UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 28– Diciembre de 2011

Monográfico: Formación Inicial de Profesores de Matemática y Capacitación Continua

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 3-4
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García Gonzalez
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio

Textos: Vilma Giudice

Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo

webmaster: Elda Beatriz Micheli

Colabora

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 5-6
ISSN: 1815-0640

Editorial

"Todas las teorías son legítimas y ninguna tiene importancia. Lo que importa es lo que se hace con ellas."
Jorge Luis Borges (1899-1986)

Estimados colegas y amigos

Con este número cerramos nuestro primer trienio como Directoras de UNIÓN. Llegamos fortalecidas por el enorme y permanente apoyo de colegas autores, evaluadores y asesores que nos acompañaron permanentemente para mejorar cada día y por el flujo continuo de excelentes artículos en español y portugués de colegas de instituciones de diferentes ciudades de distintos países iberoamericanos.

Nos enorgullece y fortifica la confianza recibida a nuestra propuesta para el período, 2012-2014, haber sido reelegidas para continuar como directoras de UNION nos permite augurar la consolidación y la expectativa de alcanzar un impacto mayor, para el que trabajamos acompañadas por nuestro equipo, tratando de cumplir plazos y brindar calidad en todas las entregas.

Este volumen, el último de este año, es un monográfico dedicado a la Formación Inicial de Profesores de Matemática y a la Capacitación Continua, agradecemos especialmente a los autores, ya que son ellos quienes hicieron posible que todos los artículos de este número estén dedicados a esta temática, incluyendo la firma invitada y las secciones. fijas.

Dentro de las noticias de este año, hay algunas tristes, como son las partidas de Alicia Villar y de Nelly Vázquez de Tapia, incansables luchadoras por mejorar la calidad de la enseñanza, podemos decir que este volumen es un homenaje a ellas. Pero también destacamos las siguientes:

- La asunción de Cecilia Crespo Crespo (Argentina) y Freddy González (Venezuela) como Presidente y Vicepresidente de la FISEM, respectivamente.
- La continuación del apoyo altruista de la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz, que a través de la acción del Presidente de la Fundación, Salvador Pérez Pérez y su esposa, Rosario Aurora Estévez González (los padres de Carlos Salvador y Beatriz) nos permiten continuar con la edición de UNIÓN.
- La publicación de UNIÓN desde la plataforma de la OEI, lo que permite que llegue a mayor cantidad de docentes de matemática.

Muchas Gracias a todos los que colaboraron para que UNIÓN haya llegado a su número 28, los invitamos a seguir acompañándonos y compartiendo ideales

Para Finalizar, un Brindis por los momentos compartidos, con el deseo de que se cumplan sus deseos personales y profesionales.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

.

Editorial

"*Todas as teorias são legítimas e*
nenhuma tem importância.
O que importa é o que se faz com elas."
Jorge Luis Borges. (1899-1986)

Estimados colegas e amigos:

Com este número fechamos nosso primeiro trienio como Directoras de UNIÃO. Chegamos fortalecidas pelo enorme e permanente apoio de colegas autores, evaluadores e assessores que nos acompanharam permanentemente para melhorar a cada dia e pelo fluxo contínuo de excelentes artigos em espanhol e português de colegas de instituições de diferentes cidades de países iberoamericanos.

Orgulha-nos e fortifica a confiança recebida a nossa proposta para o período, 2012-2014, ter sido reelegidas para continuar como directoras de UNION nos permite augurar a consolidación e a expectativa de atingir um impacto maior, para o que trabalhamos acompanhadas por nossa equipa, tratando de cumprir prazos e brindar qualidade em todas as entregas.

Este volume, o último deste ano, é um monográfico dedicado à Formação Inicial de Professores de Matemática e à Capacitação Contínua, agradecemos especialmente aos autores, já que são eles quem fizeram possível que todos os artigos deste número estejam dedicados a esta temática, incluindo a assinatura convidada e as secções fixas.

Dentro das notícias deste ano, há algumas tristes, como são as partidas de Alicia Villar e de Nelly Vázquez de Tapia, incansables luchadoras por melhorar a qualidade do ensino, podemos dizer que este volume é uma homenagem a elas. Mas também destacamos as seguintes:

- A assunção de Cecilia Crespo Crespo (Argentina) e Freddy González (Venezuela) como Presidente e Vice-presidente da FISEM, respectivamente.
- A continuação do apoio altruísta da Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz, que através da acção do Presidente da Fundação, Salvador Pérez Pérez e sua esposa, Rosario Aurora Estévez González (os pais de Carlos Salvador e Beatriz) nos permitem continuar com a edição de UNIÃO.

  A publicação de UNIÃO desde a plataforma da OEI, o que permite que chegue a maior quantidade de docentes de matemática.

Muito obrigado a todos os que colaboraram pára que UNIÃO tenha chegado a seu número 28, os convidamos a seguir nos acompanhando e compartilhando ideais

Para Finalizar, um Brindis pelos momentos compartilhados, com o desejo de que se cumpram seus desejos pessoais e profissionais.

Um abraço fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 7-8
ISSN: 1815-0640

Renovación de la Dirección de UNIÓN

Una vez concluido el período para la presentación de propuestas para la Dirección de UNIÓN y la correspondiente votación de las Sociedades de Educación Matemática que componen la FISEM, han sido seleccionadas las actuales directoras Normas Susana Cotic y Teresa Claudia Braicovich, ambas de Argentina, cuyo proyecto de continuidad se ha renovado para el período 2012-14.

Norma Susana Cotic

Teresa Claudia Braicovich

UNIÓN es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), que se encuentra dirigida tanto a docentes en formación como a aquellos que se encuentran ejerciendo la docencia en los distintos niveles educativos.

UNIÓN una periodicidad trimestral y considera para su publicación trabajos inéditos en las diversas ramas de la matemática. Las contribuciones pueden ser trabajos de investigación, resúmenes de conferencias y de tesis, artículos de divulgación, reflexiones con sus respectivas fundamentaciones, experiencias áulicas con el análisis didáctico correspondiente, problemas y juegos, misceláneas y revisiones bibliográficas.

Queremos felicitarlas y desearles los mayores éxitos para este nuevo periodo, a la vez que aprovechamos para solicitar la colaboración de todos con experiencias y reflexiones, con investigaciones y estudios.

FISEM
FEDERACIÓN IBEROAMERICANA DE SOCIEDADES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Secretario general de la FISEM

Carta de las Directoras de UNIÓN

Después de un período de intenso trabajo como directoras de UNIÓN, acompañadas por un excelente equipo de colaboradores y sostenidas por el apoyo de los integrantes del equipo que nos precedió con la Dirección de los catedráticos Luis Balbuena y Antonio Martinón, del Secretario General, Agustín Carrillo de Albornoz, de los Presidentes y Presidentas de las distintas Sociedades que conforman la FISEM, de la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz, sentimos que salimos fortalecidas y además felices por la labor cumplida, pues consideramos que hemos logrado los objetivos y las metas propuestas.

Incentivadas por los mensajes de apoyo, entre otros, del Secretario General de la FISEM y por la convicción de poder continuar colaborando con este espacio, que se caracteriza por respetar la pluralidad de ideas y por encontrarse abierto a las distintas líneas de educación matemática, es que decidimos presentarnos a la convocatoria para el período 2012-2014.

Agradecemos a todos los que confiaron en nosotras y en nuestro equipo para continuar trabajando con la continua colaboración de ustedes, en el fortalecimiento permanentemente de UNIÓN.

Un abrazo fraternal

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Diciembre de 2011, Número 28, página 9-10
ISSN: 1815-0640

Cecilia Rita Crespo Crespo

Breve Reseña

Nació en la Ciudad de Buenos Aires (Argentina) en 1962. Estudió en el Instituto Nacional Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" de Buenos Aires las carreras de Profesorado de Matemática y Astronomía, Profesorado de Física y Profesorado en Computación.

Realizó sus estudios de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa y Doctorado en Matemática Educativa en CICATA (Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada) del IPN (Instituto Politécnico Nacional) de México.

Ha ejercido la docencia en nivel medio y superior universitario y no universitario. En la actualidad su labor docente se orienta a la formación de profesores. Se desempeña como profesora en el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" y en el Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico dependiente de la Universidad Tecnológica Nacional. En el primero, en el Departamento de Matemática y en el de Informática, teniendo a su cargo las asignaturas Historia de la matemática, Fundamentos de la matemática, Teoría de grafos, Métodos numéricos y Lógica informática. En el segundo también trabaja en los Departamentos de Matemática y de Informática, impartiendo las materias Historia de la matemática, Modelos discretos y Metodología de la enseñanza.

Dirige la carrera de postítulo de Diplomatura Superior en Matemática Educativa en el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", desempeñándose además en dicha carrera como profesora de Perspectivas epistemológicas de la matemática y de Introducción a la investigación en el aula de matemática.

Es además directora del Departamento de Matemática del Profesorado de Consudec de Buenos Aires y Profesora Visitante del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN de México

Trabajó en el Ministerio de Cultura y Educación de la Nación de Argentina, formando parte del grupo de especialistas de Matemática del Programa Nacional de Gestión para la Capacitación Docente. En el marco de este proyecto viajó para coordinar jornadas de capacitación docente y asesorar y monitorear acciones de capacitación e integrar comisiones evaluadoras del Área de Matemática en varias provincias de su país.

Realiza investigaciones en el área de matemática educativa, en la línea de la construcción social del conocimiento. Ha realizado estancias de investigación en México y Chile.

Es autora y coautora de numerosos artículos y libros destinados a docentes de matemática e investigadores en matemática educativa. Ha impartido cursos y talleres de capacitación docente destinados a maestros y profesores de matemática.

Ha participado en congresos, jornadas y reuniones nacionales e internacionales relacionados con la matemática y su enseñanza como invitada en Argentina, México, Cuba, Guatemala, República Dominicana, Chile, Uruguay, Venezuela, Panamá, Colombia, Alemania y Puerto Rico teniendo a su cargo la exposición de conferencias, paneles, mesas redondas, cursos, reportes de investigación, comunicaciones, talleres y pósters.

Recibió el Premio a la mejor Tesis de Doctorado en Matemática Educativa otorgado por la Sociedad Matemática Mexicana, en 2009 y los Premios al Mejor Promedio otorgados por el Instituto Politécnico Nacional en 2005 por su carrera de maestría y en 2007 por su doctorado.

En la actualidad es Presidenta de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), Presidenta del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame) y Presidenta de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM).

Ha dirigido y dirige tesis de maestría y doctorado en el área de matemática educativa, actuando como revisora y sinodal en defensas de tesis.

Es Miembro del Comité de Redacción de Relime (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa) y Directora y Editora de la Revista Premisa. Es miembro del Comité Evaluador de varias revistas y publicaciones de matemática educativa, educación, etnomatemática e historia de la matemática,

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada
Diciembre de 2011, Número 28, páginas 11-20
ISSN: 1815-0640

El profesor de matemática y su formación. Un camino continuo en busca de respuestas.

Cecilia Rita Crespo Crespo

Resumen

El aula de matemática, y la escuela en general, han adquirido en los últimos tiempos, características que son producto de los constantes cambios ocurridos en la sociedad. Los estudiantes de profesorado de matemática se encuentran frente a interesantes desafíos ante la idea de realizar en sus actividades cotidianas en ese aula tan dinámica en el futuro. Esto genera la necesidad creciente de actualización y la búsqueda de respuestas y estrategias para lograr la construcción del conocimiento matemático en el aula.

Abstract

The classroom of mathematics, and school in general, have acquired in recent times, features that are product of constant changes of society. Students of mathematics teaching are faced to exciting challenges in front of the idea of performing in their daily activities in such so dynamic classroom in the future. This generates growing requirements for updating and searching for answers and strategies to achieve mathematical constructions of the knowledge in the classroom.

Resumo

O aula de matemática, e a escola em general, adquiriram nos últimos tempos, características que são produto das constantes mudanças ocorridas na sociedade. Os estudantes de profesorado de matemática encontram-se em frente a interessantes desafios ante a ideia de realizar em suas actividades quotidianas nesse aula no futuro. Isto gera a necessidade crescente de actualização e a busca de respostas e estratégias para conseguir a construção do conhecimento matemático no aula.

1. La enseñanza de la matemática y la formación docente

Los conocimientos matemáticos han sido construidos y transmitidos durante siglos de generación en generación en las diferentes culturas. La matemática fue surgiendo a través de la historia como respuesta a preguntas tanto prácticas como teóricas de diversos orígenes y contextos. Si bien algunos pensadores se han cuestionado acerca de la manera en la que el hombre lleva a cabo la construcción del conocimiento matemático, durante mucho tiempo se asumió que el hecho de saber matemática era suficiente para poder enseñar esta disciplina. La aparición del interés por la reflexión acerca de la manera en que se realiza la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, así como de las dificultades y obstáculos que pueden presentarse es este proceso, se remonta atrás en el tiempo, pero solo más recientemente se pensó que para lograr enseñar matemática en cada uno de los niveles educativos se requería algo más que saber matemática. El discurso matemático escolar, hasta entonces, era comprendido simplemente un recorte de la matemática.

Hacia fines del siglo XIX, debido a la preocupación por una mayor y mejor formación de profesores en el nivel superior, la educación matemática surge como un campo profesional, con una identidad propia y comienza de manera incipiente la actividad de investigación. Fue Félix Klein (1849-1925) uno de los responsables de cambio de esta visión, a través de sus valiosas contribuciones que condujeron a reestructuraciones en la educación que no se restringieron a su país. En sus palabras es posible comprender su concepción de la enseñanza y el cambio que introdujo:

> "durante mucho tiempo la gente de la universidad se preocupaba exclusivamente de sus ciencias, sin conceder atención alguna a las necesidades de las escuelas, sin cuidarse en absoluto de establecer conexión alguna con la matemática de la escuela. ¿Cuál era el resultado de esta práctica? El joven estudiante de la universidad se encontraba a sí mismo, al principio, enfrentado con problemas que no le recordaban en absoluto las cosas que le habían ocupado en la escuela. Naturalmente olvidaba estas cosas rápida y totalmente. Cuando, después de acabar su carrera se convertía en profesor de enseñanza media se encontraba de repente en una situación en la que se suponía que debía enseñar las matemáticas elementales tradicionales en el viejo modo pedante; y puesto que, sin ayuda, apenas era capaz de percibir conexión alguna entre su tarea y sus matemáticas universitarias, pronto recurría a la forma de enseñanza garantizada por el tiempo y sus estudios universitarios quedaban solamente como una memoria más o menos placentera que no tenía influencia alguna sobre su enseñanza". (Klein, 1927, p.127)

Los profesores de matemática, hasta aquel momento, estudiaban matemática en la universidad, mientras que la instrucción que recibían orientada hacia la enseñanza de esta disciplina era mínima. Fue en Alemania que comenzaron a impartirse los primeros cursos de formación práctica orientados a la enseñanza de la matemática. Uno de los pioneros en el área de la metodología fue Félix Klein, quien creó estos cursos en varias universidades alemanas (Kilpatrick, 1994).

Cabe destacar que estas ideas fueron, en aquellas épocas, el germen para la aparición de los institutos superiores de formación docente en Argentina. Por ejemplo, el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", de la Ciudad de Buenos Aires, fue fundado en 1904, a imagen de las universidades alemanas en las que se impartían carreras docentes a fines del siglo XIX. Su finalidad desde entonces ha sido la formación de docentes de las distintas áreas para el nivel medio y superior, en particular, de matemática. En sus inicios se constituyó "sobre las bases del Seminario Pedagógico creado casi dos años antes" (Souto, Mastache, Mazza y Rodríguez, 2004, p. 37) y que instituido como exigencia básica de formación específica para ejercer la docencia en escuelas secundarias en nuestro país. Posteriormente se consolidó y organizó dando origen a una nueva imagen del profesor: "Ser profesor secundario ya no es sólo ejercer la docencia, es tener la formación requerida y la acreditación oficial para ejercerla" (Souto et al., 2004, p. 40).

2. Formación inicial del profesor de matemática

En la actualidad, se reconoce que en la formación inicial de profesores de matemática deben combinarse tres aspectos o ejes básicamente. Por un lado, una fuerte base disciplinar, por otro una formación general común y finalmente la práctica docente.

Los alumnos de profesorado deben acceder durante su etapa de estudiantes a la construcción de objetos matemáticos de diversa naturaleza. En los estudios formales, deben construir sólidamente sus conocimientos de las distintas ramas de la matemática, para de esta manera poder no sólo organizar los cursos de los que estén luego a cargo, sino también lograr comprender y construir posteriormente nuevos conocimientos tomando por base los que adquieran en sus estudios. Las finalidades formativas de los aspectos disciplinares se centran en el dominio conceptual de la matemática tanto desde el punto de vista científico como de la enseñanza de esta ciencia favoreciendo el desarrollo del espíritu crítico en los futuros docentes.

En relación a la formación general, tiene la intencionalidad de conformar en el futuro profesor, una base cognitiva que le permita comprender la realidad del sujeto que aprende. Por ello, se basa en la comprensión de las teorías de aprendizaje para conocer y analizar aspectos pedagógicos, didácticos, filosóficos, instrumentales, históricos y socio-políticos propios del aula. Todas las materias de formación común, llamadas así porque se encuentran presentes en los diseños curriculares de las distintas carreras docentes, están orientadas a lograr la concepción de lo didáctico, por medio de la construcción del rol docente y el estudio de los diversos procesos de enseñanza, de aprendizaje.

Los aspectos vinculados con la práctica docente deben ser medulares en la formación de los profesores de matemática articulando los otros dos ejes mencionados. En las vivencias de los futuros profesores, las primeras prácticas se constituyen en su primer contacto práctico con la realidad del aula. Se trata de una etapa de gran complejidad, teniendo que enfrentar en ella las problemáticas propias del hecho de tener de organizar y desarrollar el ejercicio didáctico de planificar y estructurar la clase, seleccionando los recursos didácticos apropiados, decidiendo la metodología adecuada y determinando qué dar, cómo, cuándo darlo. Algunas de las dificultades que manifiestan en este proceso se refieren a la necesidad de distinguir las diferencias entre el saber matemático y el discurso matemático escolar y a la necesidad de enfrentar en la realidad del aula la presencia de distintas visiones acerca de la labor docente (Homilka, 2008).

La matriz del saber de la formación de un profesor (Lezama citado por Homilka, 2008) involucra tres polos o núcleos: la reproducción, la aplicación y la investigación que se interrelacionan en toda institución educativa superior. En el caso de la formación de profesores de matemática, la reproducción se refiere a la transmisión y construcción de conocimientos de cada uno de los ejes mencionados, que se lleva a cabo en las actividades diarias de los años de los estudios de la carrera. La aplicación, claramente se pone de manifiesto en el eje de la práctica en el que se ponen en juego los conocimientos construidos previamente tanto en lo disciplinar, como en las estrategias didácticas puestas en juego. El tercer núcleo, correspondiente a la investigación, todavía en muchas de las instituciones formadoras de profesores de nuestro país no se encuentra totalmente desarrollado. Se refiere a una inmersión y participación activa e integral de los estudiantes en grupos de investigación del área de la matemática educativa. La investigación no es realizada como una exigencia de la formación inicial de los profesores y se restringe, por lo general, a estudios de postgrado o al contacto con grupos existentes o que se crean a partir de intereses comunes.

La formación docente inicial se entiende como el proceso pedagógico sistemático que posibilita el desarrollo de competencias propias del ejercicio profesional en el sistema educativo. Implica lograr con los pocos años que un futuro docente que pasa por una institución formadora que desarrolle las bases de su formación. Debe ser una de las mayores preocupaciones de un sistema educativo interesado en el logro de calidad en el ejercicio docente y aprendizaje de sus alumnos. Entre sus objetivos pueden citarse la formación de profesores capaces tanto de favorecer la construcción de aprendizajes en grupos de alumnos; de participar en las acciones pedagógicas e institucionales y de intervenir en aspectos organizativos de las instituciones en las que desarrollen su labor docente, como de desarrollar el juicio crítico y los hábitos valorativos en los alumnos para que se realicen como personas acorde con sus capacidades y valores.

Sin embargo, esta etapa inicial no alcanza para acabar su formación. Los profesores de matemática al hallarse frente a la realidad del aula, comprenden que necesitan continuar su formación.

3. Cuando la formación inicial no alcanza

Intentaremos a continuación describir, aunque brevemente, algunas características que posee el aula de matemática actual. Estas son las que corresponden a la realidad con la que se enfrentan los profesores que recién se reciben y para la cual en muchas oportunidades expresan que no se sienten preparados.

Son comunes las quejas de los maestros y profesores en relación al desinterés, la apatía y la falta de participación activa de los estudiantes en el aula de matemática. Una de las causas de este fenómeno es la falta de motivación que los alumnos manifiestan en relación a las actividades desarrolladas en clase, lo que genera falta de estudio y continuos cuestionamientos de los alumnos en relación a la escuela y los conocimientos que en ella se trabajan.

La matemática es vista muchas veces como la disciplina más odiada y temida por los estudiantes… Otro de los fenómenos presente en la escuela actual es la exclusión. La matemática es, lamentablemente, una de las materias que más colabora al fracaso escolar que termina generando esa exclusión. “Muchos jóvenes asumen con pasmosa aceptación ´su´ fracaso escolar, ´su´ imposibilidad de acceder a los circuitos formales del mercado, ´su´precaria condición, en primera persona del singular (Reguillo, 2008, p. 137). Es una realidad que solemos encontrar presente en el aula de matemática: muchos estudiantes afirman antes de ser evaluados que no aprobarán esta materia, que la matemática no es para ellos, que no tienen facilidad para ella y que se les hace inútil intentar estudiarla, pues no la aprobarán… Contradecir esas afirmaciones, remontar esa situación es uno de los desafíos a los que el profesor de matemática debe enfrentarse.

Entre los profesores de matemática, ante la escuela actual, surgen interrogantes como los siguientes:

- ¿Cómo afrontar sus características?
- ¿Cómo revertir algunas de ellas?
- ¿Cómo interesar a nuestros estudiantes?
- ¿Cómo hacer que muestren entusiasmo?
- ¿Cómo hacer que se interesen por lo que les presentamos en clase?
- ¿Cómo lograr que disfruten de la construcción del conocimiento matemático tanto como lo hacemos nosotros?

A veces a estas preguntas, los docentes no les encontramos respuesta satisfactoria, pensamos, ensayamos, intentamos…

Entre las funciones que la sociedad demanda a la escuela actual, podemos mencionar la transmisión de su herencia cultural, la capacitación para el trabajo y el estudio y la formación del ciudadano. La primera de ellas, restringiéndonos a nuestra disciplina, se refiere a compartir con las nuevas generaciones siglos de cultura en los que se han desarrollado conocimientos matemáticos que fueron obtenidos para solucionar problemáticas propias de cada escenario sociocultural, de cada momento histórico y que constituyen un sólido edificio disciplinar actual. En el caso de la capacitación para el trabajo y el estudio, las demandas son reflejo de las necesidades para continuar estudios superiores o bien para lograr exitosamente la inserción laboral de los egresados. Las escuelas deben dar respuestas a la sociedad en relación a la manera en la que preparan a sus alumnos para que se desenvuelvan cuando ya no se encuentren en sus aulas. Se incorporan por ello, a veces, a las currícula ciertos temas y enfoques que serán base de estudios posteriores, por influencia de universidades y padres, aún sin cuestionarse si son los más formativos, pero teniendo en cuenta ciertas necesidades de respuesta inmediata en muchas oportunidades producto de enfoques algorítmicos y en los que se descuidan aspectos de la construcción del conocimiento matemático. En lo que respecta a la tercera función exigida a la escuela, se pretende del egresado que haya aprendido a pensar sensatamente, a tomar decisiones y a participar activamente en las instituciones de la sociedad.

Suele decirse que la escuela actual está en crisis, se cuestiona su capacidad educativa, y por momentos su autoridad. Sin embargo se le sigue reconociendo un papel central y fundamental en la educación, aunque se le adjudique cierta incapacidad para hacerse cargo de las nuevas tareas que la sociedad le va reclamando (Barbero, 2008). La sociedad reclama enfáticamente un cambio a la escuela. Se dice que la crisis que se genera como consecuencia de querer sostener las instituciones de la modernidad en tiempos de la posmodernidad. “Estamos pasado de una sociedad con sistema educativo a una sociedad educativa” (Barbero, 2008, p.66). Este cambio parece no ser percibido aún en toda su dimensión por la sociedad: se sigue pensando en un modelo de escuela que muchas veces no reconoce que en la actualidad la dimensión educativa atraviesa todo: trabajo, ocio, escuela, universidad, hogar, produciéndose distintas formas de aprendizaje no sólo en las instituciones educativas, sino en otros escenarios no académicos. En esa sociedad educativa en la que participamos, el aprendizaje se realiza de diversas maneras, en muchas oportunidades no institucionalizado. La escuela ha pasado a ser, una instancia más de aprendizaje, pero no la única como lo era hace un tiempo, se encuentra inmersa en una sociedad en la que se construye constantemente conocimiento (Crespo Crespo, 2009, p.1147) y, en esa sociedad, el rol del profesor debe ser repensado (Homilka y Crespo Crespo, 2010) para que sea capaz de asumir el cambio y aprender a enseñar en una escuela que forma parte de la red generadora de conocimiento en la sociedad educativa y cuyas demandas y necesidades le presentan constantes desafíos.

Al docente que ejerce en esa escuela en evolución y en crisis, se le exige por un lado calidad educativa y competencias profesionales y por otro un conocimiento funcional que le permita adaptarse al constante cambio. El profesor cuya formación inicial describimos anteriormente, no se siente preparado para dar respuesta a todas las demandas que le hace la sociedad y asume la necesidad de una capacitación continua para el aprendizaje permanente, no sólo en lo disciplinar, en los contenidos matemáticos, sino en lo didáctico.

4. Seguir buscando respuestas y soluciones a través de la formación docente continua

El concepto de formación docente continua es relativamente reciente, hablándose en muchos casos de formación en servicio desde hace pocas décadas. El primer escalón de su éxito es la toma de conciencia de su necesidad por parte de los docentes. Esta toma de conciencia es cada vez mayor y se la detecta en las demandas que realizan, cada vez con más frecuencia e intensidad, los egresados de los profesorados en relación a la realización de posibles estudios posteriores o instancias de cursos de capacitación y perfeccionamiento que les permitan una mejor inserción en la realidad de la escuela actual y para poder dar respuesta a sus problemáticas.

Existen diversas modalidades de formación docente continua que se adaptan a las necesidades y disponibilidad de tiempo de los profesores. Una de ellas está basada en la oferta de carreras a través de sistemas educativos formales. Se ofrecen carreras de licenciatura para profesores y también postítulos y posgrados. A través de especializaciones y diplomaturas por una parte y, de maestrías y doctorados por otra, los profesores de matemática pueden acceder a continuar sus estudios de manera formal. La modalidad presencial ya no es la única opción; pues la virtualidad ha dado paso a la posibilidad para los profesores de realizar estudios a distancia en instituciones de prestigio de su mismo país o del extranjero sin tener que abandonar sus lugares de trabajo y adaptando los estudios a sus tiempos disponibles.

Por otra parte existe gran cantidad de cursos de perfeccionamiento y capacitación docente que ofrecen instituciones educativas y sociedades relacionadas con la educación matemática. Estos se ofrecen también en modalidad presencial o virtual.

También la asistencia y participación en reuniones, jornadas y congresos es una de las opciones de gran riqueza e interés para los profesores de matemática. En ellos pueden compartir y discutir opiniones, propuestas didácticas y experiencias de aula con colegas e investigadores. Conocer realidades tanto parecidas como distintas de las propias, poder interactuar con otros profesores e investigadores en matemática educativa que comparten problemáticas y que buscan o proponen soluciones a las mismas, permite mejorar la propia práctica y tomar contacto con colegas con los que las relaciones e intercambios académicos trascienden el tiempo del congreso.

Existe en la actualidad gran cantidad de publicaciones destinadas a maestros, estudiantes de profesorado y profesores de matemática. Algunas de ellas son editadas por sociedades de educación matemática o academias, otras tienen el respaldo de universidades, instituciones educativas y centros de investigación. Entre ellas se pueden hallar descripciones de experiencias de aula, propuestas didácticas, reflexiones teóricas, resultados de investigaciones realizadas o en proceso, reseñas de libros y revisiones bibliográficas. Cada vez es más común la existencia de publicaciones abiertas en la web para que todos los profesores e interesados tengan acceso a ellas libremente, apuntando a un mayor impacto social. Entre los factores que favorecen esa visibilidad se encuentran la calidad de los artículos que se publican y la conformación de redes plurales de colaboradores (Cantoral, 2008). Estas publicaciones tienen unas veces el formato de revista periódica, otras veces son producto de lo expuesto en eventos y congresos realizados o bien de tesis de postgrado en el área.

La participación y membresía en sociedades de colegas profesores e investigadores en matemática educativa, hace posible la conformación de comunidades en las que se comparten inquietudes y preocupaciones en relación a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en los distintos niveles educativos. A través de las acciones y propuestas de esas sociedades se busca incidir en el ámbito educativo para lograr una mejora progresiva de la educación científica en las regiones o países en que esas sociedades tienen impacto, fortaleciendo a la comunidad profesional emergente y preocupada por los resultados actuales que se están obteniendo en las aulas de matemática.

La búsqueda de identidad y pertenencia a estas sociedades promueve el intercambio de propuestas y experiencias de profesores e investigadores. Los profesores de matemática, en este intercambio se van acercando a la comunidad científica del área y comprenden que en la pluralidad de enfoques y visiones pueden encontrar al identificarse con sus miembros una manera de continuar su formación continua de manera valiosa y productiva.

A partir de estos intercambios y participación en comunidades científicas se vienen conformando grupos de investigación tanto dentro de instituciones, como fuera de ellas. Se trata de grupos de docentes investigadores con intereses o necesidades comunes, que encuentran en los distintos marcos teóricos y líneas de investigación, una manera de mirar y comprender su aula y los fenómenos que en ella tienen lugar. De estos grupos, a su vez surgen presentaciones en jornadas y congresos y publicaciones, que promueven más aún el intercambio y logran aumentar el alcance de este tipo de perfeccionamiento docente.

Como consecuencia de todas estas instancias posteriores a la formación inicial del profesor de matemática, éste aprende a mirar su aula de otra manera. Comprende que existen distintas formas de interpretar los fenómenos que suceden en el aula e intentar comprender cómo se construye el conocimiento matemático, cómo se transforma el saber sabio en saber enseñado, cómo se transforma el discurso matemático en el discurso matemático escolar, qué interacciones se realizan durante la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y cómo pueden aprovecharse dentro del aula construcciones externas que traen los estudiantes. Pero por encima de todo, comprende que no está solo en su tarea cotidiana y que existe una comunidad académica a la que le preocupa el aprendizaje de la matemática y que trabaja activamente en la búsqueda de soluciones.

5. Algunas reflexiones finales

Cada vez es más evidente que la formación de los profesores de matemática requiere, además de una sólida instancia educativa inicial, un proceso de formación continua que se debe llevar a cabo durante toda su actividad laboral.

La complejidad de la matemática y de la educación exige que los profesores de esta disciplina, deban permanecer constantemente atentos y abiertos a los cambios profundos que en muchos aspectos la dinámica rápidamente mutante de la situación global viene exigiendo. Los últimos años han sido escenario de cambios muy profundos en la escuela y en particular en la enseñanza de la matemática. Los esfuerzos que la comunidad internacional de expertos en el área sigue realizando por encontrar respuestas adecuadas deja en claro que vivimos una situación de experimentación y cambio en la que no es posible quedarse con los conocimientos adquiridos. Una preocupación general que se observa entre los profesores de matemática y los educadores en general, se refiere a la búsqueda de la motivación del alumno desde un punto de vista más amplio, no limitándose incluso al interés intrínseco en la matemática y de sus aplicaciones.

La capacitación docente continua se sustenta en la necesidad de dar respuestas a los fenómenos presentes en el aula de matemática, producto de la elevada velocidad a la que se llevan a cabo los cambios sociales, políticos y económicos, avances en el conocimiento matemático y desarrollo científico tecnológico.

En una sociedad en cambio, en la que la escuela no encuentra aún la manera de responder eficazmente a sus cuestionamientos, creemos necesario fomentar en los estudiantes de profesorado de matemática el análisis de la importancia de la manera en la que se logra la construcción del conocimiento, en oposición a la tendencia de sólo transferencia de conocimientos. Pero por encima de todo ello, creemos indispensable la toma de conciencia de que siempre es necesario continuar buscando respuestas y estrategias por medio de un proceso continuo de reflexión sobre el aula de matemática y los fenómenos que en ella se llevan a cabo y sobre la propia práctica docente.

Se reconoce la importancia para el profesor de matemática de la formación sólida y actualizada tanto en la disciplina como en la didáctica específica, que contemple explícitamente los problemas reales que hoy se presentan en la clase. De esta forma debe generarse en ellos la capacidad de ampliar la visión institucional mirando el aula, la escuela, los estudiantes y la práctica docente, a partir de las demandas actuales, desde una óptica que contemple los aspectos científicos, académicos y profesionales. En todo momento, el profesor de matemática debe estar abierto al autoanálisis profundo de sus saberes y su práctica, para intentar lograr una reformulación del discurso matemático escolar y estar preparado para nuevos retos a partir de los aportes que obtenga a través de las diversas instancias de formación continua, teniendo en cuenta siempre que:

> “La educación […] requiere de conocimiento, intuición y afecto. Cuando un docente pretende enseñar debe crear las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento sin olvidar que cada alumno es una singularidad psíquica, que tiene su manera de significar, su tiempo y modalidad de acceso al conocimiento que es siempre distinta de uno a otro.” (Engler, 2005)

Bibliografía

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.), *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.65-99). Buenos Aires: Siglo XXI.

Cantoral, R. (2008). ¿Cuál es el papel de una revista científica en la conformación de una comunidad? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11* (1), 5-8.

Crespo Crespo, C. (2009). El aula de matemática, hoy: una mirada desde la docencia y la investigación en matemática educativa. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1145 1154. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Engler, A. (2005). La tarea del docente de matemática: algunas reflexiones para compartir... *Premisa 7* (25), 12-15

Homilka, L. (2008). *Influencia de las prácticas docentes en la visión de estudiantes y profesores de matemática acerca de la matemática en el aula y las decisiones didácticas.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.

Homilka, L. y Crespo Crespo, C. (2010). En busca de una caracterización del profesor de matemática. *En* P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 1023-1032. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Klein, F. (1927). *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* Madrid: Biblioteca matemática.

Kilpatrick, J. (1994). Investigación en educación matemática: su historia y algunos problemas de actualidad. En J. Kilpatrick, L. Rico y O. Gómez (Eds.), *Educación matemática* (pp. 1-18). México: Iberoamérica.

Reguillo, R. (2008). Instituciones desafiadas. Subjetividades juveniles: territorio de reconfiguración. En E. Tenti Fanfani (Comp.), *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.125-143). Buenos Aires: Siglo XXI.

Souto, M.; Mastache, A.; Mazza, D. y Rodríguez, D. (2004). *La identidad institucional a través de la historia. Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"*. Buenos Aires: Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González".

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 21- 40
ISSN: 1815-0640

O desafio do conhecimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais da educação básica tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações.

Angélica da Fontoura Garcia Silva, Tânia M. Mendonça Campos, Ruy Cesar Pietropaolo

"... Construirás os labirintos impermanentes
que sucessivamente habitarás.
Todos os dias estás refazendo o teu desenho.
Não te fatigues logo. Tens trabalho para toda a vida..."
(Cecília Meireles: Desenho)

Resumen

Neste artículo, presentamos una análisis de factores que pueden interferir en el conocimiento profesional de un grupo de docentes de los primeros años de la enseñanza elemental (6-10 años), en San Pablo. Tales factores fueran identificados en una educación continua, en discusiones sobre la representación fraccionada de números racionales y sus diferentes significados. Comprobamos que un factor viene de dificultades derivadas de una mala formación. Apuntamos el estudio de los racionales y sus diferentes significados, así como de diferentes abordajes, en los cursos de formación. Además, para romper creencias y conceptos en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas, en particular de fracciones, es necesaria una constante reflexión sobre la práctica de estos procesos.

Abstract

We present an analysis of influent factors in the professional knowledge of early years´ elementary school (6 to 10 years old) teachers, in the city of São Paulo. These factors were identified in an in service education course, which involved discussions about fractional representations of rational numbers and their different meanings. The data has indicated that one influential factor arises from an unsatisfactory process in their initial education. Our analysis suggests a study of rational numbers and their various meanings and the use of different approaches, in teachers´ education courses. Also, in order to perturb existing beliefs and ideas, related to mathematics teaching and learning, particularly about fractions, we need to promote constant reflection on the practice of those processes.

Resumo

Apresentamos uma análise de fatores que podem interferir no conhecimento profissional de um grupo de professores dos primeiros anos do Ensino Básico (6 a 10 anos), em São Paulo. Tais fatores foram identificados em uma formação continuada, na qual se discutiu a representação fracionária de números racionais e seus diferentes significados. Verificamos que um desses fatores provém de dificuldades decorrentes de um processo de formação insatisfatório. Indicamos a necessidade de um estudo dos racionais e seus diferentes significados, com diferentes abordagens, nos cursos de formação. E que, para romper crenças e concepções sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática, particularmente com *frações*, é necessária uma constante reflexão sobre a prática dos professores.

1. Introdução: Quanto às nossas escolhas

Consideramos o papel do professor de fundamental importância na organização do trabalho pedagógico. São inúmeras as expectativas sobre o perfil desse profissional em face da tarefa de realizar um ensino de qualidade. Sem dúvida, uma boa formação inicial seria uma introdução adequada ao desenvolvimento do conhecimento profissional docente, mas no decorrer da profissionalidade docente torna-se importante compreender a relação existente entre a reflexão sobre a prática e os domínios dos conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares. É preciso considerar, ainda, que "o cerne do processo educativo reside na escolha de modelos de desenvolvimento humano, na opção entre diversas respostas face às características dos grupos e aos contextos sociais" (Sacristan, 1991, p.87) e ainda, parafraseando Cecília Meireles, o professor está refazendo seu desenho todos os dias. Assim, consideramos que a capacidade de análise e escolha não se forma espontaneamente, exigindo também ações estratégicas de formação continuada. Em virtude disso, acreditamos que analisar os fatores que podem interferir no conhecimento profissional docente quando o professor está inserido em um processo de formação seria de fundamental importância.

Escolhemos, como sujeitos da pesquisa apresentada nesse artigo, um grupo de professoras que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental (6-10 anos de idade), pois segundo Fiorentini et al. (2002, p. 143), no Brasil, há uma carência de pesquisas com professores desse nível de ensino. Esse mesmo estudo indica "que o campo da pesquisa ligado à formação continuada do professor a partir da prática profissional – o qual envolve saberes, habilidades, competências, pensamento e prática – é um terreno ainda praticamente inexplorado" (p. 158).

Considerando que o professor das séries da Educação Básica do Brasil precisa trabalhar com conteúdos matemáticos e compartilhando das idéias de Shulman (1986), quando afirma que para ensinar é necessário que o professor domine os conteúdos específicos de sua área, acreditamos ser importante investigar um processo de ensino e de aprendizagem de um conteúdo específico da matemática, no caso números racionais em sua representação fracionária, para compreender o conhecimento profissional docente acerca da temática. Esta escolha deve-se ao fato de que, em geral, é feita a abordagem desse tema no decorrer das 4° e 5° anos do Ensino Fundamental, com crianças na faixa de 9 a 10 anos de idade, o mesmo é retomado, sistematicamente, nas duas séries subseqüentes e, mais tarde, pontualmente, em praticamente todos os anos subseqüentes da Educação Básica[1]. No entanto, pesquisas recentes desenvolvidas no Brasil (Rodrigues, 2005) e (Canova, 2006), dentre outros, mostram que os alunos têm pouco domínio desse conceito, fato comprovado em diferentes avaliações externas.

[1] No Brasil a Educação Básica inclui a educação infantil, ensino fundamental e ensino médio, nesta citação nos referimos aos anos finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

Observando resultados destas avaliações, como as realizadas pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB)[2] desde 1990 e pelo Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP)[3] percebemos que, no Brasil e, em particular, no estado de São Paulo, os processos de ensino e de aprendizagem dos números racionais na representação fracionária não têm avançado muito.

No SAEB de 2001, por exemplo, os resultados mostram que, em algumas questões que envolvem números racionais representados na forma fracionária, as crianças tinham um percentual de acertos em torno dos 35%. Vejamos uma situação problema cujo objetivo é avaliar a habilidade de identificar a fração como representação que pode estar associada a diferentes significados:

Para fazer uma horta, Marcelo dividiu um terreno em 7 partes iguais. Em cada uma das partes, ele plantará um tipo de semente.
Que fração representará cada uma das partes dessa horta?

➤ **(A)** $\frac{1}{7}$ **(C)** $\frac{7}{1}$

(B) $\frac{2}{7}$ **(D)** $\frac{7}{7}$

Percentual de Respostas às Alternativas				
A	B	C	D	Em branco e nulas
35	10	14	33	8

Figura 1: Questão do SAEB

Trata-se de questão encontrada em livros didáticos, apresentando uma situação que envolve o significado de parte-todo,[4] cujo percentual de acertos foi de 35%, taxa considerada baixa, se levarmos em conta que pesquisas recentes (Campos et al., 2006) e (Canova, 2006) indicam que "há uma forte tendência em traduzir o conceito de número racional, na representação fracionária, por este significado". Campos et al., 2006, por exemplo, em uma pesquisa realizada com 70 professores, concluíram não haver uma clareza sobre os diferentes significados da fração, o que os levaram a propor situações de ensino, restringindo à percepção e ao significado parte-todo.

Dados semelhantes foram observados em outra avaliação institucional, no SARESP 2005, que também avaliou habilidades matemáticas e indicou resultados próximos aos do SAEB, ou seja, ao avaliar alunos de 7° ano (11 ou 12 anos), que, de acordo com orientações contidas em documentos oficiais de referência curricular, deveriam ter trabalhado com números racionais pelo menos nos três últimos anos, somente 37% acertaram questões que envolviam os significados das

---

[2] SAEB, criado em 1990, a cada dois anos avalia, nacionalmente, conteúdos matemáticos, tendo como foco a resolução de problemas. Em 2001, esta avaliação indicou que em questões que pretendiam avaliar a capacidade de identificar a fração no significado parte-todo, as crianças tinham um percentual de acerto em torno dos 35%.

[3] SARESP é o sistema de avaliação da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SEE/SP. Criado em 1996, até o momento apresentou nove edições, sendo que as duas últimas, em que a Matemática esteve presente, ocorreram em 2000 e 2005. O SARESP 2005, 2008, por exemplo, apresenta resultados semelhantes ao SAEB, ou seja, a maioria dos alunos com 9 ou 10 anos (60%) não conseguiu relacionar uma representação decimal a uma fracionária.

[4] Segundo Nunes (2003), a idéia presente nesse significado é a da partição de um todo em *n* partes iguais, em que cada parte pode ser representada por 1/n. Assim, assumiremos como significado parte-todo o todo dividido em partes iguais em situações estáticas, em que a utilização de um procedimento de dupla contagem é suficiente para se chegar a uma representação correta.

frações. Tal dificuldade aparece ainda, com índice de acerto muito menor (15%), no SARESP de 2008, que ao avaliar alunos de 9° ano (13 ou 14 anos) observou a dificuldade dos alunos diante de um item no qual ele deveria identificar uma determinada fração $\frac{2}{5}$ como representação que estava associada a diferentes significados apresentada em situações diversas.

Quanto ao ensino desse tema, Nunes e Bryant (1997), tomando como base a pesquisa de Campos e Cols (1995), já sinalizavam que havia uma forte tendência por parte dos professores no sentido de trabalhar o conceito de número racional em sua representação fracionária utilizando, prioritariamente, o significado parte-todo, retomado por Campos (1999). Esse fato também é discutido em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997). Recentemente, estudos como os Campos et al. (2006), Canova (2006) e Damico (2007) também mostraram que há uma ênfase muito grande no ensino de números racionais representados em forma de fração, utilizando prioritariamente o significado parte-todo, nas séries iniciais ou operador multiplicativo nas séries finais.

Ainda com relação às questões de ensino e aprendizagem dos números racionais, observa-se uma relação intrínseca das concepções dos professores com a própria aprendizagem e a sua influência sobre o ensino e aprendizagem dos alunos (Campos et al, 2006, Canova, 2006, Damico, 2007 & Silva 2007). Analisando as pesquisas citadas e considerando, assim como Ponte (1992), que as concepções dos alunos são diretamente influenciadas pelo trabalho feito pelos professores, acreditamos ser importante levar também em conta o conhecimento docente, pois este tem papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem.

Desse modo, apresentamos uma análise dos diferentes fatores que influenciam no conhecimento profissional dos professores das primeiras séries do Ensino Fundamental, realizada a partir de observações e reflexões sobre o ensino e aprendizagem de números racionais em sua representação fracionária, quando esses professores estão inseridos num projeto de pesquisa.

2. Quanto à Fundamentação Teórica

Para o desenvolvimento deste estudo, tomamos como base um quadro teórico relacionado à formação de professores e ao conhecimento profissional docente, considerando as contribuições de Dewey (1979), que fundamentou o trabalho sobre questões relacionadas à reflexão sobre a prática de Schön, ampliadas pelas discussões de Alarcão, Shulman, Tardif, Ponte e Serrazina

Apoiamo-nos em Shulman (1986, 1987), com o intuito de compreender o processo de aprendizagem da docência. Seus estudos discutem o conhecimento pedagógico da matéria a ser ensinada, partindo de análises referentes ao "pensamento do professor" e ao "conhecimento do professor". Por outro lado, Tardif (2002) chama-nos a atenção para o fato do saber docente ser um saber diversificado, formado por saberes provenientes de fontes distintas. Afirma ainda que os futuros professores, antes mesmo de ministrarem suas aulas, experimentaram "lições" no seu futuro local de trabalho. Assim, um professor, mesmo antes de escolher o ofício docente, vivenciou, pelo menos durante 12 anos, o cotidiano escolar, tornando-se essa uma primeira dimensão formadora.

Consideramos assim que a reflexão do professor sobre a própria prática nos permite colher elementos para uma análise das dimensões do conhecimento profissional docente. A teoria de Schön (1983) aborda as diferentes dimensões da reflexão, em especial, a reflexão-na-ação e a reflexão-sobre-ação. A reflexão-na-ação diz respeito àquela que ocorre durante a atuação do professor em sala de aula e a reflexão-sobre-ação acontece quando o professor se distancia da ação para reconstituí-la, mentalmente, a partir da descrição e da análise dos fatos ocorridos.

No entanto, Alarcão (2001) argumenta que a reflexão-sobre-ação do professor nem sempre ocorre de forma natural e espontânea. É por esta razão que, a nosso ver, as propostas de formação continuada devem criar estratégias que permitam ao professor encontrar um sentido para rever e analisar a própria prática. A autora considera ainda a escola como "Organização que continuadamente se pensa a si própria, na sua missão social e na sua estrutura e se confronta com o desenrolar da sua actividade num processo heurístico, simultaneamente avaliativo e formativo" (Alarcão, 2001); portanto, consideramos que uma pesquisa realizada na própria escola pode propiciar tais momentos de reflexão-sobre-ação .

Consideramos ainda que é o olhar *a posteriori* sobre a prática e sua explicitação que propicia ao professor a oportunidade de reconhecer e entender como foram resolvidos os imprevistos ocorridos e quais aspectos deveriam ou não ser alterados em sua ação. Ou seja, a reflexão-sobre-ação permite que o professor tome ciência dos efeitos resultantes das estratégias utilizadas na reformulação de suas ações e, à medida que o processo reflexivo evolui, ele passa a ter novos patamares de compreensão sobre a ação e sobre as possíveis soluções para desenvolver novas práticas.

Ponte (1998) relaciona o conhecimento profissional docente com a prática que, por sua vez, está ligada às concepções do professor. Segundo esse autor, a forma como o professor conduz o processo de ensino na sala de aula pressupõe, necessariamente, um conhecimento de quatro domínios fundamentais: (a) a Matemática, (b) o currículo, (c) o aluno e os seus processos de aprendizagem e (d) a organização da atividade instrucional. Para Ponte, estes quatro domínios constituem o núcleo do conhecimento profissional do professor, referente à sua "prática lectiva" e, além disso, estão estruturados de acordo com as concepções do professor.

Em seus estudos, Ponte (1992) mostra a influência tanto das concepções sobre a prática como o inverso, dizendo que: "... as práticas são muitas vezes reveladoras de concepções importantes..." e, em virtude disso, geram uma tendência para o desenvolvimento de pesquisas nas quais se observa um maior interesse no estudo da prática docente, com investigadores cada vez mais preocupados em "... compreender melhor como pensa e como age o professor na sua actividade profissional..." (p. 193).

Ponte considera que as concepções "têm uma natureza essencialmente cognitiva. Actuam como uma espécie de filtro ora dando sentido às coisas ora 'como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de actuação e compreensão" (1992, p. 185). Partilhamos dessas idéias e consideramos importante analisar as concepções reveladas pela prática e aprofundar também a questão do conhecimento profissional, a partir da análise da prática profissional docente e das concepções demonstradas pelos professores.

Entretanto, para fundamentar este estudo, acreditamos que há necessidade de discutir outras questões relacionadas à reflexão sobre a prática. Serrazina (1998) pesquisou a capacidade de reflexão dos professores de Matemática com quem trabalhou e observou que há uma relação entre a autoconfiança e os conhecimentos específicos da área. Segundo observações feitas em seus estudos, a capacidade de refletir a própria prática "tornou-se mais profunda à medida que aumentava a sua autoconfiança que, por sua vez, estava ligada ao aprofundamento dos seus conhecimentos de Matemática". Afirma ainda que tal situação possa gerar certo desconforto, "pois as suas certezas [do professor reflexivo] são muitas vezes abaladas." (Oliveira & Serrazina, 2004, p. 12).

Nessa perspectiva, consideramos, assim como Serrazina (2002), que o papel da reflexão se amplia frente aos desafios da formação continua na perspectiva do desenvolvimento profissional docente :

> Pensar hoje a formação contínua de professores implica ter consciência que o professor possui um conhecimento profissional específico, multifacetado, que desenvolve continuadamente ao longo do tempo, em diálogo com as experiências diversas que vai vivendo, nomeadamente no contexto concreto das escolas em que lecciona e com as turmas que vai encontrando. Esse conhecimento é dinâmico, está em constante evolução, na procura de resposta às novas situações com que o professor se depara, requerendo actualização e aprofundamento permanente e sustentado, o que pressupõe o desenvolvimento de uma atitude e predisposição positiva para o seu investimento profissional. Isto é, a formação contínua deve ser encarada como um processo de desenvolvimento profissional do professor e não apenas como uma forma de colmatar deficiências detectadas na sua formação (Serrazina, 2002).

Considerando tal referencial, ampliamos nosso estudo no que se refere ao objeto matemático: a representação fracionária do número racional na classificação proposta por Nunes et al (2003). Os estudos destes autores, baseados na teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), propõem que se aborde o conceito de fração a partir da terna (S, I, R), quais sejam: o conjunto das situações (S), o conjunto dos invariantes (I) que definem o conceito e o conjunto das representações (R).

Com base nas idéias de Vergnaud (1990), Nunes et al. (2003) propõem que sejam considerados os invariantes: ordem e equivalência; cinco situações que pretendem dar significados à fração e às representações possíveis. São cinco os significados de fração considerados por Nunes et al. (2003): a fração como número; relação parte-todo; medida; operador multiplicativo e quociente.

Para este artigo, escolhemos analisar os significados parte-todo e quociente, por acreditarmos que tais significados estão mais associados às fases iniciais da construção do conceito de número racional e, portanto, são mais apropriados para a identificação de pontos críticos relacionados tanto ao ensino como à aprendizagem.

3. Metodologia

O nosso estudo foi desenvolvido numa intervenção da segunda autora, durante dois anos, numa mesma escola com 17 professores. Classificamos a natureza dessa pesquisa como qualitativa e interpretativa, organizada em um estudo de caso de uma formação continuada, realizada em uma escola de uma cidade de São Paulo. Para tanto, escolhemos investigar diferentes aspectos relacionados ao conhecimento profissional de um grupo de professoras, tomando como base suas observações sobre os processos de ensino e de aprendizagem de frações antes, durante e após a formação e a intervenção dos professores. Os dados diagnósticos obtidos inicialmente serviram como base para a elaboração do material utilizado durante os encontros com as professoras e, ao final do processo de formação, procurou-se observar e analisar também a influência da intervenção sobre a prática docente daquelas profissionais.

O instrumento diagnóstico teve o objetivo de analisar o perfil do grupo de professoras de 2° a 5° anos e procurar compreender as estratégias utilizadas por elas e por seus alunos para a solução de problemas envolvendo diferentes significados de números racionais representados na forma fracionária. Além disso, foi solicitado às professoras que refletissem e avaliassem seu trabalho sobre frações durante os anos anteriores à formação. A análise dos resultados apresentados pelas professoras e por seus alunos serviu como base para a elaboração do material que seria objeto de estudo durante a formação.

Os dados nesse artigo foram coletados em 16 sessões de 4 horas cada, das quais: 3 destinadas à aplicação de um instrumento diagnóstico (1 sessão para os 17 professores e 2 para 47 alunos desses professores); 9 sessões dedicadas a estudos dos significados da representação fracionária dos números racionais e à vivência de metodologias diversificadas, tendo as frações como objeto de estudo; e 1 sessão foi dedicada à elaboração de uma seqüência de trabalho, pelas professoras, que foi desenvolvida com seus alunos em sala de aula. As duas sessões seguintes foram destinadas a entrevistas e, finalmente, realizamos uma sessão de entrevistas, um ano após a intervenção, com o objetivo de verificar as reflexões feitas pelos professores depois da pesquisa.

4. Síntese dos principais resultados encontrados nesta pesquisa

Faremos a seguir a síntese dos principais resultados encontrados nos instrumentos de coleta de dados. Analisaremos os resultados encontrados no protocolo de pesquisa da avaliação inicial, utilizado antes de iniciar a intervenção. Teceremos considerações a respeito de impressões colhidas durante a intervenção e, finalmente, expomos uma avaliação dos depoimentos das professoras, contendo reflexões sobre o trabalho docente após a intervenção

4.1 Saberes docentes acerca dos significados da representação fracionária dos números racionais

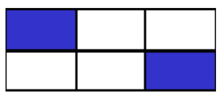
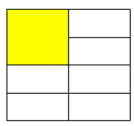
Conforme já afirmamos, apoiamo-nos em Shulman (1986, 1987) com o intuito de compreender o processo de aprendizagem da docência. O autor classifica três tipos de conhecimento que os docentes devem ter: conhecimento da matéria ensinada, conhecimento pedagógico de conteúdo e conhecimento curricular.

Quanto ao conhecimento da matéria ensinada, observamos no exame dos dados obtidos na avaliação inicial, com base em um questionário apresentado a professores e uma amostra de alunos destes docentes, no qual pretendíamos investigar os conhecimentos, concepções e estratégias utilizadas para resolver problemas que abordam a idéia de fração, segundo a classificação teórica proposta por Nunes.

Notamos que o grupo de professoras apresentou dificuldades relacionadas à parte conceitual dos significados das frações. Neste instrumento pôde-se observar que o índice de acertos das professoras pesquisadas foi de aproximadamente de 76,6% (para o significado parte-todo) e 64,7% (para o significado quociente). Assim, uma primeira análise dos dados obtidos sugeriu-nos que, no geral, estas professoras apresentaram um desempenho melhor nas questões que envolviam o significado parte-todo, comparadas às do significado quociente, o que nos dá indícios das razões pelas quais pesquisas recentes apontam a forte tendência de professores trabalharem este significado.

No entanto, constatamos que entre seus alunos os resultados não foram tão positivos para o significado parte-todo: 28,4%. Já para o quociente o índice foi maior, 57,1%, muito próximo ao encontrado com as professoras. Tais dados nos levaram a considerar a necessidade de promover uma reflexão não só acerca das dificuldades dos alunos, referentes ao significado parte-todo e sobre suas causas, como sobre o que levou o grupo de alunos a ter um desempenho maior com o quociente.

Para esse artigo optamos em apresentar resoluções e comentários feitos pelos professores tanto na avaliação inicial como durante a formação e na entrevista. Escolhemos, então, os significados parte-todo e quociente envolvendo grandezas contínuas já que, segundo as professoras, era essa a grandeza mais trabalhada na sala de aula até então. Quanto ao significado parte-todo envolvendo a grandeza contínua, foram apresentadas na avaliação inicial duas questões. Observa-se que ambas poderiam ser resolvidas por dupla contagem, indicando no denominador a quantidade total de partes iguais em que a figura está dividida e no numerador a quantidade de partes pintadas que pretendíamos verificar. A questão 8 apresenta ícone, o que não ocorre com a questão 4:

Questão 4	**Questão 8**
Isabelle ganhou uma barra de chocolate, partiu em 5 partes iguais e deu 2 partes para André. Que fração representa a parte que André recebeu? 14 acertos (82,35%) Significado parte-todo, grandezas contínuas, representação não icônica Resposta correta: $\frac{2}{5}$	Observe o desenho abaixo e responda qual a fração que representa as partes pintadas da figura em relação ao total da figura a)  b)  15 acertos (88,23%) 12 acertos (70,59%) Significado *parte-todo*, grandezas contínuas, representação icônica Resposta correta: a) $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$

Analisando o resultado, percebemos que, embora o nível de acerto seja alto, as duas questões não foram totalmente compreendidas pelas professoras. Relativamente à questão 4, que traz explícita no enunciado a divisão do chocolate em 5 partes iguais – indicando o denominador – e a quantidade de partes dadas a André – indicando o numerador. Assim, embora não apresente um ícone, é possível que essa questão propicie ao aluno uma melhor oportunidade de compreensão do significado da fração como parte-todo. É importante salientar que, no Brasil, documentos oficiais apontam que a forma mais comum de abordagem e exploração do conceito de fração é aquela que recorre a situações em que está implícita a relação parte-todo. É o caso das divisões de chocolates ou de pizzas, em partes iguais (PCN, 1997, p. 64).

Ressaltamos que ao resolver esta questão, mesmo não havendo ícone, os professores demonstraram mais facilidade para descrever o processo de partição (significado parte-todo), utilizando para isso uma dupla contagem. Observamos que essa situação-problema teve índice significativo de acertos (82,35%) e somente três professores responderam $\frac{3}{5}$. Elas podem ter entendido a situação, porém não foram capazes de analisar a pergunta, considerando o que restou do chocolate e não o que André recebeu.

Nesta mesma questão, entre os alunos da escola pesquisada o índice de acertos foi 48,05%. Quanto às respostas incorretas apresentadas pelos alunos, o que prevaleceu (32,47%) foi a inversão das posições do numerador e do denominador, apresentando $\frac{5}{6}$ como resposta. Os demais erros, num total de 35, poderiam ser atribuídos à interpretação incorreta da situação proposta, ou à ausência de conhecimentos relacionados à representação fracionária de números racionais. Dois alunos entregaram essa questão em branco. Do que foi exposto, entendemos que embora os professores tenham demonstrado certo domínio do tipo de situação contido nesta questão, os resultados apresentados por seus alunos indicam que esse conhecimento ainda não foi construído satisfatoriamente.

Já a questão 8 foi inspirada na pesquisa de Campos et al. (1995), cujos resultados mostraram uma quantidade significativamente maior de acertos para o item a. Não obstante os dois itens possam ser solucionados por meio de uma contagem, o item b apresenta um elemento dificultador, ou seja, é necessário que o aluno perceba que a parte pintada corresponde ao dobro de todas as partes não pintadas da figura.

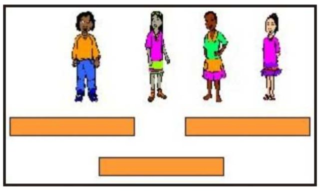
Nessa situação, a dificuldade apresentada pelas professoras foi muito pequena:, duas responderam $\frac{2}{4}$ para o item (a) e $\frac{2}{6}$ para o item (b). Quanto ao item b, observamos que a professora (F) não considerou a conservação da área e usou $\frac{1}{7}$ para representar a parte pintada. Outra professora, aqui identificada por Q, não respondeu a questão, afirmando ser “impossível, pois as partes têm que ser iguais”, ou seja, não observou a possibilidade de considerar áreas equivalentes, confirmando o resultado de Behr et al. (1983).

Diversos estudos demonstram que a dificuldade constatada nesse grupo de docentes é mais constante em crianças em início de escolarização. Já no final do Ensino Básico e início do ensino superior esses aspectos não aparentam ser importantes, conforme concluiu Rodrigues (2005). Entretanto, ainda que tenha sido observado um índice relativamente alto de acertos (aproximadamente 70%), julgamos que o profissional docente precisa ter essa compreensão, pois, segundo Schön (1983), a reflexão-na-ação pressupõe lançar mão de conhecimentos, aos quais chamou de “conhecimentos em ação”, e acreditamos que o conhecimento acerca do conteúdo é de fundamental importância.

Essa mesma questão foi proposta a alunos de 9 e 10 anos da mesma escola, resultando em índices muito baixos (no item **a** i (o) índice de acertos foi acima de 40% , já no **b** 7,5%). Apoiados nesses resultados, concluímos que seria essencial preparar uma atividade de análise e reflexão sobre os erros e acertos observados nesta questão, pois, já que pesquisas apontam ser o significado parte todo o mais trabalhado em sala de aula.Já na análise das situações que envolveram o significado quociente, observamos índices mais baixos de acertos, que foram muito próximos entre alunos e professoras. Relacionado as dificuldades do Professor, observamos o registro de uma importante constatação por ocasião da análise da Questão:

Questão 6

Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate.



a) Cada criança receberá 1 chocolate inteiro? Sim ( ) Não ( )

b) Cada criança receberá pelo menos metade de um chocolate? Sim ( ) Não ( )

c) Que fração de chocolate cada criança receberá?

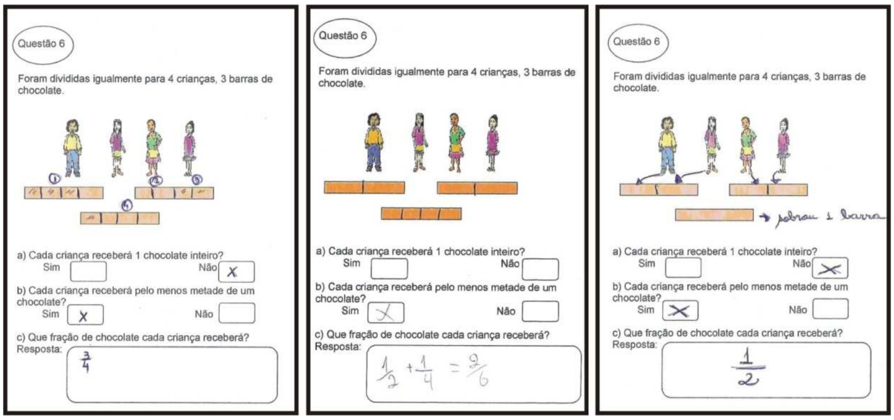
a) 17 acertos (100%) b) 15 acertos (88,23%) c) 5 acertos (29,41%)

Significado quociente, grandezas contínuas, representação icônica	Resposta correta: a) não b) sim c) $\frac{3}{4}$

Esta questão foi utilizada em pesquisas de Nunes et al. (2003), inspirada em Streefland (1984), cujos estudos sugerem que as seqüências de ensino poderiam iniciar o trabalho pelo processo de divisão indicada, apoiado no conhecimento informal dos alunos. Para o autor, tal abordagem potencializa a construção do conhecimento, estabelecendo uma relação entre representação e significado.

