Esta técnica, en el mundo hispano, es conocida también con el nombre de Papiroflexia. Su origen es múltiple y poco preciso, pero la mayoría de los autores coinciden en centrarlo en Oriente, a comienzos de la era cristiana. En Europa y en América se introdujo hace relativamente pocos años tomando un gran impulso en el siglo pasado.

Variantes/Integrantes: Existen diferentes criterios para la clasificación de las distintas modalidades de Origami. Uno de ellos tiene en cuenta la finalidad del mismo (artístico, educativo, recreativo, etc.); la forma del papel utilizado (papel completo o tiras de papel); la cantidad de piezas implicadas (tradicional o modular); las reglas que utiliza (permitir o no cortes y pegado, usar más de una pieza, etc.).

Otro criterio está relacionado con el método utilizado en esta técnica y la manera en que se obtienen las producciones, dando origen a distintos modelos:

a. *Modelos sin cortes de papel* (Fig. 30): Se denomina también Origami puro o tradicional. Se usan las llamadas “bases clásicas” y únicamente a partir del pliegue como herramienta se obtienen las formas. No se utilizan cortes ni pegados, lo que ocasiona algunas dificultades cuando el desarrollo es muy complicado, ya que el espesor de algunos dobleces puede resultar excesivo, perdiendo así cierta calidad final.

b. *Modelos con cortes de papel* (Fig. 31): Para realizar modelos más complejos o con mayor cantidad de detalles, pueden realizarse algunos cortes al papel. Es muy común realizar desarrollos con cortes cuando se desean lograr detalles tales como

orejas, colas o piernas, o marcar ojos, por ejemplo. Pueden considerarse dos motivos principales por los cuales realizar cortes al papel original: crear nuevas opciones o posibles creaciones y evitar la complejidad que en ocasiones puede acarrear un determinado modelo usando solamente el plegado.
c. *Modelos con apoyo de materiales adicionales* (Fig. 32): Se utilizan materiales adicionales para variar la forma final del modelo, entre los que se incluyen: adhesivo, grapas, sistemas eléctricos para poner en movimiento algún modelo, etc.
d. *Modelos multi-capas* (Fig. 33): Dos ó más hojas de materiales distintos o de colores diferentes se doblan juntas, para crear efectos especiales de capas separadas en el modelo final. Resulta muy usual este modelo en el desarrollo de flores, por ejemplo, ya que se obtiene muy fácilmente el efecto buscado.
e. *Modelos multi-hoja* (Fig. 34): Constan de dos o más hojas, plegadas por separado, que se unen en el modelo final. Cada hoja está destinada a una parte distinta del modelo y sigue diferente desarrollo de doblado. Esas hojas pueden llegar a ser distintas, en cuanto al tipo y/o tamaño.

f. *Modelos desarrollados a partir de módulos* (Fig. 35): Conocido también como Origami Modular. A diferencia del anterior, los desarrollos seguidos en cada pieza unidad o módulo son los mismos para cada una de ellas. Es decir, se obtienen los mismos módulos a partir de cada una de las hojas utilizadas. Una vez realizados estos desarrollos en cada módulo, se unen para alcanzar el producto final. Resultan muy utilizados en la obtención de desarrollos geométricos.
g. *Modelos decorados* (Fig. 36): El papel puede ser decorado antes o después del desarrollo y creación del modelo. Resulta frecuente en los modelos de este tipo utilizar papel de un color de un lado y blanco del otro.
h. *Modelos con técnica de encorvado* (Fig. 37): Entre estas técnicas se incluyen la de mojado del papel (originada por Yoshizawa) y la del moldeado mojando pasta de papel, entre otras. El efecto logrado en el modelo final simula una escultura.

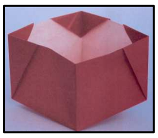


Figura 30

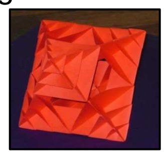


Figura 31

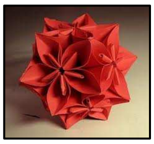


Figura 32


Figura 33


Figura 34

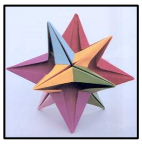


Figura 35


Figura 36


Figura 37

<u>Construcción y accesibilidad</u>: Por tratarse de una técnica, se debe considerar que es necesario conocer los métodos y bases que utiliza. Por ello es preciso destinar cierto tiempo a la adquisición de las destrezas necesarias en el plegado. El recurso indispensable para poner en práctica esta técnica es el papel. El que se comercializa para la papiroflexia es fino y colorido, se parece al papel satinado, pero más liviano. Es algo costoso y no es muy fácil de conseguir. Sin embargo, para uso educativo, se pueden emplear hojas de distintos tipos de papeles que se encuentren al alcance de los alumnos, cuyos tamaños, colores y grosor pueden variar; hasta pueden utilizarse

hojas de desecho. Con esta consideración se puede decir que este material/técnica es muy accesible.

2.6.2. Interés didáctico-matemático

Contenidos geométricos: Aunque existen muchas modalidades de Origami, las más utilizadas con fines didácticos, son la “a”, la “f” y, en menor medida, la “b”. Todas ellas, de un modo u otro, posibilitan la: Ubicación en el espacio, distancias, giros y ángulos con relación a uno mismo y a otros puntos de referencia; Identificación y clasificación de figuras geométricas; Estudio de las figuras geométricas y sus elementos (vértices, lados, diagonales, ejes de simetría, etc.); Reconocimiento de regularidades y simetrías; Estudio de simetrías planas (respecto a un punto o a una recta); Estudio de lugares geométricos (mediatriz, bisectriz, cónicas); Proporcionalidad y semejanza de figuras; Estimación de medidas mediante el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes; Reconocimiento de puntos y rectas notables del triángulo; Estudio de los cuerpos geométricos y sus elementos; Descomposición de un poliedro en cuerpos más pequeños; Nociones de paralelismo y perpendicularidad; Recubrimiento del plano mediante teselaciones y del espacio mediante el apilamiento de cuerpos.

Habilidades geométricas:

Las *habilidades visuales* que propicia son: coordinación visomotora, percepción figura-fondo, constancia perceptual o de forma, tamaño y posición, percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales entre objetos, discriminación y memoria visual.

Las *habilidades de dibujo y construcción* que pueden desarrollarse giran en torno a: representación de figuras o cuerpos (el plegado de figuras y cuerpos), reproducción a partir de modelos dados, construcción sobre la base de datos dados.

Las *habilidades de comunicación* que fomenta son: interpretación y socialización de información geométrica.

Las *habilidades de razonamiento* que anima son: invención, imaginación e intuición de situaciones, exploración y descubrimiento de conceptos, regularidades y relaciones.

Las *habilidades de aplicación o transferencia* que promueve son: interrogación, representación, descripción y explicación de ideas en términos geométricos, y análisis de representaciones.

Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje: Permite su aplicación a alumnos que se encuentren en cualquiera de los tres primeros niveles de razonamiento. Es decir que, programando actividades que vayan aumentando su complejidad y disponiendo del tiempo suficiente, es posible llevar a que los alumnos, inicialmente en un nivel 1, alcancen el nivel 2. No obstante, es particularmente fructífera su aplicación en alumnos que se transcurran por los niveles de descubrimiento de propiedades de las figura y de razonamiento informal sobre ellas.

La flexibilidad que caracteriza a este material posibilita la planificación de una amplia variedad de actividades. Estas actividades pueden utilizarse no sólo para brindar información o explicitar conceptos, sino también para favorecer la comprensión de dichos conceptos y la deducción de sus propiedades y relaciones a partir de la orientación libre o dirigida e incluso pueden plantearse actividades de integración.

Todo esto hace de esta técnica un material muy valioso en el cual, tanto el docente como el alumno, pueden encontrar el apoyo necesario para transitar cada nivel de razonamiento. Además, este material resulta ser el medio ideal para fomentar la imaginación y estimular la creatividad de los alumnos, por lo cual el docente no debe limitar tan importante cualidad y dejar que el alumno explore su riqueza expresiva.

2.6.3. Versatilidad del material

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Posibilita el abordaje de una amplia variedad de contenidos geométricos referidos tanto del plano como del espacio, encontrando este último, un medio muy efectivo para su interpretación.

Vinculación con otros ejes del área: Pueden establecerse vinculaciones con el eje Medida ya que las nociones de perímetro, área y volumen están permanentemente abordadas. No debe olvidarse el importante componente artístico que tiene esta técnica, con lo cual es fundamental la vinculación con el área Artística.

Uso en otros niveles de escolaridad: Cumple un papel importantísimo en el campo de la educación a cualquier nivel: primario, secundario e incluso como apoyo de ciertas disciplinas a nivel universitario, pues reúne las cualidades indispensables desde el punto de vista pedagógico y por supuesto matemático.

2.7. Objetos del entorno real

2.7.1. Descripción del material

Características generales: La observación del entorno natural, artístico o tecnológico ofrece inmensas posibilidades para el estudio de la Geometría (Caro y Breccia, 2009). En dicha observación se sientan las primeras experiencias visuales y muchos contenidos geométricos tienen en esas imágenes su interpretación. La visita, la búsqueda, el descubrimiento del entorno permite re-significar la realidad que nos rodea. Por ello, este conocimiento activo motiva no sólo su descripción sino que, además, permite incidir en ella para su transformación.

Variantes/Integrantes: Los objetos que podemos encontrar en nuestro entorno son tantos y provenientes de tan diversas realidades que resulta imperioso realizar una partición. Esta división tiene como objeto ordenar el estudio y no es para nada la única posible, sino más bien una entre tantas otras. Además permite nombrar algunos ejemplos de materiales que se incluyen bajo cada uno de los entornos considerados. La clasificación adoptada está basada en la propuesta por Alsina, Burgués, Fortuny (1988):

a. *Entorno natural* (Fig. 38): Ha sido fuente de estudio e inspiración de la actividad humana. A los orígenes mismos de la Geometría hay que buscarlos en las situaciones y problemas de este entorno. El estudio de los hechos y elementos naturales desde una perspectiva geométrica, además de tener un intrínseco interés cultural, tiene un enorme interés pedagógico para motivar la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Se puede hablar en este sentido de una fenomenología didáctica tal como la define el profesor Hans Freudenthal (1905-1990). Se considera dentro de este entorno al: Reino vegetal (árboles, arbustos, flores, paisajes, etc.); Reino animal (seres vivos en general.); Reino mineral (minerales, rocas, etc.); Cosmos (planetas, sistema planetario).

b. *Entorno artificial* (Fig. 39): El hombre ha desarrollado ciertos contenidos geométricos para tener un mayor control y explicación de los fenómenos naturales. Con este fin, ha desarrollado toda una tecnología para ayudarle en su acomodación al entorno. La Geometría ha proporcionado el contenido formal haciéndose presente en el diseño y uso de instrumentos cotidianos, en el funcionamiento de máquinas, en las estructuras de puentes, cubiertas, edificios, etc. Sólo por nombrar algunos ejemplos:

b.1. *Espejo y mira o réflex* (Fig. 40): Los espejos, planos o curvos, son superficies pulidas. La mira o réflex está construida por una pieza rectangular de metacrilato translúcido de color rojo sostenida por soportes laterales.

b.2. *Caleidoscopios* (Fig. 41): Existen muchos tipos de caleidoscopios:

- *Caleidoscopios diédricos o libro de espejos*: Dos espejos planos iguales unidos por un borde lateral mediante una tira de cinta adhesiva, que se abren como las hojas de un libro. Se dispone, además, de un semicírculo graduado para medir diferentes aberturas entre ambos espejos. Como variante, uno de los espejos puede tener dos agujeros para poder mirar por detrás situando el otro espejo paralelo.

- *Caleidoscopios triédricos o clásicos*: Tres espejos rectangulares formando ángulos entre sí de (60°, 60°, 60°), (60°, 30°, 90°) (45°, 45°, 90°).

- *Caleidoscopios poliédricos*: Tres espejos adecuadamente inclinados formando diferentes pirámides: ortoédrica, tetraédrica, octaédrica e icosaédrica.

b.3. *Papel y cartulina* (Fig. 42): Papeles y cartulinas de cualquier color uniforme, papel charol, papel vegetal en diferentes tamaños, formas y grosores. El uso que se tendrá en cuenta es para cortar, doblar y pegar entre uno mismo o varios de ellos. En este apartado no se lo considera como soporte de escritura y dibujo.

b.4. *Mapas* (Fig. 43): Mapas de rutas de una región, provincia o país; guía urbana de una ciudad o mapas para colorear; plano-guía de colectivos, trenes, etc.

b.5. *Rejas* (Fig. 44): Armazones metálicos (de alambre u otro material flexible) describiendo cuadrículas, tramas rectangulares, triangulares, etc., semiesferas provistas de semimeridianos y semiparalelos. Los armazones pueden estar provistos de focos puntuales de luz que permitan proyectar sobre pantallas las sombras obtenidas.

b.6. *Diarios y revistas*: Diferentes publicaciones periódicas impresas como diarios, revistas que sean de fácil acceso.

b.7. *Fotografías*: Toda clase de fotografías, tomadas personalmente por el docente y/o alumnos o bien imágenes de objetos, paisajes o lugares extraídas de libros, enciclopedias, etc. Las fotografías pueden ser del mismo objeto o paisaje desde diferentes lugares y en distintos tamaños.

c. *Entorno artístico*: El caso del arte y la Geometría es un ejemplo de verdadero entendimiento mutuo, ya que cada parte ha realizado contribuciones fundamentales a la otra. La Geometría le ha dado al arte y a la arquitectura los elementos básicos para su desarrollo: formas y figuras, métodos para trazarlas o edificarlas y sistemas de representación (perspectivas, planos, etc.). Aunque debemos reconocer que, el componente geométrico es sólo una dimensión entre muchas otras como el color, la textura, la luz, etc. Por otro lado, el arte ha motivado la ampliación del conocimiento geométrico, sugiriendo problemas que han dado lugar a nuevos contenidos. Las geometrías descriptiva y proyectiva son un fiel ejemplo de esta idea. Dentro de este grupo se puede considerar a las pinturas, esculturas y arquitecturas, actuales y antiguas, esparcidas a lo largo del mundo y pertenecientes a distintas culturas.




Figura 38 **Figura 39** **Figura 40** **Figura 41**

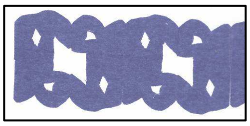



Figura 42 **Figura 43**




Figura 44 **Figura 45** **Figura 46** **Figura 47**

Construcción y accesibilidad: Las nociones de construcción y accesibilidad se entrecruzan. Esto se debe a que no se piensa en la construcción específica de estos materiales para el uso educativo, sino más bien en el acceso directo a los mismos provenientes del entorno en el cual nos desenvolvemos.

2.7.2. Interés didáctico-matemático

Contenidos geométricos:

a. *Entorno natural*: Permite por ejemplo: Observación directa y/o visualización de formas y figuras, trayectorias, perfiles, secciones, proyecciones; Recolección y análisis de datos para la realización de distintas clasificaciones u ordenamientos; Mediciones directas e indirectas de todo tipo de magnitudes; Estudio de semejanza de figuras; Estudio de las simetrías del plano; Identificación de diferentes sistemas de referencias y ubicación de puntos y/o objetos en el espacio.

b. *Entorno artificial*:

b.1. *Espejo y mira o réflex*: Utilización de este dispositivo como instrumento de dibujo geométrico, que puede sustituir en parte a la regla y el compás para realizar diversas construcciones geométricas; Estudio experimental del concepto de mediatriz, bisectriz, eje y plano de simetría; Comprobación de las leyes de reflexión y la inversión de la imagen izquierda-derecha.

b.2. *Caleidoscopios:*

- Caleidoscopios diédricos o libro de espejos: Generación de polígonos regulares. Estudio de relaciones entre ángulos y ejes de simetría y número de lados; Generación combinatoria de configuraciones y diseños simétricos, mediante la visualización de imágenes múltiples; Observación de la propia forma de uno mismo o cualquier objeto al situarlo delante de un libro de espejos en diferentes posiciones; Reproducción de diferente tipos de simetrías planas, por ejemplo, ver frisos con los dos espejos paralelos.

- Caleidoscopios triédricos o clásicos: Construcción visual de diferentes tipos de mosaicos; Estudio visual y gráfico de las diferentes y sucesivas operaciones de simetría (reflexiones) que generan los mosaicos regulares y semirregulares; Estudio de traslaciones.

- Caleidoscopios poliédricos: Visualización de los diferentes tipos de simetrías espaciales; Generación de sólidos regulares o semirregulares a partir de una de las partes equivalentes mínimas en que se puede dividir su superficie; Simulación gráfica de los efectos calidoscópicos a partir de una esfera triangularizada; Composiciones sucesivas de reflexiones especulares; Grupos de simetría espacial; Grado o cantidad de simetría de un objeto.

b.3. *Papel y cartulina*: Estudio de rectas, ángulos y las relaciones entre ellos; Ilustración de conceptos como: suma de ángulos de un triángulo, intersección de alturas, área, intersección de bisectrices o mediatrices, etc.; Representación de identidades notables; Construcción de polígonos y, por repetición o combinación, generación de mosaicos; Estudio de movimientos en el plano y la construcción de frisos; Estudio de los siete tipos de frisos y los diferentes tipos de mosaicos; Construcción de poliedros; Obtención de áreas equivalentes; Trazado de rectas paralelas y/o perpendiculares a una dada; Trazado de mediatrices o bisectrices; Construcción de de polígonos haciendo uso de sus características, por ejemplo, de un cuadrado mediante las diagonales que son ejes de simetría.

b.4. *Mapas*: Planteo y resolución de toda una serie de problemas cotidianos y que pueden tener interés interdisciplinario; Reconocimiento y uso de la escala del mapa/guía. Calculo de distancias y comparación de distancias reales y en línea recta; Resolución de situaciones de topología combinatoria o de grafos: itinerarios equivalentes, itinerario más corto entre dos puntos dados, conexiones, caminos entre dos o más puntos, colorear con cuatro colores cualquier mapa de forma que zonas con frontera común tengan colores diferentes; Cálculos combinatorios y su aplicación real en el estudio de horarios, enlaces y frecuencias de, por ejemplo, medios de transporte.

b.5. *Rejas*: Estudio de las afinidades del plano. Análisis de las propiedades que se mantienen invariantes en este tipo de transformaciones; Estudio de las proyectividades del plano (la semejanza como caso particular) y sus invariantes; Estudio de las proyecciones obtenidas sobre una pantalla, mediante la utilización de un foco artificial de luz y la interposición de rejas con diferentes tipos de tramas.

b.6. *Diarios y revistas*: Descubrimiento de formas planas y espaciales; Estudio de las transformaciones de tipo afín y proyectivas en los dibujos y fotografías; Realización de cálculos de todo tipo: longitudes, superficies, volúmenes, estadísticos, etc.; Estudio de la proporcionalidad mediante la comparación de las alturas de las letras de títulos, subtítulos, etc., áreas de las columnas y anuncios, etc.; Estudio de datos estadísticos (del tiempo, deportivos, de la Bolsa, etc.).

b.7. *Fotografías*: Estudio de la proporcionalidad entre elementos reales y/o sus fotografías; Análisis de deformaciones ópticas y de ángulos visuales; Observación de fotografías para motivar el tratamiento de distintos temas geométricos; Resolución de diferentes problemas relacionados con la proporcionalidad del objeto y su imagen, como por ejemplo, dada una medida de la longitud en la realidad calcular otras medidas a partir de una fotografía del objeto/lugar, etc.; Estudio de las proyecciones y sus efectos, como por ejemplo, analizar qué tipo de líneas se deforman y cómo y cuáles no.

c. *Entorno artístico*: En cualquiera de sus manifestaciones, posibilita el tratamiento de, por ejemplo: Estudio de ángulos -elementos, representación, medida, clasificaciones y operaciones-; Estudio de las posiciones entre rectas, entre rectas y planos y entre planos; Reconocimiento de la proporción áurea y el número de oro; Identificación, reconocimiento y estudio de las diversas figuras planas y espaciales; Identificación de diferentes sistemas de referencias y ubicación de puntos y/o objetos en el espacio; Estudio y clasificación de las simetrías del plano; Identificación de los siete tipos de frisos y los diferentes tipos de mosaicos; Estudio de cónicas y cuádricas; Identificación de la perspectiva lineal.

Habilidades geométricas: La observación del entorno real para su estudio desde el punto de vista de la Geometría permite el desarrollo de grandes habilidades, como son: pensar matemáticamente, argumentar, representar y comunicar, resolver, usar técnicas matemáticas e instrumentos, y modelizar. Además de, por supuesto, visualizar el espacio en cualquiera de sus presentaciones (micro, meso, macro y cosmo-espacio). Por ello, es posible desarrollar todo tipo de habilidades desde las visuales y comunicativas, pasando por las de dibujo y construcción hasta las de razonamiento y de aplicación o transferencia.

Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje: Permite su aplicación en alumnos que se encuentren, principalmente, en los tres primeros niveles de razonamiento. Así, mediante el uso de alguna de las variantes de este material, el alumno que presenta características del nivel de reconocimiento encontrará el apoyo necesario para, por ejemplo, empezar a reconocer propiedades geométricas más que físicas y de este modo pasar al nivel siguiente: de análisis. De igual modo, el alumno que se encuentra en este nivel puede empezar a desarrollar la capacidad de razonamiento riguroso reconociendo que unas propiedades pueden deducirse de otras. De este modo, con la correspondiente adaptación de las actividades, es posible acompañarlo en el desarrollo de su pensamiento geométrico.

En todas las fases es posible utilizar los objetos del entorno real, ya que su gran diversidad permite la realización de variadas actividades. Algunas de ellas pueden ser dirigidas por el docente con el objeto de proveer información, o bien que los alumnos puedan explorar los conceptos resolviendo propuestas del docente, que puedan intercambiar experiencias expresándose con vocabulario específico, también los alumnos pueden aplicar y combinar los conocimientos adquiridos y por último adquirir una visión general de los contenidos.

2.7.3. Versatilidad del material

Adaptación a diversos contenidos geométricos: Debido a la gran cantidad de variantes que son consideradas dentro de este material es posible tratar muchos contenidos geométricos referidos tanto del plano como del espacio. Esta última dimensión encuentra en este material un medio muy efectivo para su interpretación.

Vinculación con otros ejes del área: Pueden establecerse vinculaciones con todos los ejes del área. Por ejemplo, con el eje Estadística y Probabilidades y con eje Funciones al analizar gráficos estadísticos y funciones presentes en diarios y revistas o resolver cálculos estadísticos, con el eje Medidas al abordar temas como perímetro, área y volumen de diferentes objetos y realizar cálculos relacionados a ellos, con lo cual estaría vinculándose con el eje Números y Operaciones. Además, es preciso mencionar la importante vinculación con otras áreas del conocimiento como, por ejemplo, la Artística, la de la Lengua.

Uso en otros niveles de escolaridad: Se caracteriza fundamentalmente por su versatilidad y gran aplicabilidad, con lo cual puede ser utilizado en cualquier nivel, desde el inicial, pasando por el nivel primario, el secundario y convenientemente adaptado puede ser utilizado hasta en el nivel universitario.

3. Comentarios finales

A partir de una mirada holística-interpretativa del Registro de materiales didácticos concretos, emergieron *nueve criterios de agrupamiento* (Tabla 2). Estos criterios surgen, por un lado, para dar respuesta a una completa caracterización de los materiales didácticos concretos analizados y, por otro lado, para responder a diferentes demandas que muchos docentes presentan relacionadas con posibilidades específicas de interés.

Tabla 2. Criterios y categorías de agrupamiento de materiales didácticos concretos

Criterios	Categorías
Cualidad	• Objeto tangible • Técnica
Materia prima	• Papel • Cartón, cartulina, madera, plástico, acrílico, goma eva, telgopor • Otros recursos
Disponibilidad	• Construcción artesanal • Adquisición en comercios • Observación directa
Movilidad	• Dinámico • Estático
Dimensión	• Bidimensión • Tridimensión • Bidimensión-tridimensión
Contenidos conceptuales	• Es posible abordar todos los contenidos geométricos prescriptos con algún material
Modelo de razonamiento	• Se propician distintos niveles de razonamiento y fases de enseñanza/aprendizaje
Habilidades geométricas	• Todos los materiales identificados favorecen el desarrollo de las cinco habilidades geométricas
Versatilidad	• Aplicabilidad a los diferentes ejes del área de Matemática • Aplicabilidad a otras áreas de conocimiento • Adaptación a los distintos niveles de escolaridad

Cabe destacar que lo anterior está estrechamente vinculado con las intenciones didácticas con que se utilizan los materiales didácticos concretos dentro de la actividad sugerida al alumnado y el aporte que el docente puede realizar al respecto.

Consideramos que contar con este tipo de conocimiento (caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas que pueden desarrollarse mediante su uso) favorece la competencia profesional del profesor en Matemática, ya que nutre su espectro de alternativas didácticas y andamios para el aprendizaje al enseñar Geometría.

Bibliografía

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.

Caro, P. y Breccia, M. (2009). La Geometría nos rodea. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* UNIÓN [en línea], 17, 85-95. Recuperado el 10/10/2011 de http://www.fisem.org/web/union/revistas/17/Union_017_011.pdf.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. *Mathematics Teacher*, 74, 11-18.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (1999). *Diseño Curricular Jurisdiccional para la EGB3* Área Matemática. Santa Fe: Ministerio de Educación.

Van Hiele, P. (1986). Structure and Insight. *A Theory of Mathematics Education*. Nueva York: Academic Press.

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Revista de Didáctica de las Matemáticas NÚMEROS* [en línea], 78, 73-94. Recuperado el 1 de noviembre de 2011, de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Articulos_04.pdf.

Silvia Villarroel es Profesora Titular en el área de Física en la Escuela de Enseñanza Media N° 498 de General Gelly, Profesora Interina en el área de Matemática en la Escuela de Enseñanza Media N° 227 de Máximo Paz y Tutora Académica en el área Matemática de la Escuela de Enseñanza Media N° 353 de Sargento Cabral. Tiene los títulos de Profesora de Matemática y Física y Licenciada en Enseñanza de la Matemática.

Natalia Sgreccia es Profesora Adjunta en el área Educación Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de Universidad Nacional de Rosario y Becaria doctoral del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Tiene los títulos de Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática y Magíster en Didácticas Específicas. nataliasgreccia@gmail.com.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 85-108
ISSN: 1815-0640

Estratégias de generalização de padrões de alunos do 7º ano de escolaridade

Manuel de Sousa Pereira, José António Fernandes

Resumen

Este artículo tiene como finalidad principal describir y comprender las estrategias de generalización utilizadas por estudiantes del 7º año (en promedio, con 12 años de edad) en la exploración de problemas de patrón. El estudio, de carácter cualitativo, se centró en una intervención de enseñanza en una clase y los datos fueron obtenidos mediante la observación del trabajo de los estudiantes y sus producciones escritas. En términos de resultados, entre las diferentes estrategias adoptadas por los estudiantes, se señaló la prevalencia de la estrategia *Explícita*, seguido de las estrategias *Diferencia* y *Contaje*, respectivamente.

Abstract

This paper has as main proposal to describe and to understand the generalization strategies of 7th grade pupils (on average, 12 years old) in the exploration of pattern problems. The study, qualitative in nature, was focused on a teaching intervention in a class and the data were gathered trough observation of the pupils' work and their written productions. In relation to results, among the many strategies adopted by pupils, it was emphasized the predominance of the *Explicit* strategy, followed by *Difference* and *Counting* strategies, respectively.

Resumo

Neste artigo tem-se por principal propósito descrever e compreender as estratégias de generalização usadas por alunos do 7º ano (em média, com 12 anos de idade) na exploração de problemas de padrão. O estudo, de natureza qualitativa, centrou-se numa intervenção de ensino numa turma e os dados foram obtidos através da observação do trabalho dos alunos e das suas produções escritas. Em termos de resultados obtidos, de entre as várias estratégias adotadas pelos alunos, salientou-se a prevalência da estratégia *Explícita*, seguida das estratégias *Diferença* e *Contagem*, respetivamente

1. Introdução

Frequentemente, a abordagem da Álgebra na sala de aula não tem ido além da manipulação simbólica, da aplicação de propriedades no cálculo algébrico e, sobretudo, da memorização de regras e procedimentos, insuficiente para o desenvolvimento da compreensão da matemática e do pensamento algébrico (Kaput, 1999; Ponte, Branco & Matos, 2009a).

A aprendizagem da Álgebra envolve saber trabalhar com símbolos de forma significativa, o que não é um processo fácil nem linear. Muitos alunos sentem dificuldades quando tentam dar sentido a uma expressão algébrica ou a uma letra nessa expressão, quando atribuem significados concretos às letras na transição da linguagem natural para a linguagem algébrica e quando tentam escrever simbolicamente uma generalização. Por outro lado, parece tornar-se cada vez mais evidente a importância do contributo dos padrões para a promoção da compreensão. Segundo Ponte *et al*. (2009a), "a aprendizagem do trabalho com expressões algébricas faz-se em simultâneo com a aprendizagem das sequências, das funções e das equações, procurando-se assim que estas façam sentido para os alunos" (p. 77).

Também nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2007) se defende a mesma perspetiva, afirmando-se que os "alunos deverão começar a compreender os diferentes significados e utilizações das variáveis, por meio da representação de quantidades numa diversidade de problemas e contextos" (p. 263).

O programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação [ME], 2007) prevê o tratamento da temática dos padrões de forma explícita ao longo de todo o ciclo de estudos. Dando suporte a esta presença constante dos padrões, há autores (e.g., Vale & Pimentel, 2005) que defendem a ideia de que o trabalho com padrões contribui para melhorar significativamente a compreensão da Álgebra por permitir desenvolver diversas capacidades, como o pensamento algébrico e o raciocínio matemático.

Face a este panorama, a "investigação futura tem de continuar a dar um lugar central ao estudo dos fenómenos da aprendizagem dos alunos quando trabalham com padrões e regularidades" (Ponte, 2009, p. 173). Mais concretamente, no estudo realizado descrevem-se e explicam-se as estratégias de generalização usadas por alunos do 7º ano de escolaridade na exploração de tarefas de padrões.

2. Enquadramento teórico

Na resolução de problemas, a Álgebra deve surgir como uma necessidade resultante da insuficiência dos recursos aritméticos. Deste modo, a produção do conhecimento algébrico surge como uma ferramenta para organizar uma situação e não como objeto primário de estudo (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). No mesmo sentido, segundo a Associação de Professores de Matemática [APM] (1988), "o que se pratica é uma tentativa absurda de impor à partida uma terminologia e uma linguagem que não resultam de qualquer necessidade real nascida da atividade dos alunos" (p. 38).

O trabalho com sequências — de figuras, números ou outro tipo de objetos — conduz naturalmente ao estudo de regularidades. Este trabalho é um excelente veículo para promover o pensamento sobre variáveis e funções. Em particular, permite aos alunos desenvolver a capacidade de estabelecer generalizações, um aspeto fundamental do raciocínio matemático, e favorece o desenvolvimento da capacidade de fazer representações, quer através de diagramas e esquemas, quer usando a linguagem algébrica (Ponte, Matos & Branco, 2009b).

No caso das tarefas propostas aos alunos, elas podem envolver sequências de diversos tipos: algumas podem ter uma lei de formação explícita no enunciado; noutras a lei de formação está implícita, sendo inequívoca pelas condições dadas; e há aquelas em que são dados alguns termos, podendo existir várias leis de formação a descobrir. Descobrir e descrever generalizações está no cerne da atividade matemática. Um dos aspetos da generalização envolve o exame de diferentes quantidades e a descrição das relações entre elas numa situação particular. Desenvolver a compreensão das condições variantes (termos, variável dependente) e invariantes (ordem do termo, variável independente) pode proporcionar significado aos símbolos algébricos (Kaput, 1999).

As generalizações algébricas de padrões não são caraterizadas pelo uso de notações simbólicas, mas sim pela maneira geral como é tratada a generalização. As generalizações algébricas de padrões implicam: (1) a apreensão de uma regularidade; (2) a generalização dessa regularidade a todos os termos da sequência em questão; e (3) a formação de uma regra direta ou um esquema direto que permita determinar qualquer termo da sequência. No entanto, existe alguma dificuldade na ligação destes três aspetos centrais (Radford, 2008).

Por outro lado, também segundo Radford (2010), o processo de generalização desenvolve-se em três níveis: (i) *factual*, onde o foco continua a ser a generalização a nível do material, no plano concreto, e é o gesto e o ritmo que é usado para mostrar a generalização; (ii) *contextual*, onde o foco da generalização é descritivo e mais abstrato (em relação ao anterior), sendo utilizada uma linguagem orientada para explicar a generalização com referências ao contexto; e (iii) *simbólica*, onde a notação algébrica é usada para descrever a generalização.

Os alunos, normalmente, usam uma variedade de estratégias para a construção da relação funcional em que assenta o padrão. As estratégias usadas na resolução de questões envolvendo sequências podem ser *locais*, indicando como passar de um termo para o termo seguinte com base num processo recursivo, ou *globais*, estabelecendo uma relação de natureza geral que descreve toda a regularidade, a qual pode ser representada por palavras ou por uma expressão algébrica, designada por termo geral (Ponte *et al*., 2009b).

Stacey (1989) usa os termos *generalização próxima* e *generalização distante*, referindo-se ao tipo de abordagem adotado na resolução: "a *generalização próxima* é utilizada para designar uma questão que pode ser resolvida passo-a-passo com um desenho ou através de contagem e a *generalização distante* designa uma questão que vai além de limites razoáveis da prática de abordagem passo-a-passo" (p. 150).

Rivera e Becker (2008) estabeleceram três tipos de estratégias empregues pelos alunos: (1) *numérica*, que utiliza apenas estímulos estabelecidos a partir do padrão listando uma sequência de números ou usando uma tabela para derivar a regra a partir daí, procurando relações aritméticas entre os valores das variáveis; (2) *figurativa*, que se aplica apenas quando se descreve a generalização do padrão utilizando diagramas, sendo a regra totalmente obtida a partir de indícios visuais estabelecidos diretamente a partir da estrutura dos dados, podendo-se recorrer à decomposição das figuras (termos); e (3) uma combinação de ambas as abordagens anteriores (numérica e figurativa).

De entre as estratégias numéricas, Bezuszka e Kenney (2008) identificaram três estratégias, que envolvem a recursão: (1) *Comparação*, quando os termos de uma sequência de números dados são comparados com os termos correspondentes de uma outra sequência cujo regra já é conhecida; (2) *Substituição Repetida*, onde cada um dos termos subsequentes de uma sequência numérica se exprime por indicação do termo imediato ao precedente (substituído por este); e (3) método das *Diferenças*, também conhecido das diferenças finitas em matemática (diferença entre termos), que é um algoritmo para encontrar fórmulas explícitas (que são expressões polinomiais).

De entre as estratégias figurativas, distinguem-se as generalizações construtiva e desconstrutiva. A generalização construtiva implica ver os termos de uma expressão algébrica como representando as partes da figura que não se sobrepõem num padrão figurativo (neste caso as fórmulas surgem com "adições"). A generalização desconstrutiva consiste em ver os termos de uma expressão algébrica que se referem às partes sobrepostas da figura num padrão figurativo (neste caso as fórmulas surgem com "subtrações" para excluir os objetos sobrepostos) (Rivera & Becker, 2008; Rivera, 2010). A generalização desconstrutiva é a mais difícil de alcançar e, por isso, a construtiva é a mais utilizada pelos alunos (Rivera & Becker, 2008).

Por outro lado, Chua e Hoyles (2011), além destes dois tipos de estratégia figurativa, apresentam duas outras estratégias. Uma delas ocorre quando um ou mais componentes do diagrama original são reorganizados em algo mais familiar. Esta figura recém-reconfigurada, em seguida, apresenta uma estrutura do padrão que facilita a construção da regra funcional. A outra acontece quando o diagrama original é visto como parte de uma grande figura composta, a partir da qual a regra funcional é gerada subtraindo subcomponentes dessa figura composta.

Stacey (1989), num estudo sobre generalização utilizando padrões lineares da forma $f(n) = a + b$, com $b \neq 0$, em contexto figurativo (pictórico) e em contexto estritamente numérico, analisa e relata as respostas de alunos, com idades entre os 9 e os 13 anos, a questões de generalização, documentando os modelos matemáticos que escolheram, as estratégias utilizadas na sua execução e as explicações que deram. Por exemplo, um dos problemas do estudo era a sequência numérica: 4, 10, 16, 22, ____, ____, ____, sendo pedido aos alunos para completarem os três espaços em branco; depois o centésimo termo e, finalmente, o enésimo termo, $S(n)$. Neste estudo, observou-se uma substancial inconsistência na escolha do modelo adequado e os alunos que tentaram responder adotaram frequentemente um modelo simples, mas incorreto, sobretudo nas questões envolvendo a generalização distante. Já os alunos que tinham realizado um curso de resolução de problemas, usando implicitamente um modelo linear, deram respostas consistentes com mais frequência e explicações mais frequentemente relacionadas com os padrões. Estes alunos pareciam entender de forma mais completa a relação entre os dados e a regra resultante da generalização.

Ao analisar as estratégias usadas pelos alunos, Stacey (1989) organizou-as em quatro categorias: *Contagem* — contagem a partir de um desenho para descobrirem o termo da sequência; *Diferença* — utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos, multiplicando a diferença comum a entre os termos e assumindo que a adição repetida desse número a conduz à expressão algébrica da generalização $a \times n$; *objeto Inteiro* (*Whole-Object* no original em inglês) — tomar um termo ou um múltiplo de um termo para unidade e usar múltiplos dessa unidade, ou seja, $S(m \times n) = m \times S(n)$, assumindo implicitamente a existência de uma relação de proporcionalidade direta; *Linear* — usando um padrão em que estão envolvidas tanto a multiplicação como a adição e em que os alunos reconhecem a ordem dessas operações, ou seja, usando implicitamente o modelo linear $S(n) = a \quad + b$ para o termo de ordem n.

No estudo de Rivera (2010) verificou-se que, em relação à atividade com padrões lineares figurativos, os alunos do 9º ano, com idade média de 14 anos, revelaram uma disposição para a utilização de uma combinação de estratégias figurativas (visuais) e numéricas. Neste estudo, o autor usa os termos: *aditiva construtiva standard* para o tipo de generalização algébrica que se aplica ao caso de todos os padrões lineares do tipo $y = x + b$, em que o termo de ordem x é y e se adiciona a constante b de figura para figura; *aditiva construtiva não-standard*, que é a versão expandida da expressão da generalização na sua forma não simplificada, incluindo apenas adições de componentes das figuras; *multiplicativa construtiva standard*, em que a expressão da generalização está na sua forma irredutível, $y = a \quad + b$, para um termo y de ordem x; *multiplicativa construtiva não-standard*, que é a versão expandida da expressão da generalização na sua forma não simplificada, incluindo multiplicações e adições de componentes das figuras; e *desconstrutiva*, em que a expressão da generalização pode estar na sua forma irredutível ou não e inclui subtrações para excluir os objectos sobrepostos.

O estudo de Lannin (2005) consistiu numa experiência de ensino com 25 alunos do 6º ano (alunos de 11-12 anos) ao longo de 10 dias. Dos resultados do estudo salienta-se que, nas discussões com toda a turma, os alunos foram, em geral, capazes de apresentar generalizações adequadas e justificar o uso de exemplos genéricos. Os alunos que usaram esquemas geométricos (figurativos) foram mais sucedidos em fornecer argumentos gerais e justificações válidas; no entanto, durante as discussões em pequenos grupos, os alunos raramente justificaram as suas generalizações, recorrendo alguns deles a valores particulares com maior incidência do que a relações gerais. Os alunos tenderam a usar dois tipos de justificação: a justificação empírica e exemplos genéricos. Os 4 alunos-alvo do estudo geralmente utilizaram a justificação empírica para testar as suas regras, e continuaram a fazê-lo, apesar deste tipo de justificação ter ser sido considerada insuficiente durante a discussão com toda a turma. Nestes casos, a justificação empírica era geralmente devida a uma falta de conexão a um esquema geométrico (figurativo) que estabelecesse uma relação com o contexto.

Neste estudo, Lannin ao analisar as estratégias de generalização usadas pelos alunos organizou-as em duas categorias principais: explícitas e não-explícitas. As estratégias explícitas são as que permitem o cálculo direto de um determinado valor da variável dependente conhecido o valor da variável independente, enquanto as estratégias não-explícitas não permitem esse cálculo. Na categoria das estratégias explícitas, o autor incluiu ainda as três subcategorias de estratégias: *Objeto Inteiro*, *Tentativa-e-Erro* e *Contextual*; e na categoria das estratégias não-explícitas o autor inclui duas subcategorias de estratégias: *Contagem* e *Recursiva*. A estratégia do *Objeto Inteiro*, já referida por Stacey (1989), consiste em usar uma unidade como parte, para construir uma unidade maior, utilizando a multiplicação num raciocínio de proporcionalidade direta (por exemplo: 3 maçãs custam 8 dólares, 9 maçãs custam 24 dólares). Neste caso, posteriormente à multiplicação, pode ou não haver necessidade de um ajustamento do resultado, para mais ou para menos (para $a \pm c$, caso não se trate de uma situação de proporcionalidade direta), tendo em vista adequá-lo à situação. A estratégia *Tentativa-e-Erro* consiste em adivinhar uma regra, sem ter em conta por que essa regra pode funcionar. Normalmente, isso envolve experiências com várias operações e números fornecidos na sequência. A estratégia *Contextual* consiste na construção de uma regra relativa a técnicas de contagem baseada em informações figurativas ou numéricas fornecidas na sequência. A estratégia *Contagem*, também já referida por Stacey (1989), consiste em desenhar uma imagem ou construir um modelo para representar a situação e contar o atributo desejado. A estratégia *Recursiva* acontece quando o aluno descreve uma relação entre termos consecutivos da sequência para determinar os termos subsequentes.

Num estudo posterior, Lannin, Barker e Townsend (2006) relatam as estratégias de generalização algébrica utilizadas por oito alunos do 5º ano (10-11 anos de idade) e os fatores que parecem influenciar essas estratégias. Neste estudo, com base nas respostas dos alunos, foram identificadas quatro categorias de estratégias: *Explícita*, *Objeto Inteiro*, *Partição* (*Chunking*) e *Recursiva*. A estratégia *Explícita* consiste na descoberta de uma regra que permita efetuar o cálculo imediato de qualquer valor da variável dependente (termo), dado o valor da variável independente (ordem). A estratégia *Partição* consiste num raciocínio recursivo com "saltos" (por segmentos), ou seja, em vez de usar um raciocínio termo a termo, o aluno desenvolve um padrão recursivo através da construção de uma unidade para os valores conhecidos do atributo desejado, sendo o recurso a um raciocínio recursivo a forma mais expedita de encontrar o termo pretendido. A estratégia *Recursiva* ocorre quando o aluno descreve uma relação entre valores consecutivos da variável dependente (termos).

Na estratégia do *Objeto Inteiro* os alunos devem aprofundar a compreensão do raciocínio proporcional e reconhecer que este método, muitas vezes, não conduz ao resultado desejado (devendo ser efetuado o devido acerto do resultado para não levar a conclusões erradas). Além disso, as estratégias usadas anteriormente noutros problemas e/ou limitações na perceção da situação-problema podem levar os alunos a continuar a usar estratégias ineficientes ou erradas (Lannin *et al*., 2006).

