UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 27 – Septiembre de 2011

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 3-4
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.
.
Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García Gonzalez
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio
Textos: Vilma Giudice
Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo
webmaster: Elda Beatriz Micheli

Colabora

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 5-6
ISSN: 1815-0640

Editorial

"*La tecnología educativa, no es más que la evolución en la enseñanza de la educación la cual es usada como herramienta para facilitar un aprendizaje eficaz*".
Cairlins Morales.

Estimados colegas y amigos:

Con enorme satisfacción presentamos un volumen más de UNION, en el que se comparten experiencias y proyectos y se difunden distintas propuestas para enriquecer las prácticas docentes.

Tenemos la noticia del cambio de autoridades que ha sido realizado en la FISEM, por eso queremos felicitar y desear éxito en sus funciones a las autoridades entrantes y también queremos agradecer muy especialmente la colaboración en todo sentido a los que se retiran, ya que con su compromiso y dedicación nos dieron un continuo apoyo en las distintas actividades.

En este número, se dispone de interesantes artículos, de temáticas variadas, aunque varios de ellos se relacionan con la incorporación de las nuevas tecnologías en el aula, en particular y como firma invitada, Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, con su excelente artículo "La Educación Matemática en la Era Digital".

Queremos también citar el artículo que ha escrito Luis Balbuena en homenaje y para recordar a nuestra querida Nelly Vázquez de Tapia, quién ha fallecido en el mes de junio de este año, nunca la olvidaremos, tanto por sus condiciones académicas como por sus condiciones humanas.

Las secciones fijas, como siempre, nos ofrecen distintas sugerencias para aplicar en el aula con las adaptaciones que correspondan según los diferentes niveles educativos y contextos.

Se presentan, también, las actividades programadas por la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz para el próximo año, todas ellas apoyando desde distintas líneas a la educación.

Como siempre nuestro agradecimiento sincero a los autores que colaboraron en esta edición y a los evaluadores por su trabajo constante.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

.

Editorial

"*A tecnologia educativa, não é mais que a evolução*
no ensino da educação a qual é usada
como ferramenta para facilitar uma aprendizagem eficaz".
Cairlins Morales.

Estimados colegas e amigos:

Com enorme satisfação apresentamos um volume mais de UNION, no que se compartilham experiências e projectos e se difundem diferentes propostas para enriquecer as práticas docentes.

Temos a notícia da mudança de autoridades que foi realizado na FISEM, por isso queremos felicitar e desejar sucesso em suas funções às autoridades entrantes e também queremos agradecer muito especialmente a colaboração em todo sentido aos que se retiram, já que com seu compromisso e dedicación nos deram um contínuo apoio nas diferentes actividades.

Neste número, dispõe-se de interessantes artigos, de temáticas variadas, ainda que vários deles se relacionam com a incorporação das novas tecnologias no aula, em particular e como assina convidada, Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, com seu excelente artigo "A Educação Matemática em era-a Digital".

Queremos também citar o artigo que escreveu Luis Balbuena em homenagem e para recordar a nossa querida Nelly Vázquez de Tapia, quem faleceu no mês de junho deste ano, nunca esquecê-la-emos, tanto por suas condições académicas como por suas condições humanas.

As secções fixas, como sempre, nos oferecem diferentes sugestões para aplicar no aula com as adaptações que correspondam segundo os diferentes níveis educativos e contextos.

Apresentam-se, também, as actividades programadas pela Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz para o próximo ano, todas elas apoiando desde diferentes linhas à educação.

Como sempre nosso agradecimiento sincero aos autores que colaboraram nesta edição e aos evaluadores por seu trabalho constante.

Um abraço fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, página 7-9
ISSN: 1815-0640

Renovación de autoridades de FISEM

Tras un proceso que se inició en el mes de marzo de 2011 con la convocatoria en UNIÓN de la plaza de Vicepresidente de la FISEM, y la presentación de dos postulantes, se procedió, entre los días 1 y 15 de agosto, a la votación de las candidaturas. Finalmente el escrutinio dio los siguientes resultados

- Votos a favor de la candidatura de presentada por AMIUTEM (México)
  José Carlos Cortés: 5·
- Votos a favor de la candidatura presentada por ASOVEMAT (Venezuela)
  Fredy González: 7
- Votos en blanco: 1

Carta de certificación de autoridades

AGUSTÍN CARRILLO DE ALBORNOZ TORRES, con Documento Nacional de Identidad de España nº 25958298S, domiciliado en la ciudad de Andújar, España y en su calidad de Secretario General de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), creada en 2003 y a la que pertenecen las Sociedades de Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Ecuador, España. México, Paraguay, Perú, Portugal, Uruguay y Venezuela

CERTIFICA
1º.- Que, según el Estatuto vigente, que fue aprobado en el momento de la constitución de la FISEM, corresponde proceder a la renovación de los cargos de Presidente y Vicepresidente una vez concluido el mandato de cuatro años de las Sociedades de Chile y Argentina.
2º.- Que tras el proceso electoral llevado a cabo en el seno de la FISEM para la elección de los cargos unipersonales de la Junta de Gobierno, culminado el día quince de agosto de dos mil once, y una vez elevados a definitivos los resultados de la votación, dichos cargos han quedado como sigue para los próximos cuatro años:
Presidenta: **Dª. CECILIA CRESPO CRESPO**
Presidenta de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM),
Vicepresidente: **D. FREDY ENRIQUE GONZÁLEZ**.
Presidente de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT),
Lo que certifico en la ciudad de Andújar el día veintidós de agosto de dos mil once.

FISEM
FEDERACIÓN IBEROAMERICANA
DE SOCIEDADES DE
EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Carta del Presidente saliente

Estimadas y estimados:

Como presidente de la Sociedad Chilena de Educación Matemática, SOCHIEM, y presidente saliente de la Federación de la Sociedad Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática, FISEM, quiero enviar una nota muy cordial de felicitación a la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM), y a su presidenta Cecilia Crespo Crespo, a la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT) y a su presidente Fredy Enrique González, los cuales se harán cargo de la presidencia y la vicepresidencia de la FISEM, respectivamente.

Es una buena oportunidad para agradecer a Oscar Sardella, quien fue Vicepresidente de la FISEM hasta a nuestro Tesorero, Sergio Peralta Nuñez, del Uruguay, por la inestimable contribución que han hecho a la Federación.

Añado una nota especial de agradecimiento, como presidente saliente y también en forma personal, a nuestro Secretario General, Agustín Carrillo de Albornoz Torres, por su labor incansable, eficiente y comprometida con la FISEM, sus fines y su desarrollo.
Como sabemos, la FISEM ha sido una idea grandiosa desde su creación, y su materialización la ha convertido en un hito importante en el desarrollo de nuestros respectivos propósitos nacionales, sumados ahora en una propuesta de mayor envergadura y que sitúa los proyectos locales en un escenario internacional, como corresponde.

Según mi parecer, hay dos aspectos que, a pesar de ser bien conocidos, merecen destacarse reiteradamente:
Me parece indudable que cada uno de los representantes de las sociedades federadas tiene ya una agenda bastante apretada en su propio país; participar en la FISEM añade una cuota adicional de trabajo, pero también de proyección de los esfuerzos de las respectivas sociedades que representamos, al interior de la FISEM y de su entorno. Para esa proyección la FISEM ha creado dos recursos principales, apropiados para la tarea: la Revista UNION y el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, CIBEM. Les reitero, entonces, la permanente invitación a colaborar en la Revista, y les insto también a participar en el VII CIBEM, en 2013, en Uruguay.

El otro aspecto es, naturalmente, la virtualidad en la que habitualmente nos reunimos, a pesar de las distancias: una suerte de bendición que nos ha permitido avanzar en las tareas comunes a nuestras respectivas sociedades. Mi experiencia indica, sin embargo, particularmente por una reunión que pudimos sostener varios miembros de la Junta de Gobierno recientemente en Brasil, que no debemos desaprovechar las oportunidades de reunirnos en forma presencial, de modo de estrechar lazos y, en fin, comunicarnos de la manera tradicional de la especie humana, en que el lenguaje adquiere mayor compleción.

Les invito, entonces, a contribuir a Unión (estoy yo también empeñado en saldar una deuda personal con ello) y a que nos veamos en el VII CIBEM.

Les deseo un muy buen éxito a la Dra. Cecilia Crespo y a la Junta Directiva.

Termino agradeciendo a la FISEM por el gran honor de haberla presidido por un tiempo.

Mis palabras representan, también, el sentir de Miguel Díaz Flores, antiguo presidente de la SOCHIEM y de la FISEM.

Arturo Mena Lorca
Presidente
Sociedad Chilena de Educación Matemática
arturo.mena@ucv.cl

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Septiembre de 2011, Número 27, página11
ISSN: 1815-0640

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar

Breve Reseña

Nasceu em Valparaiso, interior do Estado de São Paulo, Brasil, em setembro de 1948. Possui graduação-Licenciatura e Bacharelado- em Matemática, Mestrado em Geometria Projetiva Finita e Doutorado em Lógica Matemática, todos pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo onde atua como professora titular na Graduação, no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática e em Cursos de Extensão.

Na graduação orienta projetos de Iniciação Científica de alunos do curso de Ciência da Computação sobre o papel das tecnologias no ensino e aprendizagem, em especial, da Lógica Matemática

Suas especializações em Tecnologias Interativas Aplicadas à Educação, Design Instrucional para Educação On-Line e Entornos Virtuales de Aprendizaje, possibilitam que seus orientandos desenvolvam os trabalhos na linha de pesquisa: Tecnologias na Educação Matemática.

Tem experiência na área de Educação a Distância, Tecnologia Aplicada à Educação, Webquest e Objetos de Aprendizagem. Foi coordenadora na implantação do Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade a Distância da PUC/SP no 1º Semestre de 2009. Atualmente é Coordenadora do Instituto GeoGebra de São Paulo.

Sua principal atividade investigativa está direcionada para as Tecnologias e seus impactos na Educação Matemática e, desse modo, seus trabalhos publicados e apresentados em eventos, no Brasil e no exterior são, sempre, direcionados para esta linha de pesquisa.

Trabalhos técnicos on-line:
http://www.pucsp.br/~logica,
http://www.pucsp.br/tecmem,
http://www.pucsp.br/tecmem/Artista
http://www.pucsp.br/tecmem/SalvaraNatureza,

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Septiembre de 2011, Número 27, páginas 13-28
ISSN: 1815-0640
firma invitada

Educação Matemática na Era Digital

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar

Resumen

El objetivo de este trabajo es exponer, sobre la base de las teorías subyacentes, la forma de superar las barreras a al uso de la tecnología, que aún persisten en el día a día de la rutina educativa, con el fin de contribuir al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este artículo reflexiona sobre un ámbito de la Educación, en especial, de la Educación Matemática, dentro de la era digital y los desafíos que enfrenta la escuela, y en particular, los profesores de Matemáticas, para hacer frente a la utilización de la tecnología en la enseñanza. De manera más general, también trata de reflexionar sobre las relaciones de las personas frente a los avances tecnológicos y el importante papel de la tecnología tanto en la vida de los individuos como en la Educación.

Abstract

The object of this work is to indicate, based on underlying theories, ways to overcome obstacles to the use of technology, still persisting on the day-to-day educational routine, in order to contribute to the process of teaching and learning Mathematics. This article reflects upon the Educational scenery, specially Mathematical Education, as part of the Digital Age, and the challenges faced by the school, and in particular, by the teachers of Mathematics, when confronting the use of technology in teaching. In a more general way, it also reflects about people's reaction to the technological advances and the important role of technology in the life of individuals as well as in Education.

Resumo

O objetivo deste trabalho é indicar, com base em teorias subjacentes, caminhos para a superação de obstáculos ao uso das tecnologias que ainda persistem no dia a dia da rotina educacional com vistas a contribuir com o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática. Esse artigo busca refletir sobre um cenário da Educação e em especial da Educação Matemática inserido nesta era digital e os desafios que se apresentam à escola e em particular aos professores de Matemática para o enfrentamento do uso das tecnologias na prática docente. De um modo mais geral, busca também refletir sobre as relações das pessoas diante dos avanços tecnológicos e o importante papel das tecnologias tanto na vida dos indivíduos como na Educação.

A Educação e a Era Digital

É fato que as mudanças da chamada Era Digital interferem nas relações entre as pessoas e o acesso às informações. E também é fato que o poder está e estará nas mãos de quem tem a informação e o conhecimento. Cada sociedade é configurada de acordo com as suas possibilidades de acesso às informações, ao conhecimento e de como eles serão distribuídos e aplicados. O avanço tecnológico em si não determina o acesso às informações, mas é a necessidade social de sua democratização que determina novas categorias de tempo e espaço, transformando-as em realidades virtuais.

> A invenção da imprensa também ensejou problemas aos estudiosos ou, em geral, a qualquer um que estivesse em busca da informação. Na idade Média, os escritores padeciam da falta de livros. No século 16, por outro lado, o número de livros em circulação era grande o suficiente para criar problemas de "retenção da informação" e "administração da informação", problemas de tipo familiar para nós na era da Internet. Em 1500, havia cerca de 13 milhões de livros em circulação na Europa.
>
> A existência de livros impressos fez com que vários itens de informação ficassem mais fáceis de serem encontrados, desde que primeiro se achasse o livro certo. Um escritor italiano já reclamava, em 1550, haver "tantos livros que não temos nem tempo para ler os títulos". (Burke, 2000, p.16)

Do mesmo modo que aconteceu com os saberes que não foram incorporados ao livro a partir da invenção da imprensa, hoje as informações que não circulem pelos espaços tecnológicos terão uma existência medíocre e precária.

> Como a matéria-prima fundamental das novas tecnologias é a informação, cada novidade tecnológica pode se tornar instantaneamente a matéria-prima para o próximo ciclo do desenvolvimento, contribuindo para o aumento da rapidez do processo de inovação. (Kenski, 2007, p.35)

No entanto, quando se fala sobre uma "novidade", independentemente de que área seja, essa palavra sempre pode causar a sensação de algo novo, de uma incerteza diante da idéia e, ao mesmo tempo, de uma possibilidade que surge, uma inovação.

Nas relações entre as tecnologias e a educação vemos o sujeito inserindo-se em uma sociedade ao mesmo tempo em que incorpora informações e conhecimento em um processo de aprendizagem que o direciona a novas possibilidades de trabalho.

No século 17, segundo Burke (2000), a ascensão da tipografia fez surgir novas ocupações como tipógrafo, catalogador, editor, etc. provocando uma divisão intelectual de trabalho e levando ao declínio o ideal do conhecimento e aprendizado universal. Da mesma forma, na era digital, não incorporar as tecnologias no processo educacional, é condenar à marginalidade todas as pessoas que não tenham a competência para utilizar os instrumentos tecnológicos que lhe possibilitam o vínculo com a sociedade.

Importante observar que apenas a existência das tecnologias que permitem o rápido acesso às informações e à comunicação não garante a construção do conhecimento e de uma sociedade preparada para seu uso. Isso depende das pessoas e não das tecnologias utilizadas. Nesse aspecto é que se sobressai o papel das tecnologias na educação: que seu uso seja direcionado à construção do conhecimento e à formação de pessoas competentes para a inserção em uma sociedade cada vez mais tecnológica. Desse modo o uso das tecnologias na educação não é um fim em si mesmo e sim um instrumento para o desenvolvimento cognitivo. Também é essencial entender que se as tecnologias forem utilizadas simplesmente para transmitir informações já elaboradas, no processo de aprendizagem, elas estarão a serviço de uma função pedagógica tradicional sem possibilitar nenhuma inovação ou mudanças por parte dos sujeitos envolvidos.

Qual o papel da escola na Era Digital? A escola é um espaço destinado a formar cidadãos, aptos a cumprir seu papel na sociedade na qual estão inseridos, para contribuir com a melhoria da qualidade de vida própria e das outras pessoas. Assim sendo, entende-se que todos os responsáveis por sua criação e existência devam propiciar as condições materiais e humanas adequadas para que ela, a escola, atenda às exigências da era atual. O papel dos dirigentes educacionais, nesse contexto se modifica diante da responsabilidade de criar ambientes adequados para o enfrentamento das novas exigências do mundo atual e propiciar a formação continuada de seus docentes.

No entanto, não basta incorporar as tecnologias no desenvolvimento profissional dos docentes para que conheçam ou manipulem equipamentos tecnológicos. Essa incorporação deve estar presente em sua formação inicial e permanente, condição indispensável para que o futuro professor desenvolva a capacidade de buscar, usar e gerar informações, a qual só é possível com o apoio das tecnologias. Cada nova tecnologia que surge precisa ser aprendida, ou por meio de iniciativa própria, ou por meio de cursos, ou ajuda dos mais experientes.

Na sociedade de hoje, a função do docente é envolver o aluno no ofício de aprender, ou seja, conduzir o aluno para as operações que se realizam no processo de aprendizagem. *Aprender a aprender* é o objetivo básico da educação da sociedade atual. Nesse sentido também o docente tem que se educar ao longo de toda a sua vida. Preparar o docente para essa missão deve ser o objetivo de uma política educativa, definida para a formação de professores que atenda essas necessidades, promovendo, assim, um estímulo para a superação desse quadro débil tanto do ponto de vista teórico como prático, com relação aos aspectos pedagógicos e didáticos do uso das tecnologias.

> É preciso buscar informações, realizar cursos, pedir ajuda aos mais experientes, enfim, utilizar os mais diferentes meios para aprender a se relacionar com a inovação e ir além, começar a criar novas formas de uso e, daí, gerar outras utilizações. Essas novas aprendizagens, quando colocadas em prática, reorientam todos os nossos processos de descobertas, relações, valores e comportamentos. (Kenski, 2007, p.44)

Mas quais são essas competências docentes requeridas para esse enfrentamento? São necessárias mudanças na cultura escolar de formação de docentes de modo a propiciar a eles a capacidade de se inovar de acordo com os novos tempos, demandas sociais e interesses dos estudantes. A cultura escolar ainda caminha fora do compasso das inovações de uma sociedade tecnológica. O projeto Europeu "Profiles in ICT for Teacher Education" (2002) definiu um perfil do professor em Tecnologias de Informação e Comunicação para o século XXI considerando:

> A proposta que a seguir se apresenta é resultado de algumas iniciativas e projetos em que o Programa Nónio-Século XXI esteve envolvido. (p. 6)

ATITUDES		**Abertura à inovação tecnológica. Capacidade de adaptação/mudança do papel do professor. Ensino centrado no aluno. Professor como mediador e facilitador da comunicação.**
COMPETÊNCIAS	**Ensino em geral**	**Metodologias de ensino com as TIC. Planejamento de aulas com as TIC. Integração das mídias. Monitorização/avaliação. Avaliação de conteúdos TIC. Questões de segurança, de ética e legais de utilização das TIC.**
	Ensino da disciplina	**Atualização científica. Investigação. Avaliação de recursos. Integração na comunidade científica. Ligação a possíveis parceiros. Utilização de materiais noutras línguas. Participação em newsgroups.**
	Competências TIC	**Atualização de conhecimentos em TIC/plataformas e ferramentas. Familiarização com ferramentas que sirvam para: Comunicar Colaborar Pesquisar Explorar Coligir dados Armazenar dados Expandir conhecimentos Integrar ferramentas**

Figura 1: Perfil do Professor em Tecnologias da Informação e Comunicação

O Boletim da Educação no Brasil, (Fundação Lemann e Prereal, 2009), resultado de um amplo estudo da realidade educacional no país, evidencia que:

> Para gerar mudanças nas escolas e salas de aula, é essencial que estes profissionais sejam capazes de identificar os problemas que estão levando seus alunos a não dominarem determinadas habilidades e competências e, a partir daí, reformular suas práticas de ensino. Um dos caminhos para atingir esse objetivo é oferecer aos docentes recursos técnicos – materiais didáticos, guias curriculares, cursos de formação – que os auxiliem nesta tarefa, e que, portanto, estejam alinhados com as competências medidas pelo sistema de

> avaliação. Isso ainda não existe de forma sistemática no Brasil. (Fundação Lemann e Prereal, 2009, p. 24)

É observado no Boletim que *apesar deste intenso esforço por parte dos governos, não se observa impacto da formação continuada no desempenho dos alunos*. (Fundação Lemann e Prereal, 2009, p. 32)

O professor, que hoje está se formando, nasceu imerso nesta sociedade tecnológica. E desse modo o desafio nos dias atuais está em conseguir que os sujeitos envolvidos no contexto escolar reflitam sobre sua prática, investiguem e compreendam quais os estilos de aprendizagem de seus alunos, mergulhem no uso das tecnologias desde os seus primeiros passos e em todos os espaços de sua vida cotidiana.

É importante considerar que esta sociedade solicita mudanças no contexto escolar e o mesmo conhecimento advindo das tecnologias também pode orientar para as mudanças nos currículos de formação docente e nos currículos escolares.

> Independentemente do tipo de mudança sugerida, é importante que os planos de carreira tenham como foco a melhoria do aprendizado dos alunos, contem com a adesão dos professores e promovam um maior equilíbrio entre os direitos e os deveres dos profissionais da educação. (Fundação Lemann e Prereal, 2009, p. 35)

Um aspecto a se considerar nessas mudanças é a utilização das tecnologias para permitir o acesso dos estudantes em qualquer tempo e lugar como, por exemplo, na própria sala de aula com o uso de tablets com acesso à Internet.

Já está próximo o dia em que os alunos criarão um ambiente com computadores ou tablets na própria sala de aula, sem a necessidade de se deslocarem ao laboratório. Este é o acesso ideal: em qualquer tempo e lugar. O professor deverá estar imerso nesse novo ambiente e estar preparado para essa nova situação.

Também é imprescindível uma formação durante toda a vida, desse modo, condições que a possibilitem de modo permanente devem ser estruturadas, orientadas, socializadas e consolidadas com o tempo.

É neste cenário que o aprender a distância tem o seu papel não só para a democratização do acesso à educação, mas também para permitir uma oportunidade de educação para toda a vida. Com o advento das tecnologias a educação a distância se renovou e hoje, tem suporte em ambientes digitais com as mais diversas abordagens.

Muito há para se investigar sobre as possibilidades da educação a distância na inserção do cotidiano escolar e na produção do conhecimento, mas é certo que as possibilidades das tecnologias em ambientes para a educação a distância possibilitam a interatividade e o enfrentamento de situações específicas e primordiais para a formação do professor, além de desenvolverem a competência da autonomia dos indivíduos.

Pensar em educação na modalidade a distância também pode fazer parte do processo de considerá-la como uma "novidade" ou inovação e provocar nas pessoas sentimentos de estranhamento, incerteza e também de possibilidades.

O autor Everett Rogers (2003), em sua teoria Difusão de Inovação, afirma que uma “inovação” não é necessariamente algo novo, mas sim algo que representa uma “novidade” para uma pessoa ou sistema social. No caso da educação a distância, a inovação se apresenta como uma “novidade” na medida em que os indivíduos envolvidos, de algum modo se iniciam ou se inserem no processo de ensino nessa modalidade mesmo possuindo ou não algum conhecimento a seu respeito.

Nos dias atuais, a educação a distância pode ocorrer nos chamados ambientes virtuais de aprendizagem. Virtuais, porque são acessados por meio da Internet e computadores, e de aprendizagem, porque possibilitam a inserção dos mais diversos aparatos tecnológicos que podem permitir a construção do conhecimento. Tais ambientes permitem que se ofereça uma aprendizagem centrada em perspectivas construtivistas nas quais a interação com os outros, a reflexão e a construção do conhecimento de forma colaborativa são aspectos centrais.

Se planejada, criada e adequada para atender as necessidades de uma realidade local, a educação a distância pode favorecer a construção do conhecimento em todos os níveis da escolaridade e formação e surge um novo papel a ser desempenhado pelo professor nessa nova realidade.

Tem-se hoje um cenário propício para garantir o acesso às informações. Há pouco tempo os recursos tecnológicos eram independentes e não se conversavam e hoje, tais recursos mediáticos se aperfeiçoam e se interagem. A televisão digital interativa já é uma realidade e tem acesso à Internet, o celular permite o m-learning[i] e a educação a distância se beneficia com todas estas possibilidades tecnológicas. Com esses avanços as propostas pedagógicas se atualizam e a educação tem a possibilidade de se integrar a este mundo de modo responsável, sem perder de vista a formação consistente de um futuro professor, preparado para ensinar e para sempre aprender em sua caminhada docente.

> Seja por meios virtuais ou tangíveis, seja a distância ou localmente, tenho convicção de que os seguintes conceitos deverão permear a escola do futuro: interatividade, colaboração, aproximação e presença (não necessariamente física). As tecnologias interativas terão papel fundamental nessa evolução. (Tori, 2010, p.22)

Nessa direção é que a formação do professor deve ser repensada: com foco em novas metodologias, com o uso das tecnologias e com suporte nas concepções teóricas e em pesquisas consolidadas. Nesse aspecto, a educação a distância ou sem distâncias, por meio das tecnologias que aproximam as pessoas, é um caminho importante de formação continuada que pode permitir e promover uma renovação na prática docente. Com a convergência dos aparatos tecnológicos, a educação a distância será um caminho cada vez mais acessível para as pessoas e pode mudar o paradigma da formação continuada que hoje se apresenta.

> No entanto, é difícil qualificar os cursos de educação continuada uma vez que a variação entre eles é enorme: há desde programas com horas e estruturas preestabelecidas até iniciativas que se propõem apenas a ocupar as horas de trabalho coletivo previsto na carreira do professor. (Fundação Lemann e Prereal, 2009,p. 32)

O quadro que hoje se apresenta na educação está muito aquém do ideal e evidencia, que embora a tecnologia faça parte do dia a dia das pessoas, ela ainda está longe de ser incorporada efetivamente no ambiente escolar, pelo despreparo de seus dirigentes e professores. A tecnologia na escola e na sala de aula deveria ser algo tão natural quanto o uso do celular que tão rapidamente se propagou nas mãos das pessoas das mais diferentes camadas sociais.

Os recursos tecnológicos em muitas escolas no Brasil, quando há, não são adequadamente administrados e rapidamente se tornam ultrapassados pelos avanços do dia a dia.

> Se por um lado é importante que as escolas tenham maior poder de decisão, por outro, para exercer esta autonomia com competência, elas precisam dispor de capacidade técnica e se responsabilizar por seus resultados perante a comunidade. No Brasil, esse processo de "empoderamento" é dificultado por uma conjunção de fatores, que esvaziam as escolas do necessário senso de autoridade e responsabilidade: limitações legais, pouca tradição de participação das famílias, falta de qualificação técnica do corpo docente e sobrecarga de atribuições não pedagógicas do diretor. (Fundação Lemann e Prereal, 2009, p. 26)

É uma corrida sem fim e somente o tempo promoverá mudanças significativas e de maneira natural. Tais mudanças ocorrerão por meio do crescimento pessoal e, consequentemente, o crescimento intelectual avançará, à medida que o professor se torne mais comprometido não só com o seu processo de aprendizagem e com o desenvolvimento de suas competências, mas também com o aprendizado e desenvolvimento de seus alunos.

Haverá um dia em que uma tecnologia na escola será como o giz depositado na lousa: um aparato a espera de um professor preparado para fazer uso na sua prática e com perfil diferente do tradicional.

Educação Matemática no Cenário da Era Digital

Na era digital, os recursos tecnológicos que se apresentam para dar suporte à educação, e em especial, à Educação Matemática são inumeráveis. Sofwares interativos, objetos de aprendizagem, applets, hipertextos, portais na internet, blogs, podcasts, vídeos, simulações, jogos, ambientes virtuais de aprendizagem, realidade virtual, realidade aumentada e outros recursos que privilegiam a ação, a reflexão e a interação estão disponíveis e ao alcance de professores, pais e alunos.

Temos à disposição, além de uma vasta gama de recursos tecnológicos, muitas pesquisas mostrando resultados positivos com o seu uso e, no entanto, o ambiente de aprendizagem na escola se renova a passos lentos e as pesquisas já consolidadas que poderiam subsidiar a ação docente, não chegam à prática do professor. E mesmo com acesso a muitos desses recursos não se tem a garantia de uma aprendizagem significativa, pois depende de estratégias previamente elaboradas pelo professor para uso na sua prática docente.

Em que a Educação Matemática pode se beneficiar com os recursos tecnológicos? Como "falar" ou representar estaticamente na lousa, gráficos de funções contando com a imaginação do aluno? Por outro lado, como trabalhar a linguagem Matemática em um ambiente a distância? São questões nas quais a tecnologia tem um papel fundamental na medida em que permite ultrapassar barreiras metodológicas para uma aprendizagem efetiva. As tecnologias, além de permitirem situações que simulam o real e possibilitarem um aprendizado significativo e desafiador, ajudam as pessoas a entenderem a Matemática.

Segundo Dubinsky e Tall (1991) todas as diversas formas nas quais os computadores são usados em pesquisas estão potencialmente disponíveis para o ensino e aprendizagem da Matemática avançada.

Os autores observam que os alunos podem aprender a programar para lidar com determinados tipos de problema ou podem usar software como um ambiente para explorar idéias.

Os autores Frota e Borges (2004) identificaram em suas pesquisas algumas concepções dos professores sobre o uso da tecnologia em Educação Matemática influenciadas pelo conhecimento, segurança e experiência do uso da tecnologia dos mesmos e suas experiências pessoais e docentes.

> A primeira concepção, que denominamos **consumir tecnologia**, está relacionada aos argumentos que essencialmente sustentam serem as novas tecnologias e as TICs recursos poderosos para ensinar e aprender Matemática. As visões aglutinadas na segunda concepção, que denominamos **incorporar tecnologia**, sustentam que ao se assenhorearem das novas tecnologias e das TICs, transformando-as em ferramentas e instrumentos cognitivos, professores e educandos mudam a forma de fazer Matemática e mudam a forma de pensar matematicamente. Algumas das visões subjacentes a essa concepção avançam ao afirmar que as novas tecnologias e as TICs mudam a própria Matemática que se ensina, se faz e se aprende. Acrescentamos uma terceira concepção, não identificada na literatura, e que denominamos **matematizar a tecnologia**, ligada às ideias de que as tecnologias e as TICs, além de desempenharem os papéis de recurso de ensino e de aprendizagem, e de ferramenta e de instrumento de pensar, podem tornar-se fontes de renovação de abordagens curriculares de temas consagrados na Educação Matemática básica e universitária, bem como fontes de novas temáticas para o currículo de Matemática. (**grifo nosso**) (Frota e Borges, 2004. p.3)

Concordamos com os autores Frota e Borges (2004) quando observam dois aspectos na concepção **consumir tecnologia**: para automatização de tarefas e para mudar o foco das tarefas. Afirmam que qualquer dessas concepções *pode representar um avanço em termos educacionais, na medida em que o foco do ensino de Matemática pode deixar de ser operacional ou procedimental, para assumir uma perspectiva mais conceitual.* (p.5)

Ao olhar para o trabalho do professor, inserido nessas concepções, podemos identificar ações possíveis em sala de aula que possibilitem uma compreensão das tecnologias no ensino e maneiras de integrar a tecnologia como uma ferramenta didático-pedagógica no ambiente de aprendizagem com elementos teóricos que possam subsidiar estas ações.

As diferentes possibilidades do uso das tecnologias na prática docente irão configurar as concepções nas quais o professor se insere e, talvez, esse autoconhecimento possa mostrar aos mesmos, caminhos para um aperfeiçoamento e formação continuada.

Não é fácil, para o professor, ter consciência, com clareza e com fundamentos, de sua competência para o uso da tecnologia e também dos conhecimentos matemáticos que possam aflorar com seu uso como coloca Ponte (1997):

> Os efeitos profundos que estas tecnologias tem tido em numerosas esferas de atividade social tardam a surgir na instituição educativa. É preciso perguntar, por quê? A grande razão é que a entrada na Sociedade da Informação implica um novo papel para a escola que ainda não foi por esta completamente interiorizada. O papel fundamental da escola já não é o de preparar uma pequena elite para estudos superiores e proporcionar à grande massa os requisitos mínimos para uma inserção rápida no mercado de trabalho. Pelo contrário passa a ser o de preparar a totalidade dos jovens para se inserirem de modo criativo, crítico e interveniente numa sociedade cada vez mais complexa, em que a capacidade de descortinar oportunidades, a flexibilidade de raciocínio a adaptação a novas situações a persistência e a capacidade de interagir e cooperar são qualidades fundamentais. Para os professores de Matemática este novo papel tem conseqüências fundamentais em dois níveis: na sua visão da Matemática e na sua visão do que é ser professor. (Ponte, 1997, p.1-2)

Em nossa experiência com algumas turmas de uma disciplina do Mestrado Profissional em Educação Matemática na PUC/SP[ii], constatamos que alguns poucos professores mestrandos, que se consideram *experts*, se surpreendem quando colocados frente a outras possibilidades de uso da tecnologia como descrevem abaixo:

> *Vejo que por mais que o professor domine um assunto este deve prever situações inusitadas em sala de aula, pois o uso dos computadores e da internet exigem muito mais do professor e por este motivo o mesmo deve estar mais atento diante de tantas possibilidades. Bom, finalizando, esta semana foi bastante produtiva, pois aprendi algo totalmente novo, deparei-me com termos e situações que ainda não tinha vivenciado.* (aluno1).
> *Esse foi outro assunto que me causou surpresa neste curso, pois também era desconhecido para mim. Percebo cada vez mais, o quanto estava preso às tradicionais aulas em sala.* (aluno2)

Outros, por outro lado, que se consideram *analfabetos digitais* no início do curso, também se surpreendem quando elaboram propostas inovadoras para a sua prática docente.

> *Conciliando a leitura dos textos sobre o uso das tecnologias e o uso dos softwares para realização das tarefas da disciplina de TICs, conclui que precisamos repensar a forma de ensinar Matemática. Os softwares de geometria dinâmica propiciam uma abordagem muito diferente das desenvolvidas tradicionalmente. Portanto, estamos diante de uma nova forma de fazer, aprender e ensinar Matemática. Cada software tem uma peculiaridade que se sobressai aos outros, dessa forma, acredito que é o tipo de atividade e intenção didática do professor que vai determinar o uso do programa. Estou, portanto, resolvendo pendências, para que no ano que vem logo no início do ano, desenvolva atividades com os alunos no laboratório. Pretendo ainda mostrar e mobilizar os professores de Matemática da minha*

> *escola em relação às vantagens do uso dos softwares para o uso efetivo do laboratório com seus alunos.* (aluno3)

Em qualquer caso, é importante que cada professor reflita sobre suas competências tecnológicas para utilizá-las na sua prática. Isto requer estudos e leituras sobre o tema para ter o conhecimento do que já se pode explorar com seus alunos e quais aspectos ainda necessitam de aprimoramento. O que é certo é que com os avanços tecnológicos esse professor precisa se convencer de que terá que se atualizar constantemente. Suas concepções, crenças e conhecimento são fatores cruciais na integração das tecnologias.

Outro aspecto a ser considerado pelo professor é sobre os referenciais teóricos que abordam a integração das tecnologias na Educação Matemática. As diversidades de recursos tecnológicos são amplamente estudadas, exploradas e pesquisadas. A literatura é ampla neste aspecto e mostra as potencialidades teórico-metodológicas no processo ensino e aprendizagem de Matemática.

> Depuis 1992, les matériels et logiciels se sont très notablement développés et diversifiés, avec par exemple les calculatrices, l'usage de l'Internet, des ordinateurs de tout type jusqu'aux technologies de tous les jours comme le téléphone mobile et les caméras numériques. Ce développement des matériels et logiciels a potentiellement des implications pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à tous les niveaux des systèmes éducatifs aussi bien qu'à l'extérieur de ces systèmes. Parallèlement au développement des technologies, les recherches sur leurs usages ont évolué dans leurs finalités, objectifs et orientations, les perspectives se sont élargies, de nouvelles méthodologies ont été adoptées. La première étude a été en grande partie centrée sur les mathématiques elles-mêmes et ce n'est que plus récemment qu'un travail s'est développé sur les multiples actions et rétroactions de la technologie sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les travaux se sont notamment intéressés au processus complexe de la genèse instrumentale, au rôle de l'enseignant et à l'articulation de l'utilisation d'outils avec les techniques traditionnelles. De nouveaux paradigmes, plus solides, émergent pour penser l'utilisation d'outils dans l'enseignement des mathématiques et la 17 ème étude ICMI vise à faire un nouveau pas en avant dans cette direction. (Lagrange, 2006)

Ao optar pelo uso de um recurso tecnológico, é importante que o professor pesquise sobre os resultados obtidos em outras experiências já consolidadas e reflita sobre sua proposta no contexto de seus alunos. Tais recursos, pesquisados em dissertações e teses, englobam softwares, uso da internet, calculadoras, celulares, vídeos, etc. e cada um com suas possibilidades, dificuldades e desafios.

A integração de recursos tecnológicos na prática docente pode ser sustentada ao que Rabardel (2003) considera como uma construção da gênese instrumental. Esse autor argumenta que o instrumento é o resultado de um processo de construção pelo indivíduo no transcorrer de sua atividade, a partir de um artefato dado. No processo de criação, concepção e usabilidade, o homem tem um lugar central, mas também se modifica em termos cognitivos e comportamentais. Assim, um instrumento é composto pelo artefato (componente material) e pelos esquemas de utilização usados para realizar a tarefa (componente psicológico) que não é apropriado pelo indivíduo de forma espontânea, mas por meio de um processo de gênese instrumental em um duplo processo de apropriação: a instrumentalização e a instrumentação.

Na instrumentalização- relativa ao artefato, o indivíduo o personaliza conforme suas necessidades que podem ser consideradas como uma contribuição do usuário à concepção do instrumento.

A instrumentação é relativa ao sujeito com seus esquemas de utilização das potencialidades dos artefatos e que condicionam as suas ações para resolver um determinado problema. Rabardel observa que:

> Nesta edição especial, concentramo-nos na apropriação, pelos usuários, de seus computadores como artefatos. Perguntamos como os usuários desenvolvem suas próprias atividades e também, como adaptam seus artefatos às novas condições que o uso desses artefatos implica ou permite. Entender esse fenômeno e levá-lo em consideração, em uma rede de artefatos e organizações, requer modelos teóricos e pesquisa empírica, concentrados nas atividades de pessoas e em seus processos de apropriação e desenvolvimento. (2003, p. 641, tradução da autora)

> Esse desenvolvimento por meio do uso deve ser considerado, a nosso ver, como uma característica intrínseca à atividade humana. A existência da gênese instrumental NÃO é consequência de um modelo deficiente, e sim uma expressão do conceito incorporado pelo artefato que é, de todas as formas, instanciado pelo usuário. (2003, p.643, tradução da autora)

Portanto, a integração das tecnologias na prática docente provoca desequilíbrios no processo de ensino e aprendizagem e requer modificações e adaptações de professores e alunos de acordo com as especificidades e potencialidades dos artefatos utilizados.

Desafios do Ensino e Aprendizagem da Matemática na Era Digital

Refletir sobre o uso de um recurso tecnológico na prática docente permite ao professor reconhecer os desafios a serem superados. Cada escolha implica em competências distintas para as quais, em muitas situações, o docente não foi preparado.

Algumas ferramentas tecnológicas disponibilizam condições que favorecem professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem. Para que isso aconteça é necessário que os professores proponham situações nas quais os alunos consigam construir o conhecimento com o auxilio das ferramentas e que estas permitam identificar os caminhos percorridos pelo aluno, possibilitem o fornecimento de respostas às suas atividades e o feedback em relação ao seu desempenho além da mediação do professor.

É essencial que o professor tenha habilidades e competências para essa mediação e receba uma formação sólida sobre os conteúdos que serão trabalhados, sobre as metodologias que possam ser exploradas no ensino e, sobretudo, tenha conhecimento dos estilos de aprendizagem que emergem de quem aprende. Agregado a esse contexto estão presentes as tecnologias que contribuem para uma melhor aprendizagem e só tem sentido com relação às metodologias utilizadas.

Mishra e Koehller (2006) desenvolveram uma teoria denominada Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK) a qual aborda o conhecimento necessário ao professor para integrar a tecnologia em sua prática e como esse conhecimento pode ser desenvolvido. Os autores argumentam que a tecnologia tem um grande potencial de mudanças no dia a dia do ser humano, inclusive nos processos de ensino e aprendizagem, mas o que tem acontecido é que esse quadro tem ficado aquém do que a realidade tem mostrado até agora.

A atividade de ensinar é altamente complexa e se apóia em diversos tipos de conhecimento, entre os quais o conhecimento sobre o desenvolvimento da aprendizagem do aluno e o conhecimento do assunto a ser ensinado.

Historicamente, os programas de formação de professores têm enfatizado o conhecimento do conteúdo (C) e o conhecimento pedagógico (P) ou práticas pedagógicas gerais que seriam independentes do conteúdo a ser ensinado. Ao introduzir a ideia do conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) em 1986, Lee S. Shulman proporcionou um avanço na discussão sobre a formação de professores. A dicotomia entre enfatizar conteúdo e pedagogia deveria dar lugar a uma preocupação com o relacionamento entre os dois tipos de conhecimento, ou seja, o PCK que representa o conhecimento de como determinados aspectos do conteúdo podem ser organizados, adaptados e representados para o seu ensino.

Os autores Mishra e Koehller (2006) acreditam que, embora Shulman não tenha discutido o relacionamento da tecnologia com a pedagogia e o conteúdo, atualmente essa discussão se faz necessária em virtude da grande disponibilidade de novas tecnologias, principalmente computadores, software educacional e internet, e a necessidade de como aplicá-las nos processos de ensino e aprendizagem.

O modelo TPCK introduzido por Mishra e Koehller (2006) enfatiza que o conhecimento da tecnologia não pode ser tratado sem um contexto e que o professor precisa entender como a tecnologia se relaciona com a pedagogia e o conteúdo.

O TPCK seria a base de um bom ensino com tecnologia. Requer um entendimento de como representar conceitos com tecnologia, técnicas pedagógicas que usam tecnologia, razões que tornam um conceito difícil ou fácil de aprender e como a tecnologia pode ajudar, conhecimento sobre teorias epistemológicas e como as tecnologias podem ser usadas para ajudar a construir a partir dos conhecimentos prévios dos alunos.

No modelo proposto os componentes: conteúdo, pedagogia e tecnologia existem em um permanente estado de equilíbrio dinâmico, isto é, não podem ser vistos de forma isolada e uma mudança em um deles tem que ser "compensada" por mudanças nos outros dois.

Mishra e Koehller (2006) também argumentam que é importante que a abordagem pedagógica enfatize o aprender fazendo o que implica em um processo de construção de artefatos que permitem integrar a teoria e a prática.

Nessa direção Kaput (1992, p.519) salienta que usar um computador como meio na educação pode atender a várias abordagens: jogos, tutoriais, manipuladores simbólicos e simulações.

Há inúmeros recursos que podem ser considerados como importantes ferramentas para a Educação Matemática, pois permitem criar situações para que sejam manipulados e explorados pelos alunos na verificação de suas conjecturas. Desse modo há o envolvimento dos alunos em um contexto de aprendizagem com propostas de problemas, formulação de hipóteses e tomadas de decisão em um diálogo permanente com a realidade.

Uma dessas situações que pode ser proposta encontra-se em Villiers (2002). O autor traz diversas funções importantes da demonstração em Matemática, em especial com o uso do computador, e observa que se deve utilizar inicialmente a função mais importante de explicação e descoberta para introduzir a demonstração como uma atividade significativa para os alunos.

Dentre essas tecnologias, a internet se destaca com grande aplicabilidade, uma vez que se constitui numa ferramenta de informação e auxílio à pesquisa, socialização e interação para o enriquecimento das práticas pedagógicas.

O professor, diante das possibilidades de uso da Internet, tem uma vasta gama de escolhas para a sua prática: propor pesquisas orientadas para seus alunos, em endereços previamente selecionados, para evitar uma navegação sem rumo: formar grupos de trabalho colaborativos em ambientes virtuais, propor atividades utilizando objetos de aprendizagem ou applets de Matemática, fazer parte de comunidades que possam contribuir com sua prática, utilizar vídeos no contexto da Matemática e de domínio público como no YouTube, utilizar a técnica de WebQuest com sua classe, utilizar ambientes virtuais ou outras ferramentas como chats, vídeo-conferências ou blogs, para interagir com os alunos em outros momentos que não os de sala de aula, criar páginas colaborativas, explorar as potencialidades da realidade aumentada, etc.

Também baixar programas demonstrativos ou gratuitos como Geogebra, Compasso e Régua, Winplot, Scketchup que permitem a elaboração de propostas de atividades desafiadoras para trabalhar com seus alunos. São inúmeras as possibilidades do uso da Internet na Educação Matemática como afirma Guerra (2001):

> No processo educacional, essas ferramentas têm a possibilidade de dinamizar o processo de aprendizagem, modificar o tempo gasto na aquisição do conhecimento, incentivar os *aprendentes* ao aprendizado autônomo criando com isso novas formas de aprender e de ensinar, alterando também profundamente o papel tradicional das interações que se dão entre professor e alunos no espaço social da sala de aula presencial, que agora também pode ser virtual. (p.1)

Por outro lado, há de ser ter uma atenção especial para outros aspectos que dificultam o uso da Internet, como afirma Moran (1997)

> Ensinar utilizando a Internet exige uma forte dose de atenção do professor. Diante de tantas possibilidades de busca, a própria navegação se torna mais sedutora do que o necessário trabalho de interpretação. Os alunos tendem a

> dispersar-se diante de tantas conexões possíveis, de endereços dentro de outros endereços, de imagens e textos que se sucedem ininterruptamente. Tendem a acumular muitos textos, lugares, idéias, que ficam gravados, impressos, anotados. Colocam os dados em seqüência mais do que em confronto. Copiam os endereços, os artigos uns ao lado dos outros, sem a devida triagem. (p.4)

O uso de ferramentas tecnológicas tem como objetivo disponibilizar condições que favoreçam os usuários no processo de ensino e aprendizagem.