Quanto aos acertos, observamos que, em geral, houve entendimento da situação, visto que no primeiro item todas as professoras responderam corretamente. No segundo item, somente dois responderam de forma incorreta. Entretanto, em relação à fração que representa a situação, houve apenas cinco respostas corretas, e uma das professoras indicou a adição: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, deixando de registrar o resultado.

Pesquisas que analisam as estratégias de resolução utilizadas para essa questão consideram que elas podem ser um bom caminho para a compreensão não só das relações estabelecidas, como das dificuldades encontradas pelos docentes. Observamos nas soluções das professoras duas das estratégias descritas por Carperter et al. (1994), nas quais percebemos escolhas diferentes para a unidade inicial. Veja algumas das respostas:



Professora P Professora Q Professora R

Neste caso, a professora **P** considerou $\frac{1}{4}$ como unidade inicial e acertou a questão. A professora **Q** escolheu estratégia correta para resolver a questão, no entanto ao operar as frações não utilizou a equivalência e deu uma resposta errada. A professora **R** não conseguiu resolver a questão e deu uma resposta equivocada, desconsiderando uma das barras. Vale ressaltar que as três professoras lançaram mão da representação pictórica para resolver o problema.

Sobre esse tipo de erro, recorremos a Kerslake (1986). O autor discute que o uso de "diagramas" geralmente facilita a interpretação mas, no modelo *parte-todo*, esse recurso nem sempre permite a visualização imediata da situação envolvida no problema. É o caso deste problema, que compreende a adição de frações com denominadores diferentes. A autora alerta para a necessidade de expansão do modelo *parte-todo*, incluindo o significado *quociente*, que possibilita aos alunos experimentar aspectos partitivos da fração. Aqui observamos indícios de que a partição não garante o entendimento da equivalência.

Ressaltamos ainda que o nosso foco não estava nas operações com frações, porém ao analisar a resolução apresentada pela professora Q observamos que não lhe ocorreu a idéia de representar a situação utilizando duas frações que tivessem uma mesma unidade como referencial. É essencial salientar a relevância da noção de equivalência para a construção de soluções para situações-problemas que envolvam adição e subtração. Acreditamos que tal dificuldade detectada nos dá indícios da compreensão do significado de fração, pois a professora pode estar considerando a fração como dois números naturais sobrepostos, separados por um traço. Então, a professora opera com o numerador e o denominador, separadamente, e faz o registro utilizando um traço para separar os dois números. Ciscar e Garcia (1988), em seu estudo, dizem que para a criança as noções de adição e subtração são "pouco intuitivas". Entretanto, esperávamos que as professoras já houvessem avançado nessa compreensão. Os demais erros apresentados foram diversificados.[i]

Observamos aqui uma relação muito forte entre o conhecimento do conteúdo que para Shulman (1986) é "o professor necessita não somente entender que alguma coisa é assim; o professor precisa, além disso, compreender porque é assim, sobre que terrenos sua justificativa pode ser defendida, e sob quais circunstâncias nossas crenças nestas justificativas podem ser enfraquecidas, e igualmente, escondidas" (p.8).

Tais reflexões surgiram também na entrevista quando analisamos situações que envolveram o significado quociente. Dificuldades foram aventadas durante a entrevista realizada imediatamente após o processo de formação e a intervenção dos professores em suas salas de aula. Entrevistamos 11 professores que, em sua maioria, atribuíram suas dúvidas à ausência de um trabalho satisfatório sobre números racionais em sua formação inicial.

Isso nos leva a refletir acerca do ensino deste tema. Nas resoluções do mesmo problema apresentadas pelos alunos, houve, também como com suas professoras, um alto índice de acertos nos itens a e b (em torno de 90%), porém para o item c, que solicita a fração de chocolate que cada criança receberia, foram registrados 23,4% de acertos, índice que se aproxima bastante daquele alcançado pelas professoras para essa questão (29,4%). Isso nos leva a inferir que, mesmo não sendo desenvolvido um trabalho sistemático com o significado quociente, eles trazem para escola algum conhecimento da fração de situações vivenciadas no seu dia a dia. Diversos estudos, como os de Mack (1990; 1993), Empson (1999), Nunes e Bryant (2005) têm apontado tais evidências, mas é preciso pesquisar muito mais acerca de como fazer com que nossos alunos compreendam a equivalência de frações em situações parte-todo e quociente. Salientamos a necessidade de estudos com preocupações sobre quais os saberes docentes e suas implicações nos processos de ensino e aprendizagem.

A despeito disso, foi possível verificar durante as entrevistas e nas intervenções que os professores dotados de maior compreensão sobre a representação fracionária de números racionais conseguiram aprofundar a reflexão sobre questões relacionadas ao ensino e aprendizagem desse conteúdo, além de haverem aprimorado algumas capacidades mais gerais como o interesse em utilizar diversas representações matemáticas. Por sua vez, os professores que, inicialmente, demonstraram dificuldades em relação ao conteúdo objeto de nosso estudo, avançaram em relação às atitudes positivas relacionadas à Matemática e seu ensino. Essa dificuldade na compreensão do significado quociente nos levou a inferir que o trabalho com o significado quociente não ocorre, pelo menos com a mesma intensidade que se observa no trabalho com o significado parte-todo. Ao mesmo tempo nos forneceu indícios, como afirma Serrazina (1998), de que pode haver uma relação com o fato do desempenho melhor e a autoconfiança das professoras ao trabalhar com o significado parte-todo.

Consideramos, assim como Shulman (1986), que o domínio do conhecimento do conteúdo é importante nos processos de aprendizagem docente e, se ele não vem ocorrendo a contento, é necessário que haja, na formação inicial, um enfoque mais amplo do conceito de números racionais, complementado por uma análise dos diferentes significados de sua representação fracionária.

É importante também chamar a atenção para a necessidade de buscar o isomorfismo entre a formação recebida pelo professor e o tipo de educação que dele será exigida. É preciso haver certa coerência entre o conhecimento didático do conteúdo e a forma como esse conhecimento se processa. Acreditamos que na formação de professores uma das principais fontes de aprendizagem é o método por meio do qual os conhecimentos profissionais são tratados junto aos professores, pois os docentes são também "modelos de professor", como podemos no depoimento da professora 3H:

> Eu trabalhava da forma que foi trabalhado comigo... Trabalhava assim de uma forma que não era legal. Os alunos não gostavam e eu também não. Quando você trabalhou com uma coisa que não gosta para passar para o aluno ele também não gosta, pois ele sente que você não está gostando; aí, o ano passado não foi muito bom meu trabalho com fração (PROFESSORA 3H).

Outro fato importante a ser relatado diz respeito ao lugar que a temática, números racionais na representação fracionária, tomou na formação das professoras, pois conforme já afirmamos a maioria da professoras entrevistadas, atribuíram suas dúvidas à a inexistência ou então ausência de um trabalho satisfatório sobre a temática em sua formação inicial, como a professora 3G, por exemplo:

> Na realidade nunca foi falado em fração. No magistério foi muito trabalhado as 4 operações e a fração e geometria era uma coisa que ficava para depois. Então, saí do magistério com muita dificuldade em Fração [...] não só fração em geometria também, e durante esse tempo teve vários cursos através da diretoria, mas nenhum dirigido especificamente para frações. Via assim, superficialmente e eu tinha muita dificuldade. Realmente não sabia como trabalhar (PROFESSORA 3G).

4.2 Quanto aos saberes do professor, relacionados ao domínio dos conhecimentos pedagógicos do conteúdo: representação fracionária dos números racionais

Outro saber necessário ao professor que vai ensinar Matemática, considerado por Shulman (1986), é o bom domínio dos conhecimentos pedagógicos do conteúdo. Segundo o autor, esses conhecimentos correspondem a uma "mistura especial" entre o conteúdo que deve ser ensinado e a pedagogia que pertence unicamente aos professores, e que constitui a sua forma característica de compreensão de como tópicos particulares, problemas ou temas são organizados, representados e adaptados aos interesses e capacidades dos alunos e apresentados para o ensino. Considera ainda que esse saber lhe dará condições de compreender variações de metodologias de ensino para auxiliar os alunos na sua construção de conhecimentos.

A análise das entrevistas forneceu indícios de que, na amostra investigada, havia descontentamento, por parte das professoras, relacionado à aprendizagem do tema "frações" na formação inicial. Esse fato foi comprovado ao analisarmos os resultados do diagnóstico inicial.

A primeira conclusão a que chegamos é que os saberes desenvolvidos na formação inicial das professoras investigadas foram insuficientes para que estas se sentissem em condições de garantir a aprendizagem de seus alunos. Parece-nos que essas professoras estavam insatisfeitas com o grau de profundidade do trabalho que desenvolveram até então, fato esse que foi confirmado no depoimento da diretora da Escola:

> Olha, até o ano passado percebíamos que as frações eram mais trabalhadas na lousa. Não havia essa movimentação que houve este ano (DIRETORA).

Observa-se, neste estudo, a confirmação dos resultados de pesquisas anteriores sobre o significado parte-todo ser o mais trabalhado nas escolas. De fato, os relatos das professoras trazem indícios da ênfase que se dá a esse significado. Por exemplo, quando falam dos "desenhos" para representar a fração ou se expressam dizendo: "*aquelas eternas barras de chocolate era o todo que se vai repartir*" *(PROFESSORA A).*

Esta pesquisa confirma os estudos de Ball (1991), que já chamava a atenção para o fato de que os pressupostos e crenças do professor interagem o tempo todo com seus conhecimentos acerca da Matemática, influenciando todo o processo de ensino e aprendizagem.

Além disso, ao fazer a análise dos depoimentos das professoras envolvidas na pesquisa, observamos que as limitações nos procedimentos de ensino ou na preocupação foram acarretadas pelo fato de as docentes terem um domínio não suficiente do conteúdo a ser ensinado. Este fato pode ter impedido que elas percebessem a possibilidade de variações da metodologia utilizada, a fim de auxiliar seus alunos na construção do conhecimento.

Quando procuramos investigar as experiências vivenciadas durante a formação, consideradas mais significativas do ponto de vista do aprimoramento da prática, as professoras elegeram aquelas que aliam os significados das frações à questão metodológica – todos os depoimentos incluem os termos: *lúdico*, *criativo*, *interação*, *concreto* e até *brincadeira*. Notamos, durante todo o processo de formação, que o trabalho com material manipulável envolveu todo o grupo "emocionalmente", pois proporcionou às professoras momentos de discussão e reflexão sobre o processo de ensinar e aprender os conceitos matemáticos tratados. Entretanto, não percebemos essa mesma preocupação no que se relaciona a apresentar diferentes significados aos alunos, pelo menos, no que se refere a equidade de propostas envolvendo os dois significados (parte-todo e quociente).

Quanto aos materiais citados como mais eficientes, a maioria das professoras indicou o livro paradidático, seguido pela dobradura, Material Dourado, jogos, mosaico, evidenciando a importância atribuída ao material manipulável, esse fato foi confirmado pelo depoimento da Diretora : “*Alguns materiais que foram utilizados não saíam quase da sala em que eram guardados” (DIRETORA) .* Entretanto, sabemos que não basta utilizar o material, é preciso que tal vivência permita aos alunos estabelecer relações e conexões acerca dos conceitos matemáticos intrínsecos à manipulação, tais fatos foram discutidos durante a formação, mas não podemos afirmar que tal objetivo foi alcançado por essa maioria que citou sua utilização.

Os depoimentos das professoras durante as sessões de formação exibiram ainda maior preocupação em relação às possíveis dificuldades dos alunos. Identificamos indícios de que pontos importantes não foram discutidos anteriormente. As docentes consideraram durante a formação, por exemplo, fazer uma classificação quanto à dificuldade da questão 8, já apresentada nesse artigo. O grupo a considerou fácil, mas admitiu que áreas diferentes não eram abordadas constantemente em sala de aula. No entanto, quando comentamos que os índices de acerto dos alunos apresentaram uma taxa de 7,5% de acertos, as professoras se espantaram. Teceram comentários como:

> O que será que estamos fazendo de errado? Eu até entendo que não acertem tudo, mas só 7,5% é muito pouco. [...] É muito pouco mesmo. Acho que estamos trabalhando mais com as frações arrumadinhas, já divididas em partes iguais, será que não é isso? (PROFESSORA 4C).
>
> Pode ser. No livro não tem mais desta daí – apontando o item b – precisamos preparar mais atividades para estimular os alunos a comparar os tamanhos (PROFESSORA 4E).

Durante a formação tivemos a sensação de que essa análise trouxe muito desconforto, revelado pelas observações das próprias professoras, como no depoimento:

> Eu consegui rever muita coisa da minha prática porque as vezes a gente olha assim uma sala e imagina que todo mundo está aprendendo tudo ao mesmo tempo do jeitinho que você está ensinando . Aí, você percebe que para refletir que cada um tem uma cabecinha, um pensa de uma forma [...] Então, isso é importante refletir: matemática, é isso, existem várias formas de pensar e alcançar um resultado e eu não tinha parado para pensar nisso até então. Eu acho até que eu achava que estava ensinando. Aí a gente acaba repensando essa prática e vendo que na verdade a gente tá aprendendo junto, está construindo o conceito com eles (PROFESSORA 3G).

Consideramos esse desconforto inicial apresentado por essa e outras professoras, como um bom sinal, pois estão pensando sobre sua prática e demonstrando interesse por uma mudança de atitude em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo e ao curricular.

Identificamos nas descrições acima citadas, indícios de que pontos importantes discutidos durante a formação foram incorporados à prática docente. Consideraram, por exemplo, no último exemplo a importância de se propor ao aluno situações que o levem a perceber a necessidade da conservação da área – a equivalência entre as partes em que o todo foi dividido. Portanto, tal fato nos faz inferir, assim como estudos realizados por Serrazina (1998,) que há uma relação entre a autoconfiança e os conhecimentos específicos da área e que a reflexão foi aprofundada da à medida que o professor adquiria maior autoconfiança por meio da compreensão maior do conceito da fração.

Concluímos assim que é importante chamar a atenção para a necessidade de se buscar o isomorfismo entre a formação recebida pelo professor e o tipo de educação que dele será exigida. É preciso haver certa coerência entre o conhecimento didático do conteúdo e a forma como esse conhecimento se processa. Acreditamos que na formação de professores uma das principais fontes de aprendizagem é o método por meio do qual os conhecimentos profissionais são tratados junto aos professores, pois os formadores são considerados "modelos de professores".

4.3 Quanto ao saber do professor relacionado ao domínio dos conhecimentos curriculares sobre a representação fracionária dos números racionais

Tomamos em conta, em nossa análise, a categoria *conhecimento curricular do conteúdo*, descrita por Shulman (1986), que se refere às alternativas curriculares possíveis para o ensino, ou seja, trata-se do conhecimento dos materiais curriculares alternativos para o desenvolvimento de um determinado conteúdo (ou tópico), incluindo conhecimentos de teorias e princípios relacionados ao processo de ensino e aprendizagem.

Segundo declarações das professoras, em relação ao material de apoio utilizado para a elaboração do planejamento e seleção de atividades, o livro didático servia como única alternativa de referência curricular para o desenvolvimento do trabalho na escola pesquisada, corroborando a afirmação contida no documento oficial:

> [...] o livro didático exerce grande influência sobre a atuação do professor em sala de aula, pois ele se torna freqüentemente a única ferramenta disponível para seu trabalho (PNLD, 2005, p. 196). Todavia, observamos também que as professoras não estavam totalmente satisfeitas com essa "única ferramenta disponível".

Este fato também foi apontado nos estudos de Blanco e Contreras (2002), que observam que quando professores têm pouco conhecimento dos conteúdos, além da, já citada, dependência dos livros didáticos, evitam ensinar temas que não dominam, mostram insegurança perante circunstâncias não previstas e se apóiam na memorização tanto quando ensinam como quando avaliam.

Tendo em vista o fato de que, ao iniciar nosso projeto, as professoras não tinham conhecimento das propostas oficiais para o ensino de Matemática, avaliamos que houve um avanço no domínio dos conhecimentos curriculares, iniciado com as discussões e reflexões durante nossa intervenção e demonstrado por ocasião das entrevistas. É importante salientar que, embora os PCN (1997) não tenham sido citados nas entrevistas, observamos que algumas das reflexões feitas com base em suas orientações foram levadas em conta na preparação das aulas e nas discussões sobre dificuldades que os alunos enfrentam ao resolver situações que exigem a conservação da área ou aquelas que envolvem os invariantes. No entanto, as discussões que fizemos sobre as indicações de não priorizar o trabalho procedimental não foram aceitas pela totalidade das professoras. Em relação ao livro didático adotado pelas professoras pesquisadas, conquanto tenha havido um avanço no sentido de ser analisado com espírito mais crítico, ainda permanece a idéia de que o conteúdo integral do livro deve ser esgotado, indicando a necessidade de aprofundar a discussão a esse respeito

5. Diferentes fatores que interferem no conhecimento profissional de professores das primeiras séries do ensino fundamental quando estes estão inseridos em projeto de pesquisa

Norteados pelas inquietações sobre possíveis fatores que interferem na relação entre o conhecimento profissional de professores das primeiras séries do Ensino Fundamental, quando estes estão inseridos em projeto de pesquisa e levando em conta a tendência de valorização da reflexão sobre a prática, tanto nos recentes currículos prescritos como em diversas pesquisas, desenvolvemos este estudo buscando respostas à seguinte questão:

Que fatores influenciam o conhecimento profissional de professores das primeiras séries do Ensino Básico num processo de formação sobre o ensino da representação fracionária do número racional, realizado na própria escola, onde lhes sejam garantidos espaços para estudar e refletir sobre conhecimentos historicamente produzidos e sobre sua prática?

A busca de respostas a essa questão incluiu análises de documentos oficiais, revisão bibliográfica relacionada ao conhecimento profissional docente, intervenção e entrevistas com o grupo envolvido em dois momentos, e nos permitiu formular as seguintes conclusões:

Inicialmente um fator que influenciou, predominantemente, o conhecimento profissional no grupo de professoras investigadas foi o conhecimento que estas tinham do conteúdo a ser ensinado. Portanto, consideramos que tanto na formação inicial como na continuada de professores há necessidade de inserir conteúdos específicos da Matemática, contemplando tanto os conhecimentos do conteúdo como os conhecimentos pedagógicos e curriculares.

Assim, nossa pesquisa mostra que há necessidade de rediscutir as formas como os conteúdos matemáticos e, em especial, os números racionais são introduzidos – quando o são – nos cursos de formação, tanto inicial quanto continuada. A partir dos diagnósticos iniciais e dos comentários dos professores entrevistados, foi possível constituir uma visão da influência das dificuldades relativas ao conhecimento matemático na prática do professor. Acreditamos que se a construção desse conhecimento não vem ocorrendo como gostaríamos, é necessário que haja um enfoque mais amplo do conceito de números racionais, complementado por uma análise dos diferentes significados da representação fracionária desses números, tanto no curso de formação inicial quanto de formação continuada.

Assim, é importante chamar a atenção para a necessidade de garantir, permanentemente, uma relação de isomorfismo entre o processo de formação inicial e o que se pretende do futuro profissional docente.

Finalmente outro fator que pareceu-nos influenciar a pesquisa foi às crenças e concepções que os professores têm a respeito do ensino e da aprendizagem de Matemática, e em específico do objeto matemático *frações.* Confirmamos, por meio deste estudo, a influência que as crenças e concepções exercem, igualmente, sobre o conhecimento profissional do professor, havendo necessidade de uma constante reflexão para romper com elas.

Cabe ainda salientar que a nossa discussão sobre a constituição do conhecimento profissional do professor nas três dimensões descritas por Shulman tem, nos cursos de formação inicial, um momento muito importante, mas que certamente não será o único. Sabemos que a formação do professor para o exercício da sua atividade profissional é um processo que envolve diversas etapas e que, em síntese, é um "desenho" que está sempre em construção, ou parafraseando mais uma vez Cecília Meireles, ele traça a reta e a curva, a quebrada e a sinuosa, mas tudo é preciso, afinal de tudo ele viverá.

Bibliografia

Alarcão, I (2001): *Escola reflexiva e nova racionalidade*. Porto Alegre: Artmed.

Ball, D.L. (1991): Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. In: *J. Brophy (ed.) Advances in Research on Teaching, vol. 2*, pp. 1-48. Greenwich, CT: JAI Press.

Behr, M. J., Lesh, R., Post. T. R. & Silver, E. A. (1993): Rational number concepts. In: LESH, R. & LANDAU, M. (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press, p. 91-126.

Blanco, L. & Contreras, L. (2002): Um modelo formativo de maestros de primaria, em el área de matemáticas, em el âmbito de la geometria. IN: (org) *Aportaciones a la formación inicial de maestros em el áreas de matemáticas:* uma mirada a la practica docente. Cáceres: Universidad de Extremadura, p.92-124.

Brasil/ MEC/ INEP (1997): *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília.

Brasil/ MEC/ INEP (1998): *Referencial para formação de professores*. Brasília.

Campos, T. M. M., Jahn, A. P., Leme da Silva, M. C. & Silva, M. J. (1999): Lógica das Equivalências. In: *22ª Reunião Anual da ANPED* - Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, Caxambu. 22ª Reunião Anual da ANPED, p. 173-173.

Campos, T. M. M., Jahn, A. P., Leme da Silva, M. C. & Silva, M. J., Magina, S. & Nunes, T. (2006): O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. *Educação Matemática Pesquisa, v. v.8*, p. 125-136.

Canova, R. F. (2006): *Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do ensino fundamental com relação à fração.* dissertação de mestrado, PUC/SP, São Paulo.

Ciscar, S. L. & Garcia, M.V.S. (1988): *Fracciones*: la relación parte-todo. Madrid: Síntesis.

Damico, A. (2007): *Uma investigação sobre a formação inicial de Professores de Matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental.* Tese de Doutorado, PUC/SP, São Paulo.

Dewey, J. (1979): *Democracia e educação*. São Paulo, Companhia Editora Nacional.

Empson, S.(1999). Equal sharing and shared meaning: the development of fraction concepts in a first-grade classroom. *Cognition and Instruction*, 17(3), p. 283-342.

Fiorentini, D. (2002): Mapeamento e balanço dos trabalhos do GT-19 (Educação Matemática) no período de 1998 a 2001. *Trabalho apresentado na 25.ª Reunião Anual da ANPED*, Caxambu, MG.

Sacristan, J. E. G. (1991): Consciência e ação sobre a prática como libertação profissional de professores In: Nóvoa, *A profissão professor*. Porto, Porto Editora.

Kerslake, D. (1986): *Fractions*: children's strategies and errors. Londres: NFR-Nelson.

Mack, N.K. (1990): Learning fractions with understanding building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, v.21*, p.16-32.

Mamede, E., Nunes, T. & Bryant, P. (2005): The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. In: Chick, H. L. et al. (Ed.). *Proceedings of the 29th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, PME 29, Melbourne, Australia, July 10-15, 2005. v. 1-4. Melbourne: University of Melbourne, Dep. of Science and Mathematics Education. Part III, p. 281-288.

Meireles, C. (2001): O estudante empírico, in: Secchin, A. C. (org.), *Poesia Completa*. Tomo II. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, p. 1455-56.

Nunes, T. & Bryant, P (1997): *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T., Bryant, P, Pretzlik , U & Hurry, J. (2003): The effect of situations on children's understanding of fractions. Trabalho apresentado no encontro da *British Society for Research on the Learning of Mathematics*. Oxford.

Oliveira, I. & Serrazina, L. (2004): Palestra do dia 3 de agosto: Reflexão e práticas reflexivas. Texto base PUC-SP. In: *A reflexão e o professor como investigador*. Seminário com a professora Doutora Lurdes Serrazina – Escola Superior de Educação de Lisboa. Recuperado em 03 de agosto, 2010, de http//www.pucsp.br/pos/edmat/eventos2.html.

Ponte, J. P. (1992): Concepções dos professores de matemática e processo de formação. In: Tavares, J et al. (ED). *Investigar e formar em educação*. Actas do IV Congresso da SPCE. Porto: SPCE.

Ponte, J. P. (1997): *O conhecimento profissional dos professores de matemática* (Relatório final de Projecto "O saber dos professores: Concepções e práticas"). Lisboa: DEFCUL.

Ponte, J. P. (1998): Da formação ao desenvolvimento profissional. Actas do ProfMat 98. Lisboa: APM. p. 27-44. Recuperado em 20 de janeiro, 2003, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm.

Rodrigues, W. R. (2005): *Números Racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal*. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC-SP Data da Defesa: 19 de dezembro de 2005. Linha de Pesquisa: A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores.

SAEB (2002): *Relatório do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica 2001*. Brasília.

SARESP (2005): Sistema de avaliação do rendimento escolar do Estado de São Paulo – Prova 5.ª Série. São Paulo. Recuperado em 05 de dezembro, 2006, de http://saresp.edunet.sp.gov.br/2005/Arquivos/Provas_EF_2005/5ºsérie%
20EF%20tarde.pd.

Schön, D. (1983): *The reflective practitioner – how professionals think en action*. London: Temple Samith.

Serrazina, L. (1998): *Teacher's professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal*. Tese de doutoramento, Universidade de Londres. Lisboa: APM.

Serrazina, L. (1999): Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em matemática num contexto de reforma curricular no 1.ºciclo. *Quadrante, n. 9*, p. 139-167.

Serrazina, L. (2002): A formação para o ensino da Matemática — perspectivas futuras.Lurdes Serrazina (Org.), A formação para o Ensino da Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1º Ciclo do Ensino Básico. Porto: Porto Editora - Inafop.

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs for the study of teaching. In: Wittrock, M. C. (Ed.). *The handbook of research on teaching*. 3. ed. New York: MacMillan.1986.

Shulman, L. S. (1987): Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*, p. 1-22.

Silva, A. F. G. (2007): O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações.Tese de doutorado em Educação Matemática PUC-SP. Orientadora Tania M. M. Campos.

Tardif, M., Lessard, C. & Lahaye, L. (2002): *Saberes docentes & formação profissional.* Petrópolis: Vozes.

Vergnaud, G (1990) : *La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23), p. 133-170.

Angélica da Fontoura Garcia Silva possui Licenciatura em Matemática e Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2007). Fez estágio de doutoramento Sandwich em 2006, na Escola Superior de Educação de Lisboa, sob a supervisão da professora Maria de Lurdes Serrazina. Atualmente é professora-pesquisadora do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN). **angelicafontoura@gmail.com**

Tânia Maria Mendonça Campos obteve a Licenciatura e o Bacharelado em Matemática pela PUC/SP em 1975 e Doutorado em Matemática pela Universidade de Ciências de Languedoc (Montpellier - FR) em 1979. Tem pós-doc em Matemática pela Universidade de Londres em 1991 e em Educação Matemática na Universidade de Oxford em 2007. Atualmente coordena o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo.
taniammcampos@hotmail.com

Ruy Cesar Pietropaolo é Licenciado em Matemática e em Pedagogia. Possui Doutorado em Educação Matemática. É docente do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, stricto sensu, da Universidade Bandeirante de São Paulo. Coordena projeto financiado pela Capes relativo ao Programa Observatório da Educação. Prêmio CAPES de Teses em 2006: melhor tese de 2005 na área de Ensino de Ciências e de Matemática. **rpietropaolo@gmail.com**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 41-60
ISSN: 1815-0640

Formación del profesorado en el uso de materiales manipulativos para el desarrollo del sentido numérico.

Rafael Bracho López; Alexander Mas Machado;
Noelia Jiménez Fanjul; Teresa García Pérez

Resumen

Presentamos una experiencia de trabajo colaborativo en fase de desarrollo que se centra en el uso didáctico de unos materiales manipulativos concretos diseñados para acompañar a los niños y niñas de Primer Ciclo de Educación Primaria en sus primeras experiencias con los números. Se trata de un vasto proyecto que pone en acción iniciativas para la innovación en el aula, la evaluación en el aprendizaje de los materiales objeto de estudio y la formación inicial y permanente del profesorado, si bien el presente trabajo se centra fundamentalmente en la descripción y el seguimiento de los aspectos relacionados con la formación permanente del profesorado en la primera fase de la experiencia.

Abstract

We present a collaborative work experience under development, focusing on the educational use of specific manipulatives designes to aid children of primary education (grades 1-2) during their first experiences with numbers. This is a large project that triggers initiatives for: classroom innovation; the assessment of the impact of the use of these manipulatives in child learning. Nonetheless this paper focuses mainly on the description of in-service training for teachers as well as in its folow-up, during the project fisrt stage.

Resumo

Nós apresentamos uma experiência de trabalho colaborativo no desenvolvimento que se concentra sobre o uso educacional de um material concreto de manipulação projetado para acompanhar as crianças no primeiro ciclo do ensino básico em suas primeiras experiências com números. Este é um projeto grande que põe em iniciativas de acção para a inovação na sala de aula, materiais didáticos de avaliação em estudo ea formação inicial de professores, embora este trabalho se concentra principalmente na descrição e monitoramento aspectos da formação de professores na primeira fase da experiência.

1. Introducción

Las primeras experiencias de acercamiento de los niños y niñas al mundo de las Matemáticas están muy relacionadas con los números y sin duda estas aproximaciones iniciales pueden resultar determinantes puesto que suelen ir asociadas con aspectos emocionales que pueden motivar una actitud positiva o negativa hacia las Matemáticas, no solo en el contexto escolar, sino también a nivel personal y social, actitud que se se puede mantener a lo largo de la vida.

Por otro lado, la experiencia física desempeña en los primeros años un papel crucial en el desarrollo global y especialmente en el desarrollo lógico-matemático, entendido éste como una construcción personal, activa y reflexiva a partir de las relaciones que el niño establece con los objetos y situaciones que le proporciona su entorno. Esta realidad nos debe llevar en la escuela a una importante implicación metodológica: es fundamental que acompañemos la información verbal y gráfica que proporcionamos a nuestro alumnado con soportes materiales concretos que ellos/as puedan ver, manipular y sobre los que puedan iniciar y desplegar procesos de razonamiento (BOJA, 2007). A modo de ejemplo, trabajar con materiales didácticos manipulativos ayuda al alumnado en la adquisición de capacidades como: habilidad para descomponer números de forma natural, comprender la estructura del sistema de numeración decimal y utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar cálculos mentales y razonados (NCTM, 2003).

Tanto la coordinadora de esta experiencia, maestra de primer ciclo de E. Primaria, como el profesorado del Área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Córdoba y los asesores y asesoras de Educación Primaria del Centro del Profesorado Luisa Revuelta de Córdoba vienen trabajando con materiales manipulativos aplicados a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Es desde este interés compartido y desde el conocimiento mutuo de las experiencias, desde donde partió el planteamiento del proyecto de investigación que nos ucupa, denominado *"Impacto escolar de nuevos materiales didácticos para el desarrollo del sentido numérico en niños y niñas de Primer Ciclo de la Educación Primaria"*, que se centra en el análisis del impacto en la enseñanza y aprendizaje de niños y niñas de de este nivel educativo de unos materiales manipulativos originales e innovadores, ideados y creados por la coordinadora del proyecto, que ya han sido compartidos y validados en numerosas actividades de formación permanente del profesorado de Educación Primaria y que vienen siendo utilizados habitualmente por la autora con sus pequeños alumnos y alumnas con resultados muy satisfactorios.

La mayoría de los trabajos de investigación sobre este tema, están relacionados con el tipo de materiales que pueden ser aplicados a los niños y niñas (Caneo, 1987, citado por Cofré, 2002), pero los que arrojan información sobre los resultados educativos que este tipo de materiales didácticos generan, son aún escasos. Considerando lo anterior, nuestra investigación pretende ser un referente actual a través del estudio descriptivo de una realidad en la cual, un grupo de alumnos y alumnas del ciclo inicial de la Educación Primaria, se ven enfrentados a una metodología de aprendizaje basada en materiales manipulativos y orientada concretamente hacia uno de los aspectos más importantes de las primeras etapas del aprendizaje matemático: el desarrollo del sentido numérico.

Previamente al trabajo de investigación y también paralelamente a este, se han desarrollado acciones de formación inicial y de formación permanente encaminadas a ofrecer al profesorado participante directamente en la experiencia y a los futuros maestros y maestras un amplio abanico de recursos manipulativos y las correspondientes indicaciones metodológicas para su aprovechamiento didáctico en el aula. En este trabajo se presentan algunos resultados de la formación permanente ligados directamente a la experimentación en el aula llevada a cabo en la primera fase de la experiencia.

2. Descripción general de la experiencia

2.1. Fundamentación y marco teórico en los que se sustenta la investigación

En numerosos trabajos realizados (Fernández, Llopis, y Pablo, 1997; Gimeno, 1991; Alsina, 2004) se ha constatado que el considerable porcentaje de fracaso escolar existente en las matemáticas se debe a distintos factores: escasa maduración intelectual, absentismo escolar, uso incorrecto de los materiales didácticos y de los métodos de aprendizaje, limitaciones en la percepción, carencias afectivas, …, motivos que sin duda están relacionados con la gran cantidad de elementos que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas.

Teniendo en cuenta esta diversidad de circunstancias difícilmente podemos pensar en un único modelo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Así mientras que para una parte del profesorado el objetivo del aprendizaje debe ser eminentemente práctico, de modo que lo que se aprende se pueda proyectar de manera inmediata a cuestiones relacionadas con la vida cotidiana de los/as estudiantes, para otros, el objetivo fundamental es enseñar a pensar y fomentar el razonamiento matemático (Parcerisa, 2005).

Nosotros pensamos que los dos planteamientos son válidos y deben convertirse en complementarios en las prácticas docentes de maestros y maestras y, sin duda, la incorporación de materiales didácticos innovadores y motivadores a través de una metodología adecuada, puede ser un vehículo que facilite en buena medida la construcción del pensamiento matemático basada en esta doble perspectiva.

De otra parte los estándares del NCTM (2003) señalan que los estudiantes aprenden Matemáticas a través de las experiencias que les proporcionan sus profesores y profesoras. En consecuencia, su comprensión de los conocimientos, su habilidad para aplicarlos a la resolución de problemas y su confianza para hacerlos está determinada por la enseñanza que reciben en la escuela.

Parcerisa (2005) sugiere que es necesario recurrir a medios específicos para poder iniciar a los niños en nuevas ideas, y diseñar actividades apropiadas para suscitar la curiosidad de los alumnos y alumnas y acercarlos a la realidad.

Estas experiencias relacionadas con los objetos concretos se desarrollan mediante el uso de materiales didácticos manipulativos diseñados para favorecer la adquisición de determinados conceptos que, en especial en los primeros años de aprendizaje, deben tener una presencia fundamental, dado su carácter instrumental en los procesos de contextualización de conceptos y técnicas, y debido a la necesidad que tienen los niños y niñas de contar con referentes. De ahí el interés que creemos que tiene el conocer el impacto del uso de este tipo de materiales en la enseñanza de las Matemáticas escolares.

Alsina (2004) establece algunas características esenciales a observar a la hora de elegir los materiales didácticos manipulativos:

- Valor funcional, relacionado con el tipo de actividad que ofrece al niño (rodar, encajar, …).

- Valor experimental, caracterizado por las adquisiciones que desarrollan (reconocimiento de formas, clasificación de elementos,…).
- Valor de estructuración, relacionado con el desarrollo de la personalidad del niño.
- Valor de relación, caracterizado por las relaciones afectivas que se establecen entre el propio material y el niño/a.

Por otro lado, conviene tener en cuenta algunas consideraciones de tipo práctico recogidas por autores como el propio Alsina (2004) y Bracho (1999 y 2001) entre otros:

- Los materiales educativos empleados en el aula deben satisfacer las necesidades de los alumnos y alumnas.
- Con frecuencia los materiales más sencillos y económicos son los que resultan más educativos y proporcionan mayores satisfacciones a docentes y discentes.
- Los materiales deben invitar a la manipulación y a la experimentación.
- Los materiales didácticos deben adaptarse a la edad mental y al desarrollo intelectual de los/as estudiantes.
- Los materiales didácticos deben elegirse en función de los objetivos didácticos que se persiguen.
- Los materiales didácticos deben cubrir las carencias o déficit de los alumnos y alumnas.
- Las características de los materiales deben responder al uso que en el aula se va a hacer de ellos.
- En la medida de lo posible, el material didáctico debe ser polivalente, es decir, debe servir para distintos objetivos y usos.

2.2. Hipótesis de trabajo y objetivos de la investigación

Nuestro objetivo general es constatar los efectos del uso sistemático de materiales educativos en el desarrollo del sentido numérico en alumnas y alumnos de Primer Ciclo de E. Primaria. Para ello nos proponemos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar y analizar los referentes teóricos relativos al uso de materiales didácticos en el área de matemáticas y, en particular, a la utilización de materiales manipulativos.
- Analizar las distintas metodologías empleadas para el desarrollo del sentido numérico en niños y niñas de Primer Ciclo de E. Primaria, haciendo hincapié en aquellas que utilizan materiales manipulativos.
- Construir, aplicar y validar materiales didácticos manipulativos para la enseñanza de las matemáticas en el Primer Ciclo de E. Primaria.
- Seleccionar, construir y programar actividades centradas en el área de matemáticas utilizando recursos didácticos manipulables. Unas ya existen y son de nuestra autoría pero hasta ahora sólo pueden llegar a un reducido grupo de alumnos/as y profesores/as; otras partirían de cero.

- Proporcionar a los maestros una serie de herramientas didácticas para matemáticas, de carácter especialmente interactivo y recreativo, en las que se potencien determinadas capacidades contenidas en el currículo de la E. Primaria.
- Promover el trabajo en equipo tanto del grupo de profesores que suscriben el presente proyecto como de todos aquellos compañeros y compañeras que estén interesados en la elaboración de material de las características que nos proponemos.
- Dirigir la propuesta de materiales no sólo al profesorado de E. Primaria, sino a los estudiantes de Magisterio de la Universidad de Córdoba de forma que puedan ser incorporados al aula en su futura actividad docente, promoviendo de manera real y efectiva prácticas educativas verdaderamente innovadoras.
- Conocer y evaluar el impacto del uso de materiales didácticos manipulativos en el proceso general de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en la E. Primaria y, particularmente, en la construcción del sentido numérico de los niños y las niñas.

En cuanto a hipótesis de trabajo, nos planteamos la verificación de las siguientes:

H1. El uso sistemático de recursos manipulativos motiva a los niños y niñas de Primer Ciclo de E. Primaria y facilita su razonamiento lógico-matemático y su aprendizaje del sentido numérico.

H2. Existen diferencias significativas de rendimiento matemático en niños de Primer Ciclo de E. Primaria, entre el aprendizaje basado en la utilización de materiales manipulativos y el aprendizaje que prescinde de este tipo de recursos didácticos; concretamente en lo relativo al razonamiento lógico-matemático y al cálculo numérico.

H3. Existen diferencias significativas por género y por centro en el aprovechamiento de los recursos manipulativos para el desarrollo del sentido numérico.

H4. Existe un déficit de material manipulativo en las aulas del Ciclo Inicial de E. Primaria para la enseñanza de las matemáticas.

H5. La incorporación de la metodología basada en el uso de materiales manipulativos a la práctica docente de maestros y maestras de Primer Ciclo de E. Primaria es un proceso natural y satisfactorio para su desarrollo profesional.

2.3. Metodología de la investigación

Nuestra investigación se centra en situaciones concretas, particularizando los resultados de las unidades de estudio y ofreciendo una perspectiva contextualizada a través de técnicas descriptivas e inductivas que nos permiten acercarnos a la realidad.

Se realizan análisis de tipo cuantitativo y cualitativo; si bien éstos últimos se aplican a modo de aproximación metodológica orientada a extraer conclusiones con un enfoque formativo y experimental acerca de las percepciones de los agentes implicados y del desarrollo de la personalidad o de las realidades que se observen. Como consecuencia de ello, en el proceso de recolección de datos se están combinando técnicas de tipo cuantitativo apoyadas por las de tipo cualitativo, conformándose una metodología en la que se integran las dos aproximaciones.

Nuestro diseño se podría considerar heurístico e inductivo, ya que orienta a la comprensión de los casos mientras que también intenta establecer generalizaciones a partir del contexto, estableciéndose conceptos e hipótesis a partir de los resultados.

Por otro lado, se trata de una investigación progresiva, interactiva y abierta, ya que nuestro análisis está sujeto a continuos ajustes a medida que nuestro trabajo va avanzando y en función de los datos que se van obteniendo, incorporando nuevas ideas e incluso reestructurando y adaptando los materiales y las actividades basadas en ellos. En cuanto a la interactividad, los datos cualitativos que emanan de los actores se van contrastando con los datos cuantitativos que se van obteniendo.

Tras el diseño de los materiales y de las actividades y la formación del profesorado, se ha procedido a la aplicación de la metodología y de los recursos didácticos a los niños y niñas que forman parte de los grupos experimentales. En esta primera fase de la experiencia, tanto a los grupos de control como a los experimentales se les ha aplicado a principios del curso una prueba *ad hoc* (pretest) y a final del primer curso se aplicó el test estandarizado para la evaluación de la competencia numérica temprana TEMA 3 (**T**est of **E**arly **M**athematic **A**bility **3**rd. Ed.) (postest). Actualmente se está analizando si existen diferencias significativas entre los grupos de control y los grupos experimentales y si se aprecian diferencias por géneros y por centros. Al final de la segunda fase, que se desarrollará con los mismos grupos, ya en 2º de E. Primaria, se aplicará una prueba final.

Paralelamente se está realizando un seguimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje a través de otros instrumentos, fundamentalmente de naturaleza cualitativa, como cuestionarios y entrevistas etnográficas semiestructuradas aplicadas al profesorado y al alumnado, reflexiones en foros on line y grupos de discusión presenciales con el profesorado, etc.

Se llevará a cabo una revisión documental orientada a la observación del reflejo de la experiencia en las programaciones de la materia, en las unidades didácticas y en la programación de aula.

Se está utilizando un cuaderno de notas de campo para recoger las conductas en su contexto, así como las interacciones entre los individuos, con idea de comprender el comportamiento de éstos en el proceso. En dicho cuaderno se van incluyendo también pruebas fotográficas y vídeos para el registro más completo de la información.

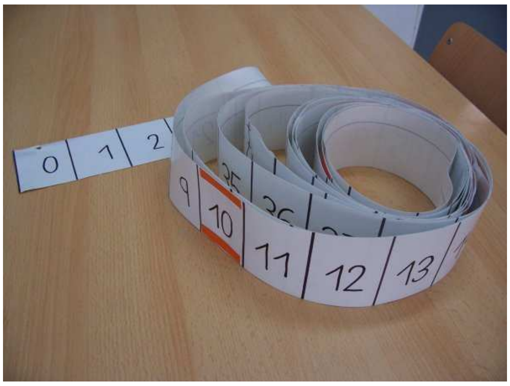
Elección de la muestra:

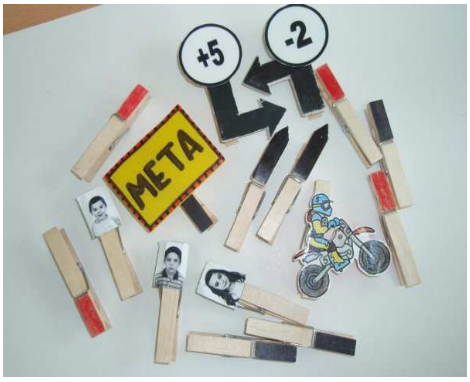
La muestra inicial está formada por el alumnado matriculado en el curso 2010-2011 en 1º de E. Primaria de 19 colegios de la provincia de Córdoba. Los grupos de 17 de ellos están funcionando como grupos experimentales y los grupos de los dos colegios restantes están actuando como grupos de control.

La muestra así configurada puede considerarse de carácter no probabilístico y no aleatoria, puesto que la elección de los grupos de alumnos/as y de sus profesores/as ha sido de tipo voluntario, sujeta a la predisposición de estos/as.

2.4. Descripción de los materiales

2.4.1. Cinta numérica





Este recurso permite apreciar la sucesión natural de números como un conjunto ordenado, continuo y ampliable. Facilita la profundización en las nociones de cantidad y orden iniciadas en la etapa de la E. Infantil.

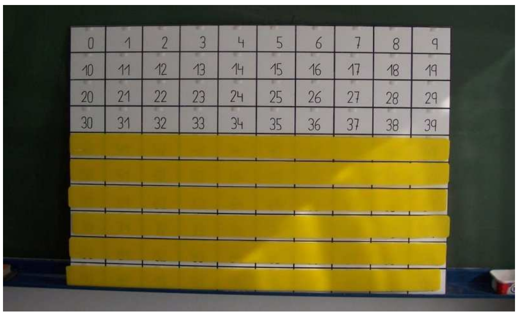
Al colocarlo extendido en el aula se dispone de una referencia espacial constante que resulta de gran ayuda para los escolares que manifiestan dificultades en el reconocimiento y la identificación de símbolos, así como en la posición relativa de cada número con respecto a los demás. También es un excelente soporte para recoger información numérica de sucesos, situaciones o acontecimientos que afecten al aula, o para representar datos referidos a problemas.

Su uso es intensivo a lo largo de todo el primer curso y también durante el primer trimestre de segundo. En cada ocasión, las actividades siempre se plantean primero a todo el grupo, promoviendo la participación, la reflexión y el razonamiento. Después puede servir para iniciar el trabajo que deben continuar los alumnos, y en una tercera fase se convierte en soporte visual para los ejercicios de afianzamiento.

2.4.2. Panel numérico:

Con este panel tenemos una presentación del 0 al 99 por familias, lo que nos permite nuevas posibilidades de análisis y de reflexión. Al igual que el recurso anterior, tiene mucho uso en primero y al comenzar segundo.

Las actividades con el panel se alternan con las que realizamos con la cinta y con otros recursos del aula. Esto proporciona al alumnado una mayor flexibilidad en el razonamiento sobre los números, aspecto directamente relacionado con la calidad de su sentido numérico.



Disponer de este recurso facilita enormemente las actividades que consisten en descubrir regularidades o patrones, describir la relación entre los números que pertenecen a la misma fila o a la misma columna, analizar cómo se relaciona un número con el que tiene a su izquierda, a su derecha, encima y abajo, calcular la diferencia en cada caso, etc.

2.4.3. Caja de numeración:

Este recurso es especialmente adecuado para trabajar la construcción del Sistema de Numeración Decimal con niños y niñas del primer ciclo. Facilita la exploración de los números y les proporciona un modelo concreto y fiel a la realidad visible, que da sentido al uso de los símbolos escritos y a los conceptos relativos al valor posicional.

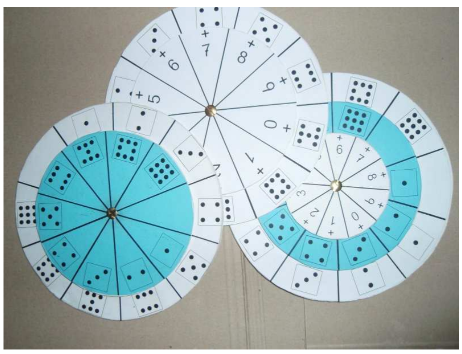
La conexión con otros recursos del aula (cinta numérica, panel, reglas, cintas métricas, bloques multibase, ábaco,...) permite manejar representaciones intercambiables, que trabajan tanto el aspecto cardinal como ordinal del conjunto de los números naturales, y ayuda a desarrollar gradualmente una mayor flexibilidad en el razonamiento.

La experimentación que ya se ha llevado a cabo en años anteriores permite extraer numerosas ventajas que aconsejan la aplicación de este recurso:

- Desarrolla una comprensión sólida de los conceptos de sistema de numeración y de valor posicional.
- Economiza procesos de razonamiento y de ejecución de la tarea.
- Ayuda a evitar errores frecuentes: ceros intermedios, alineación de sumandos, etc.
- Facilita la comprensión del algoritmo de la suma con llevada.
- Ayuda a la adquisición de estrategias para el cálculo mental.

2.4.4. Ruedas de suma

Este recurso proporciona un soporte material que ayuda a la comprensión y a la realización de sumas.



Puede ser útil para todo el alumnado en general, pero está diseñado especialmente para aquellos niños y niñas que desarrollan procesos de pensamiento no adecuados o que tienen problemas para lograr una representación estable de los símbolos numéricos. En estos casos se hace necesaria una intervención educativa eficaz que asegure la comprensión de la operación.

Con las ruedas, los niños disponen de un recurso específico que les dará seguridad y les ayudará a mejorar considerablemente su competencia para el cálculo. También resultan muy interesantes como soporte para actividades grupales en las que podremos experimentar con combinaciones numéricas.

2.4.5. Puntos para contar sumar y multiplicar:

Las actividades concretas y manipulativas con este recurso pueden poner cimientos sólidos en la construcción de operaciones como la suma en primer curso y la multiplicación en segundo. Su uso se extiende a todo el primer ciclo, aunque podría ser muy interesante trabajar con él desde la E. Infantil.

Se aplica en el planteamiento de sumas en horizontal y vertical, en la construcción de las tablas de suma y multiplicación, comprobación de las propiedades conmutativa y asociativa, etc.

Necesita de un franelógrafo al que se adhieren las tarjetas.

3. La formación del profesorado en el uso de los materiales. Percepciones en la primera fase del proyecto

En el proyecto están involucrados 3 maestros y 21 maestras de Primer Ciclo de Educación Primaria (téngase en cuenta la diferencia de género entre el profesorado de este nivele ducativo), 4 asesorías del CEP Luisa revuelta de Córdoba, 5 profesores y profesoras del Área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Córdoba, 2 becarias de investigación, 82 estudiantes de magisterio y más de 200 escolares de 19 colegios de la provincia de Córdoba.

Centrándonos en el profesorado que está utilizando en sus clases los materiales cuyo impacto escolar se analizan, debemos comentar que el 82,5 % de los participantes cuenta con más de 5 años de experiencia profesional, mientras que el 67 % lleva más de 10 años en la docencia, por lo que podemos considerar que se trata de un grupo con bastante experiencia profesional en general (Figura 1).

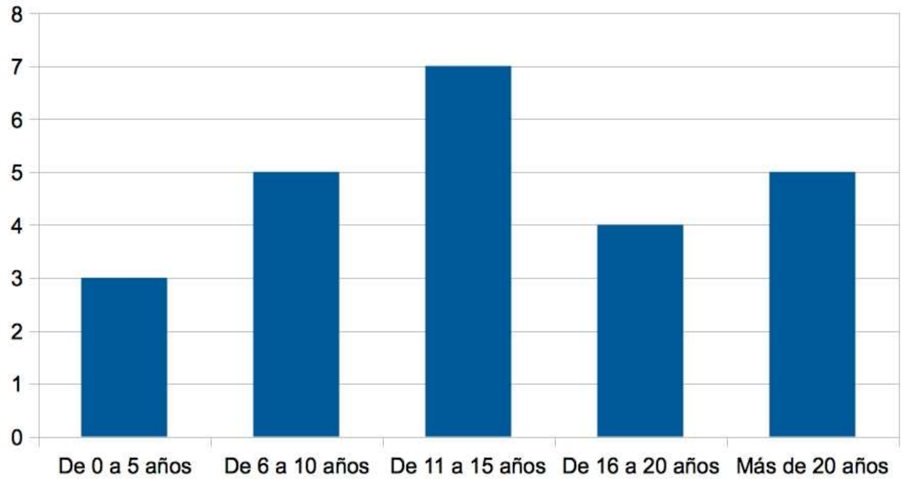


Figura 1: Experiencia docente del profesorado participante

Como ya se ha indicado antes, este proyecto tendrá una duración de dos cursos académicos. En el primer curso, el 2010 – 2011, se ha desarrollado la experiencia con niños y niñas de primero de Primaria y en el 2011 – 2012 se está desarrollando con ese mismo alumnado, ya en el nivel de segundo. El cronograma general del proyecto está resumido en el cuadro siguiente:

Primer año (curso 2010-2011)	
•Diseño y preparación de los materiales	•De mayo a septiembre de 2010
•Contacto con el profesorado de los centros •Formación del profesorado •Pretest •Experimentación de los materiales en las aulas •Formación inicial de los estudiantes de magisterio •Postest •Análisis de los datos •Elaboración de informe parcial	•De octubre de 2010 a junio de 2011
Segundo año (curso 2011-2012)	
•Contacto con el profesorado de los centros •Formación del profesorado •Pretest •Experimentación de los materiales en las aulas •Formación inicial de los estudiantes de magisterio •Postest •Análisis de los datos •Elaboración de informe final	•De octubre de 2011 a junio de 2012

Como puede verse, al comienzo de cada curso se ha desarrollado una fase de formación del profesorado en la que las maestras y maestros se han familiarizado con el uso didáctico de los materiales. Esta formación inicial se ha completado con sesiones complementarias y de seguimiento a lo largo de cada curso orientadas fundamentalmente a consensuar la metodología de uso de los materiales y reflexionar sobre los resultados que se han ido obteniendo en cada momento. Para este fin se ha contado con una plataforma virtual para el trabajo colaborativo donde, además de recogerse toda la documentación y las directrices metodológicas del proyecto, se han puesto en común de manera permanente todas las percepciones del profesorado en torno a la experiencia a través de un foro habilitado para ello. Partiendo de las expectativas recogidas en un cuestionario inicial y contando con las aportaciones realizadas en el foro mencionado y con los comentarios extraídos de sendos grupos de discusión que se celebraron a final del primer curso de la experiencia nos proponemos seguidamente recoger de manera sintética las impresiones del profesorado durante la primera fase de desarrollo del proyecto. En el plano expositivo, se incluyen aportaciones literales del profesorado extraídas del cuestionario inicial, del foro de seguimiento y de los grupos de discusión, que podrán reconocerse por estar enmarcadas en cuadros con fondo de color marrón claro.

3.1. Motivación inicial del profesorado. Expectativas.

En cuanto a la motivación inicial del profesorado respecto al proyecto, la mayoría de los participantes coinciden en su convicción de la importancia de utilizar materiales manipulativos en el Primer Ciclo de la E. Primaria y también hay bastantes profesores y profesoras que comentan que decidieron participar en el proyecto porque se sentían inexpertos en el uso de este tipo de metodologías para el desarrollo del sentido numérico. Algunos comentan que conocían a la coordinadora del proyecto y, en parte, a sus materiales, y estaban ilusionados por incorporar su uso a sus prácticas docentes y, en menor proporción, se han recogido comentarios acerca del interés en participar en un proyecto interinstitucional:

Pa12: Con el proyecto no solo esperaba que mis alumnos aprendieran más y mejor, sino que también buscaba aprender yo a usar nuevas alternativas didácticas y manipulativas para enseñar los números (Grupo de discusión nº 2).

Pa2: Mis expectativas eran muy altas porque ya había tenido oportunidad de conocer un poco los materiales el curso pasado aunque no recibí una formación detallada como la hemos tenido este curso. El caso es que en esta ocasión ya venía decidida a sacarle mucho partido en mis clases y desde luego que se lo estoy sacando (Grupo de discusión nº 1).

Pa15: De mi centro participamos en el proyecto dos profesoras. Yo ya conocía a Teresa y a sus materiales y me parecían muy sugerente y al enterarme de que se iba a desarrollar este proyecto de investigación conjuntamente con otros colegios y contando con la colaboración de la universidad no me lo pensé dos veces porque me pareció una oportunidad estupenda (Grupo de discusión nº 2).

Pa5: (Cuestionario inicial, en respuesta a "¿Qué es lo que le ha motivado a participan en este proyecto?") La importancia de comprender las matemáticas en edades tempranas, me parece un factor primordial para la motivación del alumno en los cursos superiores. De hecho, cuando fui alumna siempre tenía la asignatura atragantada debido a que no me enteraba de lo que me explicaban y me parece que eso podría haber cambiado si las cosas hubiesen sido de otra manera.

Pa17: (Cuestionario inicial, en respuesta a "¿Qué es lo que le ha motivado a participan en este proyecto?") Fundamentalmete decidí participar en el proyecto porque los materiales que se iban a usar me parecían muy motivadores para el alumnado. También me ayudó a tomar esta decisión el hecho de que se tratase de un proyecto de ivestigación asociado a la universidad.

La mayoría de los profesores comentaron que habían utilizado materiales manipulativos anteriormente con cierta frecuencia. Concretamente, el 61,1 % manifestó haber usado alguna vez algunos materiales manipulativos y el 18,5 % había trabajado en alguna ocasión con los materiales del proyecto, si bien este uso había sido en todos los casos asistemático y con escasa planificación…

P3a: Yo conocía el ábaco, las regletas y los bloques multibase, pero los usaba de forma muy puntual y sin apenas referencias metodológicas. Nada que ver con lo que voy a hacer ahora con los materiales que he descubierto (Grupo de discusión nº 1).

P1a: En nuestro cole, como trabajamos con niños y niñas con necesidades educativas especiales (NNEE) sí estábamos acostumbrados a trabajar con materiales manipulativos no solo en Matemáticas sino para todo. No obstante, con estos materiales y con las ideas para su uso que hemos adquirido a lo largo del año podemos trabajar de forma programada el aprendizaje de los números (Grupo de discusión nº 1).

Atendiendo a las expectativas del profesorado ante el proyecto, al pedirles su valoración de 1 a 5 entre una serie de items, se obtuvo que no se esperaba tanto buenos resultados en el rendimiento académico y en la realización correcta de los ejercicios y problemas de Matemáticas, sino más bien una mejora en el buen gusto y la motivación para aprender Matemáticas, y en la comprensión de los conceptos numéricos y su relación con los materiales que se utilicen.

Valore lo que espera que sus alumnos/as consigan al final de este proyecto	Media aritmética
Que resuelvan ejercicios y problemas de Matemáticas	2,54
Que comprendan los conceptos matemáticos	4,3
Que aprueben las evaluaciones de Matemáticas	3,47
Que aprendan de forma más divertida	4,64
Que participen en la clase de Matemáticas	4,76
Que estén motivados para aprender Matemáticas	4,82
Que asocien los contenidos con los materiales	4,28

Tabla 1: Expectativas del profesorado ante el proyecto

3.2. Formación inicial. Seguimiento de la experiencia

Uno de los pilares fundamentales del proyecto se basa sin duda en partir de la experiencia de una persona de reconocido prestigio que constituye un referente profesional para buena parte de la comunidad de profesores y profesoras de E. Primaria de Córdoba, lo que ha marcado el desarrollo de la experiencia desde su diseño hasta su puesta en práctica en las aulas, adquiriendo especial importancia en la fase de formación, que ha sido llevada con especial esmero…

Pa21: Las explicaciones de Teresa en las sesiones han sido muy claritas y se ve que se lo ha currado, pero además lo más significativo es el respaldo de su experiencia en el aula con los materiales (Grupo de discusión nº 2).

Otra clave de la formación inicial del profesorado ha sido el enfoque eminentemente práctico de esta y el cuidado en ofrecer referencias metodológicas verdaderamente eficaces para el aprovechamiento didáctico de los materiales…

Pa9: Lo que más me ha gustado de la formación que hemos tenido es que ha estado directamente e inmediatamente enfocada a la práctica, no como en otros cursos "más teóricos". Cada cosa que hemos ido viendo estábamos en condiciones de aplicarla al día siguiente con los niños y niñas (Grupo de discusión nº 1).

Pa18: Los materiales me han resultado magníficos y yo creo que ya no podré pasar sin ellos en las Matemáticas de 1º, pero desde luego esto es así porque nos habéis mostrado el camino para sacarles partido. Si a mí me dais los materiales sin indicaciones de cómo utilizarlos en la clase no habría podido sacarle el partido que le he sacado (Grupo de discusión nº 2).

No obstante, resulta comprensible que la primera vez que se utilicen los materiales en el aula surjan dudas e inseguridades que se podrán ir solventando con el tiempo cuando esta metodología se haya ido sistematizando …

Po2: Ha sido genial contar con los materiales y con las ideas para sacarle partido en la clase, aunque como es lógico hemos tenido que pagar la inexperiencia inicial, ya que aquí parecía todo muy claro y, sin embargo, al poner las cosas en práctica las primeras veces solían aparecer lagunas (Grupo de discusión nº 2).
Pa12: A mí me han ayudado mucho las indicaciones que nos dio Teresa en la formación, pero todavía tengo la sensación de que me falta un poco de orden. Necesitaría establecer una secuencia más precisa a la hora de introducir los materiales. También necesito temporalizar (Grupo de discusión nº 2).

En cualquier caso, más allá de las propias sesiones planificadas para el inicio del proceso de utilización de los materiales en las aulas que se ha llevado a cabo durante todo el curso, ha resultado de gran utilidad el contacto permanente del profesorado que se ha podido mantener en las propias sesiones presenciales formativas complementarias y, de manera muy especial, a través del espacio habilitado para el proyecto en la plataforma virtual del CEP Luisa Revuelta de Córdoba, que ha sido muy valorada por el profesorado…

Pa1: Contar con la plataforma virtual ha sido todo un lujo. Todas las presentaciones y documentos que se han ido trabajando se han recogido de forma bien estructurada y accesible. Por otro lado, los comentarios de las compañeras en el foro venían genial, porque salían cosas que a mí no se me habrían ocurrido (Grupo de discusión nº 1).

Pa10: Debo reconocer que yo apenas he participado realizando comentarios en el foro de la plataforma, pero sí que me he servido mucho de los que han realizado otros compañeros y compañeras. Es una suerte contar con gente generosa a la hora de contar por escrito sus experiencias (Grupo de discusión nº 1).

Po2: ¿La plataforma se mantendrá igual el curso próximo? Yo creo que sería interesante mantener todos los documentos e incluso los comentarios del foro, ya que nos podrían servir a modo de repaso en el curso próximo (Grupo de discusión nº 2).

A continuación recogemos, a modo de ejemplo, algunos comentarios y reflexiones compartidos en el foro sobre la utilización de uno de los materiales con los que se está experimentando: el franelógrafo de puntos…

Pa17: sábado, 13 de noviembre de 2010, 13:41

He trabajado la descomposición de números en el franelógrafo y me ha ido muy bien con la mayoría, con algunas dificultades con dos niños de necesidades educativas especiales, que se solventaron muy bien formulando las preguntas de otras formas (coge dos números que formen tres, te doy este número y tú buscas el que falta para llegar a cinco, coge dos números cualquiera y cuenta qué número forman entre los dos..)

La semana que viene quiero trabajar la suma y la resta pero no sé muy bien cuál es la dinámica para la resta. Si alguien la ha iniciado ya sería valioso conocer su experiencia. Saludos.

Coordinadora: lunes, 15 de noviembre de 2010, 19:47

Una forma que te sugiero es comenzar con una de las situaciones que ya has trabajado:"...coge dos números cualquiera y cuenta qué número forman entre los dos"....y una vez hallado el cardinal del conjunto le quitamos una parte y vemos lo que queda; volvemos a poner el total y le quitamos la otra parte. Siempre acompañando con expresiones (verbales primero y escritas después) que se ajusten a lo que se está haciendo.