No estudo de Barbosa (2009), com base nas respostas de alunos do 6º ano (11-12 anos), a autora identificou cinco categorias de estratégias: *Contagem*, *Termo Unidade* (designada *Objeto Inteiro* por outros autores), *Diferença*, *Explícita* e *Tentativa-e-Erro*. Estas categorias de estratégias já foram referidas em diversos estudos anteriores (e.g., Stacey, 1989; Lannin, 2005; Lannin *et al*., 2006). A estratégia *Termo Unidade* (*Objeto Inteiro*) foi subcategorizada em sem ajuste e com ajuste numérico ou contextual. A estratégia *Termo Unidade sem ajuste* consiste em considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade e a estratégia *Termo Unidade com ajuste numérico* consiste em considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade, fazendo-se seguidamente um ajuste do resultado com base em propriedades numéricas. Na estratégia *Termo Unidade com ajuste contextual* o ajustamento do resultado efetua-se com base no contexto do problema. A estratégia *Diferença* foi subcategorizada em recursiva e múltiplo da diferença sem ajuste ou com ajuste. A estratégia *múltiplo da Diferença sem ajuste* consiste em usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ser ajustado o resultado à sequência; enquanto na estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste* se efetua o ajustamento do resultado à sequência.

Dos resultados obtidos, Barbosa (2009) concluiu que as estratégias mais aplicadas pelos alunos foram a *Contagem* e a *Explícita*, sobretudo nas questões de generalização distante. Não se verificou a predominância da estratégia *Diferença*, de forma pouco frequente foi usada a estratégia *Tentativa-e-Erro* e raramente foi utilizada a estratégia *Objeto Inteiro*.

Também no estudo realizado por Branco (2008), com alunos do 7º ano (12-13 anos), os resultados obtidos indicam que nos padrões repetitivos os alunos utilizaram a estratégia *Contagem* e também a estratégia *Explícita*. Nas explorações iniciais verificou-se que a estratégia seguida pela maioria dos alunos foi a *Contagem* e poucos alunos revelaram a capacidade de expressar as regularidades que encontraram utilizando a estratégia *Explícita*.

Nos padrões lineares (em que o termo de ordem n pode ser expresso na forma $a\ +b$, com $a \neq 0$) os alunos utilizaram a estratégia *Aditiva*, processo recursivo pouco prático na descoberta de termos de ordem elevada quando apenas se conhecem os primeiros termos da sequência. Após as experiências iniciais, apesar das dificuldades, os alunos usaram a estratégia *Explícita* com base na análise das propriedades das figuras (termos), indicando a relação entre a ordem da figura e o seu número de elementos em linguagem natural e alguns começam a utilizar a linguagem algébrica para traduzir a generalização expressa em linguagem natural. Porém, outros utilizaram a estratégia *Objeto Inteiro*, que não conduziu a uma generalização correta. De entre as várias estratégias usadas pelos alunos, a *Aditiva* e a *Explícita* foram as que mais se verificaram neste tipo de padrão.

No estudo de Matos (2007), agora com alunos do 8º ano de escolaridade (13-14 anos), verificou-se que a exploração de padrões constituiu uma tarefa nova para os alunos e, talvez por isso, as estratégias utilizadas inicialmente foram a *Contagem* e a *Covariação* (análise do modo como a variação dos valores de uma variável produz a variação nos valores da outra). Após algumas experiências, os alunos alargaram o leque das suas estratégias, adotando estratégias aritméticas (designadas por Rivera e Becker (2008) por estratégias numéricas) e também estratégias figurativas, baseando-se numa relação de correspondência entre as variáveis (termos e ordens), o que lhes permitiu generalizar o padrão (estratégia *Explícita*). Inicialmente exprimiam-se em linguagem natural, mas depois do contacto com a Álgebra formal revelaram à-vontade no uso da simbologia.

Finalmente, no estudo de Alvarenga (2006), com alunos do 5º ano (10-11 anos), nas estratégias de generalização, os alunos trabalharam em conjunto informações geométricas (figurativas) e numéricas. Nas diferentes resoluções, os alunos nunca recorreram a abordagens exclusivamente numéricas, separando-se das características específicas das tarefas (as propriedades figurativas) e evitando transformar os problemas em meras sequências numéricas, tendo sido mais utilizado o método das diferenças finitas (designado *Diferença* por outros autores) para descrever o padrão. Esta estratégia revelou-se eficaz na maioria das respostas por não exigirem o cálculo de termos muito distantes. Os alunos também usaram os métodos de contagem, de proporcionalidade direta e linear, e utilizaram essencialmente o método de contagem no cálculo dos termos mais próximos porque a maioria dos padrões das tarefas eram figurativos.

3. Metodologia

No estudo foi usada uma metodologia de investigação qualitativa, seguindo-se o paradigma descritivo e interpretativo de um estudo de caso (Yin, 2009), especificamente uma turma do 7º ano de escolaridade (12-13 anos de idade), para estudar um fenómeno em toda a sua complexidade, no seu contexto natural e com a intenção de analisar e descrever particularidades, como é o caso das estratégias de generalização de padrões usadas pelos alunos. Estas estratégias de generalização foram estudadas numa intervenção de ensino, que teve por principal objetivo proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem significativa sobre diferentes aspetos da Álgebra, designadamente: desenvolver nos alunos a capacidade de analisar padrões e regularidades; descrever relações e representá-las simbolicamente e promover a compreensão do significado dos símbolos através do estudo de padrões.

Na intervenção de ensino, que se prolongou por 11 aulas do ano de 2010, de 90 minutos cada uma, em que foram exploradas um total de 11 tarefas de padrões, os alunos trabalharam em sete grupos de três elementos e foram acompanhados mais de perto dois desses grupos, designados por grupos-alvo, com o propósito de aprofundar o estudo. As aulas compreenderam dois momentos distintos: (i) num primeiro momento, o trabalho autónomo dos grupos na resolução das tarefas; e (ii) num segundo momento, a apresentação e discussão na turma dos resultados obtidos nos grupos.

Nas aulas intervieram os 21 alunos da turma, designados por Ai, com $1<i<21$, e a sua professora de Matemática. Além destes, o investigador desempenhou o papel de observador participante, dialogando ocasionalmente com os alunos, pedindo-lhes alguns esclarecimentos acerca do que faziam, interagindo no sentido de aprofundar o seu conhecimento através de questões e incentivando-os no desenvolvimento do seu trabalho, o que possibilitou o aprofundamento das perspetivas dos participantes.

Os dados recolhidos resultaram da observação realizada na sala de aula e das resoluções e relatórios escritos produzidos pelos alunos na realização das tarefas. Nos relatórios, os alunos descreveram a atividade desenvolvida na realização das tarefas, descrevendo as dificuldades sentidas e a forma como as superaram, as ideias e os processos de raciocínio que conduziram à generalização, as formas de representação e a validade do modelo encontrado.

No estudo efetuaram-se gravações de todas as aulas em que decorreu a intervenção de ensino, audiogravando o trabalho dos dois grupos-alvo durante o trabalho autónomo e o vídeogravando o grupo-turma quando toda a turma se envolvia na apresentação, discussão e síntese da exploração realizada nos grupos. Os dados relativos às estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de padrão foram organizados por tarefa, conjugando a informação das resoluções escritas, o relatório e as notas do investigador. Essa conjugação, em algumas ocasiões, revelou-se fundamental para o esclarecimento do pensamento e da estratégia envolvida na resolução do grupo. Seguidamente, na classificação das estratégias de generalização recorreu-se às categorias usadas no estudo de Barbosa (2009): *Contagem*, *Diferença*, *Objeto Inteiro*, *Tentativa-e-Erro* e *Explícita*. Por sua vez, a estratégia *Diferença* foi dividida em três subcategorias: *recursiva*, *múltiplo da Diferença sem ajuste* e *múltiplo da Diferença com ajuste*; e a estratégia *Objeto Inteiro* foi dividida em três subcategorias: *sem ajuste*, *com ajuste numérico* e *com ajuste contextual*.

Além da classificação das estratégias de generalização utilizadas pelos grupos na obtenção das suas respostas, foi verificada a natureza da generalização algébrica — categorizando-a em construtiva ou desconstrutiva (Rivera & Becker, 2008; Rivera, 2010), apurou-se o nível da generalização — situando-a na instanciação aritmética ou algébrica, e esta última subdividida em três subcategorias — factual, contextual e simbólica (Radford, 2010).

Finalmente, em termos da apresentação dos resultados, recorreu-se à estatística descritiva, nomeadamente a tabelas de frequências, e também se apresentam, a título de exemplificação, pequenos excertos das palavras, símbolos ou figuras usadas pelos alunos, de modo a tornar a descrição mais viva e permitir ao leitor julgar a adequação das inferências efetuadas.

4. Estratégias de generalização usadas pelos alunos

Em termos de resultados obtidos no estudo, apresenta-se o trabalho dos alunos em três tarefas de padrões (tarefas 4, 9 e 11), que foram realizadas em diferentes momentos da intervenção de ensino, e a síntese das estratégias de generalização usadas pelos alunos em todas as 11 tarefas exploradas.

4.1. Tarefa 4 – Palitos

A Joana utilizou palitos para construir uma sequência de figuras, apresentando as quatro primeiras figuras.

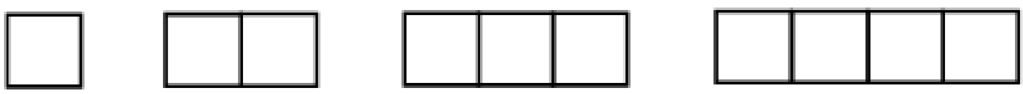


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos. Completa-a.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	…	50
Número de palitos	4							

b) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

c) Existe, nesta sequência, alguma figura com 601 palitos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

d) Escreve uma regra que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica o teu raciocínio.

e) Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

f) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	…	40
Perímetro	4							

g) Qual é o perímetro da figura 80? Explica como pensaste.

h) Escreve uma regra que permita determinar o perímetro de qualquer figura desta sequência. Explica o teu raciocínio.

i) Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

Tarefa adaptada de Vale e Pimentel (2009).

Na tarefa 4, realizada na aula 4 da intervenção de ensino, apresenta-se um padrão figurativo de crescimento, com questões de generalização próxima e distante. Pretendia-se que os grupos identificassem regularidades e as generalizassem, culminando na descrição da regra ou lei de formação da sequência em linguagem natural e algébrica.

Na Tabela 1 apresentam-se as frequências absolutas das estratégias de generalização usadas pelos grupos e referem-se os tipos de generalização envolvidos nas diferentes questões.

Tabela 1: Estratégias usadas pelos grupos na resolução da tarefa 4

Questões	Tipo de Generalização	Estratégias				
		Contagem	Diferença	Tentativa-e-Erro	Explícita	Outra
a)	Próxima	3	4	—	—	—
	Distante	1	6	—	—	—
b)	Distante	1	6	—	—	—
c)		—	—	6	—	1
d)		—	—	—	4	3
e)		—	—	—	6	1
f)	Próxima	1	5	—	—	1
	Distante	1	6	—	—	—
g)	Distante	1	5	—	—	1
h)		—	2	—	3	2
i)		—	—	—	6	1
Total		8	34	6	19	10

Pela Tabela 1 verifica-se que nesta tarefa houve uma preferência pela estratégia *Diferença*, seguida da estratégia *Explícita*. Nas generalizações próximas e distantes das questões a) e f) e nas generalizações distantes das questões b), g) e h), em todas as respostas obtidas pela estratégia *Diferença*, foi seguida a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste*.

Na questão a) pedem-se vários valores, referindo-se uns a generalizações próximas e outros a generalizações distantes. Ambos os grupos-alvo nas generalizações próximas utilizaram a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste* ao verificarem a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo e adicionando uma unidade para ajuste do resultado, como se lustra no diálogo seguinte do grupo-alvo G5.

A12: Na Fig. 2 é 7; na Fig. 3 é 10; na Fig. 4 é 13; na Fig. 5 é 16; na Fig. 6 é 19.
A15: É a tabuada do 3.
A12: Mas isto não é os múltiplos de 3 (…)
A19: Tem de se somar mais um.
A12: Nos múltiplos de 3 juntamos mais um. (Aula 4, 10/11/2010)

Ainda nesta questão, na generalização distante, ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste*.

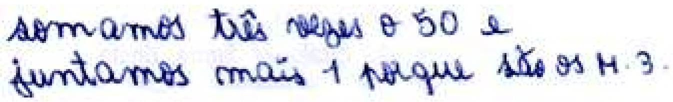


Figura 1. Resposta do grupo-alvo G5 à questão a).

Na questão b), envolvendo uma generalização distante, ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste*.

Figura 2. Resposta do grupo-alvo G2 à questão b).

Na generalização distante da questão c) ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *Tentativa-e-Erro*, experimentando sucessivos valores até que fossem verificadas as condições pretendidas. Neste caso, pretendia-se encontrar o valor de n tal que $3 \times n + 1 = 6$, como se exemplifica no diálogo seguinte do grupo-alvo G5.

A15: Uma figura com 601 palitos.
A12: $2 \quad +2 \quad +2$ é 600; mais um é 601.
A19: É a figura 200. (Aula 4, 10/11/2010)

Já na questão d), envolvendo uma generalização distante, ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *Explícita*, baseando-se numa regra descoberta a partir do contexto do problema, a qual permitiu o cálculo imediato do valor de um termo sendo conhecida a ordem correspondente e vice-versa.

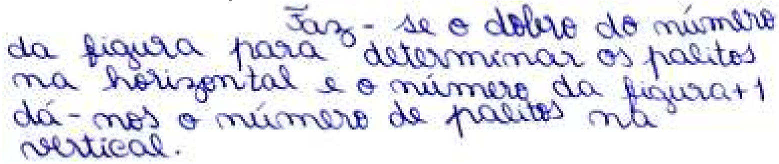


Figura 3. Resposta do grupo-alvo G2 à questão d).

Na generalização distante da questão e) ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *Explícita*. A resposta do grupo-alvo G5 apresenta uma generalização algébrica de nível simbólico (usa linguagem algébrica) e de natureza construtiva (a expressão algébrica representa as partes da figura que não se sobrepõem).

$3 \times n + 1$

Figura 4. Resposta do grupo-alvo G5 à questão e).

Na questão f), tal como na a), pediam-se vários valores, referindo-se uns a generalizações próximas e outros a generalizações distantes. Na determinação de todos eles ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste*, adicionando duas unidades como ajuste do resultado.

• Descobrimos o 40 é o 82 → ex: 40+40=80+2=82
número da figura ?
ex: 3+3=6+2=8

• São os múltiplos de 2 mas só começa no 4.

Figura 5. Resposta do grupo-alvo G5 à questão f).

Na questão g), de generalização distante, ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste*.

$80 + 80 + 2 = 162$

Figura 6. Resposta do grupo-alvo G2 à questão g).

Também na generalização distante da questão h) ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste*.

↳ 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 ... - múltiplos de 2 começa no 4
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 ... - múltiplos de 2 começa no 2

↳ os múltiplos de 2 mais 2.

Figura 7. Resposta do grupo-alvo G5 à questão h).

Finalmente, na questão i), envolvendo uma generalização distante, ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *Explícita*. A resposta do grupo-alvo G2 apresenta uma generalização algébrica de nível simbólico (usa linguagem algébrica) e de natureza construtiva (a expressão algébrica representa as partes da figura que não se sobrepõem).

$2 \times n + 2$

Figura 8. Resposta do grupo-alvo G2 à questão i).

Durante a fase de trabalho autónomo, que se prolongou por cerca de 45 minutos, não surgiram dúvidas nem perguntas e não foi necessário dar explicações adicionais.

No período de discussão no grupo-turma, que durou cerca de 40 minutos, os grupos apresentaram as respostas dadas às questões, permitindo conhecer os resultados a que chegaram e as justificações que deram nas suas resoluções.

Verificou-se que na questão b), no trabalho autónomo, os grupos não utilizaram a estratégia *Objeto Inteiro com ajuste contextual*, que consiste em considerar um termo da sequência como unidade, usar múltiplos dessa unidade e ajustar o resultado com base no contexto do problema. Contudo, nesta fase da aula, houve um aluno que apresentou esta ideia e com o questionamento da professora um outro completou o seu raciocínio, como se ilustra no seguinte diálogo.

Prof: Será que não daria ainda de outra forma, usando o resultado obtido na questão anterior?
A16: 151 na figura 50; na figura 100 deve ser 2×1 , que dá 302; não dá?
Prof: Será que não? Por que é que chegam a 302 e não 301, que seria a resposta correta?
A1: Porque há um palito que é contado duas vezes ao juntar-se os dois conjuntos de 151 palitos para formar a figura 100. (Aula 4, 10/11/2010)

Na questão c) verificou-se que o grupo G3 tinha utilizado na sua resolução a estratégia *Tentativa-e-Erro* e na discussão evoluiu para uma estratégia *Explícita* com base na reversibilidade do seu pensamento para descobrir o valor de n que satisfaz a equação numérica $3\times n+1=6$, como se mostra no diálogo seguinte.

Prof: Alguém fez de outra forma?
A5: Sim. 601 menos um é 600; 600 a dividir por 3 dá 200; é a figura número 200. (Aula 4, 10/11/2010)

Na questão e), recorrendo à estratégia *Explícita*, surgiram diferentes expressões algébricas equivalentes, como $n+n+n+1$ do grupo G6, $2\times n+n+1$ do grupo-alvo G2 e $n\times 3+1$ do grupo G3. Analogamente, na questão i) foram apresentadas expressões diferentes e equivalentes, como $n\times 2+2$ do grupo G1 e $n+n+2$ dos grupos G3, G4 e G6.

Também na questão g) se verificou que os grupos não recorreram à estratégia *Objeto Inteiro com ajuste contextual* no trabalho autónomo, mas na discussão os alunos foram questionados e um deles chegou ao resultado dessa forma.

Prof: E nesta questão, o resultado da anterior não seria útil?
A1: Como fizemos para a figura 100.
Prof: Sim, mas agora é o perímetro.
A1: Na figura 80 se juntarmos duas vezes o número de palitos da figura 40, ficamos com 2 palitos a mais, que não fazem parte do perímetro da figura 80.
Prof: Então como se faz?
A16: Na figura 40 são 82; na figura 80 são $2\times 8\ \ -2$, que dá 162. (Aula 4, 10/11/2010)

Em síntese, nesta tarefa, surge com maior número de ocorrências a estratégia *Diferença*, seguida da estratégia *Explícita*.
Já depois de terminada a aula, a professora proferiu o seguinte comentário: "É uma tarefa interessante e abrangente que envolve alguns conteúdos anteriores, mas achei-a um pouco extensa para ser resolvida e discutida em 90 minutos; os alunos tiveram que se despachar" (Prof, conversa pós-aula, 10/11/2010).

4.2. Tarefa 9 – Molduras

A Joana resolveu construir molduras, tal como as que observou numa exposição de artesanato, cujo contorno é constituído por peças quadradas geometricamente iguais, de um centímetro c

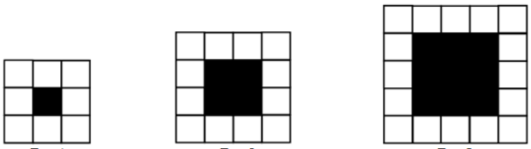


Fig.1 Fig.2 Fig.3

a) Completa a tabela seguinte:

Número da figura	1	2	3	4	5	…	n
Número de peças quadradas	8					…	
Perímetro (cm)	12					…	

b) Existe alguma figura da sequência com 800 peças quadradas? Explica a tua resposta.

c) O Jorge sugeriu à Joana que a expressão algébrica $4\times(n+2)-4$ representa o número de peças quadradas em qualquer figura da sequência. Concordas com ele? Explica a tua resposta.

d) A Catarina, por sua vez, indicou a expressão algébrica $2\times(n+2)+2\times n$ para representar o número de peças quadradas de qualquer figura da sequência. Esta expressão é equivalente à do Jorge? Explica a tua resposta.

e) Existe alguma figura da sequência com 208 centímetros de perímetro? Explica a tua resposta.

Tarefa adaptada de Alonso, Barbero, Fuentes, Azcárate, Dozagarat, Gutiérrez et al. (1993).

Na tarefa 9 apresenta-se um padrão figurativo de crescimento, com questões de generalização próxima e distante e questões de manipulação algébrica. A expectativa com as questões de generalização era que os grupos descobrissem regularidades e as generalizassem, culminando na descrição da regra ou lei de formação da sequência em linguagem algébrica.

Na Tabela 2 apresentam-se as frequências absolutas das estratégias de generalização usadas pelos grupos e referem-se os tipos de generalização envolvidos nas diferentes questões.

Tabela 2: Estratégias usadas pelos grupos na resolução da tarefa 9

Questões		Tipo de Generalização	Estratégias				
			Contagem	Diferença	Tentativa-e-Erro	Explícita	Outra
a)	Número de peças quadradas	Próxima	1	4	—	2	—
		Distante	—	—	—	7	—
	Perímetro	Próxima	1	5	—	1	—
		Distante	—	—	—	6	1
b)		Distante	—	—	3	3	1
e)			—	—	3	3	1
Total			2	9	6	22	3

Pelo número de ocorrências da estratégia *Explícita*, conclui-se que os grupos recorreram, maioritariamente, a estratégias gerais.

Na questão a), nas perguntas de generalização próxima, quer na sequência do número de peças quadradas quer na sequência dos perímetros, em todas as respostas dadas através da estratégia *Diferença* foi seguida a subcategoria *múltiplo da Diferença com ajuste*. Neste caso, os dois grupos-alvo usaram a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo e adicionaram 4 e 8, respetivamente, ao resultado em cada uma das sequências como ajuste do resultado.

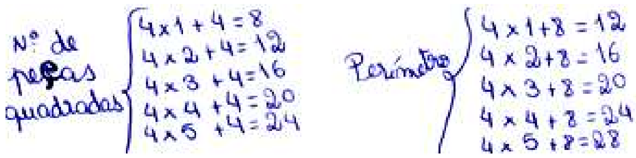


Figura 9. Resposta do grupo-alvo G2 à questão a) nas perguntas de generalização próxima.

Nas perguntas de generalização distante, ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *Explícita* ao descobrirem uma regra com base no contexto de problema, que lhes permitiu calcular de imediato o valor de um termo conhecida a ordem correspondente e vice-versa.

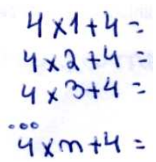


Figura 10. Resposta do grupo-alvo G5 à questão a) na pergunta de generalização distante da sequência do número de peças quadradas.

No caso da sequência dos perímetros, tal como no caso anterior, a resposta do grupo-alvo G5, obtida por um raciocínio indutivo, constitui uma generalização algébrica de nível simbólico e de natureza construtiva.

Figura 11. Resposta do grupo-alvo G5 à questão a) na pergunta de generalização distante da sequência dos perímetros.

Na questão b), envolvendo uma generalização distante, o grupo-alvo G2 recorreu à estratégia *Tentativa-e-Erro*, experimentando sucessivos valores até verificar a condição pretendida, enquanto o grupo-alvo G5 recorreu à estratégia *Explícita*.

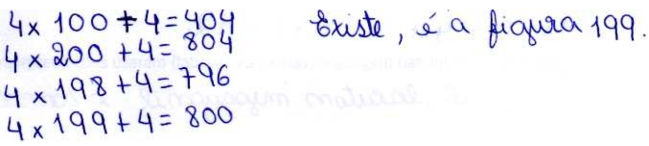


Figura 12. Resposta do grupo-alvo G2 à questão b).

Também na questão e), de generalização distante, o grupo-alvo G2 recorreu à estratégia *Tentativa-e-Erro* e o grupo-alvo G5 optou pela estratégia *Explícita*.

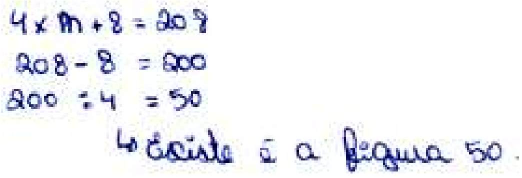


Figura 13. Resposta do grupo-alvo G5 à questão e).

Na questão c), o grupo-alvo G2 optou por substituir valores na variável em ambas as expressões algébricas, a do enunciado e a que descobriu em a), para verificar se encontrava os mesmos resultados.

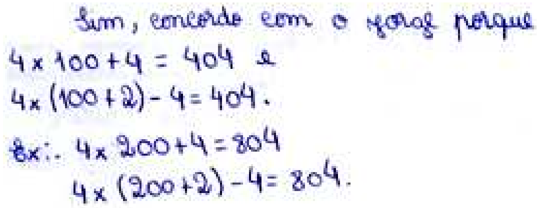


Figura 14. Resposta do grupo-alvo G2 à questão c).

Já o grupo-alvo G5 optou por transformar algebricamente a expressão dada no enunciado e verificar se encontrava a que tinha descoberto em a).

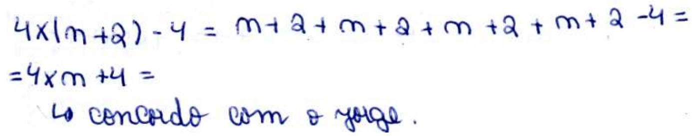


Figura 15. Resposta do grupo-alvo G5 à questão c).

Na questão d), tanto o grupo-alvo G2 como o grupo-alvo G5 retomaram as estratégias adotadas na questão c), tendo G2 recorrido à expressão do Jorge, obtida na questão anterior, comparando-a com a do enunciado.

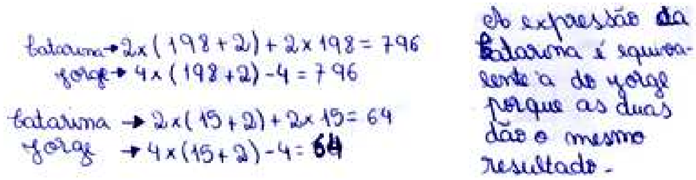


Figura 16. Resposta do grupo-alvo G2 à questão d).

Também nesta tarefa, durante a fase de trabalho autónomo, que se prolongou por cerca de 45 minutos, não surgiram pedidos de esclarecimento dos alunos sobre a tarefa e a sua resolução.

No período de discussão no grupo-turma, que durou cerca de 40 minutos, os grupos apresentaram e discutiram as respostas dadas e as justificações apresentadas.

No trabalho autónomo verificou-se, na questão c), que nenhum grupo tomou a iniciativa de "desmontar" a generalização de natureza desconstrutiva dada, $4\times(n+2)-4$, a fim de obter uma expressão equivalente. Contudo, com o questionamento da professora, alguns alunos revelaram conclusões pertinentes.

Prof: De outra forma, se analisarmos a expressão $4\times(n+2)-4$ não conseguiríamos concluir que também representa o número de peças quadradas de qualquer figura? A figura 2, por exemplo, quantas peças quadradas tem de lado?

A1: 4.

Prof: E a figura 3?

A1: 5; é sempre mais duas (…)

Prof: E se pensarmos na figura n, o que representa $n+2$?

A1: É o número de peças quadradas de um lado.

Prof: E porque se multiplica por 4?

A9: São 4 lados.

Prof: E porque se subtrai 4 no fim?

A20: Porque as 4 peças dos 4 cantos foram contadas duas vezes. (Aula 9, 03/12/2010)

Também na questão d) se verificou que nenhum grupo, durante o trabalho autónomo, tomou a iniciativa de "desmontar" a generalização de natureza construtiva dada, $2\times(n+2)+2\times n$, chegando de outra forma à resposta. No entanto, o questionamento da professora permitiu aos alunos progredirem nesse sentido.

Prof: E de outra maneira, como fizemos na questão anterior, analisando a expressão $2\times(n+2)+2\times n$? Já vimos o que representa $n+2$, o que representa?

A9: São as peças quadradas que a figura n tem de lado; vezes dois dão o número de peças de dois lados.

Prof: E o resto da expressão, $2\times n$, dá-nos o quê?

A1: As peças que faltam dos outros dois lados. (Aula 9, 03/12/2010)

Em síntese, nesta tarefa verificou-se um elevado número de ocorrências da estratégia *Explícita* nas questões de generalização, podendo significar que a resolução de problemas de padrão melhora a capacidade de generalização dos alunos.

4.3. Tarefa 11 – As mensagens

O João resolveu iniciar um envio de mensagens (SMS) em cadeia e enviou uma mensagem ao seu amigo Pedro (primeira etapa). Entretanto, o Pedro tem de enviar a mensagem a duas pessoas (segunda etapa). Cada uma das pessoas que recebeu a mensagem do Pedro terá de a enviar a outras duas pessoas (terceira etapa), o que significa que ao fim da terceira etapa a mensagem foi enviada 7 vezes. Repete-se o processo de envio da mensagem nas etapas seguintes.

a) Completa a tabela seguinte:

Número da etapa	Nº de vezes que a mensagem foi enviada
1	
2	
3	
…	…
n	

b) Existe alguma etapa em que a mensagem tenha sido enviada 512 vezes? Se existir, indica o número da etapa que lhe corresponde.

c) Ao fim de quatro etapas, quantas vezes foi enviada a mensagem? E ao fim de cinco etapas? Explica como pensaste.

d) Ao fim das n primeiras etapas, quantas vezes foi enviada a mensagem? Explica o teu raciocínio.

Adaptado de *Canguru Matemático sem Fronteiras 2010*, Categoria Escolar, Organização do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra com o apoio da Sociedade Portuguesa de Matemática.

Na tarefa 11 apresenta-se outro tipo de padrão de crescimento, uma sequência não linear, cuja expressão algébrica é do tipo $a^{n\pm c}$, com questões de generalização próxima e distante.

Na Tabela 3 podem observar-se as frequências absolutas das estratégias usadas pelos grupos e indicam-se os tipos de generalização envolvidos nas diferentes questões.

Tabela 3: Estratégias usadas pelos grupos na resolução da tarefa 11

Questões	Tipo de Generalização	Estratégias				
		Diferença	Tentativa-e-Erro	Explícita	Outra	Não Resposa
a)	Próxima	4	—	2	1	—
	Distante	—	—	7	—	—
b)	Distante	—	1	4	2	—
c)	Próxima	4	—	2	1	—
d)	Distante	—	—	6	—	1
Total		8	1	21	4	1

Nesta tarefa, a maioria dos grupos continuou a recorrer a estratégias gerais, como se constata pelo maior número de ocorrências que se verificou na estratégia *Explícita*.

Nas questões a), nas perguntas de generalização próxima, em todas as respostas dadas a partir da estratégia *Diferença*, foi seguida a subcategoria *recursiva*. Na questão de generalização próxima c), uma vez que todas as respostas foram dadas com base nas respostas dadas à questão a), elas também foram classificadas na subcategoria *recursiva.* Na questão a), ambos os grupos-alvo recorreram à estratégia *Diferença recursiva*, continuando a sequência com base na diferença entre termos consecutivos, conforme se verifica no diálogo do grupo-alvo G5.

A15: Na 1ª etapa é 1; na etapa 2 a mensagem foi enviada duas vezes.
A12: Pois é; na 3ª etapa é $4 = 2\times 2$.
A19: Na 4ª etapa é 4×2.
A12: É $2\times 2\times 2$, igual a 8; é sempre vezes dois (…)
A19: Na etapa 5 é 8×2, igual a 16. (Aula 11, 15/12/2010)

Ainda nesta questão, na generalização distante ambos os grupos-alvo usaram a estratégia *Explícita* e chegaram a uma generalização algébrica, de nível simbólico, através de um raciocínio indutivo.

$4 = 2^2$
$8 = 2^3$
$16 = 2^4$
...
2^{n-1}

Figura 17. Resposta do grupo-alvo G5 à questão a) na pergunta de generalização distante.

Na generalização distante da questão b), o grupo-alvo G2 recorreu à estratégia *Explícita*.

512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$512 = 2^9$

Existe a etapa nº 10.

Figura 18. Resposta do grupo-alvo G2 à questão b).

Já o grupo-alvo G5 utilizou a estratégia *Tentativa-e-Erro.*

$2^5 = 32$
$2^8 = 256$
$2^9 = 512$

↳ Existe, e é a etapa 10.

Figura 19. Resposta do grupo-alvo G5 à questão b).

Na questão c) ambos os grupos-alvo, recorrendo à tabela completada em a) pela estratégia *Diferença recursiva*, efetuaram as adições necessárias com os valores dessa tabela.

$1+2+4+8 = 15$ - Ao fim das 4 primeiras foram 15.

$1+2+4+8+16 = 31$ - Ao fim das 5 primeiras foram 31.

Figura 20. Resposta do grupo-alvo G5 à questão c).

Na generalização distante da questão d) ambos os grupos-alvo recorreram à estratégia *Explícita* e estabeleceram uma generalização algébrica de nível simbólico.

$$1+2+4+8+16+\cdots+2^{n-1}=$$

Figura 21. Resposta do grupo-alvo G5 à questão 11d).

Também nesta tarefa não surgiram perguntas dos alunos e a sua resolução estendeu-se por cerca de 40 minutos.

A discussão no grupo-turma, que durou cerca de 40 minutos, permitiu conhecer os resultados a que chegaram e justificações que deram nas suas resoluções. Nesta discussão, para além do que foi dito atrás, não se verificaram novos contributos.

Em síntese, verificou-se que os grupos recorreram mais frequentemente a estratégias de carácter geral. Por outro lado, no relatório, quatro grupos referiram que não sentiram qualquer dificuldade na resolução da tarefa e os restantes indicaram apenas dificuldades pontuais, algumas das quais ultrapassadas com o apoio da professora.

Acerca da tarefa, já depois de concluída, a professora referiu: "É interessante e acessível, atendendo aos conhecimentos que os alunos já possuem e às experiências realizadas nas tarefas anteriores" (Prof, conversa pós-aula, 15/12/2010).

4.4. Estratégias de generalização no conjunto de todas as tarefas

Resumem-se na Tabela 4 as frequências, em percentagem, de ocorrência das diferentes estratégias de generalização usadas pelos grupos em cada uma das tarefas e na totalidade das 11 tarefas exploradas pelos alunos nas aulas.

Tabela 4: Frequência, em %, de utilização das estratégias pelos grupos, por tarefa e na totalidade das tarefas

Tarefas	Estratégias					
	Contagem	Diferença	Tentativa -e-Erro	Explícita	Outra	Não Resposta
1 — Números	71	—	—	11	18	—
2 — Polígonos	39	—	—	53	8	—
3 — Quadrados	5	12	12	64	7	—
4 — Palitos	10	44	8	25	13	—
5 — Ainda mais números	—	63	2	10	15	10
6 — O Pomar	—	18	41	39	2	—
7 — Tijoleiras	16	16	8	57	3	—
8 — As sequências da Ana	—	—	18	75	7	—
9 — Molduras	5	22	14	52	7	—
10 — Pontos	12	31	8	35	10	4
11 — As mensagens	—	23	3	60	11	3
Total	14	21	10	44	9	2

Por observação da Tabela 4 conclui-se que na globalidade das tarefas cerca de um em cada dois grupos recorreram a estratégias gerais, nomeadamente à estratégia *Explícita*. Para além da pequena percentagem de grupos que não responderam, no caso das restantes estratégias de generalização salienta-se a *Diferença* e, em menor percentagem, a *Contagem* e a *Tentativa-e-Erro*.

Por outro lado, à medida que se progrediu na intervenção de ensino, verifica-se uma maior frequência na adesão à estratégia de generalização *Explícita*, o que é particularmente notório a partir sétima tarefa, inclusive.

5. Conclusões

As interações verbais da professora e do investigador, este último no papel de observador participante, revelaram-se importantes no desenvolvimento do trabalho autónomo dos alunos na medida em que ajudou à reflexão e à (re)organização das conclusões dos alunos, minimizando as suas dificuldades e confusões, tal como aconteceu no estudo de Alvarenga (2006).

Geralmente, os alunos conseguiram encontrar a regra ou lei de formação das sequências em linguagem natural, apesar de experimentarem algumas dificuldades nas tarefas iniciais, ocorridas também no estudo de Matos (2007). Contudo, quando foi solicitada uma expressão algébrica que traduzisse essa generalização, os alunos manifestaram dificuldades relacionadas com a interpretação da letra utilizada na expressão. Em consequência, nas primeiras tarefas foi necessário o apoio da professora e do investigador para que eles refletissem nas suas estratégias e traduzissem as generalizações encontradas em linguagem algébrica. O mesmo se verificou nos estudos de Pereira e Saraiva (2010), Branco (2008) e Barbosa (2007).

Relacionar diferentes representações e converter a linguagem natural em linguagem simbólica revelaram-se tarefas difíceis pois os alunos encontravam-se na fase de transição da Aritmética para a Álgebra, iniciando a aprendizagem de diversos conceitos em simultâneo, nomeadamente o de variável e o de relação funcional (relação implícita entre o termo e a respetiva ordem).

Assim, nas situações onde era necessário construir uma relação funcional, relacionando a ordem do termo (variável independente) com o termo (variável dependente), em algumas tarefas, os alunos revelaram dificuldades em construir simbolicamente essa relação de generalização, talvez por serem confrontados com dois valores desconhecidos (o termo e a respetiva ordem) a variar em simultâneo (Alonso et al., 1993). Estas dificuldades na escrita da expressão algébrica da generalização de uma sequência e das discussões que tiveram lugar nas aulas indiciam que grande parte dos alunos sentiu muita dificuldade na transição do concreto para o abstrato, como também aconteceu nos estudos de Pereira e Saraiva (2010), Branco (2008) e Barbosa (2007).

Nas últimas tarefas, os alunos já evidenciavam mais confiança e à-vontade em generalizar em linguagem natural, mas a maioria dos grupos continuou a evidenciar dificuldades em escrever uma expressão algébrica correspondente. Porém, alguns grupos conseguiram escrever uma expressão algébrica da regra em algumas sequências sem ajuda, como se verificou com alguns alunos no estudo de Branco (2008), mas ao contrário do que sucedeu no estudo de Pereira e Saraiva (2010).

Nas tarefas de padrões figurativos de crescimento verificou-se que os grupos geralmente completavam as tabelas com base na análise das figuras apresentadas — primeiros termos das sequências, nas perguntas de generalização próxima, e uma vez organizados os dados nas tabelas, para descobrirem a regra ou lei de formação das sequências, geralmente, abandonavam as figuras e ficavam-se por abordagens numéricas. O facto de não seguirem geralmente uma abordagem figurativa poderá dever-se à falta de hábito e à eventual dificuldade no raciocínio visual. Embora existam autores (e.g., Alonso et al., 1993; Socas et al., 1996) a referir que no caso das propriedades numéricas não estarem bem aprendidas, surgem dificuldades com as abordagens numéricas, no presente estudo os alunos optaram geralmente por ela, chegando a maioria dos grupos à regra ou lei de formação das sequências em linguagem algébrica, embora com alguma dificuldade e frequentemente usando um raciocínio indutivo.

Nos padrões figurativos, em termos gerais, nas questões de generalização próxima os grupos utilizaram as estratégias *Contagem* e *Diferença*, enquanto nas questões de generalização distante optaram, geralmente, pela estratégia *Explícita*, verificando-se nas últimas tarefas algumas ocorrências da estratégia *Tentativa-e-Erro*. Uma conclusão evidente destes resultados é o facto de os alunos mudarem geralmente de estratégia consoante se tratava de uma questão de generalização próxima ou distante e que a estratégia *Explícita* ocorreu, sobretudo, nas generalizações distantes. Além disso, nestas questões, o raciocínio dos alunos evoluiu geralmente para uma regra de carácter geral, permitindo indicar de imediato um termo dada a respetiva ordem e vice-versa.

Nas questões de generalização próxima, relativas aos padrões figurativos, em termos gerais, os alunos recorreram algumas vezes à estratégia *Contagem*, contrariamente ao que ocorreu no estudo de Alvarenga (2006), em que esta estratégia foi utilizada muitas vezes, o que poderá dever-se ao facto de os alunos que participaram neste último estudo serem do 5º ano, portanto num nível de escolaridade anterior.

Nos padrões lineares, os alunos utilizaram essencialmente generalizações algébricas construtivas, considerando os termos da expressão algébrica como representando as partes da figura que não se sobrepõem (as expressões surgem com “adições”). Também se verificou que os alunos não optaram geralmente pela estratégia *Objeto Inteiro*, tendo esta sido identificada em momentos de discussão, ainda que raramente. Além disso, houve alguns casos em que o foco da generalização se manteve no plano concreto (não geral), não se revelando o uso de materiais uma necessidade para se mostrar a generalização e, deste modo, os alunos não passaram pelo nível de generalização algébrica factual, talvez influência da sua faixa etária. Outros grupos, em certas situações, ficaram-se pelo nível de generalização algébrica contextual descritivo e utilizaram uma linguagem orientada para explicar a generalização com referências ao contexto. Em geral, apesar das dificuldades, os alunos, utilizando a linguagem algébrica para descrever a generalização, progrediram para o nível de generalização algébrica simbólica.

No padrão não linear (tarefa 11) verificou-se que os grupos utilizaram, em geral, nas questões de generalização próxima as estratégias *Explícita* e *Diferença* e nas questões de generalização distante as estratégias *Explícita* e *Tentativa-e-Erro*.

Em termos gerais, verificou-se, no conjunto de todas as onze tarefas, uma maior prevalência da estratégia *Explícita*, seguida das estratégias *Diferença* e *Contagem*, respetivamente. A estratégia *Explícita* é a que mais se adequa à faixa etária dos alunos, constituindo uma estratégia de generalização que lhes permite determinar de imediato qualquer termo da sequência Por outro lado, constatou-se ainda que os alunos mudaram geralmente de estratégia consoante se tratava de generalizações próximas ou distantes, estas últimas a desencadearem a formulação mais frequente de estratégias de generalização mais abstratas e eficientes.

Bibliografia

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: ME.

Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A., Dozagarat, J., Gutiérrez, S. et al. (1993). *Ideas y actividades para enseñar algebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Alvarenga, D. L. (2006). *A exploração de padrões como parte da experiência matemática de alunos do 2º ciclo*. (Dissertação de mestrado, Universidade do Minho). Lisboa: APM.

APM (1988). *Renovação do Currículo de Matemática*. Lisboa: Autor.

Barbosa, E. M. (2007). *A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação com alunos do 8º ano de escolaridade* (Dissertação de mestrado, Universidade de Évora). Lisboa: APM.

Barbosa, A. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga.

Bezuszka, S. J. & Kenney, M. J. (2008). The three R's: recursive thinking, recursion, and recursive formulas. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics – Seventieth Yearbook* (pp. 81-97). Reston, VA: NCTM.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Chua, B. L. & Hoyles, C. (2011). Secondary school students' perception of best help generalising strategies. National Institute of Education Nanyang Technological University, London Knowledge Lab University of London. Consultado em Abril 10, 2011, em http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/3/CERME7_WG3_Chua.pdf

Kaput, J. (1999). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. University of Massachusetts–Dartmouth. Consultado em Maio 13, 2010, em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf.

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Educational Research Journal,* 18(3), 3-28.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8º ano. Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico*. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM (Tradução portuguesa do original americano de 2000).

Pereira, M. & Saraiva, M. J. (2010). A escrita simbólica de uma generalização. *Educação e Matemática*, 107, 28-35.