O computador é um recurso tecnológico que permite, além do acesso à Internet, o desenvolvimento de outras atividades com o uso de softwares específicos e que possibilitam diversas representações de um mesmo objeto matemático. Ao representar o gráfico de uma função na tela do computador, outras janelas se abrem apresentando a correspondente expressão algébrica e, por vezes, outra janela com uma planilha contendo as coordenadas de alguns pontos pertencentes ao gráfico. As alterações no gráfico são visíveis imediatamente na janela algébrica e na planilha de pontos. É a apresentação do dinamismo de situações que permitem ao professor e ao aluno levantar conjecturas e testar hipóteses. Estas são as possibilidades que se apresentam, por exemplo, no software GeoGebra[iii]

Quanto ao uso do computador Balacheff propõe uma teoria para repensar o seu uso pelos docentes para que este não seja mais um elemento na educação e sim um diferencial que deve ser muito bem estudado e avaliado para seu correto uso. Balacheff (1994) considera que:

> A criação de objetos de ensino é o resultado de um processo complexo de adaptação dos conhecimentos às limitações de ensino e aprendizado próprios dos sistemas didáticos. Este processo, a transposição didática (Chevallard: 1985), conduziu à criação de objetos originados por suas características e funcionamento próprios. O desenvolvimento da tecnologia da informação, sua introdução nas escolas e centros de formação, é acompanhado de novos fenômenos da mesma ordem daqueles da transposição didática. Às limitações da transposição didática acrescentam-se, ou melhor, combinam-se, as limitações da criação de um modelo e de implementação da informática: limitações da “modelagem computável”, limitações de softwares e de materiais de apoio digital à realização. (p.4)

Ao utilizar o computador em sua prática docente e ao propor uma mesma tarefa com olhar diferente, o professor pode estar apenas consumindo a tecnologia, como por exemplo, resolver atividades do livro didático com o uso de um software específico. Também pode estar indo mais além, incorporando a tecnologia na proposta de atividades que mudam o olhar para a Matemática que se ensina e que se aprende. Professor e educando mudam a forma de fazer Matemática e mudam a forma de pensar matematicamente como afirmam Frota e Borges. (2004).

Assim, é relevante que a Matemática deva ter como fim preparar os estudantes para exercerem com sucesso certas funções, quer na escola durante sua formação, quer a serviço de organizações públicas ou particulares. Desse modo, as competências no campo da Matemática que se adquirem na escola, irão possibilitar a tais alunos atuarem como interlocutores de sucesso ao desempenhar suas funções-chave no mundo corporativo.

Nesse aspecto que, segundo Frota e Borges (2004), matematizar a tecnologia tem o seu espaço:

> A concepção matematizar a tecnologia entende tecnologia como parcialmente decorrente da Matemática e, ao mesmo tempo, impulsionando o desenvolvimento da mesma. Em muitas tecnologias que permeiam nosso cotidiano há mais Matemática embutida do que usualmente imaginamos. (p.10)

Nesta época de intensa dinâmica concorrencial e profundas mudanças nas organizações, muitos profissionais necessitam possuir certas competências-chave nos domínios da Matemática, além de outras especialidades, que possibilitem a eles conceber, gerir e avaliar de forma sistemática e integradora as melhores soluções tecnológicas.

Dentro desse contexto, é importante refletir e pesquisar sobre as diversas relações e cenários possíveis para que o processo de ensino-aprendizagem da Matemática se torne mais próximo, não só dos alunos, mas também dos profissionais do mercado de trabalho, avaliando novas alternativas para adequação de tal processo ao contexto das rápidas e constantes inovações hoje observadas, fazendo uso de recursos tecnológicos desta era digital.

Bibliografía

Balacheff, N. (1994) La transposition informatique. Note sur um nouveau problème pour La didactique, In: Artigue, M. et al. (eds). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Recherches em Didactique dés Mathématiques*, v. especial. La Pensée Sauvage Editions, 1994, p. 364-370.

Burke, P. (2000). *A Explosão da Informação*. Caderno *Mais* do Jornal Folha de São Paulo de 16 de julho de 2000.

Dubisnky,E e Tall, D. (1991) Advanced Mathematical Thinking and the Computer**.** In Tall D. O. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Holland, pp. 231-248

Frota, M. C. R. e Borges, O. (2004) *Perfis de Entendimento sobre o Uso de Tecnologia na Educação Matemática*. 27ª Reunião Anual da ANPEd. Recuperado em 23/06/2011, de http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_27/perfis.pdf

Fundação Lemann; programa de promoção da reforma educacional na América Latina e no Caribe (preal) (2009) *Boletim da Educação no Brasil: Saindo da Inércia?* Recuperado em 07/12/2009, de http://www.fundacaolemann.org.br/modelos/lendo_arquivo_download.aspx?codUrl=/upload/downloads/PREAL_final_20091202.

Guerra, A.F. S. (2001) *Aprender e ensinar usando a Web: uma experiência para a educação ambiental em áreas costeiras.* Rev. Eletrônica Mestr. Educ. Ambient. ISSN 1517-1256, Volume 06, julho, agosto, setembro de 2001. Recuperado em 23/06/2011, de http://www.niee.ufrgs.br/eventos/SBC/2000/pdf/wie/art_completos/wie005.pdf

Kenski, V.M. (2007) *Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação***.** Campinas, SP: Papirus.

Lagrange, J-B. (2006). *La 17ème étude ICMI: repenser las TICE*. Recuperado em 23/06/2011, de http://educmath.inrp.fr/Educmath/la-parole-a/archives/jb_lagrange/

Mishra, Punya; Koehller, Matthew (2006) *Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge*. Teachers College Record, v.108, n.6, p. 1017-1054.

Moran,J.M. (1997) Como utilizar a Internet na Educação. *Revista Ciência da Informação*, vol 26, n.2, maio-agosto, PP. 146-153.

Ponte, J. P. (1997) O Ensino da Matemática na Sociedade da Informação. *Educação Matemática (APM),* n. 45, p.1-2.

Profiles in ICT for Teacher Education. (2002) *Colecção: Tecnologias da Informação e da Comunicação*. Estudo realizado pelo Programa Nónio-Século XXI. Recuperado em 18/07/2011, de http://jieb1alvalade101.no.sapo.pt/curriculoTIC.pdf

Rabardel, P (2003) From artefact to instrument*. Interacting with Computers,* 15, pp.641–645.

Rogers, E. M. (2003) *Diffusion of Innovations*. 5a. Edição. New York: The Free Press.

Shulman, L. S. (1986).*Those who understand: knowledge growth in teaching*. Educational Researcher, Washington, v.15, n. 2, p. 4-14.

Tori, R. (2010) *Educação sem distância: as tecnologias interativas na redução de distâncias em ensino e aprendizagem*. São Paulo: Editora Senac São Paulo.

Villiers, M. (2002) *Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em Geometria Dinâmica*. Tradução de Rita Bastos. *Actas do Prof Mat 2002.*

---

[i] m-learning: aprendizagem com aparatos tecnológicos móveis.

[ii] Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

[iii] GeoGebra http://www.geogebra.org

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 29-40
ISSN: 1815-0640

Entrevista (*virtual*) a Doña Nelly Vázquez de Tapia

Luis Balbuena Castellano

Doña Nelly Vázquez de Tapia fue, sin duda, una mujer de extraordinarias cualidades que ha dejado un imborrable recuerdo en quienes la conocieron y una estela en la Educación que permanecerá. Tuve una relación especial y estrecha con ella motivada, principalmente, por el trabajo que realizamos en torno al movimiento asociativo del profesorado de matemáticas. Eso me permitió tratarla en numerosas ocasiones y mantener un fluido y extenso contacto epistolar primero y de email después, cuando ambos nos decidimos entrar en las nuevas tecnologías. Me he inclinado por hacer una entrevista *virtual* a Doña Nelly en lugar de hacer un relato y para que sus respuestas sean verosímiles, he utilizado los textos de esa correspondencia con ligeras adaptaciones a este contexto sin desvirtuarlas, obviamente. Espero contar con la comprensión del lector para entender las adaptaciones. Ella construyó SOAREM apoyándose en algunas personas más y, sobre todo al principio, me consultaba con frecuencia acerca de los pasos que debía dar. Luego surgió la idea de crear la FISEM (Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática) y tuve en ella uno de los apoyos principales por cuanto que acogió la iniciativa con mucho entusiasmo pues, según decía, *vislumbraba algo en lo que siempre había soñado*. En algún caso actuó como auténtica apóstol de la FISEM…

Luis Balbuena (L).- Siento mucho no haberla conocido antes. Nuestro primer contacto con conversaciones largas lo tuvimos en Cochabamba, en 1997 aunque nos habíamos presentado antes…

***Nelly Vázquez (N)**.-* Sí, en 1997, en el mes de diciembre, en Cochabamba, Bolivia, usted me estimuló para que fundara SOAREM y hasta me "amenazó" con que íbamos a quedar afuera de la FISEM si no lo hacía ¿se acuerda? Por eso fundé la Sociedad Argentina de Educación Matemática el 31 de mayo de 1998. Después siguió ayudando, estimulándome, enviando hermosos libros para la biblioteca de SOAREM, señaladores, revistas y otras cosas más que tan bien nos han venido.

Muchas gracias por su constante colaboración.

Salta. Abril de 1996

L.- Sé que, además de las matemáticas, su familia ocupa un puesto relevante – quizás el primero - en su escala de valores…

N.- Desde luego que sí. Fíjese qué noticia más alegre: el 15 de julio, mi bisnieto cumple 2 años. Es una delicia y para octubre esperamos la bisnieta (confirmado que es una nena).

L.- Le voy a leer de nuevo las palabras que dije cuando le llevé el homenaje del profesorado español con motivo de mi presencia en la CAREM de 2005:

En nombre del Profesor Serapio García Cuesta, Presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, tengo el honor de hacer un público reconocimiento de la comunidad de ocho mil profesores que aglutina nuestra Federación a DOÑA NELLY VÁZQUEZ DE TAPIA por la labor desarrollada a favor de la Educación Matemática no solo en Argentina sino en todo el ámbito Iberoamericano. Su entusiasmo, entrega y participación han sido para todos cuantos *la hemos conocido un ejemplo a imitar. Y para que quede constancia de este homenaje del profesorado español, le hago entrega de una placa conmemorativa que dice así:*

N.- Sentí mucho no haber podido estar presente en ese acto pero usted tuvo la gentileza de visitarme en el hospital en que estaba postrada y mucho se lo agradecí. Me contaron que cuando usted leyó el texto de mi premio, hubo gente que se emocionó mucho y algunos hasta lloraron.

L.- Usted ha recorrido todo su país con la Educación Matemática bajo el brazo…

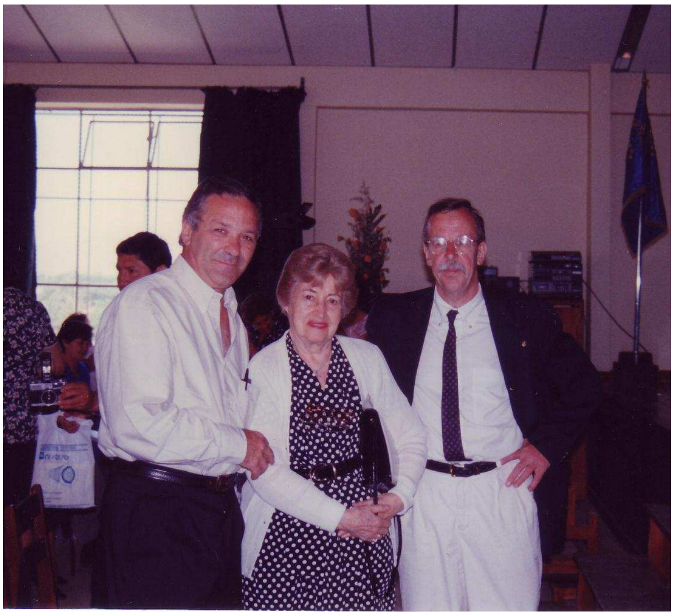
N.- Desde luego. Pero conté con muy buenos colaboradores. Le doy una noticia positiva que sé que le va a gustar porque usted le conoce y sé que se aprecian: Dardo López fue designado ministro de Educación de su provincia. Él y su esposa son excelentes personas. Existe entre ellos y yo un afecto mutuo pues tuve ocasión de trabajar con él durante ocho años en la provincia de Santa Cruz en la década de los 70 y principio de los 80, porque se había decidido llevar a cabo una transformación educativa en la escuela primaria de 1º a 7 º grado y el 8º se hizo una Feria Matemática para mostrar los resultados de los siete años. Como la provincia es muy extensa se había dividido en Zona Norte con centro en Caleta Olivia y Zona Sur con centro en Río Gallegos. En cada una de estas ciudades se había constituido una comisión formada por profesores de matemática, pedagogos y psicólogos. Dardo presidía la Zona Sur.

Yo viajaba cuatro veces al año para dictar cursos de capacitación a los maestros del grado que ese año estaba en experimentación; una semana en cada Zona, donde se suspendían las clases de dicho grado en todas las escuelas de la zona para que asistieran los maestros, directores y supervisores. A la noche nos reuníamos con la respectiva Comisión en la casa del algún docente o en mi hotel para intercambiar opiniones sobre el asesoramiento que ellos debían seguir realizando durante mi ausencia y enterarme de la marcha de las escuelas.

L.-Su mandato en SOAREM llegó a su fin y sé que celebraron elecciones, ¿cómo se desarrolló su sucesión?

N.- Sí, este año tenemos elecciones en SOAREM. Yo ya cumplí los dos períodos permitidos, pero puedo ocupar cualquier otro cargo y desde luego que trataré de seguir colaborando con SOAREM.

El proceso se desarrolló con normalidad y los votos han elegido a Óscar Sardella. Es una buena persona con quien me llevo bien. En la primera reunión dije que una vez decidida la elección, todos debíamos colaborar y apoyar a las nuevas autoridades por el bien de SOAREM. Me ofrecí a colaborar en lo que me resultara posible. Él se levantó, me dio un beso, me dijo que yo era la madre de todo lo que se había construido, que necesitaban mi colaboración y que quería que siguiera asistiendo a las reuniones. Además me designaron "Presidente honoraria". Y como Vicepresidenta: Norma Susana Cotic, por todo lo que ha trabajado, por su capacidad, su creatividad y su enorme implicación en SOAREM es una de mis preferidas.



L. Balbuena, Nelly Vázquez, Martin Kind. Diciembre, 1997

L.- Me ha comentado más de una vez que es una lectora empedernida… pero su afición por la lectura viene de muy atrás, ¿no es así?

N.- Tuve mi primer contacto con *El Quijote*, por ejemplo, a los 10 años; no porque yo fuera una niña prodigio, sino porque en esa época se publicaba la colección *Araluce*: *Las obras maestras al alcance de los niños*. Eran unos libros lujosamente encuadernados en tela y todos tenían 9 láminas de ilustración a todo color. A mí me fascinaban y, dinero que me regalaban, lo invertía en libros de esa colección entre cuyos título figuraban *La Iliada*, *La Odisea*, obras de Shakespeare y otras famosas obras de la literatura universal y algunas, como *El Quijote*, en dos tomos. De más está decir que para mí, a esa edad, esta grandiosa obra era simplemente un cuento pero luego, a lo largo de mi vida, lo leí varias veces y cada vez descubría un nuevo Quijote de acuerdo con la visión de la vida que una iba adquiriendo con el transcurso de los años. Por eso no me extraña que usted descubra el especial Quijote matemático… Espero conocerlo.

L.- Usted ha tenido la delicadeza de regalarme una magnífica edición de El Quijote que, para mí, será como una joya de la corona porque además tiene unas ilustraciones bellísimas…

N.- Sí que se lo regalé y ¡que hermosa carta me envió!, se la agradezco. Se lo regalé con el alma porque usted fue la persona que más me ayudó y me alentó para que fundara SOAREM. Lo compré en Rosario, en una feria del libro a donde fui a dar tres conferencias y me enamoré, además de la encuadernación, de la cantidad de hermosas láminas que usted acertadamente va a escanear. Hace cerca de 30 años que lo tengo.

L.- Mientras fui vocal de la Federación Española para las relaciones con Iberoamérica, traté de poner las bases para la cooperación entre las distintas sociedades que iban naciendo en todo nuestro ámbito. Mientras se gestaba la FISEM, firmamos convenios de colaboración con casi todas las sociedades, la SOAREM entre ellas, y procuré que nos intercambiásemos materiales e informaciones.

N.- En todo este tiempo hemos notado ese interés suyo y de la Federación Española para avanzar en la línea de aunar esfuerzos. Recibimos puntualmente las revistas SUMA y recuerdo de manera especial el nº 48 con el agregado del librito del Día Escolar de la Matemática titulado "El Quijote y las Matemáticas" firmado por usted y Juan Emilio García Jiménez. En cuanto abrí el sobre me puse a leerlo y no me detuve hasta terminarlo. Realmente es extraordinario. Es un tratado de unidades de medida, muchas de las cuales conocía, pues no olvide que mis padres eran españoles y otras se usaron hasta mi adolescencia y juventud como por ejemplo: arroba, onza, vara y otras. Es increíble la variedad de problemas y ejercicios que se pueden plantear con este libro como fondo. Me encantó y, como siempre, nace en mí un sentimiento de sana envidia. Por cierto, quisiera saber cómo se organiza el Día Escolar de la Matemática y los temas ¿se presentan varios trabajos de las distintas sociedades y se elige uno? También recibí las monografías de Emma Castelnuovo y de Miguel de Guzmán. Es una excelente idea. Quisiera saber a quién tengo que agradecerlo para que no dejen de enviar todo este material que resulta muy útil para SOAREM.

Agosto 2000. Firma convenio colaboración SOAREM-FESPM

L.- Usted ha sido lo que en Canarias llamamos "un puntal", es decir, alguien fundamental en la gestación y creación de la FISEM. Incluso estuvo en el acto de creación en Puerto de la Cruz (Tenerife), el año 2003. La Sociedad Isaac Newton se había comprometido a organizar las JAEM (Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas) para celebrar sus 25 años de historia y, dentro de ese evento, hizo hasta una venta de loterías para conseguir fondos y poder invitar a todas las sociedades de Iberoamérica y crear, por fin, la FISEM… Le confieso que me estremecí cuando la vi en el aeropuerto en una silla de ruedas. De su arrojo y entereza tuvimos buenas muestras en esos días porque, además, se trasladó a Las Palmas de Gran Canaria para leer las palabras con motivo de la inauguración del monumento a Luis Santaló que se erigió en el Museo de la Ciencia…¡cuántos recuerdos!

N.- Sí, de ese viaje, extraordinario para mí, lo que más recuerdo fueron dos acontecimientos que califico de históricos: la creación de la FISEM y la inauguración del monumento a Santaló. Del primero porque vislumbro un futuro de trabajo común que ya se reflejó en la armonía de este acto de constitución y respecto de lo segundo, ya conoce usted la veneración que profesé al Dr. Santaló. En mi discurso afirmo: *Y así, frente a ella (la escultura), cada uno evocará a un Luis Santaló distinto según que lo haya conocido o frecuentado como investigador, como educador o como persona, pero desde cualquier ángulo bajo el cual se lo analice, se lo verá como un modelo de vida digno de ser imitado.*

Con relación al monumento le comento que cuando nos solicitaron colaboración para la escultura, SOAREM no estaba en condiciones de contribuir pues se aseguraba que el 2002 había sido el peor año de la historia argentina. Habíamos prometido aportar algo cuando estuviéramos con posibilidades de hacerlo. Llevé a Canarias 300 $US que quise entregar a Jacinto Quevedo; pero él los rechazó y me dijo, parece que inducido por usted, que los utilizara en una escuela carenciada. Yo debo hacer entrega de ese dinero pero lo haré en nombre de la institución que financió la escultura, ¿cuál es? Le diré que lo entregaré a dos escuelas de Corrientes. Le mantendré al tanto a usted y a Jacinto.

Maldonado, Uruguay, 1999.

Por cierto, gracias a toda la gente por tanto afecto me mostró que, a esta edad en que cada uno va haciéndose más sensible, es una verdadera panacea. Quisiera hacer un agradecimiento especial a Lola de la Coba porque me consta el celo que puso para que estuviese bien atendida.

L.- Tuvimos dificultades para conseguir el acercamiento de Chile a la FISEM. No habíamos logrado una comunicación fluida con ellos. Usted tuvo ahí un rol apreciable. ¿Cómo lo consiguió?

N.- Sí, ayer, al enviarle un e mail olvidé hacerle un comentario. Estoy escribiendo a algunas sociedades americanas para tratar apoyar su proyecto y de establecer un consenso con respecto a la FISEM. Le escribí a Ismenia Guzmán Retamal, presidente de la SOCHIEM (Chile).

Yo le había escrito hace tiempo pidiéndole su dirección postal para enviarle el Boletín de homenaje a Santaló pero no recibí respuesta. En cambio, me había escrito el secretario Miguel Díaz ofreciéndome difundir la VI Reunión por su página web. Ahora volví a escribirle para hablarle sobre la necesidad de buscar ese consenso de las Sociedades Americanas acerca de la adhesión a la FISEM y reiterándole el pedido de su dirección postal. Ella solo tenía una somera noticia sobre la FISEM a través de González Guajardo hace algunos años. Me comentó que había tenido problemas serios con su computadora y por eso no me había contestado. Supongo que eso mismo pasó con su mensaje. Me dijo que tenía sumo interés en recibir el Boletín y me pedía que le enviara referencias sobre la FISEM y cuál era la posible conveniencia de la adhesión de los países americanos. Le envié toda la documentación que yo disponía, el boletín de Santaló y le escribí seis páginas A4 donde le comentaba todos los beneficios que nuestra Sociedad recibía de ustedes y algunas de las ayudas que yo conocía que habían hecho a otras sociedades.

Buenos Aires, 2002

Cuando yo dictaba cursos de capacitación docente en distintas ciudades del país contratada por la Editorial Estrada, casi siempre iba acompañada de Angel Estrada (uno de los dueños) y el Gerente de Ventas. Yo dictaba mis cursos, mientras ellos realizaban sus negocios. Demás está decir que esos viajes se realizaban al más alto nivel ejecutivo: los mejores hoteles y los mejores restaurantes. De vez en cuando venían a observar mis clases y Angel Estrada me decía siempre que dado mi gran poder de convicción frente al auditorio, tendríamos que crear un partido político. También me lo decía un inspector que remedaba mi énfasis en las explicaciones.

Le cuento esto porque espero que ese poder aún me dure y con las seis páginas pueda convencer a Ismenia Guzmán de la conveniencia de adherirse a la FISEM. Si no lo consigo me sentiré muy defraudada.

Además le describí un retrato de su persona y le envié la fotografía donde está con la valija de los útiles que trajo para entregar en una escuela carenciada, para que lo conozca.

L.- ¿Y cómo acabó la historia?

N.- Me contó en un mensaje que habían discutido el asunto en la Comisión de gobierno de su Sociedad y que aceptaron adherirse a la idea. Ella no podía ir a Canarias y en su lugar iría Miguel Díaz que, desde luego, hizo un buen papel porque consiguió que una persona que nunca había estado presente en las varias reuniones previas que hicimos, saliera elegida vicepresidente de la FISEM…

L.- ¿Qué le parece el proyecto de la revista UNIÓN que hemos presentado Antonio Martinón y yo a la Junta de Gobierno de la FISEM?

N.- Ayer leímos en la Comisión Directiva de SOAREM vuestro proyecto y fue calificado de excelente. Si cada uno de sus ponentes es garantía de calidad, los dos juntos ¡ni qué hablar! Hemos analizado todos los puntos de la propuesta y nos parecen adecuados. La SOAREM está dispuesta a colaborar en la medida de sus posibilidades.

L.- Ya se ha editado el primer número de UNIÓN y nos gustaría conocer su opinión…

N.- Sí, estuve viendo ya la revista digital UNION. No imaginé que tuviera tal cantidad de artículos. Por supuesto no pude leerlos todos. Creo que es una buena oportunidad para todo aquel que quiera aportar sus ideas y para quienes deseen encontrar algo de su interés entre tal variedad de temas. Presiento que se va a convertir en un elemento importante de consulta.

L.- Cuando pusimos en marcha UNIÓN, necesitamos evaluadores para enviar los artículos que nos empezaron a llegar al equipo editor. Usted fue de las que más diligentemente nos contestó. Y además solía hacer comentarios muy positivos de las personas que nos proponía. Recuerdo, por ejemplo, la de Teresa Braicovich: Es una de nuestras mejores delegadas.

N.- Aquellas peticiones suyas coincidieron con su jubilación y por eso le escribí este mensaje en una de las ocasiones: Le envío rápidamente esta lista de tres nuevas evaluadoras para que lleguen antes de su tan lamentable e increíble jubilación que dejará un gran espacio vacío que, como dice la canción, no lo puede llenar la presencia de otro amigo… A mí me parecía que una vez jubilado iba a desaparecer y por eso mi prisa… Tengo en vista otra evaluadora. Todos han aceptado con mucho agrado. Le escribiré pronto. Tengo varias cosas que contarle.

II CAREM. Agosto 2000.

L.- Pues sí, Doña Nelly, me ha llegado la hora de la jubilación y aunque me costó tomar la decisión ya estoy en ese nuevo estado y, de momento, siento una cosa rara por no estar en el aula… supongo que se me pasará…

N.- Es natural que sienta "morriña" después de jubilarse yo también la sentí porque el aula es una pasión irrefrenable. Le reitero la invitación para la V CAREM a realizarse el 6, 7 y 8 de octubre. Como le dije en un e mail anterior deseo que usted elija libremente su actuación: conferencia o taller o ambas o bien otra actividad cualquiera. Le ruego que me conteste pues estamos preparando el 2° anuncio.

L.- El CIBEM de Oporto fue una oportunidad para poder vernos de nuevo pero…

N.- En cuanto a la reunión de Portugal, en Oporto, muy a pesar mío, no voy a poder asistir por razones de salud y por razones económicas. Hace muchos años que sueño con conocer Portugal por las referencias que tengo. Este año se está produciendo en nuestro país una inflación muy preocupante que obliga a reducir los gastos al mínimo, inclusive a las empresas. Aquí se dice que "los precios suben por el ascensor y los salarios por la escalera". En cuanto a mi salud, como consecuencia del nerviosismo y la angustia que pasé durante los dos últimos años 2003 y 2004 (que le contare en otro e mail) ahora estoy con un tratamiento neurólogico en el Instituto FLENI, el más conocido, y en un tratamiento para la depresión porque había entrado en un serio estado de abulia del que todavía no he terminado de salir.

Estaré presente en la convocatoria de correo electrónico para elegir secretario general de la FISEM. Reemplazarlo a usted es sumamente difícil.

L.- Gracias Doña Nelly por el testimonio y el ejemplo de su vida, por todo cuanto ha hecho por la Educación Matemática, por su entrega para crear la SOAREM, ofreciendo incluso su casa como sede de la misma y tantísimas cosas más.

Salta, abril 1996

Maldonado, agosto 1999

Agosto 2000

CIBEM, Cochabamba. Julio 2001

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 41-61
ISSN: 1815-0640

Dificultades en la formulación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología

Osmar Darío Vera; Carmen Díaz; Carmen Batanero

Resumen

En este trabajo, analizamos las respuestas dadas por un grupo de 224 alumnos de la Licenciatura en Psicología de la Universidad de Huelva a una pregunta abierta en la que tienen que plantear las hipótesis dentro de un problema de contraste estadístico de hipótesis. Usando como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la cognición matemática, se analizan las prácticas matemáticas implícitas en las respuestas, así como los objetos y procesos matemáticos utilizados, para descubrir los conflictos semióticos que producen respuestas inadecuadas. Como resultado se presenta una clasificación de diferentes conflictos semióticos relacionados con los objetos que intervienen en el planteamiento de las hipótesis estadísticas.

Abstract

In this paper, we analyze the responses by 224 Psychology students from the University of Huelva, Spain, to an open-ended question, where they need to set the hypotheses in a statistical test problem. Using the Onto-semiotic Approach to mathematical cognition we analyze the mathematical practices implicit in the responses to discover the semiotic conflicts that produce inadequate responses. As a result we present a classification of different semiotic conflicts related to objects that intervene in setting the statistical hypotheses.

Resumo

Neste trabalho, analisamos as respostas dadas por um grupo de 224 alunos daLicenciatura em Psicologia da Universidade de Huelva a uma pergunta aberta na qual tem que plantear as hipóteses dentro de um problema de contraste estatístico de hipóteses. Usando como marco teórico o Enfoque Ontosemiótico da cognição matemática, se analisam as práticas matemáticas implícitas nas respostas, assim como os objetos e processos matemáticos utilizados, para descobrir os conflitos semióticos que produzem respostas inadequadas. Como resultado se apresenta uma classificação de diferentes conflitos semióticos relacionados com os objetos que intervém na explitação das hipóteses estatísticas.

1. Introducción

La inferencia estadística ha jugado un papel destacado en diversas ciencias humanas, en especial en Educación y Psicología, que basan sus investigaciones en datos recogidos en muestras de poblaciones mayores, a las que quieren extender sus conclusiones. Sin embargo, el uso e interpretación de la estadística en estas investigaciones no son siempre adecuados, como se muestra en diversas revisiones (por ejemplo, en Harlow, Mulaik y Steiger, 1997; Ares, 1999; Borges, San Luis, Sánchez, y Cañadas, 2001; Batanero y Díaz, 2006).

Estos errores también se producen en estudiantes universitarios (ver, por ejemplo, Birnbaum, 1982; Vallecillos, 1994 o Krauss y Wassner, 2002), aunque la mayor parte de la investigación que analiza estos errores en alumnos universitarios se centra en la comprensión del concepto de nivel de significación α. Como se indica en Harradine, Batanero y Rossman (2011), la comprensión de la inferencia estadística requiere el aprendizaje de tres elementos interrelacionados: (a) el proceso de razonamiento; (b) los conceptos asociados y (c) los cálculos relacionados. Pero, mientras la realización de los cálculos asociados con los contraste des hipótesis es hoy día muy sencilla, gracias al software estadístico, la enseñanza de los conceptos y el razonamiento inferencial es mucho más compleja, lo que explica las muchas dificultades descritas en el uso de la inferencia.

En particular, en lo que se refiere al contraste de hipótesis, un punto clave es la comprensión del concepto de hipótesis y la diferenciación entre hipótesis nula y alternativa y entre sus propiedades. El correcto planteamiento de las hipótesis es el primer paso para realizar un contraste, pues un fallo en el planteamiento inicial de las mismas puede derivar en un error en la elección del contraste adecuado, del estadístico pertinente, de las regiones críticas y de aceptación y finalmente una decisión errónea sobre el rechazo o aceptación de la hipótesis.

En este trabajo abordamos este punto, mediante un estudio cualitativo del planteamiento de hipótesis que un grupo de 224 estudiantes de Psicología españoles, después de haber seguido un curso de inferencia, realiza para resolver un problema de contraste estadístico elemental. Apoyándonos en nociones teóricas del enfoque onto-semiótico (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), realizamos un análisis semiótico de las respuestas abiertas a dichas tareas, clasificándolas e identificando diferentes conflictos semióticos relacionados con el reconocimiento del campo a que pertenece el problema planteado, la comprensión de las propiedades de las hipótesis y la confusión entre algunos objetos matemáticos que intervienen en un contraste. Con ello completamos las investigaciones previas y proporcionamos información de utilidad para el profesor que le ayudará a planificar la enseñanza del tema.

A continuación presentamos los fundamentos del trabajo, el método, resultados y discusión. Se finaliza con unas reflexiones sobre la enseñanza de la inferencia.

2. Fundamentos del trabajo

Antecedentes

Como hemos indicado, los principales errores relacionados con la comprensión del contraste de hipótesis se refieren al nivel de significación α. La interpretación incorrecta más extendida de este concepto es cambiar los términos de la probabilidad condicional en la definición del nivel de significación α (probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta), interpretándolo como la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta, habiendo tomado la decisión de rechazarla (Birnbaum, 1982; Vallecillos, 1994; Lecoutre, 2006; Lecoutre, Lecoutre y Poitevineau, 2001; Haller y Kraus, 2002). El mismo intercambio de condicional se hace en la interpretación del valor *p* (probabilidad de obtener un valor igual o más extremo al dado, si la hipótesis es cierta) que se interpreta como probabilidad de que la hipótesis sea cierta si se obtuvo el valor dado del estadístico.

Esta interpretación incorrecta del nivel de significación y el *p*-valor se une, normalmente, a la confusión entre significación estadística y significación práctica, que implica significación estadística más un efecto experimental (diferencia del valor del parámetro en función de una cierta variable experimental) suficientemente elevado. Aunque la significación práctica, si el tamaño de muestra es suficiente, suele ir unida a la significación estadística, sin embargo podemos encontrar datos estadísticamente significativos con un pequeño efecto experimental, siempre que tomemos una muestra grande (Lecoutre, 1999).

Otro error de interpretación del *p*-valor es pensar que este valor indica la probabilidad de que el valor obtenido del estadístico se deba al azar, aunque esto no es cierto en general (Batanero, 2000). Por ejemplo, una diferencia significativa de las medias de un grupo experimental y otro de control puede ser debida a un tratamiento particular, pero también un grupo puede estar formado por individuos más inteligentes o con mejores medios. Otra confusión consiste en creer en la conservación del valor del nivel de significación cuando se realizan contrastes consecutivos en el mismo conjunto de datos (Moses, 1992).

Respecto al concepto de hipótesis un primer error es confundir la hipótesis de investigación con una de las hipótesis estadísticas (bien con la nula o con la alternativa). Chow (1996) analiza la diferencia entre ellas: Mientras que la hipótesis de investigación suele ser amplia y referirse a un constructo inobservable (por ejemplo, que el rendimiento de los estudiantes es diferente en dos grupos), la hipótesis *estadística*, hace referencia a una población de sujetos, descrita mediante un modelo matemático que se especifica por uno o varios parámetros. A pesar de esta diferencia, cuando encuentran un resultado significativo, algunos investigadores piensan que el resultado se puede extrapolar directamente a la hipótesis de investigación (Chow, 1996). En el ejemplo, supondría que si se rechaza que la puntuación media de los dos grupos de estudiantes en la prueba de rendimiento es igual, se podría deducir que el rendimiento (en general) de uno de los grupos es mayor que el del otro. Esto podría no ser cierto, puesto que la prueba usada de rendimiento podría favorecer a uno de los grupos y si se utilizase otra prueba diferente los resultados podrían variar.

Otro error frecuente entre alumnos e investigadores es la confusión entre las hipótesis nula y alternativa (Vallecillos, 1994). En el ejemplo, la hipótesis alternativa sería que la media de la distribución de puntuaciones en una prueba de rendimiento de uno de los grupos será mayor que la del otro. La hipótesis nula o de no efecto es la negación de la hipótesis alternativa (en el ejemplo, que la puntuación media obtenida en la prueba de rendimiento de los dos grupos es la misma). De acuerdo a Batanero (2000). la hipótesis nula se plantea para ser rechazada, mientras que la alternativa sería la negación de la anterior. La hipótesis nula se supone cierta y la distribución muestral del estadístico de contraste se determina aceptando que la hipótesis nula es cierta; cosa que no ocurre con la alternativa. A pesar de todas estas diferencias, Vallecillos (1994), en su trabajo en una amplia muestra de estudiantes de distintas especialidades (n=436) encontró un 13% aproximadamente de alumnos que confunden la hipótesis nula con la alternativa al plantear las hipótesis en problemas sencillos.

Vallecillos (1994) también encontró que aproximadamente un 20% de los estudiantes de su muestra no saben si la hipótesis del contraste se refiere al parámetro de la población o bien al estadístico muestral. Mientras que el parámetro de la población (por ejemplo la media de una distribución normal) es un valor constante y desconocido, el correspondiente estadístico (en el ejemplo, la media de una muestra tomada de dicha población) es conocido (pues obtenida la muestra se puede calcular) pero variable (ya que diferentes medias de la misma población pueden dar lugar a valores ligeramente distintos de las medias muestrales). Algunos estudiantes confunden estos dos conceptos, por lo que a veces plantean sus hipótesis utilizando el estadístico muestral, a pesar de que no tiene sentido plantear una hipótesis sobre un valor ya conocido (en el ejemplo, conocemos la media de la muestra).

Vallecillos en su trabajo planteó un problema abierto a los estudiantes de su muestra, encontrando que sólo el 26% de los participantes plantea correctamente las hipótesis. La autora describe los dos errores citados, pero no profundiza más en otros tipos de error en el planteamiento de hipótesis o en sus posibles causas. Por otro lado, realiza también una entrevista a 7 estudiantes considerados brillantes por sus profesores, indicando que todos ellos conciben el concepto de hipótesis como una afirmación sujeta a confirmación. Comprenden que las hipótesis nula y alternativa son complementarias pero tienen diferente papel en el contrate. Finalmente, aunque todos admiten en la entrevista que la hipótesis se debe referir a un parámetro, algunos de ellos plantean la hipótesis en función del estadístico muestral. Este error se describe asimismo en las investigaciones de Vallecillos y Batanero (1997) y es reportado en Castro Sotos et al. (2007).

Interesados por estos resultados y por el hecho de que la comprensión y correcto planteamiento de las hipótesis en un contraste es un requisito necesario para finalizar e interpretar correctamente todo el procedimiento, el objetivo de este trabajo es ahondar un poco más en la comprensión de este tema por parte de los estudiantes. Más concretamente, y utilizando el marco teórico que se describe a continuación, queremos analizar con mayor profundidad los posibles planteamientos incorrectos de las hipótesis en un problema de contrate elemental.

Marco teórico

En este trabajo nos basamos en ideas teóricas propuestas en el enfoque onto-semiórico (Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Roa, 2005; Godino, Batanero y Font, 2007) en los que se sugiere que el significado de los objetos matemáticos o estadísticos (por ejemplo, los conceptos de hipótesis nula y alternativa) es una entidad compleja, en la que intervienen los siguientes tipos de objetos matemáticos primarios:

- *Situaciones-problemas,* de donde surge el objeto: El concepto de hipótesis estadística surgirá de problemas de comparación de dos o más poblaciones, de estimación de parámetros o de toma de decisiones.

- *Lenguaje:* términos, expresiones, notaciones, gráficos que se usan en el trabajo matemático (por ejemplo los símbolos usados para denotar los parámetros μ, σ o los usados para hipótesis nula H_o y alternativa H_1)
- *Conceptos:* por ejemplo, población y muestra, estadístico y parámetro, región crítica y de aceptación.
- *Propiedades:* por ejemplo, que las hipótesis nula y alternativa son complementarias o que las hipótesis se formulan en función del parámetro.
- *Procedimientos;* como los requeridos para construir las regiones críticas y de aceptación.
- *Argumentos*: usados para justificar o explicar a otra persona las proposiciones y procedimientos.

Para un objeto matemático (en este caso la hipótesis estadística) Godino y colaboradores diferencian entre significado institucional y personal. El significado institucional incluye las prácticas matemáticas que una institución de enseñanza intenta transmitir al estudiante, mientras que el significado personal estaría formado por las prácticas matemáticas adquiridas por el estudiante, alguna de las cuáles podrían no coincidir con las pretendidas en la institución.

En las prácticas matemáticas se requiere un uso continuo del lenguaje matemático, pues los objetos matemáticos son inmateriales. Godino y Batanero (1998) señalan que, en las prácticas matemáticas, intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos al hacer matemáticas), que son representados en forma textual, oral, gráfica o simbólica. En el trabajo matemático los símbolos (significantes) remiten a entidades conceptuales (significados). Estas representaciones tienen mucha importancia para facilitar la enseñanza y el aprendizaje, pero a veces causan dificultades en los estudiantes. Godino, Batanero y Font (2007) toman de Eco (1995) la noción de función semiótica como una "correspondencia entre conjuntos", que pone en juego tres componentes:

- Un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo);
- Un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- Un criterio o regla de correspondencia (esto es un código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido).

Esta idea de función semiótica destaca el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática y sirve para explicar algunas dificultades y errores de los estudiantes. Godino, Batanero y Font (2007) denominan *conflicto semiótico* a las interpretaciones de expresiones matemáticas por parte de los estudiantes que no concuerdan con las que el profesor trata de transmitir. Los autores indican que estos conflictos semióticos producen equivocaciones en los estudiantes, que no son debidos a falta de conocimiento, sino a una interpretación incorrecta de expresiones matemáticas.

En este trabajo utilizaremos el método de análisis semiótico propuesto por estos autores, para analizar las respuestas incorrectas de los estudiantes de Psicología en el planteamiento de hipótesis estadísticas. Este análisis consiste en la identificación las prácticas matemáticas de los estudiantes al tratar de plantear las hipótesis, así como de los objetos y procesos matemáticos implicados. Como resultado se identificarán algunos conflictos semióticos de estos estudiantes, que se producen al realizar una función semiótica no adecuada desde el punto de vista institucional.

3. Método

La muestra estuvo formada por 224 alumnos de segundo año de la Licenciatura en Psicología de la Universidad de Huelva (edades comprendidas en su mayor parte entre los 19 y 20 años). Los datos fueros recogidos en dos cursos académicos sucesivos (2009-2010 y 2010 – 2011) dentro de la asignatura Análisis de Datos 2. Los estudiantes habían cursado el primer año la asignatura de Análisis de Datos 1 (que recoge conceptos elementales de estadística descriptiva y probabilidad) y en la asignatura de Análisis de Datos II se impartieron conceptos de muestreo, estimación de intervalos de confianza y contraste de hipótesis sobre medias y proporciones, así como análisis de varianza. Los estudiantes participantes estaban habituados a resolver problemas de contraste de hipótesis.

Como parte de una evaluación de la asignatura se les propuso el problema presentado en la Figura 1. La finalidad de la pregunta es evaluar la comprensión del estudiante de los conceptos de hipótesis nula y alternativa y su competencia para identificar las hipótesis adecuadas en esta situación. Para ello han de identificar la población y muestra en este problema, el parámetro poblacional y el estadístico de contraste, interpretar el enunciado para decidir si se trata de un contraste unilateral ó bilateral y finalmente escribir sus hipótesis usando la notación adecuada.

Problema: Se sabe por diversos trabajos de investigación que los niños de seis años tienen una velocidad lectora media de 40 palabras por minuto, con varianza igual a 16. Un profesor quiere saber si los niños de su clase se sitúan o no en la media de palabras por minuto. Para ello mide la velocidad de lectura en los 25 niños de su clase, obteniendo una media de 43 palabras por minuto. Define las hipótesis estadísticas adecuadas para realizar este contraste

Figura 1. Tarea planteada a los estudiantes de la muestra

Los estudiantes resolvieron la tarea por escrito e individualmente, sin poder consultar sus apuntes. Recogidos los datos, se llevó a cabo un análisis cualitativo en que, mediante un proceso cíclico e inductivo se compararon las respuestas semejantes entre sí, para llegar a una categorización. El proceso se repitió varias veces, y fue revisado independientemente por los tres autores del trabajo, discutiendo los casos de desacuerdo para mejorar la fiabilidad del proceso.

En primer lugar, se clasificaron las respuestas recogidas como correctas, e incorrectas. Dentro de las incorrectas se han diferenciado dos grandes categorías: aquellas respuestas en que las hipótesis se establecen en función del parámetro de la población; y aquellas en las que las hipótesis se plantean en función del estadístico muestral, pues quisimos diferenciar estos dos tipos de respuestas, encontradas por Vallecillos (1994) en su trabajo. A continuación, dentro de las respuestas incorrectas se diferenciaron diversas categorías, teniendo en cuenta la confusión entre contraste unilateral o bilateral, la confusión entre un contraste sobre un único parámetro y un contraste de comparación de dos parámetros y otros tipos de errores.

En lo que sigue presentamos estas categorías, mostrando y comentando un ejemplo en cada una de ellas. Para las respuestas correctas y algunas de las incorrectas, se muestra con detalle el análisis semiótico (que se realizó para todas las categorías pero que no se incluye en este trabajo por razones de espacio). En dicho análisis semiótico, utilizado, por ejemplo, en Godino, Font, Wilhelmi y Arrieche (2009), se reconstruye el proceso de razonamiento matemático que ha seguido el alumno para dar la respuesta, detallando las principales funciones semióticas establecidas por el alumno, como parte de dicho proceso y resaltando cuáles de dichas funciones semióticas son incorrectas (desde el punto de vista institucional), poniendo de manifiesto un conflicto semiótico del estudiante. Se hace una reconstrucción algo menos profunda del proceso de razonamiento seguido en el resto de las respuestas, destacando asimismo, los conflictos semióticos. Finalmente presentamos y discutimos los resultados.

4. Resultados y discusión

Análisis semiótico de las respuestas correctas

C. Hipótesis bien planteadas y notación correcta. En esta categoría el alumno plantea las hipótesis nula y alternativa correctas para un contraste bilateral sobre la media de la población. En la Tabla 1 se muestra un ejemplo de esta categoría desarrollado por uno de los estudiantes y se detalla un análisis semiótico. Observamos del análisis, que el estudiante interpreta correctamente el enunciado del problema traduciendo su enunciado, que presenta una situación de investigación, a un enunciado estadístico, identificando correctamente los datos dados en el problema. Reconoce que se trata de un problema de contraste sobre un único parámetro en una población y logra definir correctamente las hipótesis estadísticas nula y alternativa que surgen de la tarea. Ello implica una diferenciación entre los conceptos de población y muestra, así como los de parámetro y estadístico, y la elección del parámetro adecuado sobre el cual se plantean las hipótesis (la media poblacional).

Por otro lado, es capaz de diferenciar en el enunciado del problema el valor hipotético de la media poblacional que se quiere contrastar (40 palabras por minuto) y el dato dado sobre el valor la media de la muestra en el estudio (43 palabras en los 25 niños de la clase). También sabe discriminar que se trata de una prueba bilateral, para lo cual ha de interpretar la frase del enunciado “quiere saber si los niños de su clase se sitúan o no en la media” como equivalente a que se desea saber si se puede admitir que la media de la población es o no diferente del valor hipotético, sin indicación del signo de la diferencia. El alumno discrimina el diferente papel que juegan en el contraste la hipótesis nula y alternativa (mientras que la hipótesis nula se plantea para ser rechazada, el interés del investigador es apoyar la hipótesis alternativa); reconoce que el conjunto de valores del parámetro en la hipótesis nula y la alternativa han de cubrir el espacio paramétrico (por tanto han de ser complementarias) y en el contrate bilateral, la hipótesis nula es puntual. Finalmente muestra competencia en el uso de la notación matemática, tanto para las hipótesis nula y alternativa, la media poblacional y los símbolos de igualdad y desigualdad.