También has estado ya trabajando la resta como búsqueda del complemento de una cantidad para obtener otra cuando planteas: "te doy este número y tú buscas el que falta para llegar a cinco".

A ver si a los demás les están ocurriendo situaciones similares y nos cuentan cómo las resuelven para conocer un mayor repertorio de casos.

Pa12: lunes, 15 de noviembre de 2010, 21:02

Yo les presenté primero los puntos e hicimos varios juegos de reconocimiento (contando los puntos de cada cuadrito e identificándolos con el cardinal correspondiente). Luego les *planteé que los cuadrados solo tienen hasta el 9, ¿qué pasaba si queríamos poner el 10? ¿Podríamos hacerlo? Hubo varios que contestaron que si poníamos el 9 y el 1 teníamos el 10. Así que los pusimos juntos. Entonces construimos varios números con dos cuadrados, contando los puntos, y los iba colocando juntos. Así que les dije que cuando queremos construir un número con otros dos, lo que hacemos es sumar sus puntos, y en el flanelógrafo lo íbamos a representar poniéndolos juntitos.*

También he trabajado la operación inversa, una vez formado un número con dos cuadrados, cogía uno y preguntaba qué número quedaba, luego volvía a ponerlo y volvía a preguntar, después quitaba el otro (tal y como dice Teresa), pero no les dije que restábamos, solo lo hice para que comprendiesen la descomposición de un número en otros dos….

Pa7: viernes, 10 de diciembre de 2010, 19:24

Yo he colocado los números en orden ascendente, en forma de escalera. Han traído cada un@ su foto de carnet y la usamos tipo "Tere Garcia" (es decir, plastificado y con velcro). Ell@s inician una subida ascendente desde el sustraendo hasta el minuendo, y cuentan los saltos que dan. Así se dan cuenta que el número mayor siempre se coloca arriba y como les resulta un juego, abandonan el método de Infantil de usar los dedos para "quitar" al mayor el menor. Es lo mismo que explicó Teresa con la rana y el mosquito pero el hecho de ver su foto les gusta mucho. Lo que me parece fantástica es la cinta numérica, nunca me había resultado tan fácil la sucesión de números, tanto ascendente como descendente, anterior y posterior, series diversas...

Foro

3.3. Algunos comentarios sobre los materiales

Ya que hemos comentado algunos aspectos metodológicos relacionados con los puntos para contar, sumar y multiplicar, continuaremos refiriendo brevemente algunas otras cuestiones metodológicas relacionadas con cada uno de los materiales con los que se está experimentando.

Comencemos por la caja numérica de unidades, decenas y centenas que, en opinión del profesorado, constituye un recurso ideal para asimilar de forma significativa nuestro sistema de numeración decimal. Según el profesorado, vale la pena dedicar algunas sesiones a comprender el significado de la caja como medio de representación numérica para utilizarla después como apoyo en un primer acercamiento a la numeración y el cálculo. Más tarde, de manera natural, los niños y niñas recurren a ella como soporte para la comprensión de diversas situaciones problemáticas o cálculos de cierta complejidad para ellos…

Pa7: Veo clarísima la necesidad de utilizar las cajas en el primer trimestre. Me he convencido totalmente de que con ayuda de ellas los niños comprenden estupendamente el sistema decimal de numeración y eso es esencial para que más tarde les vaya bien en el cálculo y en la resolución de problemas (Grupo de discusión nº 1).

Pa19: Yo veo ideal el planteamiento de la suma con llevada con la caja. Los niños la comprenden perfectamente y una vez que la han entendido es mucho más fácil para ellos entender el algoritmo. Está claro que no se trata de usar la caja para sumar porque tardaría más, pero me parece fundamental para entender el mecanismo (Grupo de discusión nº 2).

En efecto, los niños y niñas no usan las cajas usualmente para realizar cálculos o resolver problemas, sino que recurren a ellas cuando lo necesitan, al igual que los maestros y maestras, quienes desde luego ya tienen claro que volverán a recurrir a ellas en 2º…

Pa20: Además cuando vayamos a explicar las centenas en 2º lo natural será recurrir a la caja numérica. Seguro que les va a encantar encontrarle sentido a "la casita de las centenas" (Grupo de discusión nº 2).

Pa16: Para lo que nos va a venir fenomenal de nuevo la cajita en 2º es para explicar la resta con llevada aunque yo todavía no tengo muy claro el procedimiento que emplearé (Grupo de discusión nº 2).

Por su parte, la cinta numérica constituye un referente ideal para darle sentido a los números que van conociendo y comprender su ordenación, al mismo tiempo que les puede servir para ilustrar situaciones numéricas que aparecen en los problemas que se les plantean…

Pa10: La cinta numérica es genial para que comprendan la relación de orden de una manera global. En ella hemos trabajado estupendamente conceptos como "anterior", "siguiente" y también nos ha servido incluso para resolver problemas directamente. Por ejemplo, yo les planteaba: "Fulanita tiene 7 años y su hermano menganito tiene tres años más. ¿Cuántos años tiene menganito? (Grupo de discusión nº 1).

Pa15: Yo le he visto tanto potencial a la recta numérica que no me he querido resignar a usarla para toda la clase, así que les he pedido a los padres que le compren metros de costurera y cada uno lo tiene en su pupitre y lo saca siempre que lo necesita (Grupo de discusión nº 2).

Pa20: ¡Qué gracia! Pues hemos pensado igual, lo que pasa es que yo he sido un poco más cutre y lo que he hecho ha sido agenciarme un puñado de metros de IKEA, jaja. El caso es que les ha encantado tener su propia cinta numérica (Grupo de discusión nº 2).

Pa4: Tengo un niño que hace las cosas sistemáticamente pero al que le cuesta comprender el sentido numérico. El otro día pasó una anécdota curiosa porque nos contó que su abuela había cumplido 85 años y al ver en la cinta numérica dónde estaba el 6 y dónde estaba el 85 comprendió perfectamente cuánto había vivido ya su abuela (Grupo de discusión nº 1).

Pa12: Yo en los 5 o 10 últimos minutos de la mañana, que ya sabemos cómo son porque todos estamos deseando de irnos, les planteo ejercicios de cálculo mental ya hasta con las mochilas puestas. Inicialmente todos miraban la cinta pero ya apenas la necesitan. Le suelo proponer llegar a una meta y me resulta curioso ver cómo se centran tanto en conseguirlo que incluso suena la música del final de la clase y siguen calculando (Grupo de discusión nº 2).

El panel numérico grande y los individuales complementan en buena parte las referencias de globalidad y orden que les aporta la cinta numérica para afianzar el conocimiento y dominio de las decenas en familias, así como la transición de unas decenas a otras…

Moderador: Parece que la cinta numérica es la predilecta para el cálculo mental, pero ¿qué me decís de los paneles? ¿Los usáis mucho? (Grupo de discusión nº 2).

Pa19: Por supuesto que los uso. El panel tiene la pecularièdad de agrupar los números en familias. A los niños les cuesta asimilar la transición de una decena a otra y el panel les ayuda mucho (Grupo de discusión nº 2).

Pa21: Particularmente ya sabemos lo que les cuesta comprender las notaciones de los primeros números de la 2ª decena. Pues también facilita esa familiarización la cinta y el panel. Y en mi clase usamos muchísimo el panel para trabajar las series (Grupo de discusión nº 2).

Pa14: Otra característica importante de los paneles es que la versión pequeña la tienen muy a mano en el pupitre y pueden recurrir a ella cada vez que lo deseen (Grupo de discusión nº 2).

Respecto a las ruedas de suma, en sintonía con lo que ya adelantaba su creadora, el profesorado coincide en que si bien pueden resultar un soporte excelente para ayudar a comprender la suma a los alumnos y alumnas con más dificultades de aprendizaje, su utilización en niños y niñas que van asimilando los números con normalidad no tiene mucho interés…

Pa15: Yo las ruedas las he usado con un niño que se me quedaba un poco atrás por una timidez tremenda y con una niña rumana que se me incorporó tarde y la llevo un poco colgada, pero la verdad es que para el grueso de la clase no le he visto aplicación (Grupo de discusión nº 2).

Pa7: Las ruedas no me han servido para la mayoría porque me daba la sensación de que se perdían con tantos puntos, etc. Sin embargo, para los alumnos con dificultades en el aprendizaje sí que le ha venido muy bien. Ellos veían por ejemplo el 7 + 5 como el 7 más cinco puntitos y así llegaban al resultado con más facilidad (Grupo de discusión nº 1).

3.4. Sobre el impacto de los materiales en el aprendizaje

En un sentido más amplio, pasamos ahora a comentar algunos aspectos generales observados por el profesorado que están relacionados con la influencia del uso sistemático de los materiales en el aprendizaje de los niños y niñas:

De entrada, parece que la metodología de uso de los materiales impregna la dinámica de trabajo en el aula de un ambiente óptimo para la construcción del aprendizaje matemático…

Asesor de formación: Yo he tenido la oportunidad de ver cómo habéis ido trabajando en distintos coles y en distintas clases y me ha llamado la atención, entre otras muchas cosas, la dinámica de aprendizaje y la comunicación en la clase. Me refiero a que el planteamiento del aprendizaje en torno a los materiales me parece que imprime una frescura y un feedback entre todos extraordinario, mucho mejor que la dinámica de trabajo en torno a actividades digamos tradicionales (Grupo de discusión nº 2).

Por otro lado, más allá de las posibles mejoras en el conocimiento de lo números y de sus propiedades y de las destrezas en el cálculo que se puedan conseguir como consecuencia del uso de los materiales, que están siendo analizadas en un rango más amplio y con ayuda de los test de TEMA3, creemos que ya estamos en condiciones de afirmar que la metodología empleada ha proporcionado una clara componente de motivación en el alumnado que por sí sola justifica su uso, ya que fomenta el buen gusto por el conocimiento matemático desde las primeras experiencias con los números…

Pa2: Yo veo que han trabajado con los números con bastante más motivación que cuando venía trabajando sin ayuda de los materiales. Además para ellos los materiales han sido como juguetes para aprender. Tengo un alumno que me pedía los materiales como premio cuando realiza alguna tarea bien (Grupo de discusión nº 1).

Pa8: Trabajar con materiales ha sido en todo momento un aliciente para el alumnado. Cuando les decía: "Venga sacar los mantelitos de números que vamos a trabajar con *ellos…", ya cambiaban sus caritas y les salía la sonrisa de satisfacción (Grupo de discusión nº 1).*

Pa17: Yo estoy deseando que nos digáis si realmente hay diferencias significativas en el aprendizaje de los niños y las niñas. La verdad es que valorando cómo rinden ahora en Matemáticas tampoco veo que sea como para tirar cohetes, es decir, no sé si han mejorado mucho en cálculo y en el conocimiento de los números, pero de lo que sí estoy segura es de que ha sido mucho más atractivo el aprendizaje y probablemente mucho más significativo (Grupo de discusión nº 2).

Otra de las evidencias que se desprenden de la experiencia compartida de este primer año de desarrollo del proyecto está relacionada con la especial indicación de este tipo de materiales para el aprendizaje de niños y niñas con NNEE y con chicos y chicas que provienen de ambientes sociales y familiares desfavorecidos…

P2a: Mi centro está en una zona de nivel socioeconómico bajo y sin embargo los alumnos de 1º están consiguiendo un buen nivel en Matemáticas. Yo no sé si eso es gracias a los materiales, pero lo que sí sé es que los materiales les motivan mucho a la hora de aprender (Grupo de discusión nº 1).

Pa5: Otro logro importante que he observado con el uso de los materiales es la posibilidad de atender mejor a la diversidad del alumnado y el fomento de la autoestima de los niños y niñas con más dificultades, ya que estos chicos han podido contar con los materiales durante más tiempo para consolidar aspectos de su aprendizaje que sin la ayuda de estos recursos quizá no habrían llegado a asimilar suficientemente produciéndose las famosas "lagunas en Matemáticas" (Grupo de discusión nº 1).

Pa7: Tengo un niño rumano que aparece y desaparece de la clase con mucha frecuencia. Naturalmente estas ausencias dificultan sus progresos en lenguaje oral y escrito. Él por ejemplo no sabe como se nombran los números, pero sin embargo con la ayuda de los materiales se desenvuelve muy bien en el conocimiento de las propiedades de los números y en el cálculo (Grupo de discusión nº 1).

Pa13: Yo tengo un niño con un retraso madurativo importante que nunca habla pero cuando llega la clase de matemáticas deberíais ver como dice los números y responde a las preguntas. Los compañeros como lo conocen le aplauden y no veáis cómo le viene eso a su autoestima. Él sale a la pizarra me pide los marcadores de velcro (Grupo de discusión nº 2).

Pa21: Me pareció muy elocuente el comentario que me hizo un día la maestra de apoyo. Me dijo: "es la primera vez que veo que los niños que me llevo para refuerzo dominen a la perfección las decenas y las unidades" (Grupo de discusión nº 2).

Esta buena disposición del alumnado hacia el uso de los materiales ha llegado a traspasar las fronteras del aula hasta el punto de que algunos padres y madres se han interesado en dar continuidad a la dinámica de trabajo con ellos…

Pa9: Cuando ha salido el tema de los materiales en las tutorías con padres, muchos de ellos se han interesado en conocer la metodología e incluso en disponer de algunos prototipos en casa para que los niños puedan trabajar con ellos, ya que los chicos hablan de los materiales en casa y lo hacen con bastante naturalidad y entusiasmo (Grupo de discusión nº 1).

Pa12: sábado, 20 de noviembre de 2010, 12:15

Casi no mando tareas relacionadas con la descomposición del número para la casa, pero las madres me demandan cómo enseñar a su hijo. La consecuencia ha sido lanzar una propuesta de un taller de matemáticas para las madres. Creo que lo vamos a hacer el jueves a las cuatro de la tarde (Foro).

Pa12 jueves, 25 de noviembre de 2010, 21:03

Bueno, pues ya he tenido la primera sesión del taller de matemáticas con las madres. Sí que están interesadas y continuamos el próximo jueves. Harán la caja y lo más importante, tendremos más o menos el mismo sistema para enseñar mates. Las dudas de las madres se plantearán en el taller al que asistirán los niños para enseñarnos cómo ellos aprenden. Sí que es emocionante (Foro).

En cualquier caso, a las sensaciones positivas se unen algunos interrogantes sobre la metodología empleada que habrá que ir despejando…

Pa7: Los alumnos se sienten mucho más seguros al contar permanentemente con el apoyo de los materiales y, de manera natural, van dejando de echar mano a ellos cuando ya no los van necesitando. (Grupo de discusión nº 1).

Pa4: Sin embargo, un aspecto a tener en cuenta es que gran parte de las actividades que los niños y niñas realizan con la ayuda de materiales no quedan reflejadas en los cuadernos, por lo que algunos padres y madres cuestionan el trabajo que se hace en Matemáticas al no ver muchos ejercicios en el cuaderno, y es que, claro, el cálculo mental y las destrezas en el orden, etc.no se ven en el cuaderno (Grupo de discusión nº 1).

Pa7: Los materiales me han servido, entre otras cosas, para evaluar en qué nivel de interiorización del conocimiento de los números se encontraba cada uno. Con ayuda de ellos podía ver si el niño comprendía la relación de orden, si dominaba la suma y hasta qué punto, etc. (Grupo de discusión nº 1).

Pa19: Yo creo que para trabajar con materiales de este tipo se necesita más tiempo. Sin duda les ayudan a comprender mucho mejor los conceptos pero se tarda más (Grupo de discusión nº 2).

Pa14: Yo no estoy de acuerdo, porque yo nunca he conseguido llegar hasta el 100 en 1º y este año he llegado estupendamente y hasta he trabajado la resta con llevada. Para mí eso ha sido un descubrimiento también (Grupo de discusión nº 2).

3.5. Sobre el impacto de los materiales en la enseñanza

Si ya hemos hablado de la importancia de aprender Matemáticas en un ambiente de motivación, no menos importante es que el profesorado se sienta estimulado con su manera de transmitir el conocimiento matemático, algo que a lo que parece que contribuye el uso de los materiales…

Pa9: Al igual que los alumnos, yo me he sentido mucho más motivada y las clases de Matemáticas a las que antes les temía más se han convertido para mí en algo mucho más divertido y agradecido (Grupo de discusión nº 1).

Otra característica que se repite bastante entre las opiniones del profesorado es la seguridad que proporciona su metodología de aplicación, aunque también existen maestros y maestras que necesitan consolidar su práctica con los nuevos recursos…

Pa2: A mí los materiales me han aportado seguridad al explicar los distintos conceptos, gracias a que no solo hemos contado con ellos, sino que teníamos muchas referencias de cómo utilizarlos en la clase (Grupo de discusión nº 1).

Po1: A veces pienso que los materiales nos proporcionan incluso demasiadas alternativas, ya que son muchas las cosas que hay que aprender y debemos dosificar el tiempo que empleamos para cada cosa (Grupo de discusión nº 1).

Es por ello por lo que, además de proponerse la elaboración de un manual o guía didáctica para el uso de los materiales destinada al profesorado en general, en el 2º curso de andadura de la experiencia se seguirá avanzando en la formación del profesorado en la misma línea…

Pa17: Yo vería muy interesante que tuviéramos varias sesiones de trabajo al principio del curso próximo en las que, entre otras cosas, nos centremos en la temporalización y secuenciación de los contenidos y en el uso de cada uno de los materiales en cada momento y también deberíamos seguir contando con la plataforma para compartir experiencias… (Grupo de discusión nº 2).

4. Conclusiones

En los primeros años del aprendizaje escolar se hace necesaria la utilización de recursos manipulativos para la construcción del conocimiento matemático, un aspecto de la enseñanza para el que buena parte del profesorado de Primer Ciclo de E. Primaria demanda formación.

La investigación-acción colaborativa como metodología de trabajo es un medio ideal que, partiendo de unas necesidades de innovación en el aula, hace posible la unificación de intereses en pro de la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En nuestro caso este trabajo colaborativo ha desarrollado ya en buena parte tres objetivos fundamentales: la innovación en el aula mediante la utilización de unos materiales manipulativos concretos, la formación permanente de los maestros y maestras para la apliacción de dichos recursos, y la formación inicial de futuros maestros y maestras en dicha metodología.

Por otra parte, se está llevando a cabo la evaluación del impacto de dichos recursos en el desarrollo del sentido numérico de los niños y niñas, pero hasta que no concluya la experiencia no se podrán concluir resultados en este sentido. Sin embargo, tras la primera fase de desarrollo de la experiencia estamos en condiciones de afirmar que:

- La utilización sistemática de recursos manipulativos para la construcción del sentido numérico en 1º de E. Primaria facilita la motivación del alumnado propiciando un clima ideal para el aprendizaje de las Matemáticas.
- La utilización sistemática de recursos manipulativos para la construcción del sentido numérico en 1º de E. Primaria facilita la atención a la diversidad en general y se adecua particularmente al aprendizaje de niños y niñas con necesidades educativas especiales.
- La metodología analizada facilita la comprensión del sistema numérico decimal y la resolución de problemas.

En cuanto al impacto de los recursos que se analizan en la experiencia docente del profesorado, de momento, estamos en condiciones de concluir que:

- Resulta relevante tanto la selección de materiales manipulativos para el aprendizaje de los números como el establecimiento de las referencias metodológicas necesarias para que el profesorado pueda implementar en el aula los nuevos procedimientos de enseñanza asociados a estos materiales.
- El uso sistemático de recursos manipulativos para la construcción del sentido numérico en 1º de E. Primaria produce una gran motivación en el profesorado al mismo tiempo que le proporciona seguridad en la transmisión de conocimientos y variedad en la propuesta de actividades al alumnado.

Bibliografía

Alsina, A. (1999). *Desarrollo de competencias básicas en Matemáticas con recursos lúdicos-recreativos para niños y niñas de 6 a 12 años.* Madrid. Narcea.

Boja (2007). Orden de 10 de agosto de 2007 por la que se desarrolla el currículo de la Educación Primaria en Andalucía. Núm. 171, págs, 4-23. Sevilla. Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Bracho, R. (1999). *Actividades recreativas para la clase de Matemáticas*. Córdoba. Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Bracho, R. (2001). *El Gancho Matemático*. Granada. Port Royal.

Caneo, M. (1987). *El juego y la enseñanza de las Matemáticas.* Tesis para obtener un título de professor. Universidad Católica de Temuco.

Cofré, A.; Tapia, L. (2002). *Matemática recreativa en el aula.* Ediciones Universidad Católica de Chile, Chile.

Fernández, M.F.; Llopis, A.M.; Pablo, C. (1991). *Niños con dificultades par alas Matemáticas.* Madrid: CEPE.

Gimeno, J. (1991). *El curriculum: una reflexión sobre la práctica*. Madrid. Ediciones Morata.

Jimeno, M. (2006). *¿Por qué las niñas y niños no aprenden matemáticas?* Barcelona. Octaedro.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada. SAEM THALES y NCTM.

Parcerisa (2005). *Materiales para la docencia universitaria*. Barcelona. Octaedro.

Rafael Bracho López. Profesor de Didactica de las Matemáticas. Facultad de Ciencias de La Educación de la Universidad de Córdoba (España). rbracho@uco.es.

Alexander Mas Machado. Profesor de Didactica de las Matemáticas. Facultad de Ciencias de La Educación de la Universidad de Córdoba (España). ma1mamaa@uco.es.

Noelia Jiménez Fanjul. Profesor de Didactica de las Matemáticas. Facultad de Ciencias de La Educación de la Universidad de Córdoba (España). noelia.jimenez@uco.es .

Teresa García Pérez. Coordibadora del proyecto y maestra de E. Primaria. CEIP Bembézar de Hornachuelos (España). teresagarcia20@gmail.com .

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 61-74
ISSN: 1815-0640

Integrando formação inicial e continuada com professores de matemática: uma experiência com projetos de aprendizagem

Claudia Lisete Oliveira Groenwald; Carmen Teresa Kaiber; Tania Elisa Seibert

Universidade Luterana do Brasil. ULBRA. Canoas/RS, Brasil

Resumo

Este artigo apresenta os resultados da pesquisa envolvendo formação inicial e continuada com professores de Matemática do Ensino Fundamental, alunos de Licenciatura em Matemática e pesquisadores, no município de Canoas/RS. A investigação desenvolveu-se em uma perspectiva qualitativa, nos moldes da pesquisa-ação, com a implementação de um projeto de aprendizagem, tendo como foco as ações e as interações cotidianas do grupo investigado. Resultados apontam que em um processo de discussão, reflexão e avaliação os professores em exercício e os futuros professores sentem-se mais confiantes e motivados no trabalho docente, encorajando-se ao desenvolvimento de ações inovadoras.

Abstract

Este artigo apresenta os resultados da pesquisa envolvendo formação inicial e continuada com professores de Matemática do Ensino Fundamental, alunos de Licenciatura em Matemática e pesquisadores, no município de Canoas/RS. A investigação desenvolveu-se em uma perspectiva qualitativa, nos moldes da pesquisa-ação, com a implementação de um projeto de aprendizagem, tendo como foco as ações e as interações cotidianas do grupo investigado. Resultados apontam que em um processo de discussão, reflexão e avaliação os professores em exercício e os futuros professores sentem-se mais confiantes e motivados no trabalho docente, encorajando-se ao desenvolvimento de ações inovadoras.

Resumen

Este artigo apresenta os resultados da pesquisa envolvendo formação inicial e continuada com professores de Matemática do Ensino Fundamental, alunos de Licenciatura em Matemática e pesquisadores, no município de Canoas/RS. A investigação desenvolveu-se em uma perspectiva qualitativa, nos moldes da pesquisa-ação, com a implementação de um projeto de aprendizagem, tendo como foco as ações e as interações cotidianas do grupo investigado. Resultados apontam que em um processo de discussão, reflexão e avaliação os professores em exercício e os futuros professores sentem-se mais confiantes e motivados no trabalho docente, encorajando-se ao desenvolvimento de ações inovadoras.

Introdução

Azcárate (1997) pondera que grande parte dos professores de Matemática não sabe com clareza o papel da interdisciplinaridade e guardam, ainda, a visão de que trabalham com uma Ciência fechada e acabada, na qual todo o conhecimento já foi inventado e constituído, tratando-se de um conhecimento estável, verdadeiro e acessível a poucos. Em consequência dessa concepção, os alunos percebem a Matemática como um conjunto de algoritmos a serem memorizados, juntamente com uma série de conceitos e definições abstratos e descontextualizados, ficando a ideia de que a Matemática não está presente no mundo real.

Para reverter esse quadro, é importante que os professores de Matemática estabeleçam sentidos e relações entre as disciplinas, analisando as conexões das estruturas conceituais e dos procedimentos matemáticos, relacionando-as com as questões do mundo, favorecendo aos alunos a elaboração de um conhecimento matemático que seja válido para a sua integração, como cidadão, à sociedade atual.

A elaboração de um conhecimento matemático que, além de considerar seu potencial formativo intrínseco, permita conhecer, interpretar e atuar sobre situações da realidade sócio-cultural conduz à necessidade da integração dos temas de relevância social ou temas transversais no ensino da Matemática. Os temas transversais são um conjunto de conteúdos educativos e eixos condutores da atividade escolar que não estão ligados a nenhuma matéria em particular, sendo comuns a todas, com um tratamento transversal no currículo da escola (Yus, 1998). Os temas transversais proporcionam a ponte entre o científico e o cotidiano (Moreno, 1993), aproximando a escola aos temas significativos do mundo atual (Equip Contrapunt, 1994), permitindo aos professores relacionar as diferentes áreas em diferentes etapas e ciclos, bem como apresentar os conteúdos de forma globalizada (Yus, 1998), oferecendo soluções para o conflito existente entre os diferentes conhecimentos que estão em jogo no processo de ensino e aprendizagem, especialmente, entre o conhecimento disciplinar e os problemas sócioambientais (Porlán e Rivero, 1994).

Nessa perspectiva, Azcárate (1997) indica que os grandes núcleos de problemas a serem estudados na Matemática estariam relacionados com: energias alternativas, fontes e escassez de energia, gastos energéticos; crescimento da população-produção de alimentos, relação do homem no mundo e fontes de alimentos; ciclo da água, fonte e consumo de água; divisão de áreas, uso de pesticidas, concentração limite em função das espécies existentes, herbicidas, fertilizantes por metro quadrado e sua porcentagem; qualidade do ar e a atmosfera, o uso racional do planeta; análise do consumo, seus excessos e suas conseqüências; qualidade de vida, características e condições ambientais; saúde, estudos epidemiológicos, fatores hereditários;

Entende-se que a busca por caminhos metodológicos que integrem a realidade com o "fazer matemático", possibilitando uma estreita vinculação entre a estrutura lógico-formal da disciplina e sua utilização para compreender e descrever o mundo, passa por uma formação acadêmica e continuada que fomente, através da reflexão e discussão, a importância dessas questões no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática

Nesse contexto refletir sobre a formação de professores de Matemática implica discutir as características que definem o docente como profissional interessado e capacitado à criação e adaptação de métodos pedagógicos ao seu ambiente de trabalho, utilizando os conhecimentos matemáticos para compreensão do mundo que o cerca e despertando no aluno o hábito do estudo independente e a criatividade.

Este artigo relata uma experiência integrando professores em exercício, alunos do curso de Licenciatura em Matemática e o Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), resultado do trabalho desenvolvido com a formação inicial e continuada de professores de Matemática, referente à formação propriamente dita, como também, das reflexões e discussões realizadas no GECEM, na ULBRA, fundamentadas nas pesquisas realizadas pelo grupo ao longo dos anos. Essa experiência buscou a integração de temas de relevância social, o desenvolvimento de um projeto de aprendizagem e o aprofundamento dos conhecimentos matemáticos, permitindo, dessa forma, integrar diferentes campos da Matemática para resolver problemas, interpretar dados, elaborar modelos, compreender e elaborar argumentações matemáticas, através da elaboração de um projeto com o tema Educação Ambiental.

Formação inicial e continuada

A formação de professores é uma preocupação da área de Ciências e Matemática, sendo que isto se reflete na realização de pesquisas como Porlán (1998), Bicudo (1999), Perrenoud (2000), Demo (2000), Cury (2001), Perrenoud et al (2001), Fiorentini (2003), Nacarato e Paiva (2006), Pinilla (2007), Groenwald, Kaiber e Seibert (2008).

Segundo Meirieu citado por Perrenoud (2000) a prática reflexiva, a profissionalização, o trabalho em equipe e por projetos, a autonomia e responsabilidade crescentes, as pedagogias diferenciadas, a centralização sobre os dispositivos e sobre as situações de aprendizagem, a sensibilidade à relação com o saber e com a lei são novas características do fazer pedagógico. Assim a profissão de professor não é imutável, suas transformações passam, principalmente, pela emergência de novas competências ou pelo fortalecimento de competências já reconhecidas, como a de enfrentar a crescente heterogeneidade dos alunos nas salas de aula.

Atualmente, conforme Perrenoud (2000), o professor precisa desenvolver, tanto na formação inicial quanto na continuada, novas habilidades como: individualizar e diversificar a sua formação; diferenciar as metodologias de ensino; direcionar-se para uma avaliação formativa; desenvolver o trabalho em equipe docente e responsabilizar-se coletivamente pelos alunos; colocar os estudantes no centro da ação pedagógica; recorrer aos métodos ativos, aos procedimentos de projeto, ao trabalho por problemas abertos e por situações-problema; desenvolver, nos alunos, as competências exigidas na sociedade atual e a transferência de conhecimentos para outras área; educar para a cidadania.

De acordo com essa perspectiva, para o autor, são exigidas novas competências para ser professor, que são: organizar e dirigir situações de aprendizagem; administrar a progressão das aprendizagens; conceber e fazer evoluir os dispositivos de diferenciação; envolver os alunos em suas aprendizagens e em seu trabalho; trabalhar em equipe; participar da administração da escola; informar e envolver os pais; utilizar novas tecnologias; enfrentar os deveres e os dilemas éticos da profissão; administrar sua própria formação continuada.

Logo, há necessidade de se refletir sobre esse novo profissional, tornando-se indispensável que se repense a prática docente, discuta-se os desafios da profissão e que se determinem os aspectos emergentes que geram novos problemas e situações inesperadas.

Para Perrenoud (2000) o exercício da competência passa por operações mentais complexas, subentendidas por esquemas de pensamento que permitem determinar e realizar uma ação relativamente adaptada à situação e, estas, se constroem na formação e também, durante o exercício da profissão. As competências não são elas mesmas saberes ou atitudes, mas mobilizam, integram e orquestram os recursos necessários para o desenvolvimento de ações novas e particulares, necessárias no trabalho docente.

Para Pórlan e Rivero (1998) a atividade docente implica em capacidades profissionais, tais como: tomar consciência do sistema próprio de idéias dos processos de ensino e aprendizagem; constatar, por meio do estudo e da reflexão, as concepções e experiências próprias com as dos outros colegas; pôr em prática tais hipóteses (aquelas levantadas pelas equipes de trabalho) e estabelecer procedimentos para um surgimento rigoroso das mesmas; comparar os resultados da experiência com hipóteses de partida e com o modelo didático pessoal, estabelecer conclusões e comunicá-las ao grupo de profissionais; detectar novos problemas ou novos aspectos de velhos problemas.

Demo (2000) considera que o professor necessita saber pesquisar e elaborar seu próprio planejamento, substituindo as aulas expositivas e teóricas pela competência do questionamento reconstrutivo. Tal caráter, segundo o autor, condensa-se na habilidade de saber construir e enfrentar os desafios do conhecimento, porque sabe pensar, aprende a aprender, maneja criativamente lógica, raciocínio, argumentação, dedução e indução, teoria e prática. Sabe buscar materiais, dados e informações, alimenta-se constantemente de novas leituras, teoriza práticas, atualiza-se permanentemente.

Segundo as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática (BRASIL, 2001), os egressos de um curso de Licenciatura devem ter, além de uma sólida formação de conteúdos matemáticos, uma formação pedagógica dirigida a sua prática que possibilite tanto a vivência crítica da realidade como a experimentação de novas propostas que considerem a evolução dos estudos da Educação Matemática e uma formação geral complementar envolvendo outros campos do conhecimento, necessários ao exercício da profissão.

Nesse sentido as Diretrizes Curriculares indicam que os profissionais formados nos cursos de Matemática devem possuir uma visão abrangente do papel social do educador, abertura para aquisição e utilização de novas idéias e tecnologias, visão histórica e crítica da Matemática, capacidade de aprendizagem continuada e de trabalhar em equipes multidisciplinares, capacidade de comunicar-se matematicamente e compreender Matemática, de estabelecer relações com outras áreas do conhecimento, de utilizar os conhecimentos para compreensão do mundo que o cerca, capacidade de criação e adaptação de métodos pedagógicos ao seu ambiente de trabalho, de expressar-se com clareza, precisão e objetividade. Deve, também, ser capaz de despertar o hábito da leitura e do estudo independente e incentivar a criatividade dos seus alunos.

A formação continuada faz parte de um processo permanente de desenvolvimento profissional, que precisa ser assegurado a todos os professores em exercício. Necessita propiciar atualizações, aprofundamento das temáticas educacionais, reflexão sobre a prática educativa, promovendo um processo constante de auto-avaliação que possibilite a construção contínua de competências profissionais.

A formação continuada de professores deve responder tanto às necessidades do sistema de ensino quanto às demandas dos professores em exercício. Assim como a formação inicial deve assegurar o trabalho com conteúdos relacionados aos diferentes âmbitos do conhecimento profissional, de forma a promover continuamente o desenvolvimento de competências que possibilitam uma atuação pautada, não apenas na função docente, mas também na condição de membro de uma equipe responsável pela formulação, implementação e avaliação do projeto educativo de uma escola e o capacite a ser membro de uma categoria profissional.

Nesse contexto a presente investigação desenvolveu ações que articularam a pesquisa, o aprofundamento teórico, a implementação e análise de atividades práticas, como forma de proporcionar um avanço nas questões relacionadas ao desenvolvimento teórico e prático do trabalho do professor, promovendo uma experiência de trabalho conjunto entre professores e futuros professores de Matemática.

Projetos de aprendizagem

A metodologia de projetos ultrapassa o campo específico de uma disciplina e, na opinião de Villela (1998), apresenta-se como alternativa metodológica que permite integrar conteúdos de diferentes disciplinas, que se relacionam naturalmente, na tentativa de solucionar e compreender um problema. Os projetos são propostas pedagógicas, interdisciplinares, compostas de atividades a serem executadas por alunos, sob orientação do professor, destinadas a criar situações de aprendizagem mais dinâmicas e efetivas, através do questionamento e da reflexão. Conforme Martins (2001), os projetos de trabalho contribuem para que os alunos participem e se envolvam em seu próprio processo de aprendizagem e o compartilhem com outros colegas, desenvolvendo novas competências nestes alunos e novas estratégias no professor.

No desenvolvimento de um projeto, é possível estabelecer relações entre a teoria e a prática da aprendizagem (MARTINS, 2001), adotar uma atitude positiva de trabalho e de curiosidade frente ao novo (VILLELA, 1998) e ampliar as perspectivas e os objetivos da educação.

Segundo Seibert (2005) alguns educadores encontram problemas para desenvolver um projeto de trabalho, pois não conseguem visualizar no seu desenvolvimento uma forma de trabalhar com conteúdos específicos de sua disciplina. Entretanto, afirma que os projetos de trabalho podem ser utilizados para explorar conceitos e conteúdos específicos, além de criar espaços de reflexão.

A implementação da metodologia de projetos, no cotidiano escolar, permite que a escola, na opinião de Araújo (2003), ultrapasse a simples coleta de informações, abrindo espaço para a análise da sua validade, aprimorando a habilidade de crítica e interpretação, interferindo na formação de valores do educando, pois cria um ambiente favorável a discussão, reflexão e crítica, permitindo que o aluno chegue à ação, podendo através da reflexão modificar uma situação.

Nos trabalhos de Hernández (1998), os projetos são procedimentos que dizem respeito ao processo de dar forma a uma idéia que está no horizonte, que favorecem o ensino por compreensão, a subjetividade, a contextualização, o trabalho ativo por parte do aluno e a atitude de pesquisa. Assim, torna-se possível a aquisição de estratégias de conhecimento que permitem avançar, sendo que os alunos interpretam os dados e apresentam argumentos a favor ou contra o tema pesquisado.

Porém, para trabalhar com projetos, é necessário que se planejem e elaborem diferentes etapas, interligadas e que levem a um determinado fim. Segundo Frey, citado por Mora (2004), algumas etapas devem ser necessariamente seguidas: definição do tema, discussão e aprofundamento do tema escolhido, elaboração de um cronograma de ações, desenvolvimento do projeto, apresentação dos resultados à comunidade.

Para finalizar, destaca-se a importância da apresentação dos resultados à comunidade escolar, momento que permite a reflexão e outra oportunidade aos participantes de discutirem, novamente, todas as fases de desenvolvimento do projeto, com a finalidade de avaliação. Nessa etapa, segundo Groenwald e Seibert (2006), os participantes discutem ampla e abertamente tudo o que aconteceu no desenvolvimento do projeto e mediante a crítica e a autocrítica, os alunos e os professores expõem seus pontos de vista sobre detalhes que influenciaram de maneira determinante o processo e o resultado final.

Objetivos

Esta pesquisa teve como objetivo central desenvolver ações em educação inicial e continuada articulando a pesquisa, o aprofundamento teórico, a reflexão sobre atividades práticas e análise das atividades na sala de aula, como forma de proporcionar um avanço na investigação das questões relacionadas ao desenvolvimento teórico e prático do trabalho do professor, promovendo sua formação, tanto inicial, quanto continuada.

Para atingir esse objetivo geral traçaram-se os seguintes objetivos específicos: investigar o desenvolvimento das competências necessárias à prática profissional do professor de Matemática e os desafios inerentes a sua profissão, tanto em professores em formação como em exercício; implementar uma experiência integrando a formação inicial com a formação continuada em uma escola da rede pública estadual de Canoas e alunos do Curso de Matemática Licenciatura.

Metodologia da pesquisa

A proposta do trabalho foi a de investigar a prática profissional em Matemática e os desafios inerentes a essa prática, visando o desenvolvimento de uma experiência integrando a formação inicial e continuada.

A pesquisa proposta foi realizada nos moldes de uma pesquisa-ação participativa. Segundo Lewin citado por Mora (2004), um dos criadores desse tipo de investigação, a pesquisa-ação representa o método mais apropriado para conhecer, interpretar e transformar os fatos reais e com ele elaborar construtos teóricos que podem explicar, aproximadamente, outros problemas similares em contextos com características semelhantes, ainda que este não se constitua no propósito principal da investigação–ação participativa.

Essa investigação está constituída por quatro momentos fundamentais: planejamento, ação, observação e reflexão sobre os resultados da ação.

As discussões foram realizadas em três etapas diferenciadas e contínuas, durante os 9 meses de desenvolvimento da pesquisa: Grupo A (meta discussão no grupo de pesquisa GECEM), grupo B (discussão participativa com o grupo de alunos de formação inicial), grupo C (grupo de formação continuada e de implementação do projeto), conforme figura 1.

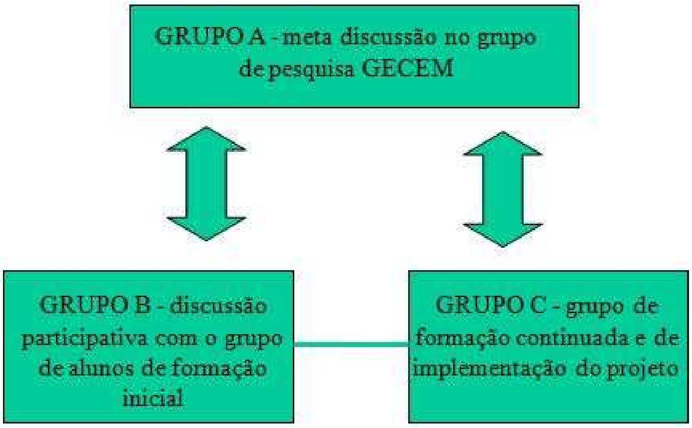


Figura 1: Etapas de discussão e reflexão da pesquisa-ação

A investigação foi desenvolvida por meio de três ações paralelas que estão descritas a seguir:

1) Encontros mensais entre professores e pesquisadores (grupo C): a implementação da experiência foi aplicada na Escola Estadual Álvaro Moreyra, pois essa demonstrou, através da sua direção e supervisão pedagógica, interesse em aprofundar os momentos de reflexão pedagógica com seus professores. Participaram desse trabalho todos os professores unidocentes[i] das séries iniciais do Ensino Fundamental e os professores de Matemática das séries finais do Ensino Fundamental, totalizando 10 professores dessa escola. Os encontros, de 4 horas aula, ocorreram entre os meses de março a novembro de 2007, e foram marcados como espaço de discussão e reflexão sobre as ações desenvolvidas em sala de aula, o planejamento conjunto de ações futuras que nortearam a aplicação de um projeto de trabalho, com ênfase no tema Educação Ambiental e nos conteúdos matemáticos relacionados ao desenvolvimento do mesmo. Optou-se, conjuntamente, em desenvolver esse projeto de trabalho em todas as turmas da escola, e que culminaria na apresentação dos resultados em uma feira nessa escola, com exposição dos trabalhos para a comunidade.

2) Reuniões entre os alunos da licenciatura e as pesquisadoras (grupo B): foram realizadas reuniões semanais com os alunos do curso de Matemática, no total de 12 participantes e o GECEM. Nesses encontros acontecia o planejamento das aulas a serem desenvolvidas com os alunos da escola pesquisada, as discussões sobre as suas experiências em sala de aula, a reflexão sobre as ações desenvolvidas e planejamento das ações futuras. Ressalta-se que as aulas ministradas, pelos alunos de Licenciatura, aconteciam mensalmente, durante as reuniões do GECEM com os professores da escola pesquisada.

3) Reuniões entre as pesquisadoras (grupo A): o GECEM reunia-se quinzenalmente para discussão, reflexão e planejamento das futuras ações, constituindo-se na meta discussão do processo.

Análise dos resultados

As reuniões ocorridas, paralelamente, envolvendo os professores da escola Álvaro Moreyra e o GECEM, os alunos do curso de Licenciatura de Matemática da ULBRA e o GECEM foram marcados por momentos de reflexão sobre o planejamento, a prática docente e o trabalho com os alunos em sala de aula.

Todas as ações executadas foram planejadas antecipadamente, colocadas em ação e avaliadas conjuntamente. A partir dessa troca de experiências e dos resultados obtidos ao longo do processo as novas ações eram planejadas e executadas, num constante avaliar e replanejar.

Na análise dos resultados dessa pesquisa salientam-se alguns aspectos, considerados relevantes por todos os envolvidos.

Destacam-se, tanto nos professores de formação continuada quanto nos de formação inicial, a evolução das habilidades que levam as competências de: organizar e dirigir situações de aprendizagem, administrar a progressão da aprendizagem, envolver os alunos em suas aprendizagens e em seu trabalho, trabalhar em equipe, informar e envolver os pais e administrar a própria formação. Para Perrenoud (2000) competência é a faculdade de mobilizar um conjunto de recursos cognitivos (saberes, capacidades, informações, etc.) para solucionar uma série de situações.

As reuniões entre as professoras pesquisadoras se caracterizaram como um espaço de reflexão sobre os desafios comuns para alunos e professores, na busca de integração e do objetivo comum de promover aprendizagens mais significativas para os alunos, envolvendo-os ativamente e respondendo questões sobre a utilização de conceitos matemáticos em sua vida futura. O projeto de trabalho permitiu que professores e alunos se tornassem parceiros na busca de soluções e os alunos utilizassem os conceitos de diferentes áreas do conhecimento na resolução dos problemas que encontraram no desenvolvimento de suas pesquisas.

Em relação à formação inicial destaca-se o envolvimento dos participantes no planejamento dos recursos e atividades didáticas para aplicação em sala de aula. Os alunos se depararam com uma realidade por eles desconhecida, o dia a dia de uma sala de aula, e encontraram dificuldades em executar o planejamento, principalmente, pela falta do domínio de classe no que se refere à disciplina.

As reuniões de avaliação, sobre as suas experiências em sala, foram pautadas em discussões sobre essas dificuldades e na busca de soluções. Em conjunto foi decidido o agrupamento dos alunos em grupos de trabalhos, distribuídos através de senhas, envolvendo desafios matemáticos, o estabelecimento de normas de convivência e a organização e limpeza do espaço físico. Essas medidas se mostraram eficientes, com o passar dos meses, e foram incorporadas pelos alunos e professores da escola.

Em relação à formação continuada, inicialmente, os professores da escola demonstraram insegurança em relação ao desafio de desenvolver um planejamento mais aberto. Durante o desenvolvimento de um projeto de trabalho não é possível antecipar os acontecimentos e prever todas as ações que serão desenvolvidas na sua realização. Outra preocupação dos professores foi referente aos conteúdos matemáticos, pois temiam não encontrar formas de explorá-los dentro do tema escolhido pelos alunos.

Para buscar alternativas de trabalho foi traçado um cronograma com metas específicas como período de motivação dos alunos frente ao tema do projeto, coleta de material de pesquisa, levantamento de dados, entre outros, salientando que as ações, para colocar em prática as metas de cada professor, podem ser traçadas a longo prazo, desde que exista flexibilidade frente às situações imprevisíveis, levando a um planejamento dinâmico e flexível, pautado sobre os conhecimentos adquiridos e nos novos problemas que surgem no decorrer do desenvolvimento dos trabalhos.

O grupo de professores à medida que o projeto ia tomando forma, demonstrou maior segurança, principalmente sobre como inserir os conteúdos matemáticos nos trabalhos e foram posicionando-se frente a essa forma de planejamento, demonstrando grande comprometimento com a proposta.

Embora a preocupação central da pesquisa esteja na análise das ações durante todo o processo, ressalta-se, também, como resultado o produto final do projeto: a feira, intitulada “Matemática Viva na escola Álvaro Moreyra – I Feira de Matemática”. Nesse momento, todas as turmas da escola, junto com seus professores, mostraram à comunidade escolar os resultados dos trabalhos (figura 2). Os professores da escola confeccionaram camisetas para o dia do evento, e presentearam o grupo envolvido. Esse fato foi uma manifestação de motivação e demonstrou a alegria dos professores pelo desenvolvimento do trabalho e dos resultados obtidos.

Figura 2: Feira de apresentação dos trabalhos

O tema central escolhido, para o desenvolvimento do projeto, foi Educação Ambiental, e os subtemas foram: aquecimento global, preservação de espécies animais, tratamento da água, reciclagem de lixo, desperdício de água, combustível e meio ambiente. Todas as turmas destacaram, na feira, os conteúdos matemáticos envolvidos em seus trabalhos. No encontro de avaliação entre todos os participantes envolvidos foi realizada uma análise dos conceitos matemáticos e estatísticos mais presentes nos trabalhos, evidenciando:

a) Resolução de problemas: todos os grupos inseriram em seus trabalhos problemas com base nos seus dados de pesquisa, como o exemplo da figura 3. Ressalta-se que foi colocado como meta no desenvolvimento do projeto a organização, pelo professor, de problemas envolvendo os dados pesquisados pelos alunos. No decorrer dos trabalhos os alunos também foram incentivados a construírem problemas, buscando, assim, o desenvolvimento das habilidades de criar, prever, conjecturar, conforme exemplo na figura 3

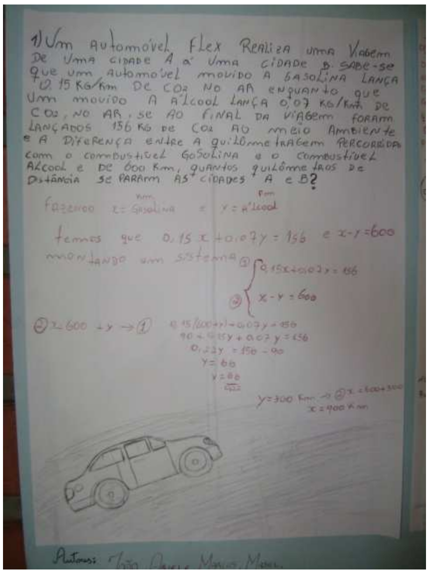


Figura 3: Combustível e meio ambiente

b) Tabulação de dados: todas as séries envolvidas no projeto aplicaram questionários, na comunidade, sobre diferentes temas e tabularam os dados coletados, envolvendo cálculos de razão, proporção, regra de três e porcentagem (figura 4).

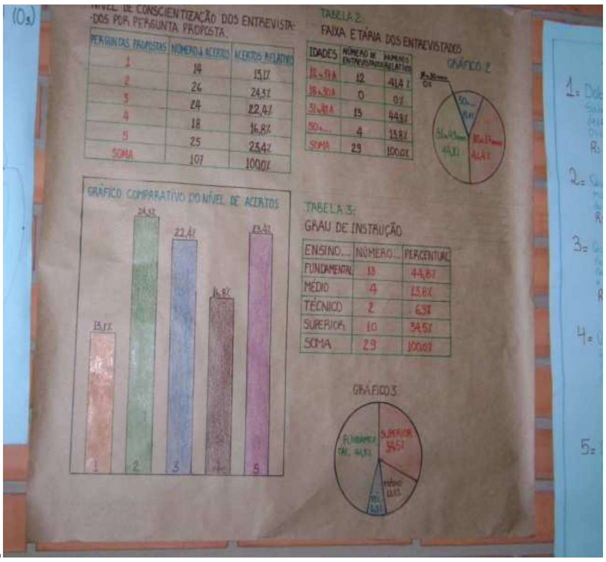


Figura 4: Conscientização em relação a problemas do meio ambiente

c) Confecção de Gráficos: desde as séries iniciais até as séries finais do Ensino Fundamental, os grupos optaram por utilizar gráficos para demonstrar os resultados de suas pesquisas (figura 5).

Figura 5: Preservação de espécies animais

d) Noções de Estatística, onde foram determinados a média aritmética, moda e mediana: as turmas de 7ª e 8ª séries, calcularam e interpretaram resultados encontrados em suas pesquisas (figura 6).

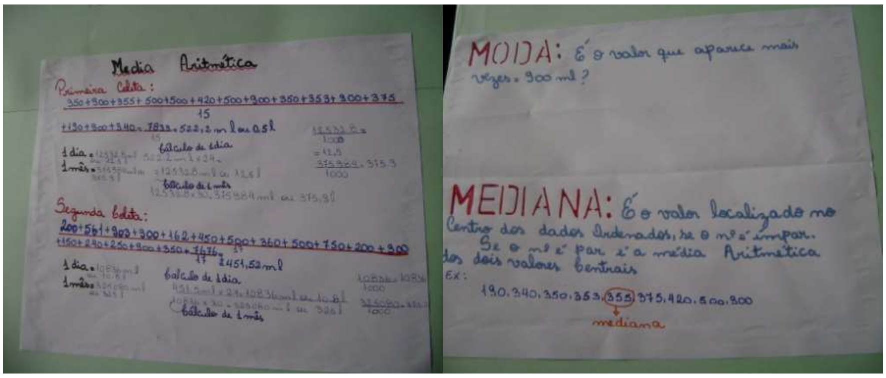


Figura 6: Conteúdos estatísticos desenvolvidos no projeto

e) Atividades Lúdicas: alguns grupos construíram jogos envolvendo o tema da sua pesquisa e a Matemática (figura 7).

Figura 7: Jogos

f) Sistema de unidade de medidas: em diferentes situações de contextualização de problemas os grupos utilizaram conversão de medidas para resolver questões levantadas em suas pesquisas (figura 8).

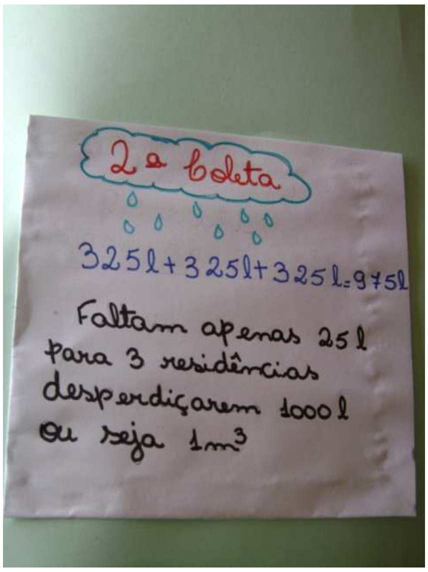


Figura 8: Desperdício de água

Destacam-se, também, a oficina de dobraduras ministradas por uma professora e mãe de um aluno da escola para os participantes da feira, as maquetes utilizadas em diversos grupos para representar o problema pesquisado e o envolvimento da comunidade escolar expresso pelo número elevado de visitantes à feira.

A análise dos resultados aponta que a formação continuada efetivada no ambiente escolar apresentou um grande comprometimento no grupo e viabilizou resultados em curto prazo. Entende-se que a formação continuada é fundamental para a qualificação do processo educativo e quando realizada no próprio ambiente escolar alcança resultados mais efetivos e permanentes.

Bibliografía

Araújo, U. 2003). Temas transversais e a estratégia de projetos. São Paulo: Moderna.

Azcáraded, P. G. (1997). Que matemáticas necesitamos para comprender el mundo actual? *Investigación en la Escuela*. Sevilha, n.32, p. 77-85.

Bicudo, M. A. V. (1999). Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP.

Brasil. (2001). Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática Bacharelado e Licenciatura. Parecer CNE/CES 1302. MEC.

Cury, H. N. (org). (2001). Formação de professores de Matemática: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS.

Demo, P. (2000) *Educar pela Pesquisa*. Campinas, SP: Autores Associados, 4ª edição.

Fiorentini, D. (2003). *Formação de professores de Matemática*. São Paulo: Mercado de Letras.

Groenwald, Claudia Lisete Oliveira; KAIBER, Carmen. Educação matemática na formação dos professores. *Educação Matemática em Revista - RS*, Rio Grande, n. 4, p. 64-6, 2002.

Groenwald, C. L. O.; Seibert, T. E. (2006). Matemática e Educação Ambiental: uma proposta com projetos de trabalho no Ensino Fundamental. *Educação Matemática em Revista - RS*, Canoas, n. 7, p. 23-32.

Groenwald, C. L. O.; Kaiber, C.; Seibert, T. E. (2008). Formação em Matemática: uma experiência integrando formação inicial e continuada. Anais do 2º SIPEMAT, Recife.

Hernándes, F. (1998).Transgressão e mudança na educação: os projetos de trabalho. Porto Alegre: Artmed.

Martins, J. S. (2001). O trabalho com projetos de pesquisa: do ensino fundamental ao médio. Campinas, SP: Papirus.

Mora, D. (2004). Aprendizage y enseñanza: projectos y estratégias para uma educación matemática del futuro. La Paz: Campo Iris.

Nacarato, A., Paiva, M. A. (2003). A formação do professor que ensina matemática – perspectivas e pesquisa. São Paulo: Mercado das Letras.

Perrenoud, P. (2000). *10 novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed.

Perrenoud, P.et.al. (2001). *Formando professores profissionais*. Porto Alegre: Artmed.

Pinilla, M. I. F. (2006). *Currículo, evaluación e formación docente en matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Porlán, R.; Rivero, A. (1998) *El conocimiento de los profesores*. Sevilla: Díada.

Seibert, T. E. (2005). *Matemática e Educação Ambiental: uma proposta com projetos de trabalho no ensino fundamenta*l. Canoas: ULBRA. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Luterana do Brasil.

[i] Professor Unidocente significa que um professor atua em todas as disciplinas curriculares na classe de alunos.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 75-83
ISSN: 1815-0640

Ñandutí, curso on line de formación permanente de profesores de matemáticas de nivel secundario

http://www.oei.es/cursomatematica/

Luis Balbuena Castellano y Agustín Carrillo de Albornoz Torres, coordinadores

Resumen

Se trata de un curso que tiene una duración de un año que promueve, organiza y ofrece la OEI (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura) www.oei.es/index.php
Durante el año 2010, se desarrolló el curso experimentalmente en Paraguay gracias a la participación del Ministerio de Educación de esa República que ha aceptó la oferta de la OEI. Ya lo ha culminado, por tanto, una primera promoción con unos resultados positivos. El sistema on line utilizado ha funcionado y respondido a las expectativas suscitadas. En 2011 está formándose una segunda promoción en este mismo país y se han empezado a constituir grupos de profesores de otros países. En todos los casos, los participantes son tutelados de manera personal.

Abstract

This is a course that lasts for a year promotes, organizes and provides the OEI (Organization of Iberoamerican States for Education, Science and Culture) www.oei.es/index.php
During 2010, the course was developed experimentally in Paraguay thanks to theparticipation of the Ministry of Education of the Republic has accepted the offer of the IEO. It has already completed, thus a first class with positive results. The online system used has worked and responded to the expectations created. In 2011 is forming a second class in this country and have begun to form groups of teachers fromabroad. In all cases, participants are personally supervised

Resumo

Trata-se de um curso que tem uma duração de um ano que promove, organiza e oferece a OEI (Organização de Estados Iberoamericanos para a Educação, a Ciência e a Cultura) www.oei.es/index.php
Durante o ano 2010, desenvolveu-se o curso experimentalmente em Paraguai graças à participação do Ministério de Educação dessa República que tem aceitou a oferta da OEI. Já o culminou, por tanto, uma primeira promoção com uns resultados positivos. O sistema on line utilizado funcionou e respondido às expectativas suscitadas. Em 2011 está a se formar uma segunda promoção neste mesmo país e começaram-se a constituir grupos de professores de outros países. Em todos os casos, os participantes são tutelados de maneira pessoal.

Índice

4. Desarrollo
5. Contenidos
6. Profesorado participante
7. Requisitos previos
8. Tutores. Curso de formación
9. Certificación
10. Procedimiento de inscripción
11. Coste

1. Introducción

La evolución del conocimiento y de las técnicas que ayudan a enseñar y a aprender, hacen que la formación permanente sea imprescindible si queremos tener un profesorado y una enseñanza de calidad. Además, estos dos elementos son de los necesarios para conseguir que la sociedad avance en su desarrollo científico, tecnológico y en la conquista de su estado de bienestar al que se debe aspirar como objetivo colectivo. En esa línea, la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) desea colaborar con todos los estados de la región ofreciendo un curso on line para la formación permanente del profesorado de matemáticas de Enseñanza Secundaria cuyas características y temporalización se detallan a continuación.

Por otra parte, las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) han experimentado tal desarrollo en estos últimos tiempos, que obligan a las instituciones educativas a hacer un esfuerzo para que el profesorado pueda acceder a ellas y aprovechar todo lo que de positivo tienen a la hora de enseñar y de aprender Matemáticas. El profesorado en ejercicio debe ser consciente de la importancia que tienen estos recursos en la Educación para adquirir, cuanto antes, la formación necesaria con la que dar respuesta profesional al reto diario de enseñar. En tal sentido es importante destacar que *no es necesario que el participante posea una formación previa en el manejo de los medios informáticos* porque, precisamente, uno de los objetivos del curso es proporcionarles los conocimientos para que puedan apreciar la potencia de esos recursos y cómo se utilizan en el aula.

La OEI estima, además, que es el momento de aprovechar este recurso para intentar hacer lo que, hasta hace pocos años, sería impensable no solo por el elevado coste, sino por las complicaciones logísticas que supondría la organización. Nos referimos a emprender este Plan masivo para la formación permanente del profesorado para el que se espera poder contar con el deseo de formación y con el aporte personal de cada uno de los participantes.

El Plan es una oferta que hace la OEI a todos los estados pertenecientes a la organización con el fin de colaborar en los programas de cualificación profesional que tiene cada uno de ellos. Para dar forma a esa colaboración, con cada país se entablarán conversaciones con los responsables educativos para hacerles llegar las claves del proyecto y concretar, en cada caso, los convenios que permitan su desarrollo adaptándolo a las circunstancias especiales de cada uno.

2. Organización

El curso lo convoca la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) a través de su Centro de Altos Estudios Universitarios (CAEU) con la participación de aquellos países Iberoamericanos que decidan incorporarse al proyecto. Éste se enmarca en la colaboración que la OEI y la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo, (AECID), desarrollan con el fin de apoyar la construcción del Espacio Iberoamericano del Conocimiento a través del fomento de vocaciones hacia la ciencia.

En estas dos ediciones experimentales, se ha contado con la decidida colaboración del Ministerio de Educación de Paraguay y de la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía (España). También ha sido fundamental el trabajo que han desarrollado las personas asignadas en la oficina de la OEI en Paraguay relacionado, especialmente, con los aspectos logísticos.

El organismo convocante cuenta, además, con el apoyo de la de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FISEM) y de las Sociedades Canaria de Profesores de Matemáticas “Isaac Newton” y Andaluza de Educación Matemática “Thales”.

La difusión del proyecto se ha realizado por medio de la Web de la OEI y de la del Ministerio de Educación de Paraguay que, además, ha establecido unos protocolos de actuación con aquellos profesores y profesoras que se han comprometido a realizar el curso. Finalmente, se dispone de un equipo de personas que hacen el seguimiento del curso desde Asunción.

El equipo de Paraguay con *Luis Balbuena*. De derecha a izquierda: *Eva Fleitas* - Coordinadora de la Dirección de Cooperación Técnica OEI-Paraguay, *Gladys Zarate*, Seguimiento y Monitoreo Cursos Ñanduti - OEI, Paraguay, *Norma Aveiro y Otilia Ocampos* - Dirección de Apoyo Pedagógico del MEC (Ministerio de Educación) y seguimiento y Monitoreo a Curso Ñanduti por el MEC, *María Cristina Costa*, Especialista TIC en Educación - OEI, Paraguay.

3. Objetivos

Los objetivos de este curso de formación online son:

- Ofrecer actividades de formación al profesorado de matemáticas de Educación Secundaria para mejorar sus competencias científicas, técnicas y didácticas.
- Ofrecer un espacio común para la formación permanente del profesorado aprovechando las ventajas que ofrece la formación online.
- Fomentar el uso de las TIC por parte del profesorado de matemáticas. En tal sentido, a quienes participen se les proporcionarán los conocimientos necesarios para que los manejen con soltura, aprecien su potencia educativa y los utilicen como recurso didáctico, bien en la preparación de sus clases bien en la propia aula, cuando se dan las condiciones.
- Favorecer la incorporación de las TIC como recursos didácticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Mostrar nuevos materiales y recursos didácticos al profesorado para su utilización en el aula y su perfeccionamiento profesional.
- Proporcionar materiales e ideas para la dinamización matemática de los centros educativos y procurar así un acercamiento de los estudiantes a la asignatura por vías distintas del las habituales del aula y fomentando, además, el desarrollo de capacidades que le faciliten el estudio y el aprendizaje de las matemáticas.
- Establecer espacios para compartir experiencias y materiales elaborados por el profesorado.
- Crear un potente Centro de Recursos online que pueda ser visitado por cualquier docente y bajar cuantos documentos le interesen a *coste cero*.

4. Desarrollo

El curso dura un año.

Las actividades de formación están pensadas para ser realizadas online, contemplándose, no obstante, la posibilidad de realizar convocatorias de sesiones presenciales cuando las circunstancias lo permitan.

Todo el trabajo se desarrolla a través de la plataforma de formación a distancia del Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI que es atendido por personal especializado.