Ponte, J. P. (2009). Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da Matemática e na formação de professores. In I. Vale & A. Barbosa (Orgs.), *Patterns: Multiple Perspectives and contexts in Mathematics Education* (pp. 169-175). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Ponte, J., Branco, N. & Matos, A. (2009a). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME.

Ponte, J., Matos, A. & Branco, N. (2009b). *Sequências e Funções*. Lisboa: ME.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education,* 40(1), 83-96.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 65-82.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics,* 73(3), 297-328.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernández, J. (1996). *Iniciación al algebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164.

Vale, I. & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática*, 85, 14-20.

Vale, I. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da Matemática — Propostas Curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (4th edition). Thousand Oaks: Sage Publications.

Manuel de Sousa Pereira. Mestre em Ciências da Educação, área de especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática. Professor de Matemática do Agrupamento de Escolas de Celorico de Basto, Braga, Portugal. **cab.mspereira@gmail.com**

José António Fernandes. Doutor na área de conhecimento de Metodologia do Ensino da Matemática. Professor Associado do Instituto de Educação, Universidade do Minho, Campus de Gualtar, Braga, Portugal. **jfernandes@ie.uminho.pt**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 109-120
ISSN: 1815-0640

Factores de la actitud y ansiedad al aprendizaje de la matemática en estudiantes adolescentes de la ciudad de Milagro. La relación de la estructura familiar y el rendimiento académico

Eduardo Molina Morán

Resumen

Las dificultades encontradas en la enseñanza de las matemáticas no solo implica aspectos metodológicos, también intervienen elementos afectivos relacionados con reacciones y predisposiciones frente al aprendizaje. Estos provocan incluso alteraciones psíquicas en niños y jóvenes cuando estudian esta asignatura. Dos de ellas son la actitud negativa y la ansiedad matemática, ambas compuestas por factores específicos como los que se dan en clase, con el maestro, en los exámenes, etc. Este trabajo analiza tales factores y sus relaciones, en estudiantes de siete colegios de la región de Milagro. El estudio reveló que la mayoría de las dimensiones de la actitud y la ansiedad están relacionadas. Además, se describe la relación entre la situación de la separación de los padres y el rendimiento matemático.

Abstract

The difficulties that are present in mathematics teaching don't only imply methodological aspects, there are also affective elements in the students related to reactions and predispositions towards learning. These provoke even psychological alterations in children and adolescents when they study this subject. Two of them are the negative attitude and the mathematical anxiety, both composed by specific factors as those who are present in class, with teachers, examinations, etc. This work is about the analysis of those factors and their relationship to students of seven schools in Milagro city. The study revealed that the majority of the dimensions of attitude and anxiety are related. In addition, the relation between the situation of the separation of parents and the mathematical performance is described.

Resumo

As dificuldades que se apresentam no ensino de matemática não só implica aspectos metodológicos, também intervem elementos afetivos, que se relacionam com reações e predisposições frente a aprendizagem. Isto provoca inclusive alterações psíquicas nas crianças e nos jovens quando estudam essa disciplina. Duas delas são a atitude negativa e a ansiedade matemática, ambas compostas por fatores específicos como os que se dão em aula, com o professor, nas provas, etc. Este trabalho analiza tais fatores e suas relações nos estudantes de sete escolas da região de Milagro. O estudo revelou que a maioria das dimenções da atitude e a ansiedade estão relacionadas. Contudo, se descreve a relação entre a situação da separação dos pais e o rendimento matemático

1. Introducción

La mayoría de las personas han advertido sobre las dificultades para aprender matemáticas. Si bien estas dependen de los planes de cada región o país, de los métodos y técnicas utilizadas, de las relaciones que el docente configure con sus estudiantes, etc., es evidente que a muchas personas les es fácil su aprendizaje. Pero también existe un número no despreciable cuyo aprendizaje matemático se convierte en una tortura. Este problema ha sido reconocido no solo por el público en general, sino también por la comunidad educativa incluyendo principalmente a los profesores de matemáticas.

Este problema aqueja a muchos adultos que encuentran dificultades para relacionarse en sociedad, ya que las matemáticas son un útil recurso para comunicarnos (Gómez, 2002). Sin embargo, es en la población estudiantil donde se centran los esfuerzos para tratar de disminuir la incidencia de este problema. Estas dificultades de aprendizaje se presentan a todo nivel, sea este preescolar, EGB, ESO, bachillerato y superior, y sus consecuencias son nefastas. Como ejemplo, tomemos la difícil situación de estudiantes de carreras de ciencias sociales con la asignatura Estadística. Muchos de ellos escogen su carrera universitaria considerando como una variable importante, la cantidad de conocimientos matemáticos necesarios para su estudio. Además, una vez graduados presentan serias dificultades para incorporar herramientas estadísticas a su campo laboral, priorizando técnicas de estudio cualitativas, más por evasión que por convicción (Molina y Díaz, 2010).

Para comprender mejor el tema, se debe aclarar los constructos más importantes:

- <u>Actitud</u>. Tendencia psicológica que es expresada a través de la evaluación de una entidad particular favorable o desfavorablemente en cierto grado.
- <u>Ansiedad</u>. Según el DSM IV (1995), es un estado de tensión psíquica incontrolable hacia un objeto o evento. Esta tensión se manifiesta a través de preocupaciones excesivas, pensamientos perturbadores, inquietud, impaciencia, dificultad para concentrase e irritabilidad. Puede ir acompañada de síntomas fisiológicos como tensión muscular, inhibición o excitación motora, sudoración, alteraciones estomacales, etc. Existen dos tipos de ansiedad: Una ansiedad generalizada y otra específica. Aunque la ansiedad generalizada tiene un origen, el sujeto no lo ha determinado, y es objetivo de una psicoterapia el encontrarlo y tratarlo. La ansiedad específica se caracteriza porque la persona logra precisar el objeto o situación que predispone el cuadro.
- <u>Ansiedad matemática</u>. Es definida como un miedo específico, desmesurado y aprendido, hacia algún evento relacionado con el uso de las matemáticas o con su aprendizaje (Muller, 1980). Es de carácter situacional, por lo que se debe distinguir entre ansiedad hacia el examen, ansiedad en clase, a resolver problemas, al profesor, u otros tipos de ansiedad que pueden surgir en situaciones académicas específicas (Zeidner, 1991).

Los síntomas específicos son:

1. Bloqueo. Los estudiantes presentan una sensación de incapacidad. Sienten haber chocado con una gran pared y no mejorarán porque llegaron a su límite en el entendimiento de las matemáticas.
2. Apremio. Los estudiantes acusan una sensación que todos saben la respuesta menos ellos. Sienten que han estado simulando saber matemáticas por años y todos los demás lo saben.
3. Pasividad. Presentan una actitud a creer que se posee o no una inteligencia matemática. No hay nada que ellos puedan hacer para ser mejores en matemáticas. Se relegan y dejan de prestar atención.
4. Falta de confianza. No confían en su capacidad. Dependen de la memorización de reglas a pesar de comprender los conceptos (Suinn, 1972).

La ansiedad matemática empezó a estudiarse hace 50 años aproximadamente, pero desde hace 30 años tomó fuerza cuando Sheyla Tobias, una educadora y activista feminista, irrumpe con estudios sobre los prejuicios relacionados a rendimiento académico en matemáticas y género. A partir de entonces y en los últimos 25 años, se han llevado numerosos estudios sobre ansiedad matemática principalmente en Estados Unidos (Onwuegbuzie y Wilson, 2003). En un estudio sobre la prevalencia de ansiedad matemática se estimó que aproximadamente un 75% de los alumnos experimentan niveles elevados de ansiedad (Onwuegbuzie, 2000). Otros autores han señalado que los alumnos suelen percibir estas asignaturas como obstáculos en el camino hacia la obtención del título (Perney y Ravit, 1990). Tanto así que los anglosajones idearon una frase tomada a partir de una artículo de Rossenthal (1992): “Statistics with Sadistics” que en español podría traducirse como “Aprender Estadística con sadismo”. Incluso se ha llegado a determinar como “Statisticophobia” estos sentimientos de los alumnos (Dillon, 1982). La enorme cantidad de investigaciones incluyen muchas variables como género, raza, estatus socioeconómico, edad, etc.

En Iberoamérica se han realizado estudios muy puntuales como los análisis de ciertos instrumentos de medida de la actitud y ansiedad matemática, así como de intervenciones terapéuticas en estudiantes con ansiedad matemática. En España se realizó un estudio de confiabilidad y validez de los tests y cuestionarios de actitud y ansiedad matemática más utilizados, concluyendo que los test más confiables para medir la ansiedad son el STARS (Statistics Anxiety Rating Scale) y el MARS (Mathematics Anxiety Rating Scale), y para la actitud, el ATS (Attitudes Toward Statistics Scale) y el SATS (Survey of Attitudes Toward Statistics) (Carmona, 2004). En Argentina se demostró el poder predictivo de la Teoría de Autoeficacia de Bandura aplicada en estudiantes universitarios con ansiedad matemática donde se utilizó el Mathematics Anxiety Scale (MAS) de Betz. En la Universidad Simón Bolivar de Venezuela se llevan programas de intervenciones cognitivo afectivas en estudiantes universitarios de Ingenierías con ansiedad matemática que han reprobado varias veces los cursos de Cálculo (Cardozo, et al., 2004). En Guayaquil - Ecuador, se realizó un sondeo como iniciativa de un centro psicopedagógico privado en conjunto con el Programa Prensa Escuela del Diario El Universo. Se partió de una serie de seminarios-talleres a docentes de escuelas públicas y se escogió un grupo de 30 estudiantes de 9no grado de EGB, adolescentes de 14 y 15 años de edad. El estudio concluyó que de todos los factores, el aula representa el espacio donde se registra la mayor ansiedad (Molina, 2008). Aunque el número de investigaciones en Iberoamérica va en aumento, la mayoría presentan resultados similares a los encontrados en Estados Unidos.

Enfocándonos en el Ecuador, encontrar una solución al problema de la ansiedad y actitud matemática no es sencillo ya que no se han realizado estudios formales sobre esta temática. El estudio propone explorar los factores más influyentes en la ansiedad y actitud matemática del cual partir para su posterior intervención. Además, las posibles soluciones incluirían acciones del profesorado que comprenderían no solo el dominio de la materia, sino también un profundo conocimiento de las leyes del desarrollo del niño y del adolescente en el aprendizaje. Esto implica algunas dificultades, tomando en cuenta que una parte del profesorado, aunque poseen título profesional, no poseen formación pedagógica (Molina, 2007).

El origen de la ansiedad matemática se debe a experiencias negativas al trabajar con profesores, tutores, compañeros, padres o familiares. Otras veces proviene de estrés o problemas personales que se suscitaron al mismo tiempo que se estaba aprendiendo un concepto en particular. En este caso, el estudiante asocia las matemáticas con lo que sucedió en ese momento (Tobias, 1993). Sin embargo, este tipo de experiencias no pueden ser consideradas como único elemento determinante en la aparición del conflicto. Este se incuba y se desarrolla cuando paralelamente se da un entorno pedagógico basado en un aprendizaje mecánico, propio de una educación tradicional que lleva solo al empleo de símbolos donde la comprensión no desempeña ningún papel en las matemáticas (Hiebert, 1984). Esto influye notablemente en la esfera afectiva donde las necesidades, tendencias, sentimientos e intereses tienen una enorme influencia en el aprendizaje y el empleo de la matemática (Reyes, 1984). La enseñanza que no se adapta al niño puede tener malas consecuencias tanto en el ámbito afectivo como en el intelectual, y puede sofocar el interés en las matemáticas. Esta enseñanza puede distorsionar la imagen que tienen de las matemáticas, su aprendizaje y su propia personalidad (Baroody, 1997).

Como consecuencia de estas experiencias, las creencias debilitadoras empiezan a desarrollarse (Carpenter, 1983). Estas creencias debilitadoras se expresan y fortalecen a través de cogniciones y verbalizaciones sobre su autoconcepto y autoestima, al exponerse a situaciones relacionadas con aprendizaje matemático. Incluso, su poder es tal que predispone al organismo antes de la presentación del estímulo estresor. Es así como se origina una actitud negativa frente a las matemáticas. De esta forma se relacionan una alta ansiedad con una negativa actitud. La actitud hacia la matemática como tendencia, se forma a lo largo del tiempo como consecuencia de las emociones y sentimientos experimentados en el contexto del aprendizaje de esta asignatura. La categoría actitud presentan una serie de dimensiones como los Afectos: sentimientos hacia la matemática y prejuicios de género, Competencia Cognitiva: conocimiento y habilidades en matemáticas, Utilidad: relevancia de la matemática en la vida cotidiana, y Dificultad: en el aprendizaje y relaciones con los docentes (Schau, et al., 1995). Estos y otros aspectos han sido base para la elaboración de instrumentos de medición. De forma inversa, aunque exista una adecuada metodología de enseñanza, los factores afectivos influyen notablemente en el rendimiento académico. Interesa estudiar las relaciones entre la estructura familiar y la predisposición a desarrollar ansiedad matemática. Este análisis se fundamenta en dos hechos: Uno relacionado con las particularidades propias de la forma en como se lleva la educación matemática. Al ser una ciencia exacta, muchos alumnos sienten presión por obtener una solución a un ejercicio planteado a como dé lugar. Si no se logra, se entra en "pánico". Muchos estudiantes de nivel medio prefieren asignaturas como Lenguaje o Estudios Sociales porque sus respuestas pueden expresarse de diferentes formas sin cambiar su idea principal (Tobias, 1993). Los docentes que aplican modelos tradicionales acostumbran a los alumnos a tratar de encontrar una única respuesta correcta a los problemas matemáticos, y cualquier error en los pasos para conseguirla puede modificarla, por lo que se requiere gran concentración. Esto provoca una tensión psíquica que no se suele presentar en las demás asignaturas en español[1]. Un nivel alto de tensión puede desembocar en ansiedad, y a mayor ansiedad, menor atención y concentración. Cualquier exceso de activación emocional afecta la atención selectiva. Ante una mayor dificultad en la tarea como un examen de matemáticas, hay mayor cantidad de elementos a considerar, y el sujeto no puede realizarla debido a la imposibilidad de enfocar su atención (Easterbrook, 1959). Así se explica una situación frecuente en esta localidad, muchos estudiantes presentan dificultades en matemáticas excluyendo las demás asignaturas.

El segundo hecho lo determina el nivel de autoconfianza del alumno como rasgo de su personalidad y su relación con la estructura familiar. Un estrés comienza con la percepción de un acontecimiento estímulo que se puede manifestar de diversas formas. Puede ser un acontecimiento vital importante, una molestia diaria o una circunstancia de vida crónica (Folkman y Lazarus, 1986). El divorcio o separación es considerado el segundo acontecimiento vital generador de altos niveles de estrés (Colmes y Rahe, 1967). Las circunstancias crónicas son situaciones persistentes y aversivas que se mantienen y cuyos estímulos estresores debilitan el bienestar psicológico general (Eckenrode, 1984). En la vida de un niño o adolescente, una separación de sus padres tiene efectos persistentes que afectan su equilibrio fisiológico, emocional y cognitivo, aunque pueda ser asintomático y/o inconsciente. La alteración emocional se manifiesta a través de sensaciones de ansiedad, irritabilidad, rabia, depresión y culpabilidad (Horowitz, 1980). En las alteraciones cognitivas el pensamiento es mucho más confuso, la memoria es a veces olvidadiza y la concentración sufre deterioros (Broadbent, 1982), además de añadir a nuestro patrón de pensamiento normalmente organizado, elementos de preocupación y autoevaluaciones negativas (Sarason, 1977).

Integrando estos dos hechos, se argumenta que en niños y adolescentes que viven con un solo progenitor, se evidencia un disminuido nivel de autoconfianza

[1] Se ha estudiado la ansiedad hacia el aprendizaje de idiomas extranjeros y se han diseñado instrumentos de medición de la misma como el The Foreign Language Classroom Anxiety Scale (FLCAS).

expresado en conductas ansiosas que generan un impacto sobre la concentración y por ende, en su rendimiento matemático. Se ha observado que de los estudiantes que presentan ansiedad matemática, alrededor de un 50% viven con un solo progenitor[2]. Esto hace intuir que existe una predisposición a desarrollar ansiedad matemática en niños que conviven con un solo progenitor. Cabe indicar que el factor de separación paterna no se considera estrictamente como divorcio. Casos de niños cuyos padres o madres laboran en otras zonas geográficas o en horarios que hacen muy difícil su encuentro por semanas o meses, también presentan las mismas conductas. Este fenómeno abordado cualitativamente, plantea la pregunta de si se presenta también en la población en general. Este estudio pretende responder esta interrogante.

2. Metodología

Por desarrollarse en la ciudad de Milagro, el presente trabajo fue realizado con la colaboración del Departamento de Investigación de la Universidad Estatal de Milagro, así como de los estudiantes de la Carrera de Psicología de la misma institución. Se trata de un estudio de enfoque cuanti cualitativo, ya que se incluyó como instrumentos, cuestionarios y entrevistas clínicas.

2.1. Muestra

Partiendo de la población estudiantil de la región de Milagro, se calculó una muestra representativa de 335 estudiantes de 9° gra do de EGB (Reinoso, 2009), es decir, adolescentes de 14 y 15 años. Esta muestra está distribuida en los 7 colegios estatales más numerosos: Colegio Velasco Ibarra, 17 de Septiembre, Otto Arosemena Gómez, Gral. Luis Anda Aguirre, Técnico Milagro, Naranjito y Paúl Ponce.

2.2. Instrumentos

Para medir el nivel de ansiedad matemática se administró la prueba STARS (Statistics Anxiety Rating Scale). Esta prueba fue escogida por su facilidad de contestación (51 ítems Tipo Likert), por ser breve (20 a 40 min) y porque mide varias dimensiones como:

A) Valor o percepción de los estudiantes acerca de la relevancia de la estadística.

B) Ansiedad surgida en situaciones donde hay que interpretar datos estadísticos.

C) Ansiedad en clase.

D) Autoconcepto negativo de cálculo cuando se resuelven problemas matemáticos.

E) Miedo a pedir ayuda a profesores o compañeros.

F) Miedo a los profesores de matemáticas.

La semántica de algunos ítems fue revisada y adecuada a nuestra realidad, así como el cambio de la palabra estadística por el de matemática, técnica que ya ha sido realizada con bastante frecuencia (Plake y Parker, 1982).

[2] Estos datos han sido tomados desde mi práctica profesional privada e institucional en clínica educativa matemática, desde 1990 hasta el 2009, con un total aproximado de 800 casos.

Para medir la actitud se administró el Test de Actitud a las Matemáticas de Fennema Sherman. También escogimos esta prueba Likert por su facilidad de contestación, por ser breve (20 a 40 min) y porque mide varias dimensiones, las cuales se derivan en los 108 ítems que posee la escala original. Por ser las más relevantes en el estudio y estar relacionadas con las hipótesis, se escogió 48 ítems correspondientes a las siguientes dimensiones:

A) Autoconfianza sobre el conocimiento de matemáticas.

B) Utilidad del contenido de la matemática.

C) Género: Percepción de la matemática como dominio masculino.

D) Percepción sobre las actitudes del profesor de matemáticas.

También se realizó una entrevista a cada estudiante para indagar sobre su historia matemática. En ella se preguntó aspectos relacionados con la historia familiar, intereses, hábitos y experiencias negativas con docentes o con la asignatura. El fin de esta entrevista clínica persiguió el objetivo de corroborar los resultados del test, así como evaluar en los estudiantes, la causa de sus dificultades en matemáticas, el tiempo de aparición de esas dificultades, y determinar si existe separación paterna en la familia, así como el tiempo de esa separación.

2.3. Procedimiento

Debido al alto número de alumnos que poseen la mayoría de colegios estatales, cada grado básico está distribuido en cursos o salones de 50 estudiantes cada uno, aproximadamente. De estos siete colegios, seis tienen más de 4 salones por grado, y un solo colegio posee 1 salón para ese nivel.

Se seleccionó de forma aleatoria un salón de 9no grado por cada colegio para administrar las pruebas, obviamente del último colegio se escogió al único salón disponible.

Una vez calificadas las pruebas, procedimos a entrevistar a todos los participantes.

Toda la información fue volcada en una matriz de doble entrada y analizada estadísticamente.

Las hipótesis planteadas fueron las siguientes:

HIPÓTESIS 1

a) Un alto nivel de ansiedad matemática está asociado con bajos niveles de actitud positiva matemática.
b) A mayor actitud positiva a aprender matemáticas por su utilidad, menor ansiedad ante situaciones cotidianas donde se la necesita.
c) A mayor actitud positiva de los docentes, menor temor de los estudiantes hacia ellos.
d) A mayor autoconfianza en el dominio de la Matemática, menor autoconcepto negativo frente a la resolución de problemas.

HIPÓTESIS 2

a) Los varones reportan menor ansiedad matemática.
b) Los varones tienen una mejor actitud hacia las matemáticas.

HIPÓTESIS 3

a) El tiempo de aparición de las dificultades en el aprendizaje matemático está asociado con el tiempo de separación de los padres.
b) La ansiedad matemática está asociado con la separación de los padres.

3. Resultados

Las hipótesis 1a, 1b, 1c, 1d y 3a se analizaron por medio del coeficiente de correlación de Pearson. La hipótesis 2a y 2b por medio de una Prueba t, y la hipótesis 3b se analizó por medio de una prueba Chi cuadrado.

En la tabla 1 se presentan los datos de las hipótesis 1a, 1b, 1c y 1d, las cuales se examinan por las correlaciones entre las dimensiones de los dos instrumentos administrados.

Hipótesis 1a: Se observa una correlación negativa media (r= -0.36, p< 0.01), entre una alta ansiedad y una actitud positiva del aprendizaje matemático. Cuánto más ansiedad presente a la matemática, peor será la actitud para aprenderla.

Hipótesis 1b: La actitud hacia la utilidad de la matemática y la ansiedad ante su uso en situaciones cotidianas (relevancia), también denota una correlación media (r= -0.39, p< 0.01).

Hipótesis 1c: La actitud positiva que genera el profesor de matemáticas y la ansiedad hacia el mismo están correlacionadas (r= -0.35, p < 0.01). La percepción del estudiante sobre un maestro que se preocupa por su aprendizaje, se relacionada con baja ansiedad hacia el mismo.

Hipótesis 1d: La correlación entre la autoconfianza en el dominio de la Matemática y el autoconcepto negativo frente a la resolución de problemas, no resultó significativa (r= -0.03). En estas dimensiones, la actitud no está relacionada con la ansiedad. Se puede auto percibir gran capacidad para la matemática al mismo tiempo que ansiedad hacia la misma. Por lo expuesto, se aceptan las hipótesis 1a, 1b y 1c, y no se acepta la 1d.

Tabla 1: Correlaciones entre las dimensiones del Test de Actitud y el de Ansiedad

ACTITUD	ANSIEDAD						
	Relevancia	Datos estadísticos	Clase	Auto Concepto	Solicitar Ayuda	Profesor	Ansiedad Alta Total
Auto Confianza	-0,44*	-0,02	-0,24*	**-0,03**	-0,11	-0,36*	-0,34*
Utilidad	**-0,39***	-0,05	-0,2*	-0,05	-0,09	-0,28*	-0,3*
Género	-0,21*	-0,08	-0,17*	-0,04	-0,06	-0,19*	-0,2*
Profesor	-0,37*	-0,1	-0,19*	-0,08	-0,13*	**-0,35***	-0,32*
Actitud Positiva Total	-0,43*	-0,07	-0,24*	-0,06	-0,12	-0,36*	**-0,36***

*p < 0.01

Hipótesis 2a: La tabla 2 indica los resultados. La diferencia entre la ansiedad registrada por los hombres y las mujeres no es significativa, por lo que no se acepta la hipótesis de investigación. Los hombres registran levemente mayor ansiedad que las mujeres, pero existe una mayor dispersión de los datos en las mujeres. Aunque aparentemente este hallazgo contradice nuestra hipótesis (por las medias), globalmente podemos afirmar, que los resultados concuerdan con los meta análisis realizados sobre ansiedad matemática y género. En estos, se indican que en general las mujeres presentan mayor ansiedad que los hombres.

Tabla 2: Prueba t de la Ansiedad entre las muestras masculina y femenina

Parámetro	Hombres	Mujeres
Media	151,877551	150,3776596
Varianza	615,7931227	922,428803
Observaciones	147	188
Grados de libertad	332	
Estadístico t	0,497329283	
P	0,309643032	
Valor crítico de t (una cola)	1,649456205	

Hipótesis 2b: Los resultados se detallan en la tabla 3. La diferencia de la actitud hacia el aprendizaje matemático entre los hombres y las mujeres resultó significativa. Pero esto contradice lo planteado. La actitud es mejor en las mujeres que en los hombres, por lo que la hipótesis de investigación no se acepta. Sin embargo, esto nos plantea algunas observaciones al comparar las tablas 2 y 3. Aunque la diferencia no es significativa, los hombres denotan mayor ansiedad que las mujeres. En consecuencia, estos tendrán una actitud positiva menor que ellas, corroborando los hallazgos entre actitud y ansiedad del presente estudio. Por otro lado, también se puede observar que se repite el patrón arriba descrito. Existe una mayor dispersión en los datos de las mujeres, cuestión que abriría nuevos temas de investigación.

Tabla 3: Prueba t de la Actitud entre las muestras masculina y femenina

Parámetro	Hombres	Mujeres
Media	161,115646	171,755319
Varianza	361,22626	616,314143
Observaciones	147	188
Grados de libertad	333	
Estadístico t	-4,4426213	
P	0,000*	
Valor crítico de t (una cola)	1,64944234	

*$p < 0.01$

Hipótesis 3a: La hipótesis se acepta. El tiempo de aparición de las dificultades en matemáticas y el tiempo de separación de los padres están correlacionados (r= 0.21, $p< 0.01$). Esta información fue obtenida en las entrevistas a los estudiantes que presentaban una historia con dificultades en el aprendizaje matemático, a los que se indagó sobre su respectivo inicio, curso y desarrollo.

Hipótesis 3b: Esta plantea que el origen de las dificultades en la asignatura está relacionado con la separación de los padres. La misma se sustentó argumentando que de los estudiantes que presentan ansiedad matemática, alrededor de un 50% viven con un solo progenitor, dato que fue ya explicado y formulado como frecuencia esperada en la prueba Chi cuadrado. Pero la información reveló que de los estudiantes que puntúan ansiedad matemática, un 33% viven con un solo progenitor contra un 67% que viven con ambos padres. La ansiedad matemática se relaciona con la separación de los padres, pero no como se esperaba: χ^2 (1, N=271) = 25.79, $p<0.01$. La diferencia resultó significativa, cuestión que era planteada por la hipótesis nula y no la de investigación.

Por último, es importante señalar que a partir de las entrevistas se conoció el buen desempeño metodológico de los profesores de matemáticas. Incluso un número no despreciable de la muestra (50%), indicaba que su asignatura preferida o el mejor maestro era el de Matemáticas. Se infiere que las dificultades en matemáticas, específicamente en esta población, se explican mejor por aspectos afectivos más que por aspectos metodológicos o curriculares.

4. Conclusiones

La ansiedad y actitud hacia la matemática están relacionadas. Cuando se le teme, se dificulta lograr una actitud positiva para su aprendizaje. Esto comprende también aspectos como el tener conciencia de su utilidad y la disposición para aprenderla y aplicarla a la cotidianidad. También se puede extrapolar este fenómeno a las reacciones frente al profesor. Cuando se le teme, no se dispone de actitud positiva. Pero hay dos aspectos que no están correlacionados: La autoconfianza y el autoconcepto. Se puede auto percibir gran capacidad para la matemática al mismo tiempo que ansiedad hacia ella.

Los datos sobre género arrojaron resultados diferentes a otros estudios, pero no convincentes. En nuestra muestra, las mujeres tienden a presentar menor ansiedad y mejor actitud a la matemática. Evidentemente, detrás de esto hay un factor emocional que nos brinda una información que se vuelve necesario profundizar. Aunque la aparición de dificultades en matemáticas se relaciona con la separación de los padres, no puede considerarse determinante. Lo que si es claro es que las dificultades en matemáticas se potencian por aspectos emocionales.

Por último, el estudio presenta el mérito de ser el primer esfuerzo serio por explorar el tema de la ansiedad y actitud matemática en la realidad ecuatoriana.

Bibliografía

Baroody, A. (1997). *El Pensamiento matemáticos de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Editorial Aprendizaje Visor.

Broadbent, D.E. (1982). *Cuestionario de fallas cognitivas*. Revista Británica de Psicología Clínica.

Cardozo, A. Yarnoz, M.C. y Meier, A. (2004). *Intervenciones cognitivo afectivas en estudiantes con bajo rendimiento en matemáticas.* Cibereduca.com. Congreso virtual.

Carmona, J. (2004) *Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística*. Research Journal of Stadistics Education.

Carpenter, T. P. (1983). *The effects of instruction on children´s solutions of aditions and substraction Word problems*. Educational Studies in Matehematics.

Dillon, W. A. (1982). *Statisticophobia*. Teaching of Psychology.

DSM IV, (1995). *Manual de Diagnóstico y Estadístico de las Trastornos Mentales*. Masson Editores.

Easterbrook, J. A. (1959). *The effect of emotion on cue utilization and the organization of behavior*. Psychological Review.

Eckenrode, J. (1984). *Impact of chronic and acute stressors on daily reports of mood.* Journal of Personality and Social Psychology.*Factores Asociados al Desempeño en Exámenes Escritos*. (n.d). Extraído el 12 de Mayo de 2002, del sitio http://www.desmory.edu/mfp/bassi.pdf.

Folkman, S. y Lazarus, R. S. (1986). *Study of emotion and coping during three stages of a college examination*. Journal of Personality and Social Psychology.

Gómez, J. (2002). *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona. Paidos.

Hiebert, J. (1984). *Children mathematics learning: The struggle to link form and undestanding*. Elementary School Journal.

Holmes, B. G. y Rahe, R. H. (1967). *The social readjustment rating scale*. Journal of Psychosomatic Research.

Horowitz, M.J. (1980). *Signos y síntomas del trastorno de estrés post traumático*. Archivos de psicología General.

Molina, E. (2007). *Aprender Matemáticas*. Guayaquil. Editorial del Diario El Universo, 1 Octubre.

Molina, E. (2008). *Ansiedad Matemática en estudiantes de 2 colegios de Guayaquil*. Guayaquil. Ponencia presentada en la Feria Internacional del Libro.

Molina, E. y Díaz, L. (2010). *Aspectos históricos que influyen en la enseñanza de la Estadística en las carreras de ciencia sociales*. Guayaquil. Revista Enfoque Administrativo. No 4.

Muller. J. M. (1980). *Test anxiety and the encoding and retrieval of information.* Hillsdale. Saranson Editors.

Onwuegbuzie, A.J. (2000). *Prevalence of statistics anxiety among graduate students*. Journal of Research in Education.

Onwuegbuzie, A.J. y Wilson, V.A. (2003). *Statistics anxiety: nature, etiology, antecedents, effects and treatments- a comprehensive review of the literature*. Teaching in Higher Education.

Perney, J y Ravit, R. (1990). *The relationship between attitudes towards statistics, math selconcept, test anxiety and graduate student´s achievement in an introductory stadistics course*. Education Research Association.

Plake, B.S. y Parker, C. S. (1982). The development and validation of a revised version of the Mathematics Anxiety Rating Scale. *Educational and Psychological Measurement.*

Reinoso, M. (2009). El Análisis matemático aplicado al cálculo de la muestra. El tamaño de la muestra es (in)finito. *Revista Ciencia UNEMI*, vol. 2, núm. 3, p. 40-45.

Reyes, L. H. (1984). Affective variables and mathematics education. *Elementary School Journal.*

Rosenthal, B. (1992). No more sadistics, no more sadist, no more victims. *UMAP Journal.*

Sarason, I.G. (1977). *El test de ansiedad: Conceptos e investigaciones*. Washington. Hemisferio editores.

Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T.L. y Del Vecchio, A. (1995). The devlopment and the validation of the Survey of attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement.*

Suinn, R. (1972). The MARS, a measure of mathematics anxiety. *Journal of Clinical Psychology.*

Tobias, S. (1993). *Overcoming math anxiety, revised and expanded*. Tucson. Norton & Company.

Zeidner, M. (1991). Statistics and mathematics anxiety in social science students: some interesting parallels. *British Journal of Education Psychology.*

Eduardo Molina Morán. Profesor y Psicólogo. Miembro del Departamento de Investigación Científica de la Universidad Laica Vicente Rocafuerte de Guayaquil Ecuador. Publicaciones principalmente en temas de psicología del deporte en la SIPD y en Revista Ciencia UNEMI**.** edo_molina@yahoo.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 121-130
ISSN: 1815-0640

Contribuciones didácticas para la comprensión del tema de Sumatoria de Riemann en Cálculo Integral

Luis Siero, Eilen Oviedo Gonzalez, Berenice Fong, Jorge Mata

Resumen

Dentro del área de cálculo Integral, las sumas de Riemann son un método fundamental para aproximar el área total bajo la gráfica de una función. Presentamos una descripción detallada de cómo resolver dichas sumatorias, utilizando un método sencillo y describimos su inmediata implicación en la parte didáctica de las matemáticas. Este resultado es fundamental y tiene importantes consecuencias en muchas áreas del cálculo y el análisis matemático, y se ha generalizado de diversas formas y en distintos contextos en las ciencias e ingenierías.

Abstract

In mathematics teaching, the calculus of the area of a integral, Riemann sums are a fundamental method to approximate the total area under the graph of a function. We present a detailed description of how to resolve these summations, using a simple method and describe its immediate involvement in the teaching of mathematics. This result is fundamental and has important consequences in many areas of computing and mathematical analysis, and has become widespread in various ways and in different contexts in science and engineering.

Resumo

Dentro da área do cálculo integral, somas de Riemann é um método fundamental para aproximar a área total sob o gráfico de uma função. Nós apresentamos uma descrição detalhada de como resolver esses somatórios, usando um método simples e descrever a sua participação imediata no ensino da matemática. Este resultado é fundamental e tem consequências importantes em muitas áreas da computação e análise matemática e tem se tornado comum em várias maneiras e em diferentes contextos da ciência e engenharia

1. Introducción

En la actualidad, las estrategias de enseñanza y aprendizaje dentro de la mayoría de las carreras universitarias se ha ido transformando como consecuencia de la adopción de variantes de las corrientes de conocimiento; como es el caso del Constructivismo, de acuerdo con Barr y Tagg (2002), donde el aprendizaje es considerado como resultado de la actividad del aprendiz. De igual forma, como se plantea en la corriente de las competencias del aprendizaje, como un resultado observable y por lo tanto, como la aplicación de conocimientos a la resolución de problemas de diversa índole (Biggs, 2000). En el caso de las materias del campo de las ciencias formales, como es el de las matemáticas, la adopción de estas corrientes por parte de los docentes ha demostrado una mejora paulatina del modelo didáctico adoptado.

La implementación de los diversos modelos de enseñanza son el apoyo docente para el logro del aprendizaje. Para efectos del presente trabajo nos referiremos al modelo tradicional, como aquel donde se privilegiaba únicamente la exposición docente, la resolución de problemas en el pizarrón y en cuaderno, así como la evaluación a través de formularios y exámenes, es decir el modelo basado únicamente en la enseñanza, considerando al alumno como un ente receptor del conocimiento donde su tarea principal era escuchar en silencio y resolver los problemas planteados de una manera automatizada (Martínez, 2004). En caso contrario, en este trabajo nos referiremos a los modelos actuales, como aquellos, donde el alumno es el protagonista del aprendizaje, y donde el docente es el encargado de diseñar los ambientes de aprendizaje más adecuado, así como no hay un sólo modelo didáctico definido, sino que el maestro va cambiando el modelo conforme lo va considerando necesario, mostrando su versatilidad, pero con los siguientes aspectos como común denominador: el considerar al alumno como un actor central en el proceso, al aprendizaje como resultado de la construcción colectiva de conceptos, del docente como diseñador de actividades diversas que realiza el alumno y demostraciones activas apoyadas en las Tecnologías de la Educación, o simplemente, el de desarrollar materiales didácticos que permitan al docente hacer demostraciones significativas ante los alumnos, y por último, donde la evaluación está basada en la resolución y aplicación de lo aprendido por el alumno, lejos de ser la memorización el único medio para el aprendizaje (Díaz Barriga, F, 2005).

Dentro de las carreras de ingenierías, en el apartado de matemáticas, una materia básica es la de cálculo Integral. Uno de los problemas a los que nos enfrentamos los docentes al impartir esta materia, es que los alumnos tienen un conocimiento confuso y en algunos casos erróneo del tema por lo que es importante explicarlo mediante ejemplos ilustrativos. Dentro de esta área de conocimiento existe el tema básico el cual es la llamada *Suma de Riemann* y es un método para aproximar el área total bajo la gráfica de una curva, la cual es fácil calcular utilizando el teorema fundamental del cálculo mediante una integral definida. Estas sumas son en honor del matemático alemán Bernhard Riemann, quien trabajo en el análisis de ellas.

Por esto mismo, un principio básico en la comprensión del concepto de integral es el de entenderla como una sumatoria de áreas y consiste en vislumbrar en conjunto, el concepto de áreas de Riemann. En la educación tradicional, este contenido por lo general confunde un poco a los alumnos, por lo que surge la necesidad de poder explicarla de una manera más clara y precisa para que el alumno pueda reproducir y aplicar el conocimiento adquirido, por lo que en este trabajo utilizando modelos vanguardistas. Se propone una metodología como material didáctico para desarrollar el concepto de este tema mediante el cálculo de una función sencilla.

A continuación se explica mediante modelos actuales cómo calcular el área de una región plana utilizando sumatorias de Riemman, para desarrollarlo, se escogió la figura de un triángulo rectángulo ya que es muy sencillo obtener el área de él y los alumnos de los primeros semestres de nivel superior saben cómo hacerlo. Una vez comenzado a trabajar con este concepto, se procederá después a extrapolar este análisis (algoritmo) a otro tipo de figuras o regiones y finalmente a calcular dicha área utilizando el teorema fundamental del cálculo.

2. Desarrollo

Primeramente, se traza un triángulo rectángulo de $10\ cm$ de base y $5\ cm$ de altura (figura 1). Calculando el área del triángulo rectángulo nos queda

$$A = \frac{(base)(altura)}{2} = \frac{10 * 5}{2} = \frac{50}{2} = 25\ cm^2$$

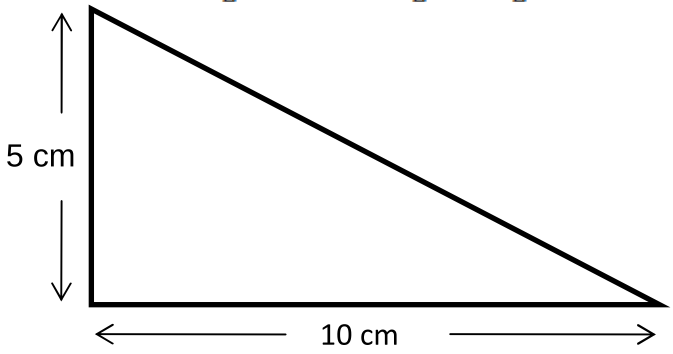


Figura 1: Triángulo Rectángulo con 10 cm de base y 5 cm de altura

Ahora se aproximará el área del triángulo rectángulo por medio de rectángulos inscritos (es decir rectángulos que se encuentran dentro de la figura). Se trazan rectángulos inscritos de $2\ cm$ de ancho a lo largo de la base del triángulo rectángulo como se muestra en la figura 2, después calculamos el área de cada rectángulo, si sumamos estas áreas se obtiene al área total de dicha figura como se muestra a continuación.

$$A_1 = (2)(1) = 2\ cm^2 \qquad A_3 = (2)(3) = 6\ cm^2$$

$$A_2 = (2)(2) = 4\ cm^2 \qquad A_4 = (2)(4) = 8\ cm^2$$

$$A_{T1} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20\ cm^2$$

Se puede observar que la diferencia entre ambos cálculos es bastante significativa ya que el área real del triángulo rectángulo es de $A_{real} = 25\ cm^2$ y la primera aproximación que calculamos es $A_{T1} = 20\ cm^2$, esto se debe a los espacios en blanco que se muestran dentro del triángulo rectángulo en la figura 2.

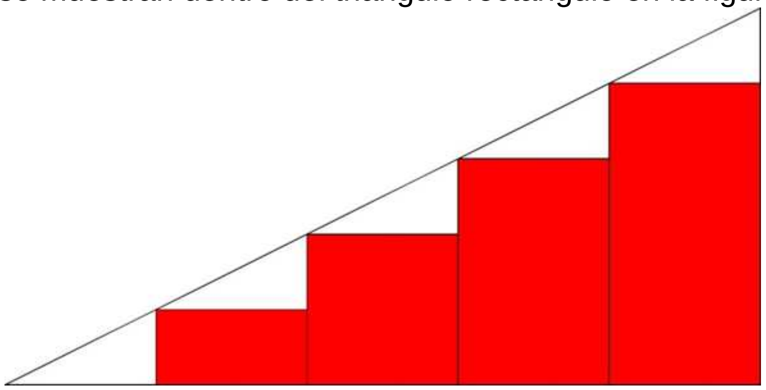


Figura 2. Triángulo con rectángulos inscritos de 2 cm de ancho

Si se quiere obtener un cálculo más exacto, entonces haremos los espacios en blanco más pequeños partiendo los rectángulos a la mitad tendremos rectángulos inscritos de $1\ cm$ de ancho a lo largo de la base del triángulo como se muestra en la figura 3. De igual manera calculamos las áreas de los rectángulos y obtenemos.

$$A_1=(1)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\qquad A_4=(1)\left(\frac{4}{2}\right)=\frac{4}{2}\qquad A_7=\frac{7}{2}$$
$$A_2=(1)\left(\frac{2}{2}\right)=\frac{2}{2}\qquad A_5=(1)\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\qquad A_8=\frac{8}{2}$$
$$A_3=(1)\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\qquad A_6=(1)\left(\frac{6}{2}\right)=\frac{6}{2}\qquad A_9=\frac{9}{2}$$
$$A_{T2}=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\frac{7}{2}+4+\frac{9}{2}=\frac{45}{2}=22.5\ cm$$

Analizando los resultados y observando la figura 3, nos damos cuenta que todavía existe una diferencia amplia entre el área real del triángulo y las dos aproximaciones calculadas, aunque la diferencia entre el área real y la segunda aproximación es menor. Por esta razón podemos inferir que si partimos los rectángulos a la mitad se reducirá el espacio en blanco y por lo consiguiente se obtendrá una aproximación más exacta del área de la región deseada.