Tabla 1. Análisis semiótico de una respuesta correcta

Expresión	Contenido
$H_0 \equiv \mu_1 = 40$ $H_1 \equiv \mu_1 \neq 40$	- El alumno lee el enunciado (proceso de interpretación) e identifica correctamente que el parámetro a contrastar es la media poblacional (particulariza al problema los conceptos de parámetro, población y media poblacional). - Identifica correctamente el valor hipotético del parámetro (particularización de un concepto). - Identifica el problema como contraste de hipótesis sobre una media (reconoce un tipo de problema y las prácticas matemáticas necesitadas en su solución). - Reconoce en la situación un contraste bilateral (reconoce un subtipo dentro del tipo de problemas anterior). - Traduce la expresión "se sitúan en la media" a notación matemática $\mu = 40$ (proceso de interpretación y cambio de representación; particularización del concepto "igualdad matemática"). - Traduce la expresión "no se sitúan en la media" a notación matemática $\mu \neq 40$ (proceso de interpretación y cambio de representación; particularización del concepto "desigualdad matemática"). - Discrimina entre hipótesis nula y alternativa (reconoce las propiedades matemáticas asociadas y las particulariza a la situación). - Expresa las hipótesis en notación adecuada (particularización de un concepto y proceso de representación). - Reconoce que hipótesis nula es puntual (aplica una propiedad); lo expresa mediante la igualdad (proceso de representación) - Reconoce que la hipótesis nula es la contraria a la que el investigador quiere probar (propiedad). - Reconoce que la hipótesis nula y alternativa son complementarias; por ello plantea la hipótesis alternativa mediante una desigualdad que excluye el valor de la hipótesis nula.

Como observamos en el análisis semiótico, el estudiante ha de poner en relación diferentes conceptos, propiedades y procedimientos (población, muestra, estadístico, parámetro), así como aplicarlos, mediante un proceso de particularización al contexto del problema. Debe realizar procesos matemáticos de interpretación (del enunciado y datos), reconocimiento (de conceptos matemáticos y sus propiedades), particularización (de dichos conceptos, propiedades o procedimientos a la situación del enunciado) y expresión matemática (de las hipótesis, los valores hipotéticos del parámetro en cada una de ellas, la igualdad y desigualdad. Este análisis sugiere también la complejidad de un proceso que es aparentemente simple nos servirá para explicar los errores de los estudiantes, que se producen por fallos en la interpretación del enunciado, falta de reconocimiento de objetos o procesos o fallos de particularización o expresión matemática.

Respuestas incorrectas que plantean las hipótesis sobre el parámetro poblacional

Seguidamente se describen las respuestas que, siendo incorrectas, muestran la discriminación entre parámetro y estadístico, discriminación que no es sencilla según Schuyten (1991). Los errores encontrados dentro de este grupo de estudiantes se producen porque (a) se confunde el contraste unilateral y bilateral; (b) en lugar de plantear un problema de contraste de la media en una única población, se plantea un contraste de comparación de dos medias en poblaciones diferentes; o (c) las dos hipótesis no cubren el espacio paramétrico.

I1. Plantea las hipótesis sobre la media de la población, pero define un contraste unilateral. En esta categoría hemos clasificado a todos los estudiantes que emplean una prueba de hipótesis de tipo unilateral (de una sola cola), tanto si toman la hipótesis alternativa a la derecha como hacia la izquierda de la nula. Estos alumnos usan simbología adecuada tanto para la hipótesis nula como para la alternativa, el parámetro elegido es el correcto, y el valor sobre el cual se basa la conjetura también es correcto. En la Tabla 2, se muestra un ejemplo de este tipo de respuesta. Aunque el alumno reconoce el parámetro y lo diferencia del estadístico, no interpreta correctamente el enunciado, y aparece un primer conflicto, pues no relaciona adecuadamente la expresión "igual o distinto a la media" como expresión verbal de un contraste bilateral y las correspondientes hipótesis. Ello le lleva a considerar una prueba unilateral derecha, aunque utiliza igualdad para la hipótesis nula, es decir, reconociendo que tiene que ser puntual. También establece el sentido de la hipótesis alternativa de acuerdo a los datos, es decir, reconoce que esta hipótesis es la que le interesa al investigador probar, lo que indica que comprende la lógica del contraste, basada en la refutación de la hipótesis nula (Batanero, 2000). Otro conflicto latente en esta respuesta es no comprender que las hipótesis nula y alternativa han de ser complementarias y cubrir el espacio paramétrico.

Tabla 2. Análisis semiótico de un ejemplo de contraste unilateral

Expresión	Contenido
$H_0 \equiv \mu_1 = 40$ $H_1 \equiv \mu_1 > 40$	- Al igual que en la categoría C, el alumno lee el enunciado e identifica correctamente que el parámetro a contrastar es la media poblacional; también identifica correctamente el valor hipotético del parámetro y el problema como contraste de hipótesis sobre una media - Discrimina entre hipótesis nula y alternativa; reconoce asimismo que hipótesis nula es puntual, expresándolo mediante la igualdad - Expresa las hipótesis en notación adecuada (particularización de un concepto y proceso de representación). - Reconoce que la hipótesis nula es la contraria a la que el investigador quiere probar (propiedad). - Aparece un *conflicto* de interpretación del enunciado al no traducir la expresión "no se sitúan en la media" a notación matemática $\mu \neq 40$. Esto lleva a proponer un contraste unilateral, (fallo al reconocer el campo de problemas) - Sin embargo reconoce que la hipótesis alternativa es la que interesa probar al investigador, pues establece la desigualdad en el sentido de los datos (particularización de una propiedad) - Un segundo *conflicto* es no reconocer que la hipótesis nula y alternativa son complementarias (fallo en reconocer una propiedad) - Expresa las dos hipótesis, la igualdad y desigualdad en notación adecuada (conceptos y proceso de expresión)

I2. Plantea hipótesis sobre la diferencia de dos medias poblacionales, bilateral. En esta categoría están los estudiantes que, habiendo dado una notación correcta tanto a la hipótesis nula como la alternativa, han especificado la prueba de hipótesis como si tuviesen que comparar dos medias poblacionales, con una prueba bilateral, aunque sólo hay una población en los datos. Han usado como parámetros la media poblacional para cada una de las poblaciones supuestas. Un ejemplo se presenta y analiza en la Tabla 3. En dicho ejemplo, el alumno realiza una interpretación incorrecta del enunciado, asumiendo que existen dos poblaciones, la hipotética y aquella de donde se tomó la muestra de alumnos. El alumno confunde una parte (muestra) con la población que es un todo. En este sentido podemos recordar la opinión de White (1980) acerca de la dificultad que tienen algunos investigadores para identificar la población bajo estudio al aplicar la inferencia. Por otro lado, si el enunciado correspondiese a la diferencia de medias en dos poblaciones, se debieran haber dado datos sobre dos muestras diferentes; pero el alumno no es capaz de reconocer que sin estos datos no podría resolverse el problema. En esta conducta se observa una práctica que, de acuerdo a Diaz (2007), es errónea y consiste en fijar las hipótesis después de recoger los datos, pues se toma como hipótesis un valor obtenido a partir de los datos. La autora indica que en estos casos el nivel de significación real del estudio podría no corresponder al nivel fijado.

Asociado al conflicto anterior, el estudiante confunde también el estadístico (media muestral) con un parámetro (media de una segunda población). Este resultado apoya lo expuesto por Schuyten (1991), quien indica que los estudiantes confunden los diversos planos en que se aplica un mismo concepto en inferencia (en el problema, el concepto de media, se aplica en dos planos diferentes: la media muestral y la poblacional). Como consecuencia de todo lo anterior, el alumno confunde el campo de problemas, planteando un contraste de hipótesis sobre la diferencia de dos medias. La notación al plantear estas hipótesis sería adecuada, y el alumno también discrimina la hipótesis nula como puntual y la hipótesis alternativa como aquella que quiere probar. Además, el conjunto de valores supuesto en las dos hipótesis cubren el espacio paramétrico, es decir, las hipótesis son complementarias.

Tabla 3. Análisis semiótico de un ejemplo de contraste de comparación de dos medias

Expresión	Contenido
$H_0 \equiv \mu_1 = \mu_2$ $H_1 \equiv \mu_1 \neq \mu_2$	- El alumno realiza una interpretación incorrecta del enunciado, asumiendo que existen dos poblaciones, la hipotética y aquella de donde se tomó la muestra de alumnos (proceso incorrecto de interpretación). - Un primer *conflicto* es la confusión entre población y muestra, tomando la muestra de niños de la clase como una segunda población (confusión de conceptos). - Otro *conflicto* relacionado con el anterior consiste en confundir la media muestral que es un estadístico con una segunda media poblacional, que sería un parámetro (discriminación inadecuada de conceptos). - Todo ello causa un nuevo *conflicto* al confundir el contrate adecuado (contraste sobre una media) con otro inadecuado (contraste de diferencia de medias de dos poblaciones) (confusión de campo de problemas). - El alumno discrimina la hipótesis nula como puntual y la hipótesis alternativa como aquella que quiere probar. Plantea asimismo hipótesis complementarias que cubren el espacio paramétrico (particularización correcta de propiedades y discriminación de conceptos). - La notación para las hipótesis y la igualdad /desigualdad sería adecuada (expresión y particularización de conceptos).

I3. Plantea la hipótesis como de diferencia de dos medias poblacionales, unilateral. En esta categoría hemos reunido a los estudiantes que habiendo usado notación correcta tanto para la hipótesis nula como la alternativa, han establecido hipótesis como si se tratara de una prueba de dos medias poblacionales, contraste unilateral. Un ejemplo correspondiente a esta categoría sería el siguiente:

$$H_0 \equiv \mu_1 \geq \mu_2$$
$$H_1 \equiv \mu_1 < \mu_2$$

En este ejemplo, cuyo análisis semiótico no reproducimos, pues es muy similar al de la categoría I2, aparecen los conflictos ya señalados (confusión de la muestra con una segunda población hipotética, del estadístico y parámetro y en consecuencia del campo de problemas). Se añade un conflicto que ya apareció en la categoría I1, y es la interpretación incorrecta que lleva a la selección de un contraste unilateral (en lugar de bilateral). En este ejemplo, sin embargo, las hipótesis planteadas son complementarias y se cubre el espacio paramétrico.

I4. Se plantea una hipótesis alternativa puntual, y por tanto no se cubre el espacio paramétrico. En esta categoría agrupamos a los estudiantes que plantean hipótesis puntuales, tanto para la nula, como para la alternativa. Un ejemplo se presenta y analiza en la Tabla 4. Aunque el estudiante interpreta correctamente el enunciado, en relación con la hipótesis nula, identificando que se refiere a la media de la población, así como el valor hipotético y usado la notación adecuada para la hipótesis nula y alternativa, presenta diferentes conflictos. En primer lugar ha escogido un valor puntual en la hipótesis alternativa y, por tanto, no llega a cubrir el espacio paramétrico al establecer ambas hipótesis, que no son complementarias. Por otro lado, toma como valor de la hipótesis alternativa el valor de la media muestral; por tanto no reconoce una propiedad: que las hipótesis se plantean en función de los parámetros y no de los estadísticos. Subyacente a este podría haber una confusión entre media muestral y media poblacional (o bien en forma más general, entre estadístico y parámetro), confusión ya descrita por Schuyten, 1991.

Tabla 4. Análisis semiótico de un ejemplo con hipótesis alternativa puntual

Expresión	Contenido
$H_0 \equiv \mu = 40$ $H_1 \equiv \mu = 43$	- Al igual que en la categoría C1, el alumno lee el enunciado e identifica correctamente que el parámetro a contrastar es la media poblacional; también identifica correctamente el valor hipotético del parámetro y el problema como contraste de hipótesis sobre una media. - Plantea la hipótesis nula, con notación adecuada, reconociendo que es la contraria a la que el investigador quiere probar (particularización de una propiedad; proceso correcto de representación). - Aparece una interpretación errónea del enunciado al no traducir la expresión “no se sitúan en la media” a notación matemática $\mu \neq 40$. Ello lleva a un *conflicto* en la identificación de la hipótesis alternativa. - Asume que el valor dado de la media muestral es el valor hipotético bajo la hipótesis alternativa; aunque reconoce que dicha hipótesis es la que interesa probar al investigador. Ello le lleva a plantear una hipótesis alternativa puntual (*conflicto* en un proceso de interpretación) - Otro *conflicto* es no reconoce que las hipótesis se plantean en función de los parámetros y no de los estadísticos (particularización incorrecta de una propiedad) - Podría haber un *conflicto* subyacente entre población y muestra o estadístico-parámetro (conflicto en la confusión deconceptos) - Otro c*onflicto* es no reconocer que la hipótesis nula y alternativa son complementarias (fallo en reconocer una propiedad)

I5. Plantea la hipótesis nula y alternativa mediante intervalos no disjuntos, que, además no cubren el espacio paramétrico. Un ejemplo en esta categoría, cuyo análisis semiótico no incluimos, por ser muy similar a la I4 es, el siguiente:

$$H_0 \equiv \mu > 40$$
$$H_1 \equiv \mu \geq 43$$

Estos estudiantes han identificado correctamente que se trata de un contraste sobre la media de una única población, pero no reconocen que la hipótesis nula ha de ser puntual. Por otro lado, toman como valor de la hipótesis alternativa el valor de la media muestral; por tanto no reconocen que las hipótesis se plantean en función de los parámetros y no de los estadísticos. Como hemos indicado, esto puede implicar la confusión descrita por Schuyten (1991) entre media muestral y media poblacional (o bien en forma más general, entre estadístico y parámetro). No identifican que se trata de un contrate bilateral; pues se plantea la hipótesis alternativa usando únicamente los valores mayores que uno hipotético. Más aún, aparece un nuevo conflicto no presente en las categorías anteriores, pues usa la misma dirección en la desigualdad en las hipótesis nula y alternativa, lo que implica, por un lado, que dichas hipótesis no son complementarias y por otro, que no se cubre el espacio paramétrico. La notación utilizada por el estudiante es correcta.

I6. Confunde la variable al identificar la hipótesis. Incluímos a continuación un ejemplo, en el cuál el alumno reconoce que se trata de un problema de contraste sobre la media de la población y más aún que se trata de un contraste bilateral, pues establece sus hipótesis nula y alternativa en forma complementaria, siendo la hipótesis nula puntual y cubriendo el espacio paramético:

$$H_0 \equiv \mu = 6$$
$$H_1 \equiv \mu \neq 6$$

El estudiante usa la notación adecuada para ambas hipótesis, pero confunde la variable de interés en el estudio, pues proponen un contraste sobre la edad de los alumnos en la muestra (fallo en el proceso de interpretación del enunciado). Por otro lado, el alumno no perciba que la edad de los alumnos es un dato constante en el problema; por tanto no necesita ser contrastado. Puesto que la edad media es un estadístico muestral, de nuevo aparece el conflicto consistente en confundir parámetro y estadístico (o población y muestra).

Categorías de respuestas incorrectas que usan explícitamente la media muestral en el planteamiento de las hipótesis

Otra serie de respuestas plantea las hipótesis directamente en base a la media muestral. Este error fue descrito por Vallecillos (1994) en su estudio, así como en Vallecillos y Batanero (1997). Aunque en algunas categorías anteriores (I4, I6) resaltamos que los alumnos podrían tener esta confusión, en las que siguen los estudiantes la muestran en forma explícita, al usar conscientemente la notación correspondiente a la media muestral en el establecimiento de sus hipótesis. A continuación describimos algunas categorías en este apartado.

I7. Plantea como hipótesis la igualdad entre media muestral y poblacional, usando un test bilateral (ver ejemplo y análisis en Tabla 5). En esta categoría hemos clasificado a los estudiantes que al establecer las hipótesis estadísticas igualan la media poblacional (μ) a la muestral ($\bar{x}$), usando explícitamente el símbolo correcto de la media muestral. El estudiante ha interpretado el enunciado, identificando correctamente que se trata de una prueba bilateral sobre el parámetro media (μ). Plantea una hipótesis nula puntual y una alternativa complementaria, que en conjunto cubren el espacio paramétrico. Por tanto discrimina las propiedades de estas dos hipótesis, eligiendo, además, como alternativa la que desea probar. Sin embargo, no es capaz de identificar el valor hipotético del parámetro a partir del enunciado (43) y establece la hipótesis como igualdad o desigualdad con la media muestral. No queda claro de la respuesta si el alumno ha identificado o no el valor numérico particular que se proporciona en la tarea para la media muestral (43). En todo caso, no tiene sentido hipotetizar que la media de la población sea exactamente igual a la obtenida en la muestra, pues, por un lado, la media muestra es una variable aleatoria, y la respuesta del estudiante implica que la concibe como constante (no reconocimiento de una propiedad). Por otro lado, al considerar la media muestral como constante, podría no percibir la distribución muestral del estadístico, un concepto importante para comprender la inferencia según Harradine, Batanero y Rossman (2011). El alumno usa una notación adecuada al plantear sus hipótesis.

Tabla 5. Análisis semiótico de ejemplos en la categoría I7

Expresión	Contenido
$H_0 \equiv \mu = \bar{x}$ $H_1 \equiv \mu \neq \bar{x}$	- El alumno lee el enunciado (proceso de interpretación) e identifica correctamente que el parámetro a contrastar es la media poblacional (particulariza al problema los conceptos de parámetro, población y media poblacional). - Identifica el problema como contraste de hipótesis sobre una media (reconoce un campo de problema). - Reconoce en la situación un contraste bilateral (reconoce un subtipo dentro del campo de problemas anterior). - *Conflicto* al no identificar el valor hipotético del parámetro (particularización de un concepto). - *Conflicto al plantear la hipótesis como igualdad entre la media poblacional y la muestral.* Puede encubrir otro *conflicto* consistente en no apreciar la variabilidad de la media muestra, es decir, el hecho de que es una variable aleatoria y no una constante. Además, aparece la confusión entre media muestral y poblacional. - Discrimina entre hipótesis nula y alternativa (reconoce las propiedades matemáticas asociadas y las particulariza a la situación). - Expresa las hipótesis en notación adecuada (particularización de conceptos y proceso de representación). - Reconoce que hipótesis nula es puntual (aplica una propiedad); lo expresa mediante la igualdad (proceso de representación); asimismo reconoce que la hipótesis nula es la contraria a la que el investigador quiere probar (propiedad) y que las hipótesis son complementarias.

I8. Plantea como hipótesis la igualdad entre media muestral y poblacional, usando un test unilateral. Un ejemplo en esta categoría, muy similar a la anterior (por lo que no repetimos el análisis semiótico) es el siguiente:

$$H_0 \equiv \mu \geq \bar{x}$$
$$H_1 \equiv \mu < \bar{x}$$

Como en la categoría I7, el alumno explícitamente establece las hipótesis estadísticas comparando la media poblacional (μ) a la muestral ($\bar{x}$). El estudiante ha interpretado el enunciado, identificando correctamente que se trata de una prueba sobre el parámetro media (μ). Plantea también una hipótesis nula y una alternativa complementaria, que en conjunto cubren el espacio paramétrico, eligiendo, además, como alternativa la que desea probar. Tampoco identifica el valor hipotético del parámetro a partir del enunciado, ni queda claro de la respuesta si el alumno ha identificado o no el valor numérico particular de la media muestral (43). Presenta por tanto los conflictos consistentes en considerar la media muestral como constante y no apreciar su distribución. Además se une el conflicto señalado en otras categorías de congfundir el campo de problemas (contraste bilateral con unilateral). El alumno usa una notación adecuada al plantear sus hipótesis.

I9. Plantea como hipótesis la igualdad de la media de la muestra con el valor hipotético del parámetro en la población. Esta categoría reúne varios de los conflictos ya señalados en la I7 e I8, por lo que no repetimos el análisis semiótico. Un ejemplo es el siguiente:

$$H_0 \equiv \bar{x} = 40$$
$$H_1 \equiv \bar{x} \neq 40$$

Como en las categoría I7 e I8, el alumno utiliza correcta y explícitamente el símbolo de la media muestral ($\bar{x}$) al establecer sus hipótesis. El estudiante ha interpretado el enunciado, identificando que se trata de una prueba sobre la media, pero no sabemos si discrimina o no la media muestral (estadístico) de la poblacional (parámetro), es decir, el conflicto del estudiante podría ser únicamente notacional y no conceptual, aunque esto no podemos deducirlo de su respuesta. El estudiante ha reconocido que se trata de un contraste bilateral y plantea una hipótesis nula y una alternativa complementaria, que en conjunto cubren el espacio paramétrico, eligiendo, además, como alternativa la que desea probar. Ha reconocido correctamente el valor hipotético del parámetro a partir del enunciado, aunque, como hemos indicado, no queda claro si lo asigna realmente al parámetro o al estadístico. El alumno usa una notación adecuada al plantear sus hipótesis.

I10. Plantea la hipótesis como contrate de diferencia de dos medias muestrales. Esta categoría tiene relación con la I2 (pues el alumno identifica incorrectamente el campo de problemas como comparación de dos medias) y con las I7 a I9 (pues explícitamente usa la notación de media muestral). No realizamos en consecuencia el análisis completo de la categoría, sino sólo un comentario resumido de las diferencias con las anteriores. Un ejemplo es el siguiente:

$$H_0 \equiv \bar{x}_1 = \bar{x}_2$$
$$H_1 \equiv \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$$

Como en la categoría I2, el estudiante interpreta incorrectamente, del enunciado, que tiene que comparar dos medias. Identifica correctamente que se trata de una prueba bilateral. Posiblemente, como en I2, el alumno asume incorrectamente que existen dos poblaciones, la hipotética y aquella de donde se tomó la muestra de alumnos. Por lo cual muestra la confusión ya señalada de población y muestra (estadístico y parámetro) y no reconoce que con los datos del problema no se puede realizar un contraste de comparación de dos medias. Además, se une el conflicto señalado en las categorías I7, I8 e I9 consistente en establecer las hipótesis estadísticas en base a la media muestral ($\bar{x}$). En consecuencia podría presentar los conflictos consistentes en considerar la media muestral como constante y no apreciar su distribución o bien podría simplemente tratarse de un conflicto notacional. La notación al plantear estas hipótesis sería adecuada, y el alumno también discrimina la hipótesis nula como puntual y la hipótesis alternativa como aquella que quiere probar. Además, las hipótesis son complementarias.

En la Tabla 6 presentamos las frecuencias y porcentajes de respuestas en cada una de las categorías. Observamos que la respuesta más frecuente es plantear correctamente las hipótesis estadísticas, habiendo sido estos estudiantes, por tanto capaces de interpretar el enunciado, identificar el campo de problemas, reconocer el valor hipotético del parámetro y escribir las hipótesis adecuadas con una notación correcta. No obstante, este grupo supone sólo un 33% de los estudiantes, lo que es preocupante, pues este primer apartado va a condicionar el resto del problema.

Tabla 6. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas para cada categoría

Parámetro usado para definir la hipótesis	Categorías	Frecuencia	%
Media Población	C. Correctas	74	33
	I1. Contraste unilateral	13	5,8
	I2. Diferencia medias poblacionales. Bilateral	23	10,3
	I3. Diferencia medias poblacionales. Unilateral	5	2,2
	I4. Hipótesis alternativa puntual	17	7,7
	I5. Intervalos no disjuntos	2	1
	I6. Confusión en variable	1	0,4
Media muestral	I7. Compara media poblacional y muestral. Bilateral	33	14,7
	I8. Compara media poblacional y muestral. Unilateral	3	1,3
	I9. Compara media muestral con valor hipotético	9	4
	I10. Diferencia entre dos medias muestrales	1	0,4
	I11. No relacionadas con la tarea	6	2,7
	Sin responder	37	16,5
	Total	224	100,

Se han clasificado a las respuestas incorrectas relacionadas con la tarea en dos grandes grupos. En primer lugar, hemos considerado las respuestas incorrectas en las que el estudiante usa el parámetro poblacional para establecer las hipótesis estadísticas (27,4% de estudiantes). Estos estudiantes comprenden que las hipótesis se plantean en términos de parámetros, discriminando adecuadamente los conceptos de estadístico y parámetro. Un segundo grupo de estudiantes (23,1%) no realiza esta discriminación y usan el estadístico muestral al establecer las hipótesis, mostrando el error señalado por Schuyten (1991).

Un 19,2% de estudiantes no responde el problema o da respuestas no relacionadas (por ejemplo, indica que no se conoce la varianza de la población, pero no plantea hipótesis) y el porcentaje total de alumnos que plantea incorrectamente las hipótesis es 50,5%. Este porcentaje es algo mayor al obtenido por Vallecillos (1994) en una pregunta sobre el planteamiento de la hipótesis (41,9% de respuestas incorrectas), aunque en la muestra de la autora se incluían estudiantes de varias especialidades, en algunas de las cuáles (matemáticas, informática) la formación de los alumnos podría ser mayor. En todo caso el porcentaje de respuestas incorrectas es demasiado alto y podría ser decisivo a la hora de la resolución del problema.

En el análisis semiótico llevado a cabo, se han explicado las respuestas incorrectas en términos de conflictos semióticos, que, de acuerdo a nuestro marco teórico aparecen cuando un estudiante asigna a una expresión u objeto matemático un significado personal que no está de acuerdo con el significado institucional que el profesor trata de transmitir. Más en concreto se han encontrado los siguientes conflictos:

Conflictos de reconocimiento del campo de problemas

- *Confusión entre contraste unilateral y bilateral* (que aparece en las categoría I1, I3, I5, I8). Un 10,3% de los estudiantes presenta este conflicto, que implica no reconocimiento del campo de problemas que sería adecuado para su solución (contraste bilateral sobre la media de una población). Ello es debido a no haber sido capaz de interpretar correctamente la frase “se sitúan o no sobre la media”, dada en el enunciado en lenguaje coloquial y representarla en un lenguaje simbólico. Es decir, no se establece correctamente la correspondencia entre la frase dada y el contraste pedido.
- *Reconocer incorrectamente el problema como un contraste de comparación de dos medias* (que aparece en las categorías I2, I3, I10), presente en el 12,9% de los estudiantes. El alumno asume que existen dos poblaciones, la hipotética y aquella de donde se tomó la muestra de alumnos sin reconocer que, para resolver dicho problema se debieran haber dado datos sobre dos muestras diferentes. Pensamos que en este conflicto interviene la dificultad que según White (1980) se tiene para identificar la población bajo estudio al aplicar la inferencia.

Conflictos de reconocimiento de propiedades de las hipótesis

- *Conflicto al plantear una hipótesis alternativa puntual* (que aparece en la categoría I4) con un total de 7,7% de respuestas. En esta conducta subyace una confusión entre los diferentes papeles que en el contraste estadístico juegan las dos hipótesis, pues la hipótesis alternativa se debe plantear como negación de la nula, y ser complementarias, cubriendo el espacio paramétrico para poder tomar una decisión.
- *Conflicto al definir hipótesis no complementarias*, que, por tanto, como en el caso anterior no cubren el espacio paramétrico y podrían llevar a no poder tomar una decisión (que aparece en las categorías I4, I5; en total 8,7% de respuestas).

- *Dos estudiantes plantean hipótesis disjuntas* (I5), y por tanto no reconocen que una hipótesis ha de ser negación de la otra. En este caso, tampoco se podría tomar una decisión adecuada pues hay valores comunes para ambas hipótesis. Observamos que en ninguno de estos tres últimos conflictos podría cumplirse el principal objetivo de un contraste de hipótesis que según Valera, Sánchez, Marín y Velandrino (1998) es tomar una de las dos siguientes decisiones: o aceptar la hipótesis nula (sin llegar a confirmar el postulado establecido en la alternativa) o bien rechazar la hipótesis nula, aceptando la alternativa.
- *Plantear las hipótesis en función del estadístico muestral* (un 28,6% de estudiantes en las respuestas I4, I6, I7, I8, I9, I10), no reconociendo que el estadístico es una variable aleatoria y por tanto, tiene una distribución de probabilidad asociada.

Conflictos de confusión de otros objetos que intervienen en el contraste

- *Confusión entre el estadístico muestral y el parámetro* correspondiente a la media poblacional (que aparece en las categorías I2, I3, I4, I6, I9 e I10; en total 25%, de los estudiantes de la muestra). Vallecillos (1994) encontró que un 18,7% confunde parámetro muestral con parámetro poblacional (11,1% en nuestro caso).
- Asociada a la anterior, y en las mismas categorías el alumno podría *confundir una parte (muestra) con la población* que es un todo, lo que apoya la sugerencia de Schuyten (1991) de que los estudiantes confunden los diferentes planos de uso de un mismo concepto en estadística. Desde el punto de vista de nuestro marco teórico, el error se produce por un proceso de generalización indebido.

Otros

- Un alumno realiza una interpretación incorrecta del enunciado, *confundiendo la variable que está siendo contrastada* (I6). En este caso, el dato sobre la edad de los alumnos, que de hecho no es necesario para resolver el problema ha ocasionado una confusión al estudiante. Por la baja frecuencia este conflicto no es importante, aunque sugiere la dificultad de interpretación del enunciado del problema, incluso para estudiantes universitarios.

Es un dato interesante contar con muy pocos alumnos de la muestra que no contestan el ítem, sólo del 16,5%, mientras que la investigación de Vallecillos no lo hace un 32% de la muestra. Esta diferencia de porcentajes podría deberse a una mejor enseñanza o bien a que en nuestro caso el cuestionario se pasó en una situación de examen, para asegurarnos que los estudiantes habían estudiado a fondo el tema.

Conclusiones

En nuestro trabajo no se ha presentado la confusión entre hipótesis nula y alternativa que Vallecillos (1994; 1999) encontró un 13% aproximadamente de alumnos en su estudio. Sin embargo si hemos encontrado alumnos que plantean hipótesis alternativas puntuales o hipótesis que en su conjunto no cubren el espacio paramétrico, de modo que si hay coincidencia con la autora citada en que los alumnos confunden algunas propiedades de las hipótesis nula y alternativa, aunque no las hayan intercambiado entre sí en nuestra investigación.

Una de los conflictos que se presenta en mayor número de respuestas es la confusión entre estadístico y parámetro, así como no reconocer que el estadístico es una variable aleatoria. Como indican Harradine, Batanero y Rossman (2011), el concepto de distribución muestral es mucho más abstracto que los de distribución de una población o de una muestra, por lo que suelen ser muy difícil de comprender para los estudiantes. Esta debiera ser un punto para insistir en la enseñanza de la inferencia. Siguiendo la sugerencia de estos autores, sería importante animar a los estudiantes a razonar sobre los comportamientos hipotéticos de más de una muestra tomadas de la misma población (usando poblaciones conocidas por los estudiantes). Estas conjeturas podrían contrastarse con actividades que involucren la toma repetida de muestras aleatorias, utilizando alguna de las muchas aplicaciones interactivas disponibles en Internet.

Otra dificultad que se han mostrado al plantear las hipótesis son identificar la población bajo estudio al aplicar la inferencia (White, 1980). Hagod (1970) indica que este es un punto oscuro para muchos estudiantes, pues en los estudios descriptivos no se precisa el uso de la inferencia y en los casos prácticos de muestreo aleatorio repetido (como en control de calidad) la pertinencia de la inferencia es clara. Sin embargo lo habitual es tomar una única muestra y generalizar a una población (universo hipotético) que no está claramente definida; se trataría de la población que se obtendría al repetir ilimitadamente la investigación en las mismas condiciones temporales, culturales, sociales, y cognitivas. Otro problema ya analizado por Vallecillos (1994). se plantea a la hora de diferenciar entre contrastes unilaterales y bilaterales.

En resumen, el presente trabajo aporta nueva información para apoyar la necesidad de revisar la enseñanza de la inferencia estadística y más concretamente, en lo relativo al planteamiento de hipótesis estadísticas, un punto al cuál no se ha prestado la debida atención. Además de que, en sí mismos, estos errores son fundamentales, provocan dificultades a la hora de proseguir con la tarea. Por ejemplo, el hecho de plantear una hipótesis unilateral en lugar de una bilateral hará que las regiones de aceptación y de rechazo estén mal construidas y por tanto, la decisión que tome el alumno en cuanto a la aceptación o rechazo de las hipótesis sea incorrecta. Sería entonces necesario ayudar a los estudiantes en su construcción del razonamiento inferencial, comenzando con el planteamiento de actividades informales de inferencia, como propone Rossman (2008) antes de iniciar el aprendizaje formalizado de los contrastes de hipótesis. Esperamos en consecuencia que nuestros resultados contribuyan a la mejora de la enseñanza del tema y animen a otros investigadores a proseguir analizando las dificultades de los estudiantes en la inferencia estadística.

Agradecimientos:

Proyecto EDU2010-14947 (MCINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Ares, V. M. (1999). La prueba de significación de la «hipótesis cero» en las investigaciones por encuesta*. Metodología de Encuestas, 1*, 47-68.

Batanero, C. (2000). Controversies around the role of statistical tests in experimental research. *Mathematical Thinking and Learning, 2* (1-2), 75-98.

Batanero, C. y Díaz, C. (2006). Methodological and didactical controversies around statistical inference. *Actes du 36iémes Journées de la Societé Française de Statistique* [CD-ROM]. Paris: Societé Française de Statistique.

Birnbaum, I. (1982). Interpreting statistical significance. *Teaching Statistics, 4,* 24–27.

Borges, A., San Luis, C., Sánchez, J. A. y Cañadas, I. (2001). El juicio contra la hipótesis nula: muchos testigos y una sentencia virtuosa. *Psicothema, 13* (1), 174-178.

Castro Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van den Nororgate, W., Onghena, P.(2007). Student´s misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence form research on statistical education. *Educational Research Review, 2* (2), 98-113.

Chow, L. S. (1996). *Statistical significance: Rational, validity and utility.* London: Sage.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Universidad de Granada.

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general.* Barcelona: Lumen

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática.*Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *Actas del IX Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática (SIEM)* (pp. 25-45). Guimaraes: Associaçao de Professores de Matemática.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60* (1), 3-36.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es un número?. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *19*, 34-46.

Hagod, M. J. (1970). The notion of hypothetical universe. En D. E. Morrison y R. E. Henkel, (Eds.), *The significance tests controversy: A reader* (pp. 65 – 79). Chicago: Aldine.

Haller, H. y Krauss, S. (2002). Misinterpretations of significance: A problem students share with their teachers? *Methods of Psychological Research, 7*(1), 1–20.

Harlow, L.L., Mulaik, S.A. y Steiger, J. H. (1997). *What if there were no significance tests?* Mahwah. NJ: Lawrence Erlbaum.

Harradine, A., Batanero, C., y Rossman, A. (2011). Students' and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.). *Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study*. New York: Springer, en prensa.

Krauss, S.y Wassner, C. (2002). How significance tests should be presented to avoid the typical misinterpretations. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/ publications.

Lecoutre, B. (1999). Beyond the significance test controversy: Prime time for Bayes? *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-second Session of the International Statistical Institute* (Tome 58, Book 2) (pp. 205 – 208). Helsinki: International Statistical Institute.

Lecoutre, B. (2006). Training students and researchers in Bayesian methods for experimental data analysis. *Journal of Data Science, 4*, 207-232.

Lecoutre, B., Lecoutre, M. P., y Pointevineau, J. (2001). Uses, abuses and misuses of significance tests in the scientific community: Won´t the Bayesian choice be unavoidable? *International Statistical Review, 69,* 399-418.

Moses, L. E. (1992). The reasoning of statistical inference. In D. C. Hoaglin y D. S. Moore (Eds.), *Perspectives on contemporary statistics* (pp. 107-122). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 5-19. Online: www.stat.auckland.ac.nz/serj/.

Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. En D. Vere-Jones (Ed.). *Proceeding of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490).Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Valera, A., Sánchez, J., Marín, F. y Velandrino, A.P. (1998). Potencia estadística de la Revista de Psicología General y Aplicada (1990-1992). *Revista de Psicología General y Aplicada*. *51* (2).

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Vallecillos, A. y Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 17,* 29–48.

White, A. L. (1980). Avoiding errors in educational research. En R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 47 – 65). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Osmar Dario Vera, Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires, Magister en Estadística por la Pontificia Universidad Católica de Chile y Master en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada. Ha sido becado por la Fundación Carolina en Argentina, para realizar su tesis doctoral en la Universidad de Granada sobre la comprensión de conceptos de inferencia.

Carmen Díaz Licenciada en Psicología en la Universidad de Granada y Doctora en Psicología (Metodología de las Ciencias del Comportamiento) por la Universidad de Granada, España. Profesora del área de Metodología de las Ciencias del Comportamiento en la Universidad de Huelva.
Trabaja en la línea de investigación de didáctica de la estadística, publicando artículos en torno a la comprensión de la probabilidad condicional e inferencia bayesiana en revistas de ámbito nacional e internacional.

Carmen Batanero Licenciada en Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid y Doctora en Matemáticas (Estadística) por la Universidad de Granada, España. Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Granada.
Ha publicado libros dirigidos al profesorado y artículos en diferentes revistas de educación matemática. Es miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Comisión on Mathematical Instruction y fue Presidenta de IASE (International Association for Statistical Education). Ha coordinado la organización del VII Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Estadística, ICOTS-7. Fue editora de la revista Statistics Education Research Journal.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 63-73
ISSN: 1815-0640

Comparación e interpretación como actividades humanas en procesos de construcción de conocimiento matemático

Eddie Aparicio Landa; Leslie Torres Burgos;
Landy Elena Sosa Moguel; Alejandro López Rentería

Resumen

En este artículo se reporta el papel de la actividad humana en la construcción de conocimiento matemático. Sobre la base de un conjunto de actividades didácticas, se discute y reconoce el papel que tienen las actividades de comparar e interpretar en tanto actividades humanas, en el favorecimiento de actividades matemáticas asociadas a conceptos matemáticos propios del estudio de la variación y el cambio, el Cálculo, en jóvenes escolares de distintos niveles educativos.

Abstract

This article reports the role of human activity in the construction of mathematical knowledge. On the basis of a set of learning or didactic activities, is discussed and acknowledged the role that activities as comparing and interpreting human activities, in the promoting of mathematical activities associated with mathematical concepts specific to the study of variation and change, the Calculus, in young students of different educational levels.

Resumo

Neste artigo reporta-se o papel da actividade humana na construção de conhecimento matemático. Sobre a base de um conjunto de actividades didácticas, discute-se e reconhece o papel que têm as actividades de comparar e interpretar em tanto actividades humanas, no favorecimiento de actividades matemáticas sócias a conceito matemáticos próprios do estudo da variação e a mudança, o Cálculo, em jovens escoares de diferentes níveis educativos.

1. Presentación

Bajo la idea de que las matemáticas tratan con objetos abstractos, a priori a toda práctica social y externa a los individuos, se excluye del discurso matemático escolar, experiencias y prácticas socioculturales específicas ligadas a la producción de conocimientos matemáticos (Aparicio y Cantoral, 2006). En este sentido, es usual que el tratamiento y estudio de la matemática en la escuela tienda a desarrollarse siguiendo una lógica de acumulación secuenciada de conceptos matemáticos para luego, en el mejor de los casos, reconocer la ocasión de usarlos.

En consecuencia, en la escuela se extiende la idea de que el pensamiento matemático es un particular tipo de razonamiento deductivo. Se excluye el hecho de que aspectos tales como la extracción de un concepto apropiado en una situación concreta, la generalización a partir de la observación de casos, la generación de argumentos inductivos y el uso de la intuición para conjeturar, constituyen modos de pensamiento matemático. Como se menciona particularmente en Kline (1976), sin experiencia en procesos “informales” de pensamiento, el estudiante no puede comprender el verdadero papel de la demostración en matemáticas.

En forma complementaria a lo anterior, en Mc Nair (1998) se menciona que entre las más recientes preocupaciones de la comunidad de matemáticos educativos está cómo diseñar procesos de instrucción en las aulas de matemáticas que en verdad apoyen y alienten una “auténtica” participación de los estudiantes en la construcción de conocimiento.

Al respecto, se ha seguido como estrategia el proponer la creación de problemas “auténticos”, sin embargo, la auténtica actividad matemática involucra más que este tipo de problemas que los estudiantes puedan resolver. Se requiere por ejemplo, considerar la autenticidad cultural de la instrucción en el aula. La auténtica actividad matemática debe involucrar a los estudiantes en procesos de adopción de perspectivas, creencias, valores y expectativas coincidentes con los de la comunidad matemática y utilizarlas para analizar una situación problemática con respecto a sus conocimientos matemáticos y experiencias.

En el reporte de la National Research Council (NRC, 1989, p.31), se enumeraban las siguientes actividades centrales como ejemplos de “modos de cognición matemática” acerca de los tipos de comportamientos y actividades que la enseñanza debería promover en las reformas de la instrucción en el aula: i) Modelización; ii) Optimización; iii) Simbolismo; iv) Inferencia; v) Análisis lógico y vi) Abstracción.

En este sentido, investigar sobre formas que permitan transformar un discurso matemático escolar centrado más en la actividad humana o en la práctica social que uno centrado en los “objetos” matemáticos, es apremiante. Este tipo de acciones envuelven variadas interrogantes. Por ejemplo, ¿Cómo organizar los saberes matemáticos a partir de actividades humanas o prácticas? ¿Es posible centrar la atención en la actividad humana sin dejar de lado a la matemática misma? ¿Cómo garantizar procesos de transferencia de conocimiento matemático escolar?

Así, reconociendo a la predicción matemática como una práctica social que favorece la construcción de conocimiento matemático, se realizó este estudio socioepistemológico, donde la atención estuvo puesta en el papel de la actividad humana como fuente de reorganización y resignificación de saberes y prácticas matemáticas escolares.

2. Aspectos en la matemática escolar

Aún cuando se puede decir que la predicción matemática no constituye un objeto de estudio formal en la escuela, en el sentido de no figurar como contenido temático en el currículo escolar de matemáticas, una revisión en algunos libros de texto, permite distinguir aspectos asociados a dicha práctica predictiva, tal como se ilustra a continuación.

Ejercicio extraído del texto Precálculo 3 (Stewart, 2001, p. 164).

Los gastos por importaciones energéticas de un país en miles de millones de dólares entre 1990 y 1995, están expresados en la siguiente tabla:

x (año)	***90***	***91***	***92***	***93***	***94***	***95***
y (millones de dólares)	*45*	*90*	*135*	*180*	*225*	*270*

i) *¿Cuál es la razón de cambio para el comportamiento de los gastos por importaciones energéticas en el lapso 1990 -1995?*

ii) *Suponiendo que el comportamiento se mantenga lineal, predice el gasto que se tendrá en 2003.*

Una ruta resolutiva consistiría en calcular razones de cambio y sustituir el valor de la variable $x = 2003$ en el modelo producido tras el cálculo anterior junto con la información dada sobre el supuesto comportamiento lineal de los valores del sistema de cambios (millones de dólares por año).

Ejercicio del texto Cálculo 1, (Quijano y Navarrete, 2000, p. 119).

De una inyección de x gramos de cierta droga resulta una disminución de la presión sanguínea de $D(x) = 0.5x^3 - 4x$ milímetros de mercurio. Hallar la sensitividad a 4 gramos de esa droga. La sensitividad se define como la tasa de cambio de la presión sanguínea, medida en mm de mercurio, con respecto a la dosis.

Una ruta resolutiva sería obtener algebraicamente la fórmula que permita calcular la sensitividad de la droga. Tal fórmula estaría dada por la función derivada de la función $D(x)$, es decir, $D'(x) = 1.5x^2 - 4$. Con ello, bastará sustituir el valor $x = 4$ para "hallar" (calcular) la sensitividad a la dosis indicada.

Si bien puede decirse que es la predicción matemática la actividad escolar que subyace en ambos ejercicios, ésta no se desarrolla en un sentido amplio. En efecto, por un lado se tiene que la ley que rige el comportamiento variacional del sistema de cambios asociado a cada fenómeno o situación, es dada previamente por un modelo numérico lineal en el primer caso y un algebraico polinomial cúbico en el segundo caso. En tal sentido, la acepción escolar de predicción matemática es equiparable al empleo de técnicas y recursos matemáticos escolares específicos, por ejemplo, reproducción de procedimientos (cálculo de razones de cambio); desarrollo de algoritmias (aplicar técnicas algebraicas para derivar una función polinomial) y sustitución de variables (reemplazar una variable por un valor numérico).

Al revisar desde una perspectiva epistemológica, la práctica de predicción, se evidencia que una condición social que desentrañó mecanismos para predecir sobrevino de la necesidad del ser humano de anticipar lo que habrá de suceder en su entorno, por ejemplo, una necesidad de la comunidad científica por conocer y modelar el comportamiento de lo que fluye, llámese calor, movimiento de cuerpos, fluidos eléctricos, etc.

Así pues, no bastaría con acciones escolares como las antes ilustradas, se hace necesario establecer condiciones en las que el estudiante emplee o desarrolle recursos, estrategias o habilidades que le permitan identificar y analizar situaciones variacionales, cuantificar cambios, reconocer el comportamiento puntual y global de un sistema de cambios, generar modelos y desarrollar estrategias ligadas al desarrollo del pensamiento matemático. En menos palabras, favorecer características propias de la práctica social predictiva en ciencias, donde la matemática es producto y construcción de actividades humanas.

Las situaciones predictivas deben encerrar la necesidad implícita o explícita de un análisis fino por parte de los estudiantes, donde las experiencias, los razonamientos espontáneos y la intuición tengan cabida, es decir, tengan un papel crucial en el desarrollo del pensamiento y actividad predictiva a fin de no reducir su actuación a la simple manipulación de técnicas y procedimientos algebraicos

En Bassanezi (1994) se refiere que trabajar con modelos matemáticos no se limita a tratar de ampliar conocimientos, sino a desarrollar una forma particular de pensar y de actuar: el conocimiento se produce reuniendo abstracciones y formalizaciones interconectadas a los fenómenos y procesos empíricos considerados como situaciones problemáticas.

Así, en lo siguiente se describe la forma en la que se analizó la producción de conocimiento y el desarrollo del pensamiento matemático, entendidos no como un conocimiento acabado o como actos repetitivos de enseñanza o memorización en los que se ignoran los contextos históricos y sociales de la construcción de las matemáticas, más bien, dicha producción se analiza sobre la base de un conjunto de actividades humanas socialmente establecidas.

3. Método de investigación

3.1. Participantes

En el estudio participaron tres estudiantes de secundaria (12-15 años), tres de bachillerato (16-19 años) y tres de universidad (20-24 años), haciendo un total de nueve estudiantes. Para cada nivel se contó con la presencia de hombres y mujeres.