Cada edición del curso tiene asignado el número suficiente de tutores para garantizar que los participantes dispongan de la atención personalizada necesaria y adecuada. Más adelante se expone el perfil del tutor y sus funciones.

Un día de la semana que se fija en cada caso, se colocan en la plataforma documentos del curso en número que variará de unas semanas a otras. Los documentos se mantienen en la plataforma todo el tiempo que dure el curso y pueden ser consultados y bajados en cualquier momento.

Cada día primero de mes se pasa a la plataforma un tema, llamado "tema del mes", para la reflexión y debate que es elaborado por un experto; los participantes han de responder a las cuestiones que plantea el ponente en el documento que se mantiene abierto hasta el día 15.

Se van proponiendo, también, tareas que han de ser resueltas en los plazos que se indiquen en cada caso y que son controladas por los tutores.

De derecha a izquierda: *Rocío Elizabeth Gauto Zarate*, Profesora Elemental de Danza Paraguaya; *Luis Balbuena Castellano*, coordinador del curso, *Alcira Sosa*, directora general de Educación Media del Ministerio de Educación de Paraguay.

5. Contenidos

En el desarrollo de las actividades de formación se establecen los siguientes bloques de contenidos:

- **Tema del mes sobre didáctica y teoría de la Educación**. Se trata de exponer, reflexionar y debatir sobre aspectos importantes del quehacer cotidiano del profesorado a través de un tema que se debe estudiar entre los días 1 y 15 de cada mes. Los temas que se tratan son presentados en dos fases. Primera, a través de un documento elaborado por un experto de reconocido prestigio dentro del área a la que pertenezca el tema escogido; debe ser de pocas páginas; en ellas el ponente hace una exposición del tema, que debe leer el participante, y abre interrogantes o plantea cuestiones para que sean contestadas y expuestas siguiendo las pautas que se le explican en cada caso. El experto, una vez cerrado el tiempo de participación, elabora un documento más extenso que recoge las aportaciones de los participantes y que pasará a tomar parte del la documentación que se entrega durante el desarrollo del curso y, posteriormente, del centro de recursos. Cada profesor y profesora tiene la *obligación* de contestar a lo que se solicite en cada tema (emitiendo opiniones sobre el mismo, respondiendo a preguntas que se formulen, exponiendo ideas, realizando alguna experiencia, etc.). La participación toma parte de los criterios para la evaluación final.

- **Componente científico**. Partimos de la hipótesis de que es necesario saber matemáticas para poder impartirla. El profesorado debe tener una formación científica suficientemente sólida como para poder tener una idea clara acerca de cuáles son los aspectos importantes de cada tema. Este componente está compuesto por un conjunto de temas de los que se hace una exposición teórica y práctica de los distintos contenidos matemáticos. Se pretende que el profesorado participante actualice o mejore sus conocimientos en esta área, considerados como esenciales para el currículum de este nivel educativo. Este material se irá pasando a lo plataforma de manera gradual.

  Los días 15 de cada mes, se ha colgado un problema que, *obligatoriamente*, ha de resolver el participante, a ser posible, dentro de esa segunda quincena del mes y siguiendo las instrucciones que se dicten para la resolución. Las respuestas tomarán parte de los criterios para la evaluación final.

- **Componente didáctico**. Cada uno de los temas que componen el apartado anterior, se ha completado con una guía didáctica para el profesor con el fin de facilitar y orientar sobre su desarrollo en el aula. Además incorporarán actividades y problemas, así como guías de recursos recomendados para llevar al aula, materiales que son tanto manipulables como TIC., etc.

  Sobre cada una de las guías didácticas se pasará un cuestionario que debe responderse una vez que se haya leído. Es también una parte *obligada* del curso**.** Las respuestas a estos cuestionarios toman parte de los criterios para la evaluación final.

- **Material para la dinamización matemática**: La oferta anterior se complementa con unos materiales que tienen como objetivo ayudar al profesorado a atraer a los estudiantes hacia las matemáticas, bien con la mejora de los métodos de explicación, bien con actividades que se puedan ofertar a los estudiantes en clase o fuera de ella. Nos referimos a elementos tales como: ejemplos de unidades didácticas concretas grabadas, talleres presentados en documentos o grabados, trabajos en proyectos, lecturas recomendadas, modelos de pruebas escritas, juegos de diverso tipo que tengan trasfondo matemático o que permitan desarrollar capacidades adecuadas para el razonamiento matemático, obras de teatro, fotografía y matemáticas, revistas escolares, creación de club de matemáticas, concursos y torneos, documentos sobre las técnicas de trabajo intelectual aplicadas a las matemáticas, etc. Todo este material estará en el centro de recursos con el fin de que pueda ser utilizado en el momento que el profesorado estime que se dan las circunstancias para ello.

- **Centro virtual de recursos:** como apoyo al proyecto y a la formación realizada se creará un *Centro virtual de recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* que ofrecerá gran cantidad de materiales de utilidad para mejorar el trabajo del profesorado y que estará a su disposición de manera libre, abierta y gratuita. Este centro dispondrá de todos aquellos materiales que puedan tener incidencia en la formación permanente del profesorado, que permitan mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este Centro se desarrollará con el apoyo de la Junta de Andalucía.

- **Exposiciones:** Se prepararán exposiciones itinerantes con contenidos matemáticos que irán acompañadas de guías didácticas para que el profesorado y el alumnado puedan profundizar en los temas que se exponen. Se irá anunciando por la plataforma la itinerancia y en cada caso se organizará la visita.

6. Profesorado participante

El proyecto de formación permanente *online* va dirigido al profesorado de Enseñanza Secundaria en ejercicio de cualquiera de los países iberoamericanos. Eventualmente podrían participar otro tipo de personas como, por ejemplo, estudiantes de la carrera de profesor.

Cualquier docente de este nivel puede solicitar participar en las actividades de formación convocadas por esta escuela online.

Los interesados es tener más información pueden escribir a la dirección:

curso.matematica@caeu.org

7. Requisitos previos

Para participar en las actividades de formación no se requieren requisitos previos, salvo estar en activo. Esta única condición deberá acreditarse en el proceso de inscripción en las distintas actividades de formación cuando se le solicite.

No es necesario poseer una formación previa en el uso de las TIC, pues, como se ha expresado, ese es precisamente uno de los objetivos del curso: el proporcionar a los participantes de los conocimientos necesarios para utilizarlas y para que las incorporen, en la medida de lo posible, a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

8. Tutores. Curso de formación

La OEI, a través de las Sociedades de Educación Matemática de la FISEM, las autoridades educativas de cada país, etc. hizo una convocatoria para la acreditación de tutores. Se trataba de tener a disposición un conjunto de profesores y profesoras que puedan atender con rigor y hacer un seguimiento del trabajo de un número no superior de cuarenta participantes.

Para participar en el curso con esta categoría se debían cumplir unas condiciones que se solicitaron en la convocatoria. En cualquier caso, y posteriormente, los seleccionados necesitaron superar el curso de formación online que tuvo una duración de un mes, con el que se les acreditó como futuros tutores.

Su misión se centra en hacer un seguimiento personalizado de la participación de los profesores y profesoras que siguen el curso. Es un trabajo clave en este entramado porque, además, resuelven dudas y responden a la mayor parte de las inquietudes de los participantes. Existe, no obstante una coordinación general que supervisa y da las directrices para la buena marcha de las actividades.

Entrega de certificado.

9. Certificación

El profesorado que supera el curso según los criterios indicados más abajo, recibe el correspondiente certificado que expide el Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI y también la autoridad ministerial que lo ha avalado. En cualquier caso, será en formato físico.

Para tener derecho a la certificación, el profesorado deberá ser declarado *apto* para lo cual se establecen los siguientes criterios:

- Haber realizado las tareas solicitadas en cada una de las unidades didácticas.
- Haber participado en los distintos temas del mes respondiendo a los requerimientos de cada uno de los ponentes.
- Contestar los cuestionarios que se van pasando a lo largo del curso.

10. Procedimiento de inscripción

El profesorado interesado en participar en las distintas actividades de formación cumplimentará el formulario de inscripción disponible en la Web de la OEI.

Un grupo de profesoras y profesores participantes en el curso Ñandutí.

11. Coste

Cuando las actividades se hagan en el contexto de un proyecto con un Ministerio de Educación, se fijarán las condiciones particulares de participación de los docentes.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 85-97
ISSN: 1815-0640

Una mirada a las prácticas de los formadores de futuros profesores de matemática: el profesor, el conocimiento y la enseñanza

Mario Dalcín; Cristina Ochoviet; Mónica Olave

Resumen

Identificamos el referente epistemológico (estático o dinámico) de formadores de futuros docentes de matemática, relativo a la relación del profesor con el conocimiento a enseñar y con los procesos de enseñanza. Los resultados obtenidos sugieren que es necesario desarrollar proyectos de trabajo que atiendan el diseño y gestión de las clases de matemática en la formación inicial de profesores, con el objetivo de formar docentes que efectivamente puedan atender las demandas actuales de la enseñanza de la matemática en el nivel medio.

Abstract

We identified the epistemological reference (static or dynamic) of preservice mathematics teacher trainers, concerning the relationships teacher-knowledge and teacher-learning processes. The results suggest the need to develop projects that address the design and management of mathematics classes in the preservice mathematics teachers training in order to train them to be able to achieve the current goals for mathematics education in the secondary school.

Resumo

Nós identificamos a referência epistemológica (estático ou dinâmico) de formadores de futuros professores de matemática sobre a relação do professor com o conhecimento para ensinar e com os processos de ensino. Os resultados sugerem a necessidade de desenvolver projetos de trabalho que abordam a concepção e gestão de aulas de matemática na formação inicial de professores, com o objetivo de formação de professores que possam efetivamente atender às demandas atuais do ensino da matemática no nível médio.

Introducción

La formación inicial de profesores en el área de las ciencias y particularmente en matemática, constituye un centro de gran interés tanto para los investigadores como para quienes proponen los diseños curriculares de formación de profesores (Furió, 1994; CBMS, 2001; Gómez, 2009).

Uno de los grandes desafíos consiste en conocer, cómo formar profesores de matemática, que puedan desarrollar prácticas de aula acordes a las recomendaciones emergentes para la enseñanza de la matemática en el nivel medio (NCTM, 1991).

Si, como señala Farfán (1997), las transposiciones deben depender del público al que se destina la enseñanza, en nuestro caso, futuros profesores de matemática, se hace necesario conocer en primer lugar qué está sucediendo en las aulas de formación de profesores de matemática de nuestro sistema educativo para conocer si estas están en consonancia con lo que se espera de ellas.

Este trabajo aborda el análisis de las prácticas de aula de los docentes formadores de futuros profesores de matemática para la enseñanza media, en un Instituto de Formación Docente de Montevideo-Uruguay, con el fin de contribuir a una mejor formación de los profesores de matemática.

Antecedentes temáticos y formulación de objetivos

Realizamos una profusa revisión de antecedentes temáticos, que abordó las reflexiones emergentes de la investigación en formación de profesores de matemática, las consideraciones y recomendaciones para la formación inicial y las prácticas de enseñanza en el nivel terciario.

Destacamos tres aspectos fundamentales que surgen de la revisión realizada. El primero, refiere a las recomendaciones emergentes para la formación de profesores de matemática, en cuanto al tipo de metodología que se espera desarrollen en sus clases los profesores formadores: una metodología que sea similar a la que los estudiantes habrán de desarrollar en su futuro profesional (Adler et al., 2005).

El segundo aspecto, refiere a la inevitable consideración del formador como un referente en la enseñanza de la matemática, referencia que es difícilmente evitable dado que, la visión crítica de la práctica del docente formador no constituye un objeto de análisis del proceso de formación del profesor (Santaló, 1994; Mellado, 1996; Ochoviet, 2010; Blanco, 1996; NCTM, 1991; Azcárate, 1998; Blanco y Borrallho, 1999; García et al., 1994; Nicol, 1999; Porlán et al., 2001).

El tercer aspecto, refiere al tipo de prácticas predominantes en el nivel terciario en general, que se caracterizan por ser de corte tradicional (Mellado, 1999; De la Cruz et al., 2000; Cammaroto et al., 2003; Moreno y Azcárate, 2003; Ochoviet y Olave, 2009).

Si enlazamos estos tres aspectos, parece claro que, al menos en el nivel de formación de profesores de matemática para el nivel medio, se hace necesario un cambio en las prácticas de los formadores, que sea más acorde a la que se espera desarrollen en sus clases los futuros docentes.

Esta revisión de antecedentes, nos permitió ubicar este proyecto en relación a las investigaciones reportadas y formular los objetivos que presentaremos a continuación.

El objetivo general de esta investigación, fue desarrollar elementos que contribuyeran a definir el perfil del formador de profesores de matemática y su práctica docente en este nivel de formación.

Como objetivo específico, nos planteamos identificar el referente epistemológico de los formadores de futuros profesores de matemática, centrándonos en la relación del profesor con el conocimiento y en la relación de éste con los procesos de enseñanza.

El estudio se realizó en un Instituto de Formación de Profesores de Montevideo, con larga trayectoria en la formación de profesores de matemática, en el período 2008-2009 y abarcó a todos los profesores de las áreas de geometría, álgebra y análisis, que tuvieron grupos a su cargo durante el año 2009 en el instituto de referencia.

Cada profesor formador imprime a su curso un determinado enfoque, que queda plasmado en el aula a través de la secuencia de enseñanza que sigue, de las actividades que propone a sus estudiantes y de la gestión que realiza de la clase.

Entonces se hace necesario detectar estas prácticas de aula y caracterizarlas, para compararlas con lo que sugieren las investigaciones en torno a cómo deberían formarse los futuros profesores de matemática y elaborar recomendaciones que permitan emprender proyectos de trabajo acordes a las demandas de la formación docente.

Consideraciones teóricas

Para analizar las prácticas de los docentes formadores, consideramos como marco teórico el propuesto en Albert (1998). Este autor plantea que el desarrollo del pensamiento crítico del profesor se ha convertido en una necesidad cada vez más apremiante, porque lo mismo se espera de los estudiantes.

Albert señala que, en estudios hechos con profesores, se ha observado que estos tienen la creencia de que lo que enseñan en el salón de clase es ciencia y que los estudiantes tienen la misma creencia. Esta situación es fácilmente identificable en el paradigma tradicional con un referente epistemológico estático, donde con frecuencia se identifican los conocimientos científicos de los expertos con los conocimientos científicos enseñables. De modo que el profesor transmite a sus estudiantes la idea de que está enseñando ciencia (conocimiento científico), cuando, en realidad, sólo está enseñando un conocimiento enseñable que ha sufrido muchas transposiciones: desde el conocimiento científico hasta el que comunica en el aula (Chevallard, 2000).

Según Albert la siguiente idea ilustra bien la postura descripta anteriormente: *"Tú no vas a inventar (o demostrar) lo que ya está inventado (o demostrado), hazlo como te digo"*, diría un profesor a su alumno. Con lo cual la actividad del estudiante se reduce a la memorización y mecanización para aprobar exámenes, y la del profesor a dar un enfoque desvinculado de todo contexto histórico o social y con excesivo énfasis en el desarrollo de habilidades algorítmicas.

De las aportaciones de Piaget, se desprende que tanto el sujeto como el objeto cambian en el proceso de conocer, y por tanto, el conocimiento mismo de las cosas.

Los estudios psicogenéticos han puesto de relieve que la acción constituye la fuente común del conocimiento lógico-matemático y del conocimiento físico del mundo. Es desde los sistemas de acción que puede comprenderse la contribución del objeto y del sujeto al conocimiento, ya que tales instrumentos de conocimiento se modifican en virtud de las "resistencias" de los objetos, y a su vez, los objetos sólo son conocidos por la acción estructurante del sujeto.

Estas aportaciones epistemológicas han dado una nueva visión de la relación de conocimiento sujeto-objeto como *dinámica*. Tanto el sujeto como el objeto y el conocimiento sobre éste, cambian. Desde esta perspectiva, el profesor puede *desarrollar pensamiento crítico* de su propia labor a partir del *referente* *epistemológico* que consiste en el análisis de los elementos que componen la relación de conocimiento sujeto-objeto como estáticos o dinámicos. El uso de estos dos referentes epistemológicos a modo de clasificación nos son útiles para la reflexión pero difícilmente los encontraremos en estado "puro".

Según Albert, en el salón de clase se pueden identificar, entre otros, cuatro tipos de relaciones epistemológicas fundamentales:

(a) El profesor y su relación con el conocimiento científico,

(b) El profesor y los procesos de enseñanza,

(c) El alumno y los objetos de aprendizaje,

(d) El alumno y sus procesos de aprendizaje.

Como ya se dijo en la formulación de objetivos nos centraremos en las dos primeras relaciones.

La primera, se refiere al ámbito de las distintas relaciones que se establecen entre el profesor y el conocimiento científico. Es fácilmente identificable en el paradigma tradicional, con un *referente epistemológico estático*, donde con frecuencia se identifican los conocimientos científicos de los expertos con los conocimientos científicos enseñables. De modo que el profesor transmite la idea de que está enseñando ciencia (conocimiento científico), cuando, en realidad, sólo está enseñando un conocimiento enseñable que ha sufrido muchas transposiciones desde el conocimiento científico hasta que se comunica en el aula.

Pero, si en cambio, el profesor entiende que el conocimiento por él adquirido, no es algo que se alcanza como meta, sino que está en una continua búsqueda hacia la profundización del conocimiento científico, nos indicaría un primer avance hacia un *referente epistemológico dinámico*. Desde esta postura, el profesor ya no se auto define como "el que sabe", sino que continúa aprendiendo hacia la búsqueda de nuevos conocimientos.

De modo que se confrontan dos pensamientos radicalmente opuestos en los profesores: el que corresponde a un continuo ir aprendiendo y profundizando en el saber, y el que cree que por tener cierto dominio de los conocimientos que enseña, ya por eso "sabe", y, por tanto, no necesita más. Consideramos que estos dos referentes nos dan un marco desde el cual interpretar y analizar las prácticas docentes en la formación de profesores.

La segunda relación considera que la postura epistemológica del profesor condiciona de manera decisiva su manera de enseñar. Hay posturas *imitadoras*, como que para ser un buen profesor, basta con imitar lo bueno de los maestros que se ha tenido y evitar lo negativo. Otra postura es la *pedagógica tradicional*, esto es, basta con la puesta en práctica de conocimientos generales de pedagogía y didáctica para ser un buen profesor.

Estas posturas pertenecen a un referente epistemológico estático, ya que los profesores creen que los procesos de enseñanza están plenamente identificados y los aceptan como seguros para lograr una buena enseñanza. Por el contrario, hay otras posturas, pertenecientes a un referente epistemológico dinámico, en las que los procesos de enseñanza se modifican continuamente debido a la confrontación entre los procesos de enseñanza y los aprendizajes de los estudiantes, así como a las investigaciones sobre dificultades y rutas más adecuadas para el aprendizaje de los alumnos.

Como nuestro objetivo es identificar el referente epistemológico de los profesores formadores a partir de su práctica de aula, complementaremos la perspectiva de Albert (1998) con la de Gargallo et al. (2007) para explicitar en forma más adecuada, la concepción de conocimiento que asociaremos a los referentes epistemológicos *estático* y *dinámico.*

Gargallo et al. (2007), suscribe a la concepción que establece dos modos fundamentales de abordar la docencia en el nivel terciario: el modelo centrado en la enseñanza (modelo tradicional, centrado en el profesor, de transmisión de información, expositivo) y el modelo centrado en el aprendizaje (modelo constructivista, centrado en el alumno, de facilitación del aprendizaje), entendiendo que estos dos modelos constituyen posturas extremas y que modelos intermedios son posibles.

En el primer modelo, que identificamos con un referente epistemológico estático, el conocimiento se entiende como algo construido externamente. Existe un corpus de conocimientos científicos acotado por la disciplina y elaborado por grandes pensadores, que hay que transmitir y que posee el profesor. Quien tiene la responsabilidad de organizar y transformar el conocimiento. En el segundo modelo, que identificamos con el referente epistemológico dinámico, el conocimiento se entiende como una construcción social y negociada, y la responsabilidad de organizar y transformar el conocimiento es del profesor y del alumno.

Metodología

Llevamos adelante cuatro tipos de actividades fundamentales: revisión de libros de texto, observación de clases, entrevistas a los profesores y entrevistas a estudiantes.

1. Revisión de textos del estudiante

En primer lugar, se consultó a los profesores participantes, qué libros de texto recomendaban a sus estudiantes. Posteriormente realizamos una revisión de dichos textos. Esta decisión se fundamenta en que los libros de texto *autorizan* una didáctica (Chevallard, 2000). Estos textos, nos permitieron entonces, de alguna forma, acercarnos a las prácticas docentes y tener una noción de lo qué se enseña y cómo se enseña. También nos brindaron información del discurso matemático escolar y de los distintos enfoques didácticos de los temas.

2. Observación de clases

En mutuo acuerdo con los docentes responsables de los cursos de álgebra, análisis y geometría de un instituto de formación docente, realizamos 10 observaciones de clase de una hora y media de duración para conocer cómo enseñan diferentes tópicos. La secuencia de enseñanza que siguen, las actividades que plantean a los estudiantes y la gestión de clase que realizan. Las clases observadas fueron audio grabadas. Ésto nos permitió develar con mayor fidelidad el discurso matemático escolar y observar las reacciones de los estudiantes en situación de clase.

3. Entrevistas a los profesores y a estudiantes

En forma previa y posterior a la clase observada se realizaron entrevistas a cada uno de los diez docentes con el objetivo de contrastar lo que el docente dice con lo que el docente hace. Estas entrevistas también fueron audio grabadas. Realizamos también una entrevista conjunta a dos estudiantes de cada una de las clases observadas con el propósito de indagar, qué consideraban que habían aprendido en la clase observada y cuáles consideraban que habían sido los aportes fundamentales de la misma.

Discusión de los resultados

A partir de las observaciones de clase realizadas, las entrevistas, la revisión de los libros de texto y apoyándonos en las consideraciones de Albert (1998) que asociamos a las distintas maneras de entender el conocimiento presentadas en Gargallo et al. (2007), identificamos las dos propuestas en este último trabajo: el conocimiento entendido como algo construido externamente y el conocimiento entendido como una construcción social y negociada.

En las clases observadas pusimos atención en los siguientes aspectos: cómo se utilizan los ejemplos, tipos de problemas que se proponen, las interacciones en la clase y las actividades matemáticas que se permiten a los alumnos.

Los docentes que asociamos a un referente epistemológico *estático*, dictan clases de corte expositivo. La participación de los alumnos se reduce a contestar preguntas de respuesta inmediata, formuladas en la mayoría de los casos por el docente con el propósito de ir avanzando en el desarrollo del tema y de cotejar el grado de coherencia entre el conocimiento que el docente ha decidido enseñar y el conocimiento del alumno. Vemos algunos ejemplos a continuación.

El profesor X plantea una clase expositiva. Formula preguntas pero sus estudiantes no pueden responderlas por falta de conocimientos, aunque el profesor intenta una simulación de diálogo. En la entrevista posterior el profesor reconoce que su clase es expositiva y que no tiene recursos didácticos para plantear actividades donde los estudiantes puedan tener instancias más participativas.

- Entrevistador: ¿Por qué elegiste presentar el tema de esa manera? ¿Hay otras alternativas?

- Profesor X: Sí, hay… Primero, qué otras alternativas es un camino que debo empezar a explorar… yo no tengo formación… en realidad, nunca fui, nunca ví esas clases donde se les propone continuamente [actividades a los estudiantes]… este, y entonces como que no… no sé hacer eso, que vi a [nombre de un profesor] trabajando en algunos momentos y vi como la gente se prendía con lo que se trabajaba y dije: ¡Upa!, voy a tener que entrar a ver cosas de este estilo, pero ta, todavía no he tenido la oportunidad.

Como vemos, parece que el profesor desea trabajar de otra manera en clase, pero reconoce que no tiene una formación didáctica que le permita llevar adelante otro tipo de propuestas en clase.

En la clase del profesor Y, los estudiantes cuentan con un material impreso donde están consignadas todas las definiciones del curso. El profesor Y, escribe en el pizarrón una de dichas definiciones y hace una pregunta retórica acerca de qué propiedades cumple el objeto definido, ya que toda esa información está escrita en el material. Los alumnos leen el material y responden de acuerdo a él. Luego que los estudiantes nombran las propiedades, el profesor Y dice: "Entonces habría que probar que es una estructura de grupo". Entendemos que de esta forma no habilita un espacio donde los estudiantes propongan sus consideraciones en relación a las propiedades mencionadas y sus consecuencias.

En la clase del profesor Z, gran parte de los estudiantes tiene impreso el material del tema que se va a tratar en clase, todo el grupo tiene dicho material a disposición desde el inicio del curso. El profesor inicia la clase anotando en el pizarrón el título del tema a tratar. Plantea algunos ejemplos mediante los cuales busca presentar el objeto matemático a abordar. Expone a los estudiantes la problemática que esta definición puede llegar a tener, la cual resulta ajena a los alumnos dada su poca o nula experiencia previa con el tema. Más de la mitad del tiempo que dura la clase el docente hace mención a dichas problemáticas, que guardan poca relación con los conocimientos del tema que tienen los alumnos sobre mismo.

En la clase del profesor W, éste comienza tratando de introducir un nuevo concepto. Los estudiantes ya han estudiado en la enseñanza media algunos conceptos de Cálculo que el profesor intenta recuperar en clase pues entiende que es pertinente tomar en consideración esos conocimientos previos con el objetivo de establecer conexiones con el nuevo concepto que debe enseñar. El docente recurre a la visualización para ejemplificar y dar sentido al nuevo concepto que pretende definir.

En la clase el profesor comienza dando la definición de intervalo en el conjunto de los números reales con la explicación correspondiente de por qué se puede definir en este momento del desarrollo de la teoría. Luego define punto interior y utiliza los intervalos en la recta real para ejemplificar. Al tratar de explicar el nuevo concepto, una estudiante le propone tomar un *entorno* –concepto que los estudiantes manejan de cursos anteriores– pero el docente se niega a llamarlo por su nombre, argumentando que en el desarrollo de la teoría que está llevando adelante todavía no se definió dicho concepto.

Continúa la clase con varios ejemplos del nuevo concepto introducido, ejemplos que plantea el profesor y en los que los estudiantes deben verificar si se cumple o no dicha definición. Durante todo este desarrollo el clima de la clase es de atención absoluta a lo que explica el profesor. El papel de los estudiantes se remite a copiar lo que el profesor escribe en la pizarra y a realizar intervenciones puntuales ante requerimientos del docente. En la entrevista posterior a la clase el profesor W, manifiesta que prefiere una clase en la que todos los conceptos queden bien cerrados en lugar de dejar dudas planteadas o situaciones abiertas:

- Entrevistador: ¿Y por qué acá no querés que ellos se lleven esas dudas? Que queden puntas abiertas…

- Profesor W: …pero… sí, sí… porque me parece que hay varias cuestiones con respecto a la enseñanza que después… a ver… todos estamos bastante cansados de ir a clases de otros lados… Secundaria y ver cosas que… son horribles… sobre todo porque… hay mucha gente que… cree que… sale de una clase de acá y puede ir con su mismo cuadernito a transportarlo a Secundaria. Dada esa realidad que ocurre, yo prefiero que el cuaderno les cierre…, entonces, los conceptos centrales… -no los problemas que uno pone para que los tipos investiguen-, sino lo central mínimo… definiciones, la definición de… en este caso de abierto, la definición de intervalo, o sea, yo podría haberles tirado unos ejercicios, investiguen qué pasa con este y no digo nada, pero después no aparece la necesidad de la definición porque no vieron ningún conjunto que… que sí y otros que no…, o sea, ¿no? … unos que verifican y otros que no verifican… entonces…bueno, me parece que eso tiene que estar cerrado.

Como puede observarse, el profesor se propone que el cuaderno de clase “les cierre”, refiriéndose a los alumnos; esto es, que contenga anotadas todas las definiciones centrales de un curso de análisis matemático. El profesor entiende que esto será útil para el futuro profesional de esos estudiantes argumentando que si esos estudiantes, mañana profesores, decidieran repetir en sus clases lo que él les ha enseñado, deberán tenerlo perfectamente registrado.

En las entrevistas mantenidas con los docentes que se ubican en el referente epistemológico estático, se observa que la mayoría de ellos, señala la importancia de la participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento. Sin embargo, en la práctica de aula, esto no logra concretarse. Las clases son básicamente expositivas y la participación de los estudiantes se remite a dar respuesta a preguntas relativamente sencillas, cuyo objetivo es, más que nada, avanzar en el desarrollo del tema propuesto.

Entre los docentes que ubicamos en el referente epistemológico *dinámico*, tenemos el caso del profesor A. El profesor da un ejercicio y unos minutos para que los estudiantes lo trabajen, ya sea en forma individual o en equipos. Luego de transcurrido este lapso de tiempo se hace una puesta en común. Los estudiantes van pasando al pizarrón a explicar lo que hicieron.

El primer ejercicio consiste en aplicar la definición de unión, intersección e inclusión entre conjuntos, ya vistas en la clase anterior, a una serie de conjuntos dados mediante diagramas de Venn. En esta instancia el docente no hace mucho hincapié en dar *su* interpretación de esas representaciones. Esto permite que los estudiantes las realicen por sí solos, dando lugar a preguntas e intervenciones de los alumnos, a las que el docente responde buscando clarificar.

El docente propone un nuevo ejercicio y se repite la dinámica anterior. En la puesta a punto de este nuevo ejercicio el docente va preguntando a los estudiantes cómo lo hicieron y esto da lugar a que el docente aproveche a profundizar en las ideas matemáticas en juego, realice precisiones referidas tanto al lenguaje como a los conceptos matemáticos y comente las diferentes interpretaciones a que puede dar lugar una representación gráfica. Lo que se busca es que el estudiante reflexione sobre lo que ha dicho y pueda reformularlo en términos más precisos.

En la entrevista, el profesor A reflexiona sobre cómo su práctica ha cambiado desde que comenzó a trabajar en el instituto de formación docente: “cuando yo trabajé el primer año acá, me paraba en el pizarrón y yo daba la clase” y sus alumnos, en la entrevista, reconocen que su participación en la clase es fundamental.

El profesor B negocia con sus estudiantes, a través de una actividad, las posibles interpretaciones del enunciado de un problema en lugar de imponer *una* lectura.

El docente es consciente de los riesgos que implica proponer una actividad abierta: “hay que ser consciente que cuando uno presenta una actividad como esta se pueden sobrevenir determinadas dificultades que en realidad uno al principio puede no haber pensado sobre ellas”.

Quizás, este es un riesgo que muchos docentes temen enfrentar y la clase expositiva les brinda mayor seguridad.

Nos interesa destacar las apreciaciones de un estudiante frente a la clase vivida, fundamentalmente cuando dice que: “con el método de trabajo justamente del profesor con respecto a la Matemática acá [en el instituto] te hace razonar lo que estás haciendo a otro nivel, quiero decir, es como que… vos estuvieras desarrollando lo que vas a aprender”. El estudiante logra llevar a un nivel consciente su participación activa en el aprendizaje.

El profesor C, plantea a los estudiantes una pregunta que los conduce a hacer explícitos sus conocimientos previos sobre el concepto a tratar. Surgen dos posibles definiciones, el profesor C representa las dos situaciones en el pizarrón y con los aportes de todos se busca esclarecer si son equivalentes o no. Una vez elaborada esa demostración en colectivo, se les pide que la escriban en sus cuadernos. Al pasar por los bancos el profesor C, se da cuenta que los estudiantes no pueden escribir la demostración por no tener claro de dónde parten y hacia dónde van, lo que lo lleva a formalizar en el pizarrón. En el pizarrón lo que se hace es, a partir de una figura, trabajar la demostración pero en forma oral y hacer un esquema de la misma para que los estudiantes la completen con detalle. Para demostrar la equivalencia de las dos definiciones, hace falta todavía probar otro teorema. Para ello, el profesor escribe en el pizarrón la hipótesis y tesis de la proposición a demostrar y se van analizando las distintas demostraciones que proponen los estudiantes. En todo momento el profesor alienta esta participación colectivizando los aportes para ponerlos a consideración de la clase. El profesor pretende que en el grupo se vayan generando consensos en torno a cómo ir avanzando en la demostración del teorema que los ocupa.

Tanto en las entrevistas, previa y posterior, así como en la clase observada del profesor C, se aprecia una preocupación del docente por dar sentido a los temas que se trabajaron en la clase. También fomenta en forma permanente que los estudiantes planteen sus ideas y que se discutan entre todos, analizando sus pro y contra. El estudiante es el protagonista de la clase, elaborando y comunicando ideas así como escuchando, tratando de entender y colaborar con las ideas de sus compañeros. Todos los estudiantes entrevistados valoran positivamente la práctica de sus profesores y pueden reconocer en ella elementos para su futuro desempeño como docentes. No se observó un posicionamiento crítico frente a lo que sus profesores hacen en clase -ya fuera que dictaran clases expositivas o dando participación activa a los estudiantes- quizás, porque la situación los expone a una grabación de lo que están diciendo y tienen temor de expresarse.

Del análisis de los libros de texto surge que todos ellos presentan un conocimiento que consiste en un conjunto de resultados ya establecidos. El referente epistemológico implícito en estos textos de estudio es estático. La presentación del conocimiento que se hace en estos libros podría inducir a los docentes a desarrollar clases en las que el profesor es quien define los conceptos, propone los ejemplos, demuestra las propiedades, esto es, es quien posee el conocimiento. Luego los alumnos aplicarán los conceptos que el profesor ha enseñado para la resolución de ejercicios.

En el único material de estudio –elaborado en Uruguay para la formación de profesores de matemática– donde se denota un referente epistemológico dinámico, es en unas *Notas para un curso de geometría* que fueron elaboradas especialmente por los docentes para el trabajo con los estudiantes de profesorado.

Conclusiones y recomendaciones

En el conjunto de los diez profesores con los que trabajamos, identificamos los dos referentes epistemológicos relativos al conocimiento planteados por Albert (1998): el estático (cinco profesores) y el dinámico (cinco profesores).

En las observaciones de clase realizadas, detectamos que varios profesores desarrollan prácticas de enseñanza, donde es el profesor quien básicamente expone el conocimiento. Esto es, desarrollan clases expositivas. La participación de los alumnos se reduce a contestar preguntas de respuesta inmediata, formuladas en la mayoría de los casos por el docente con el propósito de ir avanzando en el desarrollo del tema y cotejar el grado de coherencia entre el conocimiento que el docente ha decidido enseñar y el conocimiento del alumno.

Sin embargo, en las entrevistas realizadas a los docentes, expresaron que esta participación de los alumnos, es una manifestación de la construcción colectiva del conocimiento en clase.

En síntesis, existen dos razones fundamentales por las cuales se lleva adelante este tipo de práctica. La primera, porque los profesores creen que dan participación activa a los estudiantes en la construcción del conocimiento, esto es una interpretación equivocada del real significado de la participación que efectivamente promueven en clase. La segunda, porque se sustenta este tipo de prácticas debido a la imposibilidad de diseñar actividades de aula por falta de formación didáctica específica.

Los docentes que ubicamos en el referente epistemológico dinámico, desarrollan prácticas que son más coherentes con las recomendaciones actuales para la formación de profesores. Esto es, los profesores abren espacios de discusión colectiva donde aparece la negociación de significados y la búsqueda de consensos como motores para la construcción del conocimiento. Estos profesores entienden que para enseñar no deben "exponer" sus conocimientos a los estudiantes sino diseñar situaciones de enseñanza que permitan a los alumnos realizar un trabajo matemático (investigar, conjeturar, aportar ejemplos o contra-ejemplos, demostrar, comunicar ideas matemáticas, etc.).

En las entrevistas, los estudiantes reconocen en la práctica de sus docentes, elementos para su futuro quehacer profesional y son capaces de mencionar, a partir de lo que observan, recomendaciones de actuación concretas que hacen a una "buena práctica". Tal como se afirma en Ochoviet (2010), el formador en su accionar, en las decisiones que toma, en las actividades que propone, en forma más o menos implícita, está dando un mensaje sobre la práctica de la enseñanza. Este mensaje es integrado al perfil docente, aún en construcción, de los futuros profesores.

A partir de lo detectado en esta investigación en relación a la visión estática del conocimiento, que se está ofreciendo en muchas de las aulas de formación docente y teniendo en cuenta las recomendaciones emergentes para la formación de profesores de matemática (NCTM, 1991; Santaló, 1994; Mellado, 1996; Blanco, 1996), se hace necesario emprender proyectos de trabajo que atiendan el diseño y gestión de las clases de matemática de formación docente. Estos proyectos deberán atender, en principio, dos aspectos.

El primero de ellos consistiría en trabajar junto a los profesores para definir qué significa, "ser participante activo en la construcción de los aprendizajes" y emprender el diseño de situaciones de enseñanza que sean consecuentes con esa definición.

El segundo aspecto atendería la problemática de los profesores que reconocen no tener formación didáctica específica para diseñar actividades de enseñanza que promuevan un ámbito de producción de conocimiento en la clase.

Es decir que el "diseño didáctico de situaciones" aparece como un objetivo de trabajo, fundamental para los formadores de docentes. El diseño de ambientes apropiados de enseñanza para los futuros profesores de matemática, tiene que ser uno de los objetivos de los cuerpos docentes de formadores y consecuencia de un proyecto consensuado de trabajo, que superando las prácticas tradicionales, pueda comenzar a proponer y ensayar con libertad, otras prácticas docentes.

Bibliografía

Adler, J.; Ball, D. ; Krainer, K, ; Lin, F-L y Novotna, J. (2005). "Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education". *Educational Studies in Mathematics* 60, 359–381.

Albert, A. (1998). *Introducción a la epistemología en Matemática Educativa*. Escuela Normal Superior Veracruzana Dr. Manuel Suárez Trujillo, México.

Azcárate, P. (1998). La formación inicial del profesor de matemáticas: análisis desde la perspectiva del conocimiento práctico profesional. *Revista Interuniversitaria de formación del profesorado* 32, Mayo/Agosto, 129-142.

Blanco, L. (1996). Aprender a enseñar Matemáticas. Tipos de conocimientos. En J. Giménez, S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 199-221). Comares, Granada.

Blanco, L. y Borrallho, A. (1999). Aportaciones a la formación del profesorado desde la investigación en educación matemática. En L. C. Contreras y N.

Climent (Eds.), *La formación de profesores de matemáticas. Estado de la cuestión y líneas generales* (pp. 131-174). Universidad de Huelva España.

Cammaroto, A.; Martins, F. y Palella, S. (2003). "Análisis de las estrategias instruccionales empleadas por los profesores del área de matemática". *Investigación y Postgrado* 18 (1), 203-229.

Chevallard, Y. (2000). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique, Buenos Aires.

Conference Board on Mathematical Sciences (CBMS) (2001). *The mathematical education of teachers*. Washington, DC: Author.

De La Cruz, M.; Baudino, V.; Caino, G.; Ayastuy, R.; Ferrero, T.; Huarte, M.; Palacio, M.; Reising, A.; Scheuer, N. y Siracusa, P. (2000). "El análisis del discurso de profesores universitarios en la clase". *Estudios Pedagógico,* 26, 9-23.

Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Furió, C. J. (1994). "Tendencias actuales en la formación del profesorado de ciencias". *Enseñanza de las Ciencias* 12 (2), 188-199.

García, M.; Escudero, I.; Llinares, S. y Sánchez, V. (1994). "Aprender a enseñar matemáticas. Una experiencia en la formación matemática de los profesores de Primaria"*. Épsilon* 30, 11-26.

Gargallo, B.; Fernández, A. y Jiménez, M. (2007). "Modelos docentes de los profesores universitarios". *Teoría de la educación* 19, 167-189.

Gómez, P. (2009). "Procesos de Aprendizaje en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria". *Electronic Journal of Research in Educational Psychology* 17, Vol. 7 (1), 471-498.

Mellado, V. (1996). "Concepciones y prácticas de aula de profesores de ciencias, en formación inicial de primaria y secundaria". *Enseñanza de las ciencias* 14 (3), 289-302.

Mellado, V. (1999). "La formación didáctica del profesorado universitario de ciencias experimentales". *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado* 34, 231-241.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). "Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales". *Enseñanza de las ciencias* 21 (2), 265-280.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. SAEM Thales, Sevilla

Nicol, C. (1999). Learning to teach mathematics: questioning, listening, and responding? *Educational Studies in Mathematics* 37, 45–66*.*

Ochoviet, C. (2010). ¿Quiénes serán los futuros formadores? *Actas del II Congreso Nacional e Internacional de Formación Docente*. Montevideo: DFyPD.

Ochoviet, C. y Olave, M. (2009). *Los modelos docentes en la formación de profesores de matemática: elementos para repensar los ambientes didácticos*. Fondos concursables (no publicado). DFyPD, Montevideo.

Porlán, R.; Martín del Pozo, R.; Toscano, J. y Rivero, A. (2001). *La Relación Teoría-Práctica en la Formación Permanente del Profesorado: Informe de una Investigación*. Díada, Sevilla.

Santaló, L. y colaboradores. (1994). *Enfoques. Hacia una didáctica humanista de la matemática*. Troquel Educación, Buenos Aires.
Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Kluwer, Dordretch.

Mario Dalcín: Profesor de matemática. (IPA-Uruguay) .Magister en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Tiene especial interés en la Geometría y en Historia de la Matemática y en sus procesos de enseñanza. Sobre estos temas ha escrito en Revista do Professor de Matemática, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Forum Geometricorum. Docente de Geometría y de Historia de la Matemática en el Instituto de Profesores Artigas. **mdalcin00@gmail.com**

Cristina Ochoviet: Doctora en Matemática Educativa (CICATA–IPN, México). Postgrado en Constructivismo y Educación (FLACSO, Argentina). Profesora de Matemática (IPA, Uruguay). Licenciada en Educación (UNQ, Argentina). Docente de Didáctica de la matemática en la formación de profesores de matemática, profesora de matemática en la enseñanza media e investigadora en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores. **cristinaochoviet@gmail.com**

Mónica Olave: Profesora de matemática (IPA-Uruguay). Magister en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Docente en el IPA en Historia de la Matemática, Análisis del Discurso Matemático Escolar y Didáctica de la Matemática. Su campo de investigación es la formación de profesores de Matemática.
monicaolave23@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 99-116
ISSN: 1815-0640

La intervención psicopedagógica como opción teórico-metodológica para la formación inicial de profesores de matemática [1]

Maria Helena Fávero; Regina da Silva Pina Neves

Resumen

Estudios brasileños e internacionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de la división y de los números racionales destacan que alumnos y profesores presentan dificultades conceptuales y que estos no analizan adecuadamente las notaciones producidas por los alumnos. Describimos una investigación de intervención con el objetivo de desarrollar competencias conceptuales y mediacionales de profesores. Los resultados indican que la intervención psicopedagógica propició la toma de consciencia de los significados que sustentan las prácticas de los profesores y contribuyó, para el desarrollo de competencias conceptuales.

Abstract

Brazilian and international studies of teaching and learning of division and rational numbers highlight the conceptual difficulties of students and teachers and indicate that the teachers do not adequately analyze the annotations produced by students. Here we describe an intervention study with the aim of developing teachers' conceptual and mediational competencies. The results indicate that that the psychopedagogical intervention led to a grasp of consciousness of the meanings that underpin teaching practice and contributed to the development of conceptual competencies

Resumo

Estudos brasileiros e internacionais sobre o ensino e a aprendizagem de divisão e números racionais destacam que alunos e professores apresentam dificuldades conceituais e que estes não analisam adequadamente as notações de seus alunos. Descrevemos uma investigação com o objetivo de desenvolver competências conceituais e mediacionais de profesores. Os resultados indicam que a intervenção propiciou a tomada de consciencia dos significados que sustentam as práticas dos profesores e contribuiu, para o desenvolvimento de competências conceituais.

Introducción

Los informes de evaluaciones oficiales brasileños de los años 1990 (Parámetros Curriculares Nacionales – PCNs, 1997; 1998) ya indicaban en el análisis del desempeño en matemática de estudiantes de La Educación Básica,

[1] Este estudio se desarrolló dentro del Proyecto de Investigación - **A atividade mediada no desenvolvimento de competências matemáticas: a construção da lógica do algoritmo da divisão e dos racionais (**processo 307859/2006-1, vigência: 01/03/2007 a 28/02/2010) **–** coordinado por la Profa. Dra. Maria Helena Fávero (Universidad de Brasília), con el apoyo del CONSEJO NACIONAL DEL DESARROLLO CIENTÍFICO Y TECNOLÓGICO – **CNPq (Brasil).**

dificultades particulares con relación a las situaciones-problema envolviendo la división y los números racionales.

La manutención de los relatos sobre las dificultades de los alumnos, se confirmaran en los informes de evaluaciones oficiales de los años 2000, como el SAEB – Sistema de Evaluación de la Educación Básica (2003) – y el PISA – Programa Internacional de Evaluación Comparada (2004) y permanece la ausencia de discusiones que sitúe el papel del profesor y de su formación inicial en la superación de esas dificultades. Además de eso, se mantiene rutinero, en el interior de la escuela, el discurso que responsabiliza a veces al alumno, a veces al profesor del grupo anterior por la manutención de esas dificultades. En el caso de los alumnos, el discurso elige la indisciplina, la falta de motivación y del hábito de estudio, la falta de apoyo de la familia y la ausencia de prerrequisitos.

Por otro lado, nuestra revisión de la literatura dos estudios sobre enseñanza y aprendizaje de los contenidos curriculares de división y números racionales (55 referencias, entre estudios nacionales e internacionales, realizados en el período de 1999 a 2006 sobre los contenidos curriculares de división y número racional) y los estudios sobre la formación de profesores de matemática (28 referencias) evidencio una convergencia teórica, predominando la referencia a la teoría de los campos conceptuales y a la de los subconstrutos de los números racionales y el análisis cualitativo a partir de la resolución de problemas, teniendo alumnos de la enseñanza primaria como sujetos. En esos estudios, los datos analizados fueron, predominantemente, registros escritos sea de alumnos, sea de profesores, con vistas a la identificación de dificultades de aprendizaje y, en el caso de los profesores, dificultades de aprendizaje y/o indicios de la práctica docente en el aula (Fávero y Pina Neves, 2007a).

Tanto en los estudios de resolución de problemas como en los de intervención, predominaran las tareas del tipo tradicional, en forma de pregunta, para las cuales se esperaba una resolución expresa por el registro de la operación correspondiente, sin vinculación al campo conceptual particular. En los estudios de intervención, predominó la intervención desarrollada en pocas horas con un procedimiento fundamentado, sobretodo, en la explanación, en general sintética y centrada apenas en los conceptos en cuestión, sin referencia al campo conceptual envuelto.

En general, los resultados de esos estudios indicaron que los alumnos presentaron mejor desempeño en situación de división partitiva; que la noción de división precede el uso de procedimientos matemáticos formales y que tales procedimientos sólo se adoptan cuando los alumnos son instruidos en el contexto escolar; que los algoritmos alternativos fueron los más utilizados, siendo vistos por los alumnos como más eficaces que el algoritmo formal. Al mismo tiempo, esos mismos estudios mostraron que tales alumnos no comprenden la lógica del algoritmo formal. Tales resultados indican que la escuela ha insistido en abordar solamente situaciones relacionadas al modelo intuitivo de repartir cuantidades, desconsiderando el modelo asociado a la idea de medida de grandezas. Además de eso, señaliza que ella ha trabajado el algoritmo formal no en la perspectiva da comprensión y sí, del manoseo de reglas y procedimientos.

En lo que se refiere a los números racionales, los estudios indicaron que los conocimientos adquiridos por los alumnos sobre el conjunto de los números naturales funcionan como obstáculos epistemológicos para el aprendizaje de otros conjuntos (números fraccionarios y números racionales). El mejor desempeño de los alumnos en la resolución de problemas de fracciones con el -significado parte-todo y el desconocimiento de ellos sobre los otros significados, aliado al hecho de que los profesores presenten también dificultades de comprensión de todos los significados, en especial, el de la razón, señaliza que alumnos y profesores presentan problemas de orden conceptual y posiblemente no entienden que un mismo número fraccionario puede estar asociado a diferentes situaciones y presentado en diferentes representaciones.

En resumen, podemos decir que los datos de esa revisión evidenciaran que las dificultades de alumnos y de profesores con los conceptos de división y número racional acontecen en función de las relaciones que estos establecen con el conocimiento matemático, pautada apenas en la adquisición y transmisión de conocimientos y no en la construcción de significados conceptuales (Fávero y Pina Neves, 2007a).

Podemos decir que la analice de esa revisión indica que el paradigma de la racionalidad técnica continúa dominante como opción teórica y metodológica para pensar y proponer la formación inicial de profesores de matemática en Brasil. En contrapartida, el paradigma emergente de la racionalidad práctica recibe innumerables críticas, una vez que se mantiene bipolar, siendo que, ahora, en vez de supervalorar el conocimiento teórico y académico, supervalora el conocimiento proveniente de la práctica. Esa opción fomenta lo debate teórico que cuestiona los embasamientos teóricos adoptados por la mayoría de los investigadores en formación de profesores.

Es consenso entre los estudiosos: la falta de articulación entre teoría y práctica en los procesos de formación, tanto inicial como continuada, la desarticulación entre los conocimientos específicos y pedagógicos; la falta de preparación de los formadores de profesores para emprender esas articulaciones; la lentitud en la construcción de abordajes alternativas para la formación de profesores de matemática; el descontento generalizado con la forma, la estructura y los resultados en términos de formación no sólo en los cursos de licenciatura en matemática, sino también en los de formación continuada. Los investigadores son unánimes en indicar las incongruencias de esos procesos y recomiendan, para una posible mejoría de ese cuadro, la reflexión, el trabajo colaborativo y una relación más equilibrada y harmoniosa entre la teoría y la práctica.

El estudio que relatamos aquí asume el aporte teórico-conceptual y metodológico de Fávero, para intervenir en esas cuestiones-clave, lo que presupone tanto la consideración de la filosofía y de la epistemología de la construcción de los saberes particulares, como de los procesos psicológicos **desenvolvimentais** que sustentan esa construcción (Fávero, 2003, 2007b; 2009a). Es en esa perspectiva que esta autora ha propuesto una fundamentación teórico-conceptual y metodológica con la intuición de establecer una articulación entre la psicología y el conocimiento y fundamentar la Psicología del conocimiento (FÁVERO, 2005a, 2005b, 2007a, 2009a).

Esta autora ha defendido hace ya una década, un aporte teórico-conceptual y metodológico, que se fundamenta en la articulación y en el consenso de los grandes teóricos de la psicología, tales como Piaget (1977), Wallon (1963) y Vygotsky (1979), así como en los grandes pensadores como George Mead (1910, 1992), Bakhtin (1981), Geertz (1989) y Lotman (1988, 1990) y de los pensadores contemporáneos como Bourdieu (1982), Bruner (1990) y Moscovici (1986, 1988) (ver: FÁVERO, 2000, 2001, 2005a, 2005b, 2007a, 2007b, 2009a, 2009b).

Se trata, por tanto, de una postura inter y multidisciplinar que fundamenta la siguiente tesis: el ser humano se desarrolla a través de la construcción dialéctica de la interacción y adaptación con el medio sociocultural, sustentada por los procesos de internalización y externalización que engendran la toma de conciencia y para los cuales los sistemas de signos son especialmente importantes, ya que se trata de lidiar con la representación (FÁVERO, 2005a, 2007a, 2009a).

Esta tesis implica la consideración de por lo menos cuatro aspectos teórico-conceptuales articulados: 1. La evidencia de las interacciones entre los reglamentos cognitivos y los reglamentos sociales; 2. El papel de la mediación semiótica en los procesos de desarrollo psicológico humano; 3. Los efectos de los sistemas de signos en el desarrollo psicológico y en la cognición de las comunicaciones individuales y las maneras de cómo las prácticas de las instituciones sociales interaccionan con el funcionamiento mental del individuo; 4. La toma de conciencia de que las acciones humanas no son aleatorias; al contrario, se trata de prácticas sociales con un contenido que les dan fundamento. Por medio de ese referencial teórico hemos fundamentado la Psicología del conocimiento (Fávero, 2009a).

Como ya fue resaltado innumerables veces por la autora, considerar ese aporte en la práctica de la investigación y en la práctica de la enseñanza implica dislocar el énfasis de la **díade** sujeto-conocimiento, para la tríada sujeto-conocimiento-el otro, lo que supone admitir que la actividad en el proceso de enseñanza-aprendizaje se media; sea ese otro el profesor, o el investigador. Así, ella defiende que aunque se consideren ambas situaciones, en la dinámica socio-cognitiva, debemos considerar las construcciones cognitivas elaboradas y exploradas por cada individuo en esa situación. O sea, Fávero ha procurado defender la recuperación de la importancia de la autorregulación en el funcionamiento cognitivo de cada sujeto en el contexto **interacional** (Fávero, 2000, 2001, 2005a, 2005b, 2007a, 2007b, 2009a, 2009b).

Compatible con esas consideraciones esta autora ha defendido una articulación teórico-metodológica que considera tres aportes particulares: la situación **interacional**, el análisis de los actos del habla y la toma de conciencia en el sentido **desenvolvimental** piagetiniano. Adoptar el análisis de los actos del habla producidos en la interacción significa defender un procedimiento que, al mismo tiempo, evidencia la toma de conciencia de cada sujeto y evidencia sus procesos de reglamentos cognitivos y metacognitivos, por medio del análisis de los procesos comunicacionales de las interacciones (Fávero, 2000, 2005).

Esas consideraciones son válidas para los dos focos de estudio que relatamos a seguir: el desarrollo de las competencias de los alumnos y el desarrollo de las competencias del adulto, que es el profesor.

Método

Participaron del estudio ocho mujeres y dos hombres, estudiantes de los cursos de licenciatura en matemática y pedagogía, siendo ocho del curso de matemática y dos del curso de pedagogía, con edades entre 25 y 34 años. Cinco de los sujetos trabajaban como docentes en grupos de La Enseñanza Primaria Niveles Iniciales y Finales; de esos, dos actuaban en la red privada de enseñanza y tres en la red pública, no DF, Brasil. Los demás actuaban en otros sectores de la economía, principalmente en el área administrativa. Para la formación de ese grupo adoptamos como criterios de inclusión: 1/ sujetos con formación en licenciatura en matemática y pedagogía o en proceso de formación; y 2/ sujetos en inicio de carrera – tiempo de actuación inferior a cinco años.

A lo largo del desarrollo de la investigación, algunos de los que se iban a licenciar concluyeron el curso de graduación, por eso optamos, al referirnos a ellos, por utilizar el término *profesores* entendiendo que estos sujetos *una vez* licenciandos, podían compartir la opción de la práctica docente. En la presentación y discusión de los resultados, identificamos a los profesores por tres letras y un numeral: la F para el sexo femenino y la M para el sexo masculino; la segunda, M para el curso de matemática y la P para pedagogía; la tercera E para los sujetos con experiencia docente y ~~E~~ para los sujetos sin experiencia docente; por fin, el numeral funcionó como un contador. De ese modo, los profesores provenientes del curso de pedagogía se identificaron a lo largo de ese texto como: FpE1 y FpE2 y los profesores del curso de matemática como: Fm~~E~~1, Fm~~E~~2, FmE3, FmE4, Fm~~E~~5, Fm~~E~~6, MmE7 y Mm~~E~~8.

A los sujetos se les informó respecto a todas las etapas y procedimientos de la investigación en una reunión inicia, ocasión en que ellos rellenaron y firmaron el Término de Consentimiento Libre y Aclarado (exigencia del Comité de ética para la realización de investigaciones con seres humanos). Habiendo concordado con las etapas les invitamos a que se reunieran con la investigadora, en sesiones, en el laboratorio de enseñanza de matemática y, en algunos casos, en el aula del Instituto de Psicología de la Universidad de Brasília por el período de un año y dos meses lo que caracteriza un estudio longitudinal. En ese período, se realizaron 6 sesiones de, en media, 1 hora y 10 minutos de duración. Todas las sesiones fueron filmadas tras autorización previa de los sujetos, resultando en un *DVD* para cada sesión.

Se realizó cada sesión teniendo como elemento orientador el objetivo de la sesión de la tarea relacionada. En algunos casos el objetivo fue ampliado y/o alcanzado en dos sesiones. La lista siguiente presenta el conjunto de objetivos que orientaron el desarrollo de las actividades. Son ellos:

1) Evaluar la percepción de los profesores en cuanto a las competencias y a las dificultades conceptuales presentadas por las adolescentes en los vídeos;
2) Analizar la evaluación del grupo en cuanto a la actividad mediada de la investigadora presentada en los vídeos;

3) Instigar al grupo al análisis de los diálogos producidos por ellos sobre la solicitud de evaluar las dificultades y las competencias presentadas por las adolescentes;
4) Instigar al grupo al análisis de los diálogos producidos por ellos sobre la solicitud de evaluar la actividad mediada de la investigadora;
5) Identificar indicios de la práctica docente del grupo para los contenidos curriculares de las cuatro operaciones aritméticas, en especial, la operación de división y para los números racionales;
6) Evaluar la interpretación de los profesores para el texto (*Psicología del Desarrollo, didáctica y aprendizaje*) del libro *Psicología y Conocimiento: subsidios de la psicología del desarrollo para el análisis de enseñar y aprender* (Fávero, 2005).
7) Instigar al grupo a utilizar las contribuciones teóricas y metodológicas presentadas en el texto para el análisis de las competencias y de las dificultades que presenta la adolescente; 8/ instigar al grupo a avaluar la interpretación realizada por ellos para el texto; 9/ instigar al grupo a analizar la actividad mediada -desarrollada a lo largo de las sesiones a partir de las contribuciones teóricas y metodológicas que presenta el texto.

Las tareas se organizaron en cuatro grandes bloques:

1. Presentación de vídeos que retratan la intervención de la investigadora junto a adolescentes en situación de dificultad en matemática durante la resolución de situación-problema envolviendo división y números decimales.

2. Análisis de los diálogos producidos por ellos en el momento en que analizan las competencias, las dificultades presentadas por las adolescentes como también la mediación y la propuesta de intervención de la investigadora expresa en los vídeos.

3. Análisis del texto (*Psicología del Desarrollo, didáctica y aprendizaje*) del libro *Psicología y Conocimiento: subsidios de la psicología del desarrollo para el análisis de enseñar y aprender* (Fávero, 2005).

4. Análisis de sus diálogos en el contexto de la lectura e interpretación del texto referido arriba.

De ese modo, teniendo como foco el campo de los contenidos curriculares de la división y de los números racionales, desarrollamos las sesiones dirigidas a la articulación entre intervención e investigación para el estudio de las adquisiciones conceptuales, considerando la filiación entre competencias y dificultades y, al mismo tiempo, el análisis de la naturaleza de las actividades propuestas y desarrolladas, así como de los procesos mediacionales en las interacciones interpersonales. Durante estas sesiones, se abordaron diferentes temas entre ellos: la construcción social e histórica de los sistemas numéricos y su relación con el sistema de numeración decimal, puntuando la importancia del entendimiento del principio aditivo, multiplicativo, y de posición; la -construcción y la consolidación de los conjuntos numéricos, centrando el paso de los números naturales para los fraccionarios y para los racionales; los diferentes sistemas de medidas; la lógica de la notación de los algoritmos formales y alternativos tanto de la división como de las operaciones con números racionales, entre otros.

A continuación presentamos el extracto de una sesión ya organizado en la forma de tablas de análisis a partir de las contribuciones de los actos del habla.

TABLA 1: Extracto de análisis de protocolo de una sesión.

Transcripciones	Proposiciones	Actos del habla	Categorias de los Actos del habla
TRECHO 88 **P1:** *Traer un ábaco o hacer un ábaco con su participación... ¿Cuál es su sugerencia?*	Usted sugiere traer un ábaco para usarlo con **C** o construir un ábaco con su participación?	-incitar	Esfera acional
TRECHO 89 **MmE7:** *Incluso... Si hiciera un ábaco, mucho mejor, porque ella va a estar bien... Teniendo esa concepción mejor todavía... Cuestiones de unidad, de decena, de centena, de millar.*	Si se construye con su ayuda será mejor para que ella pueda entender los términos de unidad, decena, centena y millar.	-complementar	Esfera de la interacción
TRECHO 90 **FmE4:** Y, *en ese caso, yo creo que el material cuadriculado es mucho mejor que el dorado. Porque él da esa posibilidad... estar cortando junto con ella. "Vamos a cortar diez centavos." Imagina que cada cuadradito de aquel ( )... aquel papel cuadriculado con el que diseñamos... sea un centavo... ( )... o un décimo. Ahí ella va a ver.*	Yo sugiero el uso del material cuadriculado. El material cuadriculado es mejor que el dorado porque da la posibilidad de cortar poco a poco junto con la adolescente. Uno puede cortar cada cuadradito o cortar diez centavos.	-complementar -evaluar	Esfera de la interacción Esfera de la evaluación
TRECHO 91 **FmE6:** Y *que ella demostrase también en la escrita. Yo creo que ella... yo creo que su mayor dificultad, es en la...en la parte escrita, en la parte de...*	Ella necesita demostrar en la escrita. La mayor dificultad de **C** es en la escrita.	-evaluar	Esfera de la evaluación
TRECHO 92 **P1:** *Fm ¿Y cómo lo haría?*	¿Cómo haría esta actividad?	-incitar	Esfera de acción
TRECHO 93 **FmE6:** *Igual, ud...Cuando ud le pide que ella le demuestre en el dinero, ella demuestra; demostrar en el material dorado, ella demuestra. Ahora, "Me demuestra en la parte escrita." Coloca en el papel.*	Yo lo haría de la misma manera como tú lo hiciste con ella. Le pediría que lo mostrara en el material dorado, en el dinero y escrito en el papel.	-tomar posición	Esfera de la interacción
TRECHO 94 **MmE7:** *Creo que haciéndolo así, y haciendo la notación, ella va a tener un desenvolvimiento mayor.*	Estoy de acuerdo. Yo pienso que si lo hacemos así y con la notación, ella tendrá un buen desenvolvimiento.	-validar -tomar posición	Esfera de la evaluación Esfera de la interacción
TRECHO 95 **P1:** Y en *cuanto a las preguntas, ¿alguna sugerencia?*	¿Ustedes tienen alguna sugerencia para las preguntas?	-incitar	Esfera de acción

Presentación y discusión de los resultados

Muchos diálogos, acciones y gestos de los profesores en las sesiones de intervención exigen análisis. Evaluamos que la composición del grupo de profesores merece destaque. Esa composición fue marcada por tres situaciones, son ellas: 1/ la no-adhesión de profesores que actúan en las dos escuelas próximas a la institución sede de investigación comprueba la dificultad en tener profesores formados y en pleno ejercicio de la función docente, envueltos en proyectos de investigación; 2/ la adhesión de académicos de los últimos semestres tanto del curso de matemática como del curso de pedagogía señaliza el interés, muy común, entre los que se van a formar -en participar de actividades como proyectos, pasantías, cursos, entre otros, y puede estar relacionada a la preocupación de ese público relativa a la inserción y/o manutención en el mercado de trabajo; y 3/ la presencia de las académicas del curso de pedagogía apenas en la primera sesión, evidencia el recelo en participar de una investigación sobre el campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Muchos estudios confirman ese recelo una vez que muestran la dificultad de pedagogos en resolver problemas con números racionales, incluso problemas que componen la matriz curricular para los niveles iniciales (Santos, 2005; Fávero e Pina Neves, 2006).