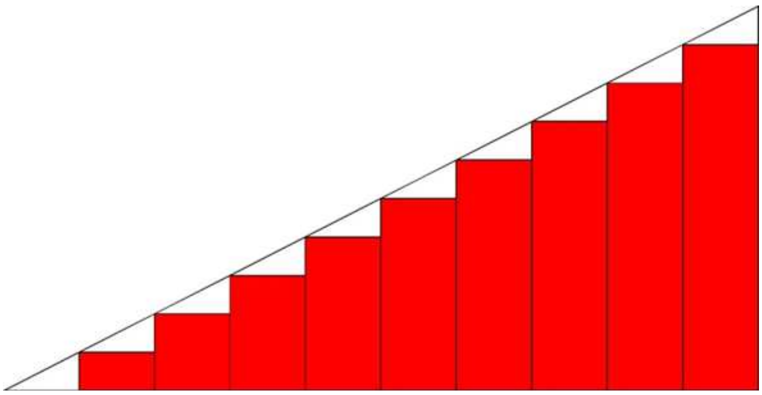


Figura 3: Triángulo con rectángulos inscritos de 1 cm de ancho

Por lo anterior, es que ahora se trazan rectángulos de $\frac{1}{2}\ cm$ de ancho a lo largo de la base del triángulo rectángulo como se muestra en la figura 4, hacemos énfasis en los espacios en blanco que se encuentran dentro del triángulo rectángulo en que son mucho más pequeños que los que están en la figura 2, calculando el área análogamente obtenemos

$$A_1=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}\qquad A_6=\frac{6}{8}\qquad A_{11}=\frac{11}{8}\qquad A_{16}=\frac{16}{8}$$
$$A_2=\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{8}\qquad A_7=\frac{7}{8}\qquad A_{12}=\frac{12}{8}\qquad A_{17}=\frac{17}{8}$$
$$A_3=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}\qquad A_8=\frac{8}{8}\qquad A_{13}=\frac{13}{8}\qquad A_{18}=\frac{18}{8}$$
$$A_4=\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{8}\qquad A_9=\frac{9}{8}\qquad A_{14}=\frac{14}{8}\qquad A_{19}=\frac{19}{8}$$

$$A_5 = \left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} \qquad A_{10} = \frac{10}{8} \qquad A_{15} = \frac{15}{8}$$

$$A_{T3} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} + \cdots + \frac{19}{8} = \frac{190}{8} = 23.75\ cm^2$$

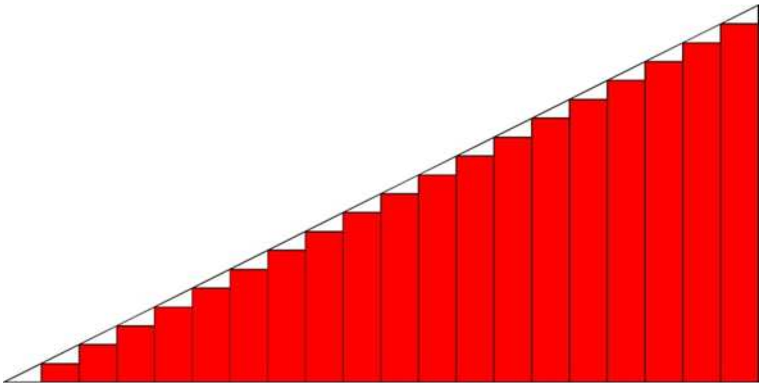


Figura 4 Triángulo con rectángulos inscritos de $\frac{1}{2}$ cm de ancho

Comparando la tercera aproximación del área del triángulo que es $A_{T3} = 23.75\ cm^2$ con el área real del triángulo que es $A_{real} = 25\ cm^2$ podemos observar que es más exacta, siguiendo el mismo razonamiento dividimos los rectángulos inscritos a la mitad obteniendo rectángulos inscritos de $\frac{1}{8}\ cm$ de ancho en la figura 5 y calculamos el área, obtenemos

$$A_{T4} = \frac{1}{32} + \frac{2}{32} + \frac{3}{32} + \frac{4}{32} + \cdots + \frac{39}{32} = \frac{780}{32} = 24.38$$

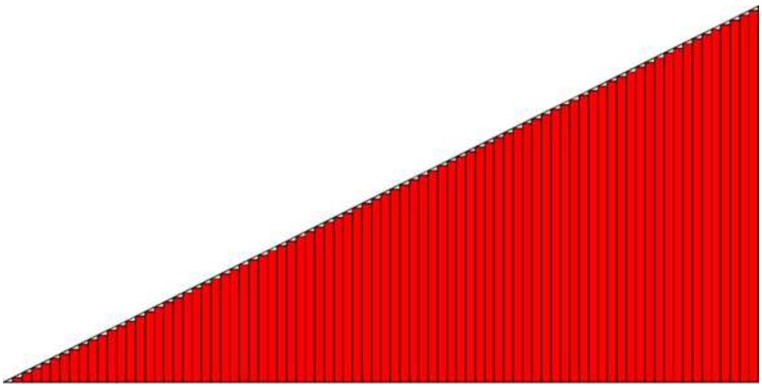


Figura 5. Triángulo con rectángulos inscritos de $\frac{1}{8}$ cm de ancho

Ahora si volvemos a partir los rectángulos inscritos a la mitad obtendríamos un ancho de $\frac{1}{16}\ cm$ por cada uno de los rectángulo y si calculamos obtenemos

$$A_{T5} = \frac{1}{128} + \frac{2}{128} + \frac{3}{128} + \frac{4}{128} + \cdots + \frac{39}{128} = \frac{3160}{128} = 24.69$$

Si observamos que la quinta aproximación está muy cercana al área real podemos inferir que si hacemos los rectángulos inscritos tan pequeños que no exista ningún espacio en blanco podríamos tener una aproximación igual a la del área real del triángulo rectángulo. Resolviendo análogamente, pero tomando rectángulos circunscritos se puede observar que existe un excedente en el área a calcular, conforme el rectángulo se haga más pequeño ese excedente disminuirá como se muestra en la siguiente figura:

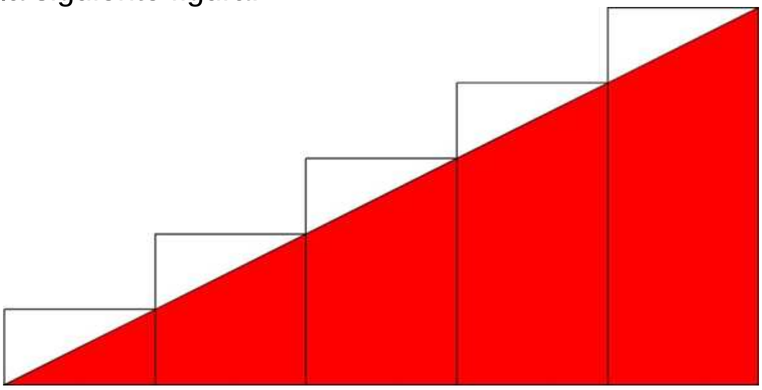


Figura 6. Triángulo con rectángulos circunscritos de 2 cm de ancho

Comparando los cálculos de los triángulos inscritos con los triángulos circunscritos podemos observar conforme vamos haciendo los rectángulos más pequeños más se acerca al valor real del área del triángulo rectángulo de figura 7.

$A_{c1} = 30.00\ cm^2$ Rectángulos circunscritos con tamaño de $2\ cm$ de ancho.

$A_{c2} = 27.50\ cm^2$ Rectángulos circunscritos con tamaño de $1\ cm$ de ancho.

$A_{c3} = 26.25\ cm^2$ Rectángulos circunscritos con tamaño de $\frac{1}{2}\ cm$ de ancho.

$A_{c4} = 25.63\ cm^2$ Rectángulos circunscritos con tamaño de $\frac{1}{8}\ cm$ de ancho.

$A_{c5} = 25.31\ cm^2$ Rectángulos circunscritos con tamaño de $\frac{1}{16}\ cm$ de ancho.

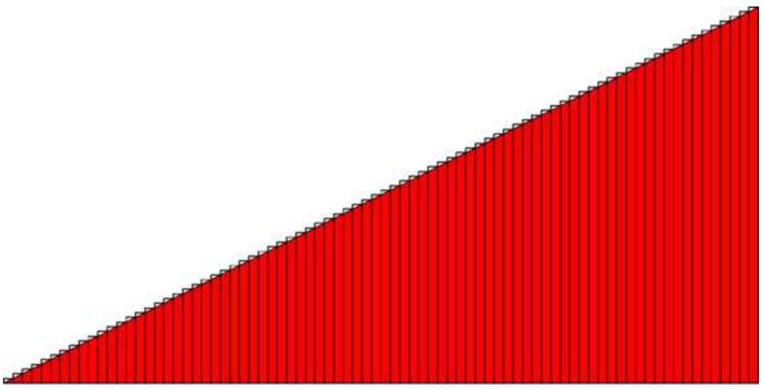


Figura 7: Triangulo con rectángulos circunscritos de $\frac{1}{8}$ cm de ancho

Ahora si seguimos haciendo más pequeños los rectángulos ya sean inscritos o circunscritos podemos darnos cuenta que ambos cálculos tienden a un valor de $25\ cm^2$ el cual es el valor real del área del triangulo rectángulo.

Por esta razón, si tenemos un número infinito de rectángulos tan pequeños como nosotros queramos, podemos encontrar el área de cualquier región con bastante exactitud, por lo que sabemos que el área se obtiene de la siguiente manera,

$$\text{Área de la región} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Donde $f(c_i)\,\Delta x$ en este caso, es la función que describe nuestra recta y la cual es idéntica a la integral definida que sería:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Para la resolución de esta integral, podemos utilizar los métodos tradicionales, pero, al entender la integral como una sumatoria, mediante este ejemplo, vemos que el concepto y el resultado es más comprensible ya que se ha entendido la idea global de la sumatoria y su analogía con la integral definida.

A continuación detallamos parte de la dinámica didáctica que se utilizaría en una educación tradicional que consiste como primer argumento en definir directamente el *Teorema Fundamental del Cálculo* y las propiedades de la llamada Integral de Riemann. Posteriormente está su aplicación en la resolución de problemas, muchas veces sin entender completamente el concepto.

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable definida en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, se define una nueva función:

$$F(x) = \int_x^a f(t)dt$$

Entonces *F* es continua en $[a, b]$. Aparte, si *f* es continua en un punto *c* incluido en el intervalo (a,b), entonces podemos decir que *F* es derivable en *c* y:

$$F'(C) = f(C)$$

Propiedades de las Funciones de Riemann

- Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es Integrable.
- Toda función continua y acotada en un intervalo cerrado y acotado, excepto en una cantidad numerable de puntos, es integrable.
- Recíprocamente, si una función acotada definida en un intervalo cerrado y acotado es integrable, entonces es continua en ese intervalo excepto como mucho en una cantidad numerable de puntos.

- Toda función monótona y acotada en un intervalo cerrado y acotado es integrable. (Courant y John, 1999)

Como podemos ver, un método didáctico moderno basado en una enseñanza en la que participen los alumnos directamente, utilizando cierta información matemática elemental y que les sea familiar, es mucho más completo que el entendimiento generado sólo en conceptos de la antigua educación tradicional. Dentro de las competencias, es importante remarcar, que los actuales métodos didácticos son más eficientes que los utilizados en la enseñanza tradicional, sobre todo en áreas de ciencias exactas.

Aplicaciones

Mencionamos a continuación algunas de las aplicaciones prácticas de la integral de Riemann:

- Cálculo de volúmenes de revolución.
- Cálculo de la longitud de una curva.
- Cálculo del área lateral de una superficie de revolución.

Entendiendo por volumen de revolución el cuerpo tridimensional generado por un área plana que da vueltas alrededor de un eje (eje de simetría del volumen), mencionamos solamente algunos de los volúmenes más conocidos:

- Cilindro de revolución: lo genera el área plana que define un rectángulo cuando gira alrededor de uno de sus lados. (Apóstol, 1990) y (Courant y John, 1999)
- Esfera: Se genera un semicírculo cuando gira alrededor del diámetro.
- Cono de revolución: lo genera el área plana que define un triángulo rectángulo cuando gira alrededor de uno de sus catetos. (Apóstol, 1990) y (Courant y John, 1999)

Este último caso es el que aplicamos en nuestro ejemplo. Con esta misma función que es la hipotenusa del triángulo, si la hacemos rotar, generamos un cono de volumen *V.*

El volumen *V* de revolución generado por un área que define una función continua $f(x)$ sobre un intervalo dado del eje de abscisas [$0,\ h$] y puede considerarse igual a la suma de los infinitos cilindros de altura infinitesimal que pueden ser construidos por cortes perpendiculares al eje de simetría del volumen *V* (el volumen del cilindro infinitesimal: superficie de la base –círculo de radio $f(x)$ por la altura Δx, es decir, está dado por $V_{cono} = \pi \cdot f(x)^2 \cdot \Delta x$ (Courant y John, 1999).

$$V_{cono} = \pi \int_0^h \left(-\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^2\right]_0^h = \frac{\pi R^2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}h^2 = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Por lo que el volumen del cono es: $V_{cono} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

3. Conclusiones

En este trabajo mostramos un modelo didáctico actual, como un método de enseñanza ideal para la comprensión del concepto de Integral Definida manejando las llamadas Sumas de Riemann. Utilizamos el ejemplo de un triángulo rectángulo que es por todos conocidos. Dividiéndolo en rectángulos inscritos y mediante sumatorias aproximamos el área bajo la función y con un número finito de sumatorias, logramos aproximar el área buscada y posteriormente lo comparamos con el resultado que nos daría la misma función en una integral definida, llegando al mismo resultado lo que contrastaría con los modelos tradicionales de enseñanza. Consideramos que este método es esencial en la comprensión del concepto de integral. Se muestran a continuación algunas de las aplicaciones prácticas de la integral de Riemann: Cálculo de volúmenes de revolución. Cálculo de la longitud de una curva. Cálculo del área lateral de una superficie de revolución. Es importante remarcar que los actuales métodos didácticos basados en competencias son más eficientes que los utilizados en la enseñanza tradicional, sobre todo en áreas de ciencias exactas.

Bibliografía

Apostol, T. (1990): C*alculus.* Segunda edición. Barcelona: Editorial Reverte.

Barr, Robert, B, John Tagg (2002): *De la enseñanza al aprendizaje, un nuevo paradigma para le educación pregrado*. Coordinación Nacional para la Planeación de la Educación Superior, SEP-ANUIES.

Biggs, John (2005): *Calidad del Aprendizaje Universitario*. Ed. Narcea, Tercera Edición.

Courant, R. y John, F. (1999): *Introducción Al Cálculo y Análisis Matemático*. México: Editorial Limusa.

Díaz Barriga, Frida, et al (2004): *Estrategias Didácticas para promover aprendizajes significativos*., Primera Edición, Ed. Mc.Graw Hill.

Martínez, Valcarcel, Nicolás (2004). *Los modelos de enseñanza y la práctica en el aula*. Recuperado en http//peremarques.pangea.org/dioe/modelosnicolas.doc, el 10 de diciembre del 2010.

Luis Siero. Licenciado en Matemáticas Aplicadas. Maestría en Oceanografía Física. Línea de investigación, “Didáctica de las Matemáticas” y “Prototipos Didácticos”. Coordinador del departamento de Matemáticas del Centro de Ingeniería y Tecnología CITEC-UABC. Universidad Autonoma de Baja California. **lsiero@uabc.edu.mx**

Eilen Oviedo Gonzalez. Licenciada en Administración y en Educación Preescolar. Maestría en Educación con especialidad en Formación Docente. Líneas de Investigación: “Formación de Competencias Docentes en Nivel Medio Superior y Superior” y “Nuevas tecnologías y desarrollo de competencias docentes”. Administradora del Centro de Ingeniería y Tecnología CITEC-UABC. Universidad Autónoma de Baja California. **eilen.oviedogonzalez@uabc.edu.mx**

Berenice Fong. Ingeniería en Ciencias Computacionales y Telecomunicaciones. Maestría en Electrónica y Telecomunicaciones. Línea de investigación, "Didáctica de las Matemáticas" y "Prototipos Didácticos". Profesor de tiempo completo de Matemáticas del Centro de Ingeniería y Tecnología CITEC-UABC. Universidad Autonoma de Baja California**.** bfong@uabc.edu.mx

Jorge Mata. Doctorado en Física Universidad de Barcelona España, Profesor de tiempo completo del Centro de Ingeniería y Tecnología CITEC-UABC. Universidad Autónoma de Baja California. jorge.mata@uabc.edu.mx

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 131-154
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

Propuesta didáctica para las traslaciones en el plano cartesiano con el uso de planilla de cálculo

Diego Cheuquepán, Joaquim Barbé Farré.

Introducción

Las transformaciones isométricas ocupan un lugar importante en los programas de Matemática de la educación chilena. Estas son estudiadas en la educación general básica y la educación secundaria, e incluyen aprendizajes esperados relacionados con simetrías, rotaciones, traslaciones y teselaciones.

La propuesta didáctica que se presenta está en el marco del proyecto de incubación científica PIC-201010 "*Enseñar traslaciones en el plano en primer año medio incorporando Tics. Propuesta didáctica para su estudio con apoyo de planillas de cálculo*" de la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile.

1. El contexto del problema

1.1. La enseñanza de la geometría en Chile

El estudio de la geometría ocupa un lugar importante dentro del curriculum nacional de matemática, sin embargo, es una de las áreas que presenta mayores dificultades para ser enseñada y aprendida.Esto se evidencia en los diversos estudios de cobertura curricular en educación básica y media realizados por la unidad de curriculum y evaluación del ministerio de educación.

Los resultados obtenidos en educación básica dan cuenta de que los docentes de estos niveles asignan una cantidad de tiempo considerablemente menor para el estudio de los contenidos geométricos respecto de otros temas como números y operaciones aritméticas. Por lo tanto, el problema se agrava aún más, si consideramos que el marco curricular asigna al área de geometría muchos más contenidos mínimos obligatorios que al área de números. Además, han observado que las actividades de geometría se centran exclusivamente en el reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos, lo que finalmente impide a los alumnos desarrollar habilidades de orden superior.

Frente a estas condiciones, Espinoza et al. (2007) afirma que esta dificultad de ir más allá de una enseñanza de la geometría centrada en la clasificación rígida y formal de figuras y cuerpos, se debe a la escasa formación matemática y didáctica de los profesores de estos niveles educativos. Más aún, el que tiendan frecuentemente a postergar la enseñanza de la geometría para finales del año escolar, provoca que su tratamiento sea completamente superficial.

Por otro lado, los resultados obtenidos en enseñanza media no son muy diferentes. Tal como ocurre en educación básica, la cantidad de tiempo asignado por los docentes al estudio de los contenidos de geometría es considerablemente menor respecto de otros temas como algebra y funciones. En efecto, los estudios concluyen que los docentes de matemática de enseñanza media, destinan en promedio, casi un 21% del tiempo disponible en este sector para el tratamiento de los contenidos mínimos obligatorios definidos para este eje temático.

Además, Carrasco (2004) plantea que existe un quiebre entre el trabajo geométrico que se realiza en educación básica y el que se realiza en educación media, lo que provoca que en ambos niveles la geometría se estudie de manera desarticulada. Como evidencia, el autor argumenta que el estudio de la geometría en básica tiene un carácter fuertemente experimental, basado en la observación y en la experiencia, mientras que en media se incorpora el discurso deductivo-argumentativo.

Por último, Fuentes y Garate (2003) evidencian que aunque los estudiantes deben argumentar afirmaciones en educación básica y media, la forma de alcanzar este objetivo es distinta en cada nivel. Mientras que los estudiantes de segundo ciclo básico argumentan sus afirmaciones basándose en hechos empíricos, es decir, comprobando que los fenómenos matemáticos ocurren y no demostrándolos matemáticamente, los de enseñanza media se basan en la lógica matemática y argumentos abstractos, sin embargo, los estudiantes de estos niveles no poseen las herramientas necesarias para abordar una demostración matemática formal.

Estos antecedentes nos permiten afirmar que la geometría es en Chile una de las áreas del curriculum de matemática que presenta mayores problemas. Sin embargo, estas deficiencias responden a una problemática mucho más compleja en la que intervienen diversos factores, y por tanto, no pueden ser atribuidas únicamente a la falta de preparación docente o a dificultades cognitivas de los alumnos.

1.2. El estudio de las transformaciones isométricas

Las transformaciones isométricas son estudiadas en distintos niveles del sistema educativo y forman parte del área denominada geometría. En educación media son estudiadas en primer año (etapa en que los alumnos tienen edades que fluctúan entre los 14 y los 16 años). La unidad aborda entre otros objetos, las traslaciones, rotaciones, simetrías y teselaciones de figuras planas. Sin embargo, su estudio presenta las mismas dificultades expuestas en la sección anterior.

Respecto de la atención pedagógica que reciben los contenidos de geometría, el estudio de cobertura curricular en primer año medio, da cuenta de que la unidad de transformaciones isométricas es la menos abordada por los docentes de matemática. Sólo el 32,9% de los docentes que formó parte del estudio afirmó haber estudiado la unidad con sus estudiantes.

Más aún, el estudio realizado por el CEOC-UTAL (2010) con estudiantes que finalizaban la enseñanza media, concluye que el 40% de los alumnos de la investigación afirma no recordar que le hayan enseñado los contenidos asociados a esta unidad.

Por último, Carrasco (2004) observa que el estudio de las isometrías en primer año medio se centra en el reconocimiento de los tipos de movimiento rígido, como se construyen y las propiedades que poseen. En síntesis, los estudiantes se ven enfrentados a un discurso tecnológico-teórico primero, y luego, estudian los problemas y sus técnicas.

1.3. Procesadores geométricos en la enseñanza de las isometrías

Se han realizado algunos estudios para determinar el grado de incidencia que los medios tecnológicos tienen en el aprendizaje de las isometrías.

Galaz (2005) realizó una exploración para estudiar las condiciones bajo las cuales el procesador geométrico Cabri Geometre II, permitía a estudiantes de primer año de enseñanza media obtener aprendizajes significativos en la unidad de transformaciones isométricas. Sin embargo, la investigación concluye que el uso del procesador geométrico como apoyo instruccional, no incide en que los estudiantes que formaron parte del estudio, obtuvieran aprendizajes significativos respecto de aquellos que no utilizaron este medio.

Dartnell (2008) investigó el efecto de entregar las herramientas matemáticas y de TIC adecuadas para entender los conceptos de traslación, rotación y simetría de figuras planas. Los recursos tic utilizados por el grupo experimental fueron una plataforma moodle, el software game maker y el software conexiones mágicas, junto con una tutoría que cada estudiante debía estudiar.

Entre las conclusiones del estudio destacan que los resultados obtenidos por el grupo experimental superan en un 65% a los resultados del grupo control, el programa de tutorías tiene un impacto positivo sobre el rendimiento de los estudiantes y el concepto vector es fundamental en el tratamiento de las isometrías del plano.

Aunque los resultados obtenidos por ambos autores no permiten concluir que el sólo uso de medios tecnológicos mejore los aprendizajes de los estudiantes, ambos concuerdan en que el aspecto dinámico de las isometrías propicia el uso de tecnologías lo que permite crear instancias donde los estudiantes puedan observar, interactuar y manipular dicho dinamismo.

2. Planteamiento del problema

Estos antecedentes nos permiten afirmar que el estudio de las isometrías presenta las siguientes dificultades:

1- Su estudio queda desplazado al final del año académico donde muchas veces se limita a unas pocas clases impidiendo un tratamiento coherente de los contenidos propuestos por el curriculum nacional.

2- Su tratamiento se enfoca en el reconocimiento de los tipos de movimiento rígido, como se construyen y las propiedades que poseen, sin profundizar en la resolución de problemas y en la adquisición de técnicas.

3- El uso de medios tecnológicos no garantiza mejoras en los aprendizajes de los estudiantes, pero permiten mostrar el aspecto dinámico de las isometrías.

4- Los alumnos de primer año medio no están adquiriendo las destrezas y habilidades esperadas para esta unidad.

Por lo tanto, nos situamos en la problemática general de la enseñanza de la geometría en educación media, centrándonos específicamente en primer año medio (14-16 años).

Considerando el estudio de las isometrías, en particular, de las traslaciones en el plano, nos enfrentamos a la problemática de diseñar, construir y validar[1] una secuencia didáctica para la transformación isométrica traslación, que incorpore como soporte principal las planillas de cálculo.

Postulamos que parte importante de las dificultades que evidencia la enseñanza de las isometrías, y en particular, de las traslaciones; están relacionadas con el tipo de actividad matemática que se propone, en el programa de estudio oficial y libro de texto, para que los estudiantes realicen. Más aún, propugnamos que existe una escasa articulación, a nivel curricular, en las propuestas de enseñanza oficiales en torno a las traslaciones en primer año medio.

Además, consideramos que nuestra propuesta didáctica permitirá superar las dificultades descritas y logrará que los estudiantes desarrollen un auténtico trabajo matemático. La justificación de este trabajo se basa en que el estudio de las transformaciones isométricas es fundamental para el tratamiento de la matemática, dado que "las isometrías se pueden emplear como elemento unificador, debido a que la geometría euclídea plana consiste en el estudio de las figuras del plano, que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones que se genera por las traslaciones y rotaciones en el plano (Boyer, 1996)". Más aún, la importancia del estudio de las traslaciones radica en que son biyecciones que conservan la incidencia, es decir, son isomorfismos de conjuntos ordenados. Por lo tanto, las traslaciones conservan las propiedades de la geometría afín.

Marco Teórico

2.1. La teoría antropológica de lo didáctico

Utilizamos como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard 1999) que se enmarca en el enfoque epistemológico en didáctica de las matemáticas iniciado por Brousseau en la década de los setenta.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD) plantea que la actividad matemática debe ser modelizada como una actividad humana, y por tanto, no se la debe considerar exclusivamente como un sistema de conceptos o como un proceso cognitivo.

Además, la TAD identifica lo didáctico con todo lo relativo al estudio, inclusive, conteniendo las nociones de enseñanza y aprendizaje. Así en el caso de la matemática, la noción de estudio aparece como una noción integradora que permite analizar bajo un mismo prisma el trabajo que realiza el matemático

[1] La experimentación de la propuesta se realizó con un grupo de estudiantes de primer año medio en el periodo noviembre-diciembre de 2010, sin embargo, los resultados obtenidos en dicha experiencia de aula escapan la extensión de este artículo.

investigador, el que realiza el profesor cuando enseña matemáticas o el del alumno que las aprende en la escuela.

Uno de los principios de la TAD es que el saber matemático se construye como respuesta al estudio de cuestiones problemáticas, surgiendo como el producto de un proceso de estudio. Dicho proceso, en cuanto actividad que conduce a la construcción (o reconstrucción) de conocimiento matemático, forma parte de la actividad matemática, es decir, las matemáticas son a la vez una actividad y el producto de dicha actividad.

La TAD propone la noción de Organización Praxeológica Matemática, Praxeología Matemática o simplemente Organización Matemática como modelo para describir el conocimiento matemático.

La noción de Organización Matemática (en adelante OM) corresponde a la concepción del trabajo matemático como estudio de tareas problemáticas, lo que implica, caracterizar, delimitar e incluso clasificar los problemas en “tipos de problemas”, junto con, entender, describir y caracterizar las técnicas que utiliza para resolverlos hasta el punto de controlarlas y normalizar su uso. Más aún, propone establecer las condiciones bajo las cuales éstas técnicas funcionan o dejan de ser aplicables. En última instancia, busca construir argumentos sólidos y eficaces que sostengan la validez de sus maneras de proceder.

Por lo tanto, una OM esta compuesta por cuatro categorías de elementos: tipo de tareas no rutinarias, técnicas matemáticas, elementos tecnológicos y elementos teóricos, que denotamos como **OM = [T, τ, θ, Θ]**.

2.2. El uso de planillas de cálculo

Además, se utilizaron planillas de cálculo como soporte principal para las diversas situaciones fundamentales construidas. Las razones para usar esta herramienta polivalente fueron las siguientes:

a. La hoja de cálculo permite construir un ambiente que permite la modelación de diversas situaciones geométricas, permitiendo la visualización de estos fenómenos.
b. La hoja de cálculo es una herramienta adaptable a una gran variedad de disciplinas, áreas y temas (Henao 1996), en particular, para ser usada en matemática (Liguori 1995).
c. La hoja de cálculo es usada por la mayoría de los docentes únicamente como una herramienta que permite realizar cálculos, tabular datos y graficarlos. Sin embargo, permite crear simulaciones que ayudan a los estudiantes a crear puentes entre las ideas intuitivas y los conceptos formales (López et al. 2006).
d. Para utilizar la herramienta no es necesario poseer conocimientos en un determinado lenguaje de programación, contratar programadores que desarrollen una aplicación o destinar diversos recursos en cursos de capacitación.
e. La herramienta permite que los alumnos y alumnas puedan interactuar con objetos matemáticos (puntos, segmentos, rectas, figuras, vectores) de forma simple y natural.

Sin embargo, consideramos que el sólo uso de las planillas de cálculo como medio tecnológico de enseñanza no garantiza que los estudiantes desarrollen destrezas o adquieran aprendizajes asociados a las traslaciones del plano. La calidad de este medio depende, más que de sus características dinámicas y técnicas, de una correcta articulación y coherencia de las tareas matemáticas que componen la obra a construir por los estudiantes.

3. Metodología de la investigación

La base metodológica de nuestra investigación, son los estudios exploratorios e interpretativos que se enmarcan en el paradigma cualitativo, pero que complementaremos con métodos cuantitativos.

Considerando que el estudio busca diseñar una secuencia de estudio en torno a las traslaciones del plano se consideraron tres etapas bien definidas:

I) Reconstrucción de un MER.

II) Análisis de la dimensión curricular.

III) Diseño y construcción de la secuencia didáctica.

Luego de determinar el estado del arte en torno al estudio de las isometrías, nos enfocamos en fijar un punto de vista epistemológico que nos permitirá realizar análisis de procesos didácticos concretos. Este punto de referencia lo denominamos Modelo Epistemológico de Referencia (en adelante MER) y es el resultado de un estudio histórico-epistemológico en torno a la traslación.

El MER construido es una posible reconstrucción racional de la OM en torno a las traslaciones en el plano, y por ende, es provisional. Este MER debe considerarse una hipótesis de trabajo que deberá contrastarse con los datos empíricos, y por tanto, está sujeta a modificaciones permanentes.

En este sentido, la TAD nos enseña que no existe un sistema privilegiado desde el cual analizar las organizaciones matemáticas.

A continuación, teniendo en consideración el MER, realizamos un análisis de la dimensión curricular para determinar el tipo de OM que la institución oficial propone a través del marco curricular, planes y programas, y libros de texto, buscando hallar su grado de completitud, coherencia y articulación.

Luego de caracterizar y comprender el problema de la enseñanza de las traslaciones en el plano, elaboramos una propuesta de enseñanza que permitiera superar las dificultades encontradas y cuyo soporte principal fueran las planillas de cálculo.

Para esto, seguimos los principios fundamentales de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau 1983) y para cada proceso elaboramos una situación fundamental que permitiera el primer encuentro y la exploración de los estudiantes de una problemática que involucra alguna noción o propiedad fundamental de la geometría en estudio. Todas las situaciones propuestas en la secuencia estarán soportadas en planillas de cálculo, entorno que nos permitirá dar dinamismo al estudio de las traslaciones en el plano.

4. Análisis y discusión de los principales resultados

4.1. Modelo Epistemológico de Referencia

Un MER fija una posición desde donde observar el sistema didáctico, permitiendo explicitar un punto de vista sobre el contenido matemático en juego en los procesos didácticos que se diseñan, implementan, analizan y evalúan.

Esta reconstrucción es producto de un análisis histórico-epistemológico en torno al objeto traslación. El MER que presentamos a continuación debe considerarse como una primera aproximación de carácter provisional, sujeta a continuas modificaciones, y por ende, dinámica.

Hemos caracterizado en cuatro estados la evolución del objeto traslación, las que hemos denominado: sintética, analítica, vectorial y afín. Es posible distinguir en este MER el desarrollo histórico de las nociones de: plano, vector, movimiento y punto.

Respecto de la noción de plano, constatamos que este concepto sirve como ente unificador y generalizador, dado que no es una herramienta para resolver problemas, sino que permite unificar y generalizar las técnicas existentes de cada modelo. Además, es importante destacar, que el desarrollo de la noción de plano conduce de manera progresiva a la noción de espacio vectorial. Esto se evidencia en que el estudio de las isometrías conduce a la demostración de la existencia de un isomorfismo entre el plano euclídeo y el plano cartesiano. Finalmente, la introducción de las coordenadas, permite definir el espacio cartesiano como un espacio vectorial de dimensión dos dotado de una forma bilineal definida (Artin 1963). Para resumir la evolución de cada modelo presentamos el siguiente esquema.

Modelo Sintético	Modelo Analítico	Modelo Vectorial	Modelo Afín
Una traslación del plano geométrico en la dirección de la recta *u* y a una distancia *d*, envía un punto A en un único punto A’ de tal manera que: - La longitud del segmento AA’ es *d*. - El segmento AA’ es paralelo a la recta *u*. - El punto A’ esta en el mismo semiplano en que se encuentra A respecto a la recta *u*.	Sea ā un vector y P un punto, ambos en el plano cartesiano. La traslación de vector ā sobre un punto P, es una aplicación del plano en sí mismo tal que: $T_{\vec{a}}(P) = P' \Leftrightarrow \overrightarrow{PP'} = \vec{a}$	Sea $(V, K, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Dado $u \in V$, la traslación de vector u es una aplicación tal que: $T_u : V \to V$ $x \to T_u(x) = x + u$	Sea (A, E, φ) un espacio afín. Dado $u \in E$, llamaremos traslación de vector u a la aplicación: $T_u : A \to A$ $p \to \varphi_p^{-1}(u)$

Tabla 1. OM de referencia

4.2. Análisis de la dimensión curricular

Utilizando la OM a enseñar caracterizada por Carrasco (2003), en torno a las isometrías del plano, procuramos mejorarla enfocándonos exclusivamente en la traslación. Para esto, analizamos el contenido matemático oficial en torno a las traslaciones en primer año medio[2], identificando en cada OM los cuatro tipos de elementos que la componen.

Finalmente, utilizando mapas de organizaciones matemáticas, describimos la relación e interacción entre los elementos que constituyen la OM de primer año medio.

A continuación, mostramos la descripción de los tipos de tarea y el mapa de la OM a enseñar obtenido del plan y programa oficial para primer año medio.

T_1: Aplicar una traslación a una figura geométrica dado el vector de traslación en el plano geométrico.

T_2: Aplicar una traslación a una figura geométrica dado el vector de traslación en el sistema de coordenadas cartesianas.

T_3: Aplicar composiciones de traslaciones sencillas para embaldosar el plano.

T_4: Reconocer traslaciones en la naturaleza.

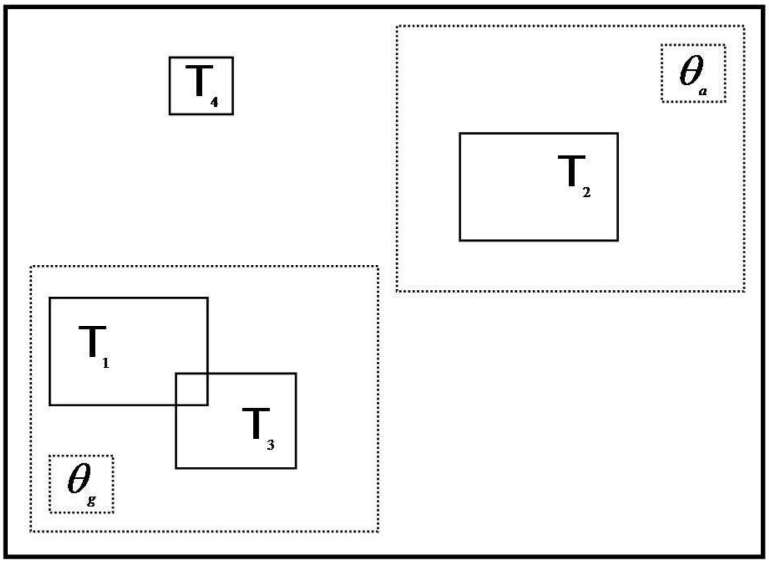


Figura 1. Mapa de la OM a enseñar en torno a las traslaciones en primer año medio.

La lectura que podemos realizar de este mapa es la siguiente:

1- Las tareas de mayor importancia son T_1 y T_2, y están referidas a la aplicación de una traslación sobre una figura geométrica dada.

2- Las tareas T_1 y T_2 están asociadas a planos distintos; el plano euclídeo (de la geometría sintética) y el plano cartesiano.

[2] Se utilizó el plan y programa de estudio oficial (sin ajuste) de matemática para primer año medio vigente al año 2010. Actualmente, por decreto 1358 se aprobaron nuevos planes y programas de estudio para primer y segundo año medio asociados al marco curricular ajustado correspondiente al decreto 254.

3- Las tareas T_1 y T_2 no comparten técnicas para su resolución, lo que refleja una discontinuidad entre las técnicas sintéticas y analíticas.
4- La tarea T_4 aparece aislada de las otras tareas matemáticas y no posee tecnologías asociadas.
5- Se evidencia un predominio de tareas asociadas a un trabajo de carácter sintético.
6- Conviven de manera desarticulada, elementos tecnológico-teóricos que componen dos modelos praxeológicos distintos.

A continuación, mostramos la descripción de los tipos de tarea obtenido del libro de texto oficial para primer año medio año 2010 de la editorial MC Graw Hill.

T_1: Aplicar una traslación a una figura geométrica en el plano cartesiano en un vector dado.

T_2: Determinar el vector de traslación dado un punto imagen y su punto homólogo en el plano cartesiano.

T_3: Reconocer la característica isométrica en la traslación de dos puntos.

T_4: Aplicar una composición de traslaciones a una figura geométrica en el plano cartesiano.

Por último, presentamos el mapa de tarea que refleja el recorrido que realiza el libro de texto respecto del mapa de tarea de la OM presente en el plan y programa de estudio de primer año medio.

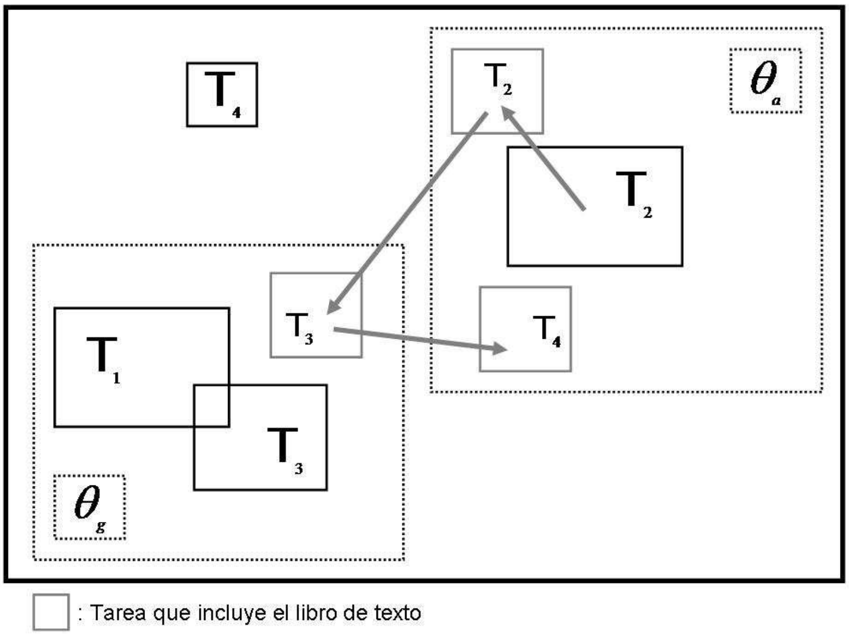


Figura 2 Recorrido del mapa de tarea

Del mapa de tarea y el recorrido de este observamos una clara desarticulación a nivel curricular respecto de las propuestas para la enseñanza de las traslaciones en primer año medio. Esto se refleja en que:

- El libro de texto aborda tareas matemáticas que el programa no propone.
- Las tareas matemáticas poseen distintas tecnologías que explican las técnicas que permiten resolverlas, mostrando la convivencia desarticulada de elementos que componen dos universos de trabajo matemático distintos.
- La OM analítica no es aprovechada como elemento de continuación del trabajo matemático de la organización sintética.
- No se evidencia complementariedad entre las técnicas asociadas al modelo sintético y el modelo analítico, lo que provoca una discontinuidad fruto de un análisis epistemológico superficial (Gascón 2002).

4.3. Diseño y construcción de la secuencia didáctica

Luego de los análisis desarrollados y descritos anteriormente, iniciamos la construcción de una secuencia didáctica que permitiera a alumnos y alumnas, desarrollar un auténtico trabajo matemático en torno a las traslaciones.

Una de las principales decisiones tomadas para el diseño de la secuencia didáctica, fue optar por el modelo analítico, lo que implicó la utilización del plano cartesiano.

Las diversas situaciones construidas han considerado las tareas matemáticas, las técnicas que le dan solución, las tecnologías que las explican y las teorías que las sustentan.

Todas las situaciones son presentadas en planillas de cálculo. Estas contienen un gráfico de coordenadas cartesianas, los elementos de la situación problemática y la barra de trabajo.

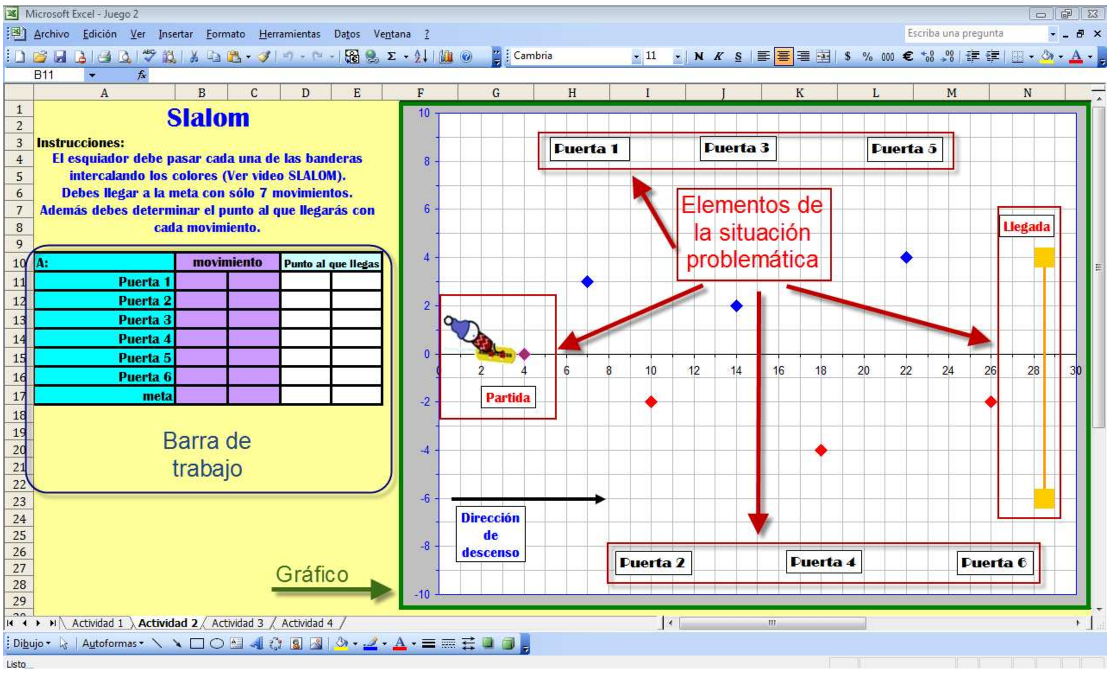


Figura 3: Tarea soportada en planilla de cálculo

La ventaja de usar las hojas de cálculo como soporte para el estudio de las traslaciones es que nos permiten presentar una situación cotidiana de la forma más real posible, es una modelización de la situación que se estudia.