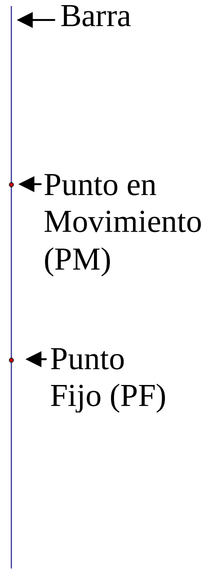
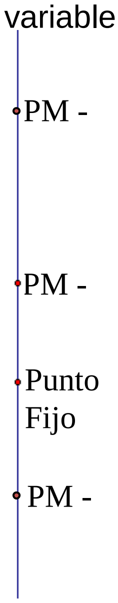
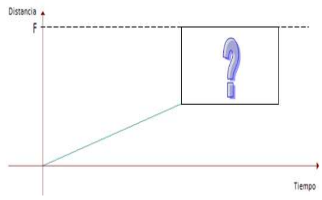
Los participantes en el estudio fueron voluntarios y no recibieron beneficio escolar alguno por su participación. Los estudiantes de secundaria y bachillerato eran del último grado, y los de universidad iniciaban su formación en el campo de la enseñanza de las matemáticas.

3.2. Obtención de datos

Para recabar los datos se diseñó y utilizó un instrumento formado por tres actividades diseñadas con base en las cuatro componentes del conocimiento según la teoría socioepistemológica, a saber, la epistemológica, didáctica, cognitiva y la sociocultural.

Las actividades encerraban situaciones predictivas que exigían del estudio de la variación y el cambio tanto a nivel de variables como a nivel de un sistema de cambios. En la tabla siguiente se detallan las actividades empleadas:

Tabla 1. Actividades empleadas en el estudio.

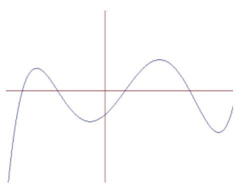
<table>
<tr><th colspan="2">Actividad 1</th><th>Actividad 2</th><th>Actividad 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">A. “Interactuando con el desplazamiento”</td><td>B. “Comparación de desplazamientos”</td><td>C. “Determinando el desplazamiento”</td></tr>
<tr>
<td>Ilustración en el tiempo cero (T_0)

</td>
<td>Ilustración en tiempo variable

</td>
<td>
<table>
<tr><th colspan="2">Partícula 1</th><th colspan="2">Partícula 2</th><th colspan="2">Partícula 3</th></tr>
<tr><th>Tiempo (s)</th><th>Distancia (m)</th><th>Tiempo (s)</th><th>Distancia (m)</th><th>Tiempo (s)</th><th>Distancia (m)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0.000</td><td>0</td><td>0.000</td><td>0</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>3.000</td><td>1.5</td><td>1.660</td><td>1.5</td><td>2.077</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6.000</td><td>3</td><td>3.948</td><td>3</td><td>4.637</td></tr>
<tr><td>4.5</td><td>9.000</td><td>4.5</td><td>6.554</td><td>4.5</td><td>7.429</td></tr>
<tr><td>6</td><td>12.000</td><td>6</td><td>9.391</td><td>6</td><td>10.386</td></tr>
<tr><td>7.5</td><td>15.000</td><td>7.5</td><td>12.412</td><td>7.5</td><td>13.472</td></tr>
<tr><td>9</td><td>18.000</td><td>9</td><td>15.588</td><td>9</td><td>16.667</td></tr>
<tr><td>10.5</td><td>21.000</td><td>10.5</td><td>18.901</td><td>10.5</td><td>19.955</td></tr>
<tr><td>12</td><td>24.000</td><td>12</td><td>22.335</td><td>12</td><td>23.325</td></tr>
<tr><td>13.5</td><td>27.000</td><td>13.5</td><td>25.877</td><td>13.5</td><td>26.770</td></tr>
<tr><td>15</td><td>30.000</td><td>15</td><td>29.520</td><td>15</td><td>30.282</td></tr>
</table>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

La Actividad 1 consistió en mostrar en la pantalla de una computadora, una representación dinámica de un punto que se desplazaba en forma vertical respecto a punto fijo, conforme transcurría el tiempo. El desplazamiento era rectilíneo, tal como se ilustra en la primera columna de la tabla 1. Para esta actividad se hizo uso del software Sketchpad, 4.0.

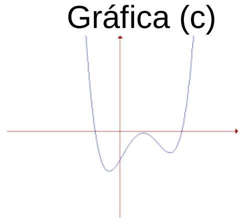
La idea central era que los estudiantes asociaran a dicha representación dinámica, una de tres gráficas posibles (Gráfica (a), (b) y (c)), proporcionadas por el investigador. A continuación tales gráficas:

Gráfica (a)

Gráfica (b)

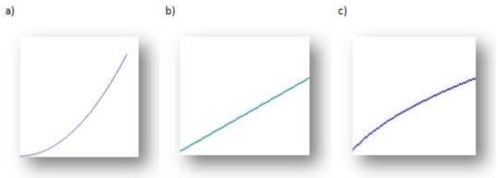


Gráfica (c)



La Actividad 2 consistió en proporcionar información numérica de las distancias registradas por tres objetos móviles alejándose en línea recta de un punto fijo de referencia (ver las tablas numéricas en la segunda columna de la Tabla 1) y, a partir de dicha información, predecir cuál de los tres objetos se encontraría más lejos después de transcurridos 25 segundos.

Finalmente, la actividad 3 consistió en presentar una gráfica asociada al desplazamiento de un objeto móvil en un lapso de tiempo. La idea era que los estudiantes indicaran con cuál de los tres fragmentos gráficos proporcionados por el investigador, que al ubicarlo en el recuadro del signo de interrogación, la gráfica representaría el hecho de que el objeto ha alcanzando el valor F en menor tiempo. A continuación los fragmentos de gráficas presentados:



Las producciones de los estudiantes se registraron en audio, video y notas de campo para su posterior análisis. Las tres actividades se implementaron en una sola sesión de aproximadamente 80 minutos por nivel educativo.

4. Marco teórico

En la teoría socioepistemológica se problematiza la construcción de saberes matemáticos a la luz de su desnaturalización o desmatematización, se acepta que antes de discutir sobre cierto concepto, habrá que hacerlo sobre un complejo de prácticas de naturaleza social, que den sentido y significado al saber matemático escolar, pues bajo esta perspectiva, las prácticas pueden ser propiamente externas a la matemática (Cantoral, 2004).

En consecuencia, se asume que en el estudio de procesos de construcción y difusión del conocimiento matemático escolar, no sólo se han de considerar epistemologías modelizadas a través de la actividad matemática, sino también epistemologías modelizadas a través de la actividad humana. En palabras de Cordero (2001), emerge una nueva base didáctica sobre la cual la matemática escolar ha de reorganizar la obra matemática.

Dicho así, interesa analizar no sólo a los participantes en sí mismos, los conceptos o la relación entre ambos, sino a la actividad y práctica social, pues la atención está puesta en las formas de constituir conocimiento (Cordero, 2005). Por tanto, un trabajo enmarcado en lo socioepistemológico no se circunscribe en los conceptos o en las personas, sino en el papel de los contextos, las herramientas y las prácticas. Esto es, en los usos del conocimiento, en lo funcional, en la manera que se construyen y comparten significados y en los tipos de razonamientos asociados.

Por ejemplo, en el estudio socioepistemológico realizado por Aparicio y Cantoral (2006), con jóvenes universitarios sobre la noción de continuidad puntual, se muestra cómo al incorporar aspectos de naturaleza sociocultural como lo gestual y lo discursivo en el análisis de los procesos de construcción de conocimiento, se obtiene información significativa sobre la resignificación del concepto función continua en un punto. Esto permite mencionar que la construcción y resignificación del conocimiento matemático se enriquece al incorporar aspectos socioculturales tanto en las investigaciones como en los procesos instruccionales.

Con base en lo anterior y al interés por analizar y establecer formas de considerar un discurso escolar centrado más en actividades humanas que en conceptos matemáticos, el estudio se enmarcó en la teoría socioepistemológica.

5. Resultados

Para exponer los resultados obtenidos en la experimentación, se ha dispuesto un código que facilite identificar la intervención de cada uno de los participantes. Por ejemplo, con el código E_{1S} se estará aludiendo al estudiante número uno de secundaria, con E_{1B} al estudiante uno de bachillerato y con E_{1U} al estudiante uno de universidad; de manera análoga se referirá a los estudiantes dos y tres de cada nivel educativo.

A continuación se presentan episodios discursivos producidos por los estudiantes en cada una de las actividades, simultáneamente se hacen algunas anotaciones respecto a dichas producciones.

Actividad 1

Producciones discursivas de los estudiantes	Anotaciones
E_{1S}: *“(…) hay muchas ondas y en la animación no se comportaba muy ondeado (...) analicé la gráfica del inciso (b) y no así se comportaba la animación, lo volví a leer y pues escogí la gráfica del inciso (a).”* E_{3B}: *“(…) el tiempo que hizo el punto movible en la parte de en medio fue un poco más largo, por tanto, la abertura de la gráfica debe ser más amplia. La gráfica del inciso (c) regresa a otro punto totalmente diferente”.* E_{1B}: *“(…) yo tomé el punto estático como la línea horizontal y el otro punto (punto movible) como la gráfica entonces como al principio bajaba un poco y subía un poco, luego bajaba más y subía más. Y va más lento cuando se está moviendo hacia la derecha, entonces es el inciso (a)”.* E_{3U}:*“(...) inciso (a), porque muestra el patrón de comportamiento que sigue la partícula en la animación.* *(...) primero de donde comenzaba, bajaba, luego subía pero no llegaba hasta donde comenzó, luego volvía a bajar...”.*	Nótese que indistintamente del nivel educativo de los estudiantes, ellos logran establecer relaciones adecuadas entre lo que cambia (posición del móvil) y la forma en que cambia (forma que asume el movimiento del móvil), para luego traducirlo en forma apropiada a un lenguaje gráfico de funciones. Así mismo, se reconoce que la actividad de comparar estados se constituye como la actividad humana que permite dar sentido y significado a las acciones de los estudiantes ante una tarea específica. Tal tipo de actividad favoreció, por ejemplo, que la acción de interpretar emergiera como una estrategia que posibilita tratar información presentada en una animación para luego asociarla con el empleo de ejes coordenados y la decodificación de patrones que en conjunto describan situaciones de variación.

Actividad 2

Producciones discursivas de los estudiantes

E_{1S}: *"(…) pero después me di cuenta que la velocidad del objeto no es una velocidad constante (hace una seña que indica una línea recta horizontal) puede variar su velocidad con la que aumenta. (…) pero con el paso del tiempo logra superar la velocidad de los demás".*

E_{2B}: *"(...) descarté el objeto uno porque vi que avanzaba igual, creo que es el objeto dos porque, es el que conforme avanza el tiempo va avanzando más y más, y por milésimas, le está ganando al objeto tres, esto se debe a que el objeto conforme pasa el tiempo avanza más. (…) lo saqué restándole la distancia uno al otro, uno al otro, uno al otro y después le saqué hasta cuatro."*

E_{3U}: *"(...) el objeto dos se encontrará más lejos del objeto fijo ya que el objeto uno recorre una distancia constante, el segundo poco a poco avanza más.*
(...) pero el objeto dos avanza más que el tres. Esto lo analicé a través de las diferencias..."

Partícula 1			Partícula 2			Partícula 3			
Tiempo	Distancia	Diferencia 1	Tiempo	Distancia	Diferencia 1	Tiempo	Distancia	Diferencia 1	Diferencia 2
0	0	3	0	0	1.66	0	0	2.077	0.483
1.5	3	3	1.5	1.66	2.288	1.5	2.077	2.56	0.232
3	6	3	3	3.948	2.606	3	4.637	2.792	0.165
4.5	9	3	4.5	6.554	2.837	4.5	7.429	2.957	0.129
6	12	3	6	9.391	3.021	6	10.386	3.086	0.109
7.5	15	3	7.5	12.412	3.176	7.5	13.472	3.195	0.093
9	18	3	9	15.588	3.313	9	16.667	3.288	0.082
10.5	21	3	10.5	18.901	3.434	10.5	19.955	3.37	0.075
12	24	3	12	22.335	3.542	12	23.325	3.445	0.067
13.5	27	3	13.5	25.877	3.643	13.5	26.77	3.512	
15	30		15	29.52		15	30.282		

Anotaciones

Nótese que tanto la actividad de comparar como la de interpretar, no solo siguen presentes en esta tarea, sino que se conectan para dar cabida a la noción de variación y ésta a su vez, al concepto matemático razón de cambio. Considérese como ejemplo, el cálculo de las diferencias entre los valores dados en las tablas, lo cual se ilustra en la producción del E_{3U} y en el comentario del E_{2B}.

Se identificó que para algunos estudiantes, el análisis variacional de lo que varía, evoca a la razón de cambio.

Actividad 3

Producciones discursivas de los estudiantes

E_{3S}: *"(...) el inciso (a) porque la curva va hacia arriba y no recorre mucho hacia su derecha. Se nota que ésta va hacia arriba mientras las otras se van alargando."*

E_{2B}: *"(...) inciso (a) al parecer es la que incrementa más rápidamente su velocidad así que en el plano habría disminuido su tiempo.*
(...) la curva que está de forma más vertical es la que desarrolla más velocidad, entonces llegaría con menos tiempo a la misma distancia".

E_{3B}: *"(…) inciso (a), porque el tiempo sería menos en correspondencia con la distancia".*

E_{1U}: *"(...) el inciso (a), porque a menor tiempo recorre una mayor distancia comparada con los demás".*

Observaciones

La acción de comparar se identificó en dos sentidos, primero, haciendo una comparación entre las curvas dadas y segundo, comparando la variación entre las variables (tiempo-distancia). Tales acciones ligadas a la interpretación y relaciones gráficas, posibilitaron la identificación de la variación.

De la actividad se evidenció que la noción de derivada representó una relación entre variables y la variación de las variables.

De las tres actividades se pudo identificar que tanto la comparación como la interpretación, fueron actividades humanas realizadas por los estudiantes en la resolución de las actividades. Así por ejemplo, emergieron estrategias como el decodificar información a través de animaciones, valores numéricos y representaciones gráficas, generando con ello conjeturas, mediadas por acciones de identificación de variables, cuantificación de cambios y establecimiento de relaciones.

Se ha discutido que el propósito principal del estudio fue mirar la actividad matemática a partir de una actividad humana tomando a la predicción matemática como una práctica social generadora de conocimiento. En este sentido, la actividad humana encierra ciertas caracterizaciones de la construcción del conocimiento matemático, así como la idea de generar recursos como estrategias de razonamiento y herramientas matemáticas, no enfocándose en el uso o la aplicación, sino en su construcción.

Con el fin de identificar dicha actividad matemática, se analizó el discurso construido y empleado por los estudiantes al enfrentarse a las actividades descritas en el apartado anterior, ya que se asume al discurso como una forma de comunicación que permite articular y codificar mensajes, sensaciones, emociones y socializar significados; posibilitando el entendimiento y la obtención de evidencia empírica sobre el papel del habla, el gesto y la escritura referente a un contexto específico de interacción social. Asimismo, el estudio del discurso permite identificar los conocimientos matemáticos que las personas ponen en juego ante tareas específicas; identificando con ello la generación de ideas matemáticas a partir del razonamiento y la experimentación.

Con base en el análisis del tal discurso, se identificó el empleo de herramientas sociales que permitieron a los estudiantes entender las situaciones (tareas), fase inicial de la construcción de conocimiento, para posteriormente, mediante comparaciones e interpretaciones, generar recursos matemáticos con los cuales dar respuesta a las situaciones planteadas y poder construir un conocimiento matemático específico.

Con base en la actividad humana, se identificó como actividad matemática por parte de los estudiantes, a la identificación de la variación, cuantificación de la misma, determinación de relaciones entre magnitudes (tiempo-distancia), y el empleo de algunas nociones matemáticas como la noción de función y la noción de derivada, las cuales no se presentaron de manera formal, sino que se manifestaron ideas intuitivas de dichos conceptos. Al respecto, retómese el caso de los estudiantes que emplean una noción del concepto de derivada mediante la identificación de variables y el análisis de la variación en la actividad dos.

Por lo anterior, se puede decir que en la actividad humana se generan producciones de orden sociocultural que pueden llevar al alumno a realizar actividades matemáticas como medir, identificar variables, cuantificar cambios, establecer relaciones; actividades que están ligadas a nociones y conceptos matemáticos, permitiendo con ello la asociación de ciertas nociones con conceptos como derivada de una función, variación de variables y en lo general, el concepto función.

En este sentido, se vislumbra la posibilidad de incidir favorablemente en el Discurso Matemático Escolar mediante actividades humanas como las aquí presentadas, a fin de promover el desarrollo de las nociones matemáticas y la resignificación de los saberes matemáticos escolares.

6. Conclusiones

En este estudio se concluye que al incorporar variables de contexto sociocultural en el análisis de los procesos asociados al desarrollo del pensamiento matemático y la construcción de ciertos saberes matemáticos en el ámbito escolar, se amplía la posibilidad de incidir favorablemente en la actividad matemática de los jóvenes escolares. En efecto, tal consideración deviene de reconocer que cuando dicha actividad matemática se concibe no ajena a la cultura del sujeto que aprende, sino, justo como producto de una interacción entre los objetos matemáticos y el sujeto a propósito de cierta necesidad o actividad social, se obtiene información sobre el papel de los contextos (socioculturales) en situaciones de producción de

Dicho así, la actividad humana se constituye como un conjunto de acciones que dan sentido y permiten la resignificación de saberes matemáticos al momento de entender, explicar o resolver situaciones o necesidades de orden social (incluyendo lo matemático).

Se determina que actividades humanas como el comparar o interpretar, favorecen y están ligadas a la emergencia de nociones matemáticas de tipo variacional y éstas a su vez, están asociadas a conceptos matemáticos propios del cálculo, por ejemplo, el concepto de variable, relación funcional y razón de cambio. Ciertamente, en el estudio se detectó que la forma en que jóvenes escolares de Secundaria, Bachillerato y Universidad, movilizaban y construían recursos, herramientas y estrategias matemáticas en procesos resolutivos de situaciones de variación y cambio, estaba asociada a la actividad básica de comparar e interpretar en un sentido variacional y no ajeno a sus experiencias cercanas.

Referencias

Aparicio, E.; Cantoral, R. (2006): Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9(1), 7-30.

Bassanezi, R. (1994): Modelling as a teaching-learning strategy. *For the Learning of Mathematics*, 14(2): 31-35.

Cantoral, R. (2004): Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 1-9.

Cordero, F. (2001): La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2005): El rol de algunas categorías de conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 365-386.

Kline, M. (1976): *El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar*. Siglo XXI de España Editores.

National Research Council. (1989): *Everybody Counts: A report to the nation on the future of mathematics education.* Washington, DC: National Academy Press.

Mc. Nair, R. (1998): Building a Context for Mathematical Discussion. En Lampert, Blunk: *Talking Mathematics in School Studies of Teaching and Learning,* 82-106. Cambridge University Press.

Quijano, Q.; Navarrete, C. (2000): *Calculo 1*. Editorial UADY. Yucatán, México:

Stewart, J.;. Redlin, L.; Watson, S. (2001): *Precálculo*. Thomson Learning, México.

Eddie Aparicio Landa. Nació en 1976 en Veracruz, México. Es Licenciado en Matemáticas con posgrado en el área de Matemática Educativa. Se desempeña como profesor de tiempo completo en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Cuenta con el reconocimiento “Profesor con perfil deseable” otorgado por la Secretaría de Educación, así como con publicaciones en revistas especializadas nacionales e internacionales. Actualmente preside la Red Cimates AC. **alanda@uady.mx**

Leslie Torres Burgos Nació en 1988 en Yucatán, México. Es Licenciada en Enseñanza de las Matemáticas. Se desempeña como colaboradora del departamento de Matemática Educativa de la facultad de matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Cuenta con una publicación en la Memoria de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. **torres_leslie09@hotmail.com**

Landy Elena Sosa Moguel Nació en 1980 en Yucatán, México. Es Licenciada en Enseñanza de las Matemáticas con posgrado en el área de Matemática Educativa. Se desempeña como profesora de tiempo completo en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Cuenta con el reconocimiento “Profesor con perfil deseable” otorgado por la Secretaría de Educación, así como con publicaciones de artículos. **smoguel@uady.mx**

Alejandro López Rentería Nació en 1988 en Yucatán, México. Es Licenciado en Enseñanza de las Matemáticas. Se desempeña como profesor de medio tiempo en el Centro Educativo República de México, en el nivel medio y superior de educación del sector privado. Asimismo, trabaja en colaboración con el Departamento de Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. **j.alejandro.lopez.renteria@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 75-87
ISSN: 1815-0640

La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral

Rossana Di Domenicantonio; Viviana Angélica Costa; María Cristina Vacchino

Resumen

En matemática muchos conceptos y procesos se ligan al potencial didáctico de la visualización y la forma en que ésta puede favorecer el aprendizaje. La visualización posibilita crear en la mente una imagen visual de un concepto abstracto. Este trabajo tiene como propósito mostrar actividades que se realizan en un curso de Cálculo Integral y Vectorial, donde se incorpora la visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje a partir del uso de la tecnología.

Abstract

In mathematics many concepts and processes are linked to the educational potential of visualization and the form which help learning. Visualization makes it possible to create a visual image of an abstract concept in mind. The purpose of this work is to show activities which are carried out in the course of Integral and Vectorial Calculus which incorporates visualization as the intermediary in the process of teaching and learning through the use of technology.

Resumo

Em matemática muitos conceitos e processos unem-se ao potencial didáctico da visualización e a forma em que esta pode favorecer a aprendizagem. A visualización possibilita criar na mente uma imagem visual de um conceito abstracto. Este trabalho tem como propósito mostrar actividades que se realizam num curso de Cálculo Integral e Vectorial, onde se incorpora a visualización como mediadora no processo de ensino e aprendizagem a partir do uso da tecnología.

1. Introducción

La necesidad de "*ver*" las matemáticas no es nueva. Por ejemplo el significado de la palabra "θεωρημα" (teorema) en griego significa "*lo que se contempla*" o expresiones de matemáticos y filósofos como "*la matemática es una ciencia del ojo*" (Gauss) o "*es útil en muchas ocasiones describir estas figuras y mostrarlas a los sentidos externos para que de este modo se mantenga atento nuestro pensamiento más fácilmente*" (Descartes), (de Guzmán, 1997).

Otras expresiones que vinculan la visualización con la adquisición de conceptos matemáticos que se pueden mencionar son:

- "*Las figuras geométricas son fórmulas gráficas y ningún matemático podría prescindir de su uso*" (Hilbert, 1900).
- "*La mayoría si no todas las grandes ideas modernas en matemática tienen su origen en la observación*" (J. J. Silvestre),(Davis, 1993).

- "*El pensamiento creativo se debe a la manipulación mental de diagramas. Pienso con diagramas visuales, nunca con palabras*" (C. S. Peirce), (Oostra, 2001).
- "*Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas…."* (de Guzmán, 1997).

En matemática muchos conceptos y procesos podrían ligarse a interpretaciones visuales, lo que ha generado diversas investigaciones en relación al potencial didáctico de la visualización, la forma como ésta puede favorecer al aprendizaje y bajo qué condiciones utilizarla.

Según el Diccionario del Uso del Español de América, *visualizar* significa:

a) Hacer visible por algún procedimiento o dispositivo lo que normalmente no se puede ver a simple vista.
b) Representar algo por medio de imágenes, después de documentarse ampliamente.
c) Formarse en el pensamiento la imagen de algo que no se tiene a la vista o de un concepto abstracto.
d) Ver la información (textual o gráfica) que se ofrece en una pantalla, monitor, visor u otro dispositivo similar.

A partir de la definición, se puede considerar a la visualización como un proceso mental interno, el que puede utilizarse con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas que involucran sensación, imaginación y manipulación mental de los objetos. El profesor será el encargado de estimular ese proceso, valiéndose de distintos materiales.

Zimmermann W. y Cunningham S. afirman que: "*La visualización se toma como la habilidad para trazar con lápiz y papel un diagrama apropiado, con ayuda de una calculadora o una computadora. El diagrama sirve para representar un concepto matemático o un problema y ayuda a comprender el concepto o a resolver el problema. La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento; visualizar un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales, con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas*" (Zimmermann et al, 1991).

Todo lo expresado anteriormente pone de manifiesto la importancia de la visualización dentro del ámbito del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La visualización como mediadora en el razonamiento de un alumno puede facilitar el proceso de resolución de problemas. Dado un problema, el profesor guía a los estudiantes a formarse una imagen de la situación y a describirlo con sus propias palabras, creando una imagen para lograr la generalización y asimilación del conocimiento.

En la actualidad los avances de la ciencia y la tecnología han puesto a disposición del docente una serie de instrumentos y/o objetos que pueden ser utilizados como elementos mediadores en el proceso de visualización en el desarrollo de su actividad didáctica.

Plasencia (2000), abre varios interrogantes sobre *tecnología y visualización*: ¿de qué manera el poder de las computadoras en general, y los gráficos realizados con algún software interactivo en particular, pueden ser utilizados de la forma más efectiva para promover la intuición y el conocimiento matemático? ¿cómo pueden las computadoras ayudar a enseñar, de una forma más efectiva, y qué nuevos problemas, temas o campos de las Matemáticas se plantean con las nuevas tecnologías? También plantea, que el pensamiento visual proporciona a los estudiantes nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas. En la educación matemática sugiere tener en cuenta entre las *actividades a desarrollar*, una atención sistemática a la visualización y a las nuevas tecnologías.

Hitt (2003) invita al uso reflexivo de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas y defiende su utilización como una herramienta, no como un fin. En este sentido el uso del ordenador en el aula, como recurso didáctico, disponible tanto para el profesor como para los alumnos, puede ser un medio para coordinar los distintos registros de representación de un concepto.

También, los libros de texto de matemática básica (nivel universitario), en particular los de Cálculo, han cambiado el enfoque de los contenidos, modificando su diseño, incorporando imágenes, diagramas, mapas conceptuales, fotografías, actividades de investigación con el uso de CAS[1], observándose una mayor importancia a la visualización.

La utilización de imágenes para acceder, procesar y utilizar información moviliza formas particulares de aprendizaje. Estas pueden consistir en procesos cognitivos de diferente índole o en distintas combinaciones de los existentes. Las imágenes, más que sustituir, complementar o auxiliar la lectura de textos impresos, ofrecen la posibilidad de aprovechar las habilidades lectoras en un ambiente multimedial, favorecedor de la comunicación de ideas y la flexibilidad cognitiva, enfatizando la autonomía y la participación activa en el enseñar y el aprender (Malbrán, 2002).

En este trabajo se describen algunas de las actividades que se realizan en un curso de "*Cálculo Integral y Vectorial*", Matemática B, donde se incorpora la *visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje* a partir del uso de la tecnología. Relatamos el contexto en que se desarrollan, mostramos la evaluación de una encuesta de opinión sobre la importancia de la visualización realizada a los profesores de la materia y elaboramos conclusiones.

2. Marco metodológico

Las actividades relatadas en este trabajo se enmarcan en la asignatura Matemática B, materia del segundo semestre de primer año de todas las carreras de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata[2]. Durante ese semestre cursan alrededor de 500 alumnos, con edades entre los 18 y 20 años, distribuidos en 9 grupos, organizados por carrera. A cada grupo se le asigna un

[1] CAS: del inglés computer algebra system (sistema algebraico computacional)
[2] http://www.ing.unlp.edu.ar/analiticos/F0302.pdf

equipo docente conformado por un profesor, un jefe de trabajo práctico y dos ayudantes. El total de docentes de la asignatura es de 32.

En el año 2002, se lleva a cabo un cambio del plan de estudios en el área de Matemática de la facultad. El mismo es acompañado por la reorganización de los contenidos alrededor de ejes conceptuales comunes, un cambio metodológico y la redistribución de los recursos humanos y materiales existentes (Bucari et al., 2004). Se promovieron cursos teórico-prácticos, aulas equipadas con computadoras y mesas amplias, que propician el trabajo grupal y el uso de la tecnología. La metodología utilizada en los cursos considera al alumno como constructor de su propio conocimiento y no mero receptor, y al docente como guía del aprendizaje.

El eje conceptual de los contenidos de Matemática B, y su secuenciación, es el proceso de integración, en una y varias variables. Sus contenidos en forma sintética son: integral definida, ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, integrales múltiples, series numéricas y cálculo vectorial.

Los alumnos, como guía para el estudio de la asignatura, disponen de un material teórico-práctico impreso[3] y de otro digital[4] en formato de CD, elaborados por profesores de la cátedra. El material impreso comienza abordando el problema del desplazamiento de un móvil y del "área bajo la curva" como motivación del concepto de integral definida. La conexión con el problema inverso (el cálculo diferencial) provee el vínculo "hacia atrás" con Matemática A (materia previa a ésta). Se continúa con las ecuaciones diferenciales de primer orden, las integrales múltiples y el cálculo vectorial. En el mismo se proponen distintos tipos de actividades: de cálculo, de aplicación a la física, de auto-evaluación y de análisis de resultados teóricos. El material digital, complementa al material impreso. Dispone de actividades a realizar por los alumnos en un software matemático, con los comandos básicos para el desarrollo de los contenidos de la asignatura, que guían al alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje a partir de la *visualización*. Su estructura, contenido y objetivo es relatado en Costa et al., 2010. Ambos materiales, constituyen un eje central en el desarrollo de las clases teórico-prácticas.

La metodología y los materiales con los que se desarrollan los cursos de Matemática B, propician un escenario en el cual es natural incorporar estrategias didácticas donde la visualización aporta un modo diferente de apropiación de los conceptos presentados.

3. Actividades desarrolladas en el curso

Se relatan algunas de las actividades propuestas en el material impreso y otras del material digital, en el orden en que son abordadas. Fueron seleccionadas por ser aquellas, en las que la *visualización* juega un rol importante. Las actividades son realizadas en el aula con el uso del software Maple[5], utilizado en los cursos de Matemática del Área Básica de esta facultad.

---

[3] Acosta, J. P., Vacchino M. C. y Gómez V. (2009). Guía teórico-práctica de Matemática B, CEILP (1º edición 2003). Universidad Nacional de La Plata, Argentina.

[4] http://www.ing.unlp.edu.ar/fismat/imapec/Soft/matb_maple/Matematica_B.html Costa, V., Di Domenicantonio, R. (2007). *Material Digital, CD Cátedra de Matemática B*, CEILP. Editado por la Editorial de la Universidad Nacional de La Plata.

[5] Maple es un software de cálculo, manipulación y visualización matemática diseñado para resolver en forma simbólica o numérica problemas del área de Ciencias e Ingeniería.

3.1. Sumas de Riemann. Cálculo aproximado del área bajo una curva. Acotación del error.

Esta actividad, a realizar en forma grupal, fue concebida como un taller para brindarles a los alumnos un entorno para explorar, aproximar, calcular y comprender los conceptos involucrados. Se entiende por taller a una modalidad de trabajo compartido por los docentes y alumnos, que concluye con la elaboración de un producto significativo. La actividad tiene como objetivo, a partir de la visualización de distintas aproximaciones del área bajo una curva usando las sumas de Riemann a izquierda, a derecha y la regla del punto medio, el de construir el concepto de aproximación, cota del error cometido al aproximar, y el proceso que formaliza la definición de la integral definida, como el límite de una sucesión de Sumas de Riemann. La realización de la misma permite manipular con herramientas informáticas, las sucesiones de números reales, el proceso de convergencia de las mismas y la notación sigma. Además, pretende disparar el estudio de métodos numéricos para el cálculo aproximado de integrales definidas usando sumas de áreas de otras figuras como por ejemplo el Método de los Trapecios y el error cometido en dicha aproximación.

Actividad:

Construir la gráfica de la función $y= x^2$ en el intervalo [0,4]. Definir y calcular las sumas a derecha (S1), a izquierda (S2) y la regla del punto medio (S3). ¿Cuál es la relación que satisfacen esas sumas? A partir de la visualización de los gráficos exprese la relación que satisfacen S1, S2, S3 y el valor del área bajo la curva. Como se está aproximando el valor del área, se comete un error ¿Puede dar una cota de ese error? Grafique S2-S1. Realizar la misma actividad con la función $g(x)= 1 – x^2$ en el intervalo [0,1] considerando el crecimiento y decrecimiento de la misma en el intervalo dado. Justificar la relación que satisfacen los valores de las sumas. Analizar la gráfica animada y debatir en su grupo las conclusiones.

Al finalizar la actividad, los alumnos observan la gráfica animada (Figura 1) con el objetivo de *visualizar* el procedimiento para calcular el valor exacto del área bajo la curva y les resulte más comprensible la formalización matemática de la definición.

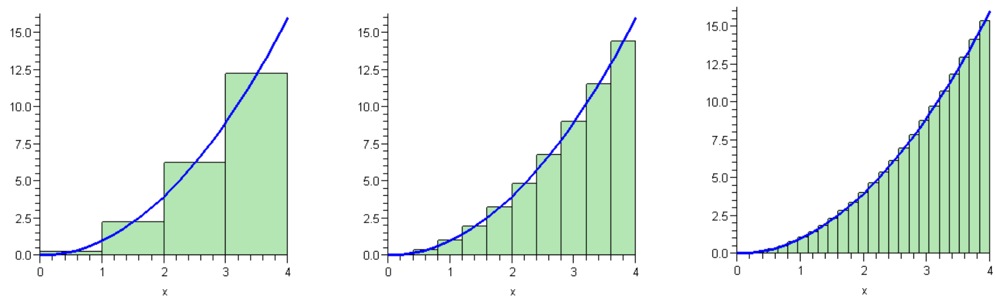


Figura 1: Etapas de la animación del área bajo la curva

3.2. Aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo Integral

El objetivo de esta actividad es la visualización y análisis de los gráficos de las funciones indicadas, como medio para recuperar saberes previos, aplicarlos al concepto nuevo, establecer relaciones entre ellos y comprender la relación entre la función integral y su derivada (Ausubel et al., 1990).

Actividad:

Considere la función $f(x) = sen(2x)\cos(x/3)$, *x* ϵ [0, 2π] y defina como *F(x)* la función integral de *f(x),* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ (Use Maple).

a) En el mismo gráfico dibuje *f(x)* y *F(x)*
b) Resuelva la ecuación *F'(x) = 0* ¿Qué observa en las gráficas de *f(x)* y *F(x)* en los puntos donde *F'(x) = 0*? ¿Su observación está de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo integral?
c) ¿En qué intervalos crece y en cuáles decrece la función *F(x)*? ¿Qué observa con *f(x)* en esos intervalos?
d) ¿Qué observa en la gráfica de *F(x)* en los puntos donde *f'(x)=0*?

Se sugiere al alumno que visualice las gráficas de la función *f(x)* y de la función integral obtenida *F(x)* y así establecer relaciones entre ambas. Se espera que el alumno a partir de la visualización pueda inferir relaciones entre *f(x)* y *F(x).* Se propone un gráfico animado con el fin de aportar una interpretación que favorezca la comprensión (Figura 2).

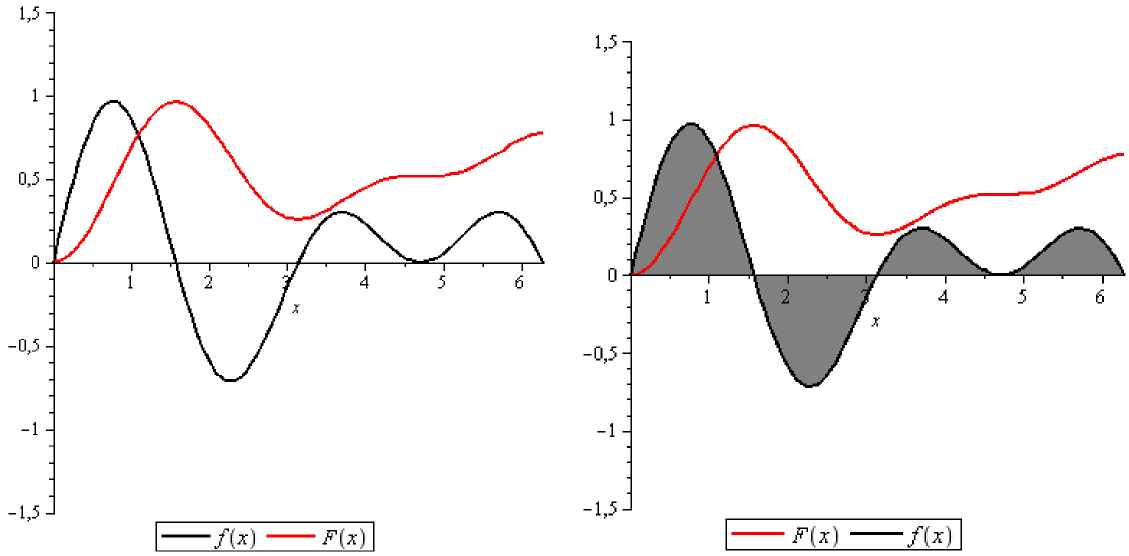


Figura 2: Gráficas de *f(x)=sen(2x)cos(x/3)* y *F(x)*= $\int_0^x f(t)\, dt$

3.3. Volumen de un sólido de revolución

El planteo y cálculo de la integral del volumen de un sólido de revolución es un problema para el cual la visualización es de especial importancia. Este tema, se aborda como una aplicación de la integral definida para funciones de una variable.

La actividad propuesta tiene como objetivo visualizar los sólidos de revolución con cavidades que se generan al hacer girar una región plana sobre un eje. Para visualizar estos sólidos el recurrir al uso de un software, es beneficioso para alumnos y profesores.

Actividad:

> Sea la región limitada por $y=x$, $y= x^2$ en el intervalo [0,1].
> a) Graficar la región.
> b) Rotar esa región alrededor del *eje x*.
> Notar que la región no esta "pegada" al eje, entonces cuando giremos esa área se generan secciones transversales que serán coronas o discos y el sólido que se formará tendrá cavidades. Las coronas tendrán un radio menor de $y=x^2$ y un radio mayor de $y=x$.
> *Observando* el área a rotar plantear la *integral que calcula el volumen del sólido generado*.
> b) Observe lo que sucede si rotamos la misma área, alrededor del *eje y*. Visualice el área y los correspondientes radios transversales y plantee la integral que calcula su volumen.

Los alumnos, utilizando las sentencias correspondientes a esta actividad, disponibles en el material digital, generan, entre otras, gráficas como las que se observan en la figura 3. A partir de las gráficas, plantean las integrales que calculan dicho volumen. En el caso en que el sólido tenga cavidades, se hace hincapié en observar los radios "menor" y "mayor".

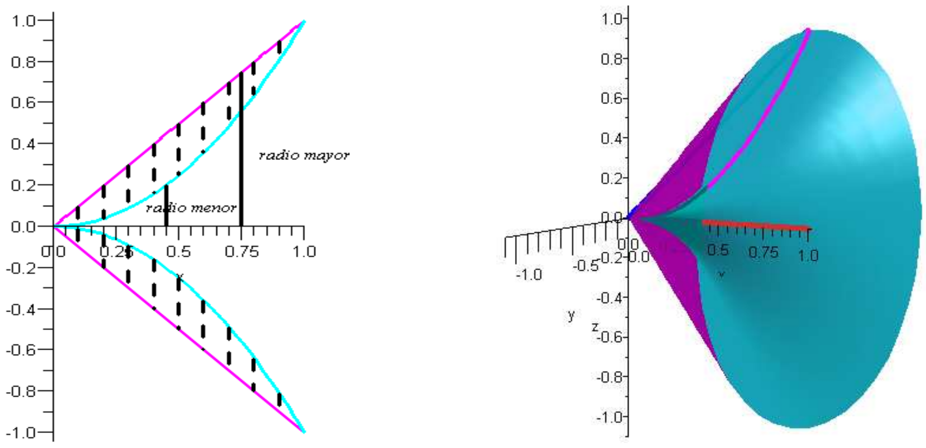


Figura 3

3.4. Campo de direcciones de una ecuación diferencial

Se presenta a los alumnos una actividad en la que construyen en un gráfico el *campo de direcciones* para una ecuación diferencial de primer orden *y'=f(x,y).* En el mismo se bosquejan pequeños segmentos de recta con pendiente *f(x,y)* que permite visualizar la forma general de las curvas solución. Los alumnos trazan algunos segmentos del campo de direcciones, con lápiz y papel, con el objetivo de interpretar geométricamente que "*en un punto (x,y) la pendiente de una curva solución es f(x,y)*" e intuir la forma general de las curvas solución. Los alumnos vinculan estos conceptos con lo estudiado en la materia precedente para poder concluir que en la vecindad de *(x,y)*, si existe la derivada, la tangente aproxima a la curva, o sea que los pequeños segmentos son aproximadamente una porción de la curva y que cuanto más segmentos se tracen, más clara se vuelven las imágenes de las curvas que son solución. Finalmente utilizan un software matemático en el que visualizan el campo de direcciones y algunas curvas solución (Figura 4).

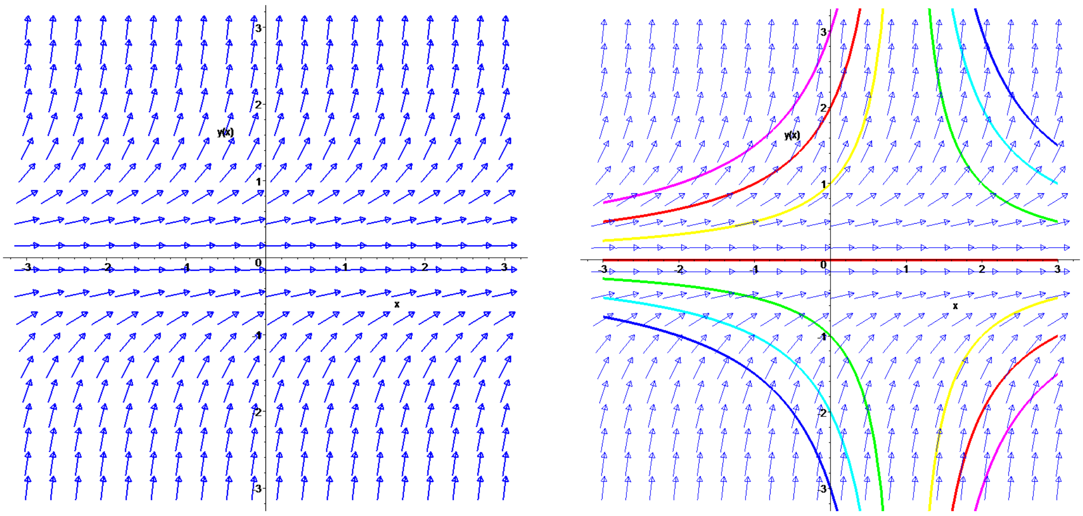


Figura 4: Campo de direcciones y curvas solución de $y'= y^2$

Actividad:

> Usando los comando de Maple (dfieldplot del paquete DEtools) visualizar el campo de direcciones para la ecuación $y' = y^2$.
> \> with(DEtools):
> \>dfieldplot(diff(y(x),x)=(y(x))^2, y(x), x=-3..3, y=3..3);
> A partir de la gráfica, dibuje algunas curvas solución. Si es posible encuentre la expresión de la solución general usando el comando dsolve.

3.5. Familia de curvas ortogonales

Los pares de familias de *curvas ortogonales*, que en todo punto de intersección lo hacen ortogonalmente, son de interés en la geometría plana, en algunas ramas de la matemática aplicada y en diversas ramas de la física. Por ejemplo, en un campo electrostático las líneas de fuerza son ortogonales a las líneas de potencial constante y en el estudio de la termodinámica, el flujo de calor a través de una superficie plana es ortogonal a las curvas isotermas (curvas de temperatura constante).

En la actividad se propone a los alumnos que a partir de una familia de curvas, encuentren analíticamente la familia ortogonal, grafiquen ambas familias y verifiquen visualmente la relación de ortogonalidad de las mismas.

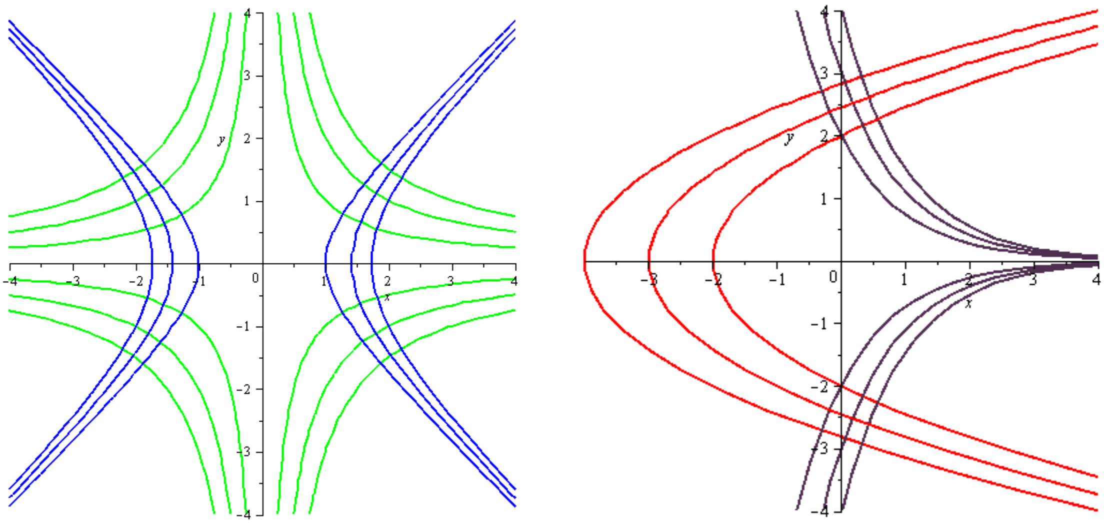


Figura 5: Familias de trayectorias ortogonales

Actividad:

Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas: x^2-y^2=k, donde k es una constante arbitraria. Graficar ambas familias en un mismo gráfico.