En general, los datos muestran que, en las interlocuciones profesores/investigadora o profesores/profesores, las categorías de los actos del habla más utilizados fueron las de la información, con los actos de informar, confirmar, ejemplificar y rectificar, bien como -la interacción con los actos de complementar y contestar. En menor número, la evaluación con el acto de evaluar. En las interlocuciones investigadora/profesores, los actos más frecuentes fueron los de incitar, proponer y, en menor número, los de confirmar y complementar.

El bajo uso de los actos de interacción, por parte de los profesores, señaliza que sus diálogos estuvieron marcados por la concordancia, complementación y confirmación. En raros momentos se alteró ese hecho, y se declararon divergencias que se debatieron entre ellos, a pesar de las provocaciones constantes de la investigadora. En la segunda sesión, FmE4 discordó de la relevancia dada por FmE3 al material dorado y, en otro momento, criticó la baja cantidad de monedas de un centavo ofertadas a la adolescente en una de las filmaciones que se les mostró a los profesores. En la quinta sesión, FmE4 y FmE2 contestaron el diálogo de *MmE7: Así... Vamos... Lea un poquito, lea el contenido, haga los ejercicios... Utilice el ejercicio que se hizo en el aula para rehacerlo de nuevo... Una vez, dos veces, intenta hacer el ejercicio.* La menor cantidad de actos como: contestar, criticar y desafiar puede indicar, por ejemplo: el desconocimiento de los asuntos en discusión; la no-vivencia en situaciones de evaluación y exposición de argumentos; desinterés en enterarse de tales discusiones; o recelo en socializar sus análisis, entre otros.

La actividad mediada se construyó a lo largo de las sesiones con la finalidad de instigar, proponer e incitar al grupo a observar, a hablar, a cuestionar, a debatir y a proponer. En muchos momentos, enfrentamos dificultades en coordinar las preguntas dirigidas al grupo, visto que ellos no las respondían e insertaban elementos que -no siempre están relacionados a las preguntas formuladas. Además de eso, las respuestas producidas por ellos, la mayoría de las veces, se elaboraron en retórica de difícil entendimiento con la utilización de frases cortas y/o sin ligazón con las anteriores. Tales dificultades se minimizaron – en dos momentos – por ocasión de la mediación de la segunda autora de ese estudio: 1/ durante la lectura y el análisis de los datos de cada sesión; y, 2/ durante la observación de las sesiones mediadas por ella. Tal situación comprueba la necesidad de un análisis procesual de las sesiones, así como defiende Fávero (2000, 2001), además de ejemplificar que el desarrollo de nuevas competencias para la práctica de la intervención psicopedagógica acontece, también, a lo largo de la ejecución del estudio.

En general, los profesores mostraron dificultades de avaluar las competencias y las dificultades presentadas por las adolescentes. Los datos evidencian la falta de experiencia del grupo para trabajar con actividades de evaluación de dificultades y competencias de un alumno real a partir de sus acciones y de sus notaciones. La falta de proficiencia para ese análisis nos alerta a observar el *lugar que ocupan -en el proceso de enseñanza- las interpretaciones de los profesores sobre las notaciones de sus alumnos.* (Koch y Soares, 2005 p. 180). Tal constatación puede reflejar el lugar que la interpretación de las notaciones, por parte de alumnos y profesores, ocupa en los cursos de formación de profesores para la Educación Básica. Y señaliza que, en esos cursos, la práctica docente de matemática no se ha construido con base en esos análisis. Tales datos corroboran estudios en formación de profesores de matemática que relatan la dificultad -vigente en los cursos de formación de profesores de equilibrar: teoría y práctica, contenido y método, disciplinas de formación específica y disciplinas de formación para la docencia. Además de eso, observamos que los profesores insistieron en abandonar la producción de las adolescentes/adolescentes en debate; y elegir un alumno, un profesor o una escuela genérica para los análisis. El intento de todos de hablar con base a las informaciones del censo común imprimió, en muchos trechos, diálogos generalizados que no se referían a nadie.

En algunos momentos, el grupo evaluó la práctica docente en matemática, de modo general, destacando fallas y/o puntuando exigencias para esa práctica. Fue unánime en afirmar que la docencia de los niveles iniciales debe desarrollarse siempre con el apoyo de material “concreto”; que el uso de términos como “pasa para allá”; “pedir prestado”; “va uno” entre otros es común tanto en el diálogo de profesores de los niveles iniciales como en la de profesores de la enseñanza básica y media y que son inadecuados; puntuó que el uso de términos correctos debe ocurrir desde los niveles iniciales hasta la formación superior y que ese uso debe iniciarse en los cursos de formación de profesores.

Cuando les solicitamos a los profesores la proposición de actividades y/o la simulación de explicaciones, demostraron que también son usuarios de reglas y de los mismos términos juzgados por ellos como inadecuados. En la tercera sesión, por ejemplo, cuando MmE8 simuló en la pizarra cómo explicaría la división 327 por 42. *MmE8: Entonces, tiene que ser siete. Siete da. ( ) siete veces dos, va uno...siete veces cuatro, veintiocho; con uno, veintinueve... se substrae... siete menos cuatro, tres... dos menos nueve no da, <u>se le pide prestado</u>…. ((habla sonriendo)) queda doce... doce por nueve, tres... aquí quedó dos... dos menos dos, cero*. En la quinta sesión, cuando MmE7 habló sobre ecuación de primer y segundo grado, *MmE7:*

Porque uno mira la potencia... la potencia de x. La potencia aquí es uno, y aquí la potencia es dos, entonces, ecuación de segundo grado; *MmE7: Está igualando la ecuación a cero... Sólo que, como uno empieza a operar (aquí para saber el valor de cero), aisla allá... uno aisla primero, (dejar los valores que tiene) variable de un lado... y lo que no hay del otro lado. Entonces, aisla eso, para uno obtener el valor de x*, entre otros. Además, notamos que muchos de esos diálogos se aproximaban a los utilizados por las adolescentes en sus explicaciones, y señalizan -que el uso de procedimientos y/o reglas que indican “haz así, coloca aquí, aisla, cambia” es común al discurso de alumnos y profesores de la Educación Básica. Tales resultados son similares a los presentados en Fávero y Soares (2002).

Las propuestas de acción sugeridas por el grupo indican la utilización de material didáctico, comúnmente titulado por ellos de material “concreto”. Observamos que las propuestas son genéricas, -con descripciones rápidas de acciones, sin mencionar cómo desarrollarían tales propuestas y con qué finalidad. Tal comportamiento está en consonancia con los resultados presentados en Fávero y Pina Neves (2006) en el sentido de que los profesores sugieren determinado material, usan términos comunes al discurso pedagógico sin contenido, se apropiaron del significado de su uso y de las consecuencias de ese uso para el desarrollo conceptual. La indicación genérica del llamado material “concreto” sugiere que los profesores o la mayoría de ellos nunca utilizaron tales materiales en sus clases y/o elaboraron alguna propuesta de acción teniéndolos como instrumento mediador. Los diálogos sugieren también, que ellos tienen conocimientos generales de sus características físicas y pedagógicas, lo que comprueba, por ejemplo, la falta de argumentos favorables o contrarios a su uso, como presenciamos en el caso del material dorado.

Los profesores, en especial aquellos que actuaban y el aula, fueron provocados a observar y a analizar sus prácticas. Con todo, los resultados de la cuarta sesión comprueban que ellos no aceptaron el desafío y se esquivaron de la oportunidad de socializar, interpretar y discutir sus prácticas en el ámbito de la investigación. Además de eso, notamos que la variable experiencia estuvo presente en diversos momentos de las sesiones e influenció en comportamientos variados. Por ejemplo, FmE3, a pesar de actuar como docente en la enseñanza primaria, en ningún momento de las sesiones de las que participó socializó sus prácticas y/o las relacionó a los temas discutidos; FmE5 y FmE6 usaron el hecho de no actuar en el aula para justificar la baja participación en las interlocuciones, incluso cuando fueron provocadas; FmE1 y FmE2 a -pesar de no actuar en el aula, tuvieron participación sobresaliente en todas las sesiones y discutieron particularidades de la práctica docente; FmE7 y FmE4 usaron momentos de sus prácticas a lo largo de las sesiones para ejemplificar pasajes y/o momentos de los temas en debate, como puede observarse en el diálogo: *FmE4: Yo soy profesora de primer a cuarto grado, yo enseño a mis alumnos... Y ellos tenían esa historia de pedir prestado. Ahí yo les dije “No, vamos a aprender el término correcto.”*

El grupo fue unánime en evaluar que encontró dificultades en leer el texto propuesto, en el análisis de la quinta y sexta sesiones, visto que este, en el análisis de los profesores, es denso, usa términos propios de la psicología, muchos de ellos desconocidos y/o conocidos superficialmente por el grupo. Tal análisis coloca en discusión los cursos de formación de profesores, en especial, la formación inicial y señaliza que, en esos cursos, hay poco espacio y tiempo insuficiente para las disciplinas que articulan psicología, educación y matemática.

Observamos también, en el conjunto de las sesiones, que muchos hechos causaron desaliento en los profesores, entre ellos podemos citar: la socialización de las transcripciones de manera íntegra de las sesiones expone diálogo, acciones y paradigmas personales, como los presentados en la tercera sesión: *manipular la coma es saberla colocar en el local correcto*; l*a adolescente no sabe interpretar*; l*a adolescente no supo montar, montar significa pasar del lenguaje del portugués para matemática*; l*a adolescente no sabe montar la operación; concreto es cuando se consigue manipular; concreto es cuando se consigue tocar*; en la tercera sesión, la provocación vivida por ellos para que simulasen en la -pizarra la explicación de la división 327 por 42; los resultados de la cuarta sesión que los profesores comprobaran ser también usuarios de reglas sin la comprensión de los conceptos que las sustentan del mismo modo que las adolescentes; en la quinta sesión y en la sexta sesión la evidencia de las dificultades enfrentadas por ellos en la lectura y en la interpretación del texto, como lo expreso en el habla: *FmE4: es así que se lee un texto, yo nunca lo había visto así.* Esos desalientos pueden explicar, por ejemplo, la ausencia de MmE8 tras el episodio de la explicación en la pizarra, la participación de FmE5 y FmE6 solamente en algunas sesiones y el silencio de FmE3.

Otro dato evidenciado durante las sesiones fue el desconocimiento de los profesores sobre el desarrollo histórico del Sistema de Numeración Decimal. Ellos demostraron ideas superficiales de cómo evolucionaron los conceptos de base, de valor posicional y de operaciones a lo largo de los siglos, bajo cuáles circunstancias sociales y cómo esas circunstancias influenciaron en el modo de utilizar, en la actualidad, esos conceptos. Tales evidencias colocan nuevamente, en foco, el curso de licenciatura en matemática y el modo como ese articula, en su propuesta de formación, la construcción histórica de la matemática y los contenidos curriculares de la Educación Básica.

En las sesiones finales, algunos integrantes del grupo, en especial, FmE1, FmE2 y FmE4, evaluaron sus experiencias como discentes de la Educación Básica y de la Enseñanza Superior. Tales evaluaciones pueden acompañarse en el habla: *FmE2* “... l*a gente no sabe pensar lógicamente sobre los números...”* en la duda levantada entre ellas de que serían usuarias de reglas también en la enseñanza superior, *FmE1: reproduciendo reglas sin entender la -lógica.* Además de eso, ellas evaluaron, con el apoyo de los demás, de modo informal, al final de la quinta sesión, que el modelo didáctico *definición – ejemplos – ejercicios* es el más usado por la mayoría de los docentes de las disciplinas de contenido específico de la matemática en el curso que frecuentan. Y que las propuestas didácticas defendidas en las disciplinas de Pasantía Supervisionado, como evaluación procesual y formativa, prácticas de enseñanza investigativas, respecto a la producción de los alumnos, entre otras, no se pueden vivenciar por ellos en las disciplinas específicas. Interpretamos que tales denuncias, tras el término de la sesión, revelan el recelo de que los profesores graven las evaluaciones que hicieron sobre la práctica docente de sus profesores – formadores de profesores de un curso de licenciatura en matemática de una institución particular. Tales denuncias también se indicaron en muchos de los estudios presentados en el tópico 3.1, en especial, los que tenían como objeto la pasantía, como Ponte y Oliveira (2002) y Fiorentini y Castro (2003).

Observamos que los estudios Fávero y Sousa (2001) y Fávero y Soares (2002) citados en el texto puesto en análisis en una de las sesiones fueron decisivos para muchos de los análisis realizados por FmE1, FmE2 y FmE4, entre ellas: *FmE2: Así... Concordé con ellas. Creo que la gente aprendió así, fue por vía de regla. Y uno pasa eso para nuestros alumnos también, y ellos se quedan preocupados en seguir siempre una regla para poder resolver un problema.* Además, ellas muestran que evaluaron en las dificultades presentadas por C indicios de esa práctica docente. *FmE4: (el de la regla,) cuando ella habla "va uno, va uno," (en esa hora)... Va uno, pero no explica el porqué ( ).* Además de eso, ellas afirmaron, -teniendo por base los estudios citados arriba y los resultados presentados por la adolescente C durante las sesiones, que esa práctica se repite en todos los componentes curriculares de matemática, como indican los diálogos: *P1: ¿Ustedes piensan que eso sólo acontece con el sistema numérico? FmE2: No, con todos los contenidos. Todos los problemas... Tienen un pasaje que ( ) coloca que... Los de más experiencia ¿no? Ellos así... Ellos evalúan el problema, ¿no? Para después empezar a resolver. Ya quien... Quien no tiene tanta experiencia, va anotando todos los... Los datos... Y y va intentando aplicar una regla, y sin utilizar (mucho la) lógica.*

En ese sentido, observamos que ellas avanzaron, en relación a los demás profesores, en los análisis en pro de la construcción de una nueva práctica de enseñanza y de aprendizaje de la matemática, como ejemplifican los trechos: *P1: Para mediar la construcción del conocimiento matemático. Yo, profesor de matemática, ¿qué preciso conocer? FmE2: Conocer (teorías de enseñanza... que ella no coloca aquí) en las consideraciones finales. FmE4: ...está en las consideraciones finales... "Fenómenos físicos, fenómenos biológicos y teorías de la mente." ¿Cómo es que yo voy a entender lo que mi alumno (está construyendo), si yo no conozco las teorías (de construcción del conocimiento)? FmE2: Es un desafío, uno precisa (conocer esas teorías para poder enseñar). Y necesita saber matemática.*

Además, ellas muestran compartir de las mismas conclusiones en relación a las demandas que la construcción que impone la nueva práctica. *P1: Pero pensando en la práctica pedagógica, para la mediación del conocimiento matemático, ¿qué -- provoca la lectura del texto? FmE2: Que uno tiene que hacer un cambio, ¿no? No hay como ser apenas aquél profesor que escribe en la pizarra, (que transmite conocimientos). Uno tiene que... adquirir el conocimiento e introducirlo (en la enseñanza)... los alumnos tienen que participar... ellos son los que (tienen que llegar a la conclusión)... ( ), no uno pasársela ( ) a ellos. FmE4: y es una ( ) responsabilidad (del profesor)... y mediar realmente es el camino, pero con seguridad, ( ) responsabilidad... y no redimirse como nosotros hablamos allí, el alumno no sabe, no tiene (un) requisito previo, no estar justificando. Es responsabilidad nuestra. Lo que pasó del año anterior pasó, él no sabe hoy, conmigo. ¿Qué puedo hacer para* *cambiar? La investigadora encontró una solución. Hizo la mediación, y yo creo que es esa nuestra responsabilidad como profesores.*

Observamos que los comportamientos y las producciones de MmE7 y FmE3 presentados a lo largo de las sesiones comprueban cuán es difícil “socializar su quehacer”, “exponer sus paradigmas personales”, o sea, salir de una situación de confort para una situación de desaliento, de provocación. FmE3 no presentó momentos de su práctica en ninguna sesión, no tenemos registros de diálogos que expresen grupos en que actúo yo...”. Evaluamos que su presencia, en las sesiones, tiene un significado. Ya FmE7 presentó un comportamiento diferenciado. Fue uno de los más participativos y emitió su opinión en la mayoría de los temas debatidos. No se sintió incomodado en exponer su práctica y su lectura de los hechos, aun cuando fue cuestionado por los demás participantes. Él construyó, a lo largo de las sesiones, intervenciones que comprueban unas veces centrarse en la discusión, y otras veces descentrarse y en otros momentos usar como parámetro el -sentido común, y otras veces la producción de la adolescente. Observamos, en las sesiones finales, que él avanzó en la interpretación de su práctica, como muestran los trechos: *MmE7: Quiero dar continuidad a todo lo que aprendí dentro de la facultad, y aprendí en ese proyecto... fue muy bueno... así, mejoré mi perspectiva de lo que es enseñar matemática. P1: ¿En qué momento (allá en el aula o pensando sobre ella) (usted se dijo), “yo cambié!”? ¿En qué momento usted identificó eso? MmE7: Cuando empecé a dar clase, (yo era aquél) profesor... Aquél (dicho) profesor de matemática, “yo sólo voy a dar la verdad, sólo yo sé y ustedes no saben de nada”... Fue en esos días, yo explicando progresión aritmética (PA). Yo puse el ejercicio, ¿no? Aplicando aquella fórmula... el alumno, “profesor, yo lo hice de ese modo.”... Él fue y lo hizo correctamente. “¿Profesor, así está bien?” Yo Le dije “sí.” Tenía coherencia matemática, yo Le dije, “está bien... Yo creo que ¿Qué fue lo que yo le dejé producir? Su conocimiento, el ya lo tenía...* En fin, esos resultados muestran que los sujetos reaccionaron de modo diferente a la provocación que ellos pudieron vivenciar durante las sesiones de intervención. Además de comprobar el tiempo que exige el desarrollo de nuevas competencias.

Consideraciones finales

De modo general, las sesiones estuvieron marcadas por la resistencia de algunos profesores a las actividades propuestas y por las divergencias entre lo que hablaban y lo que proponían a medida que se discutieron temas como la transmisión y la construcción de conocimiento, la evaluación, la mediación, y el uso de materiales didácticos, a partir de la evaluación de las competencias y de las dificultades presentadas por las adolescentes. Las resistencias se observaron, por ejemplo, cuando el grupo no presentó ningún pasaje de la práctica docente para el análisis; cuando algunos profesores demostraron, no haber leído el texto propuesto; cuando MmE8 desiste de participar de la investigación después de exponer -en la tercera sesión- una explicación basada en el uso de reglas; con la baja participación de FmE5 y su posterior desistimiento en función de la falta de experiencia docente; y con las faltas a las sesiones de FmE6 y los silencios de FmE3.

Las divergencias entre diálogos y acciones se evidenciaron en muchos pasajes. Por ejemplo, cuando ellos criticaron la enseñanza por reglas y defendieron que el profesor de matemática debe hacer uso de materiales didácticos/concretos, en sesiones posteriores presentaron una propuesta de acción, pautada en reglas. Yo todavía, cuando MmE7 sugiere la repetición como método de enseñanza. Además, esas divergencias se observaron cuando ellos aprobaron la actividad mediada desarrollada en las sesiones con la adolescente, evaluaron que ella desarrolló competencias, atribuyeron su desarrollo a la naturaleza de la actividad mediada y al mismo tiempo se alejaron de las actividades de investigación.

Los profesores revelaron un discurso constructivista y práctica tradicional, por eso en muchos trechos, observamos las ideas de transmisión de conocimiento, lo que evidencia que algunos de ellos acreditan que, si el alumno se equivoca, es porque no prestó atención en la explicación del profesor, o que el aprendizaje de la matemática se da por observación pasiva y repetición de procedimientos. De modo semejante a los resultados presentados por Oliveira y Ponte (1999), los resultados comprueban que el conocimiento de los profesores sobre conceptos matemáticos y sobre aspectos del aprendizaje de esa disciplina es muy limitado y, frecuentemente, marcado por serias incomprensiones, o sea, parece haber lagunas en el conocimiento de base de los profesores relativas a los asuntos que enseñan y del modo como ellos pueden ser aprendidos.

En sus intervenciones, denunciaron que el curso de licenciatura que frecuentan concibe la formación docente, a partir del modelo de la racionalidad técnica, o sea, paradigma proceso-producto, una vez que se observa: la separación entre teoría y práctica en la preparación profesional; la prioridad que se le da a la formación teórica en detrimento de la formación práctica; y la concepción de la práctica como mero espacio de aplicación de conocimientos teóricos, sin un estatuto epistemológico propio (Moreira y David, 2005; Ferreira y cols., 2000). De cierta forma, los resultados de las sesiones con los profesores, aliados al hecho de algunos de ellos ya hayan actuado como docentes en la Educación Básica, comprueban lo que acompañamos en los últimos años: un aumento significativo en el número de profesores para una población escolar igualmente creciente. Lo que provoca, a cada día, -la creación indiscriminada de cursos de licenciatura en matemática y pedagogía en facultades de pequeño y medio porte y la expansión de la enseñanza superior privada, además del permiso al ejercicio profesional por personas no habilitadas (profesores legos). Luego, acompañamos la desvalorización y la descaracterización de la docencia como profesión, expresas, de acuerdo con Balzan (1985, p.15), “en la progresiva caída de los salarios reales de los profesores”, responsable por la sobrecarga de trabajo y, consecuentemente, por la caída de la calidad de la enseñanza.

Además de eso, observamos en el grupo de profesores que no todos tienen la carrera docente como opción. Eso sugiere que la escuela de la licenciatura está relacionada, en muchos casos, a la falta de oportunidades para tener acceso a otras carreras, dando margen para la lectura de que esta es una alternativa de segunda opción, una profesión-refugio, como definió Nóvoa. O, como La definen Sacristán (1995) e Imbernón (2000) una semi-profesión.

En lo que se refiere a las representaciones sociales, la matemática aparece, inicialmente, asociada a la idea de ciencia clásica, positivista, que, en el análisis de Fávero (2005b), fundamenta una “práctica que procura transmitir las teorías científicas de las diferentes áreas del conocimiento... por eso el verbo más usado por los profesores, al referirse a su práctica de enseñanza, es el verbo pasar" (p.55). En función de eso, en muchos momentos de las sesiones, observamos lo que defiende Abric (1998): "la representación funciona como un sistema de interpretación de la realidad que rige las relaciones de los individuos con su medio físico y social, que determina sus comportamientos y sus prácticas" (p.28). Con todo, los datos de la cuarta, quinta y sexta sesión, principalmente, aquellos que comprueban las consecuencias de la práctica docente a partir de la óptica de la transmisión, sugieren que algunos profesores cuestionen esta premisa.

Entretanto, los resultados comprueban, también, que algunos sujetos, en especial, FmE1, FmE2 y FmE4 analizaron la práctica de la transmisión de conocimiento y presentan indicios de que tomaron consciencia de los significados que sustentan esa práctica y de sus implicaciones para el desarrollo de competencias de la adolescente, y de los alumnos en general. En ese sentido, acreditamos que la intervención psicopedagógica desarrollada en esta investigación nos propició -a todos los profesores- tener acceso al significado de sus prácticas, la reflexión sobre esa práctica y, de cierto modo, subsidiar etapas de su reformulación. Entendemos que las resistencias presentadas por los profesores reflejan lo gradual y lento que es el recorrido de la reformulación.

Bibliografía

Abric, J. C. (1998). A abordagem estrutural das Representações Sociais. Em: Moreira, A.S.P. e Oliveira, D.C. de. (Orgs.), *Estudos interdisciplinares de Representação Social* (pp. 27-38). Goiânia: AB.

Balzan, N. C. (1995). *Nós os professores de licenciatura*. Cadernos CEDES, n.8, p.18-24.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília, DF, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília, DF, 1998.

Bourdieu, P. (1974). *A economia das trocas simbólicas*. Editora Perspectiva, São Paulo. Brasil.

Bakhtin, M. (1982). *Ce que parler veut dire*. Fayard, Paris.

Bruner, J. (1990). *Acts of meaning*. Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts.

Fávero, M. H. (1993). *Psicologia do Conhecimento.* Editora Universidade de Brasília, Brasília. Brasil.

Fávero, M. H. (1999). *Desenvolvimento cognitivo adulto e a iniciação escolar: a resolução de problemas e a notação das operações*. Temas em Psicologia**,** São Paulo, v. 7, n. 1, p. 79-88.

Fávero, M. H (2000). As funções das regulações cognitivas e metacognitivas na prática de atividades complexas do adulto: o professor em questão. Em: *Sociedade Brasileira de Psicologia (Org.), Resumos de Comunicação Científica, XXX Reunião Anual da Sociedade Brasileira de Psicologia,* p. 11, Brasília, DF.

Fávero, M. H (2001). Regulações cognitivas e metacognitivas do professor: uma questão para a articulação entre a psicologia do desenvolvimento adulto e a psicologia da educação matemática. Em: *Sociedade Brasileira -de Psicologia da Educação Matemática, Sociedade Brasileira de Educação Matemática (orgs.) Anais: trabalhos completos. I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática*. Curitiba: Editora da UFPR, pp.187-197.

Fávero, M. H. e Soares, M. T. C. (2002). *Iniciação escolar e a notação numérica: Uma questão para o estudo do desenvolvimento adulto*. Psicologia: Teoria e Pesquisa, 18(1), 43-50.

Fávero, M. H. (2005a). *Desenvolvimento psicológico, mediação semiótica e representações sociais: por uma articulação teórica e metodológica*. Psicologia: Teoria e Pesquisa, 21 (1), 17-25.

Fávero, M. H (2005b) *Psicologia e Conhecimento. Subsídios para a análise do ensinar e aprender.* Editora Universidade de Brasília, Brasília. Brasil.

Fávero, M. H. e Pina Neves, R. da S. (2006). A divisão e os racionais: como os professores avaliam a produção dos alunos.. Em: VII REUNIÃO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA DO CONE SUL, 2006, Águas de Lindóia, SP. SBEM (org.) Anais Coordenação do Evento. VII Reunião de didática da Matemática do Cone Sul. São Paulo, SP: PUC-SP.

Fávero, M. H e Pina Neves, R.S. (2007a). Problem solving competence and problem solving analysis competence: a study with pedagogues and psychologists. Em: XII Conferencia Interamericana de Educación -Matemática, 2007, Santiago de Querétaro, Qro.. Eduardo Mancera matínez y César Augusto Pérez Gamboa (Edts.). Santiago de Querétaro, Qro. : edebéméxico.

Fávero, M. H (2007b). Paradigme personnel et champ conceptuel: implications pour les situations didactiques. Dans : Maryvone Merri (Org.) Activités Humaine et conceptualisation. Questions a Gérard Vergnaud. Toulouse, France : Presses Universitaires du Mirail. pp. 625-633.

Fávero, M. H. (2007). Paradigme personnel et champ conceptuel:implications pour les situations didactiques. Em M. Merri (Org.), Activité Humaine et Conceptualisation (pp. 625-634). Toulouse, França: Presses Universitaires Du Mirail.

Fávero, M. H. (2009a). La psicología del conocimiento y la construcción de competencias conceptuales en la escuela. Revista Internacional Magistério, 7(39), Junio-Julio, Colombia, 18-22.

Fávero, M.H. (2009b). Os fundamentos teóricos e metodológicos da psicologia do conhecimento. Em M. H. Fávero & C. da Cunha (Orgs.), Psicologia do Conhecimento. O diálogo entre as ciências e a cidadania (pp. 9-20). Brasília: UNESCO/ Liber Livro.

Fávero, M. H. (2010) *Psicologia do gênero. Psicobiografia, Sociocultura e Transformações*. Editora da Universidade Federal do Paraná, Curitiba. Brasil.

Ferreira, A.C.; Lopes, C. E.; Fiorentini, D.; Jaramillo, D.; Melo, G.A.; Carvalho, V. e Santos-Wagner, V.,(2000). Estado da arte da pesquisa brasileira sobre formação de professores que ensinam matemática. Em *I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,* (pp. 264-271). São Paulo: SBEM.

Fiorentini, D. (1994). *Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-gradução*. Tese de doutorado, Universidade de Campinas, Campinas.

Fiorentini, D e Castro, F. C. (2003). Tornando-se professor de matemática: o caso de Allan em Prática de Ensino e Estágio Supervisionado. Em: Fiorentini, D (org.), *Formação do professor de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares (pp*. 121-136). Campinas: Mercado de Letras.

Geertz, C. (1989). *A interpretação das culturas*. LTD-Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro. Brasil.

Imbernón, F. (2000). *A educação no século XXI*. ARTMED, Porto Alegre. Brasil.

Koch, N. T. O. e Soares, M. T. C. (2005). O professor, seus alunos e a resolução de problemas de estrutura aditiva. Em M. L, F. Moro e M. T.C.Soares (Orgs.), *Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola* (pp.145-182). Curitiba, Editora da UFPR.

Lotman, Y. M. (1990). *Universe of the mind.* A Semiotic Theory of Culture. Tradução de:

Marková, I. (2003). *Le focus groups. Em S. Moscovici e F. Buschini (Orgs.), Les méthodes des sciences* (pp.221-242). Paris: PUF.

Mead, G. (1910). Social consciousness and the consciousness of meaning. *Psychological Bulletin*, v. 7, p. 380-341.

______. *Mind, Self, and Society* (Charles W. Morris Edit.) Chicago: University Chicago Press, 1992

Moscovici, S. (1986). L´ère des representations sociales. In: DOISE, W. ; PALMONARI, A. (Eds.). *L´étude des representations sociales*. Neuchâtel, Paris: Delachaux et Niestlé, p. 34-80.

______. Notes towards a description of Social Representations. *European Journal of Social Psychology*, v.18, p. 211-250, 1988.

Moreira, P. C. e David, M. M. M. S. (2005*). A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar.* Autêntica, Belo Horizonte, Brasil.

Nóvoa, A. (1995). *Profissão Professor.* Porto Editora, Porto. Portugal.

Pereira, J.E.D. (2006). *Formação de professores – pesquisa, representações e poder*. Autêntica, Belo Horizonte. Brasil.

Piaget, J. (1977). *A tomada de consciência*. São Paulo: Edições Melhoramentos/Editora de São Paulo.

Pina Neves, R. da S. (2008). *A divisão e os números racionais: uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores.* Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasília.

PISA (2004). Estrutura de Avaliação: Conhecimentos e habilidades em matemática, leitura, ciências e resolução de problemas, OCDE: Moderna.

Ponte, J. P e Oliveira, H. (2002). *Remar contra a maré; A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial*. Revista da Educação, 11 (2), 145-163.

SAEB (2003): Relatório/ Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. – Brasília: O Instituto.

Sacristan, J. G. (1995). Comprender y transformar la enseñanza. Madri: Ediciones Morata, cuarta edicion.

Santos, dos A. (2005). *O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no ensino fundamental.* Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Schön, D. A. (1995). Formar professores como profissionais reflexivos. Em A. Nóvoa (org.) *Os professores e sua formação*. Lisboa: Dom Quixote.

Vygotsky, L. S. (1979). Consciousness as a Problem in the Psychology of Behavior *Soviet Psychology*, v. XVII, n. 4, p. 35.

Wallon, H. (1963). "Psychologie et matérialisme dialectique" *Enfance, Numero special "Henri Wallon, buts et méthodes de la psychologie"* Paris, p. 31-34, janvrier-avril.

Young, G. (1997). *Adult development, therapy and culture:* A post-modern synthesis. New York: Plenum Press.

María Helena Fávero. Psicóloga con doctorado en psicología y dos posdoctorados,(uno con Doise (1998) y otro con Vergnaud (2001)) es investigadora del CNPq y profesora Asociada II, orientadora del Programa de Pos-Graduación en Procesos de Desarrollo Humano y de la Salud de la Universidad de Brasilia, Brasil, donde también coordina, desde 1998, el curso de Especialización en Psicopedagogía Clínica e Institucional. Su campo es el estudio de la Psicología del Desarrollo Humano, com énfasis en las competencias conceptuales, desarrollo psicológico adulto, psicologia del género y psicología de la Educación Matemática. **faveromh@unb.edu.br**

Regina da Silva Pina Neves. Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Goiás – UFG (1994), Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (2002) e Doutora em Psicologia, pela Universidade de Brasília (2008). Atualmente é professora adjunta do IME/UFG, atuando no Curso de Licenciatura em Matemática. Suas principais áreas de pesquisa são: Formação de professores, avaliação educacional, ensino e aprendizagem na Educação Básica e mídias educativas. **reginapina@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 117- 128
ISSN: 1815-0640

Resolución de problemas de Matemáticas y Pensamiento Crítico APRENC-Mates: propuesta de innovación en formación inicial de maestros

Claudia Vargas Díaz

Resumen

Dentro de la Didáctica de la Matemática, el método de George Polya ha sido un referente para la Resolución de Problemas que se utiliza en la Formación del Profesorado de Educación Infantil y Primaria (FIPEIP) en la Universidad Autónoma de Barcelona.
En un primer acercamiento nos preguntábamos cómo podría ayudar la teoría del Pensamiento Crítico en la FIPEIP y para ello elaboramos APRENC-Mates que es una “traslación” de seis elementos básicos del Pensamiento Crítico al terreno de la resolución de problemas de matemáticas. Ahora, pensamos que es importante dar a conocer que a raíz de este estudio surgió una tesis doctoral y que estas ideas podrían ser extensibles a las carreras de formación del profesorado de matemática de toda institución que quiera formar profesores con la competencia de resolver problemas de matemática y comunicar la manera en que realizan sus resoluciones.

Abstract

Within the Teaching of Mathematics, George Polya's method has been a benchmark for Troubleshooting used in Teacher Education and Primary Education (FIPEIP) at the Autonomous University of Barcelona.
In a first approach we wondered how he could help the theory of critical thinking and for thatelaborate FIPEIP APRENC-Mates is a "translation" of six basic elements of Critical Thinking in the realm of mathematical problem solving. Now, think it is important to acknowledge that as a result of this study emerged a doctoral thesis and that these ideas could be extended to the careers of mathematics teacher education institution all teacherswishing to join the competition to solve math problems and communicate the way they make their decisions.

Resumo

Dentro da Didáctica da Matemática, o método de George Polya foi um referente para a Resolução de Problemas que se utiliza na Formação do Profesorado de Educação Infantil e Primaria (FIPEIP) na Universidade Autónoma de Barcelona.
Numa primeira aproximação perguntávamos-nos como poderia ajudar a teoria do Pensamento Crítico na FIPEIP e para isso elaboramos APRENC-Mates que é uma “traslación” de seis elementos básicos do Pensamento Crítico ao terreno da resolução de problemas de matemáticas. Agora, pensamos que é importante dar a conhecer que a raiz deste estudo surgiu uma tese doctoral e que estas ideias poderiam ser extensibles às carreiras de formação do profesorado de matemática de toda instituição que queira formar professores com a concorrência de resolver problemas de matemática e comunicar a maneira em que realizam suas resoluções.

1. Introducción

Las Facultades de Educación de Cataluña contemplan cursos de Matemáticas como asignaturas del currículo del futuro maestro. En ellos fundamentalmente se revisan contenidos de operaciones básicas, conteo, geometría entre otros. La manera de introducir estos conceptos matemáticos en el aula de Formación Inicial de Profesores de Educación Infantil y Primaria (FIPEIP) es a partir de la resolución de problemas de matemáticas con fuerte énfasis en el descubrimiento y despertar matemático de los futuros maestros.

La metodología para la resolución de problemas es clave y se dispone a nivel general de algunos enfoques diferentes pero que buscan intrínsecamente lo mismo: resolver problemas. Mencionaremos los más conocidos, como lo son los métodos de Burton, Mason y Stacey (enfoque reflexivo), de Miguel De Guzmán (enfoque metacognitivo) y de George Polya (enfoque heurístico). Este último destaca desde el año 1945 y es el que se ha venido empleando en algunas clases de Matemáticas de las Escuelas de Magisterio. Los pasos de este método los recordamos brevemente: *Comprender el problema, Concebir un plan, La ejecución de un plan* y *La visión retrospectiva* (Polya, 1965).

Por otra parte, y desde otra arista del conocimiento científico, el Pensamiento Crítico, un pensamiento enfocado en qué creer o hacer acerca de algo. Fue definido así, por Robert H. Ennis, principal exponente contemporáneo de esta disciplina de la psicología.

De esta forma se estableció una recopilación documental acerca del Pensamiento Crítico, paralelamente una búsqueda de problemas y tipos de problemas en la literatura de Resolución de Problemas y para ilustrar la importancia del referente del Pensamiento Crítico en este trabajo, conviene señalar que Ennis dio origen a la definición de pensamiento crítico actualmente aceptada por la comunidad científica (Fisher, 2001).

En su libro *Critical Thinking* (Ennis, 1996) introduce lo que se considera como los seis elementos básicos del pensamiento crítico. A esto lo denomina aproximación FRISCO: *Focus, Reasons, Inference, Clarity, Situation y Overview*, que es una ayuda para hacer un *chekclist* mental para resolver problemas cotidianos usando pensamiento crítico. Esta aproximación fue desarrollada para juzgar ideas o crear unas nuevas a partir de una problemática existente.

Con base en las ideas de FRISCO hemos creado APRENC-Mates para la resolución de problemas. APRENC corresponde también a un acrónimo que se compone de: *Analizar el enunciado, ¿Por qué estos datos?, Ruta de Resolución, Entorno del problema, Nitidez en la explicación, Comprobar proceso y resultado.*

A su vez se ha considerado el trabajo de George Polya, cuya obra continúa vigente, como matemático a través de su método de Resolución de Problemas.

Dentro del Pensamiento Crítico se ha usado la aproximación FRISCO (Ennis, 1996) que se desglosa en:

Focus: *Determinar el punto principal de una afirmación o problema*

Reasons: *Cómo usar la información como soporte a una conclusión*

Inference: *Proceso hacia la conclusión a partir de las razones*

Situation: *El contexto del asunto, de la problemática*

Clarity: *Ser claro y preciso al expresar razones*

Overview: *Revisar la coherencia del proceso*

A partir de aquí se elaboró APRENC-Mates a partir de los seis elementos básicos de FRISCO considerando que existían ciertas conexiones entre los pasos del método de Polya y algunos de los seis elementos.

APRENC-Mates

A Analizar del enunciado del problema-FOCUS

Cuando resolvemos un problema de matemáticas lo primero que hacemos para entenderlo es intentar reconocer qué nos piden. Si no conocemos esto, perdemos tiempo de resolución. Otras preguntas que debemos hacernos son: ¿Está bien formulado el problema? ¿Qué se quiere resolver?, ¿Qué se quiere saber? ¿Cuál es la incógnita? Generalmente si no se tiene una mínima idea de lo que podría ser la solución al problema, cuesta empezar. Por esto es importante intentar comprender y analizar qué se necesita saber.

Problema de la película secreta. *Un espía desea ocultar un rollo de película secreta, que él ha conseguido reducir hasta 3 mm de diámetro y 55 mm de largo. Al mirar hacia su librería, se fija en los tomos de una enciclopedia. Con auxilio de una broca de 3mm de diámetro, el espía comienza a taladrar un orificio que va en línea recta desde la página 1 del volumen I hasta la última página del volumen II. Supongamos que, en cada volumen, las cubiertas tengan conjuntamente 5 mm de espesor, y que cada libro, sin cubierta, tenga 25 mm de grosor. ¿Tendrá el orificio longitud suficiente para alojar el rollo de película en él? ¿Qué longitud tiene el agujero?*

Para este problema la dificultad para comprenderlo puede radicar en la dificultad para identificar la información que es relevante. El resolutor debe tener claro a qué lado comienza a hacer el agujero el espía. Aquí las preguntas propuestas en A pueden ser útiles.

P ¿Por qué estos datos?-REASONS

Una vez que se ha identificado el problema corresponde analizar la información disponible con preguntas como las siguientes:

- ¿Qué datos me ofrece el enunciado?, ¿De qué naturaleza son los datos?, ¿Qué datos están implícitos en el enunciado?, ¿Qué datos del problema son importantes y cuáles son superfluos?, ¿Por qué el enunciado tiene estos datos y no otros?

- ¿Por qué esta información sirve para resolver el problema? y ¿Por qué esta información es un soporte para llegar a la respuesta? ¿Cómo se pueden interpretar estos datos?

Cuando ya hemos identificado para qué sirve la información disponible, es necesario valorar si esta información es suficiente para resolver el problema. En caso afirmativo, se comienza a elaborar una estrategia de resolución y a aplicarla a partir de la información. Si no es así, hay que buscar alternativas y regresar a A (Análisis de los datos).

Otro aspecto importante es que una vez formuladas las primeras hipótesis y esbozadas las primeras ideas a partir de los datos conviene preguntarse si los argumentos que estamos usando son válidos.

Problema del lobo, la cabra y el repollo. *Un hombre tiene que cruzar un río en una barca con un lobo, una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir él y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está el hombre delante, el lobo se come a la cabra y la cabra se come el repollo. ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?*

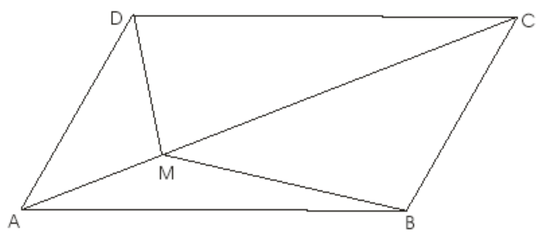
En este problema se ve por qué la información que hay sirve como base para llegar a la solución. De hecho, si no se toman en cuenta los datos detenidamente, no es posible idear una estrategia. La primera estrategia a usar en el problema del ejemplo precedente, seguramente es la prueba y el error.

R Ruta de Resolución-INFERENCE

La palabra INFERENCE desde la cual se hace la correspondencia desde el Pensamiento Crítico a la Resolución de Problemas, tiene una traducción no directa desde el inglés a la lengua castellana puesto que se trata de una palabra polisémica. En este trabajo INFERENCE se entenderá como lo propone Ennis, esto es, como un proceso para llegar a la conclusión a partir de unas razones.
Al resolver un problema de matemáticas, necesitamos razones para elegir un camino de resolución. Y a partir de alguna afirmación que sea verdadera en matemáticas, ya sea un teorema o el resultado de una experimentación, entonces se puede sacar una conclusión que permita decidir el camino a seguir.

Por lo tanto la Ruta de Resolución es el esquema de pasos para conseguir resolver el problema, teniendo en cuenta que puede haber más de un esquema de resolución. Luego corresponde analizar "los pro y los contra" de la Ruta de resolución que vamos a escoger.

Problema del Paralelogramo. Si M es un punto cualquiera de la diagonal AC del paralelogramo ABCD, ¿cuál es la relación que existe entre les áreas de los triángulos ADM y AMB?



Para este problema se han estudiado tres maneras de resolverlo (Cobo, 2004). De esta manera, como se aprecia en la siguiente figura, consideramos que el problema posee al menos tres Rutas de resolución para explorar y dar resolución.

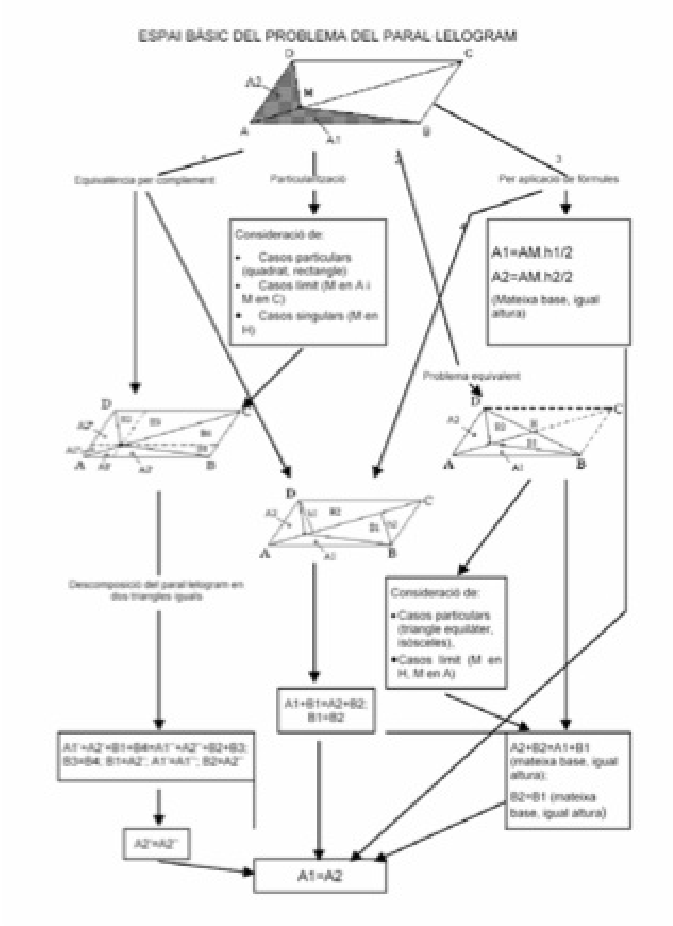


Figura 1. Dibujo de las posibles tres resoluciones en (Cobo, 2004)

E Entorno del Problema-SITUATION

Una vez elaborado el plan de acción se debe examinar el Entorno del problema. El entorno incluye todos los aspectos que están relacionados con el problema los cuales deben ser revisados para ver si el plan de acción está en consonancia con el entorno. Es crucial para resolver el problema el reconocimiento de:

- ✓ El contexto en el que está planteado un problema
- ✓ Las fuentes de información de que se disponen
- ✓ El background que tenga el resolutor con ese tipo de problemas
- ✓ Las limitaciones del resolutor. La falta de experiencia con un tipo de problemas concretos.
- ✓ El tipo de conocimiento matemático que se usa para resolverlo.
- ✓ Las estrategias de Resolución de Problemas conocidas.

Problema de Cabellos. *¿Se puede asegurar que en Santiago de Chile existen al menos dos personas con el mismo número de cabellos en la cabeza? Encuentra un argumento que confirme la veracidad de tu respuesta.*

Para resolver este problema se necesita conocer el Principio del Palomar. Esta información matemática sitúa al resolutor, así como también tener conocimiento de que un humano tiene en promedio 200.000 cabellos, y del mismo modo saber que en Santiago de Chile hay unos 5.000.000 (aprox.) de habitantes.

Para este ejemplo, desconocer estas dos informaciones, de cultura general, podrían llevar al resolutor a reconocer la desinformación como una limitación. Igualmente si no conoce o está mínimamente relacionado con el Principio del Palomar, tendrá que deducir y explicar con sus propias palabras el fundamento de la solución.

Cabe señalar que con lo anterior, no se está diciendo que sin conocer completamente el Entorno del problema sea imposible resolverlo.

N Nitidez en la explicación de la resolución-CLARITY

Es importante que lo que se escriba como una explicación del problema y del proceso esté claramente expresado. Conviene hacerse la pregunta ¿Qué estoy diciendo con todo esto?

Cuando se escribe o habla acerca de algo, ser claro y preciso en lo que se dice, da un valor añadido al contenido. Resulta idóneo para el propio resolutor y para sus interlocutores formular claramente la resolución del problema para dar a entender más eficazmente el camino elegido, la matemática utilizada, los pasos de la resolución y facilitar de esta manera el paso que sigue que es comprobar. Sobre todo, destacamos el beneficio para el propio resolutor (Mason, 1992) y más aún en la formación del futuro maestro.

Problema del Monje. *Una mañana, exactamente al amanecer, un monje budista emprendió la ascensión de una elevada montaña. El camino, un sendero de no más de medio metro de ancho, daba vueltas y revueltas en torno a la montaña, hasta un templo resplandeciente que había en la cima. El monje fue subiendo con velocidad variable deteniéndose muchas veces a descansar y a comer frutos secos que llevaba consigo. Alcanzó el templo poco antes de la puesta de sol. Tras varios días de ayuno y meditación, emprendió el viaje de regreso por el mismo sendero, partiendo al amanecer, caminando nuevamente con velocidad variable y haciendo muchas pausas a lo largo del camino. Su velocidad media en el descenso fue mayor que la velocidad media en el ascenso. Demuéstrese que hay un punto del camino por el que el monje pasa exactamente a la misma hora del día en ambos caminos recorridos.*

Para algunos problemas, comunicar la resolución apoyándose en la distribución de la información en una tabla de varias entradas o realizar esquemas explicativos, puede ayudar en primer lugar al resolutor y a su vez al que atiende a su explicación.

Para el problema del monje, la representación gráfica resuelve adecuadamente y de manera rápida el problema. El gráfico de la Figura 2, muestra explícitamente que existe un punto en el camino por el cual el monje pasa dos veces a la misma hora.

"la peculiaridad que posee la imagen o representación visual de poder escaparse a toda restricción y, al mismo tiempo, ser inmediata y directa la hace ser enormemente útil para problemas mal definidos o problemas de insight"
(Saiz, 2000, pág. 194)

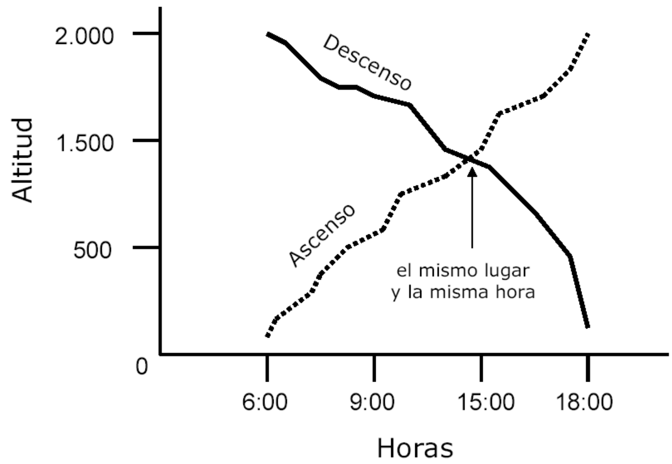


Figura 2. Gráfica de la solución del Problema del Monje

De esta manera, APRENC-Mates se pone a prueba como aproximación del Pensamiento Crítico a la resolución de problemas. Fue diseñado como un constructo que diera sustancia teórica para investigar qué aspectos del Pensamiento Crítico podrían ser un complemento al método de Polya para resolver problemas. No obstante, al tratarse de formación de maestros también se quiso relevar la importancia de explicar la resolución de un problema en la formación del profesorado puesto que a la fecha (Vargas, 2008) no se tenía considerado un plan de formación de maestros con énfasis en la comunicación del contenido.

El conocimiento profesional del profesor de matemática

En relación al conocimiento profesional del futuro maestro, dentro de las propuestas metodológicas hacia el diseño curricular de la FIPEIP se destaca el desarrollo de competencias intelectuales y profesionales propias del pensamiento haciendo mención a los tipos de pensamiento y al Pensamiento Crítico (Azcárate, 2001). Sin embargo, no existen antecedentes claros de una conexión directa entre pensamiento crítico y modelo curricular de formación de maestros o de profesores de secundaria.

En general, se presentan diversas opciones a la reflexión acerca de los elementos que deben caracterizar el conocimiento profesional deseable del maestro y la forma de desarrollarlo en el campo de la Educación Matemática (Carrillo, 1999).Pero el pensamiento crítico no ha figurado como una de las preocupaciones prioritarias.

En este estudio queremos destacar que algunas características del pensamiento crítico desde un punto de vista general están fuertemente ligadas a la actividad de Resolución de Problemas. No obstante, no hemos encontrado antecedentes documentales suficientes del área de FIPEIP en relación al pensamiento crítico y la enseñanza de la matemática, o en relación a la resolución de problemas de Matemáticas.

De hecho en las publicaciones periódicas de Didáctica de la Matemática (Bishop, 2003) los artículos que hacen referencia a la formación inicial no hacen relación directa con el pensamiento crítico. Si se presentaron hallazgos en otras áreas del conocimiento. Por ejemplo de investigadores australianos que mostraron el aporte del Pensamiento Crítico a la enseñanza de las ciencias. Ellos destacaron su utilidad en el desarrollo de la comunicación verbal y escrita de las soluciones de los problemas que fueron usados en el estudio (Hager et al., 2003).

Dentro de la revisión documental se abordó el terreno de la psicología del pensamiento, y se halló material bibliográfico acerca de Resolución de Problemas en general y Pensamiento Crítico. Afortunadamente para lo que es preocupación del área de la didáctica de la matemática, en este material se abarcan algunos problemas de matemáticas, donde se examinaban desde la psicología cognitiva las dificultades más frecuentes para resolver y el tratamiento heurístico de la Resolución de Problemas (Saiz, 2000).

Un hecho palpable en el aula de matemática de los futuros maestros es que en un porcentaje elevado presentan dificultades al resolver problemas de matemáticas en las aulas de Magisterio. Una de las dificultades que es transversal a cualquier estudiante y un problema que se forma desde etapas tempranas es la dificultad para comprender enunciados de problemas. Seguidamente, la dificultad para determinar qué datos son relevantes y cuáles son superfluos en el enunciado. Y por último la dificultad para orquestar una estrategia de resolución y ejecutarla.

Por otra parte, cuando se solicita a los alumnos explicar una resolución de un problema tienen dificultades en el manejo del lenguaje y en la capacidad argumentativa. Del mismo modo, cuando se les pide realizar comprobaciones de los pasos ejecutados.

Estas dificultades que presentan los futuros maestros para resolver problemas aún cuando se les instrumentaliza en el Método de Polya conllevan dificultades para comunicar explicaciones nítidas por escrito o verbalmente a terceros. Esto es evidente, se relaciona muy directamente con la práctica profesional del futuro maestro.

Con este nuevo modelo teórico se quiere abarcar la resolución problemas teniendo en cuenta que estas resoluciones podrían ser explicadas. APRENC-Mates se utilizó para identificar qué elementos de APRENC-Mates (basado en el pensamiento crítico) podrían complementar el Método de Polya de Resolución de Problemas de matemáticas usado por los futuros maestros de la Universitat Autònoma de Barcelona y qué beneficios se podrían derivan sobre su formación profesional. (Vargas, 2008)

De esta manera, sostenemos que con estas ideas del Pensamiento Crítico podríamos mejorar las competencias profesionales encontradas en la construcción del conocimiento a partir de la Resolución de Problemas de matemáticas. Más precisamente, se intenta conocer si los elementos de APRENC-Mates, pueden ser un valor añadido al Método de Polya de Resolución de Problemas.

En efecto, en (Vargas, 2008) afirmamos que la *Nitidez en la explicación de la resolución* contenida en APRENC-Mates, es un aspecto que podría complementar la formación del alumnado de FIPEIP que utiliza el Método de Polya.

Aspectos destacables de APRENC-Mates

Dentro de los aspectos a destacar de APRENC-Mates, se encuentra la *Nitidez en la explicación de la resolución* lo cual se podría ver como una competencia a desarrollar en la formación del futuro maestro que utiliza el Método de Polya para resolver problemas, puesto que éste no incluye explicar claramente los pasos ejecutados a terceros.

Evidentemente, comunicar un proceso de resolución es de vital importancia en este caso para un futuro maestro. Por este motivo, la *Nitidez en la explicación de la resolución* podría ser un valor añadido al futuro maestro.

Por tanto, podría ser significativo añadir esta idea del Pensamiento Crítico a la formación inicial de los futuros maestros. Sobre todo, pensamos que se trata de un aspecto interesante de trabajar con los futuros maestros, no sólo para ellos a nivel de formación, sino por las consecuencias que podrían surgir en su práctica profesional futura. Los futuros alumnos de los profesores en formación, podrían recibir los contenidos y las explicaciones de matemáticas desde esta perspectiva del Pensamiento Crítico.

Por otra parte, APRENC-Mates no está pensado de momento para ser probado en otros profesionales. Por ejemplo, para un matemático puede ser más importantes otro tipo de cuestiones acerca de la Resolución de Problema: el tiempo que emplea en resolver, decidir si una resolución es más elegante que otra o delimitar acuciosamente el espacio de soluciones.

Además rescatamos que el elemento C (*Comprobar el resultado y el proceso*) de APRENC-Mates está en consonancia con las ideas actuales de estándares de Resolución de Problemas:"Controlar el proceso de Resolución de Problemas matemáticos y reflexionar sobre él" (NCTM, 2003)

También está en sintonía con las capacidades de comunicación que evalúa PISA acerca de la comunicación del proceso y la solución de un problema de matemáticas implicados en los procesos matemáticos (Pisa, 2006) en cuanto al elemento N (*Nitidez en la explicación de la resolución*).(Ennis, 1996) de la teoría del Pensamiento Crítico, transportada como APRENC-Mates a la matemática, podría ser un aporte a la Resolución de Problemas en este contexto.

Ahora bien, sobre los aspectos que se podrían mejorar en la formación del profesorado usando APRENC-Mates, tenemos que la Nitidez en la explicación de la resolución, la importancia de la comprobación y la necesidad de profundizar en más técnicas heurísticas (Polya, 1965), son aspectos que detectamos en el estudio (Vargas, 2008) que resulta conveniente tener en cuenta. Claramente se deberá examinar otras formaciones de maestros y profesores para poder generalizar.

Sin embargo, hemos puesto en evidencia que se puede establecer una correspondencia entre los seis elementos básicos del Pensamiento Crítico, FRISCO (Ennis, 1996), y el conjunto de seis elementos APRENC-Mates basados en

FRISCO, los cuales podrían ayudar a mejorar las competencias heurísticas del futuro maestro como resolutor de problemas y también se podría ayudar a mejorar las habilidades comunicativas o competencia comunicativa del futuro maestro a través de la componente N de APRENC-Mates.

Con respecto al concepto N (*Nitidez en la explicación de la resolución*), proveniente de Clarity (Ennis, 1996), en el caso estudiado no se refleja ni explicita la importancia de `ser claro' y `preciso' en las explicaciones que se ofrecen a los compañeros de la clase.

Además se detectó, la ausencia del reconocimiento del *Entorno del problema*, es decir, de la matemática involucrada en la resolución del problema y de variadas técnicas heurísticas.

Por otra parte, los datos no reflejan la *Comprobación del resultado y del proceso*, ni en cuanto a los procedimientos matemáticos ni en cuanto a los pasos del proceso de resolución de los problemas.

De esta forma, respecto al objetivo de la investigación, concluimos que se han identificado los elementos de APRENC-Mates que podrían complementar el Método de Polya en lo que se refiere a desarrollar competencias heurísticas y también de cara a la formación profesional de los alumnos de FIPEIP. Estos elementos son:

1. Nitidez en la explicación de la resolución
2. Entorno del Problema
3. Comprobar el resultado y el proceso.

Con respecto a los beneficios que se podrían derivar en el desarrollo profesional del alumno de FIPEIP, los resultados nos han hecho reflexionar en que resulta prematuro afirmar que la implementación y aplicación de APRENC-Mates a alumnos de FIPEIP se traduzca en la transmisión correcta del conocimiento en las aulas de educación primaria, entre otras cosas. Pero si destacamos que los futuros maestros posiblemente darían importancia a:

a. Ofrecer explicaciones más claras a sus alumnos.
b. Guiar en la identificación del conocimiento matemático a utilizar.
c. Guiar en la búsqueda de las técnicas heurísticas de Resolución de Problemas más adecuadas a cada problema.
d. Fomentar la acción de comprobar los pasos y operaciones realizadas en la resolución de un problema.

Acerca de cómo se relacionan el Método de Polya y APRENC-Mates, hemos concluido que APRENC-Mates podría actuar como ayuda y complemento al Método de Polya. Todo esto teniendo en cuenta que el éxito de la Resolución de Problemas de los alumnos de FIPEIP no depende solo del método de resolución utilizado sino también del tipo de problemas a los que se enfrenten, del conocimiento matemático previo, y de factores socioculturales. Al igual que existen otros factores que serán influyentes en su práctica profesional.

Mencionamos también los aportes que a nuestro juicio se desprenden del estudio. Así con respecto las aportaciones teóricas, los elementos que componen

APRENC-Mates forman parte de los aportes teóricos de esta investigación. Recordamos aquí que APRENC-Mates surgió como una necesidad para poder investigar en la Resolución de Problemas utilizando elementos del Pensamiento Crítico.

Lo que es claro, es que la formación de maestros, que en Chile se llama Pedagogía en Educación Básica, tiene la detección de falencias instalada en el contenido matemático que maneja el futuro pedagogo para niños de 6 a 13 años. De hecho, los resultados de las pruebas INICIA, (Inicia, 2010) explican que se invitó en forma voluntaria a todas las instituciones que forman estudiantes en Pedagogía Básica egresados en Chile para la investigación. Lo que más se destacó fue que los egresados con mención en matemática presentan un nivel muy inferior con respecto a otras menciones. Se les evaluó en distintas áreas del conocimiento que sería deseablemente óptimo en un profesor en ejercicio de la profesión. Sin embargo, no se mencionan reflexiones en cuanto a lo comunicativo en la formación profesional.

Bibliografía

Azcárate G., P*. (2001) El conocimiento profesional didáctico matemático en la formación inicial de maestros. Servicio de Publicaciones Universidad de Cádiz.*

Bishop, A. (2003) *Second international handbook of mathematics education; edited by Alan J. Bishop . [et al.], Dordrecht [etc.]: Kluwer Academic Publishers, cop.*

Carrillo, J., Climent N. Eds (1999) *Modelos de formación de maestros en matemáticas. Universidad de Huelva Publicaciones.*

Cobo, P. (2004) *Disseny d´agentes pedagògicos Intel.ligentes per millorar les competències estratègiques de l´alumnat en la resolució de problemas de matemàtiques.* Licencia de estudios 2003-2004 http://www.xtec.es/sgfp/llicencies/200304/memories/868m.pdf.

Ennis, P. (1996) *Critical Thinking,* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Fisher, A. (2001) *Critical Thinking. An introduction*. Cambridge. Cambridge University. Press. Págs. 1-12.

Hager, P., Sleet, R., Logan P., & Hooper M. (2003) *University of Technology, Sydney Australia.* Teaching Critical Thinking in Undergraduate. Science Courses. *Science & Education* **12:** 303–313, 2003. © 2003 *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*(Inicia, 2010) http://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=pruebas%20inicia%202010&source=web&cd=1&sqi=2&ved=0CB4QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.educacion2020.cl%2Findex.php%3Foption%3Dcom_docman%26task%3Ddoc_download%26gid%3D124%26Itemid%3D55&ei=w-emToHkOs3dgQeR6uUE&usg =AFQjCNEGQqbx_zSkQkpCxcGUoDFxDGNKKQ&sig2=McTmRZxNF_TGZAsdu3D2hA

Mason, J., Burton, L., Stacey K. (1992) Pensar Matemáticamente, MEC. Labor. Barcelona.

N.C.T.M. 2003 Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sociedad Andaluza de Educación Matemática*.*

OCDE. Pisa 2006. Marco de Evaluación. Conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura. Pag. 101.

Polya, G. (1965) *Cómo plantear y resolver problemas.* Serie matemáticas. (México. Editorial Trillas).

Vargas, C. (2008) *Resolución de Problemas de Matemática y Pensamiento Crítico. APRENC-Mates y el Método de Polya. Un estudio preliminar en formación inicial* *de maestros.* Tesina de Doctorado. Programa de Doctorado Universidad Autónoma de Barcelona.

Vila, A., (2004) *Matemáticas para aprender a pensar*. Ed. Narcea. Barcelona.