Además, permite que los estudiantes puedan realizar una gran cantidad de intentos en cada actividad.

4.3.1. Tareas matemáticas y técnicas asociadas

Las tareas matemáticas que alumnos y alumnas deben desarrollar son las siguientes[3].

T_1: Determinar las coordenadas de un punto en el plano cartesiano.

T_2: Reproducir un polígono dados sus vértices, mediante puntos expresados como par ordenado.

T_3: Aplicar una traslación a un punto, dado el vector de traslación en el plano cartesiano.

T_4: Determinar el vector de traslación, dada la posición inicial y final de un punto.

Además, los alumnos y alumnas realizan los siguientes procedimientos para desarrollar las tareas matemáticas:

- **En la determinación de las coordenadas de un punto en el plano cartesiano:** En un punto la primera coordenada representa la distancia del punto al eje vertical Y, mientras que la segunda coordenada representa la distancia del punto al eje horizontal X.
- **En la reproducción de un polígono dados sus vértices mediante puntos expresados como par ordenado:** Representan los vértices de un rectángulo a través de un punto y determinan su ubicación en el plano mediante su abscisa y su ordenada. Trazan líneas rectas entre dos vértices consecutivos para reproducir un rectángulo.
- **En la aplicación de una traslación en el plano cartesiano de un punto dado el vector de traslación:** Para trasladar un punto A de coordenadas (x_1, y_1) dado el vector de traslación $\overrightarrow{BC}$ de componentes (a,b), se suma a la abscisa x_1 del punto A la componente a del vector $\overrightarrow{BC}$ y se suma a la ordenada y_1 del punto A la componente b del punto $\overrightarrow{BC}$.
- **En la determinación del vector de traslación, dada la posición inicial y final de un punto:** Dado un punto P y su homólogo P', determinan las coordenadas (x_1, y_1) de P y las coordenadas (x_2, y_2) de su punto homólogo P'. Restan la abscisa x_2 del punto P' con la abscisa x_1 del punto P y se resta la ordenada y_2 del punto P' con la ordenada y_1 del punto P.

[3] La propuesta didáctica construida plantea 6 tareas matemáticas, sin embargo, se han eliminado las tareas de la cuarta sesión que no se ejecutó.

4.3.2. Variables didácticas

Las variables didácticas que se consideraron para graduar la complejidad de las tareas matemáticas que alumnos y alumnas realizan son:

Contexto de las situaciones

- Geométrico y físico.

Ubicación de un punto respecto de los cuadrantes del sistema de coordenadas

- El punto se encuentra disponible en el cuadrante I o II o III o IV.
- Los puntos se encuentran disponibles en los cuadrantes I y II o I y IV o II y III o III y IV.
- Los puntos se encuentran disponibles en los cuadrantes I-II-III-IV.

Movimiento de un punto

- El punto se mueve horizontal al eje de abscisas.
- El punto se mueve horizontal al eje de ordenadas.
- El punto se mueve diagonal a un eje.

Vector en los cuadrantes del sistema de coordenadas

- El punto origen y el punto terminal del vector se encuentra disponible en el cuadrante I o II o III o IV.
- El punto origen y el punto terminal del vector se encuentran los cuadrantes I y II o I y IV o II y III o III y IV.

Cuadrículas del gráfico de coordenadas cartesianas

- Cuadrículas en los ejes x e y.
- Cuadrículas sólo en el eje x.
- Cuadrícula sólo en el eje y.
- Sin cuadrícula.

Escala del eje de abscisas X

- Se utilizan los intervalos [0,20], [0,30], [-20,0], [-15,15], [-12,12], [-10,10], [-20,20].
- Distancia entre marcas: 2, 3, 4 y 5 unidades.

Escala del eje de ordenadas Y

- Se utilizan los intervalos [0,20], [-20,0], [-20,20].
- Distancia entre marcas: 2, 3, 4 y 5 unidades.

Tipo de situación

Situaciones realizadas experimentalmente por los estudiantes, presentadas verbalmente, presentadas en video, presentadas en planillas de cálculo.

4.4. Breve descripción de las situaciones elaboradas para cada clase

La propuesta didáctica construida posee la siguiente secuencia.

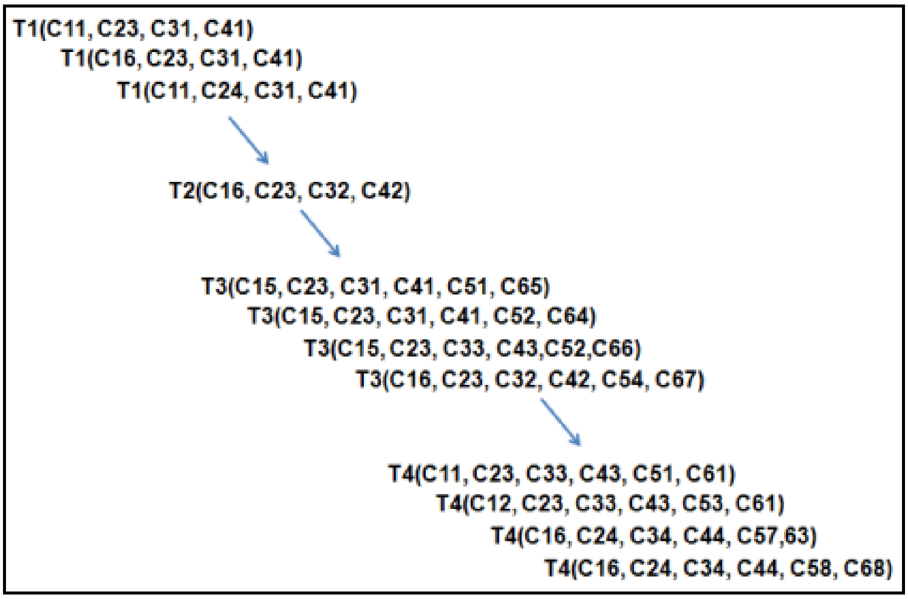


Figura 4: Secuencia didáctica construida

Por lo tanto, la secuencia construida es complejizada a través de variables didácticas que nos permite graduar las tareas matemáticas que los estudiantes realizarán durante el proceso de estudio.

4.4.1. Primera Clase

En esta clase alumnos y alumnas determinan las coordenadas de un punto en el plano cartesiano y reproducen un rectángulo dados sus vértices.

Momento de Inicio:

En diversas situaciones de la cotidianeidad surge la necesidad de determinar la ubicación exacta de un objeto.

Para describir la ubicación de un objeto solemos enunciar frases como arriba de, por debajo de, al lado de, junto a.

La actividad 1 busca que los estudiantes ubiquen una serie de objetos que se encuentran en un mueble. El sistema no posee cuadrículas, por tanto la ubicación que los estudiantes determinen no siempre será exacta.

Actividad 1

Pedro está jugando con sus amigos y le ha pedido a su madre que le traiga unos juguetes que están guardados en su closet, pero ella no sabe el lugar exacto donde se encuentran.

Utiliza la lista que Pedro hizo para su madre y en la imagen del closet marca la posición de cada uno de los objetos.

A los estudiantes se les proporciona la lista de juguetes que Pedro le entrega a su madre para que esta los busque.

Figura 5 Actividad 1, Clase 1

Las preguntas que orientan la actividad tienen relación sobre: cuáles formas de determinar la ubicación de los juguetes funcionaron, cuáles no y por qué, y sobre la relación o equivalencia entre ellas.

<u>Momento de Desarrollo:</u>

El estudio continua con la actividad 2, que presenta el siguiente problema:

> **Actividad 2**
>
> Observa la siguiente imagen del closet de Pedro.
>
> ¿Cuál es la posición en X y la posición en Y de cada uno de los siguientes objetos?

Al estudiante se le presenta una imagen del closet con los juguetes que almacena. Los juguetes están ubicados en puntos de intersección de las cuadrículas del plano cartesiano.

Figura 6: Actividad 2, Clase 1

Las preguntas que orientan la actividad tienen relación sobre: cuáles formas de determinar la ubicación de los juguetes funcionaron, cuáles no y por qué, y sobre la relación o equivalencia entre ellas.

> *"Se espera que concluyan que, para ubicar un punto en el plano de coordenadas rectangulares cartesianas, es necesario determinar dos números que indican la distancia de ese punto a cada uno de los ejes. La primera coordenada representa la distancia al eje vertical y, la segunda, la distancia al eje horizontal"*

El proceso continua con la actividad 3, donde se propone a los estudiantes determinar el punto que permite determinar la ubicación de unos objetos en el plano.

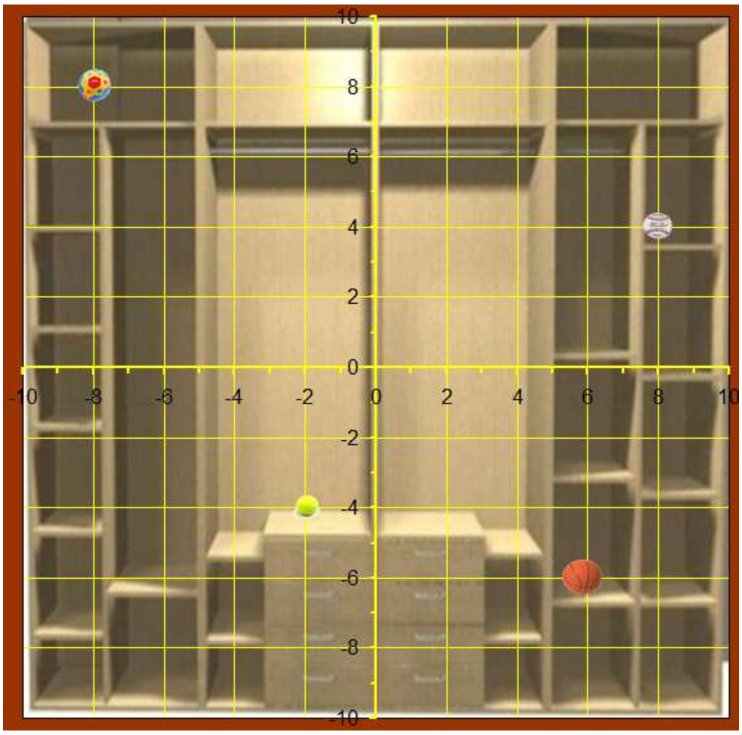


Figura 7: Actividad 3, Clase 1

Para complejizar la actividad anterior, se propone a los estudiantes la tarea de describir, verbalmente y utilizando el sistema de coordenadas ya establecido, la ubicación de un punto que no se encuentra en un cruce del cuadriculado.

Es de esperar que para el desarrollo de este problema, los alumnos reconozcan que para describir el punto en cuestión es necesario recurrir a los números decimales.

Esta actividad se puede realizar dos o tres veces partiendo con puntos cuya ubicación sea más sencilla (por ejemplo (-2.5, 7)) para concluir con un punto cuya ubicación sea más compleja de determinar (por ejemplo (-11.7, 8,1)) para cuyo caso, basta con que identifiquen de manera aproximada su ubicación.

Las preguntas que orientan la actividad tienen relación sobre: qué características poseen los puntos utilizados, cuáles son útiles, cuáles no y por qué.

Momento de Cierre:

La clase finaliza con la actividad 4, donde se plantea a los estudiantes la necesidad de comunicar la ubicación de una figura en el plano.

Actividad 4
Observa la siguiente imagen del mueble del televisor.
¿Cuál es la ubicación en el plano de cada uno de los electrodomésticos?

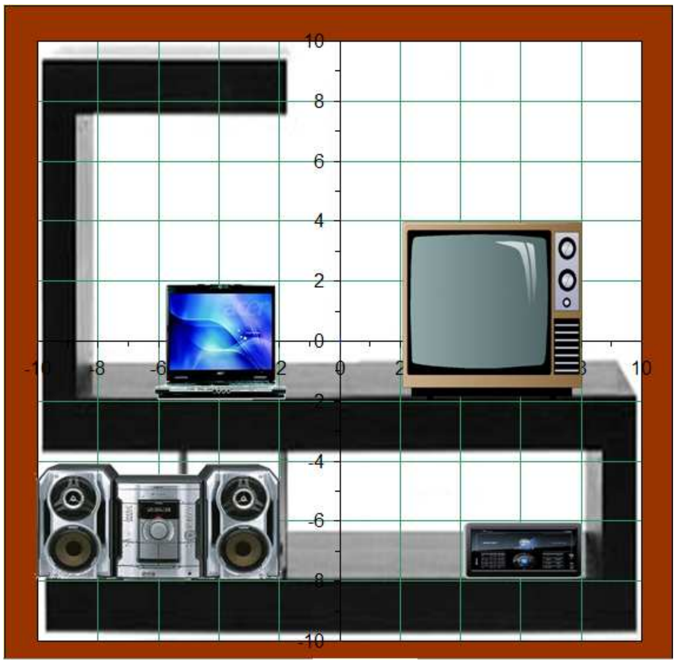


Figura 8: Actividad 4, Clase 1

El profesor conduce a la discusión de los estudiantes mediante la siguiente pregunta:

Para comunicar a un compañero la ubicación de los electrodomésticos en el plano ¿qué información le entregarías?, ¿es suficiente?, ¿Por qué?

> *"Se espera que concluyan que, para ubicar un cuadrilátero en el plano de coordenadas rectangulares, basta con ubicar sus vértices, determinar las coordenadas de cada uno y unirlos mediante rectas"*

4.4.2. Segunda clase

En esta clase alumnos y alumnas aplican una traslación a un punto, dado el vector de traslación, en el plano cartesiano.

Momento de Inicio:

La primera actividad que se propone a los estudiantes consiste en determinar cuánto debe avanzar el esquiador para cruzar la meta.

El estudiante no debe traspasar o tocar las líneas del contorno del camino y sólo puede realizar seis movimientos para llegar a la meta.

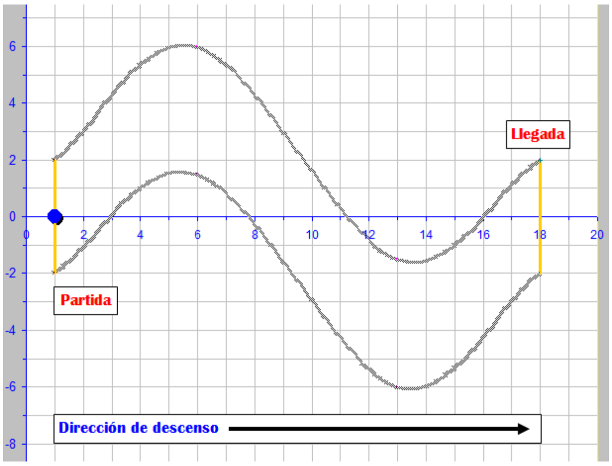


Figura 9: Actividad 1, Clase 2

Se debe especificar a los estudiantes cuál es la dirección de descenso para dar sentido a la problemática y velar por el cumplimiento de las reglas del juego.

Las preguntas que guían el problema tienen relación con: ¿Cuál es la menor cantidad de movimientos que puedes realizar para llegar a la meta? ¿Por qué?

Momento de Desarrollo:

La actividad 2 es acompañada de un video que contextualiza la problemática.

Se debe explicar a los estudiantes que el esquí es un deporte de montaña que consiste en el deslizamiento sobre la nieve.

Una de sus modalidades es el SLALOM, que consiste en descender pendientes muy inclinadas sorteando una serie de obstáculos, denominados puertas, que están cerca uno de otros en disposición zig-zag.

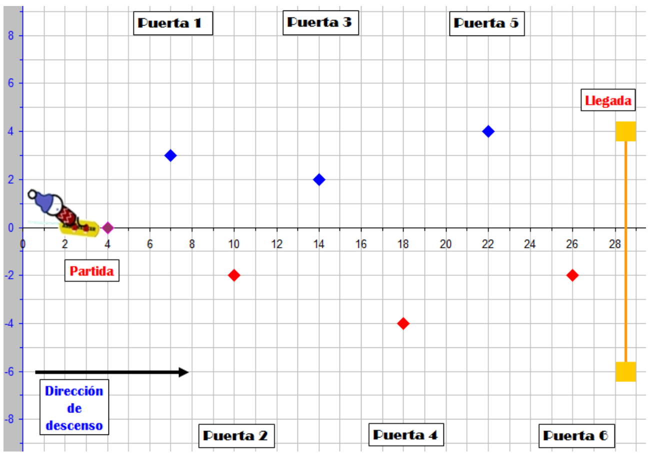


Figura 10: Actividad 2, Clase 2

La problemática busca que los estudiantes anticipen el punto al que llegarán luego de realizar un determinado movimiento.

No basta sólo con determinar cuánto se moverá, en que dirección y sentido, sino además determinar el punto exacto al que se llegará.

"Se espera que concluyan que, un vector se determina conociendo su punto origen (x_1, y_1) *y su punto extremo* (x_2, y_2)*. Restan la abscisa* x_2 *del punto extremo con la abscisa* x_1 *del punto origen y se resta la ordenada* y_2 *del punto extremo con la ordenada* y_1 *del punto origen"*

La actividad 3 es una competencia que se realiza entre parejas de estudiantes.

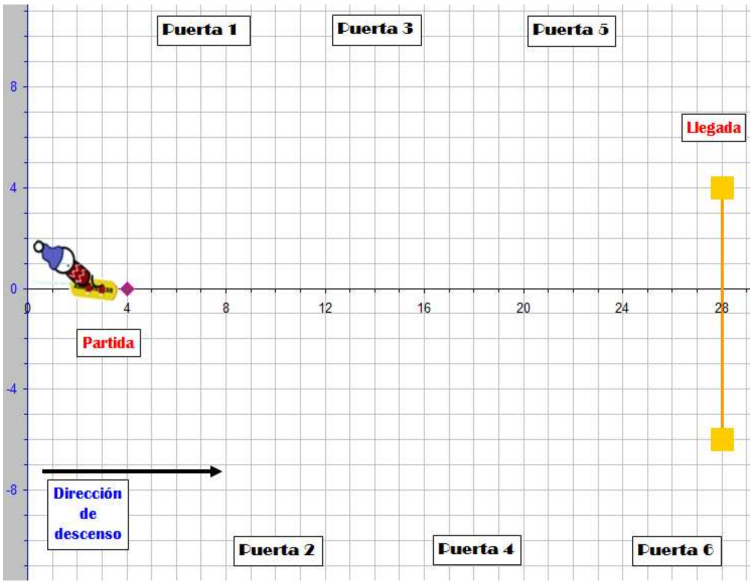


Figura 11 Actividad 3, Clase 2

Se busca que los estudiantes pulan la estrategia hallada en la actividad 2.

La complejidad de la actividad se refleja en que las puertas de slalom son puestas por cada contrincante, por tanto se utilizarán puntos que no se encuentra en un cruce del cuadriculado.

Momento de Cierre:

La última actividad busca que los estudiantes consoliden la técnica que han hallado a lo largo de la sesión. Es clave que los estudiantes comuniquen su estrategia a otros compañeros para dar sentido a la técnica que han desarrollado.

La problemática consiste en realizar una carrera de slalom, pero en un circuito diferente al anterior. En este se utilizan los cuatro cuadrantes en que se divide al plano cartesiano. Además, las puertas no se encuentran en los cruces de las cuadrículas disponibles.

"Se espera que concluyan que, en la aplicación de una traslación en el plano cartesiano de un punto dado el vector de traslación: Para trasladar un punto A *de coordenadas* (x_1, y_1) *dado el vector de traslación* $\overrightarrow{BC}$ *de componentes* (a, b)*, se suma a la abscisa* x_1 *del punto* A *la componente* a *del vector* $\overrightarrow{BC}$ *y se suma a la ordenada* y_1 *del punto* A *la componente* b *del vector* $\overrightarrow{BC}$*".*

4.4.3. Tercera clase

En esta clase alumnos y alumnas determinan el vector de traslación, dado un punto y su homólogo. Las cuatro actividades que se presentan giran en torno a un campo de golf.

Momento de Inicio:

La primera actividad planteada a los estudiantes muestra un campo de golf y dos jugadores ubicados en distintos lugares.

Se utiliza el primer cuadrante del plano y las pelotas de golf están ubicadas en el cruce de las cuadrículas. Además el hoyo 1 se encuentra en el cruce de las cuadrículas.

La problemática que se les presenta a los estudiantes es la siguiente:

Actividad 1
¿Cuál es el tiro que debe realizar cada golfista para enviar la bola al hoyo en uno?

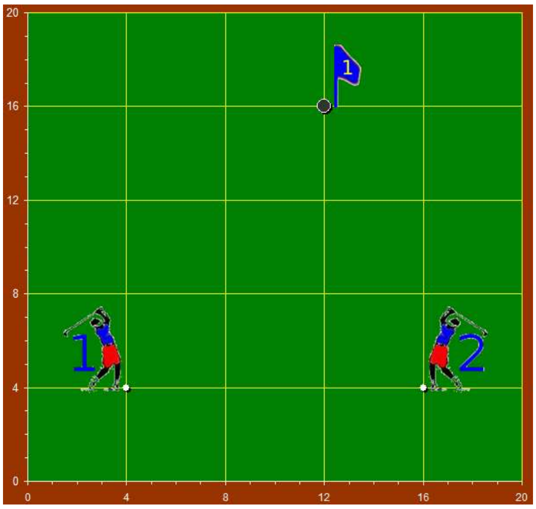


Figura 12: Actividad 1, Clase 3

La problemática se ve complejizada debido a que se solicita que este tiro debe ser un hoyo en uno. Además, las distancias entre las cuadrículas se encuentra a cuatro unidades una de otra en ambos ejes.

Las siguientes preguntas sirven de guía para esta actividad: ¿Cuál es el movimiento (x, y) que lleva la pelota de cada jugador al hoyo 1 con un sólo tiro? Y si cada jugador hace un hoyo en uno, ¿a qué punto (x, y) llega la pelota de cada jugador?

Para que la técnica de los estudiantes pueda ponerse a prueba, se debe ahondar en las siguientes preguntas:

Supongamos que la pelota del jugador 1 cambia de posición y ahora está en el punto (2,6). ¿Cuál es el movimiento que realiza la pelota para que el golfista consiga un hoyo en uno? Y supongamos que la pelota del jugador 2 cambia de posición y ahora está en el punto (18,10). ¿Cuál es el movimiento que realiza la pelota para que el golfista consiga un hoyo en uno?

En esta instancia, los estudiantes no poseen un apoyo visual que les permita realizar las operaciones.

Momento de Desarrollo:

La actividad 2 es manipulada a través de las variables didácticas para complejizar la tarea.

En esta, ni las pelotas de los jugadores ni el hoyo 2, se encuentran disponibles en el cruce de las cuadrículas. Además, la separación de las cuadrículas está a cuatro unidades una de otra en ambos ejes.

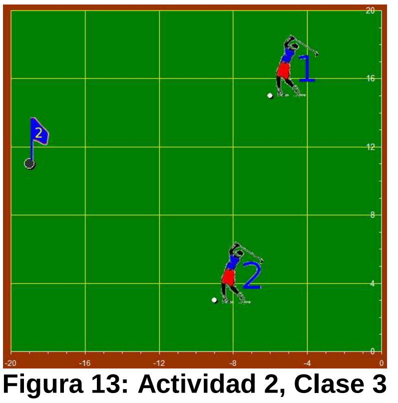


Figura 13: Actividad 2, Clase 3

Para que la técnica de los estudiantes pueda ponerse a prueba, se deben plantear las siguientes preguntas:

Supongamos que la pelota del jugador 1 cambia de posición y ahora está en el punto (-14,7). ¿Cuál es el movimiento que realiza la pelota para que el golfista consiga un hoyo en uno? Y supongamos que la pelota del jugador 2 cambia de posición y ahora está en el punto (-6,13). ¿Cuál es el movimiento que realiza la pelota para que el golfista consiga un hoyo en uno?

La actividad 3 amplia el campo de acción de los estudiantes, ahora se enfrentan al plano completo, nos hay cuadrículas, la marca numérica en cada eje está a cinco unidades una de otra en ambos ejes y los jugadores están en distintos cuadrantes.

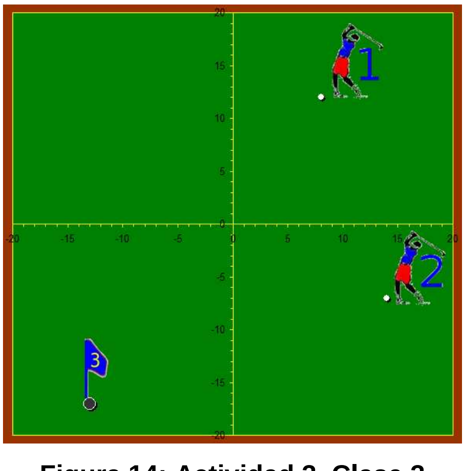


Figura 14: Actividad 3, Clase 3

Momento de Cierre:

Para finalizar la clase, se presenta a los alumnos un juego que deben realizar en parejas.

Los jugadores 1 y 2 están en el green y deben enviar la pelota de golf al hoyo 4 en el menor número de tiros.

Se debe considerar que cada bola de golf asociada a un jugador puede ser cambiada de ubicación. Además el hoyo 4 puede cambiarse de posición hacia cualquiera de los cuadrantes disponibles.

Con esta actividad se busca que los estudiantes puedan consolidar la técnica que han desarrollado a través de la clase, puliéndola y defendiendo su efectividad ante sus compañeros.

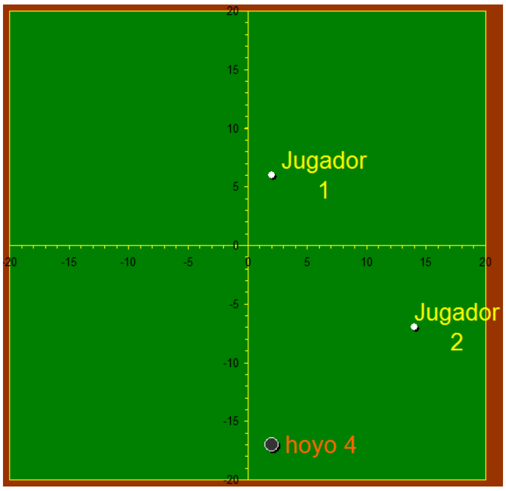


Figura 15: Actividad 4, Clase 3

Para la sesión:

> *"Se espera que concluyan que dado un punto P, determinan sus coordenadas (x_1, y_1) y las coordenadas (x_2, y_2) de su punto homólogo P'. Restan la abscisa x_2 del punto P' con la abscisa x_1 del punto P y restan la ordenada y_2 del punto P' con la ordenada y_1 del punto P"*

5. Síntesis y Conclusiones

El análisis histórico-epistemológico nos permitió realizar una descripción del MER en torno a las traslaciones, sin embargo, debe considerársele como una primera aproximación de carácter provisional. El MER descrito, muestra cuatro estados en la evolución del objeto traslación, y que hemos denominado: sintético, analítico, vectorial y afín.

Al considerar el MER, podemos notar una incoherencia en la OM a enseñar en primer año medio, dado que presenta tareas matemáticas en el plano euclídeo y cartesiano de manera desarticulada, con un disminuido discurso tecnológico-teórico que provoca el estancamiento de la OM a enseñar.

El análisis curricular en torno a las traslaciones en primer año medio ha mostrado una OM que evidencia un predominio de tareas asociadas a un trabajo de carácter sintético, por sobre las tareas asociadas a un trabajo analítico. Esta situación, provoca una ruptura en la continuidad existente entre las geometrías sintética y analítica, generando una desarticulación entre las técnicas asociadas a cada modelo. Más aún, el modelo analítico no es aprovechado como elemento articulador entre los modelos sintético y vectorial. Finalmente, se observa la convivencia desarticulada de elementos tecnológico-teóricos de los distintos modelos.

Estas consideraciones evidencian el fenómeno didáctico denominado desarticulación de la matemática escolar, en particular, la desarticulación en el estudio de las traslaciones en el plano.

Respecto a la utilización de planillas de cálculo como soporte principal para las tareas problemáticas, concluimos que permiten la modelación de diversas situaciones en el plano cartesiano, propiciando que los alumnos y alumnas puedan interactuar con puntos, segmentos, rectas, figuras y vectores de forma simple y natural. Además, es una herramienta conocida por docentes y alumnos, quienes la conciben como cercana y de un entorno amigable. Por último, utilizar esta herramienta polivalente no requiere conocimientos en un determinado lenguaje de programación, ni el trabajo de desarrolladores para construir una aplicación.

Sin embargo, consideramos que el sólo uso de las planillas de cálculo como medio tecnológico de enseñanza no garantiza aprendizajes efectivos en los alumnos. Propugnamos que la calidad de este medio depende, más que de sus características dinámicas y técnicas, de la correcta articulación y coherencia de las tareas matemáticas presentes en la propuesta didáctica que hemos diseñado.

La secuencia de estudio diseñada y construida ha considerado el modelo analítico. Esto debido a que la OM a enseñar en primero medio, es la continuación de la OM a enseñar en educación básica y que tiene relación con la OM sintética. Por lo tanto, la propuesta busca utilizar el modelo analítico como elemento articulador que permita avanzar hacia el modelo vectorial. Sin embargo, la propuesta puede ser mejorada, en el sentido de propiciar el surgimiento de la noción de espacio vectorial a partir de la noción de plano cartesiano.

Bibliografía

Artigue, M; Douady, R; Moreno, L; Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools, *Educational Studies in Mathematics* 59, 235-268.

Becerra, R. (1989). *Introducción a la geometría euclidiana*. Santiago: USACH.

Berenice, A. (2006). *Geometría: Desarrollo Axiomático*. Cali: ECOE Ediciones.

Berenice, A. (2002). *Notas de clase: Geometría en el plano y en el espacio*. Cali: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial El zorzal.

Carrasco, A. (2004). *La geometría en el paso de la básica a la media: Un análisis de las discontinuidades entre ambos niveles*. Presentada en la Universidad de Santiago de Chile para obtención del grado de Licenciado

CEOC-UTAL. (2010). Terremoto y PSU 2010.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* ICE/Horsori, Barcelona. España.

Cid, F; Muñoz, V. (2003). *Libro de texto oficial educación matemática primer año medio*. Santiago: Editorial Arrayán.

Dartnell, P. (2008). Innovando con transformaciones geométricas. Enlaces. Centro de educación y Tecnología. Chile.

Escobar, M; Soto, J. (2006). Geometría.cl/emtp. *Aprender geometría creando soluciones*. Santiago: Centro Comenius – USACH.

Espinoza, L; Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas en torno al objeto de límite de función: Una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las ciencias*, 18(3), 355-368.

Espinoza, L; Barbé, J; Mitrovich, D; Rojas, D. (2007). El problema de la enseñanza de la geometría en la educación general básica chilena y una propuesta para su enseñanza en el aula. *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Uzès. Francia.

Espinoza, L; et al. (2006). *Ampliación y reducción de figuras. Matemática cuarto año básico*. Segunda unidad didáctica. Santiago: s.n.

Galaz, M. (2005). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en enseñanza media. Un procesador geométrico como medio didáctico. Programa de Magister en Educación. Santiago: Universidad de Chile.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato: ¿Dos mundos completamente separados?. *Revista SUMA*, 39,13-26.

Henao, O. (1996). Las hojas de cálculo como herramienta didáctica. *Revista Informática Educativa* [en línea], 9 (2), 103-121. Recuperado el 1 de octubre de 2011, de http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/419

Ligouri, L. (1995). Las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en el marco de los viejos problemas y desafíos educativos. En: Litwin, E. (2000). *Tecnología educativa: Política, historias, propuesta*. Ediciones Paidós.

López, M; Lagunes, C; Herrera, S. (2006). Excel como una herramienta asequible en la enseñanza de la estadística. *Revista Teoría de la educación: Educación y Cultura en la sociedad de la información* [en línea], 7 (1). Recuperado 1/10/11 http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1960832

MINEDUC Chile. (1998). Programa de estudio oficial de primer año medio.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Memoria para optar al grado de doctor. Madrid, España.

Sosa, M. (2006). Transformaciones en el plano usando software de geometría dinámica. Revista Números [en línea], 75, 43-70. Recuperado el 1/12/2010 de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/75/Monografico_04.pdf

UCE – MINEDUC Chile. (2001). Cobertura curricular en segundo ciclo básico y enseñanza media. Sector matemática.

Vidal, R; Chicharro, M; Montoya, M. (2003). *Matemática primero medio*. Santiago: Editorial Zig-Zag.

Zanocco, P; León, I; Pedreros, A. (2006). Transformaciones isométricas en la educación general básica. *En XIII jornadas nacionales de educación matemática*. Viña del Mar.

Zanocco, P; León, I; Pedreros, A. (2008). Transformaciones isométricas en cuarto año de educación básica: Una propuesta para su enseñanza. *Boletín de Investigación Educacional*, 23(2), 255-270.

Diego Cheuquepán Maldonado: Especialista en Tecnologías Educativas en la Dirección General de Tecnologías de la Información de Universidad de Las Américas. Licenciado en Educación Matemática y Computación por la Universidad de Santiago de Chile (2011).**diego.cheuquepan@udla.cl**

Joaquím Barbé Farré: Coordinador área Informática Educativa del Centro Félix Klein de investigación, experimentación y transferencia en didáctica de la matemática y la ciencia, perteneciente a la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile. Doctor en Física por la Universitat Autònoma de Barcelona (2003). **quimbarbe@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 155-160
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Hacia la creación de problemas

Problema

Llamamos "Dúo" a cualquier conjunto formado por dos números naturales consecutivos. Hay varios dúos que cumplen la condición que la suma de sus respectivos números menores es 27. Añadir una condición para que solamente haya dos dúos que cumplan ambas condiciones

Este problema fue propuesto en una clase del curso "*Razonamiento lógico matemático*" a 32 alumnos del primer ciclo de estudios universitarios para ser profesor(a) del nivel primario o inicial[1]. La intención fue estimular la competencia de crear problemas; en este caso se da una situación inicial y se pide crear una condición complementaria a ésta para obtener determinado objetivo. Ciertamente, no fue propuesto tal como está enunciado líneas arriba, sino a través de diversas fases, con el propósito que los estudiantes se familiaricen con la situación y fortalezcan su capacidad de relacionar la información que se da con la información que deben crear para cumplir con el objetivo. Soy un convencido de la importancia de crear problemas como parte del aprendizaje de matemáticas y como parte de la tarea docente al enseñar matemáticas y considero que la experiencia tenida fue muy valiosa y puede ser útil como referencia para otras experiencias con objetivos similares o afines. A continuación describo resumidamente las diversas fases desarrolladas, en un ambiente característico de las clases en este curso, que es de buena participación espontánea de los alumnos, no solo respondiendo preguntas del profesor sino también haciendo preguntas, comentarios, propuestas, etc.

Una **primera fase** fue presentar una definición de "Dúo" e inducir a la comprensión de tal definición, pidiendo que den ejemplos de dúos. Así, escribí la siguiente definición:

> *Llamamos "Dúo" a cualquier conjunto formado por dos números naturales consecutivos.*

Les pedí que la lean con atención y den ejemplos de dúos. Pronto dieron ejemplos como

$$\{2; 3\}, \quad \{20; 21\}, \quad \{14, 15\}$$

Una **segunda fase** fue inducir al uso de símbolos para expresar la definición dada de dúo.

[1] Estos niveles educativos comprenden a niños menores de 12 años

Inicialmente propusieron D = {x; y}, con y = x + 1.

Ante mi pedido de precisar más, se llegó a que

"D es un dúo si $D = \{x; y\}$, con $x \in N$, $y \in N$, $y = x + 1$"

Y finalmente a que

"D es un dúo si $D = \{x; y\}$, con $x \in N$, $y = x + 1$"

Se suprimió la condición $y \in N$, pues alguien afirmó que:

si $x \in N$ entonces $(x + 1) \in N$.

Una **tercera fase** fue pedirles que hagan afirmaciones respecto a los dúos y analizar juntos si tales afirmaciones son verdaderas o falsas. Aunque se repitió la indicación, no parecía entenderse lo que se pedía, entonces di un ejemplo:

Afirmación:

"La suma de los números de un dúo es un número primo"

Me preguntaron si "siempre" tenía que ser un número primo. Aclaré que esa es la idea en este tipo de afirmaciones, con el carácter general de "un"; sin embargo, que para mayor claridad se puede usar la palabra "siempre", o "todos". Así, se trataba de analizar la verdad o falsedad de la afirmación:

"En todo dúo, la suma de sus números es un número primo"

Varios afirmaron enfáticamente que es verdadera y una alumna afirmó enfáticamente que es falsa. La alumna dio como razón:

"Por ejemplo el dúo con 6 y 7, su suma es 13"

Ante esta afirmación, varios dijeron inmediatamente

"¡Y 13 es primo!"

A lo cual la alumna respondió:

*"Perdón, me confundí, pero en el dúo con 7 y 8, su suma es 15
y 15* ***no*** *es número primo."*

Ante esto, hubo silencio y aceptación en el aula de que la afirmación hecha es falsa. Aproveché para explicar que la alumna había dado un *contraejemplo* para la afirmación dada y que eso era suficiente para demostrar su falsedad, aunque tengamos varios casos en los que se cumple. Espontáneamente comentaron que se cumple con 1 y 2, porque su suma (3) es primo; con 2 y 3, porque su suma (5) es primo; con 3 y 4, porque su suma (7) es primo; pero ya no se cumple con 4 y 5 porque suma (9) no es primo. Así obtuvimos otro contraejemplo y el convencimiento de que la afirmación hecha es falsa.

Entonces volví a hacer el pedio de afirmaciones acerca de los dúos, para analizar entre todos si tales afirmaciones son verdaderas o falsas.

Una alumna propuso:

"La suma de los dos números de un dúo es un número impar"

Con la experiencia de la afirmación anterior, tomamos la idea y analizamos la afirmación:

"En todo dúo, la suma de sus números es un número impar"

Pronto se advirtió el consenso sobre la verdad de esta afirmación, ante lo cual yo me manifesté reacio a aceptar que se trataba de una afirmación verdadera. Algunos argumentos que dieron para convencerme fueron:

"Los números siempre van a ser uno par y otro impar"

"La suma de un par con un impar es un impar"

Se generó una discusión para convencernos todos de que estas dos afirmaciones son verdaderas.

No se pudieron encontrar contraejemplos para demostrar su falsedad y se llegó al convencimiento de la veracidad de la primera, observando que:

En $D = \{x; y\}$, con $x \in \mathbb{N}$, $y = x + 1$, se tiene dos posibilidades:

x es par ó x es impar.

Si x es par entonces $x = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$; en consecuencia:

$y = x + 1 = 2n + 1$, que es impar.

Si x es impar entonces $x = 2n + 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$; en consecuencia:

$y = x + 1 = (2n + 1) + 1 = 2n + 2 = 2(n +1)$, que es par.

En cuanto a la segunda afirmación observamos que la expresión general de la suma de un número par con un número impar es:

$(2n) + (2m + 1)$, para $n, m \in \mathbb{N}$.

Como $(2n) + (2m + 1) = 2(n +m) + 1$, vemos que siempre la suma de un par con un impar es un impar.

Otra afirmación respecto a los dúos, propuesta por un alumno, fue:

"En todo dúo, el producto de sus números es un número par"

Hubo consenso en la veracidad de la afirmación y quedó como ejercicio hacer la demostración formal.

Como **cuarta fase** propuse la siguiente situación:

Dos dúos son tales que la suma de sus respectivos números menores es 27.

y pedí que me ayuden a expresar esto con símbolos. Luego de dar algunos ejemplos concretos y examinar algunas propuestas, llegamos a lo siguiente:

$D_1 = \{n_1; n_2\}$ y $D_2 = \{m_1; m_2\}$, con $n_1 < n_2$, $m_1 < m_2$ y $n_1 + m_1 = 27$

Seguidamente, pedí que voluntariamente y sin obligación de poner su nombre, en un pedazo de papel escriban – trabajando individualmente – una condición que añadida a la condición dada de los dúos (que la suma de sus respectivos números menores es 27) permita determinar dos únicos dúos que cumplan ambas condiciones.

Luego de pocos minutos comenzaron a entregarme los pedazos de papel. Una vez recibidos 17, ya no había más entregas, así que pasamos a analizar algunas de las propuestas. Yo escogí al azar un papel y leí la condición propuesta:

"n_1 impar y m_1 par"

Entonces, con participación de los alumnos, empecé a construir ejemplos de dúos que cumplan las condiciones:

$$n_1 + m_1 = 27 \; ;$$

$$n_1 \text{ impar } \text{ y } \; m_1 \text{ par}$$

Obtuvimos:

$$D_1 = \{7; 8\} \text{ y } D_2 = \{20; 21\},$$

$$D_1 = \{11; 12\} \text{ y } D_2 = \{16; 17\},$$

lo cual mostraba que no se obtenía un único par de dúos.

Entonces el autor de la propuesta manifestó que yo no había leído completamente su propuesta, pues él precisaba el intervalo en el que deben estar los números. Volví a mirar la hoja y efectivamente, no había advertido que además de "n_1 impar y m_1 par", estaba escrito más abajo "[12; 16]". Pedí que me aclare lo que eso significaba y el autor de la propuesta explicó que "todos los números deben estar en el intervalo [12; 16]". Aclaré que en tal caso la condición añadida habría sido mejor escribirla:

"n_1 impar, m_1 par y $n_1, n_2, m_1, m_2 \in [12; 16]$."

Luego pedí a los alumnos que examinen si hay solo un par de dúos que cumplen las condiciones

$$n_1 + m_1 = 27 \; ;$$

$$n_1 \text{ impar, } m_1 \text{ par y } n_1, n_2, m_1, m_2 \in [12; 16].$$

Pronto indicaron los siguientes pares de dúos

$$D_1 = \{13; 14\} \text{ y } D_2 = \{14; 15\}$$

$$D_1 = \{15; 16\} \text{ y } D_2 = \{12; 13\}$$

Se concluyó entonces que con la condición añadida a la dada no se obtiene un único par de dúos. Una alumna comentó: "además, dando la condición n_1 impar ya resulta innecesario dar la condición m_1 par, porque se deduce de la anterior, ya que su suma es 27, que es un número impar."

Entonces una alumna pidió que se examine la condición que ella había propuesto. Le pregunté si había puesto nombre a su papel; me dijo que no; le pedí que se acerque para identificar el papel que me entregó; y me respondió "mejor la digo desde acá". Obviamente acepté y dijo: "la condición añadida es que n_1 sea par y que m_1 sea múltiplo de 7". Entonces nos pusimos a construir dúos que cumplan las condiciones:

$$n_1 + m_1 = 27;$$

$$n_1 \text{ par } \text{ y } \; m_1 \text{ múltiplo de 7}$$

Advertimos que era preferible precisar con cuántos múltiplos de 7 (o sea valores de m_1) podíamos trabajar y empecé a escribirlos lentamente en la pizarra: 7, 14, 21, 28. Un alumno me interrumpió diciendo que el 28 no podía ser porque se pasa de 27. Una alumna añadió que el 14 tampoco podía ser, porque es par y la suma con n_1 – que se está exigiendo que sea par – debe ser 27, que es impar. Nos quedamos entonces con 7 y 21 y así construimos los siguientes pares de dúos:

$D_1 = \{20; 21\}$ y $D_2 = \{7; 8\}$ ($n_1 = 20$ y $m_1 = 7$ cumplen las condiciones dadas)

$D_1 = \{6; 7\}$ y $D_2 = \{21; 22\}$ ($n_1 = 6$ y $m_1 = 21$ cumplen las condiciones dadas)

Con esto quedó claro que la condición añadida no nos lleva a un único par de dúos.