Para la resolución de la actividad, los alumnos, asocian la familia uniparamétrica dada, *f(x,y,k)=0,* con la solución de la ecuación diferencial de primer orden *F(x,y,dy/dx)=0*, obteniendo las trayectorias ortogonales al resolver la ecuación diferencial *F(x,y,-dx/dy)=0.* La visualización de la gráfica de ambas familias (Figura 5), completa, en los alumnos, el entendimiento del concepto.

4. Encuesta a docentes de la asignatura

Se consultó a los docentes de la asignatura Matemática B, sobre la importancia de la visualización en las clases de matemática. Para ello, se elaboró un cuestionario (Tabla 1) con cuatro preguntas, de las cuales las tres primeras fueron de ítem cerrado. La última, se formuló con opciones no excluyentes a elegir entre algunas dadas. La encuesta fue enviada por mail a cada destinatario y respondida en la misma forma.

Preguntas
1) ¿Considera que la visualización en matemática es importante? SI NO
2) ¿En sus clases, recomienda a sus alumnos realizar gráficos para visualizar los problemas o situaciones planteadas? SI NO
3) ¿Considera que hay problemas o situaciones en las que un software matemático, como herramienta de visualización, ayuda a la comprensión de estos, más que la tiza y el pizarrón? SI NO
4) De los siguientes conceptos cuáles considera que los alumnos aprenderán y conceptualizarán mejor a partir del uso de un software que visualice el problema.
a) Integral definida como límite de sumas de Riemann
b) Teorema fundamental del cálculo
c) Función integral
d) Sólidos de revolución
e) Gráficas de campos vectoriales en tres dimensiones
f) Rotor y Divergencia
g) Relación entre Campos gradientes y curvas equipotenciales
h) Otra

Tabla 1

La asignatura está conformada por una totalidad de 32 docentes, entre Profesores, Jefes de Trabajos Prácticos y Ayudantes. Del total, contestaron la encuesta en forma voluntaria 15 de ellos, siendo esto el 47% del total.

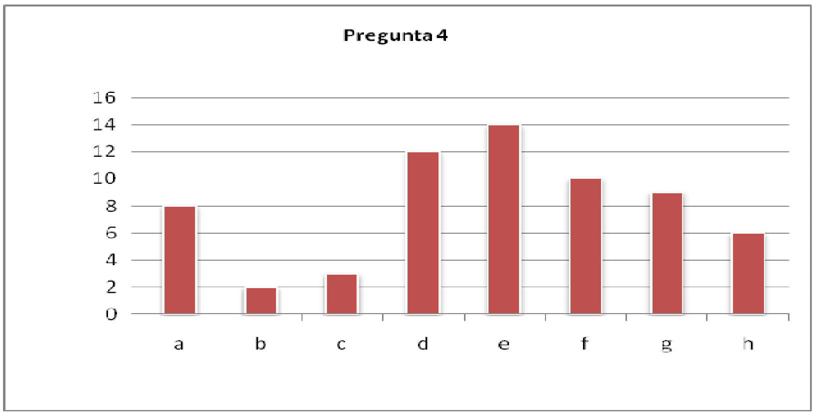
Las tres primeras preguntas fueron respondidas afirmativamente por todos los consultados. Algunos docentes agregaron comentarios sobre el tema.

Con respecto a la primera pregunta sobre la importancia de la visualización, uno de los docentes destacó:

> *Es importante. Muchas veces hay que "ver" lo que sucede antes de "atacar" un problema. Igual que cuando uno quiere demostrar un teorema: si no hay una intuición a priori, si no "visualizamos" una estrategia desde el comienzo, o bien no llegamos a nada o bien llegamos pero no nos deja una moraleja. Visualizar, en sentido amplio, es una de las tantas formas de relacionar. Por ejemplo, ¿qué es mejor, resolver problemas que involucren el concepto de ortogonalidad a partir de las propiedades del producto interno, o tratar de asimilar ese concepto cada vez que sea posible al más visualizable de "perpendicularidad"? Todos nos hemos apoyado felizmente en la geometría. Relacionar es siempre bienvenido, y una de las maneras de descubrir relaciones ocultas es a partir de la visualización.*

Con respecto a la tercera pregunta referida a la utilización de un software como herramienta de visualización para comprender un problema o una situación que se plantee, los docentes en general consideran que ello favorece la interpretación y comprensión de los temas. Un docente expresa: "P*or ejemplo: ¿Cuántos gráficos de* *sumas de Riemann hacemos cuando definimos la integral definida? Probablemente hacemos uno, con cuatro rectángulos, y después discutimos cómo hacer para mejorar las aproximaciones. Probablemente hagamos las cuentas para un par de sumas de Riemann, pero no más".*

Con respecto a la cuarta pregunta, en la Figura 6, se observa la cantidad de elecciones respecto de cada ítem seleccionados por los docentes.



a) Integral definida como límite de sumas de Riemann

b) Teorema fundamental del cálculo

c) Función integral

d) Sólidos de revolución

e) Gráficas de campos vectoriales en tres dimensiones

f) Rotor y Divergencia

g) Relación entre Campos gradientes y curvas equipotenciales

h) Otra

Figura 6

La lectura del diagrama de barras muestra que los docentes encuestados consideran que las *gráficas de campos vectoriales en tres dimensiones y sólidos de revolución* son aquellos temas en los cuales la visualización con software matemático aporta y enriquece el entendimiento. Además, otros docentes opinan que para facilitar el aprendizaje, la visualización es necesaria en general. Algunos docentes agregan otros temas a la lista propuesta en la encuesta: gráficas de sólidos en tres dimensiones, sucesiones y series numéricas.

Una frase interesante que proporciona uno de los encuestados es: "v*isualizar, en sentido amplio, es una de las tantas formas de relacionar*".

5. Conclusiones

La opinión de los docentes de la cátedra manifiesta la importancia de la *visualización* en matemática. La incorporación de imágenes y simulaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje proporcionará un escenario propicio para el descubrimiento y el entendimiento de conceptos abstractos. Una perspectiva visual aportará estímulos en la construcción de ideas y conceptos sin dejar de lado las representaciones formales y simbólicas. Consideramos que el uso de diversos recursos que permitan manipular imágenes, relacionar y combinar distintas representaciones simbólicas y geométricas, complementará el proceso cognitivo del alumno. Esto favorecerá la comprensión de conceptos matemáticos que presentan gran riqueza de contenido visual, promoviendo la autonomía y participación activa del alumno.

Bibliografía

Ausubel, D. P., Novak J. D. & Hanaseian H. (1990). *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.

Bruner, J. (1972). *Hacia una teoría de la Instrucción*. México: Hispano Americana.

Bucari, N., Abate S. y Melgarejo A. (2004). *Un cambio en la enseñanza de las Matemáticas en las carreras de Ingeniería de la UNLP: propuesta, criterios y alcances*. Anales IV Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería, 104 - 111, 1 al 3 de septiembre, Buenos Aires, Argentina.

Costa, V., Di Domenicantonio, R. y Vacchino, M. C. (2010). *Material educativo digital como recurso didáctico para el aprendizaje del Cálculo Integral y Vectorial*. UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Nº 21, 173-185.

Davis, P. J. (1993). *Visual theorems*. Educational Studies in Mathematics, 24 no. 4, 333–344. Springer. Netherlands.

Descartes, R. (1984). *Reglas para la dirección del espíritu*. Alianza Editorial, Madrid.

De Guzmán, M. (1997). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático*. Primera Edición, Pirámide, Madrid.

Hilbert, D. (1900). *Problemas Matemáticos*. Conferencia ante el Congreso Internacional de Matemáticos, París.

Hitt, F. (2003). *Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 (2003) 213.

Malbrán, M. y Pérez, V. (2002). *Lectura en medios electrónicos. Una experiencia universitaria*. Trabajo presentado en el 5º Congreso Internacional de Promoción de la Lectura y el Libro. 28º Feria Internacional del Libro de Buenos Aires, Abril, Buenos Aires, Argentina.

Oostra, A. (2001). *Los diagramas de la Matemática y la Matemática de los diagramas*. Boletín de Matemáticas Nueva Serie, Volumen VIII Nº. 1, 1–7.

Plasencia, I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos*. Tesis de doctorado, Universidad de la Laguna, Las Palmas de Gran Canaria, España. Recuperado en línea el 24 de marzo de 2011: http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=940

Ricardo, H (2008). *Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna*. Editorial Reverte.

Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes tempranas*, 4ª. Edición. Editorial Thomson Learning.

Vallejo, D. y Vacchino, M.C. (2009) *Un material destinado a un curso de integración en una y varias variables para alumnos de primer año de Ingeniería*. Actas del Congreso Nacional de Enseñanza de la Matemática y de las Ciencias Naturales, Mendoza, 12 al 13 de Noviembre de 2009. Argentina.

Zimmerman, W., Cunningham, S. (Eds.) (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Washington, D.C. Mathematical Association of America*. Notes and Report Series, Vol 19. 1-8.

Zill, D. (2009) *Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones de modelado*. Cengage Learning Editores, 532 pp.

Rossana Di Domenicantonio. Profesor Adjunto Interino, en Matemática A y Matemática B, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina. Calculista Científico (1987) y Especialista en Tecnología Informática Aplicada en Educación, Facultad de Informática Universidad Nacional de La Plata (2010).
rossanadido@ing.unlp.edu.ar

Viviana Angélica Costa, Profesor Adjunto Ordinario, Matemática B, Facultad de Ingeniería, UNLP, Argentina. Licenciada en Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP (1989). Magíster de la Universidad de Buenos Aires (2002). Coordinador de la Unidad de Investigación y Desarrollo, "Investigación en metodologías alternativas para la enseñanza de las ciencias".
www.ing.unlp.edu.ar/fismat/imapec vacosta@ing.unlp.edu.ar,

María Cristina Vacchino. Profesor Titular Ordinario en Matemática B, Facultad de Ingeniería, UNLP, Argentina. Profesora en Filosofía y Pedagogía (1969). Licenciada en Matemática, UNLP (1973), Especialista en Tecnología Informática Aplicada en Educación, Facultad de Informática, UNLP (2008) Argentina.
cristina.vacchino@ing.unlp.edu.ar

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 89-113
ISSN: 1815-0640

Las Altas Capacidades y el Desarrollo del Talento Matemático. El Proyecto Estalmat-*Andalucía*.

María Encarnación Fernández Mota, Antonio de J. Pérez Jiménez

Resumen

Una atención educativa de calidad ha de atender a la diversidad del alumnado. En este artículo se resalta la importancia de favorecer el desarrollo de las capacidades y atender las necesidades del alumnado con Altas Capacidades y, en especial, del que presenta Talento Matemático. Se describen, igualmente, las características de una actuación que persigue el objetivo de detectar y estimular el talento matemático: el proyecto Estalmat y sus especificidades en Andalucía, España.

Abstract

A quality educational services must address the diversity of students. This article highlights the importance of encouraging the development of capacities and needs of gifted students and, in particular, which presents Mathematical Talent. We describe also features a performance that aims to identify and encourage mathematical talent: the Estalmat project and their specific in Andalusia, Spain.

Resumo

A qualidade dos serviços educacionais devemresponder à diversidade dos alunos. Este artigo destaca a importância de incentivar o desenvolvimento das capacidades e necessidades dos alunos com capacidades mais altas e, emparticular, o talento apresentado matemática.Descrevemos também apresenta um desempenho que visa identificar e incentivar talentos matemáticos: o projeto e seus Estalmat específicos na Andaluzia, Espanha.

1. Introducción

Una educación de calidad ha de tener presente la diversidad que existe en los centros educativos y por ello ha de caracterizarse por ofrecer a cada alumno/a aquello que necesita y por responder adecuadamente a las necesidades educativas que el alumnado plantee. Esta atención a la diversidad ha de abarcar tanto el déficit como la sobredotación, tanto la discapacidad como a las altas capacidades y ha de regirse por los siguientes principios: **individualización** (las características individuales han de ser el punto de partida para realizar la planificación de la enseñanza), **normalización** (que supone la utilización de entornos y recursos educativos ordinarios, garantizando la igualdad de condiciones), **flexibilidad** (que ha de caracterizar la planificación de la respuesta educativa) e **inclusión (**que entiende la diversidad como un elemento enriquecedor del proceso de enseñanza-aprendizaje y favorecedor del desarrollo humano). La diversidad enriquece; por ello, todos han de aprender juntos.

La necesidad de atender al alumnado con sobredotación de sus capacidades ha pasado a cobrar una mayor relevancia en el plano educativo actual. Afortunadamente, la concepción amplia de la atención a la diversidad está aceptada en la ordenación de los sistemas educativos y progresivamente se va asumiendo el modelo de escuela inclusiva en las normas que los regulan. El colectivo de altas capacidades, va alcanzando, paulatinamente, un reconocimiento específico y se contemplan medidas dirigidas a organizar su atención educativa.

2. Altas capacidades: precocidad, talento y sobredotación

Definir al alumnado con **altas capacidades** no es tarea fácil, entre otros motivos por las distintas conceptualizaciones y situaciones existentes. En la actualidad está comúnmente aceptado utilizar el término genérico de Altas Capacidades Intelectuales para designar a aquellos alumnos y alumnas que destacan muy por encima de la media, en algunas o en la mayoría de las capacidades.

En general, el alumnado con altas capacidades posee habilidades demostradas o potenciales que muestran evidencia de una gran capacidad de realización en áreas como la intelectual, creativa, académica, de liderazgo, artística… Se caracterizan igualmente por la "perseverancia" en la tarea, está muy presente en ellos el "afán de logro" y dedican, por ello, una gran cantidad de energía a resolver problemas concretos y a la realización de actividades específicas (preguntas, dibujos, juegos, ideas…) que suelen ser originales, ingeniosas, novedosas y poco corrientes.

Una característica muy señalada en este alumnado es la de poseer un elevado dominio de las **habilidades metacognitivas** que le permite el aprendizaje autónomo y el control ejecutivo del mismo ya que pueden planificar, desarrollar y supervisar las tareas y trabajos que realizan por sí mismos, verificando logros y dificultades y siendo capaces de buscar alternativas válidas para superar estas últimas.

Se considera que del 2% al 5% de la población presenta AACC. En el desarrollo de las capacidades influye, de un modo muy significativo, la familia, la escuela y la comunidad. (Sociedad Española para la Superdotación, 2004).

Aunque se trata de un colectivo muy heterogéneo, habitualmente se acepta que el mismo está integrado por tres tipos de alumnos y alumnas: el alumnado precoz, con talento y los superdotados.

Los alumnos y alumnas **precoces** son aquellos que poseen un desarrollo temprano inusual para su edad. Su desarrollo evolutivo se realiza en un tiempo más breve que el considerado normal. Una vez conseguidos determinados niveles, es posible que se igualen al resto de la población de referencia. Por ello podríamos decir que todos los superdotados son precoces pero no todos los precoces llegan a desarrollar capacidades excepcionales.

Se denomina **talento** a la capacidad de rendimiento superior en un área concreta. El alumno o alumna que lo posee muestra habilidades específicas en áreas muy concretas. Hay muchos tipos de talento: académico, matemático, verbal, musical, motriz, creativo, estético, científico, social, mecánico y artístico.

El **superdotado/a** es toda persona que presenta un nivel de rendimiento intelectual superior en una amplia gama de aptitudes y capacidades y aprende con facilidad en cualquier área. La definición más aceptada de sobredotación, mejorada y ampliada por distintos autores con el paso del tiempo, es aquella que defiende una estrecha interacción de tres conjuntos de características: la capacidad intelectual superior a la media (elevado cociente intelectual y una gran capacidad de razonamiento y de procesamiento de la información), la creatividad (y originalidad para la resolución de problemas) y la implicación en la tarea (gran motivación intrínseca y una elevada necesidad de aprender).

El término “altas capacidades” como podemos apreciar, es un término amplio que engloba grupos bien definidos entre los cuales, no obstante, pueden existir zonas comunes. Podríamos señalar, por ejemplo, que hay superdotados que a su vez muestran un talento o talentos en determinadas áreas del conocimiento o, dicho de otro modo, talentos que a la vez son superdotados.

Nos interesa detenernos en los talentos para poder profundizar algo más en el tema que nos ocupa: el talento matemático. Una explicación a la existencia de los talentos es la teoría de las **Inteligencias Múltiples** de Gardner (1995). Este autor concibe la mente de forma modular de modo que cada inteligencia emana de una parte diferente del cerebro y por tanto son independientes entre sí. En la actualidad, son en total nueve las categorías o tipos de inteligencia que integran este modelo: lógico/matemática, verbal/lingüística, musical/rítmica, corporal/quinestésica, visual/espacial, existencialista, interpersonal, intrapersonal y naturalista. El autor especifica igualmente que la característica propia del talento es su especificidad, por ello, la persona con talento tiene una serie de recursos intelectuales con los que maneja, de forma excepcional, un determinado ámbito del conocimiento: el alumno/a podría mostrar una destacada aptitud y alto rendimiento en un ámbito concreto (verbal, artístico, matemático...) o en un tipo de procesamiento (talento lógico, creativo...), siendo normal o, en algún caso incluso deficitarios, en el resto.

El perfil intelectual de los alumnos talentosos puede caracterizarse por una o varias “puntas” de talento. De este modo pueden distinguirse los talentos simples (se posee una aptitud o competencia específica), los talentos múltiples (que surgen de la combinación de uno o varios talentos simples) y los talentos complejos (semejantes a la superdotación, los alumnos/as reúnen varios talentos con un elevado grado de desarrollo).

El **talento matemático** dota al alumno/a que lo posee de una alta capacidad para el manejo de la información cuantitativa y numérica, y también para la representación espacial y la resolución de problemas. El talento matemático es un talento simple que podría ser a su vez uno de los componentes de un talento múltiple o complejo.

Las matemáticas, como disciplina, tienen un modo de desarrollar el conocimiento que encaja muy bien con las características y el perfil de este alumnado. El aprendizaje de las matemáticas puede ser una estimulación para el desarrollo de las capacidades en general y, si los métodos de enseñanza que se utilizan son los adecuados, se conseguirá tanto el desarrollo de las capacidades cognitivas básicas (atención, memoria, análisis, síntesis…), como de las habilidades metacognitivas (planificación, supervisión de la tarea, control ejecutivo…).

3. Proceso de identificación del alumnado con altas capacidades

3.1. Modelos de identificación

Los instrumentos que tradicionalmente han venido siendo los más usados para la detección han sido los tests psicométricos, que evalúan la capacidad intelectual. La utilización de los mismos favorece una visión sesgada de la sobredotación reducida a la inteligencia por eso, se han desarrollado determinados modelos de identificación (de las inteligencias múltiples de Gardner o el del modelo triárquico de Stenberg, por citar dos ejemplos) que intentan superar esta definición reduccionista de la sobredotación.

Uno de los modelos con más éxito es el de **J. S. Renzulli**, que ya en 1978, enuncia la **Teoría de los Tres Anillos**. En ella se enuncian tres componentes, como tres anillos enlazados: capacidad intelectual superior a la media, elevada creatividad y compromiso con la tarea, o motivación. Este modelo fue completado posteriormente por el profesor **F. J. Mönks**, quien añadió los componentes sociales: el centro o marco educativo, la familia o entorno próximo y los compañeros o marco usual de relaciones. Mönks introduce cinco variables todas ellas relacionadas con la emotividad: *Autoconcepto general, Situación general dentro del grupo, Autoconcepto escolar, Estilo de aprendizaje y Motivación.* El modelo de Renzulli, con la aportación de Mönks, junto con los estudios en torno a la neurociencia, supone un paso cualitativo en el establecimiento del nuevo paradigma de las altas capacidades como una interacción entre los procesos cognitivos y los afectivos.

3.2. Detección inicial

Como ocurriría con cualquier alumno o alumna que presente unas necesidades especiales, diferentes a las ordinarias, ante el alumnado con sobredotación intelectual el primer compromiso por parte del profesorado es conocer, del modo más exhaustivo posible, cuáles son sus características y circunstancias personales, sociales, familiares, culturales, escolares... El objetivo es conocerle para personalizar el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Diagnosticar a un alumno/a con altas capacidades no es una tarea simple. Inicialmente pueden detectarse determinadas características, entre las que podemos mencionar las siguientes:

- Adquisición y retención rápida de la información.
- Elevada memoria.
- Habilidad y rapidez para abstraer y sintetizar.
- Facilidad en la adquisición del lenguaje. Amplio vocabulario.
- Creatividad e imaginación: habilidad para ver distintas posibilidades y alternativas.
- Alta concentración en las áreas de su interés. Constancia en las tareas.
- Organización y perfeccionismo.
- Independencia, tendencia al trabajo individualizado.

- Preocupación por temas sociales y morales.
- Actitud positiva ante el aprendizaje. Curiosidad e interés.
- Intensidad intelectual, emocional, imaginativa, sensorial…

La observación en el alumnado de estos rasgos da lugar a un primer nivel de detección en el que, no obstante, pueden producirse muchos fallos, dado que las características observadas pueden deberse a una cierta precocidad y no a la posesión de determinadas capacidades.

En este primer nivel de detección juegan un papel muy importante los **padres y familiares próximos al niño/a**. Sánchez Manzano (2003), hace notar que los padres son buenos identificadores de sus propios hijos pues, hasta en un 70% de los casos, su intuición es correcta.

El **profesorado** también juega un papel importante en este diagnóstico precoz ya que puede observar características como las antes citadas. Sin embargo, tienen un inconveniente que es el propio currículum: hay alumnos y alumnas desmotivados ante el aprendizaje y que fracasan escolarmente y, en estos casos, para los profesores es más difícil realizar una identificación precoz. No obstante, observar el trabajo en grupo puede servir para apreciar, por ejemplo, funciones de liderazgo, o bien, comprobar la utilización de determinados métodos de resolución que pueden ser indicativos de rasgos de talento.

Igualmente, los **compañeros/as** también juegan un importante papel en esa identificación primera desde el momento en que bien lo consideran un líder, o bien utilizan determinados calificativos, a veces peyorativos, que pueden indicar que estamos ante un niño/a de altas capacidades.

Cuando se detecta un alumno o alumna potencialmente superdotado/a se ha de realizar un seguimiento especial por parte del profesor tutor o la profesora tutora. Se podrá emplear para ello cuestionarios elaborados para tal fin. Las observaciones iniciales se contrastarán y complementarán con el profesorado del equipo docente que interviene con el alumno o alumna. Recabar la máxima información posible sobre el alumno/a en cuestión facilitará un mejor conocimiento del mismo que redundará en una mejor organización de la respuesta educativa.

3.3. La evaluación psicopedagógica

Si tras el proceso de observación, el profesorado cree que se encuentra ante un alumno o alumna con estas características, ha de entrar en contacto con el orientador u orientadora del centro para proceder a realizar la evaluación psicopedagógica. La evaluación está especialmente indicada cuando:

- Se estime que el grado de conocimiento y los intereses están muy por encima de los del grupo de referencia.
- Se aprecie apatía y desinterés hacia las tareas escolares y comience a bajar el rendimiento.
- Se considere que será necesario acelerar su escolaridad.
- Aparecen conflictos de relación con los iguales o de integración en el grupo.
- Surjan conductas negativistas y de oposición que dificulten su comunicación con el equipo docente.

Para atender a los niños y niñas con talento, se debe en primer lugar detectarlos y, en segundo lugar, estimularlos, es decir, desarrollar una labor educativa acorde con sus capacidades. Con esa doble intencionalidad se realiza la evaluación psicopedagógica del alumnado cuando se sospecha que puede tener altas capacidades. Dicha evaluación **corresponde al orientador/a** del centro quién podrá contar con la colaboración del resto de los profesionales del Equipo de Orientación o del Departamento de Orientación y del profesorado. También es especialmente importante que en este proceso intervengan las familias.

En el proceso de evaluación cobra un interés especial la **evaluación del nivel de competencia curricular** del alumno/a. La decisión de adaptar el currículo y de, llegado el caso, flexibilizar el período de escolarización, está muy influenciada por el nivel de competencia curricular que el alumno o alumna hayan alcanzado. Esta evaluación se lleva a cabo para conocer si el grado de desarrollo de las capacidades y el grado de asimilación y aplicación de los contenidos curriculares superan lo establecido por el equipo educativo para el curso que realiza el alumno o alumna.

La evaluación del nivel de competencia curricular corresponde al profesorado que imparte cada una de las áreas curriculares y los criterios de evaluación para el ciclo o curso que se evalúa elaborados por el Departamento Didáctico correspondiente, han de ser el referente para esta evaluación. El contraste de los resultados de la evaluación de competencias curriculares por parte del equipo docente aportará una información muy valiosa para conocer el desarrollo alcanzado por el alumno o alumna y la existencia o no de desarmonía en su aprendizaje e intereses.

3.4. Diagnóstico e instrumentos

Para llevar a cabo la **identificación** de este alumnado se necesita la combinación de recursos diferentes. Ha de medirse, fundamentalmente, la capacidad intelectual, la creatividad y la dedicación y rendimiento en el trabajo.

Para realizar estas mediciones se emplean diferentes técnicas (como la observación de la conducta) y distintos recursos psicométricos (tests de inteligencia, rendimiento y creatividad). Algunas de estas pruebas pueden ser utilizadas por el profesorado en general, por contra otras, sólo podrán ser aplicadas por profesionales especializados (pedagogos/as, psicólogos/as o psicopedagogos/as). Estas pruebas ayudan a los distintos profesionales en el proceso de recogida de información.

Identificar al sujeto superdotado requiere una correcta y adecuada selección de los instrumentos de medida y de las fuentes de información que vayamos a utilizar. Existe unanimidad en considerar que los dos grandes sistemas de identificación del alumnado con altas capacidades son: la identificación basada en medidas informales o subjetivas que se realiza a través de procedimientos subjetivos; y la basada en medidas formales que se lleva a cabo a través de procedimientos y pruebas objetivas y estandarizadas. Según Pérez y Domínguez (2000), dentro de las pruebas subjetivas podemos incluir todas aquellas valoraciones que recogen observaciones, opiniones o creencias de la persona evaluada o de profesores/as, compañeros/as y padres. En el segundo sistema tienen cabida las pruebas estandarizadas de tipo cuantitativo. Siguiendo los criterios del “Enfoque Diferencial”, estos dos grandes grupos de pruebas de identificación, se complementan con otros sistemas como podremos apreciar a continuación, unificando las clasificaciones que sobre este aspecto nos ofrecen diversos autores especializados en la materia (Genovard y Castelló, 1990; Beltrán y Pérez, 1993; Acereda y Sastre, 1998):

Detección: Enfoque diferencial

IDENTIFICACIÓN DEL SUPERDOTADO/A	**Medidas subjetivas**	Informes de los profesores Informes de los padres Nominaciones de los iguales Autoinformes
	Medidas objetivas	Calificaciones escolares Tests de rendimiento académico Exámenes de acceso Concursos científicos/artísticos Pruebas psicométricas: • inteligencia general • tests de ejecución • aptitudes específicas • tests de creatividad • tests de personalidad e intereses • estilos de aprendizaje • motivación
	Métodos mixtos	Filtrado Sistemas acumulativos Programas de potenciación
	Otros sistemas	KTII de Kranz Índice EBY

Es necesario contrastar los resultados obtenidos en las pruebas con la conducta del alumno/a. La observación de la conducta del alumno y su forma de proceder son un medio muy destacado para la recogida de información. Se ha de centrar la atención en el lenguaje que utilizan, la calidad de las preguntas que realizan, la forma de comunicar, el diseño de estrategias, la persistencia y la constancia en el trabajo. Es importante también analizar el rendimiento del alumno/a (hacen más cosas que los demás y terminan lo que han empezado). Se ha de valorar también su historial académico y la realización de trabajos excepcionales. Las personas con altas capacidades destacan por su elevada capacidad para aprender cómo se hacen las cosas y para planificar y realizar aquello que han aprendido. Por ello, tienen más producciones y suelen recibir premios y reconocimientos por sus ejecuciones, aunque la ausencia de éstos no tiene porqué pesar en su contra ya que todos no disfrutan de las mismas oportunidades.

3.5. Acción tutorial

Independientemente del tipo de medida educativa que se adopte con este alumnado, uno de los pilares que garantizan un proceso educativo adecuado es la acción tutorial del profesorado. El tutor/a es el profesional que mejor conoce tanto las capacidades como las necesidades de su alumnado: coordina a los diferentes profesionales que intervienen en el proceso de enseñanza de un mismo grupo y tiene la responsabilidad, igualmente, de coordinar el proceso de evaluación. También es la persona que sirve de enlace entre el equipo educativo y las familias. Por todo ello, una adecuada acción tutorial garantizará un proceso educativo ajustado a las necesidades y posibilidades de todo su alumnado y, en nuestro caso, del alumnado con altas capacidades. Las tareas que corresponden al tutor/a son:

- **Conocer las necesidades, aptitudes e intereses del alumno o alumna**. Así podrá detectar las dificultades con las que se encuentra y adoptar las medidas que contribuirán de un modo más acertado a solventarlas. Ello también le permitirá “abrir” el campo de actuación y diversificar las actividades, ofreciéndole proyectos de trabajos atractivos y motivadores, en sintonía con sus capacidades.
- **Coordinar el proceso de enseñanza**. Le corresponde decidir la puesta en marcha de medidas educativas específicas de carácter general como la flexibilización o la adaptación curricular en coordinación con el equipo docente y el orientador u orientadora del centro. Asimismo ha de resolver, día a día, las dificultades cotidianas que el desarrollo ordinario de las actividades escolares conlleva para el alumno o alumna.
- **Coordinar el proceso de evaluación continua**. Es decir, no sólo evaluar su rendimiento en el área o materia en la que imparte docencia directamente, sino realizar un seguimiento de los logros y dificultades que el resto del equipo educativo ha detectado en otras áreas o materias del currículo.
- **Servir de enlace entre los representantes legales del alumno o alumna y el equipo docente**. Con frecuencia la mayor dificultad de entendimiento entre el profesorado y los representantes del alumnado es el desconocimiento de las actuaciones que, para satisfacer las necesidades del alumno o alumna, se están llevando a cabo. La mejor manera de evitarlo es manteniéndoles regularmente informados a través de la tutoría y trasladar sus preocupaciones al equipo docente para dar respuesta a las necesidades del caso que en el centro educativo no hayan sido detectadas o suficientemente atendidas. Para propiciar desde la tutoría la participación de los padres, madres o representantes legales de los alumnos y alumnas con altas capacidades se propone, siguiendo a García Ganuza y colaboradores (1997), lo siguiente:
  - Mantenerles informados sobre las adaptaciones curriculares que se precisen.
  - Integrarles en el proceso de identificación, ayudando a definir las capacidades y áreas de interés de sus hijos.
  - Compartir con ellos el resultado de cualquier evaluación y observación y tenerles informados de los progresos de sus hijos en todas las áreas del currículo.
  - Invitarles a participar en actividades enriquecedoras, solicitar su ayuda para llevar a cabo determinadas actuaciones, asesorar sobre qué actividades podrían realizarse fuera del horario escolar, cómo llevarlas a cabo,...
  - Pedirles su opinión y apoyo sobre lo que se esté haciendo.

4. Estrategias de intervención y respuesta educativa

Para poder proporcionar una respuesta adecuada a las necesidades de este alumnado, el sistema educativo ha de caracterizarse por su flexibilidad: frente a la rigidez de un sistema que no beneficiaría al alumnado, ha de ofrecer distintas posibilidades educativas que permitan al alumno o alumna un desarrollo acorde con sus capacidades; planteamiento de metas u objetivos que favorezcan su desarrollo personal y social; y contenidos acordes con su nivel de competencia curricular. La legislación educativa española reconoce a este alumnado el derecho a recibir una enseñanza adecuada a sus capacidades y características.

La atención educativa al alumnado con sobredotación intelectual puede precisar el empleo de alguna de las siguientes medidas a lo largo de la escolaridad. Éstas son compatibles y aplicables de modo simultáneo si las necesidades del alumno o alumna así lo justifican. No son excluyentes, si bien, en determinados momentos algunas son más pertinentes que otras. Existen, como vamos a ver a continuación, diferentes posibilidades de atención educativa para este alumnado que pasamos a detallar a continuación:

- **Agrupamientos:** La medida consiste en formar grupos, de manera flexible o fija, con un currículo enriquecido y diferenciado. El agrupamiento puede llevarse a cabo de distintos modos, desde la formación de grupos de aprendizaje dentro de la propia aula, a la creación de grupos interniveles dentro del centro escolar. El agrupamiento en clases especiales durante algunas horas del horario lectivo y el resto del tiempo en su grupo/clase, permite trabajar con más amplitud y profundidad aspectos de la propuesta curricular que se elabore y que presenten más dificultad para ser abordados dentro del aula ordinaria.
- **Apoyo educativo:** De forma transitoria, puede ser necesitado por los alumnos y alumnas con sobredotación intelectual para compensar algunas carencias formativas. Tales carencias pueden tener su origen en su "concentración" en determinadas áreas curriculares de su interés, y en la menor dedicación a otras, en principio menos atractivas para ellos. Podemos también entender el apoyo como las actuaciones que realice el centro educativo por parte del profesorado, o más concretamente del especialista en educación especial, para la atención, en determinados momentos, a alumnos y alumnas superdotados de un mismo nivel de competencia curricular, o para la realización de actividades específicamente diseñadas para ellos en pequeños grupos o como puesta en práctica de lo programado en su adaptación curricular.
- **Condensación curricular:** Patrice R. Verhaaren (1990), denomina “condensación” del currículo a una medida pensada para evitar el aburrimiento del alumnado con sobredotación. Verhaaren recoge la descripción de Renzulli según la cual condensar es asegurarse de que un alumno o alumna domina los contenidos de la unidad didáctica que se va a desarrollar con el grupo y dedicar el tiempo que se emplearía en esta unidad en otras actividades de enriquecimiento o de profundización. El profesorado siente, en ocasiones, cierta frustración cuando alguno de sus alumnos o alumnas realiza un trabajo que les resulta demasiado fácil y en el que no encuentra ninguna motivación, terminándolo rápidamente y con una calidad por debajo de la que puede alcanzar. El problema radica en la falta de tiempo para asignarle tareas especiales, profundas y avanzadas, y en la dificultad para encajar las nuevas actividades en la dinámica del grupo. Parece que la fórmula adecuada es adaptar y perfilar la programación de aula, “ajustando” determinados tiempos para que este alumno o alumna se dedique a la profundización en un determinado tema de su interés, en el que haya demostrado talento y habilidad.

- **Enriquecimiento curricular:** Esta medida se basa en la individualización de la enseñanza, y consiste en diseñar programas ajustados a las características y necesidades de cada alumno o alumna. A través del enriquecimiento se pretende ofrecer aprendizajes más ricos y variados modificando con profundidad y extensión el contenido así como la metodología a emplear en la enseñanza. El currículo español, especialmente el de la Educación Secundaria Obligatoria, se caracteriza por su apertura y, por ello, es posible introducir objetivos y contenidos inicialmente no previstos en la planificación siempre que éstos conduzcan, de manera eficaz, a la consecución de las capacidades enunciadas en los objetivos generales de la etapa. Además del enriquecimiento con contenidos propios de las distintas áreas de aprendizaje, para un alumno o alumna con sobredotación intelectual puede ser necesario ampliar su currículo introduciendo contenidos procedimentales y actitudinales, así como los métodos, técnicas y estrategias metodológicas que mejor se ajusten a su estilo de aprendizaje. El enriquecimiento curricular también puede entenderse como la apertura del currículo hacia otros centros de interés, especialmente motivadores para el alumno o alumna, tales como la literatura, el arte, la música, los deportes, la filatelia, las biografías, la ciencia,... La inclusión de estos contenidos está condicionada por dos factores: la posibilidad de que uno o varios profesores, según el caso, ejerzan de "mentores", de guías del aprendizaje; y la disponibilidad de tiempo, dentro del horario escolar, para desarrollar estas actividades alternativas. La forma de conseguirlo es recurrir a la condensación curricular y a formas de atención individualizada o en pequeño grupo en diferentes momentos del horario escolar.
- **Adaptaciones curriculares:** Se entiende por Adaptación Curricular Individual el conjunto de ajustes o modificaciones que se realizan sobre los elementos de acceso o sobre los elementos propiamente curriculares -objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación- del currículo que corresponde a un alumno/a por su edad, para responder a las necesidades educativas especiales que presente. Constituye el nivel máximo de concreción del currículo ya que éste es diseñado y desarrollado ajustándose a las características personales del alumno o alumna. El objetivo que persigue es lograr el máximo desarrollo de las capacidades enunciadas en los objetivos generales de la etapa educativa correspondiente. En la adaptación curricular, no se trata de elaborar programas paralelos al ordinario, sino de actuar, preferiblemente, desde la programación de aula para que cada alumno o alumna realice los aprendizajes con el ritmo y niveles adecuados a sus competencias, sin descartar la posibilidad de aplicar una adaptación individualizada de mayor significación, cuando se considere que ésta es la mejor medida que da respuesta a sus necesidades.
- **Flexibilización del período de escolarización:** Consiste en la reducción, excepcional, del período de escolaridad obligatoria. La decisión de flexibilizar la duración de los diversos niveles y etapas del sistema educativo para este alumnado se adoptará cuando las medidas que el centro haya puesto en marcha, dentro del proceso ordinario de escolarización, se consideren insuficientes para atender adecuadamente sus necesidades y su desarrollo integral, es decir cuando todas la medidas ordinarias al alcance del centro queden agotadas.

La medida de flexibilización (término éste más utilizado en la administración educativa española) también es conocida como "aceleración". Aunque existen numerosas definiciones sobre el término aceleración, podemos apreciar que la mayoría de los autores señalan al respecto que es acelerar significa proporcionar al estudiante un currículo a un nivel más elevado del normal, presentando una información más compleja, con un material más denso; o bien que acelerar significa que el estudiante se mueve a través del currículo estándar a una velocidad mucho más rápida que sus iguales en edad. Es decir; la competencia del estudiante, más que la edad, debería ser el criterio para determinar dónde ubicar curricularmente al alumno o alumna.

Para llevar a cabo la aplicación de esta medida, es imprescindible, igualmente, la evaluación previa y la valoración de la situación personal, escolar y social del alumno o alumna. Igualmente, la flexibilización requiere una adaptación curricular individualizada previa ya que su elaboración y desarrollo nos aseguran que el alumno/a ha conseguido todos aquellos objetivos del curso que pretendemos saltar. Ha de tenerse en cuenta que la flexibilización o aceleración no ha de ser un "salto de curso", sin más, ya que el equipo docente ha de asegurarse que los contenidos de las diferentes áreas curriculares y materias optativas son asimilados por el alumno o alumna.

Es importante tener en cuenta que el alumno/a superdotado tiene un ritmo diferente, más veloz. La aceleración, por lo tanto, responde a las necesidades que plantea el alumnado superdotado de manera rápida y económica, e igualmente permite aprovechar los recursos e infraestructura escolar existentes. Generalmente es una estrategia adecuada para estos alumnos y alumnas ya que requieren mayor cantidad de información y contenidos más complejos. Sin embargo, la aplicación de la medida puede presentar, en ocasiones, importantes inconvenientes, entre los que podemos mencionar los siguientes:

- **Relativos al currículum y los resultados académicos:** se pueden producir lagunas en los aprendizajes, el currículum no se individualiza ni se adapta al superdotado/a...
- **Referidos a sus necesidades educativas:** la presión académica puede ser excesiva, más tiempo a las tareas en detrimento del juego, la exploración, los intereses y hobbies…
- **Relativos a los aspectos socio-emocionales:** la disincronía puede verse acentuada, posible desadaptación con respecto al grupo, al ser más jóvenes tienen menor madurez y experiencia.

5. El desarrollo del talento matemático

Nos vamos a centrar ahora en el talento especial para las matemáticas. Es más frecuente de lo que parece el desarrollo de habilidades tempranas en una materia de un cierto ámbito, quizás el caso más conocido es el del niño o niña que desde muy pronto denota un gran interés por la música o por un deporte concreto. Las canteras deportivas lo tienen muy claro: buscan desde muy pronto a aquellos individuos que tienen unas determinadas cualidades a través de las cuales detectan posibles deportistas de élite.

Un niño o niña que muestra un gran interés por la música es un talento en potencia que los padres y los profesores intentan fomentar. Si ese chico o chica llegar a ser un buen clarinetista o un gran director de orquesta podremos afirmar que tiene un talento especial para la música. Mozart es considerado un genio de la música; desde pequeño mostró unas grandes cualidades que, fomentadas y alimentadas por su padre, hicieron de Mozart uno de los más grandes compositores de la historia. ¿Era Mozart un genio? ¿Era un superdotado? Que era un genio para la música no cabe duda, y casi con toda seguridad era un superdotado. Sus cualidades innatas, sin duda, la observación temprana, la gran influencia y ejercitación de esta cualidad por su padre lo convirtieron en uno de los más grandes genios de la historia de la música. Mozart fue educado como un talento simple, desarrollando al máximo ese talento musical descubierto desde su más tierna infancia. El caso de Leonardo da Vinci es el de un genio con talento complejo (pintura, escritura, ciencia, ingeniería, anatomía…); nadie duda que da Vinci era un superdotado.

Los superdotados suelen desarrollar un determinado talento en un área específica (a veces, como el caso de Leonardo da Vinci, en ámbitos diversos, lo que hoy no es tan frecuente en una sociedad tan especializada como la nuestra). Esto justifica, desde nuestro punto de vista, el fomento de las capacidades, desde edades tempranas, en un área o disciplina determinada como puede ser las matemáticas, cuando se detectan las cualidades, independientemente de que el niño o niña pudiera desarrollarse en otras áreas.

Cuando hablamos de un individuo con talento especial para las matemáticas estamos hablando de un talento simple lo que no significa que no pueda ser un talento múltiple, complejo o un superdotado. De lo que se trata es que, detectadas unas posibles cualidades o habilidades en cualquier ámbito de la vida (digámoslo con esta generalidad), la educación debe asumir que tiene la obligación de desarrollarlas.

El profesor Miguel de Guzmán (1936-2004), fundador del Proyecto Estalmat[1] para la detección y estímulo del talento precoz en matemáticas, planteaba la siguiente cuestión: “Sin duda, en cualquiera de las principales ciudades de nuestro país podemos encontrar a 25 niños de unos trece años con un talento especial para las matemáticas. ¿Qué sucederá con ellos? Si no se hace nada es posible que a lo largo de sus años escolares se aburran, se frustren sin que se les reconozca su talento, incluso ni ellos mismos lo reconocerán. Sus habilidades especiales no serán productivas para la sociedad. Es más, se podría dar el caso de que el aburrimiento les condujera al fracaso.” Miguel de Guzmán plantea no sólo un discurso moral sino también el derroche que supone para una sociedad no saber aprovechar sus recursos humanos, en nuestro caso las AACC en general.

En un artículo publicado en La Gaceta, Miguel de Guzmán (2002) realiza unas observaciones a un estudio de B.S.B. Bloom (1985), sobre 120 profesionales que, a juicio de sus colegas, han obtenido un gran éxito en su profesión. El estudio es realizado a través de entrevistas a dichos profesionales y a sus familiares. Miguel de Guzmán se centra en los 20 matemáticos seleccionados (diecinueve hombres y una

[1] http://estalmat.org

mujer): procedían en su gran mayoría de un ambiente intelectual elevado (en 17 casos los padres tenían estudios superiores y en 11 casos también las madres), con padres que les motivaban y, al mismo tiempo, que los educaban en valores intelectuales, de fortalecimiento de la valoración de sí mismo y en el desarrollo de sus habilidades. La característica más común de los mismos, que destaca el autor, es la de la curiosidad: 15 de los 20 matemáticos eran lectores entusiastas y aproximadamente la mitad de ellos habían tenido un gran interés antes de los doce años por proyectos científicos o de construcción de modelos. Igualmente, 19 de los 20 habían ido a la escuela pública y no recuerdan ningún interés especial por las matemáticas ni tampoco un aprecio especial por sus profesores; los profesores mejor valorados por ellos eran aquellos que les proporcionaban libros o materiales para trabajar por sí mismos.

5.1. Identificación inicial del talento matemático

La detección de un talento no es una tarea sencilla. Hay habilidades, como las físicas, que son, por lo general, más fáciles de observar pues suelen estar asociadas a habilidades motrices, presentes en casi todos los ámbitos de la vida y observables por cualquiera. No es tan fácil observar, pongamos por caso, el talento para la química ya que ni es común en el ámbito familiar ni se desarrolla en edades tempranas en la escuela. Fernández y Pacheco (2003) afirman que “son las oportunidades de acceso a ciertas construcciones intelectuales las que determinan el desarrollo o predominio de según qué cualidades mentales en el devenir de las personas” señalando algo que, aunque evidente, es muy oportuno destacar: “No hay más talento que el despertado por una buena educación”.

Las matemáticas impregnan la vida, incluso en el ámbito familiar. Es cierto que en muchos entornos familiares las matemáticas son sobrevaloradas, consideradas muy difíciles e incluso, llega a verse normal que un niño o niña suspenda. Esto, unido a la confusión que significa a nivel popular la identificación de las matemáticas con las operaciones elementales, los algoritmos y las rutinas, no propicia un ambiente adecuado para que aflore un posible talento en matemáticas. Pero, sin embargo, y a veces por esa misma mitificación de esta materia, cuando en un chico o chica se observan ciertos rasgos (agilidad mental en los cálculos, resolución con cierta facilidad de problemas matemáticos y posiblemente de manera más original que sus padres, especial habilidad para resolver problemas y acertijos, cierta o gran habilidad para el razonamiento…), los padres empiezan a sospechar que sus hijos pueden ser “más inteligentes” y se inicia el proceso de detección que, probablemente, ya ha sido observado en la escuela.