Saiz, C. (2001) *Pensamiento Crítico. Conceptos básicos y actividades prácticas*. (Madrid. Psicología Pirámide). 183-235.

Claudia Vargas Díaz, trabaja en el Departamento de Matemática de la Universidad del Bío Bío. Concepción, VIII Región, Chile Línea de Investigación: Formación del Profesorado con énfasis en la Comunicación del Contenido Matemático y la Resolución de Problemas de Matemática.

Diploma de Estudios Avanzados (DEA) en Didáctica de la Matemática y doctorando programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática*. Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.* Magister en Ciencias Mención Matemática, *Universidad Católica del Norte*, Antofagasta**.** cvargas@ubiobio.cl

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 129-142
ISSN: 1815-0640

Modelagem Matemática: experiência com alunos de cursos de formação de professores

Marinez Cargnin-Stieler; Vanilde Bisognin

Resumo

O objetivo deste trabalho é descrever parte dos resultados de uma pesquisa de mestrado, realizada com alunos de um curso de formação de professores de Matemática, utilizando-se a modelagem matemática como metodologia de ensino. A experiência possibilitou o contato com problemas do cotidiano que interessavam ao aluno, o desenvolvimento da capacidade de criar situações-problema, de fazer conjecturas, resolver, analisar e interpretar as soluções relacionadas aos temas propostos.

Abstract

This paper aims to describe part of the results of a master degree research, conducted with students of a Mathematics graduation course, using mathematical modeling as methodology of teaching. The experience allowed the contact with everyday problems that were of interest to the students, developing the ability to create problem situations, make conjectures, solve, analyze and interpret the solutions related to the proposed themes.

Resumen

El objetivo de este trabajo es describir parte de los resultados de una investigación de maestría, realizada en un curso de formación de profesores de Matemática, utilizándose la modelación matemática como metodologia de enseñanza. La experiencia posibilitó el contacto con problemas cotidianos que interesaban al alumno, desarrollando la capacidad de crear situaciones-problema, de hacer conjeturas, resolver, analizar e interpretar las soluciones relacionadas a los temas propuestos.

1. Introdução

As Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de formação de professores, emanadas pelo Ministério de Educação do Brasil, apontam as seguintes características para os futuros licenciados em Matemática: visão de seu papel social de educadores e capacidade de inserção em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos; visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania; visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos e consciência de seu papel na superação dos preconceitos que, muitas vezes, estão presentes no ensino e na aprendizagem dessa disciplina.

Em relação às competências e habilidades próprias a esse educador, as diretrizes referem-se à formação de alunos críticos, reflexivos e autônomos, tendo como eixo central a construção do conhecimento matemático. Nessa direção, a sala de aula deve ser um espaço de ensino e aprendizagem que oportunize aos estudantes momentos para pensar, indagar, questionar, analisar, refletir e criticar, bem como um espaço em que a curiosidade seja permanentemente estimulada.

A busca de alternativas pedagógicas que modifiquem a atual estrutura do trabalho em sala de aula, que proponha a participação e corresponsabilidade dos alunos no processo de ensino e aprendizagem foi a problemática que motivou o estudo aqui relatado. Entre muitas outras alternativas, a modelagem matemática vem se firmando como uma prática pedagógica que tem apresentado resultados positivos ao ser utilizada na sala de aula, em diferentes níveis de ensino.

Nos últimos anos, diferentes pesquisas na área de Educação Matemática têm apresentado estudos relacionados à modelagem matemática como prática de sala de aula, cujos resultados dão conta do desenvolvimento das habilidades e competências descritas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais brasileiras para a formação de professores. Dentre essas pesquisas, em nível nacional, destacam-se os trabalhos de D'Ambrosio (1986), Bassanezi (2002), Burak (1987), Barbosa (2001), Borba, Meneghetti e Hermini (1997), Fidelis e Almeida (2004), Ferruzzi (2004), entre outros.

De acordo com Almeida (2007, p. 253), um dos argumentos para o uso da modelagem matemática como prática de sala de aula, em cursos de formação de professores, está no fato de que

> [...] a modelagem pode ser vista como uma oportunidade para desenvolver competências gerais no aluno, que vão além do aprender conteúdos matemáticos curriculares. Com esse encaminhamento o aluno tem estimulada sua criatividade, o seu interesse por descobertas e aspectos da matemática que vão além daquela incluída, necessariamente, no programa escolar.

As possibilidades do uso da modelagem matemática em sala de aula vêm ao encontro das sugestões contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), documento divulgado pelo Ministério da educação do Brasil, no qual se lê:

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-los (Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999, p 40).

No ambiente da escola, a implantação dessa metodologia de ensino passa pela preparação dos professores, tanto em serviço como na formação inicial, em cursos de licenciatura. Nesse sentido, Barbosa (2001a) afirma:

> É amplamente reconhecido que, o papel desempenhado pelos professores é estratégico em qualquer proposta curricular, pois são eles que organizam, decidem e orquestram atividades de sala de aula. Cabe, portanto considerar a formação de professores como uma das questões prioritárias, se não a mais importante, no âmbito da modelagem no ensino (p.2).

No presente trabalho, propõe-se a descrição parcial dos resultados de uma investigação realizada com alunos de um curso de licenciatura em Matemática, tendo a modelagem matemática como metodologia de ensino. A opção por essa metodologia respalda-se na necessidade de contribuir com as discussões sobre o processo formativo dos licenciandos, alicerçado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores de Matemática e nas potencialidades que a modelagem oferece para a construção de um conhecimento crítico e reflexivo.

2. Modelagem Matemática

Segundo Bassanezi (2002), modelagem matemática é:

> [...] um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (p.24).

Modelos matemáticos e situações descritas pelo autor, envolvendo a modelagem matemática, podem ser vistos como aproximações da realidade contextualizada, pois, geralmente, não é possível trabalhar com todas as variáveis do problema real.

Ao investigar temas da realidade é possível instigar o aluno a se interessar por problemas atuais da sociedade, como problemas econômicos e ambientais, entre outros, enquanto aprende Matemática. Dessa forma, o ensino pela modelagem passa a ter um papel relevante, pois permite que o aluno passe de uma atitude passiva para ativa no sentido de interagir com o professor e colegas e sendo responsável, também, pelas tarefas de sala de aula em um trabalho colaborativo.

Existem diferentes concepções para a modelagem matemática. Alguns autores, como Bassanezi (2002), usam-na como metodologia de ensino e outros, como estratégia de ensino (Barbosa, 2001), de acordo com a história de vida, a experiência e a formação de cada autor. Entendemos que a modelagem como metodologia de ensino é mais abrangente e está intimamente ligada com a visão de mundo, com a concepção de educação, de ensino que o educador possui.

Na modelagem matemática, busca-se, a partir de um tema escolhido pelo professor, em conjunto com os alunos ou escolhido por estes, a construção de modelos matemáticos que auxiliam na compreensão do problema social, ao mesmo tempo que novos conceitos matemáticos são construídos. Para Skovsmose (2001), a construção de modelos só é relevante se forem entendidas, além da construção matemática, as idéias relacionadas com o problema social que deu origem à questão a ser investigada. Essa é a concepção da modelagem matemática na direção da Matemática crítica defendida pelo autor.

Barbosa (2001b, 2003b), discute as perspectivas de modelagem matemática no cenário internacional, classificando-as em três formas de abordagem. A perspectiva pragmática, em que os alunos utilizam a Matemática para resolver problemas reais e o currículo se resume a tópicos com aplicações imediatas, prioriza o conhecimento técnico e a capacidade de resolver problemas. A perspectiva cientifica-humanista, em que o contexto é utilizado como motivação para conduzir os alunos ao conhecimento de conteúdos matemáticos. A perspectiva sócio-crítica, que analisa o papel da Matemática nas práticas sociais, prioriza o conhecimento reflexivo, a capacidade de discutir as implicações dos resultados matemáticos decorrentes da resolução de problemas da sociedade. Defendendo a idéia de modelagem na perspectiva sócio-crítica, Barbosa (2003b), argumenta que “[...] aplicações da matemática estão amplamente presentes na sociedade e trazem implicações para a vida das pessoas”.

A modelagem matemática, quando utilizada como metodologia de ensino, na sala de aula, possui um forte viés investigativo pois possibilita que os alunos participem ativamente do trabalho; favorece a criatividade e a curiosidade; permite a criação de um ambiente que propicia momentos de indagações, de descobertas, de troca de idéias, de reflexão, de crítica e de produção. Blum (apud BARBOSA, 2003a, p. 67) discute cinco argumentos para incluir a modelagem matemática na educação escolar:

a) Motivação: os alunos sentir-se-iam mais estimulados para o estudo de matemática, já que vislumbrariam a aplicabilidade do que estudam na escola;
b) Facilitação da aprendizagem: os alunos teriam mais facilidade em compreender as idéias matemáticas, já que poderiam conectá-las a outros assuntos;
c) Preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas: os alunos teriam a oportunidade de desenvolver a capacidade de aplicar matemática em diversas situações, o que é desejável para moverem-se no dia-a-dia e no mundo do trabalho;
d) Desenvolvimento de habilidades gerais de exploração: os alunos desenvolveriam habilidades gerais de investigação;
e) Compreensão do papel sócio-cultural da matemática: os alunos analisariam como a matemática é usada nas práticas sociais.

Por essas razões, entende-se que a Matemática faz sentido para o aluno quando ensinada sob a abordagem da modelagem matemática. Dessa forma, busca-se auxiliar os alunos na compreensão dos fatos sociais que geraram a problemática e, ao mesmo tempo, na construção do conhecimento matemático. Esse processo de busca de dados, de elaboração de hipóteses, de formulação de perguntas e respostas, de discussão e análise do trabalho a ser realizado permite, não só a compreensão do papel social da Matemática, mas também, a aprendizagem de conteúdos matemáticos específicos, relacionados ao tema proposto.

A ligação intrínseca da modelagem com a pesquisa também é explicitado, por Barbosa (2001a), quando defende o uso da modelagem em cursos de formação de professores. O autor considera como vantagens da modelagem matemática: a contribuição na compreensão dos conteúdos matemáticos; o desenvolvimento de habilidades de pesquisa e experimentação que levam em consideração o contexto sociocultural; a interdisciplinaridade; a espiralização do currículo; a significação das atividades escolares; o envolvimento dos alunos; o relacionamento e a influência positiva no desempenho escolar.

Todas essas possibilidades que a modelagem favorece, ao ser usada na sala de aula, vêm ao encontro do que preconizam as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores (Conselho Nacional de Educação, 2001). É, portanto, imprescindível, que o aluno de cursos de licenciatura experienciem essas atividades ao longo de sua formação, pois o sucesso dessa metodologia depende da instrumentalização do professor, que não pode se resumir a aspectos técnicos contidos nos programas das disciplinas.

3. Abordagem metodológica

A pesquisa realizada, aqui parcialmente relatada, teve como objetivo geral analisar as possibilidades que a modelagem matemática oferece à aprendizagem contextualizada de conceitos matemáticos e estatísticos, em uma turma de sétimo semestre de um curso de Licenciatura em Matemática. A abordagem de pesquisa é qualitativa e foram empregados, como instrumentos, observação participante, diários de campo, análise de documentos e entrevistas.

Justifica-se a observação participante pelo fato de que a pesquisadora participou ativamente do trabalho da sala de aula, juntamente com a professora da turma, e as situações de aprendizagem em estudo exigiram seu envolvimento constante nas atividades.

A disciplina escolhida para a realização da pesquisa denomina-se “Projeto de pesquisa e extensão em Educação Matemática”, com duas horas semanais totalizando 30 horas semestrais e que contempla, em sua ementa, a metodologia da modelagem matemática. O objetivo da disciplina é oferecer aos alunos, futuros professores, a oportunidade de, no decorrer de sua formação, vivenciar uma experiência concreta com essa metodologia de ensino.

Com o propósito de encaminhar o trabalho em sala de aula, a pesquisadora, juntamente com a professora da turma em questão, seguiram as etapas da modelagem matemática descritas por Burak (2004), que são: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução do(s) problemas e desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema; análise crítica da(s) solução (ões).

A atividade de sala de aula foi encerrada, no final do semestre, com a apresentação dos trabalhos dos grupos aos colegas e pesquisadoras e, dessa forma, os estudantes puderam compartilhar os resultados da experiência com a comunidade escolar.

4. Descrição e análise da experiência realizada

No primeiro encontro, a professora responsável pela disciplina apresentou o Plano de Ensino e discutiu com os alunos o trabalho que seria desenvolvido. Em seguida, reuniu os alunos em duplas e entregou alguns artigos para leitura individual; após, foi realizada uma sessão plenária para discussão coletiva, com o objetivo de introduzir o trabalho com modelagem na sala de aula. Os artigos escolhidos foram: *Modelagem na Educação Matemática: Uma perspectiva* (BARBOSA, 2004) e *Modelagem Matemática em sala de aula: um estudo* **(**FIDELIS; ALMEIDA, 2004).

Nesse primeiro encontro, os alunos perguntaram qual o livro a ser seguido, como seria realizada a avaliação, se teriam aulas expositivas. Na verdade, não estavam entendendo a dimensão que seria dada ao trabalho de sala de aula, porque não fazia parte de suas rotinas.

Durante o trabalho, observou-se que os grupos escolheram, para seus trabalhos, temas vinculados ao seu cotidiano, como maconha, transportes urbanos, carros bicombustíveis e criação de chinchilas. Desde o início, os alunos sentiram-se desestabilizados e a tendência foi proporem o retorno à cômoda situação tradicional, na qual o professor explana o conteúdo e os alunos assistem passivamente à exposição.

A cada encontro, parecia que as inseguranças aumentavam. Concordamos com Skovsmose (2000) quando afirma que cenários para a investigação representam *zona de risco.* Em alguns momentos, tínhamos dúvidas se nossos alunos conseguiriam realizar o que tínhamos proposto. Não sabíamos o que iriam perguntar e nem o tema que iriam escolher. Segundo Barbosa (2001a, p. 5), “Os conceitos e idéias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade”.

Os alunos perceberam, logo no início do trabalho, que as professoras não respondiam diretamente as perguntas, mas questionavam e suscitavam dúvidas. Seguimos esse caminho por acreditarmos que “a investigação é o caminho pelo qual a indagação se faz. É a busca, seleção, organização e manipulação de informações [...]. Pode-se dizer que Modelagem é uma investigação matemática, pois ela se dá por meio de conceitos, idéias e algoritmos desta disciplina” (BARBOSA, 2001a, p. 6).

Tanto nós, professoras, quanto os licenciandos estávamos aprendendo e foi difícil adotar uma nova postura de “ser professora” e de “ser aluno”. Nesse sentido, Caldeira (2004, p. 2) argumenta que

> [...] faz-se necessário uma nova postura do professor frente a essa nova realidade docente, postura essa que se concretizará através de concepções alternativas de aprendizagem da Matemática e de novas metodologias em que o professor possa optar por aquela que mais se adapte para essa nova realidade.

Um dos grupos investigou sobre drogas, especialmente maconha, que, segundo pesquisas realizadas por eles, as estatísticas mostram ser uma das principais drogas ilícitas consumidas pelos estudantes secundários e universitários. É importante lembrar que a cidade em que foi realizada a pesquisa é uma cidade universitária, que congrega um grande número de estudantes, de todos os níveis de ensino. O trabalho realizado por esse grupo de licenciandos chamou a atenção das pesquisadoras devido a grande resistência inicial apresentada por eles e os resultados obtidos no final, em que pudemos constatar seu envolvimento e crescimento. Assim, para este artigo, optamos por descrever e analisar a trajetória desse grupo na realização do trabalho. Algumas situações-problema por eles construídas são descritas na próxima seção.

Após a escolha do tema, o grupo ficou entusiasmado e acreditava que poderia criar bons problemas e que posteriormente poderiam aproveitá-los para trabalhar com os jovens, como futuros professores: “[...] acho que drogas será um ótimo assunto. Os alunos gostam de falar desse assunto." (Van) (Recorte extraído do Diário de Campo da pesquisadora).

Pelas falas, percebeu-se a preocupação com o ensino e com a aplicação dessa metodologia em sala de aula, pois, como futuros professores, gostariam de adotá-la, por acreditarem que poderia fazer diferença para a educação.

No encontro seguinte, sentimos que o grupo estava mais confiante com o tema escolhido. Na pesquisa exploratória, investigaram sobre drogas, especialmente maconha e sobre os conteúdos matemáticos que acreditavam ser possível trabalhar a partir do tema.

Ao iniciar a busca dos dados começaram a sentir dificuldades e, muitas vezes, ficaram desmotivados, tentando retornar ao trabalho com aulas expositivas. A professora responsável pela disciplina reforçou que precisavam buscar leituras sobre o tema e dedicar-se na busca de informações. Ela os auxiliou na procura de dados e sugeriu pesquisas em revistas especializadas, jornais, entrevistas com especialistas da área, Internet, entre outras possibilidades. Sentimos que o grupo precisava de apoio continuamente, pois na presença de pequenas dificuldades os alunos desanimavam.

O relato do grupo no Diário de Campo traz:

> Com a coleta de dados, começou-se a pensar como elaborar uma situação-problema. Com o auxílio da professora, foi trabalhado a seguinte situação-problema: 'com o passar do tempo, qual é a concentração de maconha no organismo se for ingerida na forma pulmonar, sendo considerada a meia-vida?

As alunas marcaram uma entrevista com agentes da Delegacia Especializada em Furtos, Roubos, Entorpecentes e Capturas (DEFREC) do município em que a pesquisa foi realizada e nos convidaram para acompanhá-los. O grupo concluiu que teriam melhor proveito se conhecêssemos o assunto em profundidade e se elas estivessem com o roteiro de entrevista definido. Concordaram com a afirmativa de Barbosa (2001a, p.7), de que "indagação e investigação são tidas como indissociáveis, pois uma só ocorre na mesma medida da outra. Se o aluno não avança no conhecimento das informações sobre a situação em estudo, não pode indagá-la; e vice-versa".

Na DEFREC, fomos bem recebidos e tivemos o tempo necessário para entrevistar as pessoas. As entrevistas foram esclarecedoras, pois tivemos oportunidade de conhecer exemplares de drogas apreendidas, objetos que acompanham as apreensões e prontuários e, inclusive, a própria delegacia.

No encontro seguinte foi realizado um estudo com os dados. É um assunto polêmico e difícil de modelar, pelo fato de ter várias informações e algumas contradições. Por correspondência eletrônica, a aluna Li agradece a professora pesquisadora e relata as atividades que pretende realizar.

A investigação do conteúdo matemático, a elaboração das situações-problema, a resolução e validação costumavam acontecer ao mesmo tempo porque, conforme acontecia a busca de dados, as alunas foram elaborando situações-problema, investigando conteúdos matemáticos e estatísticos, encontrando a solução e validando-a. Percebeu-se que as alunas estavam autônomas e pesquisavam sozinhas, elaboravam situações-problema e procuravam resolvê-las e as professoras continuavam dialogando com o grupo sobre suas investigações. A partir desse momento, percebeu-se que o grupo estava participativo e entusiasmado com o assunto e com as atividades de Modelagem Matemática produzidas.

Os conteúdos matemáticos estudados pelo grupo durante a realização do trabalho foram: funções lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, crescimento e decrescimento das funções, limites dessas funções, equações de diferenças de primeira ordem, medidas de tendência central, como média, moda e mediana, medidas de dispersão, como variância e desvio padrão e a regressão ou ajuste de curvas, taxas de crescimento ou decrescimento e os diversos tipos de representações gráficas utilizadas para representação dos dados. Citamos todos os conteúdos matemáticos e estatísticos estudados durante a realização do trabalho, independente da solução ou modelo matemático escolhido para a situação-problema do grupo.

Após o fechamento do trabalho do semestre, percebemos que os alunos sentiram-se valorizados, entusiasmados e seguros em apresentar o trabalho em congressos de bom nível acadêmico, como a Jornada Nacional de Educação, realizada na cidade em questão.

Ao final do trabalho, foi realizada uma entrevista coletiva, com o objetivo de levantar a apreciação do grupo sobre a experiência realizada. A primeira questão dessa entrevista, foi sobre a metodologia utilizada nas aulas da disciplina e os alunos opinaram positivamente sobre isso, por despertar o gosto e o interesse pela Matemática.

Em nenhum momento classificaram Modelagem Matemática como fácil, pelo contrário, acreditaram ser trabalhoso para o aluno e na opinião deles, foi um trabalho diferente do que estavam acostumados a fazer; sentiram-se desestruturados no início, mas aos poucos foram se sentindo seguros. Transcrevemos a fala de uma aluna do grupo referindo-se ao trabalho realizado: “[...] tinha que escrever e esse era o problema, mas foi legal.” (Li).

Citaram também o pouco tempo para decidir o que fazer, a dificuldade para escrever e não poder ausentar-se das aulas, devido ao fato de que o trabalho era em grupo. Argumentaram que se sentiam responsáveis pelas aulas; tinham que pensar no que iam fazer, mas tinham clareza do que fazer. Reproduzimos as falas desse grupo quando se referem a essa situação: “[...] achei muito interessante, ficou bem claro o que fazer. Nós tínhamos que fazer, nós tínhamos que correr atrás...” (Van). [...] Gostei muito de trabalhar, pesquisamos muita coisa que não conhecia.” (Li).

A segunda questão foi sobre a importância do trabalho para sua formação, pois aprenderam como trabalhar determinados conteúdos, envolvendo os alunos na aprendizagem. O fato de trabalharem um tema do cotidiano e a motivação despertada foram outras vantagens citadas pelos alunos. Transcrevemos partes das respostas dos alunos sobre a importância da Modelagem Matemática:

> [...] é importante para a formação porque consegue envolver o aluno, trazer assunto do cotidiano, da região. Envolve o aluno, chama a atenção, anima o aluno, traz o real, motiva o aluno. (Li)

Citaram também que aprenderam a pesquisar e que se sentiram desafiadas, pois no início acreditavam que não seriam capazes de investigar sobre um assunto e elaborar situações-problema, mas com o passar do tempo perceberam que conseguiram realizar o trabalho e, além disso, aprenderam novos conteúdos matemáticos e estatísticos. Em seus diários, registraram:

[...] é um desafio à nossa capacidade, escrever e montar os problemas. (Van).

[...] parece que é muito confuso, muita coisa, depois que a gente estrutura, então fica fácil. (Van)

[...] foi interessante, trabalhamos com *softwares* diferentes, conhecemos situações que não conhecíamos. (Lia

[...] pesquisei muita coisa que não sabia. (Lia).

A terceira pergunta foi sobre a adoção dessa metodologia com seus alunos e o porquê. Argumentaram que a Modelagem Matemática torna o aluno e o professor criativos e motiva o trabalho, pois busca criar situações-problema que envolvem a vivência do aluno. Citaram que as maiores vantagens vislumbradas foram: a produção do conhecimento, a oportunidade de realizar pesquisas, de escrever, de buscar soluções de problemas reais. Apontaram também a liberdade do trabalho e o fato de não precisar ouvir o professor durante toda a aula.

Salientaram que foi uma disciplina diferente e difícil porque não haviam trabalhado dessa forma em outras oportunidades mas que gostariam de continuar a trabalhar com esta metodologia em outros momentos do curso. Enfatizaram que, apesar das dificuldades, conseguiram compreender o tema escolhido, criaram problemas e resolveram, aprenderam conteúdos novos que não tinham estudado e, principalmente, conseguiram produzir um texto científico.

Os resultados positivos obtidos com o trabalho desse grupo permitiram às pesquisadoras comprovarem o que Barbosa (2001b) afirma serem as vantagens da utilização dessa metodologia de ensino na sala de aula: a contribuição na compreensão dos conteúdos matemáticos; o desenvolvimento da habilidade de pesquisa observando o contexto sociocultural; a significação das atividades escolares; o envolvimento dos alunos; o relacionamento que se estabelece entre os alunos e entre estes e o professor; a melhoria da auto-estima dos alunos. Os participantes dessa investigação demonstraram características idênticas àquelas citadas por Blum (apud BARBOSA, 2003a) e Bassanezi (apud BARBOSA, 2004) que são: motivação, facilitação da aprendizagem, aplicação da Matemática em diversas situações, desenvolvimento de habilidades para a investigação e compreensão do papel sociocultural da Matemática.

5. Situações-problema construídas pelo grupo analisado

Apresentamos algumas situações-problema proposta pelo grupo analisado neste relato, que envolveu o estudo do conteúdo de equações de diferenças lineares de primeira ordem.

Situação-problema 1.

Uma das principais substâncias químicas usada na preparação da maconha é o delta 9 tetrahidrocanabinol (Delta-9-THC) e, em cada cigarro de 500mg, há 1% de *concentração dessa substância. Além disso, segundo dados obtidos na Delegacia de Entorpecentes, um usuário crônico fuma, diariamente, uma média de 5 cigarros de maconha. Qual é a concentração de THC no organismo do usuário com o passar do tempo?*

Depois de várias discussões, os alunos começaram a construir algumas hipóteses para resolver essa questão. A primeira hipótese foi desconsiderar o tempo de eliminação da droga, que tem a meia vida de 50 horas, devido ao fato de que, conforme a substância é eliminada do organismo, o sujeito acrescenta novas doses e essa eliminação é lenta. A partir da definição dessa hipótese, os alunos construíram o seguinte quadro:

Quadro 1: Concentração de THC

Dia	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
Cigarro	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
THC (mg)	25	25+T0 = 50	25+T1 = 75	25+T2 = 100	25+T3 = 125	25+T4 = 150	25+T5 = 175	25+T6 = 200	25+T7 = 225	25+T8 = 250

A partir dos dados, o modelo matemático construído por eles foi o seguinte:

- no 1º dia, o indivíduo absorve 25mg de maconha, ou seja, T1 = 25mg.
- no 2º dia, o indivíduo absorve T2 = T1 + 25 = 50mg.
- no 3º dia, o indivíduo absorve T3 = T2 + 25 = 75mg.
- no n-ésimo dia, tem-se Tn = Tn-1 + 25, em que n é o tempo medido em dias.

Essa é uma equação linear de diferenças. Após a análise da solução, os alunos concluíram que, em 10 dias, esse indivíduo possuiria em seu organismo um total de 250 mg de THC. Com o passar do tempo, a concentração de THC no organismo, aumentaria muito, podendo trazer conseqüências graves para a sua saúde, como doenças cardiovasculares e câncer de pulmão, segundo as informações que eles obtiveram na Internet.

Do ponto de vista da Matemática, os alunos trabalharam com equações de diferenças e estudaram a forma de obtenção da solução. Esse tópico era desconhecido até a realização desse trabalho, pois não haviam tido oportunidade de trabalhá-lo em outras disciplinas.

A partir de informações obtidas e também da experiência anterior, o grupo definiu outras hipóteses que poderiam ser levadas em consideração. Consideraram a mesma situação anterior mais a meia vida da droga e questionaram sobre o tempo que uma dose de 500mg permanece no organismo humano. De posse das informações e das hipóteses consideradas, o grupo construiu um quadro do tempo de permanência da droga no organismo do usuário.

Quadro 2: Concentração da maconha no organismo

Tempo T (em horas)	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750
Quantidade C(t) em mg	500	250	125	62,5	31,2	15,6	7,81	3,9	1,95	0,97	0,48	0,24	0,12	0,06	0,03	0,01

Observando o quadro anterior, o grupo deduziu um modelo matemático representativo da nova situação e descrito pela equação:

$$Tn+1 = Tn - (Tn)/2$$

em que n é o tempo medido em horas.

O grupo percebeu que, ao ingerir uma dose de 500 mg, esta leva, aproximadamente, 30 dias para ser eliminada totalmente do organismo. A dose analisada, de 500 mg, é considerada pequena e, se consumida diariamente, um indivíduo permanecerá com uma quantidade crescente da droga a intoxicar o seu organismo. A situação descrita foi representada pelo gráfico da figura 1:

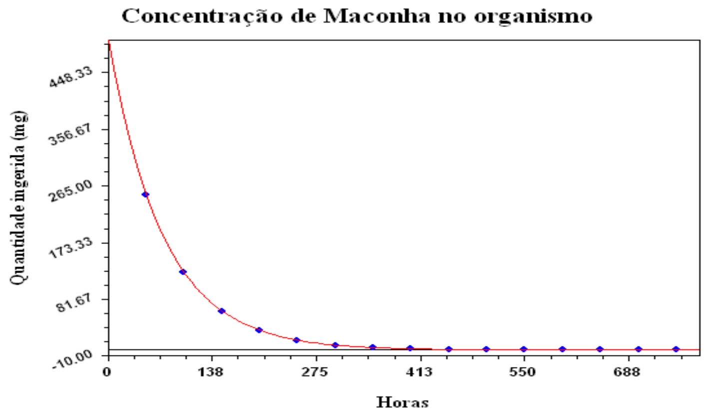


Figura 1 - Comportamento de uma dose da droga no organismo

A análise do modelo e da sua solução permitiu que os alunos concluíssem que, a cada nova dose ingerida pelo usuário, diariamente, ele acrescenta uma nova quantidade de THC que, somada com o que já existe no organismo, faz com que, em pouco tempo, o individuo possa se tornar totalmente dependente da droga.

Situação-problema 2

Qual é o comportamento da concentração de THC (princípio ativo da maconha) no organismo humano, com o passar do tempo, se for considerada a ingestão de 500mg diários (5 cigarros) e considerando a meia vida?

A partir das hipóteses consideradas, primeiramente, construíram um novo quadro que mostra a evolução da concentração do THC no organismo:

Quadro 3 – Evolução da concentração de THC

Dias	T0	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
Concentração de THC (mg)	25	37,5	43,8	46,9	48,4	49,2	49,6	49,8	49,9	50	50

Com a experiência adquirida e os dados do quadro, os alunos construíram o modelo:

$$T_n = \frac{T_{n-1}}{2} + 25$$

Na análise do modelo, o grupo observou que, no nível de concentração do THC no organismo, considerando a meia-vida e ingerindo diariamente uma dose 500mg, há um ponto de equilíbrio igual a 50 mg. Essa quantidade de THC permanece no organismo ao longo do tempo, ou seja, a concentração de THC no organismo permanece estável, na medida em que a droga é ingerida. Isso acontece devido ao fato de que a eliminação da droga é lenta e para cada dose ingerida fica sempre um resíduo que se vai acumulando no corpo humano na medida em que novas doses são acrescentadas.

O grupo representou, geometricamente, a situação descrita, conforme a figura 2:

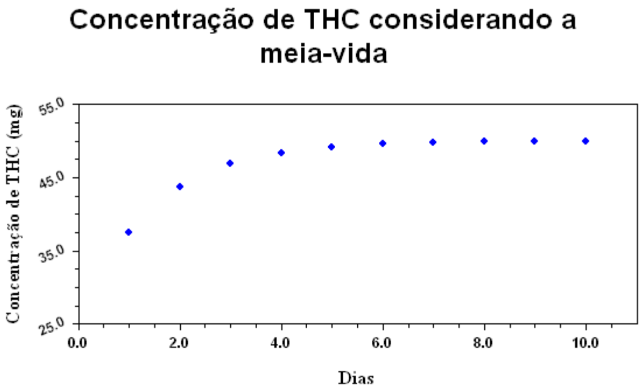


Figura 2 - Concentração de THC no organismo, considerando a meia-vida e a ingestão diária da droga.

Na análise do modelo encontrado, os alunos compreenderam porque um usuário de droga se torna rapidamente dependente e sua dificuldade em libertar-se dela.

6. Considerações finais

Durante a realização deste trabalho, muitas discussões e indagações foram realizadas pelos alunos sobre a aplicabilidade desses conteúdos na sala de aula, direcionadas para a reflexão dos futuros professores sobre cada modelo construído, os resultados encontrados e o papel da modelagem no contexto escolar.

Após o término da construção de todas as situações-problema, o grupo iniciou a escrita de um artigo, que era a atividade final proposta. Essa foi uma etapa de grande preocupação, pois redigir um artigo demanda estudo e dedicação. Os alunos sentiram-se apreensivos porque essa atividade não faz parte da rotina desse curso de Matemática. Nessa etapa, o papel do professor é fundamental, pois é preciso discutir com os alunos a importância da comunicação escrita e oral, além de mostrar-lhes a relevância da construção do conhecimento matemático. Superada a apreensão inicial, o grupo conseguiu expressar o domínio do tema e escrever o artigo.

Os alunos perceberam-se e instituíram-se como grupo, estabelecendo uma relação de confiança mútua e de trocas de experiências, havendo, pois, um trabalho colaborativo entre seus componentes. Conforme Masetto (2001), as atividades desenvolvidas em grupo deixam contribuições significativas e mais avançadas que as individuais, pelo fato de que os alunos participantes tomam conhecimento das colaborações dos outros, discutem, analisam e, com o debate, avançam na problematização e na investigação, bem como nas aprendizagens. Percebeu-se no decorrer do trabalho que, aos poucos, se estabeleceu um clima de confiança entre os alunos, entre alunos e pesquisadoras e, ao mesmo tempo, notou-se o quanto os alunos estavam compromissados com o trabalho e interagiam entre si e com as professoras. A dedicação dos participantes desta investigação, no decorrer do trabalho, foi surpreendente e superou a rejeição inicial observada no primeiro encontro.

Como questões que proporcionaram dificuldades, salienta-se a carência de autonomia dos sujeitos da pesquisa, percebido no processo inicial, mas superado com o decorrer das atividades, e a disponibilidade de tempo, tanto dos pesquisadores quanto dos alunos, para o desenvolvimento dos trabalhos em sala de aula. Julga-se adequado mencionar as palavras de Masetto (2001), ao assinalar que a socialização desse estudo mantém viva a esperança de que outros educadores sintam-se motivados a modificarem a prática docente e a contribuírem com a educação. Por isso, as idéias aqui expostas representam uma proposta para nutrir nossa própria prática e proporcionar aos licenciandos oportunidades de adquirir competências e habilidades necessárias na sua formação profissional.

Bibliografia

Almeida L. M. W., Dias M. R. (*2007). Modelagem Matemática em cursos de formação de professores.* In: J. Barbosa, A. D. Caldeira (Orgs.): *Modelagem Matemática na Educação Matemática: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM.

Barbosa J. C. (2001a).*Modelagem Matemática e os professores: a questão de formação*. Bolema, Rio Claro, 14 (15), 5-23.

Barbosa J. C. (2001b). *Modelagem Matemática: Concepções e experiências de futuros professores*. Tese de doutoramento em Educação Matemática não-publicada, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Brasil.

Barbosa J. C. (2003a).*Modelagem Matemática na sala de aula. Perspectiva*, Erechim, 27 (98), 65-74.

Barbosa J. C. (2003b).*Modelagem Matemática e a Perspectiva sócio-crítica*. In: *Anais do Segundo Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Santos, São Paulo, Brasil.

Barbosa J. C. (2004).*Modelagem na Educação Matemática: Uma perspectiva*. In: *Anais do Primeiro Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática*, Londrina, Paraná, Brasil.

Bassanezi R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. Contexto, São Paulo.

Borba,M. C. R. ,Menegueti C. G., Hermini H. (1997).*Modelagem, Calculadora Gráfica e Interdisciplinaridade na Sala de Aula de um Curso de Ciências Biológica*s. *Revista de Educação Matemática da SBEM-SP*, 5 (3), 63-70.

Burak D. (1987). *Modelagem Matemática: Uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série*. Dissertação de Mestrado em Educação não publicada, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, Brasil.

Burak D. (2004).*Modelagem Matemática e a sala de aula*. In: *Anais do I Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática*, Londrina, Brasil.

Caldeira A. D. (2004). *Modelagem Matemática e a prática dos professores do Ensino Fundamental e Médio.* In: *Anais do I Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática*, Londrina, Brasil.

Conselho Nacional de Educação do Brasil (2001): *Diretrizes Nacionais para a formação de professores da educação básica*. Acessado em 20 out. 2008, de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/009.pdf.

D´Ambrósio U. (1986): *Da realidade à ação: reflexões sobre educação matemática*. Summus Editorial, Campinas.

Ferruzzi E. C. (2004). *Modelagem Matemática no ensino tecnológico*. In: *Anais do I Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática*, Londrina, Brasil.

Fidelis R., Almeida L. M. W. (2004).*Modelagem Matemática em sala de aula: um estudo*. In: *Anais do I Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática*, Londrina, Brasil.

Masetto M. (2001). *Atividades pedagógicas no cotidiano da sala de aula universitária: reflexões e sugestões práticas*. In: S. Castanho, M. E. Castanho (Orgs). *Temas e textos em metodologia do ensino superior*, 83-102. Papirus, Campinas.

Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Brasil (1999): *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. MEC, Brasília.

Skovsmose O. (2000).*Cenários para Investigação*. *Bolema*, Rio Claro,13 (14), 66-91.

Skovsmose O. (2001). *Educação matemática crítica: a questão da democracia*. Papirus, Campinas.

Marinez Cargnin-Stieler possui graduação em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria, mestre em Ensino de Matemática pelo Centro Universitário Franciscano. Atualmente é professora assistente da Universidade do Estado de Mato Grosso, Mato Grosso, Brasil. Os interesses de pesquisa estão relacionados com Modelagem Matemática na sala de aula e na formação de professores.E-mail: marinez@unemat.br

Vanilde Bisognin. É licenciada em Matemática, pela Universidade Federal de Santa Maria, mestre e doutora em Matemática, pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil. Atualmente, é professora do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática, do Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), Santa Maria, RS, Brasil. Os interesses de pesquisa centram-se na modelagem matemática, investigação matemática e resolução de problemas em cursos de formação de professores. Possui artigos e comunicações na área de Educação Matemática. Endereço postal: Rua dos Andradas, 1614, CEP 97010-032, Santa Maria, RS, Brasil. E-mail: vanilde@unifra.br

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 143-157
ISSN: 1815-0640

Explorando erros na resolução de equações: um caminho para a formação do professor de Matemática

Helena Noronha Cury, Alessandro Jacques Ribeiro, Thaísa Jacintho Müller

Resumen

En este trabajo, presentamos el análisis de los errores cometidos por estudiantes de cursos de Licenciatura en Matemáticas en la solución de una cuestión acerca de ecuaciones. Los datos son analizados utilizando como marco teórico algunas investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra y el concepto de conocimiento pedagógico del contenido. El pequeño número de respuestas correctas proporcionadas por participantes de la encuesta, además de mostrar una falta de conocimiento acerca de las ecuaciones y sus procesos de resolución, alerta sobre la importancia de que los formadores de profesores de matemáticas también tienen en cuenta el conocimiento pedagógico del contenido. Es necesario dar a los futuros profesores la oportunidad de discutir las causas de los errores, para que puedan anticiparse a las dificultades de sus alumnos y cómo superarlas

Abstract

In this paper, we present the analysis of errors made by students of mathematics teaching courses when they are solving a question about equations. Data were discussed using as framework some researches on algebra teaching and learning, as well as the concept of pedagogical content knowledge. The small number of correct answers provided by survey participants, as well as the lack of knowledge about equations and their resolution processes, point out to the importance of also take into account the pedagogical content knowledge, by the mathematics teaching courses professors. It is necessary to provide to the future teachers opportunities to discuss the causes of errors, to enable them to anticipate students' difficulties and how to overcome them..

Resumo

Neste artigo, é apresentada a análise de erros cometidos por alunos de cursos de Licenciatura em Matemática na resolução de uma questão sobre equações. Os dados são discutidos utilizando-se como referencial teórico algumas pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Álgebra, bem como o conceito de conhecimento pedagógico do conteúdo. O pequeno número de respostas corretas, apresentadas pelos participantes da pesquisa, além de mostrar a falta de conhecimento sobre equações e seus processos de resolução, alerta para a importância de que os formadores de professores de Matemática também levem em conta o conhecimento pedagógico do conteúdo. É necessário proporcionar aos futuros mestres oportunidades para discutir as causas dos erros, para habilitá-los a antecipar as dificuldades dos seus alunos e saber como superá-las.

Introdução

Entre os conhecimentos sobre os quais os professores devem ter domínio, merecem destaque os que formam o núcleo principal da formação matemática - Álgebra, Análise e Geometria. Dificuldades apresentadas pelos docentes, em especial em conceitos como o de equação, que são ensinados na Educação Básica, constituem-se em entraves para os cursos de Licenciatura em Matemática, pois tais dificuldades podem acarretar consequentes problemas na compreensão de Matemática por parte de seus alunos.

Desde 2010, está sendo desenvolvido um projeto de pesquisa[1] que tem como objetivo geral aprofundar os estudos sobre as possibilidades do uso da análise de erros como abordagem de pesquisa e de ensino em Educação Matemática, em cursos de formação inicial e continuada de professores. Um dos objetivos específicos do projeto consiste em investigar erros cometidos por alunos ou por professores de Matemática e, para atendê-lo, foi planejado e aplicado um teste a alunos de cursos de Licenciatura em Matemática de dez Instituições de Ensino Superior (IES) do Brasil, escolhidas de forma intencional. O teste é composto por cinco questões de Matemática, sendo uma delas referente à resolução de equações algébricas.

Neste artigo, trazemos a análise das respostas dos licenciandos a essa questão e as discutimos à luz de pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Álgebra e das ideias de Shulman (1986) sobre conhecimento pedagógico do conteúdo, aprofundadas por Ball, Thames e Phelps (2008).

Revisão de Literatura

Ao analisar e refletir sobre resultados de diferentes pesquisas em Educação Matemática, em particular aquelas que discutem o ensino e a aprendizagem de Álgebra, observa-se que o debate contempla diversos enfoques e pontos de vista. No presente artigo, interessa-nos discutir aquelas que investigam o conhecimento dos professores sobre Álgebra e sobre equações (Dreyfus e Hoch, 2004; Attorps, 2003; Ribeiro, 2008; Barbosa, 2009).

Attorps (2003) desenvolveu uma pesquisa com 10 professores secundários na Suécia, sendo cinco deles recém graduados e cinco, experientes, por meio de entrevistas e questionários. Na análise das respostas dos professores, a autora observou que muitos deles partem do pressuposto de que seus alunos já conhecem o conceito de equação e preocupam-se em ensinar procedimentos mecânicos de resolução.

Attorps (2003) observou que grande parte dos professores têm uma concepção de equação muito ligada à questão procedimental – às técnicas e procedimentos para sua resolução. Outra questão relevante à temática aqui apresentada está no fato de essa pesquisadora ter observado, durante as entrevistas, que muito do que havia sido apresentado nos questionários e nos discursos de seus professores, em relação às suas concepções de equação, tinha como origem a forma como eles aprenderam – suas experiências enquanto alunos – a trabalhar com o processo de resolução de equações.

[1] Processo CNPQ 310947/2009-0

Ribeiro (2008) identificou diferentes formas de compreender e de utilizar o conceito de equação. Para ele, os "multisignificados de equação" são diferentes formas de ver, de interpretar e de tratar o conceito de equação, identificadas e categorizadas conforme o quadro 1, a seguir:

Quadro 1 – Multisignificados de equação
Fonte: Adaptado de Ribeiro, 2008, p. 112

Significado	Características
Intuitivo-Pragmático	Equação concebida como noção intuitiva, ligada à ideia de igualdade entre duas quantidades. Utilização relacionada à resolução de problemas de ordem prática originários de situações do dia-a-dia.
Dedutivo-Geométrico	Equação concebida como noção ligada às figuras geométricas, segmentos e curvas. Utilização relacionada a situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medida de lados de figuras geométricas e intersecção de curvas.
Estrutural-Generalista	Equação concebida como noção estrutural definida e com propriedades e características próprias, considerada por si própria e operando-se sobre ela. Utilização relacionada com a busca de soluções gerais para uma classe de equações de mesma natureza.
Estrutural-Conjuntista	Equação concebida dentro de uma visão estrutural, porém diretamente ligada à noção de conjunto. É vista como uma ferramenta para resolver problemas que envolvam relações entre conjuntos.
Processual-Tecnicista	Equação concebida como a sua própria resolução – os métodos e técnicas que são utilizadas para resolvê-la. Diferentemente dos estruturalistas, não enxergam a equação como um ente matemático.
Axiomático-Postulacional	Equação como noção da Matemática que não precisa ser definida, uma ideia a partir da qual outras ideias, matemáticas e não matemáticas, são construídas. Utilizada no sentido de Noção Primitiva, como ponto, reta e plano na Geometria Euclidiana.

Dando continuidade aos estudos desenvolvidos por Ribeiro (2008), a pesquisa de Barbosa (2009) teve por objetivo identificar se e como os diferentes significados de equação, categorizados por Ribeiro, se manifestavam nas concepções de professores de Matemática. Foram elaboradas situações matemáticas específicas para a coleta de dados e os professores foram entrevistados por Barbosa (2009), seguindo um roteiro fundamentado em tais situações matemáticas. Dentre os principais resultados foi identificada incidência dos significados Intuitivo-Pragmático e Processual-Tecnicista nas concepções dos professores entrevistados. Esses docentes encontraram dificuldades para tratar as situações matemáticas propostas, quando não se recordavam de uma fórmula ou de um algoritmo de resolução.

Embora tais professores também utilizassem o significado Intuitivo-Pragmático, pareciam não se sentir tão à vontade como os alunos para usar "estratégias aritméticas" (Dorigo, 2010). Vale ressaltar, dentre os resultados apontados por Barbosa (2009), no que se refere à imagem de conceito (Tall; Vinner, 1981) dos professores por ele investigados:

> Percebemos em nossa pesquisa que a presença de diferentes significados de equação na imagem de conceito dos professores ainda é bastante limitada, estando muito vinculada à ideia do princípio de equivalência e principalmente a técnicas de resolução e à existência de incógnita. (Barbosa, 2009, p. 177)

À parte das pesquisas acima discutidas – que contemplam os conhecimentos dos professores que ensinam Álgebra – Doerr (2004) destaca a importância de se planejar e desenvolver (novas) pesquisas que tenham a preocupação de investigar os conhecimentos do professor de Matemática que ensina Álgebra. Ela aponta a "carência de um corpo substancial de pesquisas sobre o conhecimento e a prática do professor no ensino de Álgebra*".* (Doerr, 2004, p. 268)

Exemplos de investigações sobre conhecimentos de Álgebra, desenvolvidas por pesquisadores de diferentes nacionalidades, sob diferentes referenciais teóricos, são as análises de dificuldades apresentadas por estudantes de qualquer nível de ensino. (Booth, 1984, 1995; Tirosh; Even; Robinson, 1998; Ribeiro, 2001; Ben Nejma, 2010; Ferreyra et al., 2010). Conforme a expressão usada por Borasi (1996), os erros, analisados pelos professores, podem ser usados como "trampolins para a pesquisa e para o ensino", pois fornecem informações sobre dificuldades dos estudantes e permitem que novas estratégias de ensino sejam planejadas, para auxiliar os alunos na superação de tais dificuldades.

Se não houver discussões sobre erros cometidos por estudantes da Educação Básica, em alguma disciplina ou alguma prática dos cursos de Licenciatura em Matemática, os futuros professores perderão a oportunidade de aprender como lidar com esses erros ou como ensinar o conteúdo correspondente, de forma a superar as dificuldades. Além disso, também há preocupação com os erros cometidos pelos professores em formação, pois, se não forem detectados e discutidos, podem influenciar a compreensão de seus futuros alunos sobre determinado conceito. (Cury; Bisognin; Bisognin, 2011).

Shulman (1986), ao comparar critérios para avaliação de professores em vários estados norte-americanos, no final do século XIX e na década de 80 do século XX, espanta-se com a falta de indicação de categorias relativas a disciplinas e conteúdos. Nas pesquisas desenvolvidas por ele e seus colegas, essa ausência de foco no conteúdo de ensino foi chamado de "problema do paradigma perdido". Nos testes de avaliação de professores, há muitas perguntas sobre o comportamento dos docentes em sala de aula, mas muito poucas sobre o conteúdo das aulas, as questões apresentadas, as explicações fornecidas.

Burrill (1997), ao assistir a uma apresentação de projetos desenvolvidos por professores de Matemática em escolas norte-americanas, também questionou a falta de informações sobre o que os alunos estavam estudando e o que estavam aprendendo de Matemática, pois só lhe eram mostrados os recursos usados em sala de aula.

Ao discutir o conhecimento do professor, Shulman (1986) propõe a distinção entre três categorias de conhecimento do conteúdo: conhecimento do conteúdo da disciplina, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular. Das três categorias, a que despertou maior interesse por parte de pesquisadores é a noção de conhecimento pedagógico do conteúdo (Ball; Thames; Phelps, 2008). Para Shulman (1986), este constructo inclui, entre outras ideias, a compreensão do que faz o ensino de um determinado tópico ser fácil ou difícil e das concepções e ideias preconcebidas que os estudantes trazem para a sala de aula antes do ensino de um determinado conteúdo. Conforme Shulman (1986, p. 10), há um número crescente de investigações sobre "concepções errôneas dos estudantes e sobre as condições de ensino necessárias para superar e transformar essas concepções iniciais"[2].

Ball, Thames e Phelps (2008) revisaram estudos que têm discutido as propostas de Shulman e consideram que houve pouco progresso no tocante a desenvolver uma fundamentação teórica coerente sobre o conhecimento do conteúdo para ensinar. Dessa forma, propuseram uma nova abordagem, enfocando o conhecimento matemático para o ensino, e explicam que resolveram avaliar <u>a forma</u> como os professores precisam saber o conteúdo que ensinam, visto ser consensual a ideia de que eles necessitam conhecer os tópicos e procedimentos ensinados.

Para exemplificar suas ideias, os autores apresentam um exemplo de erro cometido por estudantes de séries iniciais no algoritmo da subtração, em que o aluno diminui sempre o algarismo menor do maior, independente de estar no minuendo ou no subtraendo. Segundo eles, os professores sabem resolver o exercício e sabem que tal resposta é incorreta, mas ensinar envolve mais do que identificar respostas incorretas. O professor deve ser capaz de procurar as fontes do erro. Efetivamente, "a análise de erros é uma prática comum entre os matemáticos no decorrer de seu próprio trabalho; essa tarefa, no ensino, difere somente pelo fato de que enfoca os erros produzidos pelos alunos." (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 397).

A partir de suas investigações, Ball, Thames e Pheps (2008) propõem que o conhecimento do conteúdo, apresentado por Shulman, seja subdividido em *conhecimento comum do conteúdo* (CCK)[3] e *conhecimento especializado do conteúdo* (SCK)[4]; por sua vez, o conhecimento pedagógico do conteúdo pode ser dividido em *conhecimento do conteúdo e dos estudantes* (KCS)[5] e *conhecimento do conteúdo e do ensino* (KCT)[6].

---

[2] A tradução dos trechos em língua inglesa foi realizada pelos autores.

[3] *Common content knowledge.*
[4] *Specialized content knowledge.*
[5] *Knowledge of content and students.*
[6] *Knowledge of content and teaching.*

Para cada categoria criada, os autores apresentam exemplos. Assim, reconhecer uma resposta errada é um *conhecimento comum do conteúdo* (CCK); buscar padrões nos erros dos estudantes é um *conhecimento especializado do conteúdo* (SCK); ter familiaridade com erros comuns, cometidos pelos alunos, e saber quais desses erros são mais frequentes é um *conhecimento do conteúdo e dos estudantes* (KCS); e selecionar uma abordagem de ensino que seja capaz de auxiliar os alunos a superarem suas dificuldades é um *conhecimento do conteúdo e do ensino* (KCT).

Peng e Luo (2009) consideram que já há muitos estudos sobre conhecimento do professor, em especial aqueles que enfocam o conhecimento pedagógico do conteúdo, mas que ainda há falta de discussões sobre a forma como os professores lidam com os erros de seus alunos. Mas para aprender a lidar com os erros, é necessário que esse conhecimento seja discutido em cursos de formação do professor.

Borasi (1996) apresenta uma experiência de uso de erros em um curso para professores de Matemática em serviço. A investigadora coletou definições de circunferência dadas por alunos de Matemática e apresentou-as aos professores, para que eles as classificassem. Primeiramente os participantes foram separados em três grupos, que enfocaram as definições sob perspectivas distintas.

O primeiro grupo separou as definições de circunferência em "aceitáveis" e "não-aceitáveis"; o segundo grupo evitou avaliar acertos e erros, porque considerou que não havia informações sobre o contexto, e preferiu classificar as definições segundo palavras-chave. O terceiro grupo não chegou a um acordo sobre a classificação possível. Essa primeira atividade já mostrou que não havia consenso sobre a correção das definições.

Em seguida, Borasi propôs aos professores que, a partir da classificação do segundo grupo, aprofundassem o estudo sobre os tipos de definição: baseadas na Topologia, na Geometria Projetiva, na Geometria Analítica, na Geometria Diferencial ou em descrições puramente visuais. Esse trabalho, além de mostrar aos professores os tipos de erros, também lhes permitiu verificar as origens das definições e debater a própria noção de definição.

Essa experiência relatada por Borasi (1996) é um exemplo de como auxiliar os professores a ter familiaridade com os erros dos alunos e a planejar estratégias para discuti-los.

Portanto, nossa opção pela análise dos erros cometidos por alunos de cursos de Licenciatura em Matemática, relatada neste artigo, vem ao encontro das ideias de Borasi (1996) e de Ball, Thames e Phelps (2008): procuramos estabelecer os erros cometidos por esses alunos, buscar os padrões desses erros e a frequência com que são cometidos. Trazendo esses resultados para os docentes desses cursos de formação de professores, por meio da divulgação de nossas pesquisas, estamos mostrando que há problemas relacionados com o conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS) e com o conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT). Assim, parece-nos necessário aprofundar as pesquisas, para buscar maneiras de auxiliar os futuros professores a superarem suas dificuldades.

Procedimentos Metodológicos

Das dez IES escolhidas para coleta dos da dos, uma localiza-se na região Norte, duas na região Nordeste do Brasil, três na região Sudeste e quatro na região Sul. Em cada IES, entramos em contato com um professor do curso de Licenciatura em Matemática, solicitando que aplicasse o teste em uma de suas turmas, do segundo ano de curso em diante. Os dez docentes que aceitaram nosso convite ocuparam um ou dois períodos de aula (entre 50 e 90 minutos) para a aplicação. A amostra intencional foi composta de 141 estudantes, aos quais solicitamos autorização para a utilização das respostas na investigação. Não houve identificação dos estudantes nem das IES envolvidas.

A questão referente à resolução de equação, objeto desta análise quanti-qualitativa, tem o seguinte enunciado:

¿Quantos pares (x,y) de números reais existem, tais que $x+y=xy=\frac{x}{y}$*?*

Esperávamos que os participantes, alunos de cursos de Licenciatura em Matemática, cursando pelo menos o terceiro semestre, já tivessem desenvolvido habilidades de resolução de equações que lhes permitissem solucionar a questão. Assim, supúnhamos que suas respostas apresentassem um padrão semelhante ao que descrevemos a seguir, com mais ou menos passos.

Em primeiro lugar, observemos que não podemos ter $x=0$, pois nesse caso seguiria que $x.y=0$, para qualquer y real. Além disso, teríamos $x+y=0+y=0$ e, portanto, $y=0$. Mas y não pode ser zero, pois a expressão $\frac{x}{y}$ não estaria definida.

Então, tomando a segunda igualdade, temos:

$$x.y=\frac{x}{y}\Rightarrow x.y^2=x\Rightarrow y^2=1\Rightarrow y=1 \qquad \text{ou} \qquad y=-1$$

Notemos que a simplificação $x.y^2=x\Rightarrow y^2=1$ é possível porque já sabemos que $x\neq 0$. Substituindo $y=1$ ou $y=-1$ nas outras duas equações, temos:

1) $x+y=\frac{x}{y}\Rightarrow (x+y).y=x$. Se $y=1$, temos: $(x+1).1=x\Rightarrow x+1=x\Rightarrow 1=0$ (absurdo)

Por outro lado, se $y=-1$, então: $(x+1).(-1)=x\Rightarrow -x+1=x\Rightarrow 2.x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

2) $x+1=x.y$. Se $y=1$

Se $y=1$, então: $x+1=x$ ou seja 1= 0 (absurdo)

Por outro lado, se $y=-1$, temos: $x-1=-x\Rightarrow 2.x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Logo, o único par (x,y) que satisfaz a condição dada é $\left(\frac{1}{2};-1\right)$.

Para a análise dos dados obtidos a partir das respostas dos alunos, empregamos a técnica de análise de conteúdo dos erros, baseada em Bardin (1979) e realizada em três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na primeira fase, os testes respondidos foram identificados e fotocopiados, para, em seguida, serem recortadas as soluções para cada questão. As respostas válidas (que não estão em branco) de cada questão foram coladas em folhas em branco, permitindo a leitura conjunta de todas as respostas. Esse conjunto de questões organizadas forma o *corpus*, sobre o qual é realizada a análise das respostas.

Na correção das soluções de cada questão, seguimos os procedimentos adotados na correção de questões de avaliações como o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) e consideramos quatro categorias: resposta correta (código "2"), resposta parcialmente correta (código "1"), resposta incorreta (código "0") e ausência de resposta (código "9").

Foi considerada correta a resposta em que o aluno obteve o par (½,-1), a partir do desenvolvimento das duas igualdades e sem erros no decorrer do processo. Como respostas parcialmente corretas, foram consideradas aquelas em que o aluno resolveu corretamente as equações, obteve o par (½,-1), mas concluiu a solução com alguma observação equivocada.

Como respostas erradas, foram consideradas aquelas em que o aluno não conseguiu encontrar um par que satisfizesse a dupla igualdade ou resolveu incorretamente as equações, tendo ou não obtido solução. Finalmente, por ausência de resposta entendemos aquelas em que o aluno deixou em branco o espaço destinado à solução.

Para ilustrar cada classe de resposta, reproduzimos a resolução e referimo-nos ao autor usando uma letra e um número, para evitar identificação, optando, ainda, por indicar cada um pela forma masculina, "o aluno".

A segunda fase da análise, de exploração do material, envolveu o processo de unitarização e classificação das 89 respostas parcialmente corretas ou incorretas, lidas novamente para definir as categorias de erro. Os critérios de classificação foram determinados *a posteriori*, a partir do próprio material, com o agrupamento das respostas semelhantes. Esse agrupamento foi feito duas vezes: na primeira vez, foi elaborada uma listagem de todos os tipos semelhantes de erro e na segunda, foi feito o agrupamento propriamente dito, com o refinamento das classes de erros.

Já na fase de tratamento dos resultados, foi elaborado um texto-síntese para cada classe, com apoio de exemplos retirados do próprio *corpus*.

Apresentação e Análise dos Dados

As respostas dos alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática foram classificadas segundo os critérios acima indicados e o número de respondentes de cada classe é apresentado no Quadro 2, a seguir:

Quadro 2 – Distribuição das respostas por classe

Classe	N.	%
2	18	13
1	3	2
0	86	61
9	34	24
Total	**141**	**100**

Na Figura a seguir, apresentamos um exemplo de resposta considerada correta:

Sabemos que $y \neq 0$ pois caso contrário $\frac{x}{y}$ não estaria definida

Como $y \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ c.c $0+y = 0.y = \frac{0}{y} \Rightarrow y = 0$ ↯

$xy = \frac{x}{y}$ com $x \neq 0$ $y \neq 0 \Rightarrow y = \frac{1}{y}$ logo $y^2 = 1$ $y = \pm 1$

$y = 1$ $x+1 = x$ ↯

$y = -1$. $x - 1 = -x \Rightarrow 2x = 1$ $x = \frac{1}{2}$

∴ O par que procuramos é $(\frac{1}{2}, -1)$

Figura 1. Resposta correta, do aluno A5

Também foram consideradas corretas as respostas em que o participante não fez qualquer suposição sobre os valores de x e y, ou seja, não observou que, para existir solução, deve-se ter y≠0 e, dessa forma, x≠0. É o caso, por exemplo, da resposta do aluno A100, indicada na Figura 2:

temos que
$xy = \frac{x}{y}$
$xy^2 = x$
$y^2 = 1$
$y = \pm 1$

Para $y = 1$
$x + y = xy$
$x + 1 = x \cdot 1$
$x + 1 = x$
$1 = 0$ ([illegible])
Absurdo, logo $y \neq 1$

Para $y = -1$
$x + y = xy$
$x - 1 = x(-1)$
$x - 1 = -x$
$x + x = 1$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$

Assim, só existe um par $(\frac{1}{2}, -1)$

Figura 2. Resposta do aluno A100

As três respostas parcialmente corretas – apresentadas a seguir – têm erros distintos, por isso não foram categorizadas. Nos três casos, os alunos desenvolveram corretamente a questão, trabalhando separadamente sobre cada igualdade, obtiveram o par (½,-1) como resposta, mas acrescentaram alguma observação equivocada.

O Aluno A14 respondeu que a dupla igualdade vale para os pontos (½,-1) e (-1,½). Já o aluno A123 concluiu : "Mas, também k(½,-1), com k ∈ ℕ, será solução. Logo existem infinitos pares ordenados". O aluno A131 escreveu ao final: "Concluo que todas as frações equivalentes a ½ são soluções, logo a quantidade de pares serão compostos com x tal que x>0 e de frações equivalentes a ½ e y=-1".

As 86 respostas incorretas foram classificadas em cinco categorias:

A) Compreende as respostas em que o aluno informa que não existem números reais que satisfaçam as equações, sem mostrar cálculos ou testes para justificar essa resposta. Também são incluídos nesta categoria aquelas respostas em que o aluno apenas apresenta (incorretamente) um ou mais pares de reais que seriam solução, mas não os testa ou não desenvolve a solução. É exemplo desta categoria a resposta do aluno A13[7]: "Não existem números reais que satisfaçam essa equação. Portanto, o número de pares é igual a zero".

B) Compreende as respostas em que o aluno destaca uma, duas ou três das equações, tenta resolvê-las, mas não consegue porque faz algum erro em uma das etapas da resolução ou porque não determina, a partir de uma das equações, valores de x ou y para testar em outra. São exemplos as seguintes respostas, dos alunos A88 e A116:

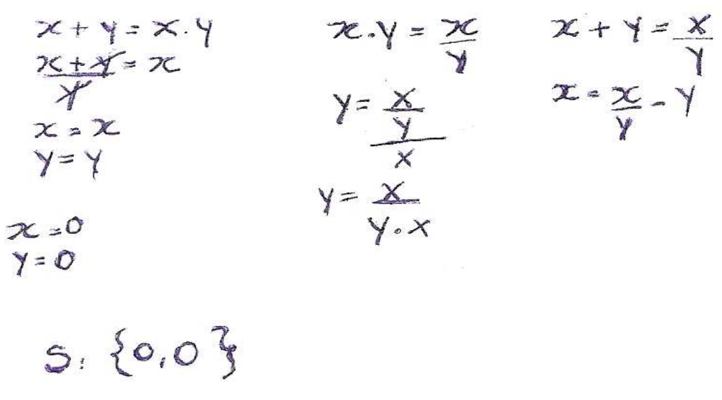


Figura 3. Resposta do aluno A88

[7] Em alguns casos não foi possível reproduzir a resposta, porque foi escrita a lápis e a imagem não ficou nítida.

$$x+y = xy = \frac{x}{y}$$
$$x+y = xy$$
$$x = xy - y$$
$$x - xy = -y$$
$$(1-y)x = -y$$
$$x = \frac{-y}{1-y}$$
$$x = \frac{-y}{1} + \frac{y}{y}$$
$$x = -y$$

$$xy = \frac{x}{y}$$
$$x = \frac{\frac{x}{y}}{y}$$
$$x = \frac{x}{y^2}$$
$$-y = \frac{x}{y^2}$$
$$-y^3 = x$$
$$x = -y^3$$

Figura 4. Resposta do aluno A116

C) Compreende as respostas em que o aluno faz alguma suposição sobre valores de x ou y que satisfazem uma ou mais das equações, mas não desenvolve a solução ou, em alguns casos, sequer testa os valores. É exemplo desta categoria a resposta do aluno A8: "A expressão $x.y = \frac{x}{y}$ só pode ser satisfeita se $y = 1$ ou se $x = 0$. Porém no caso $x + y = x.y$, $y = 1$ não satisfaz a equação logo $x = 0$. Mesmo assim não há nenhum real que utilizado em y satisfaça a equação. Logo S={ }".