Otra alumna pidió que analicemos su propuesta. Le pregunté cuál era y dijo inmediatamente: $n_2 = m_1$

Entonces, nos pusimos a encontrar dúos que cumplan con las condiciones:

$$n_1 + m_1 = 27 \;;$$

$$n_2 = m_1$$

Solo encontramos

$$D_1 = \{13; 14\} \;\text{ y }\; D_2 = \{14; 15\} \quad (n_2 = m_1 = 14)$$

Afirmé: "¡Parece que ahora sí tenemos una condición que, junto con la que teníamos, nos conduce a un único par de dúos!" Se escuchó que a coro dijeron ¡Sí! Pude observar la alegría de la alumna que hizo la propuesta y también cierto escepticismo de algunos alumnos que seguían intentando encontrar otro par de dúos con las condiciones dadas. Me sumé al grupo de los escépticos y pregunté: "¿No será que simplemente hasta ahora no encontramos otro par de dúos que cumplen las condiciones, pero sí existe ese otro par?" La mayoría de alumnos respondió que no existe otro par y entonces repregunté: "¿Cómo podemos estar seguros de que existe un único par de dúos que cumplen las condiciones dadas?" Hubo silencio y alguien dijo un tanto tímidamente "Hay que demostrar…". Confirmé tal afirmación y pedí que buscáramos una relación lógica que nos lleve de las condiciones dadas a la unicidad del par de dúos. Hice notar que esto significaba demostrar la unicidad de n_1, n_2, m_1 y m_2.

En diálogo con los alumnos, concluimos que bastaba demostrar la unicidad de uno de estos números, pues a partir de él se deducirían los otros, también de manera única por la condición inicial dada ($n_1 + m_1 = 27$) y porque n_2 es el consecutivo de n_1, y m_2 es el consecutivo de m_1.

Así, de $n_1 + m_1 = 27$ y $n_2 = m_1$ pasamos a $n_1 + n_2 = 27$

Usando que $n_2 = n_1 + 1$ obtuvimos que $n_1 + (n_1 + 1) = 27$; luego

$$2n_1 + 1 = 27 \qquad 2n_1 = 26 \qquad \text{y finalmente } n_1 = 13.$$

Así, vimos claramente que no había otra posibilidad. Con las condiciones dadas, n_1 **tiene que ser** 13 y en consecuencia $n_2 = 14$; $m_1 = 14$; y $m_2 = 15$. Por consiguiente, el único par de dúos que cumplen las dos condiciones dadas es:

$$D_1 = \{13; 14\} \;\text{ y }\; D_2 = \{14; 15\},$$

como lo habíamos sospechado.

En los papeles que me dieron, encontré otras interesantes propuestas de los alumnos que conducen también a un único par de dúos:

i) $n_1 - m_1 = 5$ (Conduce a $D_1 = \{16; 17\}$ y $D_2 = \{11; 12\}$)

ii) $n_1 + n_2 = 33$

$m_1 + m_2 = 23$ (Conduce a $D_1 = \{16; 17\}$ y $D_2 = \{11; 12\}$)

iii) $n_1 = m_1 + 1$ (Conduce a $D_1 = \{14; 15\}$ y $D_2 = \{13; 14\}$)

iv) $m_1 + m_2 = 33$ (Conduce a $D_1 = \{11; 12\}$ y $D_2 = \{16; 17\}$)

Observemos que en la propuesta (ii), tal como está escrita – en dos líneas – no queda claro si el alumno está proponiendo las dos condiciones adicionales a la inicial o cualquiera de ellas. Lo cierto es que con cualquiera de ellas es suficiente, pues una se deduce de la otra, y en consecuencia es innecesario dar las dos condiciones.

Comentarios

1. Como lo dijimos en el artículo del número anterior de UNIÓN, consideramos que es fundamental estimular la competencia de crear problemas, tanto en alumnos como en profesores y hemos mostrado una experiencia en esa línea de trabajo, con futuros profesores de educación básica, que inician su formación. Cabe destacar que a pesar de que varios de los alumnos manifestaron en la primera clase – cuando se presentaron brevemente – que no les gustaba las matemáticas y que no habían tenido experiencias agradables en sus clases de este curso en la educción básica, participaron activamente, se involucraron en "el juego", dieron ejemplos e hicieron propuestas, comentarios y observaciones.

2. En la experiencia didáctica fueron surgiendo problemas que se fueron analizando y resolviendo, y el problema de crear un problema fue tomado con naturalidad y afrontado con entusiasmo. Esto confirma la gran relación que hay entre resolver y crear problemas.

3. El problema trabajado, creado para estimular la competencia de crear problemas, se ubica en un contexto intramatemático, introduciendo una definición nueva (la de dúo). Se va involucrando paulatinamente a los estudiantes en aspectos fundamentales del pensamiento matemático (simbolizar, generalizar, conjeturar, demostrar, encontrar contraejemplos, relacionar lógicamente dos o más proposiciones, resolver ecuaciones) que les dan bases para resolver y crear problemas. Será interesante crear otros problemas, con objetivo similar, en contextos explícitamente lúdicos o tomados de la realidad.

4. La creación de problemas no es una competencia en la que se ponga especial atención en las clases de matemáticas y nos agrada constatar que cinco futuros profesores de educación inicial o educación primaria, en su segunda clase de matemáticas en la Facultad de Educación, hayan hecho propuestas que responden exactamente a lo pedido en la cuarta fase de la experiencia didáctica; es decir, completar la información que se da ante una situación concreta – y nueva –, de modo que se obtenga un objetivo específico pedido. Hay ideas muy interesantes en las otras propuestas que ya no han sido comentadas en este artículo. Si bien no conducen a un único par de dúos, la mayoría de ellas pueden usarse para crear otros problemas relacionados con dúos.

5. Consideramos que la experiencia didáctica expuesta es una manera de estimular y desarrollar los procesos de *selección* y *comprensión* de información cuantitativa, que son algunos de los que se activan al crear problemas, como lo sostienen C. Christou, N. Mousoulides, M. Pittalis, D. Pitta-Pantazi y B. Sriraman en su artículo An Empirical Taxonomy of Problem Posing Processes (*ZDM* 2005, Vol 37 (3)), en el que proponen un modelo con cuatro procesos para describir el pensamiento de los jóvenes al proponer problemas.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 161- 172
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Quais as soluções da equação $\left(x^2-5x+5\right)^{\left(x^2-9x+20\right)}=1$?

José Manuel Dos Santos Dos Santos

Resumen

Este trabajo presenta los procesos de resolución de una ecuación por estudiantes del último año de educación secundaria, de un curso profesional, en Portugal. Con base en el constructivismo social, como marco teórico para el aprendizaje, y el uso de los mediadores como sea el grupo de alumnos y la tecnología, en particular el GeoGebra 3.0, se eligieron las tareas propuestas a los estudiantes y se gestionó el trabajo en el aula. Los datos fueron analizados e interpretados a través de un paradigma cualitativo interpretativo. La tarea se sitúa en el contexto de la utilización de la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas. El profesor-investigador estaba interesado en aprender cómo los estudiantes respondieron a estas tareas, así como entender las estrategias desarrolladas y el tipo de tecnología por ellos utilizada para resolver el problema. A partir de estas premisas se analizan e interpretan los resultados obtenidos

Abstract

This paper reports the processes of solving an equation by students of the Vocational Education of the last year of secondary education in Portugal. Based on social constructivism theory, as a theoretical framework for learning, and the use of mediators as a group and technology, in particular with GeoGebra 3.0, were chosen tasks proposed to the students and guided the management of work in the classroom. Data were analyzed and interpreted through an interpretive qualitative paradigm. The task was placed in the context of using the methodology of Problem Based Learning. The teacher-researcher was interested in learning how students responded to these tasks, as well as understand the strategies developed and the type of technology used by students to solve the problem. From these assumptions are discussed and interpret the results obtained

Resumo

Neste texto se relata os processos de resolução de uma equação por alunos do Ensino Profissional do 12º ano de escolaridade em Portugal. Partindo da teoria do construtivismo social, como marco teórico para aprendizagem, e do recurso a mediadores como o grupo e a tecnologia, nomeadamente o GeoGebra 3.0, foram escolhidas as tarefas propostas aos alunos e se orientou a gestão do trabalho em sala de aula. Os dados foram analisados e interpretados através de um paradigma qualitativo interpretativo. A tarefa foi colocada no contexto da utilização da metodologia da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas. O professor-investigador tinha interesse em apreender o modo como os alunos reagiam a estas tarefas, bem como, entender as estratégias desenvolvidas e o tipo de tecnologia usadas pelos alunos para a resolução do problema. A partir destes pressupostos discutem-se e interpretam-se os resultados obtidos

1. Introducción

Para este trabalho partimos do pressuposto que: (1) a actividade humana é mediada pelo uso de ferramentas; (2) a actividade social organizada é fundamental para a formação da consciência; (3) a aprendizagem associada a processos elaborados decorre em dois planos: em primeiro lugar o interpessoal, através da interacção social, e em segundo lugar o intrapessoal levando aos processos de internalização; (4) a diferença entre conceitos científicos (académicos) e conceitos quotidianos (espontâneos) (Vygotsky, 1978). Deste modo a teoria da aprendizagem de Vigotsky suporta à corrente socioconstrutivista da aprendizagem (Vasconcelos, 2011). O conceito de mediação é um dos factos centrais na teoria da aprendizagem proposta por Vygotsky, que considera a utilização de dispositivos, social e culturalmente construídos, com efeitos sobre as concepções e as aprendizagens dos indivíduos que os utilizam, dispositivos estes que dependem dos contextos de interacção (Cole & Wertsch, 1996). Assim optamos pela organização do trabalho dos alunos em grupo, dispondo de diversos recursos tecnológicos de que podiam dispor para realizarem as tarefas propostas.

Considerando o currículo de matemática a experiência de ensino que aqui é objecto de análise, enquadra-se no desenvolvimento do módulo Funções de Crescimento, numa turma do 12º ano do curso profissional de Técnico de Gestão de Ambiente, pretendendo-se trabalhar o tema da resolução de problemas, visando desenvolver:

- a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados.

(Carvalho, 2005, p 47-48)

Relativamente ao conteúdos disciplinares, pretendia-se:

- usar as regras das exponenciais e as calculadoras gráficas ou um computador para encontrar valores ou gráficos que respondam a possíveis mudanças nos parâmetros;
- interpretar uma função e prediga a forma do seu gráfico;
- resolver problemas simples e de aplicação usando diferentes modelos de funções de crescimento.

(Carvalho, 2005, p. 48)

Dadas as características do currículo e os objectivos dos cursos profissionais, optou-se num conjunto de quatro semanas de aulas seguir a metodologia da aprendizagem baseada na resolução de problemas (ABRP). Esta metodologia e designada na literatura inglesa por *problema-based learnig* (PBL), surge em 1969, por Jonh Evans, na Escola de Medicina na Universidade de McMaster em Ontario, Canada (Haslett, 2001).

ABRP é uma metodologia de ensino, centrada no aluno que parte de um problema para as aprendizagens autónomas e consistentes dos alunos em colaboração com os seus pares. Visa a autonomia do aluno, desenvolvendo a sua criatividade e sentido critico num ambiente colaborativo. A metodologia suporta-se nas teorias da aprendizagem do construtivismo cognitivo de Piaget e do construtivismo social de Vigotsky. O papel do indivíduo passa por um papel activo na sua aprendizagem auxiliado pelos pares e mediado pelo professor.

Nesta metodologia, o professor assume uma visão racionalista contemporânea da ciência, à semelhança no que acontece no ensino por pesquisa, como uma forma de construir teorias para melhor compreender o mundo (Lucas citado por Clara Vasconcelos, 2010), sendo ele um facilitador e um amigo-critico do trabalho dos alunos.

Os problemas devem promover o pensamento flexível, conter alguma interdisciplinariedade, pouco-estruturados e abertos, para apoiar a motivação intrínseca, e devem ser realistas e em consonância com as experiências dos alunos. Um bom problema de feedback permite aos estudantes avaliar a eficácia dos conhecimentos que possuem, promovendo a formulação de novos problemas, o raciocínio e estratégias de aprendizagem. Os problemas também devem promover a conjectura e argumentação. A formulação dos problemas deve ser complexa o suficiente para exigir a inter-relação de vários conhecimentos e deve motivar os alunos para conhecerem e aprenderem mais. (Hmelo-Silver,2004)

Um dos axiomas desta metodologia é o trabalho colaborativo, dai o cuidado que se deve ter na monitorização do trabalho dos grupos no sentido em que estes tenham práticas de questionamento, partilha de opiniões, formulação de hipóteses ou conjecturas e a capacidade de as refutar ou de as confirmar. A comunicação e o trabalho dentro do grupo é essencial, tanto como a partilha dos resultados em plenários entre os resultados dos grupos, de modo que as conclusões possam ser validadas com o conhecimento construído. Deste modo os plenários são essenciais discutindo-se o que foi aprendido, os conceitos e os princípios com o trabalho (Savery, 2006).

Segundo Lambros (2002), citada por Vasconcelos 2010, a ABRP depende de uma estrutura própria, passando por fases bem determinadas: “após os alunos terem apreendido o problema, devem: (i) elaborar uma lista com os factos fornecidos pelo problema; (ii) elaborar uma lista do que precisam de saber para entender o problema; e (iii) definir uma lista do que têm que pesquisar para resolverem o problema. Após esta sequência, o processo prossegue com a listagem das possíveis soluções. Esta lista trará algumas possíveis formas de resolver o problema e deve exigir a elaboração de uma nova lista de conteúdos a aprender. Esta ultima lista deve permitir aos alunos reunir informação para defender, ou não, as possíveis soluções encontradas.”

Esta metodologia mostra-se prometedora tendo surgido várias alterações quer na forma quer nos contextos. Um aprofundamento desta metodologia baseia-se em projectos mais abrangentes, ao contrario dos problemas mais restritos, estando a ser aplicadas em vários graus de ensino e propiciando uma abordagem interdisciplinar. Alguma investigação revela que o sucesso desta abordagem está intimamente relacionada com a formação do professor e as suas próprias concepções (Hmelo-Silver, 2004, p. 261).

Na educação matemática o conceito de problema é amplamente discutido, uma tarefa pode ou não ser um problema dependendo de um conjunto de factores relacionados com quem desenvolve a tarefa, contudo é consensual que a resolução de um problema implica necessariamente uma actividade que pode conduzir a realização de uma aprendizagem. Segundo Ponte (2005), há dois factores que determinam a aprendizagem: a actividade que os alunos desenvolvem e a reflexão que sobre a actividade realizam. A actividade resulta da realização de uma determinada tarefa, isto é, a tarefa é o ponto de partida para uma actividade matemática; contudo, perante uma tarefa, um aluno pode não desenvolver qualquer actividade matemática (Ponte, 2005).

As tarefas podem ser diferenciadas pelo seu grau de estrutura e pelo grau de dificuldade que apresentam para o aluno, na perspectiva deste. Em termos de grau de estrutura, distinguimos tarefas fechadas de tarefas abertas. Nas primeiras, é dito de forma clara no respectivo enunciado o que é dado e o que é pedido, ficando a cargo de quem as resolve o caminho para chegar à solução (ou soluções); nas tarefas abertas, existe um grau de indefinição considerável, deixando a quem as resolve um papel importante na determinação do que é dado ou do que será possível descobrir (Ponte 2005). No que concerne ao grau de dificuldade, podem as tarefas podem representar um desafio reduzido, ou constituírem-se num desafio elevado.

Assim entre as tarefas abertas temos as explorações e as investigações constituindo-se, respectivamente, desafios reduzidos ou elevados. As tarefas de estrutura fechada podem variar entre exercícios, como tarefas de grau de desafio reduzido, e os problemas com um grau elevado de desafio.

Contexto da experiência

Durante quatro semanas de trabalho foram propostas várias tarefas aos alunos variando o grau de estrutura, entre tarefas abertas e fechadas, e sendo todas de grau de desafio elevado de modo a implementar a metodologia da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas (ABRP) proposta por Ann Lambros.

Quais as soluções da equação $\left(x^2-5x+5\right)^{(x^2-9x+20)}=1$?

Figura 1: Tarefa em análise – Problema

O problema da figura 1, que aqui se analisa, foi implementado na última semana de aula de uma planificação de quatro semanas de trabalho, utilizando a metodologia da ABRP. Esta questão consta de um extracto das Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (NCTM, 1994). As três semanas anteriores foram geridas seguindo a mesma metodologia variando o tipo de tarefas. Nestas o seu grau de estrutura foi variado mas mantendo o grau de desafio elevado, isto é, as tarefas propostas contemplaram investigações e problemas.

Opções metodológicas

Optou-se por desenvolver a metodologia da ABRP durante um período de tempo. A planificação contemplou investigações e problemas. Os alunos puderam dispor de protocolos, manuais, registos pessoais e de tecnologia. O foco da atenção do professor residiu nas estratégias usadas pelos alunos e na tecnologia que utilizavam para realizarem as tarefas propostas.

O trabalho de análise dos dados recolhidos suporta-se numa investigação qualitativa, de acordo com a perspectiva de Bogdan e Biklen (1994). O investigador é o principal agente de recolha e interpretação dos dados. Estes dados têm uma natureza fortemente descritiva, o que permite ao investigador analisar acções e factos com pormenor.

A opção pelo paradigma interpretativo resulta da necessidade de explorar, interpretar e compreender os factos do ponto de vista dos intervenientes no estudo, tendo em conta as suas particularidades e a ecologia do ambiente onde o estudo decorre. O foco da atenção são as aprendizagens conseguidas pelos envolvidos em relação às acções em que se envolvem.

Aplicação da tarefa

A tarefa foi apresentada durante uma aula de 90 minutos, inserida numa experiência que decorreu ao longo de quatro semanas de aula, em 135 minutos por semana, distribuídos em 90 e 45 minutos. Destaque-se que esta tarefa, a última, foi realizada num menor espaço de tempo, não sendo necessários os 135 minutos inicialmente previstos, pelo que os 45 minutos do tempo restante foi destinado a uma avaliação global do trabalho desenvolvido por parte dos alunos e do professor.

Os dezassete alunos da turma foram divididos em quatro grupos, três grupos integravam quatro alunos (grupos B,C, e D) e o quarto grupo integravam os restantes cinco alunos (grupo A).

Os alunos dispunham de acesso ao manual em papel, a um portátil com ligação a Webb (C), recurso ao GeoGebra (GGB) e duas máquinas de calcular gráficas (MCG) por grupo, e obviamente o recurso a interacção com o professor sempre que o solicitassem.

Descrição da aula

Depois de apresentada a tarefa aos alunos, iniciou-se o trabalho. A presença de polinómios do 2º grau, levou a que estes procurassem no caderno a fórmula resolveste para equações do 2º grau. Numa segunda fase aperceberam-se que o segundo membro da equação era igual a 1. As perguntas dos elementos dos grupos sucederem-se, sendo bastante semelhantes, pelo que optou-se por realizar um pequeno plenário, que a seguir se descreve:

<u>Professor</u>: Afinal o que fizeram até ao momento e quais são as vossas dúvidas?

<u>Porta-voz do GA</u>:Tentamos utilizar a formula resolvente.

<u>Professor</u>: Sim ...

<u>Elemento GA</u>: Mas a equação tem uma base e um expoente como fazemos?

<u>Professor</u>: Que tipo de funções temos usado nos trabalhos das ultimas aulas?

<u>Elemento do GA</u>: Exponenciais mas esta é complicada!

<u>Professor</u>: Revejam as propriedades das exponenciais que já fizemos e mesmo os métodos que já utilizaram e m tarefas anteriores.

Apercebi-me que os alunos não realizaram o registo dos factos, da informação conhecida e dos assuntos necessários conhecer para o desenvolvimento da tarefa, como o tinham feito nas outras três tarefas anteriores. Parece-me que devia ter insistido em que mantivessem a rotina do registo inicial pois poderia ter evitado esta minha primeira intervenção. Contudo, está tarefa tinha uma estrutura mais fechada, sem outro contexto, ao contrario das tarefas anteriores, de estrutura mais aberta, parecendo que os alunos assumiram que não seria um trabalho em PBL.

A intervenção realizada no pequeno plenário anterior levou a que alguns grupos passassem a ensaiar outras estratégias para resolver a tarefa. No caso do Grupo D a indicação dada levou a que reconhecessem as propriedades das exponenciais chaves para a resolução da tarefa e aplicando a formula resolvente para a resolução das duas equações do segundo grau envolvidas, porem o grupo não tinha a certeza de ser essa a solução.

Porta-Voz GD: Professor é isto que se pretende? (O porta-voz apontava para os registos realizados, figura 1)

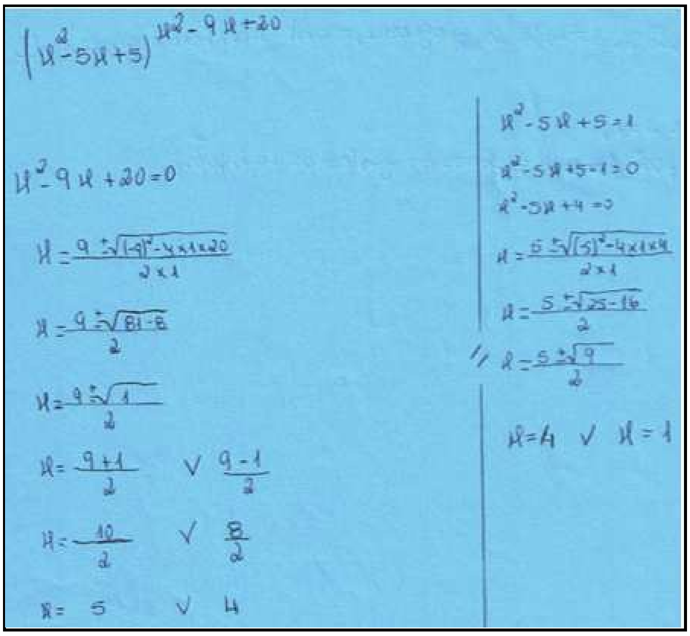


Figura 1: Estratégia apresentada pelo grupo D.

Professor: Já discutiram a resposta, o que vós parece?

Porta-Voz GD: Sim discutimos, e parece-nos que está resolução responde a questão.

Professor: Tinham de resolver uma equação e apresentam-me a resolução de duas equações, podem explicar-me?

Porta-Voz GD: Vamos pensar! Obrigado.

Apesar de já ter decorrido três semanas onde o meu trabalho era mais fazer perguntas do que dar respostas, os alunos solicitavam a minha intervenção, esta visava sempre servir de mediador da aprendizagem dos alunos, abrindo algumas pistas para manter o ritmo de trabalho, não levando ao desanimo dos alunos. Nos cursos profissionais a autonomia e confiança dos alunos é algo que tem de ser constantemente trabalhada, pois a instalação do desanimo.

Outras estratégias de análise do problema não tardaram a aparecer, bem como, a solicitação dos alunos para encontrarem a validação na autoridade do professor. Vejamos o caso do seguinte dialogo com o grupo A:

Porta-Voz GA: Estivemos a ver a tarefa anterior mas nessa tarefa já nos era dadauma função.

Professor: Sim, mas na tarefa das infecções dos computadores e da colónia de bactérias não era dada.

Elemento GA: A função será o primeiro membro da equação pois tem o x.

Professor: Não sei que vós parece?

Porta-Voz GA: Vamos seguir, usamos o GeoGebra e experimentamos.

Professor: Não se esqueçam que podem usar a máquina de calcular gráfica.

Porta-Voz GA: Temos o computador aqui e tem um écran maior.

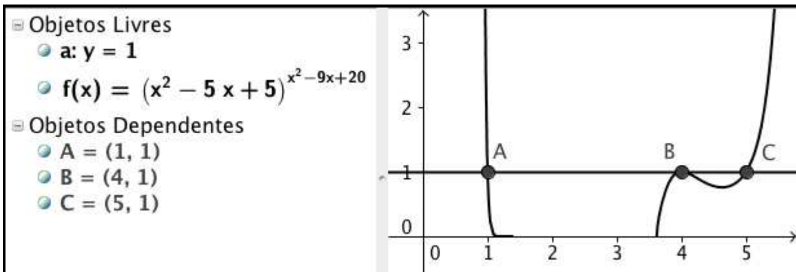
Professor: Ok, não se esqueçam de registar a vossa resposta na folha dada.

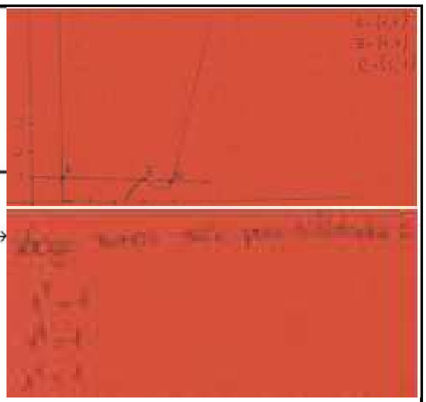
Mais uma vez a minha intervenção, reforçou a observação já realizada pelos alunos. Apesar da estratégia ainda não estar consumada por escrito a ideia de uma resolução gráfica estava pensada e a reflexão falada promovida levou o grupo à acção. A estratégia passou pelo uso do GeoGebra considerando a intersecção dos gráficos de duas funções como o referem explicitamente:

[Colocamos a expressão $\left(x^{2}-5x+5\right)^{\left(x^{2}-9x+20\right)}$ na linha de comandos do GeoGebra onde nos deu uma curva. De seguida colocamos na linha de comandos $y=1$ onde nos deu uma recta. Na barra de ferramentas seleccionamos o "intersectar duas linhas" onde encontramos três pontos.]

Figura 2: Transcrição do cabeçalho da folha de registo do grupo A.

De facto os alunos utilizaram de modo eficaz o software e de um modo autónomo como se pode verificar pelos registos realizados (fig. 3). Apresentando a confirmação das soluções encontradas.





Linha de comandos: *(x² - 5*x + 5)^(x² - 9*x + 20)*

y=1

Barra de ferramentas: *Intersectar duas linhas*

Figura 3: Processos usados no GeoGebra e os registos da estratégia usada pelo grupo A.

Na minha deambulação pela sala reparei que o grupo C resolvia as equações do 2º grau necessárias, enquanto que o grupo B usava o GeoGebra no computador.

Neste momento passavam cerca de 30 minutos do inicio da aula. Sou solicitado pela segunda vez pelo grupo D, e o porta-voz do grupo apresenta-me a conclusão a que tinham chegado, depois da pergunta que lhes tinha deixado.

Porta-Voz GD: Escrevemos a razão pela qual as equações que resolvemos nos dão a solução! (Mais uma vez, o porta-voz apontava para os registos, figura 4)

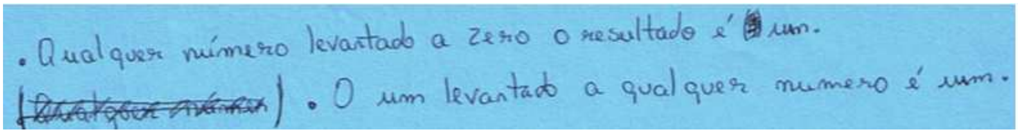


Figura 4: Justificação da estratégia apresentada pelo grupo D

Professor: Em que se baseiam para dizer isto?

Elemento GD: Nas notas de aula e nas propriedades das potências.

Professor: Mas como garantem que são apenas estas as soluções?

Porta-Voz GD: Não vos disse temos de ver graficamente!

Professor: Não sei vejam! Mas não se esqueçam que resta um quarto de hora para o debate.

A afirmação do porta-voz do grupo D - *Não vos disse temos de ver graficamente!* - fez com que os elementos utilizassem o GeoGebra, como se vê na figura 5, confirmando os resultados que já tinham obtido analiticamente e com uma argumentação capaz.

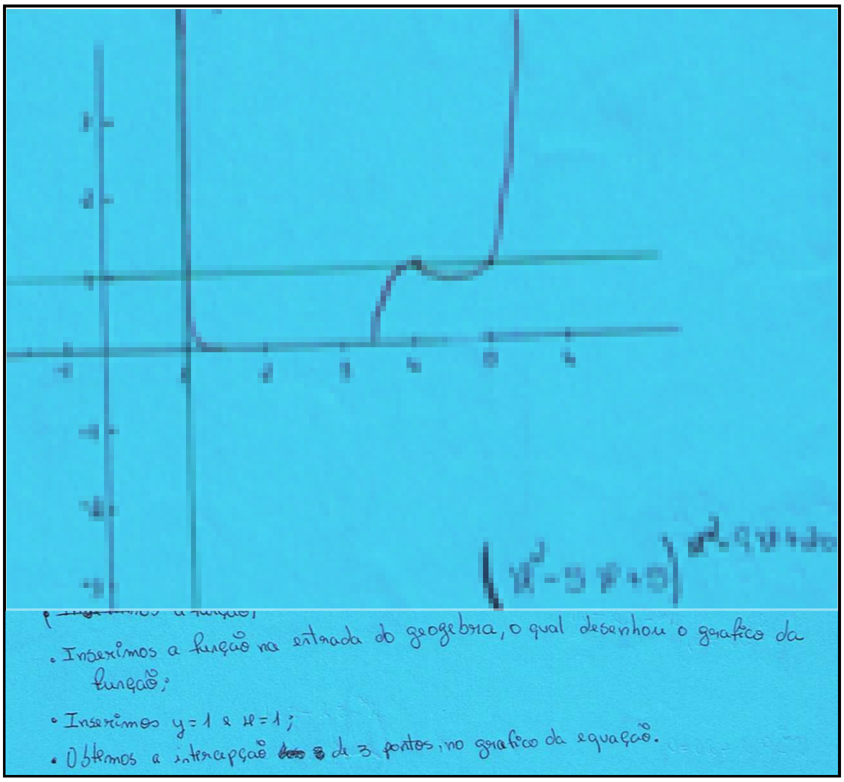


Figura 5: Registos relativos a resolução gráfica com o GeoGebra do grupo D.

Não sendo solicitado pelo grupo B resolvi questionar o que estavam a fazer.

Professor: Então tudo a correr bem! Está a acabar o tempo. *Apressou-se a dizer o porta-voz do grupo*

Porta-Voz GB: Colocamos o primeiro membro da equação na linha de comandos do GeoGebra e apareceu-nos um gráfico da função.

Professor: Para que querem o gráfico?

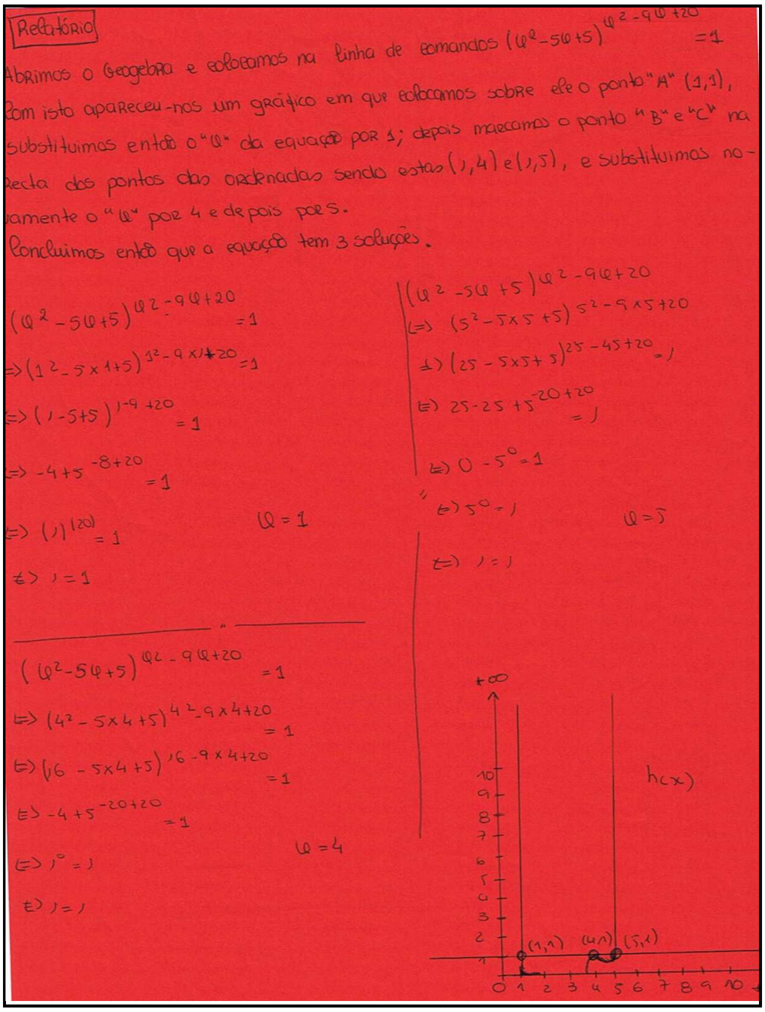
Porta-Voz GB:Colocamos um ponto no gráfico e deslocamos para ver quais as coordenadas.

Professor: E que fazem com as coordenadas?

Porta-Voz GB: O x dá-nos a solução quando o y é um.

Professor: Se todos concordam …Não se esqueçam que tem de convencer os colegas no debate

Este grupo acabou por apresentar um registo muito detalhado (fig.6). Foram apresentados os comandos utilizados no GeoGebra, um esboço gráfico e a verificação das soluções encontradas.


Relatório

Abrimos o Geogebra e colocamos na linha de comandos $(x^2-5x+5)^{x^2-9x+20}=1$ com isto apareceu-nos um gráfico em que colocamos sobre ele o ponto "A" (1,1), substituimos então o "x" da equação por 1; depois marcamos o ponto "B" e "C" na recta dos pontos das ordenadas sendo estas (1,4) e (1,5), e substituimos novamente o "x" por 4 e depois por 5.

Concluimos então que a equação tem 3 soluções.

$(x^2-5x+5)^{x^2-9x+20}=1$
$\Rightarrow (1^2-5\times1+5)^{1^2-9\times1+20}=1$
$\Rightarrow (1-5+5)^{1-9+20}=1$
$\Rightarrow -4+5^{-8+20}=1$
$\Rightarrow (1)^{12}=1$
$\Leftrightarrow 1=1$ $x=1$

$(x^2-5x+5)^{x^2-9x+20}=1$
$\Leftrightarrow (5^2-5\times5+5)^{5^2-9\times5+20}=1$
$\Leftrightarrow (25-5\times5+5)^{25-45+20}=1$
$\Leftrightarrow 25-25+5^{-20+20}=1$
$\Leftrightarrow 0-5^0=1$
$\Leftrightarrow 5^0=1$ $x=5$
$\Leftrightarrow 1=1$

$(x^2-5x+5)^{x^2-9x+20}=1$
$\Leftrightarrow (4^2-5\times4+5)^{4^2-9\times4+20}=1$
$\Leftrightarrow (16-5\times4+5)^{16-9\times4+20}=1$
$\Leftrightarrow -4+5^{-20+20}=1$
$\Leftrightarrow 1^0=1$ $x=4$
$\Leftrightarrow 1=1$

Figura 6; Registo da proposta de resolução da tarefa do grupo B.

As alunas do grupo C conversavam, questionei se já tinham resolvido a tarefa. Disseram que sim. Perguntei ao porta-voz que método tinham utilizado, tendo este referido que tinham resolvido a equação. Os registos realizados (fig. 7) que observei permitia aferir que os alunos tinham encontrado a solução de duas equações do segundo grau. Não havia nenhum tipo de registo que indicia-se a razão desse procedimento. Como os restantes grupos terminavam acabei por não realizar mais nenhuma pergunta a este grupo:

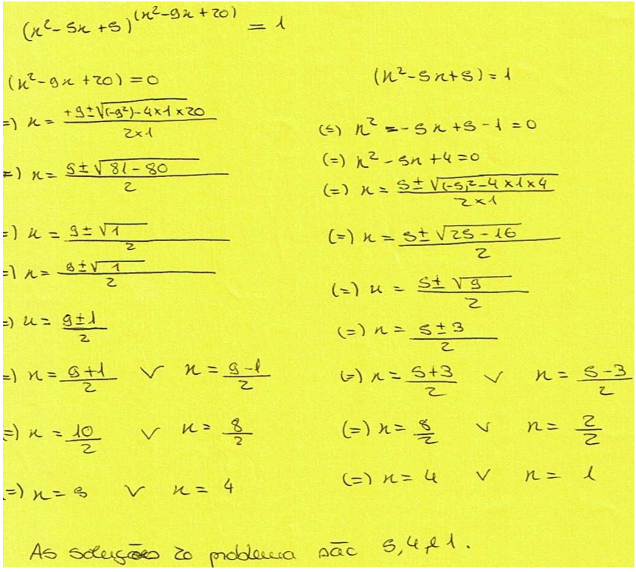


Figura 7: Registos das equações do 2º grau, estratégia seguida pelo grupo C

Passados cinquenta minutos, todos os grupos tinham finalizado a tarefa e procedeu-se ao plenário. Os alunos apresentaram as suas resoluções, sendo por estes validadas três formas distintas de resolução. Os quatro grupos resolveram a tarefa, encontrando a solução da equação.

Resultados

Em relação ao debate, os alunos apresentaram as suas conclusões, mais do que os resultados, todos coincidentes, as mais valias decorreram do desenvolvimento da comunicação matemática e da percepção que a tarefa podia ser resolvida a partir de três perspectivas diferentes, analiticamente, numericamente e graficamente (veja-se tabela 1).

Tabela 1. Estratégia para a resolução da tarefa

Grupo	Estratégia
A	Resolução gráfica, usando intersecção de gráficos com o GeoGebra.
B	Resolução numérica, com verificação e justificação gráfica usando o GeoGebra.
C	Resolução apenas analítica, sem justificação da estratégia.
D	Resolução analítica, com justificação da estratégia, e confirmação dos resultados por resolução gráfica com o GeoGebra.

Houve ainda a consolidação de conteúdos e métodos de trabalho adequados e fortemente ancorados no uso de tecnologia, em particular o uso do GeoGebra. Registe-se que os alunos preteriram a máquina de calcular gráfica usando com proficiência o GeoGebra na resolução da tarefa.

Os alunos registaram as suas conclusões por escrito, servindo de base a discussão em plenário. Os relatórios foram analisados e os resultados obtidos encontram-se registados, sumariamente, na figura 8.

Grupos		Resolve analiticamente a equação				Resolve graficamente a equação					
		Apresenta razões para resolver a equação através de duas equações do 2º Grau	Usa a fórmula resolvente para equações do 2º grau.	Explicita as soluções	Confirma as soluções encontradas	MCG	GGB				
							Encontra soluções por:		Confirma as soluções encontradas	Esboça Gráfico	Relata os passos da construção
	nº A.						aproximação numérica	Intersecção de rectas com gráfico			
A	5	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
B	4	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
C	4	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
D	4	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
	17	**1**	**2**	**2**	**0**	**0**	**1**	**2**	**2**	**3**	**2**

Figura 8: Quadro sumula dos resultados

Conclusões

A implementação do modelo de Aprendizagem Baseadas na Resolução de Problemas proposto por Ann Lambros (2004) mostrou-se menos eficaz nesta última tarefa, quando comparados os resultados com a implementação das tarefas anteriores. O caracter fechado desta tarefa levou a que os alunos não utilizassem os protocolos característicos do PBL. As tarefas anteriores possuíam um enunciado que apelava a um contexto mais amplo. Os alunos passaram a ver a tarefa como a resolução de uma equação, um processo mais tradicional, optando desde logo alguns alunos por ensaiar estratégias mais algébricas de resolução.

A interacção que se estabeleceu entre o professor e o grupo D levou a um aprofundamento do trabalho desenvolvido, que conduziu os alunos a apresentarem várias justificações para validar os seus resultados. Ao analisar as interacções estabelecidas com os alunos parece ter-se evitado um padrão de interacção de matemática dirigida (Tomás Ferreira, 2007, p. 1997), utilizando perguntas provocadoras, evitando-se as perguntas teste, o que acabou por se demonstrar positivo para a aprendizagem dos alunos e a realização da tarefa.

As respostas dos alunos foram interpretadas, dando um feedback que permitiu uma melhor compreensão e entendimento do problema pelos alunos. Nos diálogos e produções dos alunos aqui apresentados observa-se uma evolução na argumentação no trabalho dos grupos. Acresce que no grupo em que a intereção com o professor foi reduzida a produção do grupo é menos rica nas estratégia e na argumentação.

Dos quatro grupos, dois (Grupos A e B) entenderam a resolução da tarefa com uma estratégia que passou pela análise de funções e recorreram de imediato a tecnologia. Os outros dois grupos (C e D) encararam a tarefa como a resolução de uma equação. Este facto reforça a ideia que a multiplicidade de representações e as conexões promovem um conhecimento mais profundo da matemática. Em relação a tecnologia utilizada a maquina de calcular foi preterida, tendo os alunos que recorreram a tecnologia, optado pelo uso do GeoGebra. Este software foi usado de forma diversa pelos grupos. Um dos grupos que ensaiou uma estratégia algébrica para a resolução do problema usou o GeoGebra para confirmar a solução obtida.

Bibliografía

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação. Porto Editora.

Carvalho, J. et al. (2005). *Programas de Matemática do Ensino Profissional*, Direcção-Geral de Formação Vocacional. Lisboa.

Cole, M., & Wertsch, J. V. (1996). Beyond the individual-social antimony in discussion of Piaget and Vygotsky. *Human Development*, 39, 250-256.

Haslett, Lynn (2001). 1969: McMaster University introduces problem-based learning in medical education. In Daniel Schugurensky (Ed.), *History of Education: Selected Moments of the 20th Century* [online]. disponivel em: http://fcis.oise.utoronto.ca/~daniel_schugurensky/assignment1/1969mcmaster.html (date 23-01-2011).

Hmelo-Silver CE (2004) Problem-based learning: What and how do students learn? *Educational Psychology Review* 16(3): 235– 266

Lambros, A. (2004). *Problem-based Learning in Middle and High School Classroom: A teacher's guide implementation*. California: Corwin Press.

NCTM (1994). Normas profissionais para o ensino da Matemática. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Savery, J. R. (2006) Overview of Problem-based Learning: Definitions and Distinctions. *The Interdisciplinary Journal of Problem- based Learning*, v. 1, n. 1, p. 9– 20.

Tomás Ferreira, R. A. (2007). The Teaching Modes: A conceptual Framework for Teacher Education. *Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Departamento de Educação da Universidade de Chipre. Larnaca, Chipre. Consultado on-line 22-02-2012.

Vasconcelos, C. (2010) *Notas da Unidade Curricular de Ensino das Ciências.* Programa Doutoral em Ensino e Divulgação das Ciências. FCUP, Porto.

Vasconcelos, C. (2011). *Relatório de Agregação*. Braga: Instituto de Educação da Universidade do Minho.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

José Manuel Dos Santos Dos Santos: É professor de Matemática na Escola Secundária D. Afonso Sanhes (Vila do Conde, Portugal) e colabora com Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto, sendo Chair do Instituto GeoGebra Portugal. É Licenciado e Mestre em Ensino da Matemática e Especializado em Ensino e Divulgação das Ciências pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). Neste momento realiza na FCUP estudos doutorais, sob o paradigma qualitativo, sobre a influência na aprendizagem da matemática do uso do GeoGebra e da Escrita Avaliativa no contexto do Ensino Profissional Secundário. santosdossantos@me.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 173-183
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar

Planteando problemas de forma poética

Juan Núñez Valdés; Concepción Paralera Morales.