Los alumnos/as con talento reúnen algunas características que pueden hacer que sus profesores, al observarlas, les animen a presentarse a pruebas o tests que determinen si tienen o no un talento especial en matemáticas. Entre estas características, el profesor Miguel de Guzmán en su documento *Tratamiento especial del talento matemático*[2] señala, citando a Greenes (1981) las siguientes características:

- Capacidad especial para la resolución de problemas.
- Formulación espontánea de problemas

[2] Puede consultarse en la página web: http://thales.cica.es/estamat

- Flexibilidad en el uso de datos
- Habilidad para la organización de datos
- Riqueza de ideas
- Originalidad de interpretación
- Habilidad para la transferencia de ideas
- Capacidad de generalización

El autor indica también otras características más generales de un posible talento (no necesariamente matemático): rapidez de aprendizaje; habilidades de observación; memoria excelente; capacidad excepcional verbal y de razonamiento; se aburren fácilmente con las tareas de repetición, revisión y rutinas; poseen un gran potencial de abstracción; capacidad de saltos intuitivos; se arriesgan con gusto en su exploración con ideas nuevas; son curiosos e interrogantes…

Richard C. Miller (1990) señala también, en relación con el talento matemático, algunas características que pueden dar pistas para la identificación:

1. Entusiasmo inusual y una gran curiosidad acerca de la información numérica.
2. Rapidez en el aprendizaje, la comprensión y aplicación de ideas matemáticas.
3. Gran capacidad para pensar y trabajar de manera abstracta y para encontrar patrones y relaciones matemáticas.
4. Habilidad poco común para pensar y trabajar problemas matemáticos de una manera flexible y creativa.
5. Facilidad nada común para transferir los conocimientos a otras situaciones.

Las características enumeradas permiten la detección inicial del posible talento matemático. Pero para una identificación o un diagnóstico, aparte de los tests y pruebas ya señaladas con carácter general, en Matemáticas vienen desarrollándose multitud de actividades encaminadas a la detección del talento en esta materia. Vamos a señalar algunas:

- **Competiciones:** Son el método de detección más extendido y antiguo**.** Este método que en Hungría se viene utilizando desde finales del siglo XIX, propicia que los alumnos y alumnas compitan entre sí como lo hacen los atletas olímpicos pero con problemas matemáticos en cuya resolución se buscan los modos de razonamiento, el ingenio y la capacidad intelectual. Muchas competiciones suelen tener fases en las que, a medida que se avanza, se proponen problemas más difíciles. La competición más universal es la Olimpiada Matemática, que se organiza en los distintos países y que finaliza con una fase internacional en la que participan un gran número de países de todo el mundo. De la importancia de estas competiciones da idea el hecho de que de las últimas cuatro medallas *Fields*, dos han sido medallas de oro y uno de bronce en la Olimpiada Matemática Internacional (OMI). En la actualidad hay competiciones vía on-line, como las que organiza la Mathematical Talent Search (USA) [2] para alumnos entre 12 y 17 años que es la más extendida en los EE UU. Pero si bien han sido y siguen siendo un acicate para la detección de alumnos, no suelen tener continuidad en cuanto a la intervención. Es cierto que en muchos países (China, Rusia, Hungría…, cada vez más en España) tras un primer proceso de selección, los alumnos reciben clases encaminadas a la preparación para las siguientes fases y, en muchos casos, esta preparación se perpetúa durante uno o varios años, pero una vez que fracasan en una fase o culminan el proceso, estos alumnos no suelen seguir un tratamiento. Los más brillantes suelen tener becas y son seguidos en la Universidad correspondiente gracias a la fama de la que vienen precedidos. Desde luego, los alumnos que consiguen una mención en las Olimpiadas Internacionales suelen ser alumnos con una capacidad para las matemáticas más que notable, de eso no hay duda.

- **Concursos:** Se proponen problemas que tal vez no sean fáciles pero que no requieren conocimientos avanzados de matemáticas sino talento especial para esta materia. Es un método muy extendido y, en la mayoría de los casos, local (a veces se realizan en un centro educativo o en una zona, simplemente). Aunque sirven para detectar el talento, suelen desarrollarse con fines principalmente sociales y de aproximación general a las matemáticas y, casi nunca, con la finalidad de llevar a cabo un programa de estímulo con los ganadores.
- **Exámenes de nivel superior:** Se trata de que los alumnos/as candidatos superen claramente unas pruebas normalizadas de un nivel superior al que les correspondería por su edad. Este es el método que desarrolla el proyecto Study of Matematically Precocious Youth (SMPY) [3], ideado por el psicólogo J. Stanley en 1971 en la Universidad Johns Hopkins. El SMPY es un programa dirigido a alumnos de 7 a 14 años. Una información detallada de la historia del mismo y de los criterios de selección puede encontrarse en Lubinski & Benbow (2006). El mismo Stanley desarrolló un modelo de diagnóstico e intervención para estudiantes precoces en matemáticas, descrito brevemente en el artículo *Diagnóstico de errores de niños con talento*, de Castro, Benavides, Segovia (2008). Estos autores recogen en su artículo una versión más actual y realizan algunas modificaciones para "hacerlo más operativo y actual" y construyen un test de aptitud específico centrado en el campo conceptual de la estructura multiplicativa.
- **Pruebas específicas:** Se trata de la realización de unas pruebas diseñadas especialmente y precedidas, en la mayoría de los casos, de un test. Es el modelo diseñado por K. Kiessweter (Universidad de Hamburgo) y B. Zimmerman (Universidad de Jena). En el Proyecto Estalmat que se desarrolla en España, se sigue este método pero sin test. Los alumnos y alumnas que superan la prueba han de realizar una entrevista (también sus padres) antes de ser seleccionados definitivamente.

5.2. Diferentes estrategias de atención educativa

Hay múltiples estrategias de intervención para el estímulo del talento en general y del matemático en particular. Describimos aquí algunas sin pretender en absoluto ser exhaustivos.

- **Escuelas especiales reservadas:** Estas escuelas, reservadas para niños y niñas con especial talento, se caracterizan, Guzmán (2002), porque poseen una gran flexibilidad y estilo universitario, incluso con la libertad de asistencia a clase. Son privadas y tienen un coste altísimo. Entre las desventajas de este tipo de escuelas podemos destacar la segregación de los alumnos y el elevado coste. Según sigue señalando Miguel de Guzmán, una alternativa consistiría en organizar una escuela satélite de servicio a un grupo de escuelas para la atención a alumnos de altas capacidades, sin segregación o una especie de escuela dentro de cada escuela que facilite la orientación de estos alumnos mediante la atención especial a su diversidad.

- **La enseñanza individualizada (enriquecimiento):** Se trata de, una vez detectado el alumno o alumna en el entorno escolar, organizar una asistencia tutelada en la que se incluyen clases especiales y/o materiales de apoyo. Se realiza en horario extraescolar, on-line o de ambos modos.
  El principal inconveniente es que esta labor, debido a la falta de sensibilidad del sistema educativo, se lleve a cabo en muchos casos por profesorado voluntarista, fuera de sus tareas ordinarias y, en muchos casos también, sin tener una preparación adecuada. La gran ventaja es que se realiza dentro del contexto escolar complementándose la enseñanza (enriquecimiento) con otras labores necesarias para el desarrollo de las capacidades del alumno.
  Uno de los programas on-line más ambicioso es el que desarrolla el Center for Talented Youth, (*CTY On line*) [4] de la Universidad Johns Hopkins (EE. UU.). *CTY On line* ofrece cursos a distancia, hoy on-line, desde 1983, para cualquier estudiante talentoso de Estados Unidos, abarcando los grados pre-K a 12. El programa se desarrolla durante todo el año y en la actualidad atiende, aproximadamente a unos 10.000 alumnos.
- **La aceleración:** Es la estrategia educativa seguida oficialmente en los centros educativos de primaria y secundaria españoles para el desarrollo de las capacidades y el fomento de los talentos. Se concreta, bien en la admisión escolar precoz, bien en el paso a una clase de nivel superior. La ventaja de esta estrategia consiste en que se adecua la edad intelectual del alumno a los estudios que realiza. El inconveniente principal es que los alumnos son extraídos del ambiente que le corresponde por su edad. Otro inconveniente viene dado por el hecho de que se avanza el curso completo, ello requiere un rendimiento elevado en todas las materias por lo que el alumno o alumna podría fracasar en aquellas para las que no tiene habilidades especiales.En EE.UU. muchas universidades utilizan esta estrategia admitiendo alumnos precoces. Una experiencia de aceleración muy interesante, que se cita en Hernández (2009) y se describe en [5], se lleva a cabo desde 1987 en la North Texas University (UNT) del estado de Texas (EE.UU.), un programa de estímulo del talento, Texas Academy of Mathematics and Sciences (TAMS). TAMS es un programa residencial que cada año acoge a 200 alumnos del estado de Texas, de alrededor de 15 años, con talento especial para las matemáticas, ciencias o disciplinas afines e interesados en las mismas. Los estudiantes seleccionados, que conviven en una residencia cercana a la Universidad, han de completar durante dos años un programa muy riguroso, individualizado e impartido por el profesorado universitario de la UNT. El alumnado adquiere los créditos necesarios para terminar el bachillerato, lo que permite que muchos de ellos puedan terminar sus estudios superiores alrededor de los 19 años. Un aspecto muy importante es el residencial, pues conviven y comparten actividades con

compañeros con intereses similares, lo que mitiga el problema de descontextualización que se plantea en las estrategias de aceleración.

- **Sesiones especiales en horario no lectivo:** Es el modelo que se sigue en el Proyecto Estalmat, que describimos más adelante. Se trata de seleccionar alumnos que, en horario especial desarrollan actividades en torno a la materia, complementada con otro tipo de actividades. La ventaja de esta estrategia está en que los alumnos no son desgajados de su entorno social y escolar, al que acuden ordinariamente. Por otro lado, también como ventaja hemos de señalar que permite un trabajo colaborativo entre iguales al mismo tiempo que un esfuerzo suplementario y de voluntad para realizar las horas extras que suponen esas sesiones. El principal inconveniente puede venir, precisamente, de la sobrecarga de trabajo que puede llegar a tener el estudiante.
- **Escuelas de verano:** El alumnado seleccionado realiza durante un cierto tiempo, en sus vacaciones de verano, actividades en torno a las matemáticas. Dichas actividades suelen concretarse en la realización de un proyecto en grupo. Es un procedimiento muy extendido y utilizado por muchas universidades e instituciones. En España cabe citar los Campus Científicos de Verano para el fomento de talentos científico-técnicos. Organizados por el Ministerio de Educación español y la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT), pretenden orientar el futuro profesional de alumnos que demuestran unas especiales habilidades en el ámbito científico-tecnológico en el momento de acceder al nivel de Bachillerato. "Además de trabajos prácticos y teóricos, los alumnos llevan a cabo la presentación pública de los resultados obtenidos durante su participación en los proyectos que han elegido, lo que unido a actividades complementarias de ocio científico y cultural, conferencias y encuentros, hacen de ellos un instrumento eficaz para introducir a los alumnos en el mundo del aprendizaje y la investigación científica y tecnológica" (Convocatoria de 2011] [6].

  En Canadá/EE.UU., se desarrolla un programa de verano denominado Mathcamp, [7]. Se trata de un programa intensivo de fomento del talento matemático para alumnos de enseñanza secundaria, de cinco semanas de duración, diseñado para mostrar a los estudiantes la belleza de las ideas matemáticas avanzadas así como nuevas formas de pensar y de abordar problemas. El supuesto del campamento es que el desarrollo de habilidades para resolver problemas les ayudará en cualquier campo que elijan para estudiar.

  Más que un campamento de verano, Mathcamp es una comunidad vibrante, compuesta por una amplia variedad de personas que comparten un amor común de aprendizaje y su pasión por las matemáticas.
- **Talleres y otras actuaciones:** No siempre las estrategias de tratamiento pasan por la detección previa. No por ello queremos dejar de reseñarlas como iniciativas muy interesantes y que ponen de manifiesto lo mejor de un profesorado con vocación.

  Las simples iniciativas de un profesor que propone problemas distintos a los curriculares, como problemas de ingenio o lógica o de utilización de estrategias concretas o de búsquedas de modelo, de manera más o menos sistemática, suponen un enriquecimiento en el bagaje matemático del alumno. En muchos casos esta labor se hace de manera indiscriminada, son propuestas generales, pero sirve para estimular a aquellos alumnos que no tienen otra oportunidad. La consecuencia es que en algún caso el alumno descubre un interés del que no era consciente hasta entonces. Es quizás una labor ciega desde el punto de vista de la acción específica, pero en las circunstancias en que todavía se mueve a nivel institucional el tratamiento de las altas capacidades, es un hecho meritorio en el quehacer anónimo del profesorado, que merece ser destacado. Hoy, además, con la utilización de los recursos que proporcionan las nuevas tecnologías proliferan iniciativas de este tipo en matemáticas.

En esa misma línea, pero de una manera más organizada y en muchos casos con la participación de varios profesores, incluso de distintos centros, están los talleres de matemáticas. Así, desde el curso 2004-2005 funciona en la región de Aragón (España) un **Taller del Talento Matemático** (TTM) [8] que "es una actividad extraescolar, pensada para el alumnado aficionado a las matemáticas, que quiera pasar un rato discurriendo y sacando lo mejor de sus mentes. Está organizado por un grupo de profesores, tanto de enseñanza secundaria como de la Universidad de Zaragoza".

5.3. Opiniones del profesorado respecto al desarrollo del talento matemático

El Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI, ha celebrado recientemente en Paraguay, el curso iberoamericano de formación permanente de profesores de matemática, en el que los autores de este artículo hemos tenido el honor de participar. A través de un cuestionario, el profesorado asistente al mismo, emite su opinión de cada tema. Con respecto al desarrollo del talento matemático, ofrecemos a continuación algunas de las respuestas y comentarios realizados.

Algunas cuestiones que se plantean al profesorado

- *¿Qué piensa del desarrollo del talento, en general? ¿Cómo se puede favorecer?*
- *¿Cómo desarrollar el talento matemático? ¿Qué puede hacer el profesorado para facilitar/favorecer el desarrollo del talento matemático en su alumnado?*
- *¿Qué estrategias de enseñanza-aprendizaje utiliza en su aula para favorecer el desarrollo del talento? ¿Qué actividades lleva a cabo? ¿Qué tipo de recursos emplea?*
- *¿Cree Vd. que se fomenta la cantera científica? ¿Conoce algún tipo de normas que intenten incentivar el talento, en general y matemático en particular?*
- *Seguramente en su práctica educativa se ha encontrado Vd. con algún alumno/a brillante, con algunas o varias de las características de los alumnos con talento. ¿Es así? ¿Puede describir alguna experiencia en este sentido?*

Opiniones del profesorado

Los asistentes al curso manifiestan que, en el transcurso de su desempeño profesional, han utilizado diferentes estrategias educativas y variados recursos y materiales para atender las necesidades y favorecer el desarrollo del alumnado mejor dotado. Entre ellas, por citar algunas, se encuentran los trabajos individuales y grupales, aprendizaje por descubrimiento, el trabajo de investigación, aprendizaje cooperativo… Uno de los alumnos señala que en la metodología de enseñanza habría que tener en cuenta tres aspectos muy importantes: “Garantizar un ambiente adecuado, fomentar la participación y respetar las individualidades”.

Es común que el alumnado con altas capacidades actúe de “ayudante” del profesor, como mentor de sus compañeros de aula. Eso, manifiestan algunos asistentes al curso, les da seguridad y sirve de apoyo a sus compañeros ya que este alumnado transmite a los demás los conocimientos adquiridos con total seguridad.

El profesorado describe que el alumnado sobresaliente siempre está pidiendo “más”, son muy rápidos en aprender, muestran un elevadísimo interés por las explicaciones que se dan en clase, transfieren sus conocimientos a otras áreas y llegan a obtener las soluciones a los problemas que se plantean por caminos diferentes y originales. Por lo general, “se aburren rápido, son inquietos y modestos aunque otros tienen complejo de superioridad”. También indican que “El chico superdotado tiene una curiosidad sin límites y presenta un interés generalizado en casi todas las áreas del conocimiento. Aunque siempre hay cosas que le atraen más que otras, pero siempre demuestra interés en conocer”.

Exponen, de modo generalizado, que se suele dedicar poco tiempo y recursos al desarrollo de las capacidades del alumnado y que no se cuenta con recursos económicos suficientes para pagar al profesorado especializado que se necesitaría; “Existen muchos niños y jóvenes talentosos pero carentes de medios para utilizar el máximo todo lo que tienen”, comenta una alumna del curso.

Otra manifestación generalizada es que la clase social de la que provienen la mayoría de los estudiantes, tiene pocos medios económicos y se encuentra carente, también, de otro tipo de recursos. Ello dificulta el desarrollo del talento y es por lo tanto frecuente que los talentos y bien dotados pasen, por su escolaridad, inadvertidos.

De las distintas estrategias educativas de respuesta a las altas capacidades, las mejor valoradas por los asistentes al curso son la aceleración y las Escuelas de verano. Del resto de estrategias educativas manifiestan la dificultad para ponerlas en práctica debido a los escasos recursos económicos con los que se cuenta y la necesidad de preparación en el profesorado para atender convenientemente las necesidades del alumnado con altas capacidades; “En su mayoría, los docentes no hemos sido preparados y entrenados para hacer frente a situaciones en las que el estudiante requiere un proceso más desafiante para desarrollar sus potenciales o capacidades”, manifiesta un alumno.

“La aceleración –afirma una alumna– particularmente me parece importante porque el alumno talentoso pierde tiempo en un grado inferior y además corre el riesgo de desinteresarse”. Y por otra parte, otra de ellas señala también otro aspecto importante: “El profesorado ha de poseer una preparación pedagógica acorde a la labor que va a desempeñar”.

Describen, los menos, haber tenido algunos alumnos y alumnas superdotados y manifiestan que lo que más les agrada es haber podido contribuir, en el tiempo en que fueron sus profesores, al desarrollo de las capacidades de estos estudiantes y la satisfacción por el agradecimiento que les han mostrado y por verlos, pasado el tiempo, siendo brillantes estudiantes o profesionales destacados.

5.4. El Proyecto Estalmat-*Andalucía*

En Andalucía (región del sur de España), por iniciativa de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática (SAEM) Thales y organizado por la misma, se desarrolla desde el curso 2005/2006 un programa de enriquecimiento curricular conocido como Estalmat-*Andalucía*, para alumnos de 12-14 años con talento especial para las matemáticas, dentro de un marco más general denominado **Proyecto Estamat**. Describimos las líneas generales del citado proyecto y, a continuación, algunas características específicas del proyecto Estalmat en Andalucía.

El Proyecto Estalmat[3]

El Proyecto ESTALMAT (EStímulo del TALento MATemático) es un proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales que tiene como objetivo la *detección* y el *estímulo del talento matemático*, en alumnos de 12-14 años y en cuyo desarrollo colaboran distintas sociedades de Profesores de Matemáticas.

El Proyecto concebido, diseñado e impulsado en su origen por el profesor Miguel de Guzmán Ozámiz, comenzó su andadura en el año 1998 en la Comunidad de Madrid, desde el año 2000 está patrocinado por la Fundación Vodafone-España y, desde el 2007, por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC). Estos patrocinios se extienden a todos los programas que, en la actualidad, el proyecto tiene en España: Comunidades de Madrid, Castilla-León, Canarias, Cataluña, Andalucía, Valencia, Galicia y Cantabria.

El modelo elegido por la Real Academia de Ciencias

A la hora de escoger un modo de proceder que pareciera adecuado y realizable, la Real Academia de Ciencias puso la mirada en dos proyectos ya ensayados con éxito durante bastantes años y de naturaleza bastante parecida, uno en la Universidad John Hopkins, en Baltimore, y otro en Hamburgo. He aquí las líneas fundamentales del nuestro.

Se trata de detectar, orientar y estimular de manera continuada el talento matemático excepcional de unos 25 estudiantes de 12-14 años en cada ámbito (zona geográfica concreta de una Comunidad) sin desarraigarlos de su entorno, mediante una orientación semanal a lo largo de dos años que se efectuará cada sábado durante tres horas.

Se ha elegido ese grupo de edad porque en él se da normalmente el comienzo del razonamiento formal. Los ensayos en otros países que pueden servir de modelos se han hecho con este grupo de edad.

Para los que ya han pasado los dos años iniciales del proyecto se ofrecen sesiones mensuales de carácter voluntario. Aquellos alumnos de Estalmat que lo

---

[3] Lo que describimos acerca del Proyecto Estalmat está extraído de un documento preparado para la presentación del proyecto en las XV Jornadas sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (JAEM), de Gijón (España), a partir de un dossier elaborado por Estalmat-Madrid.

desean pueden asistir a estas reuniones hasta el comienzo de sus estudios universitarios.

Proceso de selección

La selección del alumnado se realiza siguiendo los pasos siguientes:

- Anuncio, hacia el mes de abril, de una prueba de aptitud, a realizar en los comienzos del mes de junio.
- Este anuncio se hace público a través de una carta dirigida a todos los centros de enseñanza primaria y secundaria tanto públicos como privados, mediante publicidad en los medios, a través de las páginas web de cada uno de los programas, etc.
- Realización de la prueba de aptitud a los niños y niñas que anualmente se presentan y que suelen oscilar entre 200 y 1000 alumnos, según la Comunidad.
- Una entrevista con los niños/as preseleccionados a fin de poder calibrar su disposición e interés por su participación en el proyecto.
- Una entrevista, tras la selección inicial, con los padres de los niños en principio admitidos al proyecto a fin de poder cerciorarnos de su disposición a realizar los esfuerzos que la pertenencia de su hijo o hija al proyecto entraña.

Actividades

- **Campamento e inauguración:** Tras la selección de los niños y niñas, realizada en junio de cada año, antes de comenzar las sesiones de trabajo propiamente dichas, se invita a los seleccionados a pasar un fin de semana de septiembre en un campamento. El principal objetivo de esta actividad es que se conozcan entre sí y, de este modo, facilitar la formación de los distintos grupos de trabajo. Durante la inauguración del curso, que se celebra anualmente, se imparte una conferencia por personalidades relevantes en el mundo de la ciencia, de la tecnología y de la divulgación científica.
- **Actividad principal:** La acción principal del proyecto dura dos años académicos, desde octubre a junio y consiste en la atención continuada al desarrollo de la afición y gusto por la matemática de los niños/as seleccionados. Estas son las principales características de esta acción:
    - Una sesión de tres horas semanales desde octubre hasta junio los sábados por la mañana; se realizan un total de 21-22 sesiones, procurando que cada dos o tres quede un sábado libre. El horario suele ser de 10 a 13:30 (con media hora de recreo),
    - Bajo la dirección de profesores elegidos adecuadamente; en cada sesión participan, al menos, dos profesores,
    - Con temas de trabajo como los siguientes: visualización de fórmulas, geometría dinámica, juegos de estrategia, combinatoria, sistemas de numeración, divisibilidad, invariantes y coloración, etc.; temas que, a veces en su contenido y desde luego en su tratamiento, tienen poco que ver con los de la enseñanza curricular reglada.

- **Actividad conjunta de todos los programas**: **Matemáticas al sprint** Al finalizar el primer trimestre, es ya tradicional el concurso Matemáticas al sprint. En él participan, on-line, los alumnos y alumnas de los distintos programas del país. Durante dos horas y trabajando en grupo, tratan de resolver los problemas que se les proponen; algunos problemas están encadenados y son necesarias las soluciones de algunos de ellos para poder encontrar las soluciones de los siguientes. Fomenta el espíritu de colaboración para conseguir resolver los problemas correctamente en el menor tiempo posible.

- **Seguimiento** Los alumnos que han estado en el proyecto durante dos años pasan a una fase distinta en la que no pierden el contacto con los profesores del proyecto. Una vez al mes, opcionalmente, se reúnen con los profesores para seguir recibiendo orientaciones de diverso tipo para su trabajo personal. Los hay que tienen interés en prepararse para las olimpiadas matemáticas nacionales o internacionales, y para ello reciben consejos adecuados, y los hay que siguen buscando pautas de trabajo en su dedicación pausada y gustosa por las matemáticas.

- **Publicaciones** El Proyecto Estalmat ha publicado un libro con actividades de primer año: **Matemáticas para Estimular el Talento** *Actividades del Proyecto Estalmat;* y tiene en prensa otro con actividades de segundo año: **Matemáticas para Estimular el Talento II**, con el mismo subtítulo. **Página web:** Puede encontrarse más información del proyecto en la siguiente dirección: http://www.estalmat.org

El Proyecto Estalmat en *Andalucía*. Especificidades.

- **Organización**: En Andalucía, con una población de más de ocho millones de habitantes y una extensión de este a oeste de más de 500 km, existen dos Sedes, una en Granada, ubicada en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada y otra en Sevilla, radicada en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. En cada Sede se seleccionan 25 alumnos, tras una prueba común en toda Andalucía y coordinada con los demás Programas. La prueba, y las entrevistas, se realizan por provincias. Los alumnos/as seleccionados en Andalucía Occidental (Cádiz, Córdoba, Huelva y Sevilla) acuden los sábados a la Sede de Sevilla y los alumnos seleccionados en Andalucía Oriental (Almería, Granada, Jaén y Málaga) realizan las actividades en la sede de Granada. La organización y funcionamiento de cada Sede corre a cargo de un Consejo Asesor compuesto por cinco profesores y presidido por un coordinador de Sede. La coordinación en Andalucía está a cargo de un Consejo Asesor de Andalucía, compuesto por representantes de los Consejos Asesores de Sede y presidido por el coordinador del Proyecto, nombrado por la Junta Directiva de la SAEM Thales.

- **Profesorado**: En cada Sede existe un equipo de profesores de todos los niveles compuesto en cada caso por unos 25 profesores. La coordinación de las actividades se lleva a cabo mediante informes realizados tras cada sesión y colocados en la web interna para conocimiento del profesorado.

- **Colaboraciones**: Aparte de las entidades citadas que colaboran con carácter general con todos los Programas a través de la Real Academia de Ciencias, en Andalucía colaboran específicamente: el gobierno autónomo de Andalucía a través de la Consejería de Educación -que colabora en la difusión de la convocatoria- y a través de la Consejería de Economía, Innovación y Ciencia, en convenio firmado con la Fundación Vodafone-España y la SAEM Thales; todas las Universidades andaluzas, destacando las de Granada y Sevilla con sendos convenios de colaboración. Finalmente, La Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT), en convenio suscrito con una o varias Universidades andaluzas.

- **Actividades**:

Sesiones: se sigue el esquema señalado en el epígrafe de Actividades principales para todos los programas.
Campamentos: se realizan tres campamentos cuyo objetivo principal es la convivencia entre el alumnado:
Inauguración y clausura: Es conjunta para ambas sedes. Aparte de las actividades de todo tipo, en los campamentos inicial y final se realizan los actos de apertura y clausura formales del curso, con asistencia de autoridades y padres y madres y la impartición de una conferencia de corta duración dirigida al alumnado. En el campamento de clausura se entregan los Diplomas a los alumnos egresados de 2º año. Los Diplomas están expedidos por el Presidente de la Real Academia de Ciencias. El campamento de inauguración se lleva a cabo de viernes por la tarde a domingo por la mañana; el de clausura, de sábado por la mañana a domingo por la mañana.
Intermedio: En el primer o segundo trimestre se realiza, en cada sede, un campamento de un día completo de duración (de sábado por la mañana a domingo por la mañana), cuyo objetivo es la convivencia entre el alumnado de la sede (1º y 2º). Se realiza una sesión (más corta en duración) y actividades principalmente lúdicas y de conocimiento del entorno en el que se ha ubicado el campamento.
Visitas matemáticas y culturales. Incluidas como actividades del campamento o programadas independientemente, se realizan actividades de enriquecimiento como visitas a monumentos históricos (Mezquita, Alhambra), en las que se desarrollan actividades matemáticas y culturales; o a centros científicos (Parque de las Ciencias de Granada, Calar Alto u otros del CSIC); o simplemente culturales o históricos, como Medina Azahara o de conocimiento del entorno en el que se ubica el campamento.

- **Asociación AMPROES**: En el curso actual se ha constituido una Asociación de amigos de Estalmat (AMPROES), promovida por padres y madres del alumnado del Programa, en la que también tienen cabida todos los interesados en el Proyecto. El fin de dicha Asociación es colaborar con los fines del proyecto y promover actividades, principalmente culturales y de convivencia, entre el alumnado.

- **Página web**: Una amplia información, con un histórico por cursos, puede encontrase en**:** **http://thales.cica.es/estalmat**

Bibliografía

Acereda, A. y Sastre, S. (1998). *La Superdotación*. Síntesis. Madrid. España.

Bloom, B. (1985). *Developing Talent in Young People*. Ballantine. New York.

Castro, E., Benavides y M., Segovia, I. (2008). *Diagnóstico de errores en niños con talento. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 16, 123-140.

Fernández, I. y Pacheco, J. (2003). *Sobre el talento (matemático).* En *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas* 33, 6-12.

Fernández-Mota, M.E.; Fernández-Abascal, M.T.; García-Gálvez, C. y García-Latorre, J. (2001). *Guía para la atención educativa a los alumnos y alumnas con sobredotación intelectual*. Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía. Sevilla. España.

García-Ganuza, J.M. y Abaurrea, V. (1997). *Alumnado con sobredotación intelectual/altas capacidades. Orientaciones para la respuesta educativa. Pamplona*. Fondo de publicaciones del Gobierno de Navarra. Departamento de Educación y Cultura. Navarra. España.

Greenes, C. (1981). *Indentifying the Gifted Student in Mathematics,* en Aritmetics Teacher, 28, 14-17.

Guzmán, M. (2002).*Un programa para detector y estimular el talento matemático precoz en la Comunidad de Madrid En La Gaceta de la RSME,* 5.1, 131-140.

Hernández, E. (2009). Talento precoz en matemáticas: Modelos de detección y programas de estímulo. En *Matemáticas para estimular el talento. Actividades del proyecto Estalmat*. SAEM Thales.

Jiménez-Fernández, C. (1994). *Educación diferenciada del alumno bien dotado*. UNED. Madrid. España.

Lubinski, D. y Benbow, C. (2006). Study of Mathematically Precocious Youth After 35 Years, en *Perspective on Psycological Science*, 4, Vol. 1, 316-345. Documento disponible en:
http://www.vanderbilt.edu/Peabody/SMPY/DoingPsychScience2006.pdf

Miller, R. (1990). Discovering Mathematical Talent. Fuente: ERIC Clearinghouse on Handicapped and Gifted Children Reston VA. Disponible en: http://www.nagc.org/index.aspx?id=127

Pérez-Sánchez, L. (Dir) (1993). *Diez palabras clave en superdotados*. Verbo Divino. Estella (Navarra). España.

Pérez-Sánchez, L., Domínguez, P. y Díaz, O. (1998). *La educación de los más capaces: Guía para educadores*. Ministerio de Educación y Cultura, coordinado por la Subdirección General de Educación Especial y Atención a la Diversidad. Madrid. España.

Renzulli, J.S. (1994). El concepto de los tres anillos de la superdotación: un modelo de desarrollo para una productividad creativa. En Y. Benito (Dir.), *Intervención e investigación psicoeducativas en alumnos superdotados*, pp. 41-78. Amarú Ediciones. Salamanca. España.

Reyero, M. y Tourón, J. (2003). *El desarrollo del talento. La aceleración como estrategia educativa*. Netbiblo. Z Coruña. España.

Sánchez Manzano, E. (2003).*Los niños superdotados: una aproximación a su realidad*. Edita: Defensor del Menor en la Comunidad de Madrid. Disponible en:http://www.defensordelmenor.org/upload/documentacion/publicaciones/pdf/los_ninos_superdotados.pdf

Sipán, A. (Coord.) (1999). *Respuestas educativas para alumnos superdotados y talentosos*. Mira Editores. Zaragoza. España.

Verhaaren, P.R. (1990). *Educación de alumnos superdotados. Una introducción a sus características, necesidades educativas y a las adaptaciones curriculares que precisan*. MEC. Madrid. España.

Documentos e información en la web:
[1] http://www.ucm.es/info/sees/web/principal_espanol.htm
[2] http://www.usamts.org/
[3] http://www.vanderbilt.edu/Peabody/SMPY/
[4] http://cty.jhu.edu/ctyonline/index.html
[5] https://tams.unt.edu
[6]http://www.campuscientificos.es/pdf/convocatoria.pdf).
[7] http://www.mathcamp.org/
[8] http://www.unizar.es/ttm

María Encarnación Fernández Mota: Doctora en Psicología, especializada en el estudio de Altas Capacidades. Asesora de formación en el Centro del Profesorado de Castilleja de la Cuesta. Sevilla. España.
fernandezmota@gmail.com

Antonio de J. Pérez Jiménez: Departamento de la Computación e Inteligencia Artificial. Universidad de Sevilla.España. Coordinador del Proyecto Estalmat-Andalucía.
pjimenez@us.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 115-129
ISSN: 1815-0640

Estudio de habilidades matemáticas cuando se realizan actividades usando software específico

Betina Williner

Resumen

Este artículo presenta un estudio exploratorio sobre el aprendizaje de habilidades matemáticas cuando los estudiantes trabajan en actividades utilizando software de tipo no didáctico, en este caso el *Mathematica*. La experiencia se realizó en un curso de primer año de la asignatura Análisis Matemático I correspondiente a las carreras de Ingeniería Industrial, Electrónica e Informática de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM).

Abstract

This article presents an exploratory study of learning math skills as students work on activities using non-teaching software, in this case, Mathematica. The experiment was performed in a first-year course of Calculus I in careers of Industrial Engineering, Electronics and Computer Science at the Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM).

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo exploratório de aprendizagem matemática como os estudantes trabalham em atividades utilizadoras de software no ensino não, neste caso, Mathematica. O experimento foi realizado em um curso do primeiro ano do curso de Cálculo I para carreiras em Engenharia Industrial, Electrónica e Informática da Universidade Nacional de La Matanza (UNLaM).

1. Introducción

Enfrentar una sociedad como la actual, en constante cambio, hace que como docentes debamos crear escenarios que posibiliten a cada uno de nuestros alumnos dar, a través de su propio quehacer, una participación responsable, comprometida y creativa en la vida social. Para ello, es indispensable que los estudiantes adquieran no sólo un conjunto de conocimientos, sino también que desarrollen habilidades que les permitan “saber hacer”, saber actuar en la resolución de nuevas situaciones. A esto debemos sumarle la introducción de nuevas tecnologías informáticas, las que, sin duda, han enriquecido el proceso de enseñanza - aprendizaje.

La National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) declara que el currículo de matemáticas de todos los niveles, debe incorporar la tecnología educativa en pro de un aprendizaje más efectivo y el desarrollo de habilidades por parte del estudiante. Agrega que es función de los docentes prepararse para efectuar decisiones sobre cómo y cuándo los alumnos pueden usar estas herramientas de un modo más efectivo.

Estas dos realidades: competencias-habilidades y uso de tecnología, hacen que como docentes y formadores no podamos conformarnos en presentar el conocimiento en forma lineal y estática. Debemos responder a las demandas actuales de una sociedad tecnológica y cambiante.

Encontramos numerosas experiencias en las que la tecnología se utiliza con el objetivo de favorecer la exploración de distintas situaciones, el trabajo con gráficos para visualizar, la creación de conjeturas, la generalización, entre otras. Por ejemplo: Ángel y Bautista (2001) proponen algunas actividades usando software donde se utiliza la computadora como una calculadora potente y como graficador. Güichal et al (2009) diseñaron actividades de creación de conjeturas y de exploración. El énfasis, en estos casos, está puesto en habilidades de indagación, de visualización, de operatoria con gran cantidad de datos y de aplicación de métodos numéricos.

Por nuestra parte, nos preguntamos: ¿puede fomentarse, con el uso de un software matemático, el aprendizaje de otro tipo de habilidades, como por ejemplo las de argumentación? ¿Contribuye la visualización y rápida operatoria propias de la computadora al desarrollo de este tipo de habilidades?

2. Marco Teórico

Nuestro fundamento teórico está basado en:

2.1. Habilidades matemáticas

Si buscamos en el diccionario sinónimos de habilidad encontramos, entre ellos, capacidad, destreza y competencia. Sin embargo, en el marco educativo, y en particular en Matemática, no todos son utilizados como sinónimos.

Herminia Hernández (1998) define los "procedimientos" (habilidades) como los modos de actuación. Aclara que no puede haber un conocimiento sin un procedimiento bajo el cual funcione, y, viceversa, no puede haber un procedimiento sin que esté asociado a un conocimiento. Estos procedimientos o habilidades son las acciones o tareas que sistemáticamente se ejecutan en matemática para la logro de un objetivo. Zabala (2007) toma las destrezas y habilidades dentro de los contenidos procedimentales, a los que define como conjunto de acciones para lograr un fin. Sánchez (2002), por su parte, discierne al conocimiento como semántico o procedimental. El conocimiento semántico es la información sobre los conceptos, teorías, hechos, principios, reglas que conforman una disciplina o campo de estudio. El conocimiento procedimental se define como un conjunto ordenado de pasos o acciones que acompañan un acto mental o actividad motora.

Si realizamos un paralelo entre todos estos autores, más allá de las diferencias de denominación, consideran por un lado toda la información que recibe una persona (conceptos, teorías, hechos, definiciones, propiedades, atributos) que podríamos englobarlos en "conocimiento", y por otro las acciones y aplicaciones que puede realizar el individuo con ese conocimiento: las habilidades.

Así consideramos que una habilidad matemática es la capacidad de efectuar o realizar una tarea matemática eficientemente o de actuar adecuadamente frente a una situación, en la que la Matemática está involucrada. Son las acciones o tareas que efectuamos en forma sistemática para lograr un objetivo.

En cuanto a la clasificación de habilidades, encontramos en la bibliografía diferentes opciones. Éstas dependen, en cierta medida, del enfoque dado al concepto y de los objetivos que persigue cada autor a la hora de categorizarlas.

Una primera clasificación la encontramos en la “Taxonomía de Bloom”, en las habilidades del dominio cognitivo, en la que se establecen seis categorías básicas según la función de la acción en la que la habilidad se manifiesta: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis, evaluación. Por otro lado, Delgado Rubí, citando también a Hernández, Valverde y Rodríguez (Hernández et al, 1998), las agrupa en:

- Habilidades conceptuales: aquellas que operan directamente con los conceptos (Identificar, Fundamentar, Comparar, Demostrar)
- Habilidades traductoras : aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento (Interpretar, Modelar, Recodificar)
- Habilidades operativas: están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (Graficar, Algoritmizar, Aproximar, Optimizar, Calcular)
- Habilidades heurísticas: aquellas que emplean recursos heurísticos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (Resolver, Analizar, Explorar)
- Habilidades metacognitivas: las que son necesarias para la adquisición, empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas (Planificar, Predecir, Verificar, Comprobar, Controlar)

La que suscribe participó en una investigación (Falsetti, Favieri, Scorzo y Williner, 2009) donde utilizamos la clasificación que realiza Delgado Rubí brindada anteriormente, pero tuvimos la necesidad de involucrar cada habilidad con el conocimiento al cual estaba ligada. A modo de ejemplo, consideramos que no tiene el mismo grado de dificultad *Identificar* el dominio de una función que *Identificar* los puntos críticos de una función. Así obtuvimos una clasificación del tipo habilidad-contenido y sobre la base de ésta realizamos el estudio citado.

Existen también otras clasificaciones: Rodríguez Núñez et al (2005), las dividen en: de auto-educación, operaciones y métodos de pensamiento, lógico-formales, lógico-dialécticas; Formica, González y Rodríguez (2009) hablan de habilidades respecto de la operatoria, habilidades respecto a la lógica y argumentación, interpretación matemática, sujetas al contenido matemático, etc.

2.2. Aprendizaje de la matemática haciendo uso de la computadora

Encontramos varias investigaciones en las que se presentan los cambios en la forma de trabajo y los logros en el aprendizaje obtenidos al incorporar herramientas informáticas a la clase de Matemática (Cuicas Ávila, Debel Chourio, Casadei Carniel y Alvarez Vargas, 2007; Ramos Rodríguez y Baquedano Jer, 2006; Castillo, 2008; Depool y Camacho, 2001). Así como otros (Contreras de la Fuente et al, 2005) exponen que el uso de recursos informáticos no garantiza resultados satisfactorios en la enseñanza-aprendizaje de conceptos como límite, continuidad y derivada de una función. Existen también diversas posiciones ante la incorporación de la computadora en la clase: para algunos es indispensable y todas las prácticas deben hacerse con su uso, otros opinan que no hay que abusar de esta herramienta para así mantener la motivación de los alumnos y también están aquellos que no las integrarían a su clase por temor a los cambios que esto pueda provocar.

En particular, nosotros nos concentraremos en el uso de la computadora como “herramienta”. Jonassen, Carr y Ping (1998) afirman que la tecnología debe usarse como una herramienta de construcción del conocimiento, de manera que los estudiantes aprendan “con” ella y no “de” ella. Agregan que las computadoras pueden favorecer más efectivamente el aprendizaje significativo y la construcción del conocimiento en la educación superior, como herramientas de amplificación cognitiva para reflexionar sobre lo que los estudiantes han aprendido y lo que saben.

Basamos nuestra experiencia en el diseño de actividades usando software *Mathematica,* considerado como una herramienta informática muy poderosa y útil. Este software fue elegido por diversas razones: es el que cuenta la Universidad, tiene gran potencial de cálculo y gráficos, y por la simplicidad de los comandos que dispone. Al respecto, Ávila Guerrera (1998) citado por Vílchez Quesada (2007), opina que el *Mathematica* se convirtió probablemente en el mejor ambiente integrado para realizar computación técnica, cuya mayor ventaja es la integración de tareas específicas como análisis numérico, álgebra lineal y graficación mediante un lenguaje simbólico de fácil manipulación

3. Nuestro contexto

La experiencia se llevó a cabo en uno de los cursos de la asignatura Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería Informática, Industrial y Electrónica de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM). El grupo que participó de la misma está formado por 24 alumnos de ambos sexos, con edades que oscilan entre 18 y 20 años. Cabe aclarar que 8 alumnos cursan la materia por segunda vez.

Nuestra cátedra establece, como uno de los requisitos de promoción o regularización (derecho a examen final) de la materia, la aprobación de trabajos prácticos realizados con software *Mathematica* (que se entregan en soporte impreso) y la defensa individual de los mismos (a fin de cuatrimestre). Es por esta razón, que en el momento de comenzar con las actividades diseñadas, los estudiantes conocían los comandos básicos del programa.

Debido a que toda habilidad está ligada a un conocimiento, el tema que elegimos para llevar adelante la propuesta es “Derivada”. Además de ser uno de los pilares del Análisis Matemático, trabajar con derivadas enriquece nuestro estudio en el sentido que nos permite promover diversas habilidades. Podemos abordarlo desde un enfoque geométrico (como pendiente de la recta tangente), desde un enfoque formal (límite del cociente incremental) o desde un enfoque variacional (velocidad instantánea en Física, tasa de crecimiento instantáneo en Biología, etc.) (Dolores, 2000).

3.1. Objetivos generales

- Diseñar un dispositivo didáctico con uso de software específico (*Mathematica*), con el propósito de fomentar el aprendizaje de habilidades matemáticas, en particular las de argumentación.
- Analizar las producciones de los alumnos respecto al aprendizaje de las habilidades promovidas, una vez realizadas las actividades.

3.2. Metodología

Detallamos a continuación las acciones llevadas a cabo:

3.2.1. Selección de las habilidades a estudiar

Para elegir las habilidades a promover a través de las actividades, y de acuerdo al tema elegido, nos propusimos como objetivo principal la comprensión del concepto de derivada y de sus aplicaciones. Nickerson, Perkins y Smith (1987) consideran que "la capacidad de desarrollar y utilizar modelos conceptuales" es uno de los aspectos a considerar en la competencia intelectual. Inspirados en estos autores, decidimos centramos en *habilidades conceptuales* ("capacidad de desarrollar modelos conceptuales"), *de aplicación* ("capacidad de utilizar modelos conceptuales") y complementamos, de acuerdo a nuestro objetivo, con *habilidades de argumentación*. Presentamos un cuadro con las habilidades que definimos para estudiar:

Tabla 1

Habilidades generales	Habilidades específicas a estudiar en relación con "Derivadas"	Código
Habilidades conceptuales. Consideraremos habilidades conceptuales a aquellas que permiten reconocer el concepto de diferentes maneras: por su definición (formalmente), por sus representaciones semióticas o en su aplicación a otras ciencias. Las simbolizamos con HC	♦Interpretar geométricamente. ♦Reconocer el concepto en otras ciencias u otros contextos (velocidad instantánea en Física, tasa de crecimiento instantánea en Biología, etc.). ♦Extraer o Dar significados de expresiones dadas en forma simbólica o formal.	HC1 HC2 HC3
Habilidades de aplicación. Son aquellas que permiten utilizar el concepto en cuestión, propiedades y resultados teóricos sobre el mismo, en la resolución de ejercicios y/o problemas. Las denotamos HAP	♦Aplicar resultados teóricos (definiciones, propiedades) a problemas prácticos en sentido directo (Por ejemplo hallar la recta tangente una curva en un punto dado) ♦Aplicar resultados teóricos a problemas prácticos en orden inverso al presentado en clase (Por ejemplo: dada la recta tangente a una curva en x = a hallar f(a) y f'(a)) ♦Aplicar técnicas de cálculo, y algoritmos.	HAP1 HAP2 HAP3
Habilidades de argumentación. Son las que nos permiten dar una prueba, demostración o sacar conclusiones a partir de datos. Las designamos HAR	♦Apelar a resultados teóricos para justificar. ♦Usar contraejemplos para probar que una proposición es falsa.	HAR1 HAR2

Con respecto a las habilidades de "Extraer y dar significados de expresiones dadas en forma simbólica o formal" nos basamos en las ideas de Tall y Fusaro Pinto

(2002). Estos autores consideran dos modelos que utilizan los estudiantes en la construcción de definiciones:

- *Dar significado* (construido sobre ideas informales): dar significado a un concepto desde una imagen.
- *Extraer significado* (construido sobre teoría formal): extraer significado desde un concepto realizando deducciones formales.

¿Por qué consideramos a éstas habilidades relevantes para ser estudiadas? Autores como Stewart (1999) consideran que la meta primaria en la reforma en la enseñanza del Cálculo debe ser *"Enfocarse en la comprensión conceptual"*.

Consideramos que si el alumno logra desarrollar las habilidades seleccionadas, será indicativo de la comprensión del concepto.

3.2.2. Diseño de actividades sobre los temas elegidos poniendo especial énfasis en que promuevan las habilidades seleccionadas.