D) Compreende as respostas em que o aluno apenas copia as equações dadas ou faz algum traçado, como é o caso do aluno que esboçou um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

E) Compreende as respostas em que o aluno resolve por tentativa, organizando um quadro com valores de x e y ou tomando pares de inteiros e testando nas equações. Como exemplo, temos a resposta do aluno A38, que escreveu:

(1,2)=1+2=1.2=1/2 (F)

(2,1)=2+1=2.1=2/1 (F)

(1,1)=1+1≠1.1=1/1 (F)

(2,2)=2+2=2.2= 2/2

Outro exemplo de tentativa de substituição é a construção de um quadro, para testar valores, como fez o aluno A6: $y = 1$

Quadro 3 – Resposta do aluno A6

x	*y*	*x+y*	*xy*	*x/y*	*Resultado*
0	0	0	0	0	V
1	1	2	1		F
2	2	4	4	1	F
0	1	1	0		F
1	2	3	2		F

Além do quadro, o aluno escreveu: “Se usar números maiores que 1, a soma resulta diferente da multiplicação (na casa do nº 2, a divisão é diferente) e para nº entre zero e um, a multiplicação tende a diminuir e a divisão a aumentar.”

Esse tipo de justificativa mostra que o aluno não tem claros os conceitos que menciona: em primeiro lugar, confunde a denominação do resultado de uma operação com o resultado (“soma” tinha que ser comparada com “produto”). Em segundo lugar, como usa apenas valores inteiros, não fica claro o que significa “nº entre zero e um”. Também não se entende a razão pela qual o aluno não completou o resultado da divisão nas linhas em que $x=1$ e $y=1$, $x=0$ e $y=1$ ou $x=1$ e $y=2$.

Feita essa categorização, ainda na fase de tratamento dos resultados, determinamos o número e porcentagem de erros de cada tipo. Das 86 respostas erradas, 38 (44%) foram do tipo A, 33 (38%) foram do tipo B, 9 (10%), do tipo C, 4 (5%), do tipo D e 2 (2%), do tipo E.

Considerações Finais

Notamos, ao concluir a análise dos dados, as grandes dificuldades apresentadas por esses alunos, futuros professores de Matemática, para resolver a questão que envolvia três equações algébricas. Apenas 13% deles conseguiu encontrar o par (½,-1) como solução. Vinte e quatro por cento desses participantes sequer tentaram resolver a questão e 61% erraram. Entre as categorias de erros, apresentadas acima, vemos que os tipos A e B constituem 82% das respostas erradas.

As soluções dadas parecem indicar que os alunos não visualizaram, nas duas igualdades apresentadas, a possibilidade de separar em três equações e resolver cada uma delas, para utilizar os dados em outra. Não estando a equação apresentada na forma mais usual (dois membros separados por um sinal de igualdade), os alunos tentaram apenas indicar um par ordenado de reais que, em sua opinião, satisfazia a alguma das equações ou então concluíram que não existia resposta.

Nos casos em que tentaram desenvolver a solução, os alunos fizeram erros relacionados às propriedades das operações com números reais, como, por exemplo, a distributiva da multiplicação em relação à adição. Também notamos que alguns alunos parecem ter introjetado a ideia de que, ao “passar para o outro membro deve-se trocar o sinal”, sem entender se essa “propriedade” vale quando se está somando ou subtraindo a mesma quantidade dos dois lados da equação, mas não quando se está multiplicando ou dividindo ambos os membros por um mesmo valor.

Observamos, nos alunos por nós pesquisados, dificuldades semelhantes às encontradas por Barbosa (2009). Em nossa pesquisa, ao se depararem com uma situação matemática que remete ao significado processual-tecnicista (Ribeiro, 2008) – uma equação escrita na forma algébrica simbólica – os alunos não se utilizaram de alguma técnica ou processo que conheciam para buscar a solução para a questão. Pelo contrário, vários alunos – como A6 e A38 – utilizaram tentativas de substituição de valores para buscar a resposta ao problema.

Pode-se supor então que, se esses problemas não forem discutidos no curso de Licenciatura, serão levados adiante, para a própria sala de aula do futuro professor, trazendo como consequência um ensino frágil, que pode levar seus alunos a erros do mesmo tipo.

Assim, observamos em nossa pesquisa situações semelhantes àquelas encontradas por Barbosa (2009) e por Dorigo (2010), nas quais, embora a situação matemática remetesse a um determinado significado, professores e alunos utilizavam-se de outros significados para buscar solução aos problemas apresentados, obtendo ou não uma resposta correta.

Baseado nessas evidências compartilhamos as reflexões apontadas em Ball, Thames e Phelps (2008) sobre a importância de que os futuros professores dominem – além do conhecimento específico do conteúdo – conhecimentos relacionados ao conteúdo e aos estudantes, e ao conteúdo e ao ensino. Nesse sentido, os futuros professores poderão ser capazes de compreender as diferentes formas de resolução e diferentes erros cometidos pelos alunos, bem como buscar estratégias de ensino que sejam adequadas para a superação de tais dificuldades e para a ampliação/aprofundamento dos conhecimentos que os alunos têm de determinados conceitos matemáticos, como é o caso do conceito de equação.

Nossas análises e reflexões acima discutidas nos parecem adequadas no sentido de romper com um paradigma que observamos em muitas salas de aula da Educação Básica, paradigma este que é ratificado pelos resultados de Attorps (2003), qual seja, futuros professores reproduzem a forma como eles aprenderam quando estão ensinando Matemática.

Outro ponto que nos parece relevante de ser destacado aqui, em nossas discussões, vem ao encontro das considerações apresentadas anteriormente no que se refere a uma lacuna nas pesquisas sobre os conhecimentos do professor que ensina Álgebra (Doerr, 2004). Nesse sentido, o presente artigo tem o propósito de trazer, para a formação do professor de Matemática, resultados de pesquisas que envolvem erros e dificuldades que licenciandos apresentam quando estão resolvendo equações como a apresentada em nossa pesquisa. A análise dos erros e a compreensão das dificuldades desses estudantes deve servir como alerta para que todos nós – formadores de professores – tomemos consciência da importância de se discutir, nos cursos de licenciatura, conceitos matemáticos elementares, de um ponto de vista avançado.

Bibliografia

Attorps, I. (2003). *Teachers' images of the 'equation' concept*. Em: Proceedings of the Third Conference of the European Society in Mathematics Education, Bellaria, Itália. Recuperado em 12 out. 2011, de: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG1/TG1_attorps_cerme3.pdf

Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

Barbosa, Y. O. (2009). *Multisignificados de equação:* uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Ben Nejma, S. (2010). Les difficultés rencontrées dans la résolution algébrique des problèmes du premier degré. *RADISMA*, 5. Recuperado em 10 de setembro de 2011, de http://www.radisma.info/document.php?id=879.

Booth, L. R. (1984). Erreurs et incomprehensions em algebre elementaire. *Petit X*, 5, 5-7.

Booth, L. R. (1995). Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. Em Coxford, A. F.; Shulte, A. P. (Orgs.). *As idéias da álgebra,* 23-37. São Paulo: Atual.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction*: a focus on errors. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Burrill, G. (1997). Show me the math. *NCTM News Bulletin*, 33 (8), 3.

Cury, H. N.; Bisognin, E.; Bisognin, V. (2011). Uma discussão a respeito de resoluções de professores em formação continuada a uma questão sobre equação polinomial de 2º grau. Em: Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife, Brasil.

Doerr, H. M. (2004). Teachers´knowledge and the teaching of algebra. Em: Stacey, K.; Chick, H.; Kendal, M. (Eds.). *The future of the teaching and learning of algebra*: the 12th ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Press. 267-290.

Dorigo, M. (2010). *Investigando as concepções de equação de um grupo de alunos do Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

Dreyfus, T.; Hoch, M. (2004). Equations: a structural approach. Em: *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, 152-154.

Ferreyra, N. et al. (2010). De La aritmética al álgebra: experiencia de trabajo con estudiantes universitarios. *Unión*, 21, 59-67.

Ribeiro, A. J. (2001). *Analisando o desempenho de alunos do ensino fundamental em álgebra, com base em dados do SARESP*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Ribeiro, A. J. (2008). *Multisignificados de equação e o ensino de Matemática: desafios e possibilidades*. São Paulo: Blucher Acadêmico.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

Tall, D.; Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Tirosh, D.; Even, R.; Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 51-64.

Helena Noronha Cury. É licenciada e bacharel em Matemática, mestre e doutora em Educação, pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil. Trabalha há mais de 30 anos com cursos de formação de professores de Matemática, em instituições de ensino superior. Atualmente, é professora do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática, do Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), Santa Maria, RS, Brasil. Seus interesses de pesquisa centram-se na formação de professores e na análise de erros. Organizou e publicou livros, artigos e comunicações na área de Educação Matemática. **curyhn@via-rs.net**

Alessandro Jacques Ribeiro. É licenciado em Matemática, mestre e doutor em Educação Matemática, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil. Tem atuado em cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática há mais de 10 anos. Atualmente é professor na Universidade Federal do ABC (UFABC), junto ao Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC). É credenciado como docente e orientador no Programa de Pós-Graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática (PEHFCM) na mesma instituição. Principais interesses de pesquisa relacionam-se ao Ensino e Aprendizagem de Álgebra na Educação Básica, bem como à Formação de Professores que Ensinam Matemática. Santo André, São Paulo, Brasil. **alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br**

Thaísa Jacintho Müller. É licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul e mestre em Matemática Pura pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil. Já atuou como professora de Matemática no Ensino Fundamental e Médio e como tutora à distância em curso de especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática, oferecido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Atualmente, é professora da Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), São Leopoldo, RS, Brasil, onde atua no curso de Licenciatura em Matemática, no curso de Especialização em Educação Matemática e em disciplinas de Cálculo para Engenharia e áreas afins. Seus interesses de pesquisa centram-se na formação de professores e no uso de tecnologias em Educação Matemática. **thaisamuller@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 159-164
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Sobre creación de problemas

Problema[1]

En la panadería del barrio venden 6 panes por 1 sol, pero cada pan por 20 céntimos de sol. María compró 9 panes y pagó con 2 soles. ¿Cuánto debería recibir de vuelto?:

Es probable que llame la atención la sencillez de este problema, pero la idea es usar ahora "El rincón de los problemas" para hacer algunos comentarios y reflexiones sobre la experiencia de crear problemas como parte de la tarea docente y sobre su importancia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El problema propuesto se me ocurrió cuando fui un domingo a la panadería de mi barrio y, encontré que vendían 7 panes por un sol, pero cada pan por 20 céntimos. Yo compré 8 panes y pagué 1 sol y 20 céntimos. En el camino a casa, pensé que la situación experimentada, podría convertirse en un problema a ser estudiado. Pensé que era mejor modificar la "oferta" de la panadería y considerar 6 panes por un sol y así poder examinar otras posibilidades. Para ejercitar más operaciones, pensé en el problema del vuelto al pagar entregando monedas por un importe mayor al de la compra. Así, pensé proponer el siguiente problema:

> *"En la panadería del barrio venden 6 panes por 1 sol, pero cada pan por 20 céntimos de sol. María compró 9 panes y pagó con 2 soles. ¿Cuánto debería recibir de vuelto?"*

Mi intención era ver cómo interpretaban la oferta de la panadería; sin embargo, como no tengo alumnos de primaria, sino alumnos que van a ser profesores de primaria, pensé que más enriquecedor sería explorar cómo reaccionarían ante diversas interpretaciones de los alumnos de primaria. Por otra parte, sería interesante explorar también competencias y actitudes en relación a la creación de problemas; entonces integré el texto en la siguiente situación-problema que propuse a mis alumnos de la Facultad de Educación (el día que la apliqué, asistieron 34):

> *"El profesor Ramírez fue un día a comprar pan. De la experiencia que tuvo, inventó el siguiente problema y lo propuso a sus alumnos de 5º grado de primaria:*
> *En la panadería del barrio venden 6 panes por 1 sol, pero cada pan por 20 céntimos de sol. Si compro 9 panes y pago con 2 soles. ¿Cuánto debería recibir de vuelto?"*

[1] En este problema se usa la unidad monetaria peruana, denominada "Nuevo sol", que abreviadamente se usa como "Sol".

A continuación se anotan las respuestas de algunos de sus alumnos:

Pedro: 20 céntimos
Daniel: 50 céntimos
Carmen: 70 céntimos
Juan: 40 céntimos
Zoila: No se puede saber

Y pedí que resuelvan las siguientes cuestiones:

a) Escribe un comentario que le harías a cada uno de los alumnos, por sus respectivas respuestas.

b) Haz un comentario libre sobre
   i) Lo hecho por el profesor Ramírez
   ii) El problema

c) Escribe algunas sugerencias que le harías al profesor Ramírez.

Como todos estos ítems son de formato abierto, pude extraer la siguiente información:

Del ítem a:

Considera que sólo una de las respuestas dadas es correcta	70 %
Considera que Zoila da una respuesta pertinente ("No se puede saber")	15 %

Cabe mencionar que el 91 % consideró que Juan dio una respuesta correcta.

Del ítem b:

Considera que al problema le falta claridad en el enunciado	65 %
Valora positivamente el hecho que un profesor cree un problema.	26 %
Valora positivamente el hecho de que el problema considere un contexto extramatemático.	56 %

Del ítem c:

Hace sugerencias para mejorar el problema	24 %

Algunos comentarios

1. La oferta de la panadería no es completamente clara, pues en términos estrictos, no descarta la posibilidad de que 3 panes se vendan por medio sol (50 céntimos) y tampoco se sabe si la oferta es válida únicamente si se llevan 6

panes. Así, caben varias interpretaciones y en consecuencia no debería darse por correcta solo una respuesta.

2. Podemos observar en el cuadro que un 65% de los futuros profesores considera que al problema le falta claridad en el enunciado, lo cual es positivo para la resolución y para la creación de problemas, pues revelaría una actitud crítica y la competencia de identificar un texto sin claridad suficiente; sin embargo, el 70% considera que solo una de las respuestas es la correcta. (El 96% de ellos consideran que la respuesta correcta es la de Juan; es decir 40 céntimos de vuelto). Esto es sorprendente, pues la unicidad de la respuesta no puede obtenerse de un texto que se presta a varias interpretaciones. Al conversar con algunas alumnas que estaban tanto entre las del 65% como entre las del 70%, manifestaron: "el texto no está muy claro, pero debe entenderse que por cada 6 panes se paga un sol y que la oferta no vale para menos de 6 panes". Una conjetura para entender esto es el haber tenido una formación fuertemente marcada por una gran preponderancia de un significado institucional sobre los significados personales; es decir, el "deber ser" tiene que ser dado por la institución (representada por el profesor o el texto), y aceptado por los alumnos, más allá de las consideraciones o interpretaciones personales.
3. Cabe destacar, en la línea de reflexión dada en el comentario anterior, que solo un 15% (5 de los 34) considera que la respuesta de Zoila ("No se puede saber") es correcta. Estos 5 consideraron también que al problema le falta claridad (son parte del 65%). En este caso, se estaría manifestando el estereotipo de que el alumno debe responder dando algún número, o haciendo alguna operación, a pesar de no haber claridad en el enunciado.
4. También es importante comentar que muchos alumnos se dieron cuenta de otras posibles interpretaciones a la oferta de la panadería solo después de examinar las respuestas de Pedro y de Daniel. Las consideraron interpretaciones erróneas, pero coherentes con la respuesta que dieron. Esto lleva a pensar en la necesidad de estimular más el espíritu crítico de profesores y futuros profesores en la interpretación de textos.
5. Solo un 26% manifiesta explícitamente su valoración por la creación del problema por el profesor de aula. En el comentario libre que se les pide acerca de lo hecho por el profesor, la mayoría se refiere al problema en sí o a la contextualización, sin dar mayor importancia al hecho mismo que un profesor de aula lleve a sus alumnos un problema de su creación e inspirado en una experiencia cotidiana. Curiosamente, valoran la contextualización (56%) pero son mucho menos (26%) los que manifiestan una valoración positiva a la creación del problema por el profesor. Este hecho contribuye a mantener la conjetura de que la creación de problemas no se considera parte de las actividades docentes. Lo usual es que los problemas sean transcritos de textos, de Internet o de separatas que recopilan problemas. Esto explicaría que muy pocos (24%) tomen la iniciativa de hacer sugerencias para mejorar el problema.
6. En coherencia con lo manifestado en 2 y 3, la mayoría de comentarios a las respuestas de Pedro, Daniel y Carmen es que están equivocados; algunos expresan cómo creen que entendieron el problema para llegar a las respuestas

que dieron (sobre todo Pedro y Daniel) y solo un 15% hace un comentario estimulante o comprensivo a la respuesta de Zoila.

Esta exploración inicial me lleva a reafirmar mi convicción de lo importante que es la creación de problemas – para profesores y alumnos – y a sugerir que pongamos más atención a la creación de problemas, como parte importante de la tarea docente, pues "la actividad de crear problemas matemáticos complementa muy bien la de resolver problemas, porque estimula aún más la creatividad y contribuye a precisar la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se espera manejen los estudiantes, en el marco de una configuración epistémica adecuada."[2]

Concluyo, exhortando a los colegas, profesores e investigadores, a vivir la experiencia de crear problemas que estimulen el aprendizaje de las matemáticas; a investigar sobre diversos aspectos de la creación de problemas; y a incluir la creación de problemas no solo en los planes de formación de profesores, tanto de los que aún no ejercen la docencia, como de los que ya están en servicio, sino también en las actividades de los alumnos de todos los niveles educativos. Ciertamente, la creación de problemas está muy relacionada con la formación matemática y con los estímulos a la creatividad.

Considero muy importante estudiar e investigar la creación y la propuesta de problemas, paralelamente a la solución de problemas, por tres razones básicas:

i. Los aportes de las investigaciones sobre la resolución de problemas para el aprendizaje de las matemáticas no podrán concretarse si no se tienen problemas buenos y adecuados;
ii. En los textos no solo hay escasez de problemas –en su mayoría son solo ejercicios – sino que los pocos que hay, difícilmente corresponden a las necesidades específicas de los profesores que desarrollan su docencia en contextos concretos y que buscan estimular el aprendizaje de alumnos con experiencias y motivaciones particulares;
iii. El aprendizaje por descubrimiento lleva al niño a imaginar situaciones que el profesor podría usar creativamente, convirtiéndolas en "problemas nuevos", que favorecerían tanto la comprensión del concepto que se está tratando, como el desarrollo de la autoestima del niño.

Estoy seguro que hay muchas experiencias y reflexiones valiosas en torno a la creación de problemas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, más allá de los problemas para evaluar. Adaptación de problemas, creación de problemas con situaciones intramatemáticas, creación de problemas con situaciones de la vida cotidiana, problemas no rutinarios, etc. Espero haber estimulado a compartir experiencias y reflexiones y me encantaría recibir comunicaciones de los lectores sobre este asunto.

Nota: Agradezco al Prof. Dr. Raymond Duval por su amable comunicación con sus Reactions about "*Optimización en el zoológico*" Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION. Septiembre de 2011. Volumen 27. La misma es transcripta a continuación:

[2] Malaspina, U. (2011). *Intuición y resolución de problemas de optimización. Un análisis ontosemiótico y propuestas para la educación básica*. Alemania: Lap Lambert Academic Publishing GMBH & Co.KG -Editorial Académica Española, p. 237

Reacciones sobre el problema “Optimización en el zoológico”, presentado en el *Rincón de los Problemas* del volumen anterior.[3]

Raymond Duval

(Estas primeras reacciones están hechas desde el punto de vista de los registros de representación semiótica.)

I. Para analizar el problema empiezo variando la representación de los datos y las restricciones que determinan el problema.

En su artículo, la representación de las restricciones es verbal: “*un movimiento es el traslado de un animal a una jaula adyacente y que nunca deben estar dos animales al mismo tiempo en una jaula*” y la representación de la información es mediante una tabla: 7 animales en una tabla de 2x4. (p.163)

Entonces, puedo cambiar la representación de las restricciones de dos maneras:

— Convirtiendo un movimiento por una flecha
— Explicitando “*jaula adyacente*” como la permisión de solamente dos movimientos: vertical y horizontal. Se excluyen los movimientos en diagonal.

Y puedo cambiar la representación de la información reduciéndolos de dos formas

— tomando la tabla más pequeña, de 2x2
— centrándonos en un solo animal

Así, podemos definir la regla para el cálculo de “*el número mínimo de movimientos que nos conduzca a la ubicación de cada animal en su jaula correspondiente*” (p.164)

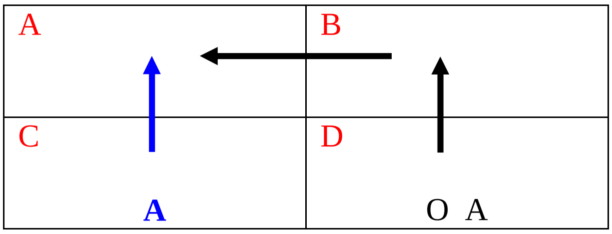


Figura 1. Con solo UN animal: *un* movimiento,o *dos*, de acuerdo a la posición inicial

La solución presentada en la página 164, basada en una primera observación, es de hecho una descripción de esta representación tabular mediante flechas. Pero es también una manera de describir lo que significa la expresión “*traslado a una jaula adyacente”* y un modo de verificar que es “*el número mínimo de movimientos*” de acuerdo a “*la jaula inicial*”.

Ahora, el problema se plantea no con un animal, sino con varios. Así, podemos hacer la misma pregunta con esta información:

A **C**	B **A**
C **B**	D

Figura 2: una variación a la representación tabular de la información.

[3] Traducción hecha por los editores, del original enviado en inglés por el autor.

Mediante la aplicación de la regla podemos contar todos los movimientos y obtener el menor número posible de ellos.
La solución es 1 +1 +2 movimientos (a la izquierda), pero el otro no se puede resolver en 2+2 movimientos, porque no podemos intercambiar a los animales en cuadrados en diagonal sin mover a A. De hecho, no hay solución.

En esta primera etapa del análisis cognitivo podemos hacer tres preguntas:

— ¿Por qué dar la representación tabular de la página 163 y no la representación de la Figura 2 de arriba?
— Estas variaciones deberían cambiar el problema para los estudiantes (y para el profesor?)
— Son necesarias las fleches para una representación adecuada en una representación tabular?

II. Podemos obtener una solución con el siguiente *arreglo espacial*?

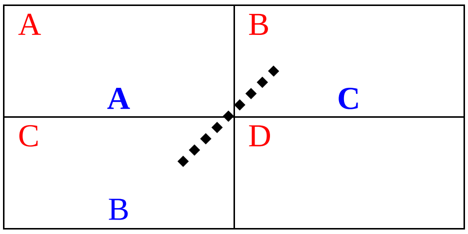


Figure 3

La regla previa puede ser engañosa. Por aplicación de la regla en este caso el problema no puede ser resuelto en 2+2 movimientos, porque no podemos intercambiar B y C en las casillas en diagonal *sin mover a A*. De hecho, no es solución porque están excluidos los movimientos en diagonal.

Y entonces está la cuestión de la extensión de la tabla primero a 2 x n, luego a n x n y por qué no a n x n x n.

III. Ahora, ¿cómo podemos describir todos los arreglos espaciales posibles?

Veamos una forma de representación lineal de la información del problema. Nosotros podemos usar el siguiente orden lineal de letras para codificar las posiciones de cada cuadrado en la tabla ABCD, y "…." para el cuadrado vacío.

Entonces, las varias posiciones iniciales de los animales en la tabla pueden ser descritas de la siguiente manera:

ABC…
ACB … (figura 3, arriba)
CAB … (figura 2, arriba)
CBA …
BAC …
BCA ....

La tabla dada en p. 167 es…….. CBA (2+ 2 +2 movimientos)

Este tipo de representaciones abre una exploración en combinatoria…

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 165- 176
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Pensando en la formación de los futuros Profesores de Matemática

Nilda Etcheverry; Marisa Reid; Rosana Botta Gioda

Resumen

En este artículo se presenta el relato de una experiencia desarrollada con futuros profesores y docentes de educación secundaria de Matemática.
Se trabajó en el diseño e implementación de una actividad que combina la enseñanza de la geometría y el uso de software de geometría dinámica, dentro de un modelo didáctico amplio, flexible, riguroso y sistemático

Abstract

In this paper it presents an experiment developed with developed with prospective teachers and teachers of secondary education of mathematical.
One worked in the design and implementation of an activity that combines the education of geometry and the use of software of dynamic geometry, within ample, flexible, rigorous and systematic a model didactic.

Resumo

Neste artigo apresenta-se o relato de uma experiência desenvolvida com futuros professores e docentes de educação secundária de Matemática.
Trabalhou-se no desenho e implementación de uma actividade que combina o ensino da geometría e o uso de software de geometría dinâmica, dentro de um modelo didáctico amplo, flexível, rigoroso e sistémico.

1. Introducción

Como docentes formadores de profesores de matemática, nos hemos propuesto desde la asignatura Práctica Educativa II del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam), un objetivo macro que consiste en profundizar en el conocimiento profesional del profesor de Matemática con el objeto de incidir en su formación profesional.

En el espacio curricular de Matemática para el ciclo básico de la educación secundaria (de la provincia de La Pampa), uno de los ejes que se definió es GEOMETRÍA Y MEDIDA, donde se considera que "*en este ciclo de la escolaridad se debe iniciar el tratamiento formal de las nociones adquiridas en ciclos anteriores, a través de la utilización de generalizaciones y vínculos con las expresiones algebraicas.*

Esto supone recorrer un camino que va desde una geometría ligada únicamente a las representaciones y mediciones, hacia otra, independiente del "dibujo" como elemento de análisis, que recurra a las propiedades y condiciones de construcción. En el enfoque propuesto, el aprendizaje geométrico no puede reducirse al aprendizaje de los conceptos por sí mismos, sino que debe dar lugar a *la adquisición de estructuras conceptuales y lógicas, fundamentalmente las lógico-geométricas."*

En el material curricular, también se hace mención a la utilización de la tecnología considerando que los avances tecnológicos afectan a la sociedad y a la educación, siendo necesario incorporar en el curriculum de Matemática, el uso de recursos tecnológicos que resulten adecuados.

Estas orientaciones curriculares dan cabida a reflexionar y accionar sobre una reorganización adecuada y coherente en la formación inicial de profesores de matemática hacia la adquisición de conocimiento profesional, con los objetivos de dotar a los alumnos de herramientas que fomenten su autonomía profesional y presentarles aspectos que permitan ampliar su visión formal del conocimiento matemático.

Consideramos que adquirir conocimiento profesional en el ámbito de las nuevas tecnologías requiere tanto profundizar en el conocimiento del propio recurso a nivel técnico como en el análisis de las consecuencias de su uso en la enseñanza. Por ello proponemos actividades que combinen estas dos facetas:

- Tareas técnicas a realizar con el software de geometría dinámica, que servirán para profundizar en el conocimiento técnico del mismo y como apoyo para reflexionar sobre la materia que se enseña, su naturaleza, los condicionantes de su implementación en un soporte computacional, los distintos modos de representarla, etc.
- Documentos teóricos para que los alumnos analicen cuestiones relacionadas con el aprendizaje y la planificación de actividades de enseñanza, teniendo como referencia su propia experiencia en el uso del software y la actuación del profesor en dicho contexto.

Aportamos así un importante factor de contextualización a la construcción de conocimiento profesional, como es la utilización de un recurso particular (el software de geometría dinámica) entendiendo que la adquisición de conocimiento profesional está fuertemente vinculada al contexto (Llinares, 1994), en particular, al tipo de situaciones peculiares que implica el uso de software.

2. ¿Cómo organizamos la experiencia?

2.1. Primera etapa (Los docentes formadores con los futuros profesores)

Durante el año 2010 con los 12 futuros profesores que cursaban la asignatura Práctica Educativa II, correspondiente al tercer año de la carrera Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam, se trabajó en el diseño de actividades para la enseñanza de conceptos geométricos usando tecnología, dentro de un modelo didáctico amplio, flexible, riguroso y sistemático.

Los aspectos que se tuvieron en cuenta para el diseño de actividades con los futuros profesores fueron:

- la tecnológica como estrategia de intervención para contribuir al desarrollo de capacidades complejas y competencias matemáticas.
- las competencias que el profesor desea desarrollar en sus estudiantes.

El uso del término competencia se ha instalado en el discurso de la educación matemática, sobre todo en el ámbito del desarrollo curricular, de la práctica de la enseñanza y de la evaluación, donde se habla con frecuencia de "enseñar por competencias". Perrenoud (2007) define competencia como "*la facultad de movilizar un conjunto de recursos (saberes, capacidades, informaciones, etcétera) para solucionar con eficacia una serie de situaciones conectadas a contextos culturales, profesionales y condiciones sociales*".

Si se admite que las competencias no están hechas solamente de saberes, sino también de esquemas de puesta en práctica de esos saberes, y de esquemas de acción que no apelan a ningún saber, entonces es necesario preguntar cómo se forman esas competencias en la formación inicial de profesores. En este caso trabajamos particularmente con la competencia de planificación de actividades.

También el término competencia alude a lo que el profesor desea que sus estudiantes sean capaces de hacer a partir de los contenidos, a cómo pueden movilizar y usar los conocimientos aprendidos. En este escenario, interesa replantear el rol del docente como diseñador y conductor de estos procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Parte del proceso de diseño de una unidad didáctica, consiste en establecer qué espera el profesor que aprendan sus alumnos acerca del tema que está planificando, qué puede interferir ese proceso de aprendizaje o cómo puede favorecer que sus estudiantes logren aprender.

Se sabe de la potencialidad de la tecnología, pero no nos debemos quedar con que es la solución a todos los problemas educacionales, es necesario planificar con detalle qué objetivos y competencias podemos desarrollar en los futuros profesores, qué tareas podemos diseñar con esos materiales y recursos para conseguirlo y cuál será la evaluación que pondremos en práctica para acreditar ese aprendizaje. Los procesos de aprendizaje son sumamente complejos, y el docente debe necesariamente reflexionar sobre su propia práctica para enseñar Matemática con Tecnología, por ello debemos plantearnos los siguientes interrogantes:

1. ¿Qué competencias han desarrollado nuestros alumnos en años anteriores?
2. ¿Qué competencias esperamos que desarrollen a partir de las actividades que van a realizar?
3. ¿Qué obstáculos y dificultades sabemos que los alumnos presentan cuando abordan el conocimiento que queremos enseñar con la actividad a planificar?
4. De las características y potencialidades de los recursos informáticos disponibles, ¿cuáles son específicos a las competencias, obstáculos y dificultades que se identificaron en el análisis cognitivo del conocimiento a poner en juego?

2.2. Segunda etapa (Los futuros profesores con docentes de aula)

Los futuros profesores junto a docentes de aula, estuvieron de acuerdo en que al plantear a los alumnos una situación didáctica, conviene tener las siguientes consideraciones:

- La situación debe ser simple, fácil de entender que no implica que sea fácil de resolver, debe provocar la reflexión y por tanto no puede ser un ejercicio, ni un problema (de acuerdo a la clasificación de Hitt (2004)). La matemática que debe utilizarse no debe ser explicitada en el enunciado. Es a través de la interacción de los estudiantes con la situación que emergen representaciones espontáneas, y por tanto la matemática hace acto de presencia de manera natural en la discusión entre los estudiantes.
- Estudiar las conductas en situaciones de aprendizaje con uso de tecnología de acuerdo a las fases de Guy Brousseau (1986) quien considera que, las situaciones de enseñanza tienen que ser tales que los alumnos se apropien de las mismas, hagan suyo lo que ellos consideran que es el problema, y lo asuman con el propósito de resolverlo. Esta actitud o motivación inicial es clave para el resto de la secuencia.
- El docente es el artífice que diseña la situación, pero no interviene (o interviene lo menos posible) para auxiliar al alumno en la definición del problema y la búsqueda de la solución. Brousseau (1986) llama situaciones “a-didácticas” a este tipo de situaciones porque la construcción de los conocimientos se produce como consecuencia de las exigencias de la situación misma, y no como respuesta a los deseos del docente.
- Las características de una situación a-didáctica son:
    - El alumno sabe que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, que él debe construir.
    - El alumno debe ser capaz de poner en juego el conocimiento, en situaciones que encuentra fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de toda indicación personal.
    - No es explícita ni evaluable.
    - Deben ser preparadas con fines didácticos.
    - El conocimiento al que se apunta debe ser la manera de llegar a la solución óptima, en el sentido de que la situación no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende.
    - Que la fase sea repetible. Es decir después que el alumno interactúa con el medio puede intentar nuevas resoluciones y establecer por sí mismo si los resultados de su acción han sido exitosos o no, al ser la situación quien le ofrece información sobre su producción.

La situación a-didáctica es únicamente una parte de una situación más amplia que es lo que hemos llamado situación didáctica.

Según el tipo de conocimiento y el papel que juega ese conocimiento en la situación, Brousseau reconoce situaciones de acción (en la que el conocimiento está implícito en las acciones de los sujetos), situación de formulación (en la que los sujetos explicitan verbalmente su pensamiento y sus estrategias), situación de validación (en la que los sujetos utilizan el conocimiento para argumentar a favor o en contra de una afirmación) y situaciones de institucionalización (en las que el conocimiento en cuestión adquiere el status de “saber”).

- El docente traspasa la responsabilidad de la situación al alumno, esto implica que el alumno asume y se hace cargo de las reglas del juego (comprende las consignas con los conocimientos que ya posee), el problema (lo hace suyo), y la decisión (busca y elige las estrategias de acción).
- El conocimiento del alumno surge como resultado de su interacción con el problema mediatizado por los aportes del docente, del contexto y por la interacción con nuevas fuentes de información. El docente debe abstenerse de brindar conocimientos antes de que el alumno aborde y accione sobre los problemas.

En este contexto, las propuestas de resolución de problemas son una posible opción de enseñanza.

La resolución de problemas y las competencias pertinentes a los distintos niveles de educación, se consideran elementos claves de la educación matemática, y están asociados a muchos de los ejes temáticos propuestos en el currículum actual. Por ello consideramos que los futuros profesores de Matemática deben ser formados en esa línea y deben ellos vivir experiencias de resolución de problemas desde este punto de vista.

El desafío en la actualidad, es lograr que los alumnos desarrollen competencias matemáticas consideradas en algunos materiales curriculares como esenciales a lo largo de la enseñanza. Estas integran aptitudes, conocimientos y capacidades, que implican una actitud favorable al intentar entender la estructura de un problema y la capacidad para desarrollar los procesos de resolución (Abrantes, 2001).

2.3. Tercera etapa (Implementación de la actividad)

Reportamos el desarrollo de la actividad diseñada por dos de los futuros profesores, implementada en el aula de primer año (12 años de edad) de la Ex - Unidad Educativa Nº 10 de Santa Rosa (La Pampa), junto al docente responsable de aula y bajo la supervisión de los docentes formadores. Éstos realizaron grabaciones de audio y video de las sesiones de clase para posterior análisis y reflexión de las prácticas.

Entre los saberes seleccionados para trabajar en primer año del ciclo básico de la educación secundaria respecto del eje Geometría y Medida figuran:

- ***El reconocimiento de figuras y la producción y el análisis de construcciones, explicitando las propiedades involucradas, en situaciones problemáticas que requieran:***
    - *analizar figuras para caracterizarlas y clasificarlas (por ejemplo: "el rectángulo es un paralelogramo"),*
    - *explorar y argumentar acerca del conjunto de condiciones (sobre lados, ángulos, diagonales y radios) que permiten construir una figura;*
    - *construir figuras a partir de diferentes informaciones gráficas y coloquiales (propiedades y medidas), explicitando los procedimientos empleados y evaluando la adecuación de la figura obtenida respecto a la información dada; analizar afirmaciones y producir argumentos.*

La actividad que se corresponde con la planificación curricular del docente, se enmarca en el eje Geometría y Medida: Posibilidades de construcción del paralelogramo.

Un grupo de 30 alumnos trabajó en la sala de computación con la actividad propuesta utilizando el software Geogebra (de uso libre, que puede obtenerse del sitio www.geogebra.org). Cabe destacar que los alumnos conocían los comandos básicos de este software de geometría dinámica.

Actividad a resolver: En la carpintería "El Ruso" quieren recortar paralelogramos cuyos lados miden 16cm y 8 cm para construir las piezas que forman el siguiente diseño de un piso de madera.

¿Habrá un único paralelogramo que cumpla con esas condiciones? ¿Podrías ayudarlo?

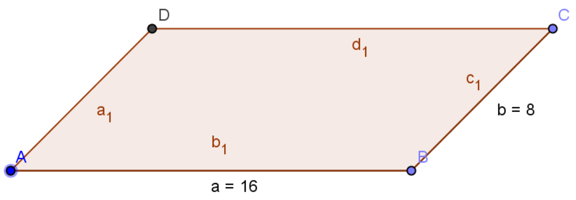
Para contar el desarrollo de la clase hemos destacado las instancias principales del trabajo de los alumnos y las intervenciones docentes. Una parte muy importante de la estrategia de enseñanza es la planificación de los tiempos de aula: los momentos de apropiación de la consigna, de búsqueda de datos, de diseño, de intercambio de ideas, de actividad constructiva, de plenarios, de exposición, de cierre, etc.

El docente interviene lo menos posible y al planificar esta actividad debe tener en cuenta que:

- el conocimiento que tienen los alumnos es la definición de paralelogramo como cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.
- este problema apunta a que los alumnos identifiquen que no es suficiente considerar solamente los lados para caracterizar un paralelogramo y que reconozcan que a esos datos habría que agregar, por ejemplo, el ángulo que forman los lados.
- los alumnos que ingresan a primer año del secundario (12-13 años) posiblemente tienen una imagen de paralelogramo que responde a una representación según la cual la inclinación entre los lados es más o menos estable (llamada por varios autores figura típica), que les limita la posibilidad de concebir el ángulo como variable si se conocen los lados.

¿Qué pasó con la actividad en la clase?

Los alumnos realizaron las construcciones utilizando el software. En algunas pantallas aparece el mismo dibujo previsto al planificar:



En otras como en el monitor de Lucía aparece:

El docente interviene para que todos observen los dos paralelogramos, con distinta apariencia, y con la intención que modifiquen su postura, la profesora dice: "*el que construyo Lucía parece distinto a los demás, ¿servirá para ayudar al carpintero?*"

A partir de la confrontación que se genera, los alumnos comienzan a ampliar el conjunto de paralelogramos posibles aceptando que puede haber algunos "más aplastados" y otros "más derechos".

Con la ayuda de las herramientas del software, moviendo uno de los lados, encontraron otros paralelogramos que cumplen con las condiciones pedidas.

Este es un momento para no desperdiciar, que aún si no surge de los mismos alumnos, el docente debe intervenir para tratar el problema de la unicidad o no de una construcción. Un alumno dice: *"no es el mismo paralelogramo porque la altura no es la misma."* Otro afirma*, "pero cumple con las medias que nos dieron!!"*

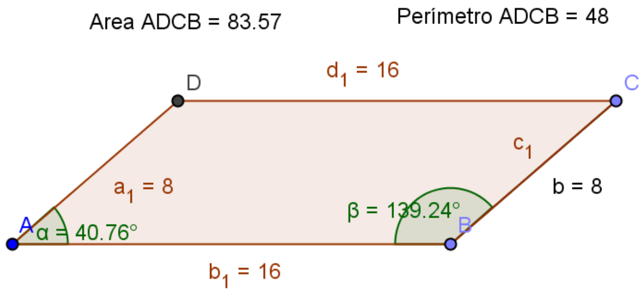
El docente nuevamente interviene y les dice que trabajen sobre esa cuestión con la ayuda del software.

Al usar tecnología observan rápidamente, qué otros elementos del paralelogramo sufren cambios al variar el ángulo y cuáles no se modifican.

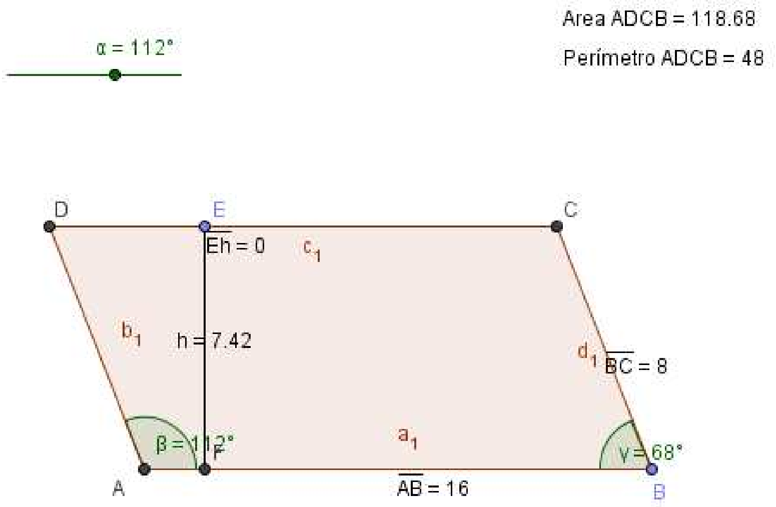
Reproducimos aquí algunos de los comentarios realizados por los alumnos:

- *"la diagonal tampoco permanece igual";*
- *"Ah..., entonces el área tampoco es la misma!! Sólo el perímetro no cambia".*

Una de las construcciones obtenidas se muestra a continuación:



Algunos alumnos realizaron otra construcción haciendo uso de la herramienta deslizador:



Estas construcciones muestran que este programa de geometría dinámica permite variar el punto o ángulo y observar cómo se modifican las demás elementos. Y también suplanta el trabajo con regla y compás permitiendo hacer construcciones a partir de relaciones y propiedades geométricas.

Docente*: ¿y qué le dirían al carpintero?*

Algunas de las respuestas obtenidas fueron:

- *Que tiene distintas posibilidades*
- *Cuando el ángulo se acerca a cero la figura queda muy chatita*
- *Y depende del gusto del cliente*
- *Cuando el ángulo se hace de 90º parece un rectángulo y la guarda no se va a parecer a la que pide el cliente.*

A partir de los comentarios de los alumnos y para terminar la clase, el profesor plantea los siguientes interrogantes:

¿el rectángulo es un paralelogramo?

¿el paralelogramo es un rectángulo?

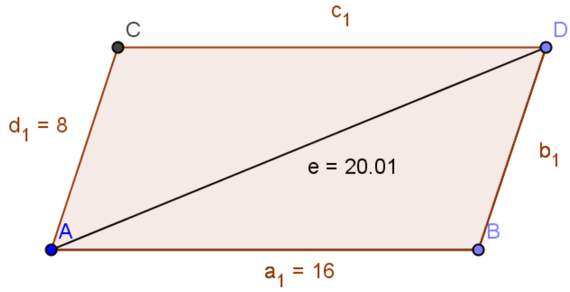
El docente los incentiva en la búsqueda de argumentos que justifiquen que un rectángulo es un paralelogramo particular.

En la clase siguiente, el docente realiza una síntesis de los conocimientos puestos en juego en la clase anterior, y para continuar con el trabajo plantea la siguiente pregunta: ¿Qué dato adicional podríamos darle al carpintero para que el paralelogramo sea único?

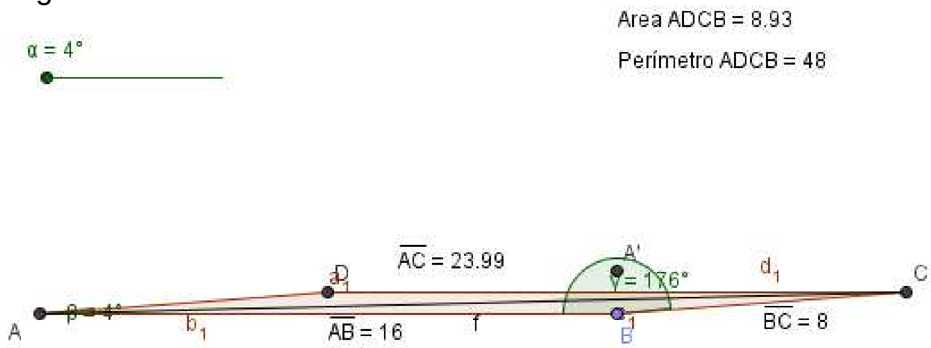
Aquí el docente debe tener presente que determinar qué otra información es necesaria para obtener un único paralelogramo demanda una actividad intelectual, ya no es suficiente con ensayar una construcción. Se debe, en cierta forma, encontrar argumentos que justifiquen que con ese dato nuevo, efectivamente, la construcción será única. Estas discusiones deben incentivarse en los alumnos pues, son fundamentales en el tipo de trabajo que se intenta proponer: la experiencia de la construcción, el reconocimiento de la unicidad o no, preparan el terreno para que los alumnos comiencen a argumentar.

Un alumno menciona la posibilidad de conocer la diagonal, entonces comienzan a experimentar con distintos valores para la diagonal.

Uno de los grupos construye con diagonal igual a 20cm y obtiene un paralelogramo, mientras otros utilizan otras medidas para probar. Y aparecen construcciones como la que se muestra:



En otro de los grupos, los alumnos continúan moviendo uno de los vértices para que la medida de la diagonal sea exactamente 24 cm y se observa que el paralelogramo se convierte en una línea.



En un tercer grupo se observa que la diagonal se aproxima a 24 cuando el ángulo se aproxima a 0º.

Al confrontar varios de los dibujos producidos por los alumnos, la docente guía la discusión en la clase, con la finalidad de identificar aquellas características que van dando cuenta de la imposibilidad de la construcción.

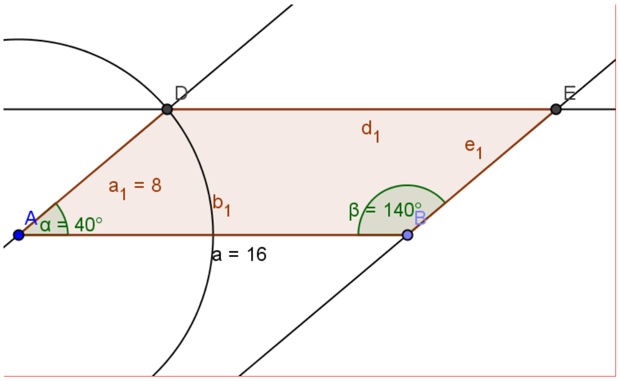
Los comentarios de algunos alumnos son:

- *La diagonal que trazamos divide al paralelogramo en dos triángulos.*
- *Los lados de un triángulo miden 16 y 8, y había un propiedad que dice: la suma de dos lados de un triángulo tiene que ser mayor que el tercero, no?*.
- *En este caso 16+8 no es mayor que 24, entonces que la construcción planteada es imposible de realizar.*

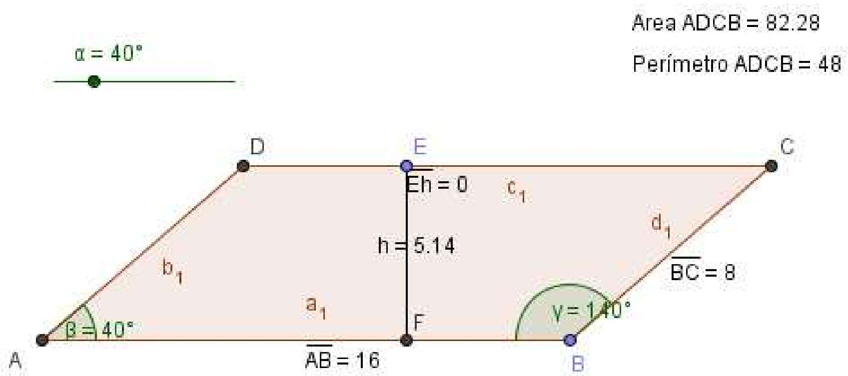
La intencionalidad de plantear a los alumnos problemas sin solución radica en que este tipo de problemas provoca la necesidad de justificar la imposibilidad de la construcción.

Precisamente, se busca que los alumnos vayan entrando en el juego de buscar argumentos que justifiquen la posibilidad o imposibilidad de realizar una construcción. Al respecto Itzcovich (2005) afirma "*…la determinación de la unicidad, existencia o infinitud de construcciones requiere de la explicitación de relaciones entre datos mediante ciertas propiedades que exceden las experiencias de dibujar*".

Otro alumno propone darle como datos al carpintero que un lado mide 16cm y los ángulos adyacentes a dicho lado común midan 40º y 140º.
Uno de los grupos muestra la siguiente construcción utilizando la herramienta Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos:



A partir de la siguiente construcción, un grupo fórmula: *"dos lados pueden agrandarse o achicarse, mientras los otros dos sean paralelos y midan 16 cm y no se modifiquen las medidas de los ángulos".*



Facundo plantea "*pero ¿pueden ser de cualquier medida los ángulos?*"

Daiana dice "*cualquier medida no, porque como en el rectángulo, la suma de los ángulos interiores debe ser 360°*".

Todos los pedidos llevan a que el alumno realice un trabajo exploratorio de ensayos y errores, de intentos de explicar lo que está ocurriendo, de ver si se arma o no el dibujo, para que finalmente la comprensión y la explicación de la resolución demanden el uso de una propiedad.

El trabajo en las siguientes clases continúa con la propuesta de actividades alternativas o situaciones problemáticas sin olvidar que bajo el enfoque por competencias no se busca que el estudiante adquiera ciertos contenidos, como fin único, sino que sepa para qué sirven y ver su utilidad en algún contexto.

3. Comentarios Finales

Consideramos que debe destacarse la gestión de la actividad presentada en el aula. Uno de los factores que contribuyó fue que en la planificación que los futuros profesores realizaron de la actividad se previó y explicitó qué tipo de actuaciones han de promoverse en el aula para lograr el aprendizaje de sus alumnos. Por ejemplo, se enfatizó el desarrollo de las competencias de pensar y razonar en la experiencia de la construcción con ayuda del software. Esto permitió al alumno visualizar las distintas posibilidades, con el consecuente reconocimiento de las posibilidades de construcción y de esa manera ir preparándolos a la entrada de un trabajo más argumentativo y así retomar la idea, antes planteada, que en geometría se acepta la validez de una afirmación por la argumentación y no por el dibujo o la medición.

Debemos reconocer que la visualización de los desarrollos previos a las soluciones y la obtención de éstas con la aplicación de determinados software, incentivaron a los alumnos a utilizar las herramientas tecnológicas como un importante recurso complementario.

Para que los futuros docentes alcancen las competencias y perfil deseado es necesario implementar dispositivos de formación y entrenamiento que los comprometa a aumentar sus capacidades de observación, de agudizar prácticas reflexivas, de fortalecer el sentido de su propia capacitación.

Bibliografía

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. Educational Studies in Mathematics, 47, 125-143.

Brousseau G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Hitt, F. (2004). Une comparaison entre deux approches, enseignement des mathématiques sans ou avec logiciels et calculatrices symboliques. In Giménez J., Fitz Simons G. and Hahn Corine (2004) Actes de la CIEAEM, 54, Vilanova i la Geltrú. Spain.

Itzcovich, H. (2005). Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones. Libros del Zorzal. Buenos Aires. Argentina.

Llinares, S. (1994). El profesor de matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y desarrollo profesional. En L. A. Santaló y otros (Eds) La Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia. Madrid: Rialp, 297-336.

Materiales Curriculares Matemática Educación Secundaria -Ciclo Básico- 2009. Ministerio de Cultura y Educación. Gobierno de la provincia de La Pampa.

Perrenoud, P. (2007). Diez nuevas competencias para enseñar, 4a. ed., Graó, Barcelona.

Etcheverry, Nilda. Nació en Santa Rosa (Provincia de La Pampa, 1954). Es Magíster en Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional de Río Cuarto. Es docente en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). nildae@exactas.unlpam.edu.ar

Reid, Marisa. Nació en Sansinena (Provincia de Buenos. Aires, 1966). Es Licenciada en Matemática, Universidad Nacional de La Pampa. Es docente en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). mareid@exactas.unlpam.edu.ar

Botta Gioda, Rosana G. Nació en Rafaela (Provincia de Santa Fe, Argentina, 1975). Es Profesora en Matemática y Computación, Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). Es docente en nivel Secundario y en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). rbotta@cpenet.com.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 177- 189
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Las construcciones con GeoGebra como medio para resignificar las propiedades de las Figuras

Julia Edith Corrales

Resumen

Este artículo presenta una experiencia de clase con GeoGebra 3.2, desarrollada con alumnos que ingresan a la Formación Docente, está centrada en resignificar definiciones de las figuras, a partir de una secuencia de problemas de geometria que implican la puesta en funcionamiento de propiedades; como medio para anticipar y establecer la necesariedad de ciertos resultados, identificando nuevas relaciones entre sus elementos que permitan argumentar la existencia y unicidad de los objetos desde una exploración dinámica.

Abstract

This article presents an experience of class with Geogebra 3.2 developed with students who enter to the Educational Formation, is centred in re-meaning definitions of the figures, from a sequence of problems of geometry that includes the setting in functioning of the property; as a way to anticipate and to establish the necessity of certain results, identifying new relations between their elements that allow to argue the existence and uniqueness of the objects from a dynamic exploration.

Resumo

Este artigo presenta uma experiência de classe com GeoGebra 3.2, desenvolvida com alumnos que ingressam à Formação Docente. Seu objetivo em resignificar definições das figuras, a partir de uma sequência de problemas de geometría que implicam a posta em funcionamento de propriedades; como médio para antecipar e estabelecer a necesarieda de certos resultados, identificando novas relações entre seus elementos que permitam argumentar a existência e unicidad dos objectos desde uma exploração dinâmica

Introducción

En el equipo de Formación Docente de la Universidad de la Patagonia Austral (UNPA) Unidad Académica de Caleta Olivia, Santa Cruz, Argentina, se vienen realizando diversas acciones para relevar como vive y se articula el uso de las TIC`S con la enseñanza y aprendizaje en matemática.

La clase diseñada corresponde a un proyecto de acciones con alumnos de la Formación Docente para identificar los tipos de problemas, técnicas, nociones, propiedades, argumentos y lenguajes que les son propios al hacer geométrico desde el uso de distintos programas informáticos, aquí se presentaran situaciones que fueron planificadas por la autora al final de un curso para trabajar con el programa GeoGebra 3.2 dentro de una materia optativa (Taller de reflexión sobre el hacer matemático) que forma parte del plan de Formación de Profesores de Matemática.

Como participante del Proyecto de Investigación denominado “Estudio y Análisis epistémico-cognitivo sobre cómo se articula el saber geométrico que circula en el Nivel Medio con la Formación Docente Inicial” que se desarrolla en la UNPA es donde se inscribe el diseño de estas actividades que forman parte de un estudio más complejos sobre el saber geométrico, que tiene entre otros estos dos objetivos: -Estudiar el presente de la geometría en el Nivel Medio y en la Formación de Profesores y –Relevar como vive y se articulan las nuevas tecnologías con la enseñanza de la Geometría en el Nivel Medio.

En esta experiencia se trabajó con el GeoGebra 3.2, programa útil para explorar propiedades y con posibilidades de diferentes procesos para construir una misma actividad, así como también sugerir contraejemplos para verificar la falsedad de algunas proposiciones, la posibilidad de controlar la validez del procedimiento, armar conjeturas desde la exploración dinámica y otras que se han registrados durante los diferentes momentos de acción con los alumnos. Algunas de las actividades el año anterior se habían trabajado en forma estática (lápiz y papel).

Los distintos programas son una herramienta muy importante tanto para los estudiantes como para los profesores y es fundamental que estos últimos conozcan las bondades y los límites de los mismos para que luego puedan tomar decisiones a la hora de integrarlos a sus clases, desde una postura fundamentada acerca de que tipos de problemas o actividades plantear, anticipando la gestión y el uso del recurso cuando se pretenden determinados objetivos para abordar un conocimiento.

1. Presentación de lo planificado con GeoGebra 3.2

El planteo de estas actividades se inscribe en un proyecto más general que es “El estudio de las figuras y los cuerpos”, a través de actividades que impliquen la puesta en funcionamiento de propiedades como medio para explorar, anticipar y establecer que ciertos resultados emerjan necesariamente.

Fueron elegidas con la intencionalidad de construir la elaboración de nuevas propiedades, de nuevas relaciones, de nuevos conceptos.

Este recorte consistió en la selección de situaciones, que secuenciadas y usando la herramienta que nos ofrece el GeoGebra 3.2, a partir de la exploración dinámica se estudien los significados de las definiciones y propiedades puestas en juegos de algunas figuras geométricas.

2. Experiencia

2. 1. Objetivos:

- Indagar propiedades y nuevas relaciones de las figuras que permitan hacer explicitas las características de los significados que portan sus definiciones.
- Resignificar definiciones de los contenidos involucrados en cada actividad.
- Identificar propiedades y características de las figuras para que los alumnos puedan desplegar prácticas argumentativas en el camino hacia la producción de las demostraciones.

2.2. Contenidos:

- Paralelogramo: Construcción de paralelogramos dados algunos de sus elementos.
- Triángulos: Construcción de Triángulos dados dos o tres elementos.
- Rombos: Construcción de rombos dados algunos de sus elementos.
- Lugar Geométrico.
- Existencia y unicidad de las soluciones de las actividades.
- Criterios de Congruencia de las figuras.

2.3. Cronograma de actividades

Estas actividades se desarrollaron en seis clases de 2hs cada una, incluyendo la evaluación.

Los alumnos estaban familiarizados con el uso del programa desde otro espacio que cursan, un taller de alfabetización Informática para la Formación Docente, donde se apropian de los comandos básicos de algunos programas como Cabri y GeoGebra 3.2.

En las tres primeras clases en forma individual se construyeron y exploraron las tres primeras actividades, registrando las propiedades involucradas, determinando si los datos son suficientes para generar lo solicitado y anticipando que otros elementos y condiciones se pueden poner en juego para la construcción de dicha figura. Formular y validar las conjeturas sobre existencia y unicidad de las figuras involucradas.

En la cuarta clase, se trabaja sobre la exhaustividad de la construcción, ver las limitaciones del programa ante ciertos procedimientos de construcción, y poder reflexionar bajo que condiciones de conjeturar si emerge o no la existencia de esa construcción.

Se trabaja en una práctica reflexiva después de cada actividad, partiendo de la socialización de las construcciones y registros realizados en relación a explicitar las propiedades puestas en acción, para que mediante una dialéctica entre los alumnos mediados por la gestión docente se discutan las conjeturas y se llegue a algunas certezas y nuevas preguntas.

2.4. Actividades propuestas:

Las actividades propuestas fueron extraídas de distintos libros (Itzcovich,2005,pp.19-22) y artículos de revistas (SUMA 39,2002,pp.13-25) en las que se plantean para trabajar a partir de construcciones con lápiz y papel, el objetivo para la docente es poder trabajar a-posteriori en el análisis de los diferentes emergentes de los sistemas de prácticas de años anteriores y de este sistema que se genera con el recurso del GeoGebra 3.2, para caracterizar si estas actividades son o no nuevos problemas a partir de esta propuesta dinámica.

Actividad Nº 1: Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 6 cm. y otro lado mida 4 cm. ¿Habrá un solo paralelogramo qué cumpla estas condiciones?

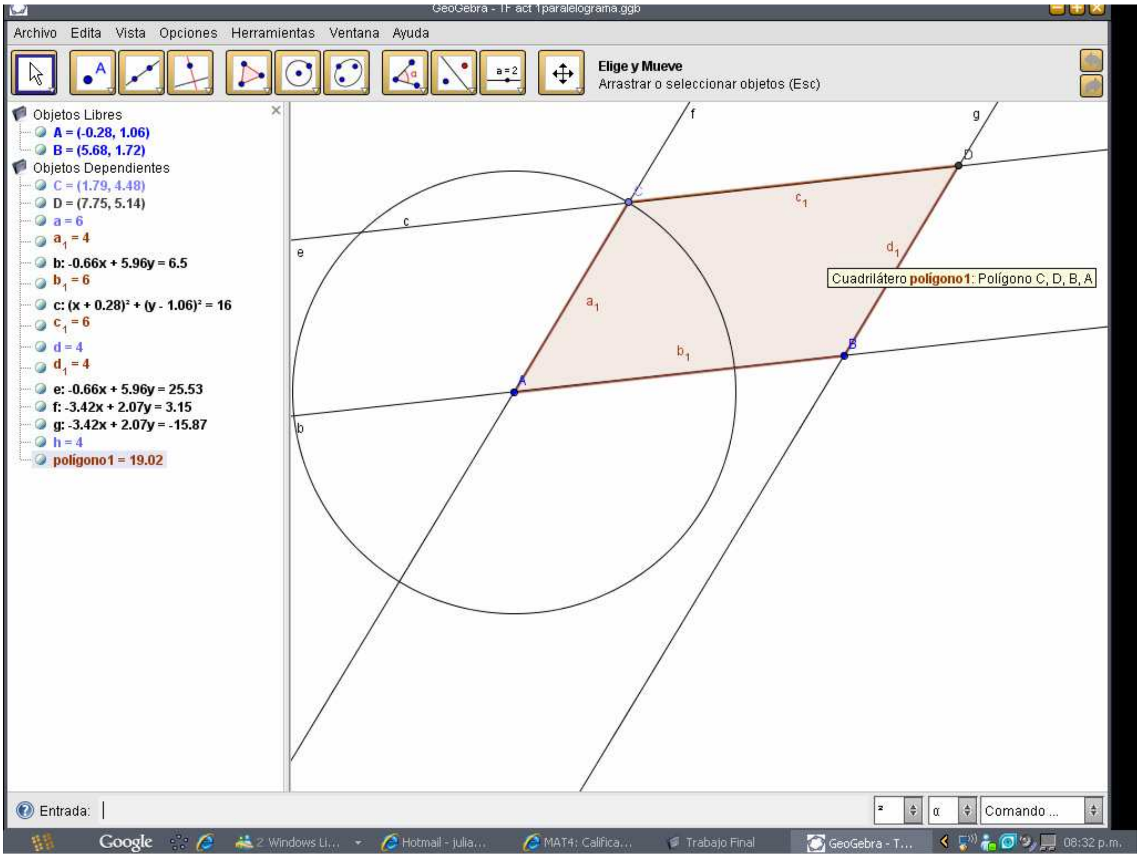


Figura 1

<u>Discusión para esta actividad</u>:

- ¿Es suficiente considerar solamente los lados para caracterizar un paralelogramo?
- ¿Qué podríamos agregar a estos datos?
- ¿Para obtener cuántos paralelogramos?
- ¿Podríamos caracterizarlos mediante alguna propiedad a los paralelogramos obtenidos?