Resumen

En este artículo se plantea la posibilidad de que el profesor de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato utilice la poesía como una herramienta más a fin de despertar la curiosidad y conseguir una mayor motivación e interés de sus alumnos por la asignatura. Se muestran algunas de las muchas y variadas poesías relacionadas de alguna manera con las Matemáticas y se indican el contexto y el nivel más apropiados para utilizarlas.

Abstract

The aim of this paper is to introduce the possibility of a Secondary School teacher of Mathematics using poetry as another tool in order to inspire curiosity in students and make them have greater motivation and interest in the subject. Some of the many of varied poems somehow related to Mathematics are also shown and the context and most appropriate level to use them are indicated

Resumo

Este artigo levanta a possibilidade de que o professor de Matemática do secundário e do ensino médio usam na poesia como uma ferramenta para despertar a curiosidade e obter mais motivação e interesse dos alunos pelo assunto. Mostra alguns dos muitos e variados poemas relacionados de alguma forma com a Matemática e identifica o contexto e ao nível mais adecuado para usá-los.

M irar soñando despierto
A l ver dos líneas trazadas
T e refleja como ciertos
E spacios que son del alma;
M ar de infinitos destellos
A cotados por las blancas
T razas que dejan abiertos
I mposibles movimientos
C apaces de abrir las marcas
A lcanzadas por expertos
S abios de todos los tiempos
Y soñando lograremos

P enetrar en las esencias
O cultas de los extremos
E squivos de las conciencias,
S abiendo que toda ciencia
I ncluye cuando queremos
A lgo de amor y cadencia.

José Antonio Hervás (2)

1. Introducción

Afortunadamente, el tema de la interdisciplinaridad va calando cada vez más en el Profesorado de Secundaria y Bachillerato en los centros españoles a la hora de impartir su docencia en las clases (como ya es sabido, en España el alumno accede a la etapa de Secundaria, que es Obligatoria y consta de seis cursos, a la edad de 9 a 10 años, para pasar después al Bachillerato, ya no obligatorio y que consta de dos cursos, como estudios previos a los universitarios). Pues bien, es por tanto ya muy frecuente que, en particular, los Profesores de Matemáticas de estos dos niveles en nuestro país les hablen a sus alumnos sobre la importancia y las aplicaciones que los temas matemáticos que les enseñan tienen en otras asignaturas de su currículo, fundamentalmente científicas, como pueden ser la Biología, la Física o la Química. Así, a la hora de explicar el concepto de *derivada*, un recurso muy socorrido por los profesores de Matemáticas que han hecho suyo desde el principio este aspecto de la interdisciplinaridad suele ser el de comentarle a sus alumnos la relación intrínseca que existe entre este concepto matemático y los conceptos físicos de velocidad y aceleración. De igual forma, al estudiar las *Progresiones Geométricas*, el profesor suele también aludir a la aplicabilidad de estas series de números al tratamiento de problemas de descendencia y procreación de los seres vivos, propios de la Biología. Tampoco la Química se libra, en el buen sentido de la palabra, de esta posibilidad de relacionar los conceptos matemáticos con los de otras disciplinas. Así, ya es frecuente que los profesores de Matemáticas les hablen a sus alumnos de la posibilidad de establecer un vínculo entre el estudio de las *sucesiones numéricas* y las expresiones generales C_nH_{2n+2}, C_nH_{2n} y C_nH_{2n-2}, para los hidrocarburos, saturados o no, del tipo alcanos, alquenos y alquinos, respectivamente.

Son también muy utilizadas otras muchas aplicaciones de las Matemáticas de Secundaria y Bachillerato a otras disciplinas ya no científicas, que también son comentadas por los docentes de Matemáticas. Piénsese, por ejemplo, en aplicaciones de las Matemáticas a la Economía, como puede ser el caso de utilizar las progresiones geométricas para resolver problemas de interés compuesto, o el estudio de la *función exponencial*, tan usada en la resolución de los denominados problemas de primer orden en Demografía, en los que una población crece en cada momento en función del número de individuos existente en ese momento.

Sin embargo, no son tan usuales por parte del profesor de Matemáticas las alusiones durante el transcurso de sus explicaciones a las disciplinas tradicionalmente llamadas de letras, como pudieran ser la Literatura, la Geografía, la Filosofías, el Arte o la Historia, por ejemplo, salvo para problemas mecánicos de enumeración, ordenación o conteo.

Pues bien, en esta última línea es en la que nosotros queremos centrar nuestro trabajo, mostrando algunas posibles relaciones de las Matemáticas con la Literatura en general, y más concretamente, con la Poesía en particular. Dar cumplida respuesta a preguntas del tipo: ¿Puede encontrarse Poesía en las Matemáticas?, ¿Existe matemática en la Poesía?, ¿Puede hablarse de Matemáticas y Poesía al mismo tiempo? o similares es el objetivo que nos planteamos en este artículo.

Nuestra primera intención es hacer ver que los Profesores de Matemáticas pueden y deben utilizar poesías en sus explicaciones. Obviamente, no nos estamos refiriendo a que den sus explicaciones en verso, lógicamente, sino a que utilicen la poesía como una herramienta más dentro de sus recursos metodológicos. De esa manera, no sólo se contribuye a animar a los alumnos en el interés y la motivación por las Matemáticas, sino también a alimentar su formación cultural promoviendo el gusto por la buena literatura en general, y por la poesía, en particular. ¿Cómo se va a olvidar un alumno, por ejemplo, del número pi si su profesor, cuando se lo enseña como cociente entre la longitud de cualquier circunferencia y la longitud de su diámetro, le recita e invita a aprenderla una de las innumerables poesías que existen dedicadas a este número? Véase al respecto la siguiente poesía de Manuel Golmayo (tomada de la web), que nos permite recordar las veinte primeras cifras de este número (3.14159 26535 89793 2384):

Soy y seré a todos definible,
mi nombre tengo que daros.
Cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros.

Por otra parte, esta idea que aquí se muestra de relacionar poesía con Matemáticas no puede decirse tampoco que sea especialmente novedosa. Basta teclear en cualquier buscador en red las palabras “Matemáticas y Poesía” u otras similares para obtener una grandísima cantidad de entradas, que en el caso del idioma inglés superan ampliamente los catorce millones. Algunos ejemplos significativos de estas entradas son las páginas webs mencionadas en bibliografía, de donde se han sacado parte de las poesías que a continuación se comentan

Dada por consiguiente la gran cantidad de poesías que podríamos encontrar para ser utilizadas por los profesores de Matemáticas en sus clases, nos ha parecido conveniente centrarnos en este artículo en mostrar algunos problemas propuestos como ejemplos para plantear ecuaciones y sistemas, que están escritos en verso. Nuestra intención es abordar en futuros artículos otros aspectos diferentes de esta relación entre Matemáticas y Poesía. No se olvide que el famoso matemático alemán Kart Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, 1815 – Berlín, 1897) ya le comentaba por carta a la también insigne matemática rusa Sofía Kovaleskaya (Moscú, 1850 – Estocolmo, 1891) lo siguiente:

"*Un Matemático no es digno de ese nombre, si no es un poco poeta*."

2. Poesía en los problemas de planteo de ecuaciones

En esta sección pretendemos mostrar una serie de problemas de enunciado de planteo de ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicos escritos en forma de poesía. Estos problemas pueden ser utilizados por el profesor a la hora de abordar estos temas, tanto en los últimos cursos de Secundaria como en el Primero de Bachillerato.

Iniciamos la sección con el texto que Diofanto de Alejandría hizo grabar en su tumba, en forma de epitafio. Este texto no es propiamente una poesía, como podrá constatar fácilmente el lector, pero nos ha parecido oportuno incluirlo porque sirve perfectamente para conseguir el objetivo que se pretende en este artículo.

2.1. El Epitafio en la tumba de Diofanto.

Los breves datos biográficos que indicamos sobre Diofanto pueden ser comentados por el profesor a sus alumnos para ponerlos en situación e ir ya despertando su curiosidad, al tiempo que les reta a descubrir el enigma (es decir, a resolver la ecuación) que se encierra en ese epitafio.

Son poco precisos los datos que se conocen actualmente sobre la vida de Diofanto de Alejandría (sobre el año 200 d.C. – sobre el año 284 d. C.). La mayoría de ellos nos llegan a través de la *Antología Griega*, escrita por Metrodoro en el siglo V d. C. Diofanto vivió en torno al siglo III d.C., durante aproximadamente unos 84 años. Este dato lo conocemos gracias al siguiente epitafio hallado en su tumba:

> *"¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba. A partir de ahí, la séptima parte de existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó, además, un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito. Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra, habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir. Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo. Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte."*

Figura 1. Epitafio en la Tumba de Diofanto

Figura 2. La Aritmética de Diofanto

Conocido como "el padre del Álgebra", Diofanto escribió numerosas obras entre las que destacan los "*Porismas*" (colección de lemas, ya totalmente perdida) y sobre todo, la "*Aritmetica*", que es en realidad un tratado de 13 libros, del que sólo han llegado 6 hasta nuestros días. No es propiamente un texto de álgebra, sino una colección de 150 problemas (escritos sin criterio u orden aparente), que Diofanto resuelve dando una solución para cada uno de ellos, aunque sin preocuparse de la unicidad o no de la misma.

2.2. La poesía en la obra matemática de Bhaskara

Bhaskara, matemático y astrónomo hindú del siglo XII (Bijapur, 1114 - Ujjain, 1185) es conocido también como Bhaskara II o como Bhaskaracharya, que significa "Bhaskara el maestro". Es probablemente el matemático hindú mejor conocido de la antigüedad, si bien algunos autores conceden este honor a Brahmagupta, nacido 486 años antes que Bhaskara.

Bhaskara representa la cima del conocimiento matemático del siglo XII. Su trabajo matemático parte del de Brahmagupta que ya manejaba el cero y los números negativos. Pero Bhaskara va más allá en su uso. Así, descubrió el doble signo de los radicales cuadráticos y el carácter anormal de los mismos cuando el radicando es negativo. En su obra *Vijaganita* aparece por primera vez el intento de resolver la división por cero, indicando que se trata de una cantidad infinita.

Actualmente son conocidos seis trabajos de Bhaskara, aunque se cree que un séptimo se perdió. Su obra más conocida es el *Siddhanta Siroman*, escrita en el año 1150, que se divide en cuatro partes: *Lilavati* (aritmética), Vijaganita (álgebra), cuya mejor traducción sería "el arte de contar simientes", *Goladhyaya* (globo celestial), y *Grahaganita* (matemáticas de los planetas).

Sobre la parte denominada *Lilavati,* así denominada en honor de su hija, que tenía precisamente ese nombre, existe una curiosa leyenda, que es en sí misma pura poesía (Tahan, 2008, p. 130 y siguientes).

Se cuenta que Bhaskara, al nacer su hija, consultó las estrellas y por la disposición de los astros comprobó que ésta estaba condenada a permanecer soltera toda la vida. Como él no se conformara con esa determinación del destino, recurrió a los astrólogos más famosos de su tiempo para ver cómo Lilavati podría lograr desposarse y ser feliz en su matrimonio. Un astrólogo le aconsejó que llevara a su hija a Davira, junto al mar. Allí encontraría un templo excavado en la piedra en el que se veneraba a una imagen de Buda que llevaba en la mano una estrella. Según aquel astrólogo, sólo en Davira podría Lilavati encontrar novio, pero asimismo, dijo, el matrimonio sólo sería feliz si la ceremonia del casamiento se celebraba en un determinado día del calendario, marcado en el cilindro del tiempo, que él mismo supo precisar.

Llevada por consiguiente a Davira por su padre, Lilavati fue al cabo del tiempo pedida en matrimonio por un joven rico, trabajador y honesto, de buena familia. Fijado entonces el día y la hora señalados por el astrólogo, se reunieron los amigos y las familias para celebrar el casamiento.

Los hindúes, en aquella época, medían, calculaban y determinaban las horas del día con auxilio de un cilindro colocado en un vaso lleno de agua. Dicho cilindro, abierto sólo en su parte superior, tenía un pequeño orificio en el centro de su base, de forma que a medida que el agua, entrando por ese orificio invadía lentamente el cilindro, éste se hundía en el vaso hasta que llegaba a desaparecer por completo, a una hora previamente determinada.

Bhaskara colocó ese cilindro de las horas en posición adecuada y con el mayor cuidado esperó hasta que el agua llegara al nivel marcado. Sin embargo, Lilavati, llevada por su curiosidad, quiso observar la subida del agua en el cilindro y se acercó para verla. Entonces, una de las perlas de su vestido se desprendió y cayó en el interior del vaso, obturando fatalmente el pequeño orificio del cilindro y llegando por ello a impedir la entrada de agua en el mismo.

El novio y todos los invitados esperaban pacientemente que llegara la hora marcada, pero ésta pasó sin que el cilindro la indicara como había previsto el astrólogo. El casamiento no llegó a realizarse por tanto y Lilavati quedó soltera para siempre.

Por eso, Bhaskara reconoció que era inútil luchar contra el destino y le dijo a su hija: "*Escribiré un libro que perpetuará tu nombre y perdurarás en el recuerdo de los hombres durante un tiempo mucho mayor del que vivirán los hijos que pudieran haber nacido de tu fracasado matrimonio".*

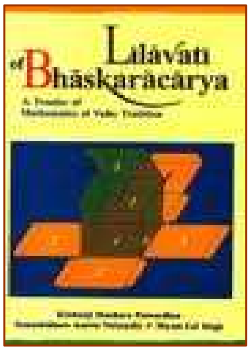


Figura 3. El Lilavati de Bhaskara

Así, esa obra de Bhaskara se hizo célebre y el nombre de Lilavati sigue inmortal en la historia de las Matemáticas. En ese libro, Bhaskara recopila diversos problemas de otros matemáticos añadiendo sus propios resultados. Aparecen de esta forma enunciados muy bonitos, graciosos e incluso románticos, que pueden ser resueltos por medio de ecuaciones y sistemas. Por ejemplo, los siguientes, que aunque no son poesías, también contribuyen a conseguir el objetivo que se persigue en este artículo:

1. Dime, amable y querida Lilavati, de ojos dulces como la tierna y delicada gacela, ¿cuál es el numero que resulta de la multiplicación de 135 por 12?

2. Dentro de un bosque, un número de monos es igual al cuadrado de un octavo del total de un conjunto de ellos que están jugando ruidosamente. Hay doce monos más, que están en una colina cercana y no juegan. ¿Cuántos monos están jugando?

3. Los caballos que pertenecen a 4 hombres son respectivamente 5, 3, 6 y 8. Los camellos que pertenecen a los mismos son 2, 7, 4 y 1. Las mulas son 8, 2, 1 y 3. Los bueyes son 7, 1, 2 y 1. Los 4 hombres tienen igual fortuna. ¿Cuál es el precio de cada uno de los animales?

4. Un pavo real se encuentra posado en el extremo de un poste vertical en cuya base hay un agujero de culebra; observando la culebra a una distancia del pie del poste igual a tres veces su altura, el pavo real se lanza sobre ella en línea recta mientras la culebra intenta ganar su agujero. Si el pavo real captura a la culebra cuando ambos han recorrido exactamente la misma distancia, ¿a cuántos codos de distancia se produjo la captura?

5. La quinta parte de un enjambre de abejas se posó en la flor de Kadamba, la tercera en una flor de Silinda, el triple de la diferencia entre estos dos números voló sobre una flor de Krutaja, y una abeja quedó sola en el aire, atraída por el perfume de un jazmín y de un pandnus. Dime, bella niña, ¿cuál es el número de abejas que formaban el enjambre?

Naturalmente algunos de estos problemas no tienen solución única. Bhaskara lo sabe y obtiene la mínima en cada caso, Así, para el segundo problema las soluciones son 16 y 48, mientras que para el tercero son 85 para los caballos, 76 para los camellos, 31 para los mulos y 4 para los bueyes (estas soluciones así como las correspondientes a los otros problemas se dejan como ejercicio para el lector).

Otros problemas interesantes que figuran en el Lilivati, esta vez sí escritos en forma de poesía, son los dos siguiente:

6. ¡Oh, muchacha! De un grupo de cisnes,
los siete medios de la raíz cuadrada del número total juegan
en la orilla del estanque.
Los dos restantes pelean
Amistosamente, en el agua.
¿Cuál es el número total de cisnes?

7.- Un collar se rompió mientras jugaban dos enamorados.
Y una hilera de perlas se escapó.
La sexta parte al suelo cayó,
La quinta parte en la cama quedó.
Y un tercio la joven recogió.
La décima parte el enamorado encontró
Y con 6 perlas el cordón quedó.
Dime cuántas perlas tenía el collar de los enamorados.

Figura 4. Bhaskara

Figura 5. Obra de Bhaskara

Todos estos problemas (y otros más, que pueden verse (Tahan, 2008, p. 130 y siguientes) pueden ser aprovechados por el profesor en las clases dedicadas a la resolución de ecuaciones y sistemas, así como para atender a la diversidad de razas y culturas en sus clases. Sería asimismo muy interesante que el profesor propusiera a sus alumnos una actividad consistente en enunciar en forma de poesía determinados enunciados de matemáticas que condujesen a la resolución del problema por medio de ecuaciones y sistemas. De esta forma, se tratarían además diversas competencias (exigidas en el sistema educativo español en estos niveles), como la *social y ciudadana*, la *cultural y artística* y la *de autonomía e iniciativa personal*, por ejemplo.

2.3. Poesía en la obra matemática de Fontana

Niccolò Fontana (Brescia, 1500 – Venecia, 1557) fue un matemático italiano apodado *Tartaglia* (tartamudo) desde que de niño recibió una herida en la toma de su ciudad natal. Aunque fue huérfano y sin medios materiales para proveerse una instrucción, Fontana llegó a ser uno de los principales matemáticos del siglo XVI, a pesar de que por la carencia de medios, su aprendizaje fuese esencialmente autodidacta.

Figura 6. Niccolo Fontana (Tartaglia)

Fontana descubrió un método para resolver ecuaciones cúbicas, pero nunca quiso revelarlo. Otro matemático italiano, Scipione del Ferro, también había descubierto otro método para obtener soluciones parciales de estas ecuaciones. Del Ferro se lo contó a su asistente Fior en el lecho de muerte. Tras unos años, Fontana retó a Fior a una competición matemática: cada uno de ellos le enviaría al otro 30 problemas y ganaría el que resolviese más de ellos en menos tiempo. Fontana le envió a Fior problemas de varios tipos, pero como Fior creía que era él solo el que podía resolver ecuaciones cúbicas, le envió a Fontana 30 problemas de ese tipo. Fontana los resolvió todos en menos de dos horas, ganando la competición de una manera muy brillante. Fontana no quería revelar a nadie su forma de resolver estas ecuaciones, pero finalmente se lo proporcionó a un famoso doctor y matemático, Gerolami Cardano. No obstante, Fontana le contó su método a Cardano en forma de poema, quizás para evitar que cayera en manos de otro matemático rival. Indicamos a continuación ese poema, a pesar de que su traducción del italiano al español resulte un poco “pesada” (en él, la palabra “cosa” representa a la incógnita del problema, denominación habitual de aquellos tiempos):

Cuando el cubo y cosas juntas
Son iguales a algún número discreto,
Encontrad dos más que difieran en éste.
Entonces mantendréis esto como un hábito
Que su producto debería ser siempre igual
Exactamente al cubo de un tercio de las cosas.
El resto pues como regla general
De sus raíces cúbicas sustraído
Será igual a vuestra cosa principal.
En el segundo de estos actos,
Cuando el cubo está solo, observareis estos otros acuerdos:
Enseguida dividiréis el número en dos partes
De modo que el uno por el otro produzcan claramente
El cubo del tercio de las cosas exactamente.
Luego de esas dos partes, como regla general,
cogeréis las raíces cúbicas sumadas entre sí,
Y esta suma será vuestro pensamiento.

El tercero de estos cálculos nuestros
Se resuelve con el segundo si tenéis cuidado
Pues por su naturaleza están casi apareados.
Estas cosas descubrí, y no con pasos indolentes,
En el año mil quinientos treinta y cuatro,
con fundamentos fuertes y robustos
En la ciudad fajada por el mar.

2.4. Otros problemas planteados de forma poética

Finalizamos este artículo presentando cuatro poesías más, unas anónimas y otras de diferentes autores, también susceptibles de ser utilizadas por el profesor de Matemáticas en sus clases a la hora de explicar las ecuaciones y los sistemas a sus alumnos. Son las siguientes:

1. Un ladrón un cesto de naranjas
del mercado robó
y por entre los huertos escapó;
al saltar una valla,
la mitad más media perdió;
perseguido por un perro,
la mitad menos media abandonó;
tropezó en una cuerda,
la mitad más media desparramó;
en su guarida, dos docenas guardó.
Vosotros, los que buscáis la sabiduría,
decidnos:
¿Cuántas naranjas robó el ladrón?

Córdoba: Escuela del Califa. Año 355 de la Hégira
(solución: 199)

2. De los números naturales
sólo pocos se destacan,
particularmente notables
que a otros números opacan.
Números primos, cuadrados perfectos
son ejemplares singulares
de numerales selectos,
de inolvidables propiedades.
Y entre los números importantes
no soy yo la excepción,
seguro que me has visto antes,
pero ahora adivina quién soy.
Pues si mi propia raíz cuadrada
a mí mismo me restan,
por una gracia solo a mí reservada
el resultado es justo treinta.

Anónimo.
(Solución: 36)

3. A un cerezo yo subí

Y cerezas encontré.
Cerezas no me llevé,
Y cerezas no dejé.
¿Cuántas cerezas hallé? Anónimo.

4. Cuando todo quería poner en práctica
siempre debía recurrir a la matemática.
Quería solamente dedicarme al dibujo, a la pintura
pero debía sacar proporciones y medir la altura.
Quería también dedicarme a cantar
pero debía medir el tiempo entre el canto y la música por tocar.
Creí encontrar en el baile una solución
pero si no contaba los pasos era mi perdición.
A la composición de poesías me quise dedicar,
pero debía medir los versos para una buena poesía lograr.
Geografía, historia, música, todas con la matemática se relacionaban
y en mi mente números y números se cruzaban.
Para olvidarme caminé y caminé
y al mirar un letrero que decía 5 km encontré.
Miré mi reloj y una hora había demorado
y en mi mente una pregunta había pasado.
Si en una hora 5 km había caminado
en 4 horas ¿cuántos km habría avanzado?
Dije entonces 1 es 4 como 5 es a *x*, sin pensar
que con una regla de tres simple me había yo de encontrar.
Multipliqué 5 por el 4 y 20 me dio, despejé la *x* y el 1 dividiendo pasó,
la *x* igual a 20 me quedó y 20 km habría de recorrer yo.
Luego pensando me di cuenta que con la matemática me había de nuevo encontrado,
y me di cuenta que ni siquiera caminar podía hacerlo, sin ella a mi lado.
Fue en ese momento cuando su importancia descubrí
y aunque a veces me cansaba, las tablas aprendí.
Pero me di cuenta que aunque de ella escaparme quiera,
hasta en las cosas más sencillas la matemática espera.

Gabriela Noriega.

Bibliografia y Webgrafía

Tahan, M. (2008). *El hombre que calculaba*. Editorial RBA Libros, Barcelona.

Hervás, J. (Administrador). *Matemáticas y Poesía.* http://www.matematicasypoesia.com.es/ .

Iglesias Albarrán, I. M. http://aula21.net/aulablog21/archives/2009/04/30/matematicas-y-poesia/

Sobre poesías matemáticas. http://www.albaiges.com/poesia/poesiamatematica.htm.

Matemáticas Divertidas. http://www.matematicasdivertidas.com/Poesia%20Matematica/poesiamatematica.html

Lo último en matemática y poesía http://matematicasypoesia.blogspot.com/

Blogs de Poesía y Matemáticas.
http://www.albaiges.com/poesia/poesiamatematica.htm
http://centros5.pntic.mec.es/ies.julio.caro.baroja/departamentos/MATEMATICAS/APUNTES_ACTIVIDADES/POEMAS/poemas_matematicas.htm
http://aula21.net/aulablog21/archives/2009/04/30/matematicas-y-poesia/

Juan Núñez Valdés: licenciado y doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Es Profesor Titular de Universidad del Departamento de Geometría y Topología, con sede en la Facultad de Matemáticas de dicha Universidad. Su investigación se centra en la Teoría de Lie y en la Matemática Discreta. También ha publicado artículos sobre Matemática recreativa, Historia y Divulgación de las Matemáticas. **jnvaldes@us.es**

Concepción Paralera Morales Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Sevilla y doctora por la Universidad Pablo de Olavide. Profesora Contratada Doctor del Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica de la Universidad Pablo de Olavide. Su investigación se centra en Localización Multiobjetivo. También ha publicado artículos sobre Investigación e Innovación en Educación Matemáticas. **cparmor@upo.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 185-196
ISSN: 1815-0640
Coordinada por Fredy González

Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamerica

Borges y la Historia de la Matemática. La utilización de recursos literarios en la formación de profesores de matemática.

Juan Nápoles Valdés

Resumen

En este trabajo presentamos algunas experiencias recogidas en el dictado de la asignatura Análisis Matemático III en el IFD “Dr. Juan Pujol” de Corrientes, Argentina, donde se ilustra la utilización de recursos literarios en la formación de profesores de Matemáticas

Abstract

In this paper we present some experiences collected in the teaching of the Mathematical Analysis III in the IFD "Dr. Juan Pujol" of Corrientes, about the uses of literary resources in the Math professor’s formation

Resumo

Neste trabalho apresentamos algumas experiências recolhidas no ditado da matéria Análise Matemática III no IFD “Dr. Juan Pujol” de Corrientes, Argentina, onde se ilustra a utilização de recursos literários na formação de professores de Matemáticas.

Preliminares

Hoy en día podemos presumir que los niveles de alfabetización de nuestro país son altos. Hay muchos más titulados universitarios que nunca en la historia, y todos ellos, sin excepción, sean de carreras técnicas o humanísticas, han cursado al menos diez años de una asignatura llamada “matemáticas”. Para aprobar estos cursos han demostrado en muchos exámenes poseer distintos grados de competencias a la hora de resolver problemas, hacer cálculos o formular definiciones. No cabe duda de que muchos de ellos serán muy capaces en sus profesiones, e incluso conocerán idiomas y sabrán manejar un ordenador, entre otras muchas habilidades. Y, sin embargo, dudo que la mitad de la población encuestada pueda responder correctamente a tres de cinco preguntas generales sobre Matemáticas, aún cuando todas ellas sean de nivel primario.

Lamentablemente a esta situación no escapan los estudiantes que ingresan en las diferentes carreras del profesorado de Matemática de nuestro país, no es que tengan una base matemática deficiente, sino que su formación socio-cultural general es muy insuficiente y ni hablar de los hábitos de estudio, de limpieza en el trabajo, de rigor, etc. Lo anterior es extremadamente grave, si nos referimos a los libros leídos por los jóvenes que terminan la Educación General Media como ejemplo de esto. Es cierto que un buen lector no lee un libro para aprender nada, pero suele ocurrir con los buenos libros que dejan una huella persistente. Se dice que la buena literatura no deja indemne al lector. Como dice Estela Kaufman *"Sendo ela uma obra construída pelo espírito humano, ela pode ser compreendida através das palavras*"[1]

En mis clases de matemáticas también insisto en lo evidente: que las Matemáticas son *otra* forma de ver el mundo. Proporciona una visión y lenguaje en el que están implicadas categorías, cantidades, relaciones, simetrías, homomorfismos, tendencias, probabilidades, certezas, conjeturas, demostraciones e indefiniciones. Es evidente que el uso de las herramientas que a lo largo de la historia han proporcionado las matemáticas nos han permitido vender ovejas, construir pirámides y rascacielos, conocer la estructura del átomo o viajar a otros planetas. Pero a veces se olvida que las matemáticas son además un producto cultural. Que, al igual que otros logros, han sido conseguidos por hombres y mujeres que han dedicado años a su estudio; que su desarrollo ha atravesado por vaivenes políticos y filosóficos; que entre los matemáticos ha habido rencillas, secretos, envidias, devociones, pasiones, y que los logros matemáticos, tienen tras de sí décadas o siglos de especulación, de aproximación y de intentos fallidos... Valdría la pena estudiar Matemática aunque las matemáticas no tuvieran ninguna utilidad práctica, de la misma manera que no tiene *utilidad* extasiarse ante una pintura, una sonata o una escultura.

Una de las ventajas de la literatura es que su utilidad no se discute: nadie la cuestiona. Quizá por eso, una persona pueda decidir "perder" la tarde de un sábado ante un buen libro. A pesar de que los índices de lectura no sean muy altos, hay miles de personas que dedican horas leyendo historias imaginadas por otros, por puro placer. En comparación el número de personas que decide dedicar la tarde de un sábado disfrutando con las matemáticas es más bien bajo.

Por el contrario, en toda formación superior la utilidad de la Matemática es cuestionada.
Veamos la siguiente historia.

Igor Tamm

Durante la revolución rusa, el físico y matemático Igor Tamm[2] fue detenido por miembros de una milicia anticomunista, sospechoso de ser un agitador comunista antiucraniano. Los milicianos le llevaron ante su jefe, que decidió que sería fusilado inmediatamente. Ante el pelotón de fusilamiento, Tamm fue interrogado sobre su profesión, y respondió que era matemático. El jefe del pelotón, mientras cargaba su fusil, continuó la conversación: *"Muy bien"*, dijo, *"calcula el error que se comete cuando la aproximación por series de Taylor a una función cualquiera se trunca después de n términos. Hazlo y serás libre, falla y te fusilaremos"*. Tamm hizo los cálculos con el dedo sobre la arena del

[1] Para más detalles, consultar Estela Kaufman Fainguelernt (2002).
[2] Igor Yevgenyevich Tamm. Físico soviético, nació en Vladivostok, el 8 de julio de 1895 y murió en Moscú, el 12 de abril de 1971.

suelo, y cuando hubo terminado, su inquisidor comprobó el resultado y le dejó marchar. Tamm ganó el Premio Nobel de Física en 1958 por sus investigaciones sobre el Efecto Cherenkov (con Pável Cherenkov e Iliá Frank), sin embargo nunca supo la identidad de su verdugo-salvador matemático.

Verdadera o falsa, en esta historia la cuestión de la utilidad de la Matemática adquiere ribetes esenciales para la vida humana.

Ian Stewart

En sus *"Cartas a una joven matemática",* Ian Stewart propone un experimento mental, que consiste en colocar una pegatina roja en todos los objetos en los que encontramos matemáticas en su interior. El experimento sería divertido. Un niño recién levantado de la cama debería ir colocándolas en su despertador, en la mesa en que se sienta a desayunar, en las tazas y platos en que se sirve el desayuno, en sus deportivas, en la puerta de salida la calle, en el ascensor, en las tapas de alcantarillas, en los edificios, los semáforos por no hablar de automóviles, ordenadores, teléfonos, oficinas bancarias y sistemas de localización por satélite. Sin embargo, como dice Stewart, todas estas manifestaciones matemáticas permanecen ocultas. Lo único que un niño percibe de matemáticas en el mundo está precisamente en las clases de matemáticas. Nadie, salvo los profesores de matemáticas, parece *hacer matemáticas*. Y lo grave, claro, es que los profesores no las hacemos... Las enseñamos, que es cosa bien distinta. O, para ser más contundente todavía, enseñamos los logros y las posibilidades de las matemáticas, no las matemáticas propiamente dichas[3]

En el caso de los alumnos que llegan a mi curso de Análisis Matemático III, vienen con deficiencias serias no solo en Matemática, sino en la formación socio-cultural, no imprescindible, pero sí con un grado de necesidad en el desarrollo de su profesión futura. A pesar de todos los esfuerzos por mejorar la presentación de la asignatura, esta sigue conservando el dudoso prestigio de ser una materia difícil, árida e inaccesible para la mayor parte de los alumnos.

Teniendo como antecedente que diversas investigaciones han demostrado que la integración de las matemáticas y la literatura puede ayudar a la comprensión de conceptos matemáticos[4], en un momento de calma fui hilvanando algunos de los recursos que existen en la literatura y que me permitirían presentar los contenidos de esta asignatura en un plano doblemente formador: cultural y matemático.

En este trabajo se presentan las experiencias recogidas en la impartición del Análisis Matemático III en el IFD "Dr. Juan Pujol" de Corrientes (Argentina), a partir de diversos recursos literarios.

[3] Consultar M. Paty (2000).
[4] Consultar Burns (1995) y Whitin and Whitin (2004) por ejemplo

Sobre la Historia de la Educación Matemática[5].

¿Qué somos los profesores de Matemática?, ¿qué hacemos?, ¿desde cuándo lo hacemos?, ¿por qué y para quién lo hacemos? Estos son cuestionamientos sobre nuestra proyección cultural en la sociedad y son asuntos fundamentales de la Historia Social de la Educación Matemática.

La tradición nos ha llevado a creer que investigar en Historia de la Educación Matemática es simplemente sacar a la luz hechos relacionados con la política administrativa y su instrumentación en planes de estudios, niveles, métodos y formas de enseñanza. Existen diversas razones que nos han hecho pensar de esta forma y no es objetivo nuestro reflexionar ahora sobre ello. Sólo queremos señalar que existen otros modos y enfoques de hacer Historia de la Educación Matemática[6].

Subrayo dos cuestiones teóricas que Schubring plantea y que son de imprescindible consideración en toda investigación histórica:

- La doble cara epistemológica de la Educación Matemática: su función técnica y su función cultural. De esta idea resalto la atención a la dimensión de la proyección sociocultural del quehacer del profesor, de las instituciones, de los países.
- El tratamiento de la categoría desarrollo debe hacerse con un enfoque dialéctico, considerando tanto el impacto sobre los conceptos científicos y su evolución, como la organización del sistema académico y los planes y programas donde se concretan la política y la ideología educacional.

Como último presupuesto teórico y para evitar malas interpretaciones definamos lo que entenderemos por *profesionalización del matemático*.

Al estudiar la etimología de la palabra “matemáticas”, uno descubre aspectos interesantes que bien vale la pena hacer conocer por cuanto ilustran la importancia que la enseñanza de las matemáticas ha tenido a lo largo de la historia, al menos desde la época clásica griega. Jean-Étienne Montucla (Matemático e historiador francés nació el 5 de septiembre de 1725 en Lyons y murió el 18 de diciembre de 1799 en Versailles) el primer historiador de las matemáticas en épocas modernas, menciona que uno de los significados de la palabra “matemáticas”, fue “conocimiento general”. Según Bochner[7] el significado original de la palabra griega “matemáticas”, fue: “algo que ha sido aprendido o entendido” o mejor “conocimiento adquirido”. Por extensión, se obtiene un significado como: “conocimiento adquirible por aprendizaje”. La palabra griega original viene en plural matemáticas (*mathematiké*). La singularización (*matemática)* en idiomas como, español y francés viene del tiempo de la Escuela Bourbaki (alrededor de la década de 1940).

Desde la antigüedad existieron miembros de la sociedad con conocimientos especializados de carácter matemático que de una forma u otra se preocuparon por trasmitir a otros esa cultura. Seguro que muchos piensan enseguida en Pitágoras o

[5] Para contextos generales de la formación y gestión del conocimiento en los niveles superiores, recomendamos A. Perez Lindo et al (2005).
[6] Ver por ejemplo, G. Schubring (1988), G. Schubring (1997), C. Sánchez (2001) y J. Kilpatrick, L. Rico Romero, M. Sierra (2002).
[7] S. Bochner (1981).

en Euclides. Pero otros podrán pensar que hasta bien avanzada la Edad Moderna no existió un sistema de titulación especializado para ejercer la enseñanza de la matemática. Nos parece acertada la connotación que le da Magali Sarfatti Larson en *"The Rise of Professionalisation"* (1977)[8] cuando dice:

> la espina dorsal de la profesionalización es la jerarquía ocupacional, esto es, un sistema diferenciado de competencias y premios; cuyo principio central de legitimidad esta fundado sobre la realización de una habilidad (expertise) socialmente reconocida, o mas simplemente, sobre un sistema de educación y titulación. La profesionalización es por tanto un intento de trasladar un orden de recursos raros y escasos -conocimientos especializados - en otro - el reconocimiento social y la retribución económica.

O sea, que entenderemos formada la profesión de matemático cuando la sociedad tenga establecido un sistema de titulación en Matemática y una correspondencia entre, por una parte, los conocimientos matemáticos (que siempre han sido bastante raros y escasos en la sociedad) y por otra parte, un reconocimiento social (sin duda bastante raro), con una retribución material (que generalmente ha sido escasa). Desde luego que no siempre existió tal correspondencia en el caso de los matemáticos.

A finales del siglo XIX se había afianzado un nuevo grupo social de carácter profesional: el de los matemáticos. Destaquemos dos hechos que atestiguan esto:

- En 1897 se reunía en Zurich el I Congreso Internacional de Matemáticos. A partir de 1900 los matemáticos se reunirían cada cuatro años, salvo en los años de las conflagraciones mundiales.
- En Roma 1908 se crea el CIEM (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique), el objetivo primario de este Comité Internacional era analizar las reformas curriculares en Europa y USA.

A partir de entonces se estimuló institucionalmente la proyección sociocultural del profesor de matemáticas. No obstante, algunos talentosos profesores-investigadores siguieron considerando como su única función social realizar la docencia establecida por interés de las instituciones docentes y aquellas investigaciones puras que resultaban de su interés personal. Afortunadamente, han existido siempre personalidades excepcionales que sirvieron de ejemplo y acicate para la eficaz proyección sociocultural, integrada con la labor docente e investigativa.

En el otoño de 1958, la Organización de Cooperación Económica Europea, congregó en Francia a representantes de 20 países, quienes dedicaron dos semanas al estudio del programa total de Matemáticas de este país, desde L'École Maternelle (3-5 años), hasta L'École Normal Supérieure (de formación de profesores). En conjunto, el programa resultó ser tradicional en extremo, riguroso, selectivo e incapaz de proporcionar el personal necesario, con preparación adecuada en Matemática, para satisfacer las necesidades económicas del país. Y se estuvo de acuerdo que, lo dicho respecto a Francia, era aplicable a casi todos los países europeos.

[8] Berkeley, Los Angeles.

El Seminario de Royaumont, celebrado en noviembre del año siguiente, sentó, en el informe *"New Thinking in School Mathematics",* las bases de lo que debía ser un programa de Matemática escolar, genuinamente "moderno".

La llamada matemática moderna trajo como principal elemento el método axiomático, dentro de un marco formalista, el que se trató de imponer desde los primeros años de escolaridad, con consecuencias catastróficas en el ámbito educativo de toda América Latina.

En los años de 1980, en los EEUU aparecen unos principios (estándares mínimos para la educación matemática), que marcan un hito en la historia de la educación en ese país, donde la educación ha tenido autonomía local para establecer la currícula de enseñanza y que ha repercutido, en mayor o menor medida, en todo el mundo y en los diferentes niveles de enseñanza.

Esos principios los podemos expresar en las siguientes líneas[9].

- ***Equidad.*** Por equidad aquí se entiende la excelencia en la educación con altos objetivos y con apoyo general para todos los estudiantes.
- ***Currículo.*** Un currículo debe ser coherente, encaminado a mostrar partes importantes de las matemáticas, que serán bien distribuidas a lo largo de los cursos básicos.
- ***Enseñanza.*** La enseñanza efectiva requiere entender lo que el estudiante sabe y lo que necesita aprender y como consecuencia de esta apreciación, con el apoyo institucional, lograr sobrepasar los retos que implica este aprendizaje efectivo.
- ***Aprendizaje.*** El estudiante debe aprender matemáticas entendiendo. Este aprendizaje debería basarse en la construcción de nuevo conocimiento con el soporte de la experiencia y de los conocimientos ya adquiridos.
- ***Evaluación.*** La evaluación debe servir de suporte para el aprendizaje de partes importante de las matemáticas y acopiar información útil tanto para estudiantes como profesores.
- ***Tecnología.*** En tiempos modernos la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esta tecnología influye en las matemáticas que se enseñan; facilita y enriquece el aprendizaje de las mismas por parte del estudiante.

Los estándares que busca mantener la educación matemática de Estados Unidos se encuentran en la página Web citada. Estos principios y estándares siguen vigentes a la fecha.

No nos olvidemos que estos principios están condicionados por las dos características fundamentales de la Matemática actual: la explosión del conocimiento y la contradicción exacerbada entre la sublimación teórica y la universalización de las prácticas.

---

[9] NCTM (2000). Por otra parte, aquí se brinda un detallado resumen sobre el papel de la comunicación oral y escrita en la promoción de la comprensión matemática.

Un interludio histórico y la acción

Évariste Galois

En la fría madrugada del 30 de mayo de 1832, un joven entra en un bosque de las afueras de París. Se ha levantado muy temprano a pesar de que la víspera estuvo escribiendo hasta altas horas de la noche, a la luz de un candil, con las piernas envueltas en una manta. Aún no ha cumplido los veintiún años, dos días antes ha sido liberado de la cárcel y mientras trata de orientarse en la neblina afianza su presentimiento de que va a morir.

Por eso, se consuela con la idea de que la noche anterior haya dejado escrito un testamento y varias cartas para sus amigos. Una hora más tarde yace en el suelo con una bala en su abdomen. Es recogido varias horas después por un transeúnte, y morirá al día siguiente, de una peritonitis.

Mary Sommerville

Al comienzo de un día laborable cualquiera de 1817, una mujer se despide de su esposo a la puerta de casa, en un acomodado barrio de Londres. Además de un beso, deposita en su mano una nota, que podría parecer la lista de la compra. El hombre guarda el papel en su bolsillo, se sube al coche de caballos y va a trabajar. Cuando acaba su jornada laboral, el marido se dirige a la Biblioteca de la Real Sociedad, institución de la que es socio, como inspector médico de la Real Armada Británica. Allí saca la nota que le ha dado su mujer, busca los libros solicitados y a la luz de una lámpara copia para ella, punto por punto, los artículos científicos que ella necesita para sus estudios. En la Real Sociedad no se admite a las mujeres y el esposo, todas las tardes, va a la biblioteca a copiar los textos que ella necesita para avanzar en sus investigaciones.

Arquímedes

A mediodía de una jornada de la que no ha quedado memoria (pero sí el año, 212 a.C.), la ciudad de Siracusa es un *mare mágnum* de gritos y de humos. Los soldados del ejército enemigo han franqueado puertas y barricadas y acabado con la resistencia de los últimos defensores, y se dedican a la violación y al pillaje. Sin embargo, en el jardín de su residencia, un anciano parece ajeno a esos dramáticos acontecimientos.

Trabaja enfrascado en un complejo asunto y no presta atención a las voces de los asaltantes, que han entrado en su casa. Como es mediodía, ni siquiera advierte la corta sombra del soldado que hay a su espalda, ni su duro oído escucha la voz que le exige que se vuelva y se considere prisionero. Está tan embebido en sus investigaciones que despacha al militar con un gesto despectivo. Este, ofendido, atraviesa el cuerpo del anciano con su lanza.