Diseñamos seis actividades (cada una con varios ejercicios) para ser realizadas en uno de los laboratorios de la Universidad cuyas computadoras están cargadas con software *Mathematica.* En el momento que los alumnos desarrollaron la actividad presentada en este artículo (sobre el Teorema del Valor medio), ya habían tenido dos encuentros previos:

- Actividad 1: cuyos objetivos fueron: Identificar el cociente incremental como razón de cambio promedio, predecir el valor de la razón de cambio instantánea en un punto a partir de los valores de la razón de cambio promedio, aplicar el concepto de límite para hallar la razón de cambio instantánea, identificar a la derivada en un punto como razón de cambio instantánea, interpretar el cociente incremental como pendiente de la recta secante, interpretar la derivada en un punto como pendiente de la recta tangente y aplicar reglas de derivación.
- Actividad 2: con los siguientes objetivos: Identificar (gráficamente y analíticamente) puntos que no tienen derivada, interpretar geométricamente el concepto de derivada, identificar la definición formal de derivada, identificar la relación entre la derivabilidad y continuidad de una función en un punto, reconocer que la recta tangente a una función en un punto y el gráfico de dicha curva pueden intersecarse en más de un punto.

Diseñamos las actividades para fomentar el desarrollo de habilidades conceptuales, de aplicación y de argumentación elegidas para ser estudiadas en la investigación. En el caso de las habilidades conceptuales, como explicamos anteriormente, abordamos el concepto de derivada en forma geométrica, aplicada y formal. Las habilidades de aplicación las promovemos cuando diseñamos actividades que fomentan el empleo de resultados teóricos estudiados en clase y las presentamos ya sea con la secuencia que fueron tratados o en orden inverso. En otros ejercicios el alumno debe utilizar algoritmos para derivar, calcular rectas tangentes, hallar raíces de las derivadas primera y segunda, etc. En la mayoría de los trabajos solicitamos al estudiante la justificación de los pasos realizados o de las elecciones efectuadas, de manera tal de poder evaluar las habilidades de argumentación.

3.2.3. Análisis preliminar de las actividades propuestas

Realizamos un análisis preliminar de cada una de las actividades. Es decir, pensamos qué habilidades (de las seleccionadas) son promovidas por cada uno de los ejercicios. Presentamos aquí los dos primeros ejercicios correspondientes a la Actividad 3 y su análisis preliminar de habilidades:

Ejercicio 1

a) Graficar la función $f(x)=x^3-2x$ en el intervalo [-2,2] (en la pantalla el gráfico debe verse en el rectángulo: $[-3,3]x[-5,5]$)

b) ¿Cómo puedes mostrar en el gráfico que se cumple el teorema del valor medio en el intervalo [-2,2]?

c) Calcular los valores exactos de los números c que satisfacen la conclusión del teorema.

Ejercicio 2

a) Dada $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, hallar valores de a y b en el intervalo (0,2) para los cuales existe c tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Exhibir c en cada caso. Verificar si en cada caso se cumplen las condiciones del teorema de Lagrange.

b) Para cualquier par de números reales a y b en el intervalo (0,2), con a < b ¿es posible hallar c en el intervalo (a, b) tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$?

c) Demostrar que no hay un valor de c tal que $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$ ¿qué sucede con el resultado del teorema del valor medio? Justificar.

Tabla 2

Ejercicio	Habilidad	Acción
1	HC1	Identificar la derivada como pendiente de la recta tangente y el cociente incremental como la pendiente de la recta secante.
	HAP1	Aplicar la interpretación geométrica del teorema de Lagrange para poder mostrarlo gráficamente
	HAR1	Justificar que se cumplen las hipótesis del teorema
	HAP3	Calcular el o los puntos c que satisfacen la tesis del teorema.
2 a)	HC3	Dar y/o extraer significado de la expresión formal dada.
	HAP2-HAR1	Buscar intervalos donde se cumpla el teorema (es en sentido inverso porque, en general se da el intervalo de aplicación y el alumno debe estudiar condiciones y encontrar, en lo posible, el punto intermedio c). Justificar las hipótesis del mismo en esos intervalos
	HAP3	Calcular el punto intermedio c en los intervalos hallados.
2b)	HC3	Dar y/o extraer significado de la expresión formal dada.
	HAP2-HAR1	Buscar un intervalo en donde no se cumpla el teorema y justificar los pasos seguidos
2c)	HC3	Dar y/o extraer significado de la expresión formal dada.
	HAP2	Identificar que no se cumple la tesis del teorema
	HAR1	Justificar por qué el no cumplimiento de la tesis no contradice el teorema en cuestión.

Aclaramos que en estos ejercicios no encontramos la habilidad HC2 definida anteriormente. No agregamos el ejercicio que la involucraba por cuestión de espacio en el artículo.

3.2.4. La experiencia

La experiencia se llevó a cabo en un curso de la asignatura Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería Electrónica, Informática e Industrial de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM). El régimen de cursada de la asignatura es cuatrimestral. Luego que la docente a cargo explicó en forma expositiva tradicional el concepto de derivada, los alumnos comenzaron a asistir a uno de los Laboratorios de Computación de la Universidad para trabajar con las actividades. Formaron equipos de dos o tres personas, trabajaron bajo la modalidad taller con la guía de un docente y en espacios de dos horas cada uno. Esta tarea fue alternada con las clases teóricas y prácticas de la materia, siguiendo el cronograma establecido por la cátedra. La ejercitación consistió en actividades de refuerzo, que invitan a reflexionar y revisar los temas ya expuestos en clase.

3.2.5. Análisis de las producciones de los alumnos

Los alumnos se agruparon en 12 equipos de dos personas cada uno. Analizamos las producciones, realizadas en archivo *Mathematica*, que los estudiantes guardaron en la computadora en la que efectuaron la ejercitación.

<u>Ejercicio 1</u>

En este ejercicio dimos una función cúbica que los alumnos debían graficar en un determinado cuadro. Luego les preguntamos cómo podían mostrar, en el gráfico, que se cumple el teorema del valor medio. Después solicitamos los valores exactos del o los puntos intermedios “c”. Recordemos que esta fue la tercera actividad realizada por el grupo. Si comparamos el comportamiento reflejado en las primeras actividades, es notable la independencia adquirida respecto al docente (fue menor la cantidad de consultas que realizaron) y respecto a guiarse en forma auxiliar con lápiz y papel (prácticamente no lo usaron).

La primera acción que evidenciamos en todas las producciones estudiadas fue la de graficar la función en el cuadro solicitado. En esta oportunidad vimos actitudes como poner una regla en la pantalla para ver dónde estaban los puntos buscados, entre otras. El *Mathematica* no es un software educativo, no permite con un cursor crear líneas. Para poder mostrar gráficamente hay que ingresar las expresiones analíticas de lo que queremos graficar. De todas formas podían responder cuáles eran los pasos a seguir, pero solo dos equipos lo intentaron. Transcribimos sus respuestas:

Cuadro 1

“Se puede demostrar gráficamente el teorema debido a que la función es continua en el intervalo [-2,2] (es un polinomio) y es derivable en el intervalo (-2,2) (no existen puntos angulosos). Por lo tanto existe al menos un valor de c perteneciente a (-2,2) que cumple las condiciones del Teorema de Lagrange”   “Como f es continua en el intervalo [-2;2] y derivable en (-2;2), deducimos que existe un c en el cual la función es derivable. Se puede obtener la tangente en ese punto y comprobar de esa forma (según teorema de Lagrange) que la misma es paralela a la recta secante que une a con b.

Observemos que el primer equipo no contestó cómo mostrarían el resultado, sino que prácticamente enuncian el teorema en el intervalo dado. El segundo trató de expresar cómo lo haría, aunque no es del todo claro en la redacción. Seis de los doce equipos indican que se cumplen las hipótesis del teorema (HAR1). La mayoría justifica la continuidad y la derivabilidad por ser una función polinómica. Todos calcularon (con diferentes maneras de ingresar los datos), la pendiente de la recta secante y utilizan el comando *Solve* para calcular los puntos c, igualando la derivada de la función a dicha pendiente. Es decir que las habilidades de aplicación HAP1 y HAP3, en este caso, se manifestaron en todos los equipos.

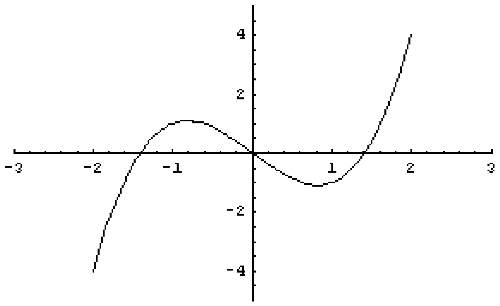
La habilidad HAP3 para hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos hallados así luego graficar la situación, la manifestaron siete equipos. Estos son justamente los que luego pudieron graficar la función y las tres rectas halladas para mostrar gráficamente el resultado del teorema. En cuatro equipos notamos un avance considerable (respecto de las otras actividades) en cómo dejan asentada su producción. Explican más los pasos usando texto, esto evidencia que están adaptándose y aprendiendo a emplear esta nueva herramienta de trabajo. Mostramos una parte de la producción de uno de ellos:

Cuadro 2

f[x_] := x^3 - 2 x

Graficamos f(x)

graf1 = Plot[{x^3 - 2 x}, {x, -2, 2}, PlotRange → {{-3, 3}, {-5, 5}}]



- Graphics -

b) Decimos que se cumple el teorema del valor medio en el intervalo (-2,2) porque cumple con las condiciones especificadas: f(x) es continua en el intervalo [-2,2] porque es un polinomio, y todos los polinomios son continuos. Es derivable en el intervalo (-2,2),
f ' (x)= $3x^2$-2. Ahora pasaremos a calcular que f ' (c) = (f[b]-f[a])/(b-a)

$$\frac{f[2] - f[-2]}{2 + 2}$$

2

Para calcular la tangente de los puntos que cumplen con el teorema y así poder graficarlo, utilizamos la pendiente ya conocida para hallar los puntos c

Solve[3 c^2 - 2 == 2, c]

$$\left\{\left\{c \to -\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{c \to \frac{2}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$$

si la pendiente es 2 en $y=mx+b$

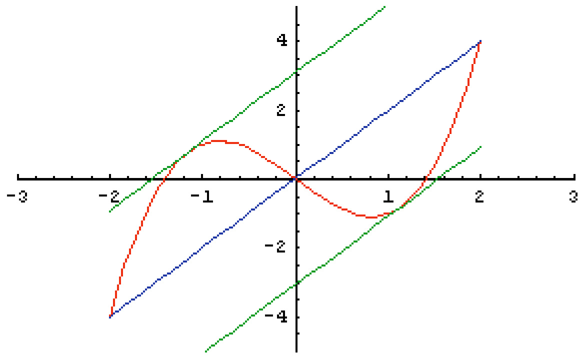
$$\text{Solve}\left[\frac{4}{3\sqrt{3}} == 2 * \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + b,\ b\right]$$

$$\left\{\left\{b \to \frac{16}{3\sqrt{3}}\right\}\right\}$$

entonces y = 2 x + 16/(3 $\sqrt{3}$)

Luego calcularon la ecuación de la otra recta para poder completar el siguiente gráfico que lo realizan usando el comando *Show*

Cuadro 3



En consecuencia las producciones manifiestan buen desarrollo de las habilidades de aplicación y de interpretación geométrica en todos los equipos y, en la mitad de los mismos, un buen desarrollo de la habilidad de argumentación.

Ejercicio 2

En el ejercicio 2, primer ítem, dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, solicitamos indicar valores de a y b en (0,2), para los cuales existe c tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$. Luego pedimos calcular el valor de c y estudiar si se cumplen las hipótesis del teorema de Lagrange. Debido a que requerimos el intervalo de aplicación del teorema, consideramos que está puesta en juego la habilidad HAP2 (aplicación de resultados teóricos en orden inverso a lo explicado en clase), ya que usualmente en la ejercitación se da el intervalo y lo que se busca es el punto “c”.

De los doce equipos que participaron de esta actividad, ocho resolvieron este punto. Dos archivos fueron exactamente iguales, por lo que tenemos siete producciones.

En todas se evidenció la habilidad conceptual HC3, ya que asociaron el cociente planteado con el teorema de Lagrange, aunque también estaba indicado en la consigna del ítem.

En la mayoría de las resoluciones el primer paso fue el gráfico de la función (aunque no se pedía) y la explicación que no es continua en x = 1.

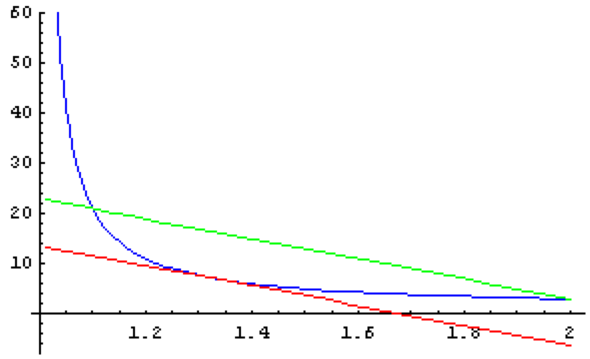
En la elección del intervalo para que se cumpla el teorema, encontramos seis respuestas en las que argumentan el por qué de la selección, manifestación satisfactoria de la habilidad HAR1 y también de HAP2. Transcribimos algunas respuestas:

Cuadro 4

“La función g(x) en x=1 es discontinua, por eso, al tomar valores entre el intervalo (0,2) debo elegir a y b, que dentro de su intervalo no contengan a 1 para que este intervalo sea continuo. El intervalo elegido es [0,1/2], verificaremos que cumple con las condiciones de Lagrange”
“Dado que la función no es continua en x = 1, el teorema se cumple para intervalos que no incluyan al 1. Por ejemplo: a = 0.5 b = 0.75”
“Como la función presenta una discontinuidad en el intervalo (0;2) no se puede cumplir Lagrange. Sin embargo podemos encontrar un valor de c en dos intervalos cerrados que no incluyan el punto de discontinuidad de primera especie (x = 1). Los intervalos que tomaremos para que se cumple el teorema son: [0,0.999] y [1.001,2].”
“Se cumple las condiciones del teorema debido a que reducimos el intervalo [0;2] que no cumplía continuidad (Asíntota vertical para x = 1). Utilizamos el intervalo [1.1;2]”

Todos los equipos plantearon correctamente con el comando *Solve* la ecuación que les permite hallar el valor de c en el intervalo que cada uno eligió (HAP3) Todos obtienen dos valores de c, uno sólo de los cuales pertenece al intervalo elegido. Sólo tres aclararon esta situación tomando como respuesta el que pertenece al intervalo. Un equipo también graficó lo hallado:

Cuadro 5



En el ítem b) preguntamos si para cualquier par de números a y b en (0,2) (a < b) era posible hallar c tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ningún equipo respondió bien a este inciso. Mientras pudieron encontrar un intervalo donde se cumplieron las hipótesis del teorema, explicar correctamente por qué y hallar el valor c que verificaba la igualdad, no pudieron hallar un intervalo donde no se cumplía la tesis. No consideramos como respuesta correcta la asignación a = 0 y b = 2, ya que a y b debían pertenecer a (0,2). Transcribimos la respuesta de uno dos equipos

Cuadro 6

"No es posible hallar c en el intervalo (a,b) dentro del intervalo (0,2) tal que:
f' (c)=(f[b]-f[a])/(b-a) mientras el intervalo (a,b) elegido contenga el numero 1 porque es el punto donde la función es discontinua. En conclusión, mientras un intervalo contenga el número 1, no cumplirá con el teorema de Lagrange en dicha función."

"No, por ejemplo el teorema no se cumple para a = 0 y b = 2, ya que la función no es continua en [0,2]

Notemos que para estos alumnos, el no cumplimiento de una de las hipótesis significa que no se verificará la tesis, operando como si el condicional directo $p \Rightarrow q$ fuera equivalente con contrario $\neg p \Rightarrow \neg q$.

Por último pedimos demostrar que no hay un valor de c tal que $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$ y preguntamos qué sucede entonces con el resultado del teorema del valor medio.

Un equipo no resolvió el ítem y los once equipos restantes, como primera medida, plantearon correctamente la ecuación utilizando el comando *Solve* (habilidad de aplicación HAP3). Tres equipos indicaron que el resultado obtenido no era un número real. Transcribimos estas respuestas:

Cuadro 7

"No es aplicable el teorema ya que encontramos resultados imaginarios"
"No existe valor de c en el intervalo (0;2) que cumpla con estas condiciones. Concluyendo, no existe punto en el cual su tangente sea paralela a la secante que une 0 con 2"
"Te da valores fuera del conjunto de los □ al ser el denominador positivo por estar elevado al cuadrado y el numerador negativo es imposible que te de un valor positivo como 2"

Sólo en una de las respuestas advirtieron la relación con el teorema.

Cuatro equipos señalaron la discontinuidad que presenta la función en x = 1 como aclaración de por qué el resultado de la ecuación planteada no era un número real. De acuerdo a la redacción de sus argumentos incurren en el error de considerar que si no se cumple alguna de las hipótesis entonces no se cumple la tesis, es decir, tomar como verdadero el condicional contrario: $\neg p \Rightarrow \neg q$ en vez de observar que si no se cumple la tesis, es porque alguna de las hipótesis no se ha cumplido. Puede ser que se deba a un error de redacción o que la equivalencia entre condicional directo y contrarrecíproco no esté clara. Transcribimos algunas respuestas:

Cuadro 8

"El valor c no está definido en el campo de los reales, debido a que en el intervalo [0,2] existe una discontinuidad esencial en x = 1"

"No existe valor de c en reales, ya que no se cumplen las condiciones del teorema de Lagrange, o sea, la función no es derivable ni continua**.**

Conclusiones

- Los alumnos manifestaron buen nivel de desarrollo de las habilidades conceptuales. Por un lado todos los equipos interpretaron geométricamente que el cociente planteado es la pendiente de la recta secante que une los dos puntos y que la derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto de abscisa x = c (HC1). La mayoría acompañó las explicaciones con un gráfico donde visualizaron la recta secante y las tangentes paralelas, situación favorecida por el uso de la computadora. Todos fueron "extractores" de significados cuando identificaron el cociente planteado en el ejercicio 2 con la tesis del teorema del valor medio (HC3)

- Los alumnos manifestaron buen nivel de desarrollo de la habilidades de aplicación HAP1 y HAP3 cuando solicitamos aplicar el Teorema de Lagrange en un intervalo dado, buscando los valores intermedios c. Observemos que evaluamos sólo el planteo de las ecuaciones, ya que la resolución la hace la computadora. La habilidad de argumentación HAR1 que debe manifestarse previamente (estudiar que la función dada cumple con las hipótesis del teorema), tiene un buen nivel de desarrollo en la mitad de los equipos, estando ausente en los demás. Es decir, la mitad de los estudiantes obvia el estudio de las hipótesis del teorema, pasando directamente a la aplicación del mismo mediante el planteo y resolución de la ecuación plasmada en la tesis.
- Muy buen desarrollo de las habilidades HAR1 y HAP2 en los alumnos que resolvieron el ejercicio 2 a) (siete equipos de doce). En este caso no sólo se limitaron a dar el intervalo solicitado (justificando la respuesta) y el o los puntos "c" de la tesis del teorema, sino que también algunos graficaron la situación planteada. En cuanto a la habilidad de argumentación, el gráfico de la función dada ayudó a buscar intervalos donde la discontinuidad esencial no está presente.
- Estas mismas habilidades no se manifestaron en el ejercicio 2 b), donde los alumnos tenían que encontrar un intervalo donde no se cumple el teorema. Pensamos que, cuando el razonamiento lógico es directo, del tipo $p \Rightarrow q$, no trae tantas complicaciones como cuando es del tipo $\neg q \Rightarrow \neg p$.
- Respecto al último ítem del ejercicio 2, los alumnos fueron capaces de plantear la ecuación en cuestión y resolverla (HAP3), pero la mayoría no se da cuenta que la existencia de raíces complejas no contradice el teorema, por lo que consideramos que, en este caso, no se manifiesta la habilidad HAR1.

Pensamos que las habilidades conceptuales y de aplicación son más sencillas de fomentar con el uso de tecnología que las habilidades de argumentación. En ciertas ocasiones existe una ruptura entre lo "que se ve" o se puede "operar fácilmente" y el razonamiento lógico. Esto nos invita a continuar con el diseño de actividades usando software de manera de promover no sólo la experimentación, exploración y visualización, sino también habilidades de argumentación o justificación.

Bibliografía

Ángel, J. y Bautista, G. (2001). *Didácticas de las matemáticas en enseñanza superior: la utilización de software especializado.* Extraído el 15 de julio de 2009 de http://www.uoc.edu/web/esp/art/uoc/0107030/mates.html

Castillo, R. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11 (2),* 171-194.

Contreras de la Fuente A., Font Moll V., García Armenteros M., Luque Cañada L., Marcolini Bernardi M., Ordoñez Cañada L., Ortega Carpio M., Sánchez Gómez C. (2005). Aplicación del programa Mathematica a las prácticas de cálculo en el primer año universitario*. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM.* 9, 271-282.

Cuicas Ávila M.; Debel Chourio E., Casadei Carniel L., Alvarez Vargas Z. (2007). El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas. *Actualidades Investigativas en Educación*, *7 (2),* 1-34. Extraído el 7 de julio de 2009 de http://revista.inie.ucr.ac.cr

Depool R., Camacho M. (2001). *Influencias en el uso de las nuevas tecnologías en la actitud y rendimiento académico de los estudiantes de Cálculo*. Extraído el 23 de julio de 2009 de http://tecnologiaedu.us.es/eusXXI/Programa/paginas/regionlarayaracuy/Depol%20y%20Camacho.doc

Dolores C. (2000): “Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada” En R. Cantoral (coordinador): *El futuro del cálculo infinitesimal.* Capítulo V. Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Falsetti, M., Favieri, A., Scorzo, R. y Williner, B. (2009). Estudio de Habilidades Matemáticas para el Cálculo Diferencial en estudiantes de Ingeniería. En J. E. Sagula (Ed), Memorias del 10mo Simposio de Educación Matemática (pp. 303-321). Chivilcoy: EMAT. Formato CD ROM

Formica, A.; González, V. y Rodríguez, M. (2009). Habilidades matemáticas en estudiantes avanzados de Profesorado de Matemática. En J. E. Sagula (Ed), Memorias del 10mo Simposio de Educación Matemática (pp.1441-1451). Chivilcoy: EMAT. Formato CD ROM.

Güichal E., Guala G., Malet A., Cornejo Endara R., Pérez Millán C., Oscherov V. (2009) Laboratorio de Matemática: uso de nuevas tecnologías. *VII Congreso Virtual Internacional de Enseñanza de las Matemáticas.*

Hernández Fernández H., Delgado Rubí J.R., Fernández de Alaíza B., Valverde Ramírez L., Rodríguez Hung T. (1998). *Cuestiones de didáctica de la Matemática.* Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones: Rosario (Argentina).

Jonassen D.,Carr Ch., Hsiu-Ping Y.(1998). *Computers as mindtools for enganging learners in critical thinking*. Extraído el 10 de enero de 2010 de http://www.siue.edu/education/techready/5_Software_Tutorials/5_AncillaryPages/Mindtools.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *The Use of Technology* in *the Learning and Teaching of Mathematics*. Extraído el 4 de agosto de 2009 de http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=6360&itemid=6360&linkidentifie=id

Nickerson R., Perkins D. y Smith E. (1987). *Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual.* Temas de Educación. Paidós. M.E.C.: Barcelona.

Ramos Rodríguez E., Baquedano Jer S. (2006). Uso de tecnología para la enseñanza actual de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 8, 127-131.

Rodríguez Núñez, Y., Acosta, J., Suárez, R., Nicolás, C., Quintana Álvarez, J., Brito González, R. y González Alonso, J. (2005). La matemática en el desarrollo de las habilidades intelectuales. Recuperado el 15 de noviembre de 2009 de http://www.revistaciencias.com/publicaciones/EEkEAAyZuyxkEXvjRd.php

Stewart J. (1999). *Cálculo. Conceptos y contextos.* International Thomson Editores: México.

D. Tall, M. Fusaro Pinto. (2002). *Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning.* Extraído el 7 de agosto de 2009 en http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999g-pinto-pme.pdf

Taxonomía de Bloom (1953) Extraído el 4 de mayo de 2009 de http://josecardenas.media.officelive.com/Documents/taxonomia_de_Bloom_1953.pdf

Vílchez Quesada (2007). Sistemas expertos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación superior. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 2 (3),* 45-67.

Zabala, A. (2007). Los enfoques didácticos. En C. Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Onrubia, I. Solé y A. Zabala, (Eds), El constructivismo en el aula (18va. ed, pp.125-161). Barcelona: Editorial GRAÓ.

Betina Williner: Nació en Santa Fe (Argentina). Licenciada en Matemática Aplicada (Universidad Nacional del Litoral: UNL). Posgrado en Educación a Distancia (Universidad CAECE). Alumna de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y naturales, orientación Matemática (Universidad Nacional del Comahue). A espera de defensa de tesis: “Incidencia de la computadora con software específico de Matemática en el desarrollo de habilidades matemáticas”. Directora de tesis: Dra. Marcela Falsetti. Integrante de los proyectos de investigación “Taller de desarrollo de habilidades para el aprendizaje matemático” (2007-2009) y “Entorno de aprendizaje hipertextual y habilidades matemáticas” (2010) en el Departamento de Ingeniería e investigaciones tecnológicas de UNLaM. Profesora Adjunta (UNLaM y UTN regional Haedo). Profesora Asociada (Universidad de Morón).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 131-150
ISSN: 1815-0640

Modelos basados en el individuo y la plataforma NetLogo

Marta Ginovart; Xavier Portell; Pol Ferrer-Closas; Mónica Blanco

Resumen

El objetivo general de este trabajo se enmarca en el deseo de dar a conocer la metodología de la modelización basada en el individuo y sus posibilidades para ser utilizada, entre otras metodologías, en la adquisición de la competencia de modelización en docencia. Para ello se presenta: i) una descripción de los elementos que permiten identificar, describir, comunicar e implementar los modelos basados en el individuo (IBMs), y como obtener resultados de simulación; y ii) un ejemplo-muestra de un IBM de NetLogo que ilustra con detalle la manera de proceder con este tipo de modelo.

Abstract

The overall objective of this work is the desire to make the methodology of individual-based modeling known and to show its potential for use, among other methods, in the acquisition of modeling competence in teaching. Here we present: i) a description of the elements that allow the identification, description, communication and implementation of Individual-based models (IBMs), and how to achieve simulation results; and ii) one example-sample of IBM in NetLogo illustrating how to proceed with this type of model in detail.

Resumo

O objetivo geral deste trabalho seria parte do desejo de tornar conhecida a metodologia de modelagem baseada no indivíduo e na sua capacidade de ser usado, entre outros métodos, a aquisição de competências em modelagem de ensino. Aqui nós apresentamos: i) uma descrição dos elementos que identificar, descrever, comunicar e implementar modelos de base individual (IBMs), e como obter resultados de simulação, ii) um exemplo da IBM mostra que NetLogo ilustra detalhadamente como proceder com este tipo de modelo.

1. Introducción

La modelización matemática clásica fundamentada en funciones continuas, funciones derivables, ecuaciones diferenciales, métodos de optimización, ajuste de funciones, así como la modelización estadística, son las metodologías de modelización que habitualmente se estudian en el ámbito académico, en asignaturas de matemáticas tanto del bachillerato como de los primeros cursos universitarios de titulaciones científicas y tecnológicas. De hecho, la adquisición de la capacidad y habilidad para llevar a cabo de forma autónoma todos los aspectos relacionados con el proceso de modelización en un contexto determinado se incluye en la mayoría de los planes de estudios. Siguiendo las directrices del proyecto PISA (Programme for Indicators of Student Achievement) deberíamos prestar especial atención al desarrollo de competencias o habilidades tales como pensar matemáticamente, argumentar, representar y comunicar, resolver, o usar técnicas matemáticas, pero también modelizar. De hecho, la enseñanza de las ciencias basada en la elaboración de modelos tiene gran aceptación entre la comunidad educativa (Justi, 2006; Aravena et al. 2008; Gomes-Neves y Duarte-Teodoro, 2010). La modelización científica tiene el propósito de encontrar, interpretar y validar las representaciones aproximadas de los sistemas, que se definen por conjuntos de elementos y conceptos, cuyas características y mecanismos de relación se describen con los objetos y operaciones matemáticas. En este contexto, los modelos computacionales juegan un papel clave en la expansión del horizonte de la ciencia cognitiva ya que permiten más cálculo y gran capacidad de visualización en la exploración de los sistemas que nos rodean (Gomes-Neves y Duarte-Teodoro, 2010). La llamada modelización basada en el individuo (Individual-based model, IBM) empezó a aparecer en la década de los 90 y representó un nuevo enfoque de modelización, con una filosofía y perspectiva diferente a la de la modelización clásica utilizada hasta entonces de forma habitual. Son modelos que describen a los individuos o partes que configuran un sistema como entidades autónomas y discretas, y focalizan toda su atención en caracterizar estas partes discretas mediante reglas de comportamiento, permitiendo que estas partes interaccionen entre ellas y con el entorno en el que se hallan (Railsback, 2001). El concepto básico del IBM es simple y atractivo, diseñar un modelo de individuo y uno de medio ambiente, implementarlos en un código de computación, y dejar que el ordenador “cree” diversos organismos individuales y simule las interacciones de los individuos entre sí y con el medio que los rodea. El comportamiento de la población emerge de este conjunto de individuos evolucionando en el entorno simulado. Desde varias perspectivas, la construcción de un modelo de individuo (o agente) parece ser más fácil que la de un modelo de población (o sistema), ya que los individuos pueden ser controlados de maneras distintas y en un rango limitado de respuestas, mientras que la población no. Los IBMs no requieren de las mismas simplificaciones asumidas por los modelos continuos, aunque como todos los modelos, requieren asumir algunas otras simplificaciones (Grimm and Railsback, 2005). Se trata de una generación de modelos computacionales que a pesar de que no pueden ser tratados mediante resoluciones analíticas, son una buena alternativa de modelización para abordar el estudio de aspectos diversos y propios de los sistemas complejos (Grimm, 1999). Actualmente esta metodología está abriendo nuevas perspectivas para el estudio de biosistemas o conjuntos de entidades discretas con vida propia que evolucionan en un entorno cambiante. En muchos casos, los resultados de simulación que se pueden conseguir con un IBM complementan los resultados que un modelo continuo puede proporcionar. Por lo que de ninguna manera se deben percibir estas dos clases de modelización, la discreta y la continua, como excluyentes o antagónicas, sino todo lo contrario, deben ser consideradas como complementarias y necesarias para el estudio de sistemas complejos, aprovechando de cada una de ellas sus ventajas y compensando sus desventajas (Gómez-Mourelo y Ginovart, 2009). Es en este contexto donde los modelos permitirán avanzar en la comprensión del funcionamiento de estos sistemas. El objetivo general de este trabajo se enmarca en el deseo de dar a conocer la metodología de la modelización basada en el individuo y sus posibilidades para que pueda ser utilizada, entre otras metodologías, en la adquisición de la competencia de modelización en docencia. Para ello se presenta: i) una descripción de los elementos que permiten identificar, describir, comunicar, e implementar IBMs, y como obtener resultados de simulación, ii) un ejemplo-muestra de un IBM en NetLogo que ilustra con detalle la manera de proceder con este tipo de modelo.

2. Los modelos basados en el individuo

2.1. Modelización y docencia

La mayoría de los primeros ejemplos de utilización de IBMs se encuentran en el área de ecología, en campos específicos tan distintos como son el estudio de poblaciones de insectos, peces, mamíferos, aves, plantas, arboles, entre otras opciones. El libro de Grimm and Railsback (2005) recoge y analiza algunos de estos ejemplos, proporcionando referencias complementarias o adicionales. En los últimos años, un gran número de revistas científicas especializadas, y de perfiles distintos, están publicando cada vez más trabajos que tienen como denominador común el uso de un IBM, siendo las áreas de aplicación cada vez más diversas. En estos momentos podemos afirmar que la modelización basada en el individuo ha demostrado ser una herramienta válida para describir y tratar con sistemas complejos formados por entidades autónomas. Este tipo de modelo computacional facilita la experimentación y manipulación "virtuales" de los sistemas simulados. La ejecución reiterada y automática de los códigos de programación o simuladores ofrece muchas posibilidades para la replicación controlada de evoluciones temporales de los sistemas estudiados. Como si de un conjunto de “experimentos” se tratara, los resultados de simulación que se obtienen permiten el análisis y discusión de variables involucradas en los diferentes escenarios ensayados.

Teniendo en consideración que desde un punto de vista conceptual los modelos basados en el individuo son sencillos de comprender y no requieren de teorías matemáticas avanzadas, estamos convencidos que éstos pueden ser útiles desde una visión educativa para comprender y investigar cuestiones diversas relacionadas con los sistemas formados por seres vivos, así como para trabajar la competencia de la modelización en el ámbito académico desde diferentes niveles. Es decir, los IBMs pueden convertirse en un instrumento útil para exponer, profundizar y presentar, con una perspectiva distinta a la que la modelización continua tiene, conceptos y comportamientos relacionados con sistemas vivos. Su uso también conlleva una excelente oportunidad para desarrollar y practicar todas las etapas implicadas en un proceso de modelización. Algunos conceptos como competencia, cooperación, adaptación, diversidad, individualidad, variabilidad pueden ser más fáciles de exponer y apreciar mediante este tipo de modelización basada en el individuo, que utilizando por ejemplo ecuaciones diferenciales o modelos estadísticos. Las características particulares de los IBMs pueden ser exploradas y aprovechadas en actividades docentes, complementando los contenidos de modelización más tradicionales presentes en la mayoría de currículos académicos. Como los IBMs se construyen utilizando la matemática de los acontecimientos discretos y no mediante tasas o velocidades, constituyen una herramienta especialmente interesante para ser utilizada con imaginación en cuestiones ligadas a la realidad, la cual se caracteriza muy a menudo por la presencia de acontecimientos no continuos (Jacobson and Wilensky, 2006).

2.2. El protocolo ODD para la descripción de IBMs

Los modelos analíticos son fáciles de comunicar porque se formulan con el lenguaje matemático, y nos hemos acostumbrados a su reiterada presencia durante toda la formación académica. Su descripción suele ser completa, clara y accesible al lector. En cambio, la mayoría de las descripciones publicadas de IBMs que uno puede consultar, son generalmente difíciles de leer, incompletas, ambiguas, y por lo tanto menos accesibles (Grimm et al., 2006). Hay dos cuestiones principales y relacionadas entre sí que han condicionado hasta ahora la descripción de IBMs: a) No ha habido un protocolo estándar para su descripción hasta hace relativamente bien poco, por lo que cada IBM elaborado es explicado según los criterios y preferencias de sus autores, que generalmente pertenecen a grupos de investigación de áreas distintas (ecólogos, matemáticos, ingenieros, botánicos, físicos, químicos, microbiólogos, veterinarios,…); b) Se describen a menudo verbalmente sin una indicación clara de las ecuaciones, reglas y esquemas que el modelo utiliza, y el hecho de que la inclusión del código completo de computación no sea admisible en la mayoría de las publicaciones, dificulta el acceso a la información completa del IBM. Por ejemplo, cuando consultamos un modelo analítico esperamos encontrar un conjunto de ecuaciones y la definición de las variables que utilizan, junto con una tabla de valores de los parámetros. Cuando se consulta un IBM publicado en una revista científica, no se identifica ningún orden preestablecido o consensuado en la transmisión de la información que aglutina el modelo computacional. Muchas veces la lectura detallada y exhaustiva de todo el que el simulador puede controlar y reproducir es excesiva e ineficiente para conocer información relevante del modelo, su estructura general o sus rasgos fundamentales. A menudo se mezclan consideraciones generales, con descripciones de procesos, con justificaciones para la formulación empleada o hipótesis previas. Una solución, si bien parcial, a estos problemas pasaría por consensuar y unificar dentro de la comunidad científica la manera de presentar y comunicar los IBMs. Tomado en consideración este contexto, se formó un grupo de trabajo formado por 27 modelizadores que trabajaban y tenían experiencia con esta metodología, con el propósito de preparar y redactar un protocolo de descripción a seguir en la presentación de IBMs (Grimm et al. 2006). De esa experiencia surgió el protocolo llamado ODD, el cual recibe su nombre por los bloques que utiliza para agrupar la información: O de “Overview”, D de “Design concepts”, y D de “Details”. Cada uno de estos tres bloques principales está constituido por una serie de elementos que se presentan en la Tabla 1.

O:”Overview”	Propósito
	Variables de estado y escalas
	Perspectiva del proceso y programación
D: “Design concepts”	Conceptos de diseño o conceptos generales tratados en el campo de los sistemas adaptativos complejos (Emergencia, Adaptación, Finalidad, Predicción, Sensibilidad, Interacción, Estocasticidad, Colectivos, Observación)
D:”Details”	Inicialización
	Entrada
	Sub-modelos

Tabla. 1: Los distintos elementos que considera el protocolo ODD para la descripción de los IBMs. Adaptada de Grimm et al. (2006).

2.3. La implementación de IBMs en códigos de computación

Después de trabajar el modelo conceptual y llegar a una formulación de éste dentro del marco de la metodología IBM, el diseño obtenido ha de ser transformado en un algoritmo numérico, en un código de computación. Con la codificación utilizada para su implementación se consigue un programa o simulador preparado para ser ejecutado. Las etapas que hay que cubrir para desarrollar un modelo-simulador de este tipo son las propias de todo proceso de modelización con, evidentemente, algún matiz propio del contexto de aplicación: i) lenguaje de programación, código de computación, y verificación, ii) parametrización, calibración, y análisis de sensibilidad, iii) valoración de la adecuación o idoneidad del modelo-simulador, y solución de problemas propuestos o respuestas a preguntas formuladas. Sin embargo, el desarrollo del código de computación puede ser un posible obstáculo para la utilización de IBMs en muchos proyectos docentes. El no poder disponer del simulador correspondiente al modelo formulado es, evidentemente, una limitación indiscutible para que estos IBMs puedan ser utilizados en actividades académicas, así como para que estén presentes en materiales didácticos para la clase. Una formación limitada en el ámbito de la informática avanzada de docentes (lo mismo sucede en el ámbito de la investigación) y la imposibilidad, del todo razonable, de no poder conocer los últimos avances en sistemas operativos y lenguajes de programación, son elementos que no se pueden ignorar u obviar. En cualquier caso, la formación informática-computacional no debe ser el factor limitante para el uso de los IBMs.

Para minimizar este inconveniente y, al mismo tiempo, unificar y simplificar el proceso de construcción de este tipo de modelos, se pueden utilizar entornos informáticos de modelización que se han ido desarrollando en los últimos años en centros de investigación y universidades (Railsback et al., 2006). Una alternativa a utilizar estas plataformas ya preparadas específicamente para tratar con la modelización discreta, sería la de programar los propios códigos de computación haciendo uso de lenguajes como Fortran, C, Java o C++, entre otros, lo cual conllevaría naturalmente tanto ventajas como desventajas. No obstante, estamos convencidos de que la utilización de plataformas ya preparadas para la implementación de IBMs facilita la tarea de programación y ejecución que requiere todo modelo computacional, a la vez que permite su divulgación a un público más amplio y heterogéneo. El crecimiento de trabajos con IBMs se debe primeramente a la habilidad de estos modelos para resolver problemas que los modelos clásicos no pueden resolver, gracias a la evolución de la teoría y las estrategias para interpretar la ciencia mediante IBMs, pero también al incremento de las plataformas o entornos informáticos específicos para realizar estas simulaciones (DeAngelis et al, 2005). Dentro de este software de modelización encontramos por ejemplo a Swarm (Minar et al.1996), Repast (North et al. 2006), MASON (Luke et al. 2005), StarLogo (Colella et al. 2001) y NetLogo (Wilensky, 1999). Creemos que para el ámbito docente, lo más adecuado sería alguna de las opciones que la familia de plataformas Logo ofrece. Tanto StarLogo como NetLogo tienen características que las hacen muy atractivas para poderlas utilizar en actividades académicas programadas. Son plataformas que han ido evolucionando de forma distinta, pero que inicialmente surgieron del lenguaje de programación Logo, creado con el objetivo de ofrecer a los estudiantes un entorno donde construir y aprender sobre modelos discretos simples.

En la web http://education.mit.edu/starlogo/ se puede encontrar información sobre StarLogo y de cómo iniciarse en su uso. Las raíces de NetLogo también están en el ámbito educativo, y eso ha significado una manera especial de hacer en el proceso de extensión y avance desde su concepción hasta la actualidad. La última versión de NetLogo es muy potente e innovadora, lo que la está convirtiendo hoy en día en una plataforma cada vez más citada y utilizada en el tratamiento de IBMs. Refleja claramente su herencia como herramienta útil para el estudio y aprendizaje, ya que ese fue el primer objetivo por el cual se creó, pero su avance ha sido tan espectacular, que actualmente puede ser también utilizada para trabajar incluso con proyectos de investigación que no requieran de IBMs excesivamente sofisticados. El lenguaje contiene muchos controles y estructuras que reducen en gran medida el esfuerzo de la programación, pero no tiene todas las capacidades que un lenguaje de programación estándar posee.

3. La plataforma NetLogo

NetLogo (http://ccl.northwestern.edu/netlogo/) fue creada por Uri Wilensky en 1999 y está en continúo desarrollo en el Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling de Estados Unidos (http://ccl.northwestern.edu/). Es un entorno que permite la implementación de IBMs y la simulación del comportamiento de sistemas complejos a lo largo del tiempo y en el espacio (bidimensional o tridimensional). Fue diseñado para tratar con agentes o individuos móviles actuando al mismo tiempo en un espacio y con un comportamiento dominado por las interacciones locales durante un periodo de tiempo. El lenguaje de programación de NetLogo es más sencillo que los lenguajes utilizados por este tipo de programación (Objective-C o Java), con una animación automática ligada al modelo y controles gráficos (opcionales). No se ha establecido un número máximo de individuos o reglas que pueda tener el modelo, pero las simulaciones son más o menos rápidas en función del número de individuos del sistema, reglas fijadas para cada individuo y entorno, y características del ordenador con el que se trabaje (Gilbert y Bankes, 2002). Los implementadores de modelos pueden dar instrucciones a cientos o miles de individuos para que todos ellos operen de manera independiente entre sí y con el entorno. Esto hace posible explorar la relación entre el comportamiento a bajo nivel de los individuos y los patrones macroscópicos que surgen a partir de la interacción de muchos individuos entre sí.

El programa incluye una galería de modelos con una breve descripción de sus propósitos, que pueden ser ejecutados, y que permiten modificar valores de parámetros implicados en las simulaciones ("NetLogo Models Library", http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/). Son los modelos más cuidadosamente controlados de que dispone el servicio vía web, y están destinados a ser ejemplos de buenas prácticas de codificación y documentación. Los modelos marcados como "no verificado" aún están en proceso de ser revisados por el contenido, exactitud y calidad del código. De hecho existe una Comunidad de Usuarios de NetLogo importante, y estos modelos son aportados por ésta para poder ser compartidos con otros usuarios de NetLogo. Los modelos que se pueden encontrar en esta galería pertenecen a ámbitos muy diversos: arte, ciencias de la computación, biología, química, física, ciencias del suelo, juegos, matemáticas (fractales, probabilidad, sistemas dinámicos), ciencias sociales, economía, y psicología social. Algunos modelos ilustrativos de IBMs del ámbito de la biología son: i) “SIDA”, la propagación del virus de inmunodeficiencia humana (VIH) a través de la transmisión sexual, en una pequeña población de humanos aislados para examinar los efectos emergentes de cuatro aspectos distintos de la conducta sexual; ii) “Ants Line”, el comportamiento de las hormigas siguiendo a un líder hacia una fuente de alimento, o “Ants”, una colonia de hormigas y su comportamiento cuando encuentran un resto de comida; iii) “Cooperation”, donde los agentes (vacas) compiten por los recursos naturales (hierba), y donde se incluye dos tipos de vacas en relación a como utilizan la hierba, etiquetadas como codiciosas y cooperantes, para mostrar cómo estas dos estrategias diferentes hace que el sistema evolucione de forma distinta a lo largo del tiempo; iv) “Fireflies”, una población de luciérnagas que sincronizan su parpadeo utilizando sólo las interacciones entre las luciérnagas individuales; v) “Rabbits Grass Weeds” que explora un ecosistema sencillo compuesto por conejos, hierba y maleza, la hierba y las malezas pueden crecer a ritmos diferentes y dar a los conejos diferentes cantidades de energía, para explorar las ventajas competitivas de estas variables, vi) “Algae”, un ecosistema acuático que consiste en una columna de agua que contiene algas, luz y nutrientes, con más luz en la parte superior, pero más comida en la parte inferior, por lo que las algas se mueven arriba y abajo para equilibrar sus necesidades.

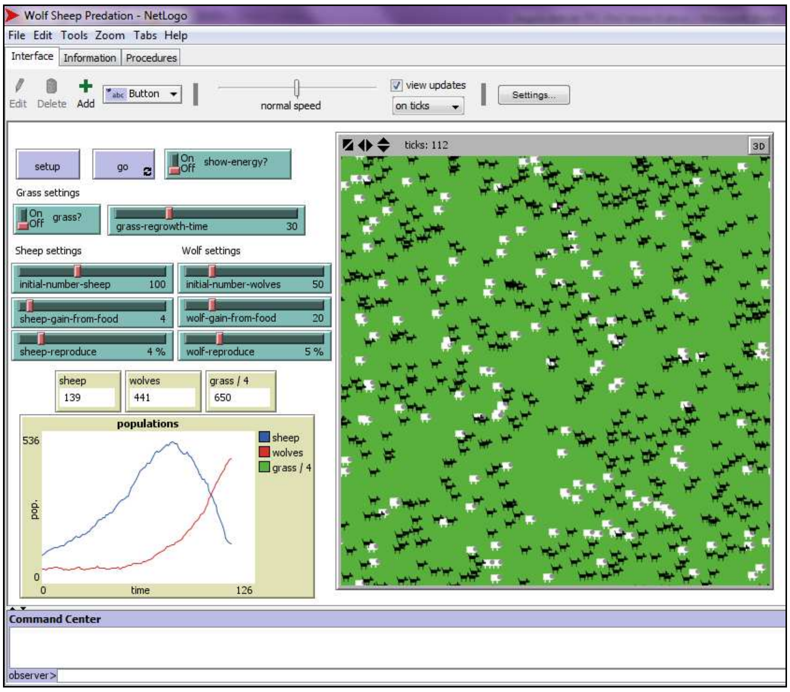
Existe abundante documentación y tutoriales sobre NetLogo en sus páginas web. En http://sites.google.com/site/manualnetlogo/ se puede encontrar un manual de NetLogo en español que permite familiarizarte con este entorno a través de pequeños programas-ejemplo. NetLogo permite a los usuarios abrir simulaciones y “jugar” con ellas, explorando su comportamiento bajo una serie de condiciones que se pueden manipular. Asimismo, permite al usuario la creación de sus propios modelos. NetLogo es lo suficientemente sencillo como para que estudiantes y profesores puedan ejecutar las simulaciones o incluso construir las suyas propias si el contexto académico lo permite. Existen dos maneras de interactuar con NetLogo, descargando e instalando el programa (permite simular y editar modelos, así como la creación de nuevos modelos), o ejecutando un applet desde una página web (únicamente permite la ejecución de modelos). Esto es especialmente deseable en el ámbito docente puesto que el estudiante puede experimentar con el simulador sin necesidad de instalar el programa, requiriendo únicamente conexión a internet. Otra característica atractiva de NetLogo es la existencia de una herramienta de simulación participativa llamada Hubnet. Hubnet permite, mediante dispositivos conectados en red, que cada estudiante controle un individuo o agente en una simulación. Finalmente, hay que destacar la posibilidad de crear nuevos procedimientos en Java (u en otros lenguajes) denominados extensiones, que permiten utilizar otros programas como por ejemplo los sistemas de información geográfica, el programa estadístico R o de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, en las simulaciones de Netlogo.