Nuevas preguntas a partir de esta actividad vinculada a la existencia o no de la construcción. Si se modifica la posición de uno de los lados, se obtiene otro paralelogramo que cumple las mismas condiciones:

- ¿Cómo hacer para indicar que se pueden construir muchos paralelogramos?
- ¿Se podrán construir todos? ¿Cuántos son?
- ¿Cómo registro cuáles son los posibles, bajo alguna condición? ¿Cuál?

Otras posibles preguntas para plantear: Si se cambia el ángulo,

- ¿Qué otros elementos del paralelogramos se modifican?
- ¿Cuáles se mantienen?

Esto fue importante porque se promovió con los alumnos discutir acerca de la construcción, las decisiones del uso de tal o cual relación, el reconocimiento de unicidad o no y poder conjeturar al ir barriendo todos los paralelogramos que se pueden construir.

Actividad Nº 2: Construir un triángulo ABC, dado las longitudes del lado su altura y su mediana.

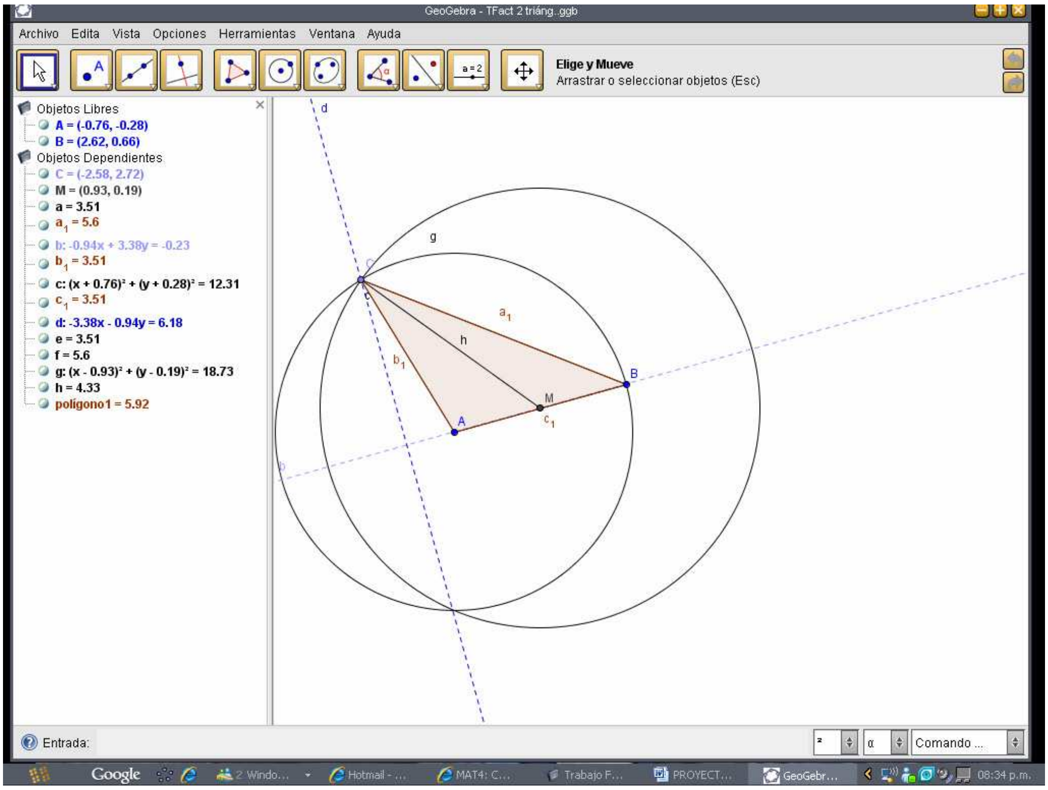


Figura 2

Actividad Nº 3: Construir un triángulo ABC, dado las longitudes del lado y la longitud de la altura respecto a este y la mediana respecto al lado

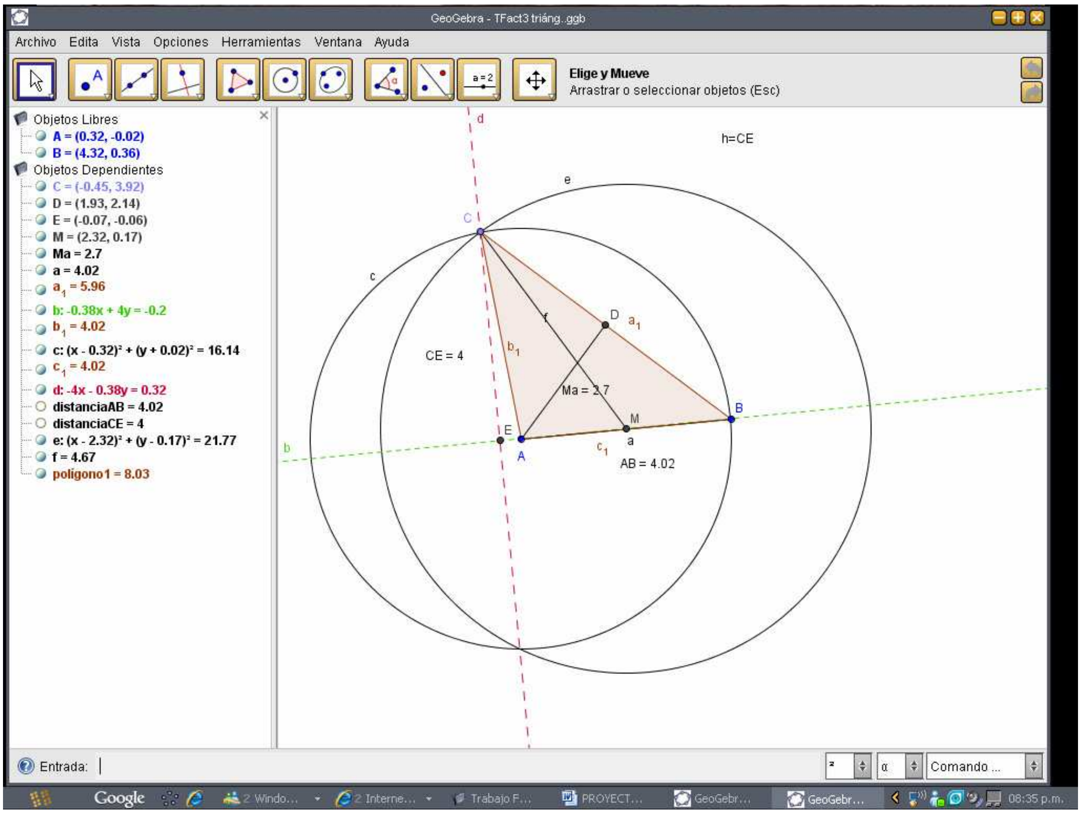


Figura 3

Actividad Nº 4: Construir un rombo que tenga dos vértices en los puntos (0,0) y (2,3), sabiendo que otro de los vértices está situado sobre el eje de las x.

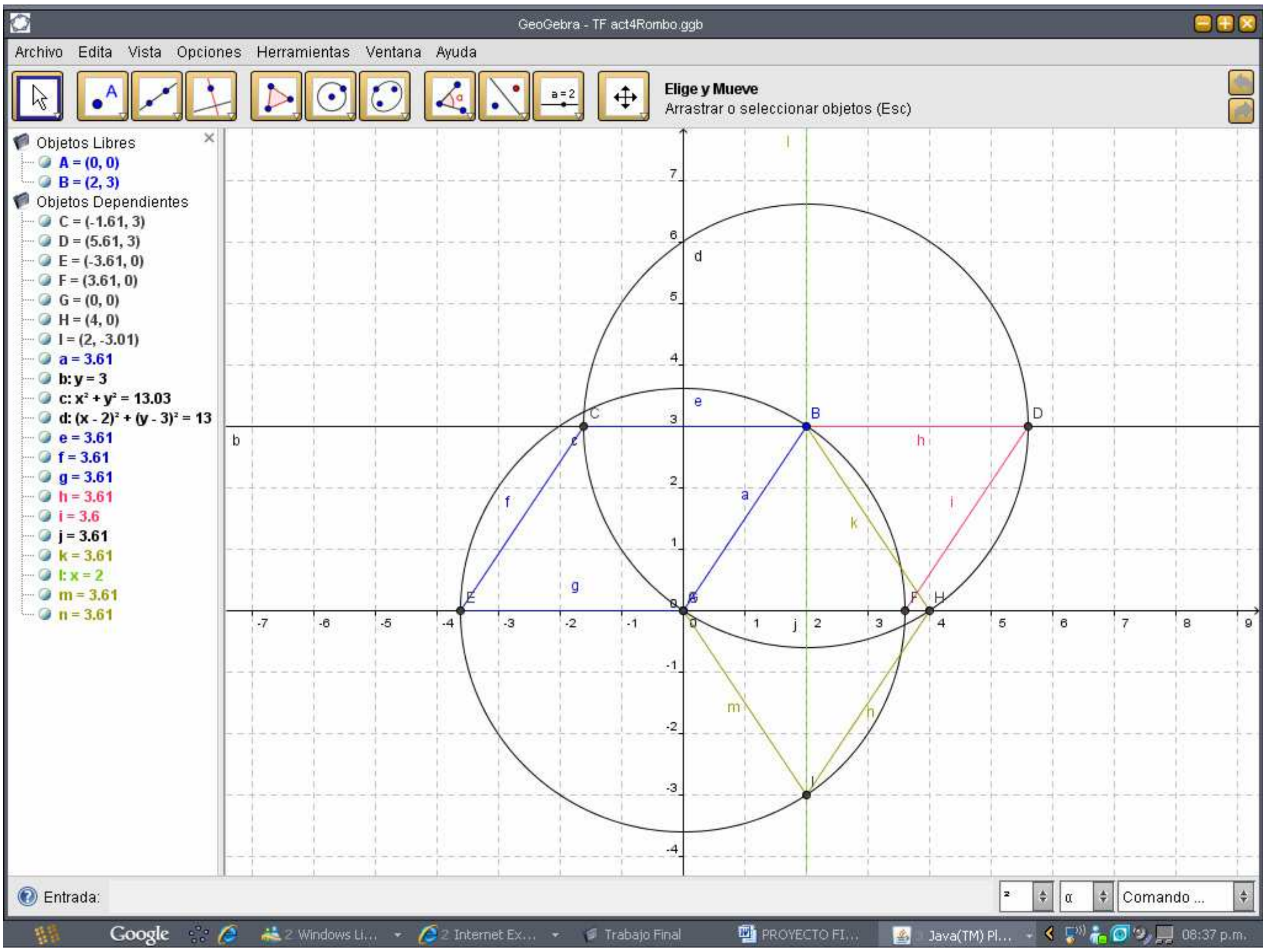


Figura 4

Algunas cuestiones que se debieran tener en cuenta, para conjeturar acerca de la unicidad o no de la construcción y las condiciones mínimas que garantizan la existencia:

- ¿Qué propiedades se ponen en juego para construir?
- ¿Si modificamos la posición de algunos de los elementos se obtiene otra figura que cumpla las mismas condiciones?
- ¿Qué nuevas preguntas y relaciones a partir de la exploración se abren?
- ¿Es posible a través de la exploración conjeturar y validar?
- ¿Cuáles son los objetos geométricos que emergen, puedes caracterizarlos?

Actividades de evaluación:

1. Construir un triángulo ABC, dado las longitudes del lado y la longitud de la mediana respecto al lado BC y AB.

2. Construir y luego establecer algunas conjeturas sobre las relaciones puestas en juego y encontrar argumentos que justifiquen lo realizado en las construcciones.
   a) Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 8cm, otro lado mida 4cm y la altura correspondiente al lado de 8cm sea de 3cm-¿La construcción es la única posible?
   b) Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 7 cm., otro lado mida 3cm y la altura correspondiente al lado de 7cm sea de 4cm. ¿La construcción es la única?

3. Práctica de la estudiante Karina de algunas de las actividades propuestas:

<u>Problema 1</u>:

Datos:

- ✓ Lado AB mide 6 cm.
- ✓ Lado AC mide 4 cm.

Tabla. 1: Pasos de Construcción:

Nº	Nombre	Definición	Comando	Álgebra
1	Punto A			A = (3.04, 5.64)
2	Punto B	Punto en Circunferencia[A, 6]	Punto[Circunferencia[A, 6]]	B = (8.975, 4.762)
3	Segmento a	Segmento [A, B]	Segmento[A, B]	a = 6
4	Punto C	Punto en Circunferencia[A, 4]	Punto[Circunferencia[A, 4]]	C = (2.805, 9.633)
5	Segmento b	Segmento [A, C]	Segmento[A, C]	b = 4
6	Recta c	Recta que pasa por C paralela a a	Recta[C, a]	c: 0.878x + 5.935y = 59.639
7	Recta d	Recta que pasa por B paralela a b	Recta[B, b]	d: -3.993x - 0.235y = -36.958
8	Punto D	Punto de intersección de c, d	Interseca[c, d]	D = (8.741, 8.755)
9	Número distanciaCA	Distancia de C a A	Distancia[C, A]	distanciaCA = 4
10	Texto TextoCA	Nombre[C] + (Nombre[A]) + " \, = \, " + distanciaCA	Nombre[C] + (Nombre[A]) + " \, = \, " + distanciaCA	TextoCA = "CA \, = \, 4"
11	Número distanciaAB	Distancia de A a B	Distancia[A, B]	distanciaAB = 6
12	Texto TextoAB	Nombre[A] + (Nombre[B]) + " \, = \, " + distanciaAB	Nombre[A] + (Nombre[B]) + " \, = \, " + distanciaAB	TextoAB = "AB \, = \, 6"
13	Ángulo α	Ángulo entre B, A, C	Angulo[B, A, C]	α = 101.78°
14	Ángulo γ	Ángulo entre A, C, D	Angulo[A, C, D]	γ = 78.22°

<u>Respuesta:</u>

No hay un único paralelogramo con esas condiciones. Si tomamos como punto de referencia el $\widehat{BAC}$ este varia de 0º a 90º generándome distintos paralelogramos, ya que, si bien las medidas de los lados son únicas, los ángulos varían.

1. El ángulo de un paralelogramo no puede medir $0°$ ni tampoco $180°$, porque por propiedad de ángulos consecutivos de un paralelogramo sabemos que estos son suplementarios, entonces si esto pasara quedarían los puntos a, b, c, d alineados.
2. Al hacer variar el BAC, varían también los otros ángulos por propiedad de los ángulos de un paralelogramo.
3. Por propiedad de los ángulos opuestos de un Paralelogramo, los $\widehat{BAC}$ y $\widehat{ACD}$ son congruentes, por lo tanto, existen paralelogramo distintos cuando el $\widehat{BAC}$ varía.

Si un alumno contesta luego de su exploración: *Son todos los paralelogramos que se ven moviendo el punto C el cual genera una circunferencia.*

Como lo emergente de este Ejercicio son los Paralelogramos Congruentes, preguntaría ¿Cómo son los paralelogramos si tomamos primero el $\widehat{BAC}$ de 60º cuanto medirían sus otros ángulos? y ¿Que pasaría si el $\widehat{BAC}$ mide 120º?

¿Qué haría un alumno ante este cuestionamiento tuyo?

Anticipaciones:

Haría un razonamiento de tipo deductivo: poniendo a funcionar las propiedades que relacionan los ángulos del paralelogramo. "*si este ángulo mide 60º entonces el consecutivo mide 120º, y así los dos son iguales* (*paralelogramos*)".

Pondrían las medidas en los ángulos y jugar con las medidas.

Construir los dos en simultáneo.

¿Cuál sería la micro teoría emergente de este problema?

Desde la reflexión compartida:

Observación:

A la hora de construir con el Geogebra se debe tener en cuenta en la OPCIÓN-REDONDEO, para saber con qué margen de error se trabaja.

Observación:

Se debe trabajar con error de redondeo mayor a 1 decimal para no caer en un Absurdo.

Nuevo problema para trabajar:

A nuestros futuros alumnos del secundario: ¿los haríamos construir? O ¿le daríamos el boceto en un archivo ya construido para explorar?

Problema 2 (a) de la Evaluación

Datos:
- ✓ Lado AB mide 8 cm., su altura h mide 3 cm.
- ✓ Lado AC mide 4 cm.

Tabla. 2: Pasos de Construcción:

Nº	Nombre	Definición	Comando	Álgebra
1	Punto A			A = (6.8, 4.86)
2	Punto B	Punto en Circunferencia[A, 8]	Punto[Circunferencia[A, 8]]	B = (14.79, 5.18)
3	Segmento a	Segmento [A, B]	Segmento[A, B]	a = 8
4	Recta b	Recta que pasa por A perpendicular a a	Perpendicular[A, a]	b: -7.99x - 0.32y = -55.91
5	Circunferencia c	Circunferencia con centro A y radio 3	Circunferencia[A, 3]	c: $(x - 6.8)^2 + (y - 4.86)^2 = 9$
6	Punto C	Punto de intersección de c, b	Interseca[c, b]	C = (6.92, 1.86)
6	Punto D	Punto de intersección de c, b	Interseca[c, b]	D = (6.68, 7.86)
7	Circunferencia d	Circunferencia con centro A y radio 4	Circunferencia[A, 4]	d: $(x - 6.8)^2 + (y - 4.86)^2 = 16$
8	Recta e	Recta que pasa por D paralela a a	Recta[D, a]	e: -0.32x + 7.99y = 60.67
9	Punto E	Punto de intersección de d, e	Interseca[d, e]	E = (4.04, 7.75)
9	Punto F	Punto de intersección de d, e	Interseca[d, e]	F = (9.32, 7.96)
10	Segmento f	Segmento [A, E]	Segmento[A, E]	f = 4
11	Recta g	Recta que pasa por B paralela a f	Recta[B, f]	g: -2.89x - 2.76y = -57.09
12	Punto G	Punto de intersección de e, g	Interseca[e, g]	G = (12.03, 8.07)
13	Segmento h	Segmento [A, F]	Segmento[A, F]	h = 4
14	Recta i	Recta que pasa por B paralela a h	Recta[B, h]	i: -3.1x + 2.52y = -32.84
15	Punto H	Punto de intersección de e, i	Interseca[e, i]	H = (17.32, 8.28)

Respuestas:

En la construcción tengo lo siguiente:

- El segmento AD mide 3 cm., es altura con respecto al lado AB, que mide 8 cm.
- Los segmentos AD y AB son perpendiculares pues AD es la altura.

¿Cómo son los paralelogramos AFHB y EABG?

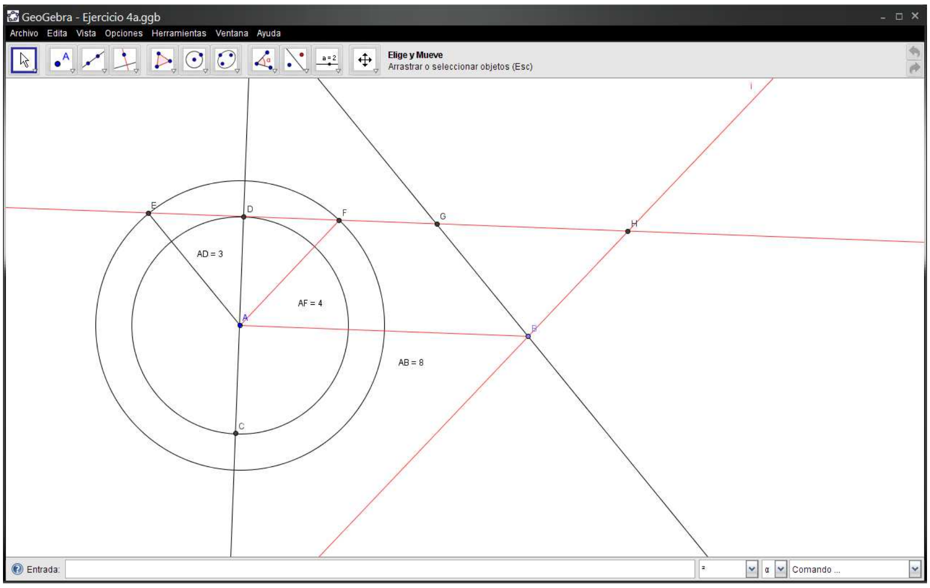


Figura 5

Supongo (suponen los alumnos) que son congruentes entonces: ¿Esta es la demostración de que efectivamente son congruentes?

Tabla. 3

Nº	Paralelogramo AFHB	Paralelogramo EABG
1	$\overline{AB}$	$\overline{EG}$
2	Por construcción ambos miden 8 cm.	
3	$\overline{AF}$	$\overline{EA}$
4	Si consideramos el Triángulo Isósceles $\widehat{AFE}$ los lados $\overline{AF}$ y $\overline{EA}$ son radio de la circunferencia de centro A y radio 4 cm. Por lo tantos son iguales.	
5	$\widehat{DFA}$	$\widehat{FAB}$
6	Si consideramos a $\overline{FH} \parallel \overline{AB}$ *y la transversal* $\overline{FA}$ los ángulos son congruentes por ser ángulos alternos internos entre paralelas.	
7	$\widehat{EFA}$	$\widehat{AEF}$
8	Si consideramos el Triángulo Isósceles $\widehat{AFE}$ los anteriores son congruentes. En consecuencia, $\widehat{AEF}$ *es congruente con* $\widehat{FAB}$.	
	Los puntos 7 y 8 no son necesario para demostrar la congruencias de los paralelogramos, ya que, con el punto 5 y 6 salen los ángulos restantes por relaciones. (ángulos suplementarios, ángulos opuestos)	

La construcción es única, con esos datos se construyen un único paralelogramo. Porque al determinar la altura, esta me determina puntos de intersección en la circunferencia, que son los únicos vértices del mismo.

¿Qué podes decir de todos los paralelogramos que comparten un lado y la altura correspondiente a ese lado? Que tienen la misma área, entonces, se puede definir una clase de equivalencia, ya que, cumple con la propiedad Reflexiva, Simétrica y Reflexiva.

Problema 2 (b):

Datos:
- ✓ Lado AB mide 7 cm, su altura h mide 4 cm.
- ✓ Lado AC mide 3 cm.

Tabla 4: Pasos de Construcción:

Nº	Nombre	Definición	Comando	Álgebra
1	Punto A			A = (8.8, 6.56)
2	Circunferencia c	Circunferencia con centro A y radio 3	Circunferencia[A, 3]	c: (x - 8.8)² + (y - 6.56)² = 9
3	Circunferencia d	Circunferencia con centro A y radio 4	Circunferencia[A, 4]	d: (x - 8.8)² + (y - 6.56)² = 16
4	Punto B	Punto en Circunferencia[A, 7]	Punto[Circunferencia[A, 7]]	B = (15.8, 6.56)
5	Segmento a	Segmento [A, B]	Segmento[A, B]	a = 7
6	Punto C	Punto en c	Punto[c]	C = (7.36, 9.19)
7	Segmento b	Segmento [A, C]	Segmento[A, C]	b = 3
8	Punto B'	B rotado por el ángulo 90°	Rota[B, 90°, A]	B' = (8.8, 13.56)
9	Ángulo α	Ángulo entre B, A, B'	Angulo[B, A, B']	α = 90°
10	Semirrecta e	Semirrecta que pasa por A, B'	Semirrecta[A, B']	e: x = 8.8
11	Punto D	Punto de intersección de d, e	Interseca[d, e]	D = (8.8, 10.56)
12	Punto E	Punto de intersección de c, e	Interseca[c, e]	E = (8.8, 9.56)
13	Recta f	Recta que pasa por B paralela a b	Recta[B, b]	f: -2.63x - 1.44y = -51.02
14	Recta g	Recta que pasa por C paralela a a	Recta[C, a]	g: y = 9.19
15	Punto F	Punto de intersección de f, g	Interseca[f, g]	F = (14.36, 9.19)
16	Punto G	Punto de intersección de g, e	Interseca[g, e]	G = (8.8, 9.19)
17	Número distanciaAG	Distancia de A a G	Distancia[A, G]	distanciaAG = 2.63
18	Texto TextoAG	Nombre[A] + (Nombre[G]) + " \, = \, " + distanciaAG	Nombre[A] + (Nombre[G]) + " \, = \, " + distanciaAG	TextoAG = "AG \, = \, 2.63"

Respuestas:

Con tales condiciones no existe ningún paralelogramo ya que la altura es mayor al lado consecutivo $\overline{AB}$.

Si tengo como datos:
- Un lado y los ángulos adyacentes a este, genero infinitos paralelogramos.
- Dos lados y un ángulo, genero un único paralelogramo. (no necesariamente el comprendido)

- Dos lados y la altura correspondiente al mayor de ellos, y la altura menor al otro lado, genero un único paralelogramo.
- Dos lados, no genero un único paralelogramo, infinitos. Todos aquellos que puedo generar al hacer variar la amplitud del ángulo comprendido (entre esos dos lados) entre (0, 90).
- Un ángulo, un lado y su altura, genero un único paralelogramo. (explorarlo)

Pensándolo desde el geogebra: me generan un único paralelogramo si tengo como datos aquellos elementos constitutivos que no sean dependientes, por ejemplo, teniendo la medida de un ángulo como dato este me da en consecuencia cuanto miden los otros tres ángulos, pero para que sea único el paralelogramo construido debo tener la longitud de los lados como dato también. Ya que los ángulos me generan un lugar geométrico.

Si tuviera la longitud de un lado, la de la altura correspondiente a ese lado y un ángulo, la medida del otro lado depende de estos datos (va a ser única...); porque la intersección de la paralela al lado que tengo y la circunferencia que posee como radio la altura dada me determina los vértices que me faltan para construir el paralelogramo.

Es decir, pensar en un único paralelogramo es pensar en realidad en qué elementos son invariantes a la hora de construir y cuales son los dependientes o aquellos que son invariantes pero si tengo determinados datos pasan a ser consecuencia “de”.

Este juego de buscar invariantes y relaciones con el geogebra en particular, desde mi experiencia, veo una dificultad a la hora de pensar que preguntar para que se visualice ese invariante y a la hora de ver que es lo que quiero que emerja al tener “todo” es complicado.

4. Conclusiones

El desarrollo de estas clases nos ha permitido retomar algunos conceptos básicos de la geometría con los alumnos y al equipo docente pensar los problemas didácticos que plantea el trabajo geométrico desde un entorno dinámico, sobre todo deliberar sobre cuáles son las razones que subyacen para elegir problemas con este programa, la intencionalidad didáctica se articula con los procesos de producción de los alumnos en un entorno dinámico si se tiende a buscar una relación entre exploraciones y demostraciones, ¿cuáles serían algunos criterios para elegir problemas en este entorno?

El GeoGebra 3.2 es un programa de entorno analítico, que nos ha planteado un nueva pregunta ¿cómo se relaciona o puede interactuar con las construcciones Euclideanas? y la producción de conocimiento geométrico, en este caso con alumnos que ya se habían enfrentado a este tipos de actividades en forma estática también nos enfrenta a otro interrogante ¿Tienden desde la exploración a una actitud generalizadora que “abona” estos procesos? ¿Cuál es el juego de las interacciones que se deben promover en la clase?, desde la intencionalidad del docente, desde las prácticas reflexivas que intercambios se propician y que actividades se priorizan para lograr los objetivos propuestos.

Bibliografía

Itzcovich, Horacio (2005) Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones. Libros del Zorzal, Bs As. Argentina.

Gascón, Josep (2002), Geomtería sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? SUMA 39,pp.13-25

Carrillo A. y Llamas I. (2009) Geogebra. Mucho más que geometría dinámica-Alfaomega Grupo Editor-México

Julia Edith Corrales. Profesora en Matemática, docente en diferentes niveles educativos. Coordinadora regional y capacitadora del Programa de Fortalecimiento de Escuelas Técnicas (Fund-YPF) en el área matemática en las provincias de Santa Cruz y Chubut. Docente del Dpto. de Matemática de la Universidad Nacional de la Patagonia Austral sede Caleta Olivia. Coodirectora del proyecto de investigación "*Estudio y Análisis epistémico-cognitivo sobre cómo se articula el saber Geométrico que circula en el Nivel Medio con la Formación Inicial*" julia_corrales@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 191-196
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar

Dimensión fractal en la enseñanza secundaria

María Alejandra Cañibano; Patricia Sastre Vazquez; Marcelo Gandini

Resumen

Los fractales son entes matemáticos de singular importancia y se caracterizan por ser estructuras en las que una propiedad se repite de forma infinita. Aparecen en la naturaleza a menudo y es importante que el alumno entienda algunos conceptos relacionados con el mundo de la fractalidad y sus aplicaciones. En este trabajo se introduce el concepto de dimensión fractal por medio del método box counting aplicado a un accidente fisiográfico, una laguna.

Abstract

Fractals are mathematical entities of singular importance and are characterised by structures in which a property is repeated in infinite way. They often appear in nature and it is important that students understand some concepts related to the world of the fractals and their applications. This paper introduces the concept of fractal dimension through the method box counting applied to a physiographic accident, a lagoon.

Resumo

Os fractais são seres matemáticos da importância singular e são caracterizadas sendo as estruturas em que uma propriedade é repetida do formulário infinito. Parecem na natureza freqüentemente e são importantes que o estudante compreende alguns conceitos relacionados ao mundo do fractais e de suas aplicações. Neste trabalho o conceito da dimensão é fractal introduzido por meio da contagem da caixa do método aplicada a um acidente do fisográfico, uma lagoa

Introducción

En Argentina, la enseñanza secundaria obligatoria no incluye entre sus contenidos el concepto de fractal y sin embargo éste puede ser de utilidad para explicar algunos conceptos de carácter geométrico. Hay profesores que desean innovar en sus clases en función de captar la atención de los alumnos y allí donde se utilizan figuras geométricas sencillas en las que después de un proceso de carácter recursivo aparecen las estructuras denominadas fractales, es donde puede encontrarse el punto de interés.

La utilización de estas figuras geométricas simples se podría incluir en los diseños de Matemáticas de la Educación Secundaria y también podrían tratarse conceptos como el de perímetro, área, progresiones geométricas convergentes y divergentes, entre algunos bajo el mismo marco. También se podrían utilizar los fractales para relacionar la Matemática con otras disciplinas científicas como: Biología, Medicina, Geología, etc. y en consecuencia relacionarla con otros espacios curriculares como Geografía, Biología, Dibujo, Ciencias de la Tierra, etc.

No se debe olvidar que las estructuras fractales aparecen en muchos aspectos del mundo que nos rodea y se pueden utilizar para acercar a los alumnos hacia conceptos variados.

La geometría euclidiana, la que se imparte durante la enseñanza primaria y secundaria, es la geometría que estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional, siendo muchas veces sinónimo de geometría del plano o simplemente geometría. El término fractal, procedente del latín “fractus” que significa fragmentado o irregular y fue introducido por Mandelbrot para designar conjuntos que poseían esta característica, que no tenían ningún nombre concreto y desde entonces se conoce esta rama de las matemáticas como geometría fractal.

La geometría es medir, el significado del término es medir la tierra. La geometría mide todas las cosas usando ángulos y longitudes y la describe en términos de puntos, líneas rectas, círculos, rectángulos, triángulos, cubos, y esferas. En verdad esta descripción no concuerda con la realidad, por ejemplo una carretera contiene curvas que no son descritas por las figuras geométricas antes mencionadas. La dimensión fractal (D) indica la complejidad de un objeto respecto a las dimensiones comunes: si el punto tiene dimensión cero, la línea dimensión 1, el plano dimensión 2 y el cubo dimensión 3 entonces no hay forma de asignar dimensión a algo que no es ni totalmente plano ni volumen. En rigor podría decirse que cualquier objeto que no cumpla con estas características podrá tener dimensión entre 2 y 3 ó 1 y 2, según de que se trate.

El objeto de estudio de este trabajo es una laguna de la provincia de Córdoba, se buscó una laguna que tuviera una superficie importante y que de la observación de su contorno se pudiera concluir que no se pudiera representar únicamente por líneas. Porque la dimensión fractal explica otros conceptos y en el caso de las costas indica el grado de rugosidad de la misma. Cuanto mayor sea su valor más rugosa es la costa. En el caso hipotético de obtenerse el valor máximo de 2, su perfil llenaría por completo el plano. Por el contrario, cuanto más se aproxime el valor de la dimensión fractal a la unidad, más persistente o lineal es el perfil de la costa.

El método de Box Counting

Se trata de un método muy fácil de aplicar sobre una imagen, por lo tanto se presenta como una opción de actividad en una clase de matemática recreativa. El método box-counting se basa en correlacionar las observaciones a diferente escala de la misma escena. Estas se parametrizan midiendo la superficie recubierta por el conjunto de puntos válidos de observación a diferentes escalas.Las mediciones se realizan mediante un recubrimiento de cajas (box) sobre la escena con el posterior recuento de las que contienen motivos del dominio de trabajo. Este proceso itera el recuento de cajas variando las dimensiones de estas de forma sistemática. El ajuste a la ley de potencias nos determina la dimensión fractal D de nuestro objeto:

$$N(r) = C * r^{-D}$$

$$\ln N(r) = \ln C + (-D)\ln r$$

$$D = \frac{\ln C - \ln N(r)}{\ln r}$$

O si se expresara en la forma $\ln N(r) = -D \cdot \ln r + \ln C$, la pendiente indicaría la dimensión fractal de la escena.

Si no se cumple la relación indica que a diferentes escalas no se observa autosimilitud. La mayoría de los programas indica que la forma de obtener D pasa por la representación log-log de N(r) y r, obteniendo la pendiente y la correlación. El valor de la dimensión fractal indica si hay muchos o pocos puntos en el determinado intervalo y la correspondiente dispersión espacial. Más allá de la actividad de aplicar el método, este tema le permite al profesor trabajar con logaritmos, ecuación de la recta, análisis de la función lineal, elaborar conclusiones.

Aplicación práctica

A continuación se muestra un ejemplo práctico y cómo desarrollarlo en el aula. Se puede elegir cualquier figura y determinar de antemano la dimensión fractal del elemento se va a analizar: costas, superficies, volúmenes, etc. ya que de ello dependerá entre que valores se encontrará D.

Se confeccionan diferentes matrices cuadradas sobre un papel transparente y se superpone a la imagen. Se cuenta la cantidad de veces que el elemento elegido cae sobre alguna de las subdivisiones de la matriz. En nuestro trabajo se eligió como objeto de estudio la Laguna de Mar Chiquita ubicada en la provincia de Córdoba (Argentina). La imagen satelital fue obtenida de la web:

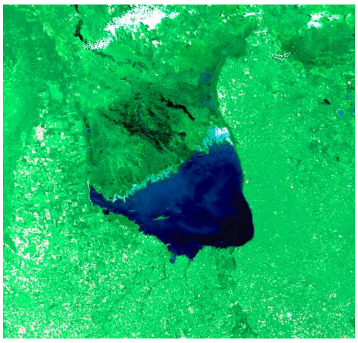
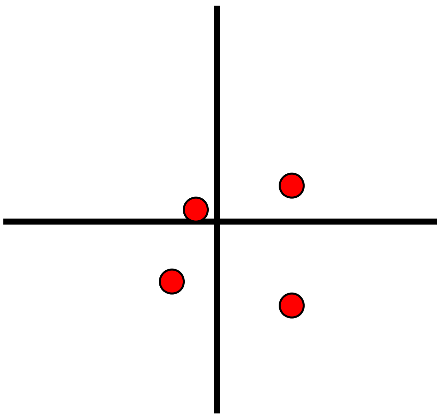


Figura 1

Se generaron diferentes matrices sobre la imagen con distintas divisiones de acuerdo al patrón $^1/_{2^n}$, esto es $^1/_2, ^1/_4, ^1/_8, ^1/_{16}, ^1/_{32}$ Se contabilizaron las veces que el contorno de la laguna "caía" en alguno de los cuadrados formados en la matriz. Por ejemplo como puede observarse en la Figura 2:



N(r)	r
$^1/_2$	4

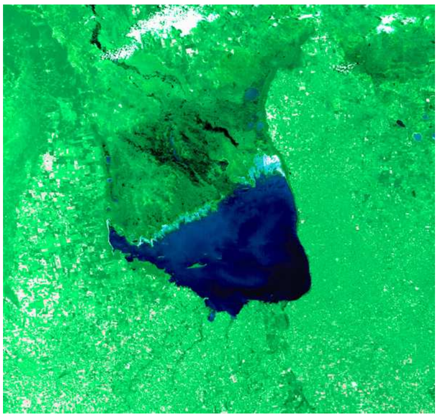


Figura 2: Objeto de estudio

Así sucesivamente se fue subdividiendo la región y se contabilizaron la cantidad de veces que el contorno aparecía. Para nuestro ejemplo se presenta la Tabla 1:

Tabla 1

r	N(r)
1/2	4
1/4	10
1/8	17
1/16	33
1/32	69

Luego de observar los datos obtenidos, se deben representar r y N(r) en un sistema de ejes coordenados. Como la escala de representación es distinta para ambas variables y podría resultar que el gráfico no pueda observarse con facilidad, entonces es muy útil hacer uso de las propiedades de los logaritmos, aplicándolos sobre ambas variables (Tabla 2):

Tabla 2

ln r	ln N(r)
-0,69314718	1,386294361
-1,386294361	2,302585093
-2,079441542	2,833213344
-2,772588722	3,496507561
-3,465735903	4,234106505

En esta instancia el profesor se encuentra con dos caminos: el primero consiste en graficar los puntos obtenidos mediante la transformación log-log y observar si los mismos siguen algún comportamiento, en particular una función lineal con pendiente negativa. Además pueden obtenerse otras conclusiones sobre el análisis del gráfico y finaliza su ejercicio.

Es importante destacar que el objeto de estudio es efectivamente un elemento fractal ya que la disposición de los puntos indica que la normalización de los mismos y su posterior representación toma la forma de una función lineal, con pendiente negativa.

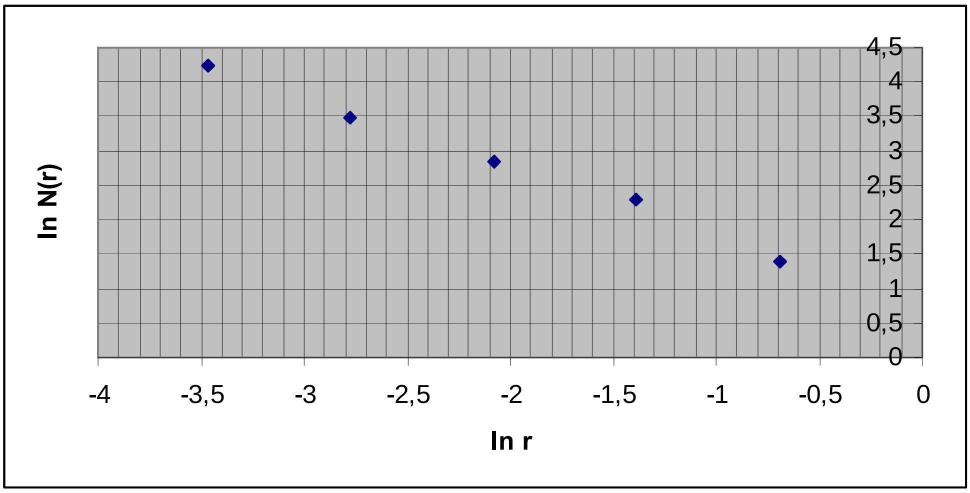


Figura 2: Recta de regresión

Una segunda opción es que el profesor prosiga su estudio y avance sobre temas de estadística pudiendo trabajar con el concepto de recta de regresión, el concepto de pendiente cuando se trata de averiguar la dimensión fractal, lo cual haría una explicación más concreta y detallada de lo que se pretende estudiar.

Conclusiones

El objetivo de la propuesta es la innovación en el aula, mostrar contenidos que no se encuentran en los planes de estudio, pero pueden ser comprendidos parcialmente por los alumnos. Permanecer inmóviles en las indicaciones marcadas por el diseño curricular es válido. Sin embargo aunque la actividad fundamental en las clases de Matemática sea el razonamiento, la enseñanza será tanto más activa cuanto más haga funcionar la imaginación y la creatividad de los alumnos. Al mismo tiempo los alumnos pueden estar entretenidos, interesarse o descubrir conceptos nada triviales. Lo interesante de la enseñanza de la matemática es desmitificarla, sacarla de ese papel riguroso que se impone en las aulas e incluirla en casos concretos o inusualmente tratados.

Bibliografía

Corbalán Yuste, F. (1995). La matemática aplicada a la vida cotidiana. Serie Didáctica de las Matemáticas. Editorial GRAÒ.

Falconer, K. (1990) Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. John Wiley and Sons

Kluwer, J. F. (1988) Fractals. Academic/Plenum Press.

Papert, S. (1987). Desafío a la mente. Ed. Galápagos.

Alejandra Cañibano. Agrimensora, por la Universidad Nacional de La Plata (Argentina) y Magister en Investigación Biológica Aplicada por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Argentina). Profesora Adjunta del Área Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Comparte su trabajo con la enseñanza de la matemática en el nivel medio y adultos de escuelas estatales. Ha escrito diversos trabajos con la finalidad de mostrar las bondades de la matemática aplicada. mac@faa.unicen.edu.ar

Patricia Sastre Vázquez. Agrimensora, por la Universidad Nacional del Sur (Argentina) y Doctora en Matemática Aplicada, por la Universidad de Alicante (España). Profesora Titular del Área de Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Profesora Titular de Análisis II y Matemática, de la Facultad de Agronomía de la Universidad de Morón (Argentina). Es directora del Proyecto: "Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería". Secretaria de Ciencia y Técnica de la UNCPBA. Ha dictado cursos de posgrado en el país y en el extranjero. Tiene publicados trabajos en el área de la Educación Matemática y otras disciplinas relacionadas con la Agronomía y la Modelización, en Revistas Nacionales e Internacionales. Es autora de libros y capítulos de libros tanto de investigación como de docencia. Ha integrado tribunales de Tesis Doctorales en España. Formó parte de numerosos comités científicos de Congresos Internacionales. psastre@faa.unicen.edu.ar; pasava2001@yahoo.com.ar

Marcelo Gandini. Licenciado en Ciencias Biológicas (UBA). Doctor de la UBA en Ciencias Biológicas. Profesor Adjunto Cátedra de Ecología General de la UNICEN. Docente de Posgrado en la Maestría en Teledetección y SIG de la UNICEN. Ha presentado numerosos trabajos en temas de ecología y teledetección en congresos nacionales e internacionales.
mgandini@faa.unicen.edu.ar

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, página 197
ISSN: 1815-0640

MATEMÁTICAS
Investigación, innovación y buenas practicas

Autores: José María Goñi; Vicenc Font; Juan Díaz, Nuria Planas.

Áreas: Didáctica de las matemáticas, Formación y desarrollo profesional del profesorado.

Niveles: Enseñanza reglada. Educación Secundaria Obligatoria (ESO)

Colecciones: Formación del Profesorado. Educación Secundaria.

Este libro se ha escrito pensando en la necesidad de aportar materiales que sirvan para trabajar las competencias profesionales relacionadas con los procesos de investigación e innovación en el aula, las cuales son una parte fundamental de las competencias profesionales que queremos desarrollar. Sugiere nuevos enfoques en la formación del profesorado, combinando el rigor científico de los contenidos con la presentación práctica de los mismos.

En este libro, los autores pretenden: servir de inicio al desarrollo al desarrollo profesional de los docentes que se van a incorporar al sistema a educativo y concretar una serie de buenas prácticas, que vienen a confirmar que la innovación es posible.

Esta organizado en tres capítulos: El primero, destinado a la investigación, ofrece una panorámica de las líneas de investigación en Didáctica de la Matemática, más importantes de la actualidad, el segundo, presenta en contexto las prácticas que se consideran modélicas para obtener ideas para la innovación en el aula y el tercero, trata ser una ayuda para el prácticum que los futuros docentes deben realizar.

En síntesis, se trata de un libro útil tanto para el profesorado en formación inicial (Máster de Secundaria), como para los docentes en ejercicio que deseen potenciar su desarrollo profesional.

Comité Editorial.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Diciembre de 2011, Número 28, páginas 199-206
ISSN: 1815-0640

Información

FUNDACIÓN CANARIA *CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ*

1. Construcción de escuelas en Paraguay

Es nuestra segunda obra en América. La primera fue la construcción de aulas, con cocina, comedor y servicios higiénicos en Cerro Poty, en las afueras de Asunción, capital de Paraguay e inauguradas el 10 de septiembre de 2010 con la asistencia de dos ministros, 250 niños y niñas, padres y madres de alumnos y alumnas, con un presupuesto de 12.300 €.

Las nuevas se encuentran situadas en el Departamento de Caaguazú, distrito de Repatriación, también en Paraguay. Pertenece a la comunidad mbya y es la Escuela Básica Nº 6226 llamada "Ypaú Señorita", ubicada a 242 Km. de Asunción. El lugar ha sido visitado en dos ocasiones por el Vicepresidente de la Fundación, Luis Balbuena Castellano, comprobando in situ la necesidad de la construcción de la escuela y servicios higiénicos. Ya se hizo una donación de mobiliario en octubre de 2008. Para esta nueva acción (escuela, servicios higiénicos, mobiliario) se cuenta con un presupuesto de **13.850 €** del que Banca Cívica - Caja Canarias, a través del programa "Tú eliges, tú decides" aporta 8.352,78 € tras ser elegido en 2010 por 228 clientes de la mencionada entidad.

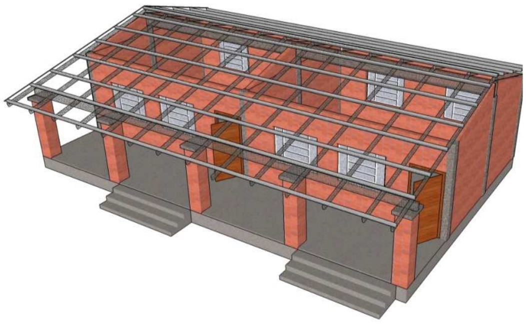


Foto 1: La escuela. Proyecto.

2. Becas-ayudas al estudio en Canarias

La Fundación, viendo la crisis económica y los índices de paro en nuestras islas, Canarias, España, decidió conceder Becas – Ayudas al Estudio para el curso 2011-2012 a alumnos y alumnas de niveles postobligatorios, con dificultades económicas para continuar sus estudios y con una buena trayectoria académica. Se han adjudicado a principio de curso para cubrir gastos de libros y material académico con una cuantía individual de 400 € y un presupuesto total de 6000 €. Hasta ahora se han concedido a **16** alumnos y alumnas procedentes de Taco (3), Icod de los Vinos 4, La Guancha (2), San Juan de la Rambla (2), en la isla de Tenerife; Valverde (1), en El Hierro y Vecindario (1), en Gran Canaria.

Es propósito de la Fundación el incrementar las cantidades así como llegar a las siete Islas Canarias en la próxima edición a principios del curso 2012-13.

3. Becas-ayudas al estudio en Paraguay

Es una novedosa experiencia que está abriendo caminos al estudio y a la formación para jóvenes de las comunidades indígenas de Paraguay que expresan que, por *primera vez* se les han concedido ayudas al estudio. Como ya saben, nuestra Fundación construyó una escuela en esta comunidad, pero como entiende que no basta con eso, ha puesto en marcha el "Programa de Ayuda al Estudio Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz para la Comunidad Educativa de la parcialidad Avá guaraní de Cerro Poty, Escuela Indígena Nº 5934". Con el fin de gestionar todo el proceso, se ha creado un comité en el que participan, además de la Fundación, la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI), Ministerio de Educación y Cultura (MEC) y la Secretaría Nacional de la Niñez y la Adolescencia de Paraguay. Debido a lo novedoso del programa, el MEC ha legislado un protocolo de actuación, Resolución Nº 37134, firmado por el ministro el 28 de septiembre de 2011. Se ha destinado la cantidad de **3302 €** (17.500.000 guaraníes) distribuida en **9 becas** a alumnos y alumnas, entre los 13 y los 19 años de edad, que serán prorrogables por un período de tres años. A esta iniciativa se va a sumar la comunidad educativa del Colegio "Princesa Tejina" de La Laguna, Islas Canarias

De este modo, la Fundación cumple, por tanto, con la promesa hecha cuando se inauguró la escuela de Cerro Poty, en septiembre de 2010, en el sentido de seguir abriendo caminos para mejorar la educación y la cultura y después de muchas reuniones y superar diversas vicisitudes, ya los hechos hablan por sí mismos.

Foto 2: Entrega de los primeros plazos de las ayudas al estudio en Cerro Poty, Asunción.

Foto 3.- Comité para la gestión y concesión de ayudas al estudio. Asunción, Paraguay.

4. Expomatemáticas en Chiclayo, Perú

Expomatemáticas en Chiclayo, Perú, adquirida y donada por nuestra Fundación a la institución educativa Colegio *José Leonardo Ortiz,* con motivo de sus 50 años de existencia. Fue expuesta por primera vez en la Biblioteca de la Universidad de Lambayeque, en el marco de un congreso sobre Educación Matemática organizado por el citado Colegio. El catedrático de Matemáticas, Luis Balbuena Castellano, con la colaboración de la Fundación, acudió como invitado a este congreso participando en él con diversas actividades.

Foto 4: Expomatemáticas en Chiclayo, Perú.

5. Nuevo proyecto en Perú para 2012

Asinky Perú (*Sonríe Perú*), como institución sin fines de lucro es receptora de donaciones para la mejora de la calidad de vida de personas en extrema pobreza. Nos hemos entrevistado con su presidente, Flor de María Basauri Rojas, para mostrarle nuestro deseo de elaborar un proyecto de construcción de un aula, una cocina (la actual es "*tétrica, negra e insalubre*"), nuevos baños ("*ahora pequeños cubículos de un metro sin intimidad*") y un nuevo comedor en el lugar de Incacocha, Centro Educativo Nº 32682, Distrito de Churabamba, Departamento de Huánuco, a 16 horas de Lima, la capital de Perú.

Por otra parte, y también en ese lugar, tan alejado y difícil por su orografía y condiciones climáticas, nuestra Fundación estará presente en la Navidad 2011. Será a través de una ayuda de 400 euros (de ellos, 200 € han sido aportados por una profesora jubilada del Instituto lagunero "Cabrera Pinto") donados a Asinky Perú (Sonríe Perú) para destinarlos a conseguir, por estas fechas, una sonrisa especialmente en los niños de esta comunidad.

Foto 5: Niños y niñas de Incacocha, Perú.

Hay mucha más información de la Fundación en la página web:

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

¡¡Aquí les esperamos!!

FUNDAÇÃO CANARIA CARLOS SALVADOR E BEATRIZ

1. Construção de escolas em Paraguai

É nossa segunda obra em América. A primeira foi a construção de aulas, com cocina, comedor e serviços higiénicos em Cerro Poty, nas afueras de Assunção, capital de Paraguai e inauguradas o 10 de setembro de 2010 com a assistência de dois ministros, 250 meninos e meninas, pais e mães de alunos e alunas, com um orçamento de 12.300 €.

As novas encontram-se situadas no Departamento de Caaguazú, distrito de Repatriación, também em Paraguai. Pertence à comunidade mbya e é a Escola Básica Nº 6226 telefonema "Ypaú Señorita", localizada a 242 Km. de Assunção. O lugar foi visitado em duas ocasiões pelo Vice-presidente da Fundação, Luis Balbuena Castellano, comprovando in situ a necessidade da construção da escola e serviços higiénicos. Já se fez uma doação de mobiliario em outubro de 2008. Para esta nova acção (escola, serviços higiénicos, mobiliario) conta-se com um orçamento de 13.850 € do que Banca Cívica - Caixa Canárias, através do programa "Tu eleges, tu decides" contribui 8.352,78 € depois de ser elegido em 2010 por 228 clientes da mencionada entidade.

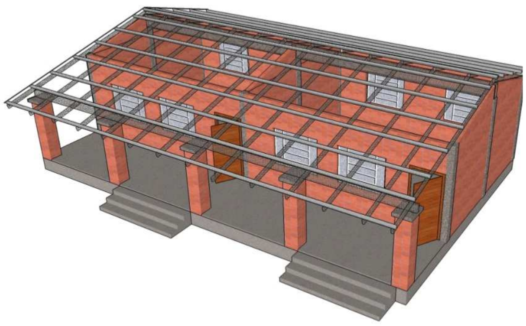



Foto 1: A escola. Projecto.

2. Bolsas-ajudas ao estudo em Canárias

A Fundação, vendo a crise económica e os índices de desemprego em nossas ilhas, Canárias, Espanha, decidiu conceder Bolsas – Ajudas ao Estudo para o curso 2011-2012 a alunos e alunas de níveis postobligatorios, com dificuldades económicas para continuar seus estudos e com uma boa trajectória académica. Têm-se adjudicado a princípio de curso para cobrir gastos de livros e material académico com uma quantia individual de 400 € e um orçamento total de 6000 €. Até agora se concederam a 16 alunos e alunas procedentes de Taco (3), Icod dos Vinhos 4, A Guancha (2), San Juan da Rambla (2), na ilha de Tenerife; Valverde (1), en El Hierro y Vecindario (1), en Gran Canaria.

É propósito da Fundação o incrementar as quantidades bem como chegar às sete Ilhas Canárias na próxima edição a princípios do curso 2012-13.

3. Bolsas-ajudas ao estudo em Paraguai

É uma inovadora experiência que está a abrir caminhos ao estudo e à formação para jovens das comunidades indígenas de Paraguai que expressam que, pela primeira vez se lhes têm concedido ajudas ao estudo. Como já sabem, nossa Fundação construiu uma escola nesta comunidade, mas como entende que não basta com isso, pôs em marcha o "Programa de Ajuda ao Estudo Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz para a Comunidade Educativa da parcialidad Avá guaraní de Cerro Poty, Escola Indígena Nº 5934". Com o fim de gestionar todo o processo, se criou um comité no que participam, além da Fundação, a Organização de Estados Iberoamericanos (OEI), Ministério de Educação e Cultura (MEC) e a Secretaria Nacional da Niñez e a Adolescencia de Paraguai. Devido ao inovador do programa, o MEC tem legislado um protocolo de actuação, Resolução Nº 37134, assinado pelo ministro o 28 de setembro de 2011. Destinou-se a quantidade de 3302 € (17.500.000 guaraníes) distribuída em 9 bolsas a alunos e alunas, entre os 13 e os 19 anos de idade, que serão prorrogables por um período de três anos. A esta iniciativa vai somar-se a comunidade educativa do Colégio "Princesa Tejina" da Laguna, Ilhas Canárias

Deste modo, a Fundação cumpre, por tanto, com a promessa feita quando se inaugurou a escola de Cerro Poty, em setembro de 2010, no sentido de seguir abrindo caminhos para melhorar a educação e a cultura e após muitas reuniões e superar diversas vicisitudes, já os factos falam por si mesmos.

Foto 2: Entrega dos primeiros prazos das ajudas ao estudo em Cerro Poty, Assunção.

Foto 3.- Comité para a gestão e concessão de ajudas ao estudo. Assunção, Paraguai.

4. Expomatemáticas em Chiclayo, Peru

Expomatemáticas em Chiclayo, Peru, adquirida e doada por nossa Fundação à instituição educativa Colégio *José Leonardo Ortiz*, com motivo de seus 50 anos de existência. Foi exposta pela primeira vez na Biblioteca da Universidade de Lambayeque, no marco de um congresso sobre Educação Matemática organizado pelo citado Colégio. O catedrático de Matemáticas, Luis Balbuena Castelhano, com a colaboração da Fundação, foi como convidado a este congresso participando nele com diversas actividades.

Foto 4: Expomatemáticas em Chiclayo, Peru.

5. Novo projecto em Peru para 2012

Asinky Perú (*Sonríe Perú*), como institución sin fines de lucro es receptora de donaciones para la mejora de la calidad de vida de personas en extrema pobreza. Nos hemos entrevistado con su presidente, Flor de María Basauri Rojas, para mostrar-lhe nosso desejo de elaborar um projecto de construção de um aula, uma cocina (a actual é "tétrica, negra e insalubre"), novos baños ("agora pequenos cubículos de um metro sem intimidai") e um novo comedor no lugar de Incacocha, Centro Educativo Nº 32682, Distrito de Churabamba, Departamento de Huánuco, a 16 horas de Lima, a capital de Peru.

Por outra parte, e também nesse lugar, tão afastado e difícil por seu orografía e condições climáticas, nossa Fundação estará presente à Navidad 2011. Será através de uma ajuda de 400 euros (deles, 200 € foram contribuídos por uma professora aposentada do Instituto lagunero "Cabrera Pinto") doados a Asinky Peru (Sonríe Peru) para destiná-los a conseguir, por estas datas, um sorriso especialmente nos meninos desta comunidade.

Foto 5: Meninos e meninas de Incacocha, Peru.

Há muita mais informação da Fundação na página site:

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

¡¡ Aqui esperamos-lhes!!

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 207-210
ISSN: 1815-0640

Sobre la Primera Conferencia Latinoamericana de GeoGebra

Celina A. A. P. Abar

A 1ª. Conferência Latino-Americana de GeoGebra, realizada de 13 a 15 de Novembro de 2011, fez parte das atividades propostas pelo Instituto GeoGebra de São Paulo, cuja coordenadora é a autora deste texto.

O Instituto GeoGebra de São Paulo[1] foi criado em agosto de 2010 com sede na Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). O grupo de pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM) do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática tem sob sua responsabilidade a manutenção e o desenvolvimento dos trabalhos deste Instituto.

Folder da Conferência

A 1ª. Conferência Latino-Americana de GeoGebra teve como objetivo reunir pesquisadores, desenvolvedores e professores para que eles, em sessões de workshops, discutissem e compartilhassem suas experiências, ideias e projetos com o uso do Geogebra, um software de matemática dinâmica, gratuito e multi-plataforma, voltado a todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação.

Os usuários do GeoGebra formam comunidades em seus respectivos países consolidando a criação de Institutos espalhados em todos os continentes como mostra o endereço http://www.geogebra.org/cms/en/community. Seus criadores têm recebido vários prêmios na Europa e nos Estados Unidos, o que pode ser verificado em http://www.geogebra.org/cms/en/info.

Eventos sobre o uso do Geogebra já haviam sido realizados na Europa e nos Estados Unidos, mas esta foi a primeira oportunidade de organizar uma conferência deste porte na América Latina.

Considerando a representatividade do Brasil e as facilidades que a cidade de São Paulo oferece para eventos, o Instituto GeoGebra de São Paulo propôs a

[1] http://www.pucsp.br/geogebrasp

realização desta conferência para os participantes dos países da América Latina nos idiomas da região, espanhol e português.

Na América Latina, no início desta proposta, apenas três institutos estavam consolidados sendo um na Argentina e dois no Brasil: na Universidade Federal Fluminense e na PUC/SP. No entanto, durante os preparativos deste evento e após sua realização, outros institutos foram criados na Argentina, Chile, Colômbia, México e Uruguai.

A 1ª. Conferência Latino-Americana de GeoGebra reuniu duzentos e quatro participantes de vários países envolvidos com o uso do GeoGebra, como Argentina, Costa Rica, Uruguai, Portugal e Espanha além, evidentemente, do Brasil.

Os noventa e nove trabalhos apresentados focaram nos temas propostos: Desenvolvimento de software e sistemas online, Estratégias de Ensino e Aprendizagem na Educação Matemática Básica, Estratégias de Ensino e Aprendizagem na Educação Matemática Superior, Formação de Professores de Matemática, Criação e disponibilidade de materiais didáticos com GeoGebra e sobre os Institutos GeoGebra: Pesquisas e Parcerias.

Após a Conferência os autores foram convidados a enviar seus trabalhos completos para que sejam avaliados pelo Comitê Científico do evento e, aqueles que tiverem os trabalhos aceitos, serão notificados sobre os necessários aprimoramentos para posterior publicação com ISSN.

No primero dia do evento e após a abertura, o criador do GeoGebra, Markus Hohenwarter, fez uma palestra direto da Universidade Johannes Klepler em Linz, na Áustria via Internet com o título Geogebra: News and Future.

Palestra de Markus Hohenwarter via internet

Após a palestra de Markus Hohenwarter, seu colaborador Zsolt Lavicza da Universidade de Cambridge da Inglaterra fez uma exposição sobre a Comunidade GeoGebra atuante em diversos países e o importante trabalho destes institutos na contribuição para a Educação Matemática

.

Palestra de Zsolt Lavicza

No segundo dia do evento houve uma mesa de trabalho com a participação dos seguintes palestrantes: Agustín Carrillo de Albornoz Torres do Instituto GeoGebra de Andalucía na Espanha; José Manuel Dos Santos Dos Santos do Instituto Geogebra de Portugal localizado na cidade do Porto; Juan Pablo Serrano Echeverria sobre o uso do GeoGebra na Costa Rica; Esteban Diaz da Universidade de Cambridge da Inglaterra sobre o STEM Cambridge Centre; Humberto Bortolossi do Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro e Celina A. A. P. Abar do Instituto GeoGebra de São Paulo. Os temas das apresentações foram sobre os projetos, pesquisas e trabalhos desenvolvidos nos respectivos Institutos e Universidades.

As demais apresentações foram feitas durante os três dias da Conferência em apenas duas salas, para que fosse possível uma maior participação dos presentes

.

Alguns participantes da Conferência

Foram enviadas avaliações positivas sobre a conferência e, principalmente, sobre as futuras parcerias entre os Institutos GeoGebra da América Latina. Outros comentários continuam sendo encaminhados à lista dos participantes criada na Internet: geogebra-la@googlegroups.com e sugestões de aprimoramentos foram feitas por alguns participantes.

Espera-se que a próxima Conferência Latino-Americana de GeoGebra, em 2012, seja organizada e realizada pelo Instituto GeoGebra do Uruguai contribuindo sempre com a Educação Matemática.As informações sobre a 1ª. Conferência Latino-Americana de GeoGebra se encontram em: http://www.pucsp.br/geogebrala. As apresentações dos trabalhos da 1ª. Conferência Latino-Americana de GeoGebra se encontram em: http://www4.pucsp.br/geogebrala/submissao/artigos.html

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 211-212
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2012

12 th. Internacional Congreso on Mathematical Education

Lugar: Seúl, Korea.
Fecha: 8 al 15 de julio de 2012.
Información: **http://www.icme12.org/**

26 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 26)
Ouro Preto. Mina Gerais. Brasil
Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Fecha: 23 al 27 de Julio de 2012
Información: **www.clame.org.mx**

IV Reunión Pampeana de Educación Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa.
Lugar: Santa Rosa, La Pampa. Argentina.
Fecha: 22 al 24 de agosto de 2012.
Información: **http://online2.exactas.unlpam.edu.ar/repem/**

X CAREM
X Conferencia Argentina de Educación Matemática

Lugar: Buenos Aires. Argentina.
Convoca: Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)
Fecha: 6 al 8 de septiembre de 2012.
Información: **www.soarem.org.ar**

CUREM4
4° CONGRESO URUGUAYO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Organiza: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.
Lugar: Montevideo, Uruguay.
Fecha: 19 al 21 de septiembre de 2012
Información: **www.semur.edu.uy**

AÑO 2013

Del 16 al 20 de septiembre en Uruguay

VII CIBEM
VII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.cibem7.semur.edu.uy

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2011, Número 28, páginas 213-214
ISSN: 1815-0640

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@gmail.com**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**
4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

Para libro:
Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista:

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com