A las cinco de la tarde de un 27 de enero de 1860, un hombre tiene la certeza de que no verá la luz del día siguiente. Lo ha notado en los ojos del médico que le ha visitado una hora antes. Se sienta en el sillón frente a la chimenea y comienza a hacer balance. Contemplada desde el lado favorable, su vida ha sido un éxito. Alumno precoz desde muy niño e ingeniero militar a los 20 años, fue aclamado como el mejor esgrimista y bailarín del imperio austríaco. Además, es un buen violinista y habla nueve lenguas, entre ellas el chino y el tibetano. Sin embargo, no era por eso por lo que él había peleado toda su vida. Ahí quedaban más de veinte mil páginas de sus escritos, de las que solo había conseguido publicar veinticuatro, y eso en un apéndice a una obra de su padre. Mirada de cierta manera, su existencia había resultado un verdadero desperdicio, y la injusticia y el olvido se habían cebado en él.

János Bolyai

Es casi seguro que al escuchar estas cuatro historias habrán reconocido a sus protagonistas: Évariste Galois, Mary Somerville, Arquímedes y János Bolyai. Los cuatro tienen en común no sólo haberse dedicado a las matemáticas, sino haberlo hecho con pasión.

¿Por qué si la Historia de la Matemática es una verdadera novela de pasión y aventuras, no lo es la propia Matemática?

¿Por qué empeñarnos en desligar la Matemática de nuestra Vida? Nada mejor que ver cualquier programa de una asignatura de nivel superior, por ejemplo, el programa de la asignatura Análisis Matemático III de la carrera del Profesorado de Matemática del IFD “Dr. Juan Pujol” de Corrientes:

<u>Tema 1: Espacios Métricos</u>

El Espacio Euclideano de n-dimensiones. Vecindades. Puntos interiores, exteriores y frontera. Puntos adherentes. Conjuntos abiertos y cerrados. Conjuntos compactos y conjuntos conexos. Definición de métrica y espacio métrico. Ejemplos. Diámetro, distancia entre conjunto. Clausura de un conjunto. Conjuntos densos. La revisión de la noción de punto de acumulación. Implicaciones didácticas

<u>Tema 2: Sucesiones y series de funciones</u>

Planteamiento histórico del problema. Convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series de funciones. Propiedades de las funciones definidas por sucesiones o series de funciones. Espacio de funciones acotadas. Series de potencias

<u>Tema 3: Integral (R)</u>

El problema del área. Función primitiva e integral indefinida. Propiedades. Métodos de Integración. Sumas superiores e inferiores. Integral definida. Propiedades fundamentales. Funciones integrables (R). Cálculo de integrales definidas. Fórmula de Newton-Leibniz. Cambio de variable. Métodos de integración. Cálculo aproximado. Aplicaciones. Apéndice: Integrales Impropias

Tema 4: Medida

El problema de la medida. Medida de intervalos. Medida de conjuntos elementales. Conjuntos medibles. Conjuntos de medida nula. Invarianza ante traslaciones. Conjuntos no medibles. Funciones medible. Funciones simple. Propiedades verdaderas en casi todo punto. Convergencia en medida. Función singular de Cantor. Apéndice: Geometría Fractal.

Tema 5: Integral (L)

Principales insuficiencias de la Integral (R). Integral de funciones no negativas. Integral de funciones simples. Funciones integrables (L). Paso al límite bajo el signo integral. La integral (L) y los conjuntos de medida nula.

Tema 6: Introducción a la Teoría de Variable Compleja

Planteamiento histórico del problema. Funciones de una variable compleja. Aplicaciones. Límite. Teoremas sobre límites. Límite y el punto del infinito. Continuidad. Derivadas. Fórmulas de derivación. Ecuaciones de Cauchy-Riemann. Condiciones suficientes. Coordenadas polares. Funciones analíticas. Funciones armónicas. Funciones elementales. Apéndice: El Conjunto de Mandelbrot

¿Cómo lograr, en el contexto educativo y en el contexto histórico que hemos presentado, que los estudiantes asimilen estos contenidos? Mejor aún, ¿se puede vincular con temas no exactamente matemáticos para mejorar su aprendizaje? Para ello, diseñé algunos "momentos" a lo largo del curso, donde debatíamos cuestiones ajenas al programa pero que servían de introducción al mismo.

A continuación presentamos, muy sucintamente, el esquema del curso (64 horas) y un grupo de "momentos" cruciales en el mismo, que los hemos definidos como "días", veamos:

"*Primer día*".

A partir de la lectura de los capítulos I al III de *"Alicia en el País de las Maravillas",* de Lewis Carroll, editado por Editorial Porrúa, México, 1989, se plantean las siguientes preguntas (se presentan sólo las que tienen vínculo directo con el trabajo aunque se formulan otras con claras intenciones culturales):

1) ¿Cuánto mide el radio de la Tierra?, ¿quién fue el primero en medirlo y cómo?

2) Latitud y longitud. Novela *"Los hijos del Capitán Grant"* de Julio Verne.

La respuesta a estas preguntas nos lleva a búsquedas históricas y a la reafirmación de diferentes conocimientos geométricos que se consolidarán en las discusiones subsecuentes, relacionadas con el accionar de Eratóstenes, en el primer caso, y el sistema de coordenadas cartesianas utilizadas para fijar un punto sobre la superficie terrestre.

"*Segundo Día*"

A partir de la lectura del Capítulo IV de *"Alicia…"* se orienta el estudio y discusión del Teorema de Jordán, las diferencias entre argumentación, prueba y demostración (en el diálogo entre Alicia y el Gato).

"*Tercer Día*"

Usando el Capítulo V de *"Alicia…"* se proponen las tareas:

1) Resolver el problema del cazador y la ardilla de las *"Matemáticas Recreativas"* de Y. Perelman.

2) La lectura del cuento de Borges *"El Aleph",* para la presentación de la noción de numerabilidad y la discusión del problema del Hotel de Hilbert.

Diversas cuestiones de la Teoría de Conjuntos Infinitos son discutidas como consecuencia de este preámbulo.

"*Cuarto Día*"

La lectura de los capítulos VI y VII de *"Alicia…",* permite la consolidación de diversos conocimientos lógicos necesarios en su labor docente futura.

"*Quinto Día*"

El capítulo VIII de *"Alicia…",* nos permite la discusión de la raíz digital de un número y otros entretenimientos matemáticos.

"*Sexto Día*"

La discusión sobre el razonamiento deductivo e inductivo, la búsqueda de respuestas a la pregunta ¿Qué es la Matemática? y el análisis del papel que juega la Evaluación en la Enseñanza, son algunos de los tópicos derivados de las lecturas anteriores.

El estudio de la vida y obra de Atreo y Tiestes, culminan la discusión de tópicos adicionales a la enseñanza.

"*Séptimo Día*"

La moraleja del Capítulo IX de *"Alicia…",* permite presentar uno de los problemas topológicos más actuales: la teselación del plano.

"*Octavo Día*"

El capítulo X de *"Alicia…"* nos lleva a discutir las denominaciones de diferentes animales marinos (como la marsopa, tonina o delfín) y estudios matemáticos relacionados con el medio ambiente.

"*Noveno Día*"

Los capítulos XI y XII de *"Alicia…",* sirven de base para presentar diversas propiedades geométricas en el lenguaje del Cálculo Integral.

"*Décimo Día*"

La lectura de los cuentos de Enrique Anderson Imbert *"La botella de Klein. Topología de la novela"* y de *"La Carta Robada"* de Edgar Allan Poe, permiten encauzar el curso a los últimos conocimientos topológicos y de sucesiones y series de funciones, así como retomar las cuestiones del razonamiento deductivo e inductivo tratados en el Sexto Día.

La *Medida* e *Integral (L)*, así como la *Introducción a la teoría de variable compleja*, es ahora mucho más natural y accesible a los estudiantes.

Epílogo.

Citando a Weierstrass, *"un matemático que no es en algún sentido un poeta nunca será un matemático completo"*. Pero todos sabemos que la poesía, como la literatura, es de escasa utilidad fuera de determinados círculos. No obstante, la poesía y la literatura estimulan nuestra capacidad de observación, de reflexión, de asombro, de emoción y de aprendizaje a través de las experiencias de otros. Estoy convencido de que ningún alumno sentirá jamás aprecio por las matemáticas si no ha tenido la oportunidad de disfrutar, incluso de extasiarse, ante algún hecho matemático. Estos hechos asombrosos están por doquier: en la observación del nido de una golondrina, en la tozudez de los múltiplos de 25 frente a la aparente impredecibilidad de los de 47, en el carácter trascendente de π, en detalles de la biografía de Galois, en el baricentro de un triángulo, en los intervalos que hay entre los números primos, en la numeración griega, en un quipu maya, en algún juego matemático, en buscar el número más grande que se puede expresar con tres nueves, en el imaginado número exacto de granos de arena que hay en un montón de arena, ante la fotografía de un erizo de mar... Hoy en día que la televisión se ha convertido en uno de los signos vitales para los jóvenes, debemos hacerles entender que ésta transmite emociones, mientras que la lectura desarrolla la imaginación, y ésta es la base del desarrollo intelectual. En esta última cuestión pudiéramos apoyarnos en Einstein cuando dijo que la imaginación es más importante que el conocimiento.

Karl Weierstrass

Un componente central de esta experiencia es que las matemáticas surgen de temas matemáticos tocado por los autores, así los conceptos algebraicos, geométricos, y de otras ciencias conexas, se presentan independientemente de los textos por lo que la literatura fue un gran motivador para involucrar a los estudiantes en matemáticas y para aprender matemáticas.

En conclusión, esta experiencia es sólo una de las posibilidades de las matemáticas la pedagogía del uso de las matemáticas y la literatura de ficción[10]. Pero nuestra esperanza es que la comunidad de profesores y alumnos se den cuenta del increíble potencial que tiene para el aprendizaje de las matemáticas la literatura y cómo desarrollar la imaginación del educador y del educando. Ya lo dijo William James (1842-1910), un prominente psicólogo y filósofo y hermano del apreciado novelista Henry James, *"La unión del matemático con el poeta, fervor con medida, la pasión con la corrección, es sin dudas el ideal"*.

Bibliografía

Bochner, S. (1981): *The Role of Mathematics in the Rise of Science.* Princeton University Press. New Jersey.

Burns, G. et al. (1995): *História da Civilizaçao Ocidental*, 2, 36ª ed. São Paulo: Editora Globo.

[10] Recomendamos Koehler (1982), D'Ambrosio (1993), Lipsey and Pasternack (s/f) y Sriraman and Beckmann (2007) para otros ejemplos

Burns, M. (1995): *Writing in math class*, Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

D'Ambrosio, U. (1993): Mathematics and Literature, in *Essays in Humanistic Mathematics.* Edited by Alvin White. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Hormigón; M. (1991): *Las Matemáticas en el siglo XIX*, Ediciones Akal, Madrid J. Kilpatrick.

Rico Romero, L., Sierra, M. (2002): *Educación matemática e investigación*. Madrid: Síntesis.

Klein, F. et al. (1980): *Famous Problems of Elementary Geomettry and other Monographs,* Chelsea Publishing Company. New York. Second Edition.

Kaufman Fainguelernt, E. (2002): O prazeroso jogo de palavras que faz a leitura do mundo, PGM 3: *Literatura e matemática, en Arte e Matemática na Scola*, Edite Resende Vieira e Eloísa Sabóia Ribeiro (Eds).

Koehler, D. (1982): *Mathematics and Literature*. 55(2).

Herbert Mehrtens et al. (1981): *Social History of Nineteenth Century Mathematics*, Boston: Birkhauser.

Lipsey, S. and Pasternack, B (s/f): Mathematics in Literature. Recuperado el 6 de febrero de 2012 en http://math.unipa.it/~grim/SiLipsey.PDF

Pareja, D. (2007): Educación matemática. De Felix Klein a Hyman Bass, *Conferencia, XVI Congreso Nacional de Matemáticas*, Medellín.

Paty, M. (2000): Simples observaciones sobre las matemáticas y la educación matemática. *Lecturas Matemáticas* 21(1), 79-85.

Perez Lindo, A. et al (2005)*: Gestión del conocimiento. Un nuevo enfoque aplicable a las organizaciones y la universidad*. Buenos Aires: Grupo Editorial Norma

Sánchez, C. (2001): Apuntes sobre la proyección socio-cultural del profesor de matemáticas. *Revista Ciencias Matemáticas*, 19(2), 97-102.

Schneider, I. (1981): Forms of professional activity in mathematics before the nineteenth century en Mehrtens et al., *Social History of Nineteenth Century Mathematics,* 89-110 Boston: Birkhäuser.

Schubring, G. (1988): Theoretical categories for investigations in the social history of mathematics education and some characteristic patterns. Proceedings of the 6th, ICME, Budapest, Fifth Special Day: Mathematics, Education and Society.

Schubring, G. (1997): Analysis of Historical Texbooks in Mathematics. *Lecture Notes*. Pontifícia Universidad Católica do Rio de Janeiro.

Sriraman, B. and Beckmann, A. (2007): Mathematics and Literature: Perspectives for interdisciplinary classroom pedagogy, in *Proceedings of the 9th International History, Philosophy and Science Teaching Group (IHPST)* 2007, Calgary, June 22-26, 2007.

Weil, A. (1991): *The Apprenticeship of a Mathematician,* Birkhäuser Verlag. Basel-Boston-Berlin.

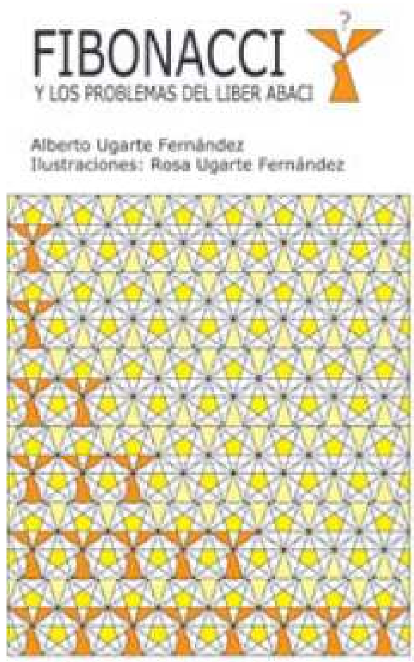
NCTM (2000): *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.

Whitin, D. J. and Whitin, P. (2004): *New visions for linking literature and mathematics,* Urbana: National Council of Teachers of English

.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 197-198
ISSN: 1815-0640



FIBONACCI
Y LOS PROBLEMAS DEL LIBER ABACI.

Autor:
Alberto Ugarte Fernández

Ilustraciones:
Rosa Ugarte Fernández

Año de edición: 2011

Páginas: 110

ISBN: 978-1447842828

“Las nueve cifras hindúes son:

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Con estas nueve cifras y con el o cualquier número puede ser escrito”

Así comienza el Liber Abaci la obra más conocida de Fibonacci. En esta obra, Leonardo introduce las cifras indo-arábigas en occidente y proporciona las reglas para realizar las operaciones elementales entre ellas. En el prólogo del libro Leonardo declara que en sus viajes y estudios ha encontrado que el sistema de numeración hindú y sus métodos de cálculo son superiores a los que se emplean en Europa y que quiere divulgarlos entre sus compatriotas. Su intención era brindar a los comerciantes una herramienta de cálculo mucho más potente que el tradicional ábaco.

El libro contiene 51 problemas con sus soluciones. Es especialmente interesante descubrir los curiosos métodos con los que Fibonacci resolvía algunos de estos problemas en el siglo XXIII. Para resolver la mayoría de los problemas no hacen falta unos conocimientos matemáticos muy profundos. Se destacan las excelentes ilustraciones de cada capítulo.

En el blog http://fibonacci-liberabaci.blogspot.com/ podeis encontrar el enunciado de los 51 problemas que propone el libro.

Otros enlaces:
http://www.amazon.es/dp/1447842820/
http://www.lulu.com.
Versión digital en: https://dl.dropbox.com/u/34971349/PROBLEMASFIBONACCIPDF.pdf

Comité editorial

Marzo de 2012, Número 29, páginas 199-201
ISSN: 1815-0640

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

M@temátic@s en l@ red

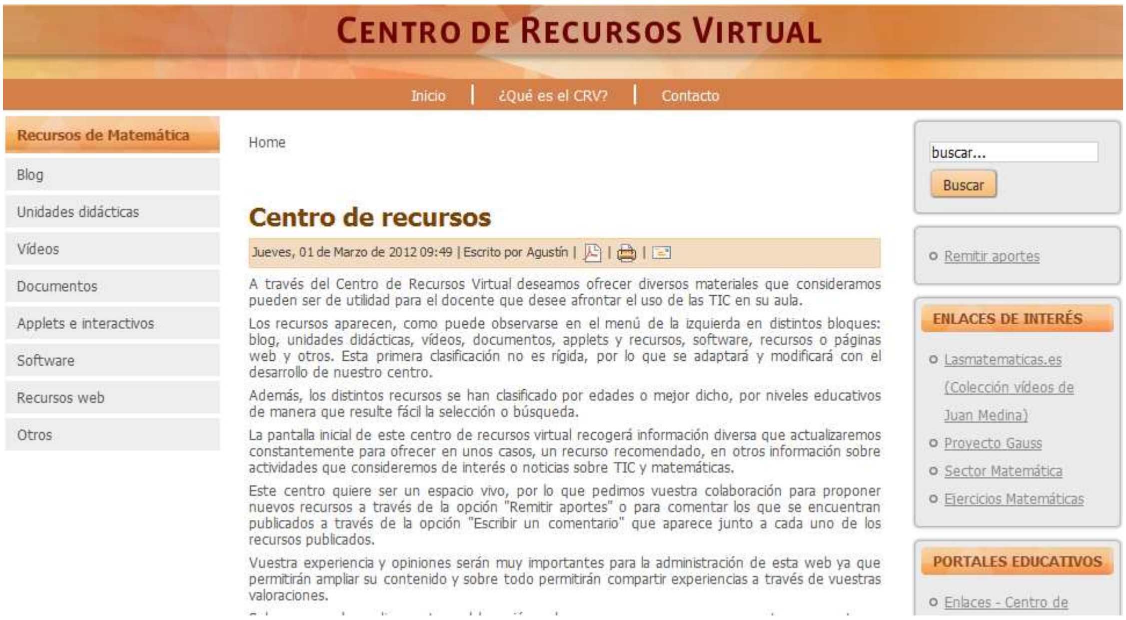
Centro de Recursos Virtual

Dirección: www.oei.es/recursos

Recientemente se ha puesto en funcionamiento el Centro de Recursos Virtual (CRV) cuyo objetivo principal es ayudar al docente del área de matemáticas que desea utilizar las TIC en su trabajo diario, ofreciendo información sobre distintos materiales de diverso tipo que consideramos de utilidad.

Este proyecto que nace en el seno de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) cuenta con el apoyo de la Consejería de Economía, Innovación y Ciencia de la Junta de Andalucía (España), con la Universidad de Córdoba, también española y con el Instituto Iberoamericano de TIC y Educación (IBERTIC).

Al acceder al CRV a través de la dirección www.oei.es/recursos aparecerá una pantalla similar a la que mostramos a continuación:



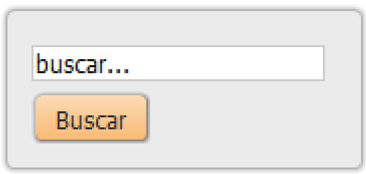
Aunque consideramos que su utilización es sencilla, solo queremos destacar algunos aspectos de este nuevo CRV que pueda diferenciarlo de otros bancos de recursos similares existentes en la amplia oferta que Internet nos ofrece.

Aunque todo es modificable y sobre todo intentaremos que sea un centro vivo que pueda adaptarse a nuevos recursos y materiales, ofrece una primera clasificación de los materiales disponibles en distintos bloques a los que se podrá acceder desde las opciones que aparecen en el margen izquierdo, de manera que puedan ayudar al usuario en una primera búsqueda o selección.

Además, en cada uno de los tipos anteriores se podrán seleccionar recursos por edades.

Hemos optado por esta opción ya que los niveles educativos en los distintos países no coinciden en cuanto al rango de edades.

Además, existe una opción de búsqueda más abierta en la que se podrá indicar un término, contenido, materia o palabra clave, utilizando para ello la opción que aparece en el margen derecho.



Reiteramos la sencillez en los procesos que hemos incluido en este CRV que completamos con algunas opciones en el margen derecho, en los que además de los enlaces que consideramos de interés, se podrá acceder a portales institucionales, sobre todo de aquellos países que están incorporando las TIC a las aulas a través de planes institucionales.

En todos los casos y para todos los recursos ofrecemos la posibilidad de enviar un comentario por parte de los usuarios. Comentarios de vital importancia para mantener o no un recurso, de acuerdo con las experiencias que a través de vuestros comentarios nos puedan llegar.

Y lo que consideramos como diferencia de nuestro CRV con otros bancos de recursos es que su contenido se irá incrementando con vuestros aportes que se pueden enviar a través de la opción que aparece junto a la búsqueda ya comentada.

Desde la administración de este centro consideramos muy importante vuestras opiniones y sobre todo vuestras experiencias en el uso de las TIC por lo que esperamos y sobre todo deseamos, que podáis compartir vuestros materiales y los recursos que utilizáis. Siempre es bueno compartir, sobre todo cuando se trata de trabajar en proyectos comunes para mejorar la calidad de la enseñanza en nuestros países.

Espero vuestra colaboración para que el crecimiento de este centro de recursos sea al menos exponencial y en breve pueda convertirse en un referente para el profesorado iberoamericano.

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 203-211
ISSN: 1815-0640

Información

ACTIVIDADES DE LA FUNDACIÓN CANARIA *CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ*

Material escolar: 1283 € para 90 escolares de Perú

Una entrega de material realizada por el Profesor José Ventura

Un labor que ha caracterizado a de la Fundación desde su creación ha sido la donación de materiales educativos a colegios carentes de recursos y de difícil orografía, bien enviándolos desde Canarias o haciendo la compra en los países de origen con la colaboración generosa de colegas del lugar. Se han dotado así, hasta ahora, hasta sesenta centros educativos de cuatro naciones americanas, aunque la lista podría ampliarse siempre que se den las condiciones para ello, en especial, que exista la responsabilidad, seriedad y alteza de miras que hemos tenido con docentes de varios lugares que, en todos los casos, con esfuerzo y honestidad han llevado materiales a colegios y escuelas de lugares generalmente recónditos en la geografía americana. Tienen constancia con numerosas fotografías y textos que acreditan el trabajo bien hecho en la página web www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com.

La última acción de ese tipo está a cargo del profesor, José Faustino Ventura Vegas, residente en el distrito de La Victoria, ciudad de Chiclayo, en la región de Lambayeque, en Perú, que junto con su esposa, también profesora, Gladys Zorrilla, se van a encargar de comprar material y llevarlo, de forma personal, en un decidido gesto de solidaridad, esfuerzo y cooperación, por la cantidad de 1083 € más 200 € para el transporte y gastos con una cantidad total de 1283 €. El destino es la Institución Educativa Nº 10469 de la comunidad de Conchud, distrito de Tacabamba, provincia de Chota, en la región de Cajamarca, en la zona andina del Norte del Perú.

El director de dicho colegio, Eduard Idrogo Bustamante, por mediación del profesor Ventura, hizo llegar a la Fundación una solicitud bien detallada y donde nos dice que "*la población vive sujeta a una limitada situación económica lo que dificulta que los estudiantes cuenten con los útiles necesarios para desarrollar sus actividades y obtener un adecuado aprendizaje*". La matrícula es de 90 escolares y cubren los niveles desde primero a sexto grado. Aporta también datos sociológicos y geográficos de la zona.

Deseamos seguir adelante con docentes tan nobles y valiosos capaces de dedicar su tiempo de ocio para hacer el bien a "los otros". Vale la pena.

Becas y clases a alumnos en Paraguay

Sigue la novedosa experiencia que está abriendo caminos para las comunidades indígenas de Paraguay con el "*Programa de Ayudas al Estudio Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz para la Comunidad Educativa de la parcialidad Avá guaraní de Cerro Poty, Escuela Indígena Nº 5934*", en Lambaré, en los aledaños de Asunción, la capital de Paraguay y el lugar donde se construyeron las primeras escuelas de la Fundación en septiembre de 2010. Para el desarrollo de esta acción, el Ministerio de Educación y Cultura de Paraguay legisló un protocolo, la Resolución Nº 37134, firmado por el ministro el 28 de septiembre de 2011.

Se ha destinado la cantidad de 3302 € (17.500.000 guaraníes) distribuida en **nueve ayudas** a alumnos y alumnas, de edades comprendidas entre los 13 y los 19 años. Estas ayudas se mantendrán por, al menos, un período de tres años. Intervienen también en este proyecto la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI), Ministerio de Educación y Cultura y la Secretaría Nacional de la Niñez y la Adolescencia de Paraguay.

Pero hay otra novedad: las clases particulares en verano. Efectivamente, la Fundación, por medio del equipo que coordina el proyecto en Paraguay y que preside la eficiente y responsable, Eva Fleitas (Coordinación de Cooperación Técnica de la OEI), decidió ofrecer clases particulares en verano (meses de enero y febrero) para los alumnos becados. El montante económico de la operación ha sido de 1346 €. La Fundación cumple así la promesa realizada durante la inauguración de la escuela: continuar apoyando a sus estudiantes.

Los alumnos y alumnas becados se muestran muy agradecidos y lo demuestran con el envío de cartas de su puño y letra al presidente de la Fundación. Igualmente, en febrero de 2012, el tutor nos sorprendió gratamente con la entrega de un video. Una parte fue grabada en diciembre de 2011 y el resto se completó en vacaciones. Nos informa que "*como todos se expresan en guaraní o con mezcla de algunas palabras en castellano (yopará)",* una compañera de Paraguay, la profesora Cristina Costa, ha realizado una traducción al castellano.

Frases de agradecimiento y palabras de apoyo y aliento para seguir adelante. Eso haremos.

Una alumna con hijo y el regalo compartido…

Todos con Lucía y su bebé

Lucia Benítez es una de las alumnas becadas del "Programa de Ayuda al Estudio Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz* para la Comunidad Educativa de la parcialidad Avá guaraní de Cerro Poty, Escuela Indígena Nº 5934", en Lambaré, muy cerca de Asunción, la capital de Paraguay y el lugar donde se construyeron las primeras escuelas de la Fundación en septiembre de 2010.

Lucia, una chica amable y cariñosa, acaba de ser madre de un niño en marzo de 2012. Su nombre es Sadi Mabel…

La alegría ha sido compartida por las gentes de la Fundación y por el equipo que coordina Eva Fleitas. Le fueron enviados 100 € para que sean gastados en el bebe. Y así se ha hecho aunque el mejor regalo es saber que ha venido esta criatura al mundo, una alegría compartida en las dos orillas.

Becas-ayudas al estudio en Canarias: nuevo programa

La Fundación, a la vista de la dura realidad de Canarias motivada por la crisis económica actual, decidió crear una línea de Ayudas al Estudio para alumnos y alumnas de niveles postobligatorios que realicen sus estudios durante el curso 2011-2012. Se trata de ayudar a estudiantes que tengan dificultades económicas para poder continuar sus estudios y que hayan demostrado su capacidad e interés con una buena trayectoria académica. La cuantía individual es de 400 € y el presupuesto total de 6000 €. Se seleccionaron **15** alumnos y alumnas procedentes de lugares diversos de distintas islas y mediante un riguroso procedimiento. Se prepara ya una nueva convocatoria para el curso 2012-2013 que tiene el propósito de incrementar el número de becarios y de llegar a las siete Islas Canarias.

Premio otorgado al Vicepresidente de la Fundación, Luis Balbuena Castellano

Entrega de material escolar en Paraguay. Profesora Gladys Zárate, Luis Scasso, director de la sede de la OEI en Asunción y el profesor Luis Balbuena.

El 5 de marzo del presente año la Asociación de Antiguos Alumnos y Amigos de la Universidad de La Laguna acordó conceder el II Premio Alonso de Nava y Grimón al profesor y vicepresidente de la Fundación, Luis Balbuena Castellano, que le fue entregado en un acto institucional celebrado en el Paraninfo de esta universidad canaria el 12 del mismo mes.

El jurado estuvo compuesto por el presidente de dicha asociación, el periodista Zenaido Hernández Cabrera, por el rector actual de la citada universidad, Eduardo Domenech Martínez y otros cuatro anteriores rectores (María Luisa Tejedor Salguero, José Carlos Alberto Bethencourt, José Gómez Soliño, y Ángel Gutiérrez Navarro) actuando de secretario, Alberto Brito Delgado, secretario de la Asociación.

En el acta del acuerdo se dice lo siguiente como distinción de nuestro Vicepresidente: *"El Jurado ha tenido en consideración los méritos altamente sobresalientes, tanto en la vertiente profesional como en la humana, con los que se distingue D. Luis Balbuena Castellano, quien ha ejercido la docencia en el área de Matemáticas contribuyendo con su dedicación y valía a potenciar el trabajo educativo con la inequívoca dedicación de servir a los alumnos y desarrollar y consolidar proyectos de investigación y de innovación pedagógica, que han impulsado la sociedad matemática tanto nacional como internacional, en especial en el ámbito iberoamericano.*

En el profesor Luis Balbuena Castellano están presentes los grandes valores que entendemos han de prevalecer en el docente, al coincidir su entrega a la *formación de los alumnos con el firme compromiso de hacer llegar sus conocimientos y esfuerzos para aportar soluciones ante los problemas con los que se enfrenta la sociedad canaria, vinculando de manera eficaz el estamento universitario con la sociedad en general, sin reparar en esfuerzos y minimizando los problemas que pudieran plantearse en el desarrollo de ese cometido.*

Luis Balbuena Castellano ejerció como Consejero de Educación del Gobierno de Canarias y en la actualidad pertenece al Consejo Escolar del Estado, preside la Fundación Canaria de Sordos (FUNCASOR) que contribuyó a crear, y ejerce igualmente la cooperación solidaria con escolares iberoamericanos a través de la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz de la que es Vicepresidente.

Consideramos que Luis Balbuena Castellano es un fiel representante del humanismo y de los valores que bajo la referencia de Alonso de Nava y Grimón amparan este premio y por ello nos sentimos sumamente honrados al unir su nombre al de tan ilustre figura en el ámbito de la cultura de Canarias".

Hay mucha más información de la Fundación en la página web:

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

¡¡Aquí les esperamos!!

ACTIVIDADES DA FUNDAÇÃO CANARIA CARLOS SALVADOR E BEATRIZ

Material escolar: 1283 € para 90 escolares de Perú

Uma entrega de material realizada pelo Professor José Ventura

Um labor que caracterizou a de a Fundação desde sua criação foi a doação de materiais educativos a colégios carentes de recursos e de difícil orografía, bem os enviando desde Canárias ou fazendo a compra nos países de origem com a colaboração generosa de colegas do lugar. Dotaram-se assim, até agora, até sessenta centros educativos de quatro nações americanas, ainda que a lista poderia se ampliar sempre que se dêem as condições para isso, em especial, que exista a responsabilidade, seriedade e alteza de olhas que tivemos com docentes de vários lugares que, em todos os casos, com esforço e honestidade levaram materiais a colégios e escolas de lugares geralmente recónditos na geografia americana. Têm constancia com numerosas fotografias e textos que acreditan o trabalho bem feito na página web www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com.

A última acção desse tipo está a cargo do professor, José Faustino Ventura Vegas, residente no distrito da Vitória, cidade de Chiclayo, na região de Lambayeque, em Peru, que junto com sua esposa, também professora, Gladys Zorrilla, se vão encarregar de comprar material e o levar, de forma pessoal, num decidido gesto de solidariedade, esforço e cooperação, pela quantidade de 1083 € mais 200 € para o transporte e gastos com uma quantidade total de 1283 €. O destino é a Instituição Educativa Nº 10469 da comunidade de Conchud, distrito de Tacabamba, província de Chota, na região de Cajamarca, na zona andina do Norte do Peru.

O director de dito colégio, Eduard Idrogo Bustamante, por mediação do professor Ventura, fez chegar à Fundação uma solicitação bem detalhada e onde nos diz que *"a população vive sujeita a uma limitada situação económica o que dificulta que os estudantes contem com os úteis necessários para desenvolver suas actividades e obter uma adequada aprendizagem". A matrícula é de 90 escolares e cobrem os níveis desde primeiro a sexto grau. Contribui também dados sociológicos e geográficos da zona*.

Desejamos seguir adiante com docentes tão nobres e valiosos capazes de dedicar seu tempo de lazer para fazer o bem a os outros. Vale a pena.

Bolsas e classes a alunos em Paraguay

Segue a inovadora experiência que está a abrir caminhos para as comunidades indígenas de Paraguai com o "Programa de Ajudas ao Estudo Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz para a Comunidade Educativa da parcialidad Avá guaraní de Cerro Poty, Escola Indígena *Nº 5934*", em Lambaré, nos aledaños de Assunção, a capital de Paraguai e o lugar onde se construíram as primeiras escolas da Fundação em setembro de 2010. Para o desenvolvimento desta acção, o Ministério de Educação e Cultura de Paraguai legisló um protocolo, a Resolução Nº 37134, assinado pelo ministro o 28 de setembro de 2011.

Destinou-se a quantidade de 3302 € (17.500.000 guaraníes) distribuída em nove ajudas a alunos e alunas, de idades compreendidas entre os 13 e os 19 anos. Estas ajudas manter-se-ão por, ao menos, um período de três anos. Intervêm também neste projecto a Organização de Estados Iberoamericanos (OEI), Ministério de Educação e Cultura e a Secretaria Nacional da Niñez e a Adolescencia de Paraguay.

Mas há outra novidade: as classes particulares em verão. Efectivamente, a Fundação, por médio da equipa que coordena o projecto em Paraguai e que preside a eficiente e responsável, Eva Fleitas (Coordenação de Cooperação Técnica da OEI), decidiu oferecer classes particulares em verão (meses de janeiro e fevereiro) para os alunos becados. O montante económico da operação foi de 1346 €. A Fundação cumpre assim a promessa realizada durante a inauguração da escola: continuar apoiando a seus estudantes.

Os alunos e alunas becados mostram-se muito agradecidos e demonstram-no com o envio de cartas de seu punho e letra ao presidente da Fundação. Igualmente, em fevereiro de 2012, o tutor surpreendeu-nos gratamente com a entrega de um video. Uma parte foi gravada em dezembro de 2011 e o resto completou-se em férias. Informa-nos que "como todos se expressam em guaraní ou com mistura de algumas palavras em castelhano (yopará)", uma colega de Paraguai, a professora Cristina Costa, realizou uma tradução ao castelhano.

Frases de agradecimiento e palavras de apoio e alento para seguir adiante. Isso faremos.

Uma aluna com filho e o presente compartilhado…

Todos com Luzia e seu bebé

Lucia Benítez é uma das alunas becadas do "Programa de Ajuda ao Estudo Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz para a Comunidade Educativa da parcialidad Avá guaraní de Cerro Poty, Escola Indígena Nº 5934", em Lambaré, bem perto de Assunção, a capital de Paraguay e o lugar onde se construíram as primeiras escolas da Fundação em setembro de 2010.

Lucia, uma garota amável e carinhosa, acaba de ser mãe de um menino em março de 2012. Seu nome é Sadi Mabel…

A alegria foi compartilhada pelas gentes da Fundação e pela equipa que coordena Eva Fleitas. Foram-lhe enviados 100 € pára que sejam gastados no bebe. E assim se fez ainda que o melhor presente é saber que veio esta criatura ao mundo, uma alegria compartilhada nas duas orlas.

Bolsas-ajudas ao estudo em Canárias: novo programa

A Fundação, à vista da dura realidade de Canárias motivada pela crise económica actual, decidiu criar uma linha de Ajudas ao Estudo para alunos e alunas de níveis postobligatorios que realizem seus estudos durante o curso 2011-2012. Trata-se de ajudar a estudantes que tenham dificuldades económicas para poder continuar seus estudos e que tenham demonstrado sua capacidade e interesse com uma boa trajectória académica. A quantia individual é de 400 € e o orçamento total de 6000 €. Seleccionaram-se 15 alunos e alunas procedentes de lugares diversos de diferentes ilhas e mediante um rigoroso procedimento.

Prepara-se já uma nova convocação para o curso 2012-2013 que tem o propósito de incrementar o número de becarios e de chegar às sete Ilhas Canárias.

Prêmio outorgado ao Vice-presidente da Fundação, Luis Balbuena Castellano

Entrega de material escolar em Paraguai. Professora Gladys Zárate, Luis Scasso, director da sede da OEI em Assunção e o professor Luis Balbuena.

O 5 de março do presente ano a Associação de Antigos Alunos e Amigos da Universidade da Laguna lembrou conceder o II Prêmio Alonso de Nava e Grimón ao professor e vice-presidente da Fundação, Luis Balbuena Castelhano, que lhe foi entregado num acto institucional celebrado no Paraninfo desta universidade canaria o 12 do mesmo.

O júri esteve composto pelo presidente de dita associação, o jornalista Zenaido Hernández Cabrera, pelo reitor actual da citada universidade, Eduardo Domenech Martínez e outros quatro anteriores reitores (María Luisa Tejedor Salguero, José Carlos Alberto Bethencourt, José Gómez Soliño, e Ángel Gutiérrez Navarro) actuando de secretário, Alberto Brito Delgado, secretário da Associação.

No acta do acordo diz-se o seguinte como distinción de nosso Vice-presidente: *"O Júri teve em consideração os méritos altamente sobresalientes, tanto na vertente profissional como na humana, com os que se distingue D. Luis Balbuena Castelhano, quem exerceu a docencia no área de Matemáticas contribuindo com sua dedicación e valia a potenciar o trabalho educativo com a inequívoca dedicación de servir aos alunos e desenvolver e consolidar projectos de investigação e de inovação pedagógica, que impulsionaram a sociedade matemática tanto nacional como internacional, em especial no âmbito iberoamericano.*

No professor Luis Balbuena Castelhano estão presentes os grandes valores que entendemos têm de prevalecer no docente, ao coincidir sua entrega à formação dos alunos com o firme compromisso de fazer chegar seus conhecimentos e esforços para contribuir soluções ante os problemas com os que se enfrenta a sociedade canaria, vinculando de maneira eficaz o estamento universitário com a sociedade em general, sem consertar em esforços e minimizando os problemas que pudessem se propor no desenvolvimento desse cometido.

Luis Balbuena Castelhano exerceu como Conselheiro de Educação do Governo de Canárias e na actualidade pertence ao Conselho Escolar do Estado, preside a Fundação Canaria de Surdos (FUNCASOR) que contribuiu a criar, e exerce igualmente a cooperação solidaria com escolares iberoamericanos através da Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz da que é Vice-presidente.

Consideramos que Luis Balbuena Castelhano é um fiel representante do humanismo e dos valores que baixo a referência de Alonso de Nava e Grimón amparam este prêmio e por isso nos sentimos sumamente honrados ao unir seu nome ao de tão ilustre figura no âmbito da cultura de Canárias".

Há muita mais informação da Fundação na página site:

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

¡¡ Aqui esperamos-lhes!!

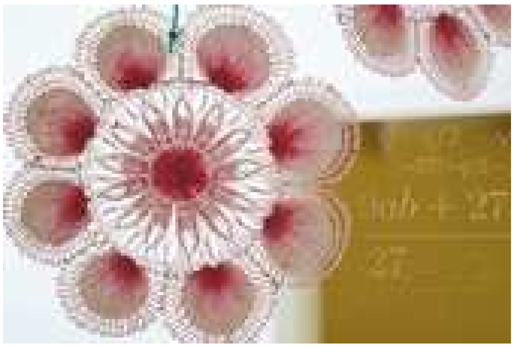
UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 213-214

ISSN: 1815-0640

Información

Nueva edición del Curso Iberoamericano de formación de profesores de secundaria en el área de matemáticas Ñanduti



La Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) en el seno de su Centro de Altos Estudios Universitarios convoca una nueva edición de este curso Ñandutí de formación para el profesorado de Matemáticas de Secundaria contando con la colaboración de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo AECID a través de las acciones que desarrollan con el fin de apoyar la construcción del Espacio Iberoamericano del Conocimiento a través del fomento de vocaciones hacia la ciencia y al avance del Programa Metas Educativas 2021.

Además, el curso Ñandutí cuenta con la colaboración el Ministerio de Educación de Paraguay y la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía (España) a través de la Universidad de Córdoba que presta su estructura para la coordinación del Curso.

El curso Ñandutí de formación permanente online va dirigido al profesorado de Enseñanza Secundaria en ejercicio de América Latina

La nueva edición comenzará el **15 de abril de 2012**, por lo que está abierto el plazo de inscripción para participar en este curso de formación.

Los objetivos, contenidos, programa y metodología del curso se pueden consultar a través de la Web http://www.oei.es/cursomatematica/ y cualquier consulta relativa a los distintos aspectos podrá realizarse mediante e-mail a curso.matematica@caeu.org

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 29, páginas 215-217
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2012

XXV Jornada de Matemática de la Zona Sur

Organiza: Sociedad Matemática de Chile y Universidad de Concepción.
Lugar: Concepción. Chile.
Fecha: 18 al 20 de abril de 2012.
Información: **https://sites.google.com/site/xxvjsur2012/**

XIV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Organiza: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
Lugar: Málaga, España.
Fecha: 4 al 6 de julio de 2012.
Información: **http://xiv.thalesceam.es/**

12 th. Internacional Congreso on Mathematical Education

Lugar: Seúl, Korea.
Fecha: 8 al 15 de julio de 2012.
Información: **http://www.icme12.org/**

IX REUNION DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA DEL CONO SUR

Organiza: Sociedad Boliviana de Educación Matemática. SOBOEDMA.
Lugar: Cochabamba, Bolivia.
Fecha: 8 al 15 de julio de 2012.
Información: **bgrigoriu@gmail.com**

26° Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 26)
Lugar: Ouro Preto. Mina Gerais. Brasil
Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Fecha: 23 al 27 de Julio de 2012
Información: **www.clame.org.mx**

IV Reunión Pampeana de Educación Matemática

Organiza: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa.
Lugar: Santa Rosa, La Pampa. Argentina.
Fecha: 22 al 24 de agosto de 2012.
Información: **http://online2.exactas.unlpam.edu.ar/repem/**

XI EGEM
XI Encontro Gaúcho de Educação Matemática

Organiza: Centro Universitario UNIVATES.
Lugar: Lajeado. Rio Grande do Sul. Brasil.
Fecha: 22 al 25 de agosto de 2012.
Información: **www.univates.br/egem/**

X CAREM

X Conferencia Argentina de Educación Matemática

Lugar**:** Buenos Aires. Argentina.
Convoca**:** Sociedad Argentina de Educación Matemática. (SOAREM)
Fecha: 6 al 8 de septiembre de 2012.
Información: **www.soarem.org.ar**

CUREM4

4º CONGRESO URUGUAYO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Organiza: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.
Lugar: Montevideo, Uruguay.
Fecha: 19 al 21 de septiembre de 2012
Información: **www.semur.edu.uy**

AÑO 2013

Del 16 al 20 de septiembre en Uruguay

VII CIBEM

VII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.cibem7.semur.edu.uy

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, página 219-220
ISSN: 1815-0640

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@gmail.com**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.

2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “Arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.

3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**

4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.

5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.

6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.

7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

Para libro:
Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista:

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com