Una prueba indiscutible de las posibilidades del uso de NetLogo para la creación, implementación y uso de IBMs orientados al aprendizaje de este tipo de modelización discreta en el ámbito docente es la existencia de la web http://www.railsback-grimm-abm-book.com/index.html. Desde esta web se puede acceder al material de un libro en preparación titulado “A Course in Individual- and Agent-based Modeling - Scientific Modeling with NetLogo”. El libro está pensado en principio como un libro de texto de nivel intermedio sobre las aplicaciones científicas de modelización basada en agentes (utilizando los términos "de base individual" y "basado en agentes" como sinónimos). Este material docente utiliza el software NetLogo como la plataforma para construir y analizar modelos. Después de la publicación de este libro que se prevé durante el año 2011, los autores quieren convertir ese sitio web en un foro de apoyo a los instructores y otros usuarios. Al mismo tiempo, el creador Uri Wilensky del programa NetLogo y William Rand también han preparado un libro de texto sobre modelización basada en agentes o individuos con NetLogo (Wilensky y Rand, en prensa). Textos de este tipo permitirán llenar la necesidad actual de textos introductorios para académicos y científicos, que puedan ser utilizados en cursos universitarios o de nivel superior a la educación secundaria, así como para instruir a potenciales usuarios autodidactas. Un curso sobre IBMs debe principalmente centrarse en las habilidades prácticas necesarias tanto para diseñar modelos como para implementarlos y ejecutarlos en entornos computacionales, con el fin de poder analizar y discutir los resultados de simulación.

3.1. ¿Cómo empezar a utilizar NetLogo?

Los dos elementos o agentes principales que usa NetLogo son "*turtles*" y "*patches*". Los primeros son los agentes que tienen capacidad de movimiento en el “mundo” (espacio donde éstos se desarrollan y evolucionan), interaccionan entre sí y con el medio, y están registrados por un identificador que es único para cada "*turtle*", (la variable numérica “*who*”). Los segundos son las unidades básicas que no tienen movimiento, son cada una de las porciones cuadradas en que se subdivide el “mundo”, identificando cada “*patch*” por las coordenadas cartesianas de su punto central. Estos agentes ("*turtles*" y "*patches*") tienen una serie de variables que les son propias, aunque el programador puede definir variables específicas, las cuales se controlaran con las sentencias *turtles-own [nombre]* o bien *patches-own [nombre].* Por ejemplo, *turtles-own [energia],* indica que sobre cada individuo controlamos la variable *energía* que variará a lo largo de la simulación. Se pueden definir distintos tipos de “*turtles*” mediante la instancia *breed [nombre_plural nombre_singular].* Por ejemplo, *breed [ovejas oveja]* indica que hay un tipo especial de “*turtles*” que nosotros identificamos como *oveja*, cuando nos referimos a un individuo específico, o *ovejas*, cuando nos referimos a más de una *oveja.* Otro elemento importante son las “*ticks*” o unidades temporales, útiles para controlar la duración de las simulaciones.

Con el fin de familiarizarse con el programa, y tener una visión general de su funcionamiento, lo más conveniente es realizar simulaciones con los ejemplos de IBMs disponibles en la galería de modelos de NetLogo. En abrir uno de estos modelos, encontramos la ventana “Interface” (Fig. 1). Las partes principales de la ventana “Interface” son: i) barra de control de la velocidad de simulación, ii) botón "setup", iii) botón "go”, iv) "sliders". El botón "setup" se utiliza para iniciar o reiniciar el modelo, pero no para ejecutarlo sino que, únicamente muestra el estado inicial de la simulación. Por lo tanto, si se realiza cualquier modificación de los parámetros en pantalla, para qué tenga validez, primero hará falta activarlo de nuevo. Seguidamente habrá que apretar el botón "go", el cual hará que empiece la simulación, la cual se puede seguir mediante los gráficos que contiene la ventana (Fig. 1). Es importante hacer notar que puede haber dos tipos de botones de "go", uno que al apretarlo empieza a funcionar y no se detiene hasta que lo vuelves a apretar ("go forever"), y otro que se tiene que ir apretando conforme van pasando los pasos de programa ("go once"). También encontraremos una barra que muestra la velocidad de la simulación, que puede ser ajustada a voluntad por el usuario. Se podría decir que la ventana "Interface" es la parte más atractiva ya que en ella se muestra cómo es y qué sucede a lo largo de la simulación. Además de los elementos comentados anteriormente se pueden añadir algunas opciones más: i) el "*Button*", que permite ejecutar la orden relacionada con él (con dos tipos de botones, los que actúan una vez y otros que al apretarlos empiezan a ejecutar las órdenes internas y no se detienen hasta que no se vuelven a apretar, se trataría del "*setup*" y el "*go*" comentados en el anterior apartado); ii) el "*Slider*" permite la creación de rangos de valores para los parámetros o variables del modelo, con el fin de crear situaciones iniciales diferentes o sistemas iniciales con características distintas, con lo cual se podrán obtener diferentes evoluciones en diversas simulaciones (por ejemplo, variar el número inicial de individuos, o las probabilidades de ocurrencia de sucesos específicos como reproducción o muerte); iii) el "Switch" permite activar o desactivar una acción (por ejemplo sería si queremos conocer a lo largo de la simulación la cantidad de energía o reservas que tiene cada uno de los individuos); (iv) el "Chooser" hace posible la elección de un dato o variable para controlar (sería el caso que se presentara un modelo con diferentes variables, de las cuales, sin embargo, únicamente se quiere que actúen una en una, es decir, que habría que hacer una simulación para cada variable disponible; v) el "Monitor" que permite calcular el valor de cualquier expresión del modelo, se trate de "*turtles*" o de "*patches*", a lo largo de la simulación; vi) el "Plot" permite la creación y generación de gráficos con diversas variables, a lo largo del tiempo de la simulación (Fig. 1).



Fig

Figura 1: Vista de las partes básicas de la ventana "Interface" del IBM "Wolf Sheep Predation" de la galería de modelos implementados en la plataforma NetLogo.

Además de la ventana "Interface" de NetLogo, existen las ventanas "Information" y "Procedures". La ventana "Information" contiene la documentación correspondiente al modelo que se encuentra implementado desde qué es y cómo se utiliza, hasta las referencias que se pueden consultar en el caso de los ejemplos-muestra. En la creación de un nuevo modelo, el programa marca unos apartados a seguir para redactar el texto en esta ventana ("What is it?, How it Works?, How to use it?, Things to notice?, Things to try?, Extending the model?, NetLogo features, Related models, Credits and references), siendo recomendable seguir las indicaciones del programa con el fin de mantener un formato común y más fácil de gestionar. En la ventana "Procedures" encontramos el verdadero corazón del modelo, el conjunto de procedimientos que se ejecutan en la simulación (Fig. 2). En ella se encuentran implementadas las acciones sobre el entorno y las reglas de comportamiento de los individuos que han sido conceptualmente diseñadas en el modelo. Todos los elementos de la ventana "Interface" funcionarán gracias a su programación en la ventana de "Procedures", ya que por sí solos no podrían realizar ninguna acción.

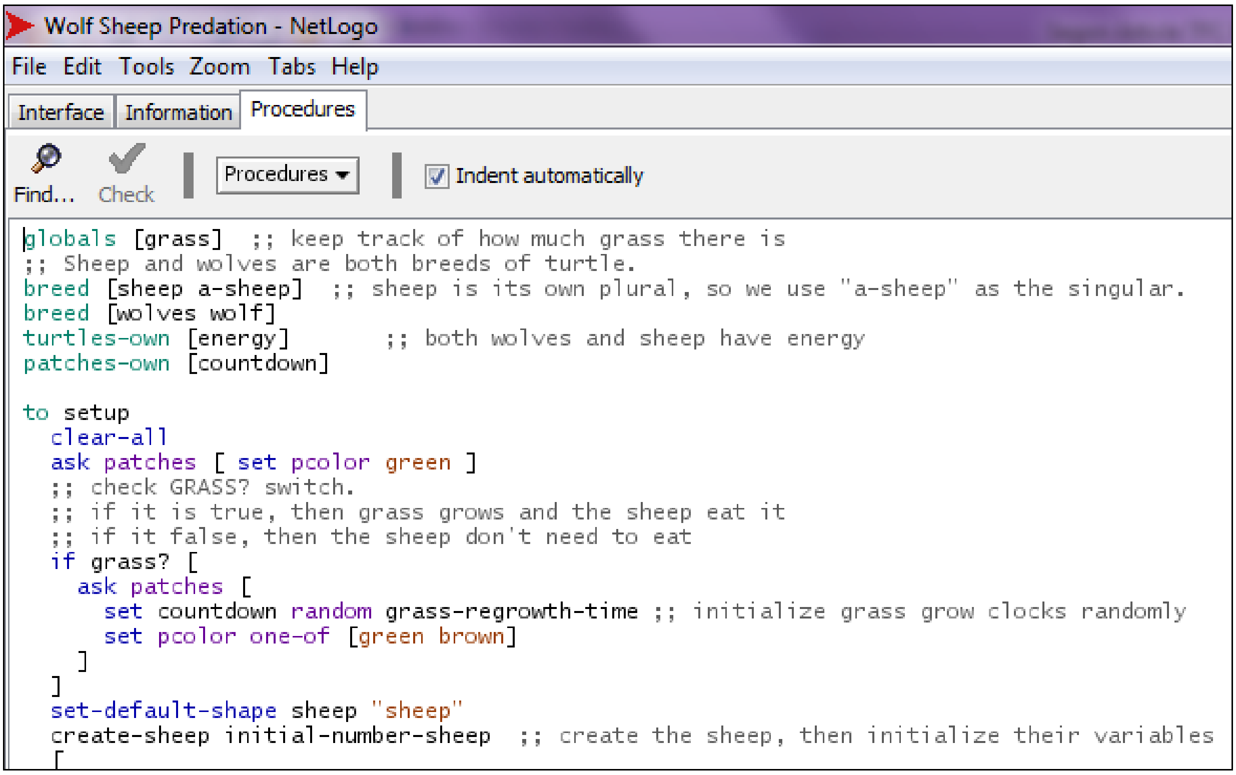


Figura 2: Vista de la ventana "Procedures" del IBM "Wolf Sheep Predation" de la galería de modelos implementados en la plataforma NetLogo.

3.2. Algunos elementos y procedimientos básicos en NetLogo

En NetLogo encontramos dos tipos de agentes más, aparte de de los "*turtles*" y los "*patches*" expuestos anteriormente, los "*links*" y el "*observer*" que se utilizan en programación adelantada. Los "*links*" son agentes que conectan dos "*turtles*", y el "*observer*" no tiene una posición fija en el espacio, se encuentra fuera de él, viéndolo todo y pudiendo interactuar con él creando y destruyendo agentes, asignando propiedades a los agentes, etc. El código de programación se genera construyendo diferentes procedimientos. Cada uno de los procedimientos tiene un nombre precedido de la palabra "*to*", seguido por una serie de sentencias ejecutables, y finalizando con la expresión "*end*". Dentro del fragmento ejecutable podemos encontrar órdenes e informadores. Las primeras son acciones que un individuo (agente) puede llevar a cabo, mientras que los segundos hacen los cálculos y después informan del resultado (Fig. 2). Así, pues, la mayoría de las órdenes son verbos ("*create*", "*die*", "*jump*", "*inspect*", "*clear*"), mientras que los informadores, normalmente, son nombres o frases ("*random*", "*distance*", "*set-default-shape*", "*set-current-plot*"). NetLogo lleva también por defecto una serie de órdenes y de informadores que se llaman primitivas, pero que no siempre pueden ser suficientes para implementar un IBM, por lo que se permite crear nuevos "procedimientos a realizar". En el apartado "Help" del NetLogo se encuentra disponible un diccionario que recoge todas las primitivas del lenguaje, además de una guía para el usuario Una vez se ha descrito un procedimiento, ya se puede utilizar tantas veces como sea necesario. Esta fuera del alcance de este trabajo presentar más elementos y procedimientos necesarios para programar un IBM con NetLogo, no obstante, estas indicaciones básicas permiten vislumbrar la manera de trabajar en esta plataforma. En el caso de que el lector quisiera iniciarse en la programación de un nuevo IBM recomendamos consultar la documentación pertinente que se encuentra en la web de NetLogo y realizar los tutoriales propuestos para ello.

4. Un ejemplo de IBM en NetLogo: "Cooperation"

El modelo "Cooperation" (Wilensky, 1997) es uno de los ejemplos de IBM que contiene la galería "NetLogo Models Library" en el ámbito de la biología (http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Cooperation). En él, de forma muy esquemática, los individuos compiten por los recursos naturales, los más eficientes en conseguir estos recursos se reproducirán más frecuentemente, y por lo tanto, tendrán un éxito evolutivo superior. El modelo incluye dos tipos de individuos, los "greedy" o "egoístas" y los "cooperative" o "solidarios", cada uno de los cuales muestra un comportamiento diferente a la hora de conseguir recursos naturales. Con este modelo se puede analizar cada una de las dos estrategias alimenticias y comprender sus consecuencias cuándo compiten entre ellas dentro de una población, en un determinado espacio, y a lo largo del tiempo. La información proporcionada por la web respecto al modelo implementado responde de forma muy concisa a las cuestiones ¿qué es?, ¿cómo trabaja?, ¿cómo utilizarlo?, aspectos a considerar, cosas para hacer, extensión del modelo, características de NetLogo, modelos relacionados, y referencias. No obstante, además de conocer cómo manipular NetLogo y manejar los simuladores implementados en la web, para trabajar con este tipo de modelización en el marco educativo y poder preparar actividades docentes para la consecución de la competencia en modelización, es importante enmarcar conceptualmente y de manera adecuada el modelo.
Es conveniente que su descripción y comunicación se ciña al protocolo ODD recientemente aceptado por la comunidad científica (Grimm et al. 2006). Hay que tener en cuenta que las referencias que se obtienen directamente de la web para este modelo datan de años anteriores. Fue creado como parte del proyecto titulado "Connected mathematics: making sense of complex phenomena through building

object-based parallel models", y fue convertido a NetLogo como parte de los proyectos "Participatory simulations: network-based design for systems learning in classrooms" y "Integrated simulation and modeling environment" en el año 2001.

4.1. Descripción del IBM "Cooperation" según el protocolo ODD

En este apartado presentaremos el modelo "Cooperation" siguiendo el protocolo ODD de la Tabla 1, de acuerdo con las indicaciones establecidas por Grimm et al. (2006) para la comunicación de los IBMs.

4.1.1. O: "Overview"

Propósito. El propósito de este modelo es investigar a nivel cualitativo cómo afecta a la supervivencia de una especie animal su comportamiento con el entorno medioambiental o hábitat; y más concretamente, la competencia intraespecífica referida a la utilización que se hace de los recursos alimenticios.
En el sistema modelizado encontraremos dos tipos diferentes de actitudes individuales en la población versus el recurso alimenticio, una correspondiente a lo que sería un individuo "egoísta", que utilizara todo el alimento disponible, y otra a la de un individuo "solidario", que no acabará con todo lo que encuentre a su alcance. Es un modelo esencialmente teórico y abstracto para ensayar, evaluar y analizar algunos aspectos de esta competencia intraespecífica.

Descripción de variables y escalas. El modelo está compuesto por dos entidades: los individuos o animales (vacas en este caso) y la hierba sobre la que estos individuos viven. La agrupación de individuos con la misma estrategia para utilizar los recursos disponibles da lugar a una comunidad, y la suma de las dos comunidades a la población total. Para el ambiente, la agrupación de todas las unidades de hierba presentes en un espacio concreto, da lugar a una unidad de ambiente, y la totalidad de unidades de ambiente, al espacio.
Para cada individuo se controlaran las siguientes variables: (1) estado energético, con esta energía será capaz de moverse para conseguir alimento y reproducirse, pero sin ella morirá; (2) localización o unidad de ambiente que está ocupando en cada paso de tiempo (varios individuos pueden ocupar una misma unidad de ambiente, sin limitación en su capacidad máxima); (3) estrategia o tipo de comportamiento en relación al uso del recurso energético que se identifica con la ingesta de hierba, pudiendo ser "egoísta" o "solidario". Es un modelo explícitamente espacial, la heterogeneidad del dominio se debe a la distribución de hierba que se consume y que rebrota.
El espacio será la totalidad de unidades de ambiente, en este caso serán 441 parcelas, distribuidas uniformemente dentro de un marco de 21 x 21. Cada unidad ambiente o parcela viene caracterizada por la cantidad de hierba que contiene (altura de ésta). El modelo no especifica las unidades para los valores de los parámetros implicados, se utilizan valores adimensionales sin correspondencia con unidades reales. Cada unidad temporal equivaldrá a un "tick" o paso de programa. La distribución de la hierba en el dominio se visualiza representando las parcelas del dominio con una gama de colores verdosos, donde el verde vivo significa que se encuentra al 100% de capacidad, y el negro la ausencia total de hierba (Fig 3). La Tabla 2 muestra los valores que pueden tomar los parámetros y variables implicados en el modelo. Con este diseño únicamente se aborda el aspecto cualitativo de los

resultados de las simulaciones, que están representadas por las evoluciones temporales de los tamaños de las dos comunidades (número de individuos “solidarios” y de “egoístas”) así como su ocupación o distribución en el dominio cuadrado, y por la cantidad de hierba en el espacio.

Perspectiva general y programación: En el modelo se fijan una serie de reglas de comportamiento para los animales y unas acciones sobre el entorno. La consideración de tiempo es discreta, con los “ticks o pasos de programa. Las reglas de comportamiento para los individuos que se realizan en cada paso de programa son: i) movimiento aleatorio en un radio determinado con un gasto energético que se puede asociar al metabolismo; ii) ingesta de hierba en su parcela que le permitirá adquirir energía; los animales “solidarios” comprobarán antes de alimentarse que exista un nivel mínimo de unidades de hierba disponibles i, si no es así, no se alimentarán, mientras que los animales “egoístas” se alimentarán siempre que haya hierba disponible; iii) reproducción si su energía es suficiente, con la aparición de un descendiente en su misma posición y que asumirá su misma estrategia alimentaria, también con un coste energético; iv) muerte si su energía es nula. Las acciones sobre la hierba son el crecimiento de ésta después de que haya sido ingerida por los individuos. En cada paso de tiempo, y aleatoriamente, la hierba puede o no crecer dependiendo de su altura, mayor probabilidad para una altura de hierba no inferior a un valor específico, y menor probabilidad por debajo de esa altura. El modelo no considera la edad, por lo que no contempla ni la madurez reproductiva ni el envejecimiento de los individuos. Tampoco requiere apareamientos o coincidencias en el espacio con otros individuos para la reproducción.

4.1.2. D: “Design concepts”

En relación a la emergencia podemos indicar que la dinámica de la población no ha estado preconcebida por ninguna función ni definida previamente, sino que surge, aparece como resultado de la interacción del comportamiento de los dos tipos de individuos que la configuran, los cuales deben adaptarse a la cantidad de hierba disponible que encuentran en su entorno. No hay ni tasa de crecimiento, ni de reproducción, ni de mortalidad constante para los individuos, la evolución temporal del número de individuos “egoístas” y de “solidarios” es la consecuencia de la energía que pueden conseguir en su entorno, de las condiciones del medio en el que se desarrollan. No hay adaptación individual ya que la estrategia alimentaria del individuo no cambia ni se modifica, se mantiene durante toda su existencia. En el ámbito de la biología, la finalidad es el éxito de un individuo de pasar sus genes a las siguientes generaciones. En este caso, la finalidad de los individuos es sobrevivir como comunidad, es decir, que su comportamiento a la hora de alimentarse les permita existir como colectivo, ya que a nivel individual el modelo no les permite variar su estrategia de alimentación.

Lo que está por decidir es su supervivencia como comunidad. En relación a la interacción, esta se encuentra de forma indirecta ya que los individuos compiten por el mismo recurso energético, la hierba. Los individuos no pueden ni predecir las consecuencias futuras de sus actuaciones ni tienen sensibilidad para conocer o percibir el entorno y utilizar esa información para tomar decisiones con el fin de adaptarse mejor, la estrategia que utilizan para alimentarse está fijada para cada uno de ellos y su movimiento es aleatorio. Ellos no pueden optar por modificar su conducta o su manera de proceder.

La estocasticidad se encuentra presente en el movimiento de los individuos por el dominio (razonable si los individuos no pueden percibir las propiedades de su entorno y decidir), y en el crecimiento de la hierba donde múltiples factores son los que interviene en el hecho de que rebrote o mejore el estado de la hierba en el suelo, siendo algunos casos más favorables que otros para poder regenerar la hierba. Con un número reducido de individuos, aparece una interacción local, pero a medida que la población aumenta, sus individuos tiene la posibilidad de explorar un mayor espacio y esta interacción se convierte en global. La interacción pasa por la competencia en la consecución de la hierba (fuente de energía). La interacción global también se podría dar en caso de que el tiempo de evolución del sistema fuera suficientemente dilatado para que los individuos llegaran a pasar para todo el dominio. En relación a colectivos, como se ha mencionado existe un colectivo “egoísta” y otro “solidario”. En relación a la observación del sistema simulado, obtenemos tanto las evoluciones temporales de los tamaños de estos dos colectivos de individuos como la distribución espacial de éstos en la superficie del dominio donde evolucionan, junto con el nivel de hierba presente en cada parcela (Fig. 3).

4.1.3. D: “Details”

Inicialización: Los individuos se disponen aleatoriamente en el dominio con la misma cantidad de energía inicial (50 unidades de energía inicial, lo que significa que un individuo podría mantenerse un numero de pasos de programa sin ingerir hierba antes de morir, y este periodo de supervivencia depende de la energía asignada al metabolismo). La composición de la población se determina de forma aleatoria fijando la probabilidad de tener individuos pertenecientes a la comunidad “solidaria”. El nivel de hierba inicial es el máximo y uniforme en todo el dominio. La Fig. 3 muestra les condiciones de partida de la simulación. En la Tabla 2 se encuentran los valores de los parámetros utilizados para iniciar las simulaciones.

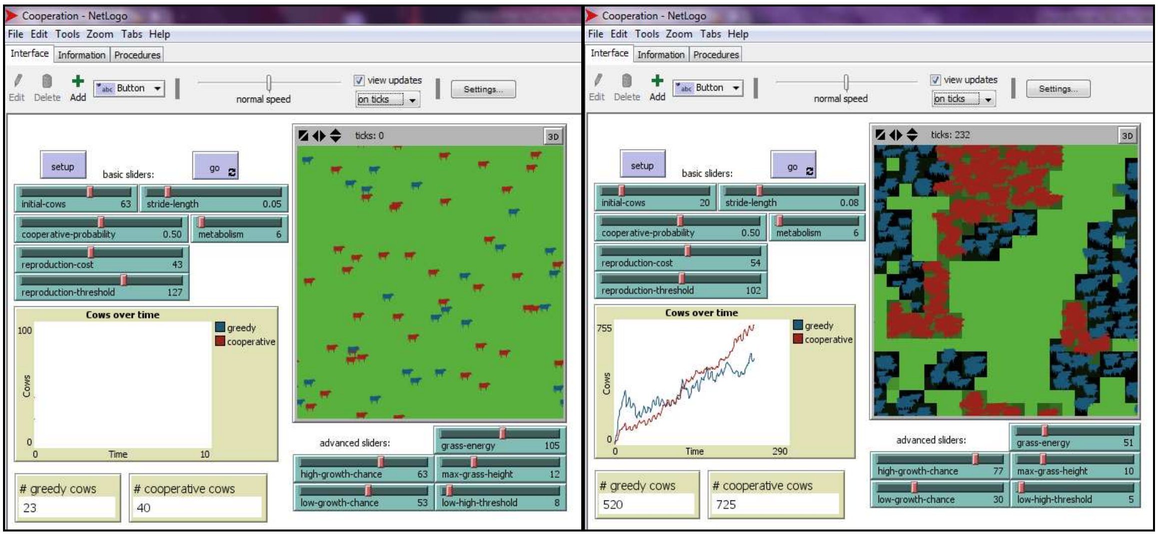


Figura 3: Capturas de pantalla que muestran el estado inicial de una simulación (izquierda) y el estado del sistema en otro instante de tiempo (derecha) del IBM "Cooperation" de la galería de NetLogo.

Variable	Valor por defecto	Valor mínimo	Valor máximo
Número de individuos iniciales	20	0	100
Probabilidad de individuos "solidarios"	0.5	0	1
Gasto energético del movimiento/unidad temporal	6	0	99
Distancia a la que se puede desplazar en el movimiento/unidad temporal	0.08	0	0.3
Gasto energético en la reproducción individual	54	0	99
Nivel de energía mínimo para poder reproducirse	102	0	200
Energía que proporciona la hierba	51	0	200
Cantidad máxima de hierba/unidad ambiente	10	1	40
Probabilidad alta para el crecimiento de la hierba	77	0	99
Probabilidad baja para el crecimiento de la hierba	30	0	99
Umbral o nivel de hierba que condiciona su crecimiento	5	0	99

Tabla 2: Rango de valores de los parámetros y variables de entrada para la ejecución de simulaciones correspondientes al IBM "Cooperation" de la galería NetLogo.

Entrada. No se consideran ni entradas ni salidas de individuos o recursos energéticos del sistema durante la evolución, ni tampoco se contemplan condiciones medioambientales externas (lluvias, ciclos de temperaturas…) que modifiquen la regeneración de hierba.

Sub-modelos. Los diferentes sub-modelos que integran el IBM "Cooperation" son: movimiento, alimentación, reproducción y muerte individual, y rebrote de hierba. Considerando que el IBM esta implementado en la web de NetLogo, a continuación se muestra cada uno de los procedimientos del código de programación con la correspondiente descripción verbal de lo que representan.

Movimiento	
rt random 360 *fd stride-length* *set energy energy - metabolism*	Aleatoriamente se escoge una dirección y se avanza la distancia determinada para situarse en una nueva posición. Disminución de la energía individual (este coste se puede asimilar a la energía de metabolismo que todo individuo requiere para mantenerse).
Reproducción	
if energy > reproduction-threshold [set energy energy - reproduction-cost hatch 1]	Cuando la energía acumulada es mayor que la que se ha fijado para la reproducción, ésta tiene lugar, con un coste energético (disminuye la energía que se tenía). Aparecerá un nuevo individuo con las mismas características que el ascendiente (posición, energía, estrategia alimentaria).
Alimentación: Ingesta "solidaria"	
if grass > low-high-threshold [*set grass grass - 1* *set energy energy + grass-energy* *]*	Ingerirá hierba únicamente cuando el nivel presente en la unidad de ambiente sea superior al umbral fijado, ya que por debajo de ese valor la probabilidad de rebrote de la hierba es pequeña. Actualización del nivel de hierba después de la ingesta. Incremento de energía individual dependiendo del valor energético que se le haya asignado a la hierba

Alimentación: Ingesta “egoísta”	
if grass > 0 [*set grass grass - 1* *set energy energy + grass-energy* *]*	Ingerirá hierba siempre que haya disponibilidad en su unidad ambiente. Actualización del nivel de hierba después de la ingesta. Incremento de energía individual dependiendo del valor energético que se le haya asignado a la hierba
Muerte	
if energy < 0 (die)	Si ha gastado toda su energía de reserva y no ha podido conseguir más, el individuo morirá.
Crecimiento de la hierba	
ifelse (grass >= low-high-threshold) [*if high-growth-chance >= random-float 100* *[set grass grass + 1]* *][* *if low-growth-chance >= random-float 100* *[set grass grass + 1]* *]* *if grass > max-grass-height* *[set grass max-grass-height]*	Por sorteo aleatorio se determinara si hay o no crecimiento de hierba. Si la cantidad de hierba en una unidad ambiente es mayor que el valor umbral fijado que condiciona su rebrote, entonces la probabilidad de que suceda será elevada, mientras que si la cantidad de hierba es menor que ese umbral, la probabilidad de que rebrote es menor. Si la hierba en unidad de ambiente es ya la máxima que se ha fijado no hay incremento, y se mantiene este valor máximo.

4.2. Simulaciones con el IBM “Cooperation” de NetLogo

Avanzar en la comprensión del funcionamiento de un modelo computacional requiere de la ejecución reiterada de éste. La componente aleatoria presente en este tipo de modelo es la responsable de que las repeticiones de ejecuciones con el mismo juego de parámetros no produzcan exactamente los mismos resultados (como las réplicas de un experimento). Por este motivo, la exploración completa y exhaustiva de este tipo de modelo requiere de la realización de series de simulaciones, y de un análisis estadístico de los resultados conseguidos. En este caso, por tener este IBM algunos sub-modelos estocásticos como son el movimiento al azar de los individuos o el rebrote (crecimiento) de la hierba, las sucesivas simulaciones que se ejecutan (aún con el mismo conjunto de parámetros) reproducen distintos itinerarios para el sistema. Además, la posibilidad de generar simulaciones modificando valores iniciales de parámetros o variables del modelo ayuda a entender cómo trabaja el sistema simulado, obliga a razonar el porqué de los comportamientos observados, y a inferir respuestas a cuestiones planteadas.

A modo de ejemplo, y para ilustrar este tipo de estudio, para este trabajo se han realizado simulaciones variando el parámetro que fija la distancia que los individuos recorren en el espacio en cada paso de programa. Disminuyendo o aumentado el valor de este parámetro, los individuos tardaran más o menos tiempo en cambiar de entorno y explorar nuevas parcelas. Se presentan tres resultados de simulación con el fin de analizar el efecto que tiene este parámetro sobre los dos colectivos de individuos (“egoístas” y “solidarios”). La primera simulación utilizará para esta distancia el valor por defecto que tiene asignado el IBM en la galería NetLogo, mientras que para la segunda y la tercera simulación se disminuirá y aumentará este valor. Los valores son 0.08, 0.04 (0.08-0.04) y 0.12 (0.8+0.04) respectivamente. La Fig. 4 presenta las evoluciones obtenidas para cada uno de estos tres casos. En la primera simulación el comportamiento del colectivo "egoísta" es el que se impone con éxito, ya que aunque corto plazo se constata un crecimiento mayor de individuos “solidarios”, cuando éste alcanza su máximo, empieza a decrecer de forma súbita hasta su extinción. La evolución del colectivo “egoísta” es diferente, con una velocidad menor pero sostenida que le permite un tamaño de colectivo aproximadamente estable, con picos de máximos y mínimos condicionado por la capacidad energética que proporciona la superficie de hierba (consumo y rebrote sucesivamente). Con una disminución de 0.04 unidades de distancia/unidad temporal para el movimiento respecto al valor defecto, se observa en la segunda simulación un crecimiento exponencial inicial como en el caso anterior. No obstante esta vez se observa que los individuos "solidarios" ni decrecen ni se extinguen, sino que se mantienen en un tamaño de colectivo aproximadamente estable y mucho mayor que el que pueden alcanzar los “egoístas”. En esta segunda simulación el colectivo "egoísta" tiene un crecimiento mucho más limitado, manteniéndose el número de individuos de esta comunidad muy por debajo de la de los “solidarios”. En la tercera simulación, con un aumento en 0.04 unidades de distancia/unidad temporal en el movimiento individual respecto al valor defecto se observa un patrón a largo plazo similar al de la primera simulación realizada. A corto plazo, en la primera etapa, el crecimiento de estos dos colectivos no es igual ya que las interacciones locales en ese momento son muy importantes y significativas para el arranque de los dos crecimientos (Fig. 4).

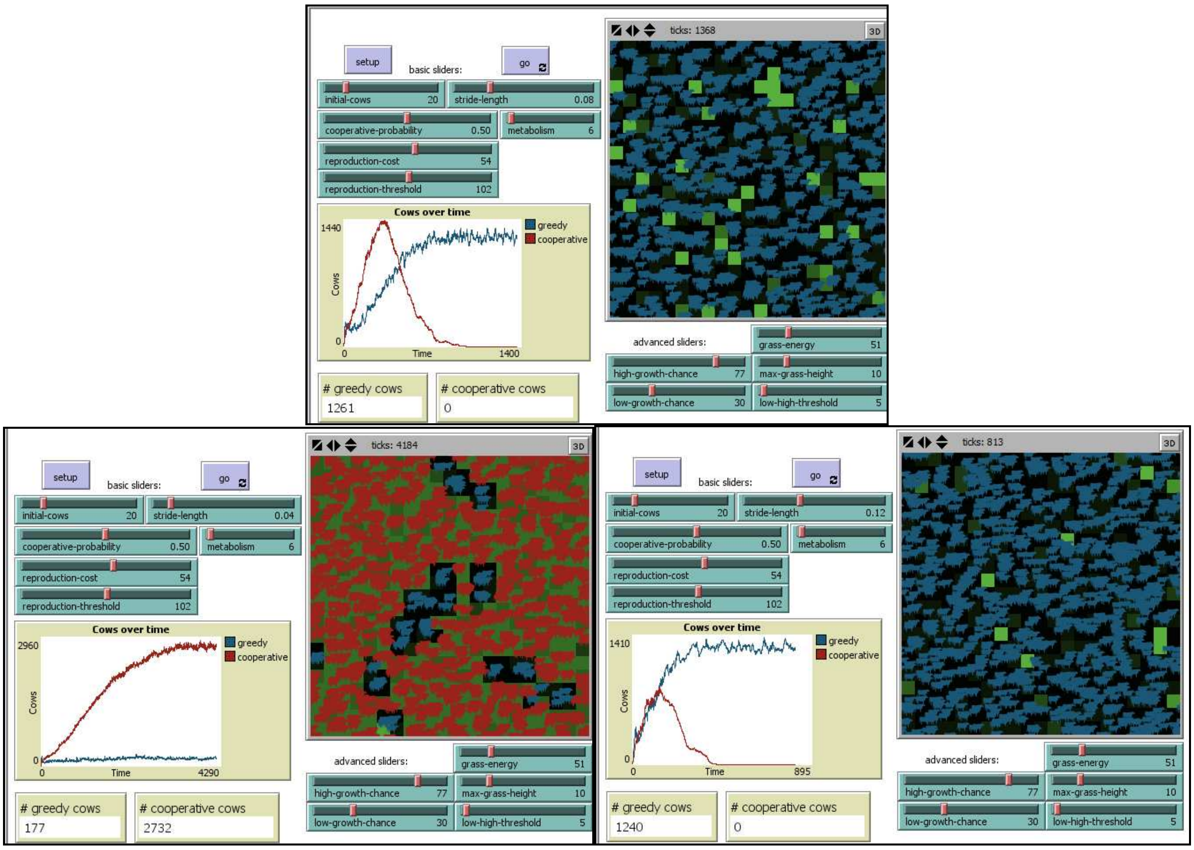


Figura 4: Tres simulaciones correspondiente al modelo “Cooperation” de la galería de NetLogo variando el parámetro que condiciona el alcance de movimiento de los individuos.

La distancia que los individuos pueden recorrer por unidad temporal se encuentra íntimamente relacionada con el triunfo final de uno de los colectivos. Como más pequeña sea esta distancia a explorar por parte de los individuos, los "solidarios" tendrán más éxito que los “egoístas”, ya que su estrategia alimenticia permite regenerar de forma más eficiente la hierba y posibilita el mantenimiento del entorno. Cuando mayor sea la distancia que puedan recorrer los individuos, más exitosa será la estrategia "egoísta" ya que podrán desplazarse más lejos para conseguir más hierba. La máxima capacidad de carga del sistema planteado es diferente si el éxito lo consigue un colectivo u otro. En el primer y tercer caso, donde el comportamiento "egoísta" es el más viable a largo plazo, la capacidad oscila entre 1200 y 1400 individuos, mientras que en el segundo caso, donde la dinámica "solidaria" es mayoritaria, el número de individuos oscila al entorno de 2900 individuos. Este hecho es consecuencia de que no hay un número máximo de animales por parcela y, por lo tanto, en dos parcelas diferentes, con el mismo alimento disponible, una compuesta únicamente por animales "solidarios" y el otro por "egoístas", se alimentarían más individuos con comportamiento "solidario". La distribución del nivel o cantidad de hierba también corrobora esta discusión. Finalmente mencionar que en la distribución espacial de los individuos se observa la formación de conglomerados, agrupaciones de individuos del mismo tipo, debido a la manera de reproducirse, y a que hay difusión de individuos por movimiento y no redistribución (Fig. 4). Así, pues, en este modelo “Cooperation” el control del espacio ha resultado ser muy significativo y decisivo para su propósito. Otras muchas consideraciones, comentarios y sugerencias se podrían elaborar con series de simulaciones modificando los valores de otros parámetros del IBM.

5. Conclusiones

Los IBMs se están convirtiendo en una herramienta válida para describir y tratar con sistemas complejos formados por entidades autónomas. Estos modelos consisten típicamente en un cierto número de individuos definidos a partir de sus comportamientos específicos y parámetros característicos en un ambiente o marco cambiante dentro del cual las interacciones se suceden. Conceptualmente son atractivos y ofrecen múltiples alternativas para ser aplicados en contextos muy distintos. No obstante, por ser modelos computacionales requieren de un entorno adecuado para que puedan ser implementados y ejecutados con éxito. Sin la posibilidad de obtener resultados de simulación de forma razonablemente eficiente, no podrían ser considerados nunca como una opción viable para actividades académicas en el aula. La posibilidad de tratar cómodamente con IBMs en entornos informáticos apropiados sugiere que la preparación de material docente sería viable, y se podrían convertir en una opción para trabajar la competencia de la modelización presente en la mayoría de los planes de estudios de ámbito científico o tecnológico. La plataforma NetLogo, de acceso libre vía web, es una buena elección para incorporar los IBMs en la docencia. El uso de la galería de modelos que contiene su web favorece y facilita la divulgación de los IBMs en el ámbito educativo. La competencia para la modelización incluye ser capaz de: a) estructurar el campo o situación que va a modelizarse; b) traducir la realidad a una estructura matemática; c) interpretar los modelos matemáticos en términos reales; d) reflexionar, analizar y criticar un modelo y sus resultados; e) comunicar las características y los resultados de un modelo, incluyendo sus limitaciones; y f) dirigir y controlar el proceso de modelización. Todos estos aspectos podrían ser abordados con el uso de los IBMs. El ejemplo de IBM desplegado en detalle en este trabajo ha ilustrado algunas de estas acciones. El poder trabajar la competencia en modelización con contextos de aplicación atractivos, como puede ser el de la biología, es extremadamente favorable para su correcta adquisición. Al mismo tiempo, este tipo de modelo computacional facilita la experimentación y manipulación "virtual" sobre los sistemas modelizados, generando escenarios para debatir y argumentar, estimulando una perspectiva de modelización muy intuitiva. Estamos seguros que trabajos de este tipo ayudaran a divulgar las características propias de los IBMs, a fin de que esta metodología de modelización pueda ser incorporada en el ámbito académico de forma progresiva, complementando otras propuestas de modelización ya existentes.

Bibliografía

Aravena M., Caamaño C., Gimenez J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11, 49-92.

Colella V.S., Klopfer E., Resnick M. (2001). *Adventures in Modeling: Exploring Complex Dynamic Systems with StarLogo*. Teachers College Press, New York.

DeAngelis D.L., Mooij W.M. (2005). Individual-based modelling of ecological and evolutionary processes. *Annual Review of Ecology, Evolution, and Systematics* 36, 147-68.

Gilbert, J.K. (2004). Models and Modelling: Routes to More Authentic Science Education. *International Journal of Science and Mathematics Education* 2, 115-130.

Gomes-Neves R., Duarte-Teodoro V. (2010). Enhancing Science and Mathematics Education with Computational Modelling. *Journal of Mathematical Modelling and Application* 1, 2-15.

Gómez-Mourelo P., Ginovart M. (2009) The differential equation counterpart of an individual-based model for yeast population growth. *Computers and Mathematics with Applications* 58, 1360-1369.

Grimm V. (1999). Ten years of individual-based modelling in ecology: what have we learned and what could we learn in the future? *Ecological Modelling* 115, 129-148.

Grimm V., Railsback S.F. (2005). *Individual-based modeling and ecology*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Grimm V., Berger U., Bastianen F., Sigrunn E., Ginot V., et al. (2006). A standard protocol for describing individual-based and agent-based models. *Ecological Modellling* 198, 115-126.

Jacobson M., Wilensky U. (2006). Complex systems in education: Scientific and educational importance and implications for the learning sciences. *Journal of the Learning Sciences* 15(1), 11-34.

Justi R. (2006). La enseñanza de ciencias basada en la elaboración de model;; os. *Enseñanza de las Ciencias* 24, 173-184.

Luke S., Cioffi-Revilla C., Panait L., Sullivan K., Balan G. (2005). MASON: A Multiagent Simulation Environment. *Simulation: Transactions of the society for Modeling and Simulation International* 82(7), 517-527.

Minar N., Burkhart R., Langton C., Askenazi M. (1996). The Swarm simulation system: A toolkit for building multi-agent simulations. http://santafe.ed/projects/swarm. Extraído el día 15 de octubre de 2010.

North M.J., Collier N.T., Vos J.R., (2006). Experiences Creating Three Implementations of the Repast Agent Modeling Toolkit. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* 16, 1-25.

Railsback S.F. (2001). Concepts from complex adaptive systems as a framework for individual-based modelling. *Ecological Modelling* 139, 47-62.

Railsback S.F., Lytinen S.L., Jackson S.K. (2006). Agent-based simulation platforms: Review and development recommendations. *Simulation* 82, 609-623.

Wilensky U. (1997). NetLogo Cooperation model. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/cooperation. Extraído el día 15 de octubre de 2010.

Wilensky U. (1999). NetLogo. Center for Connected Learning and Computer-Based Modelling, Northwestern University. Evaston, IL. Extraído el día 15 de octubre de 2010. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/..

Wilensky U., Rand W. (en prensa). *An introduction to agent-based modeling: Modeling natural, social and engineered complex systems with NetLogo*. MA: MIT Press, Cambridge.

Marta Ginovart. Licenciada en Ciencias-Sección de Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona y Doctora en Ciencias-Matemáticas por la Universidad Politécnica de Cataluña, donde actualmente es profesora en el área de Matemática Aplicada (Barcelona, España). Su actividad investigadora se centra en la modelización y simulación discreta de sistemas biológicos, así como en el análisis estadístico de datos. Ha participado en diversos proyectos de innovación docente para la mejora del aprendizaje de las matemáticas. marta.ginovart@upc.edu

Xavier Portell Ingeniero agrónomo por la Universidad de Lérida. Actualmente realiza su doctorado en el grupo de Modelización y Simulación Discreta de Sistemas Biológicos de la Universidad Politécnica de Cataluña (Barcelona, España). Su actividad investigadora se centra en el uso de la modelización basada en el individuo para el estudio de levaduras en procesos de interés biotecnológico y agroalimentario. xavier.portell@upc.edu

Pol Ferrer-Closas. Ingeniero Técnico Agrícola por la Escuela Superior de Agricultura de Barcelona de la Universidad Politécnica de Cataluña. Actualmente finaliza esta finalizando los estudios de Ingeniería de Montes en la Escuela Superior de Ingeniería Agraria de Lérida de la Universidad de Lérida (España). Ferrer.closas.pol@gmail.com

Mónica Blanco. Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Barcelona y Doctora en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona. Actualmente es profesora en el área de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Cataluña (Barcelona, España). Su actividad investigadora se centra en la Historia de las Matemáticas, así como en el análisis estadístico de datos. Ha participado en diversos proyectos de innovación docente para la mejora del aprendizaje de las matemáticas. monica.blanco@upc.edu

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Septiembre de 2011, Número 27, páginas 151-161
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

Planteando problemas de forma poética

Juan Núñez Valdés; Concepción Paralera Morales

Resumen

En este artículo se plantea la posibilidad de que el profesor de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato utilice la poesía como una herramienta más a fin de despertar la curiosidad y conseguir una mayor motivación e interés de sus alumnos por la asignatura. Se muestran algunas de las muchas y variadas poesías relacionadas de alguna manera con las Matemáticas y se indican el contexto y el nivel más apropiados para utilizarlas.

Abstract

The aim of this paper is to introduce the possibility of a Secondary School teacher of Mathematics using poetry as another tool in order to inspire curiosity in students and make them have greater motivation and interest in the subject. Some of the many of varied poems somehow related to Mathematics are also shown and the context and most appropriate level to use them are indicated.

Resumo

Este artigo levanta a possibilidade de que o professor de Matemática do secundário e do ensino médio usam na poesia como uma ferramenta para despertar a curiosidade e obter mais motivação e interesse dos alunos pelo assunto. Mostra alguns dos muitos e variados poemas relacionados de alguma forma com a Matemática e identifica o contexto e ao nível mais adecuado para usá-los.

M irar soñando despierto
A l ver dos líneas trazadas
T e refleja como ciertos
E spacios que son del alma;
M ar de infinitos destellos
A cotados por las blancas
T razas que dejan abiertos
I mposibles movimientos
C apaces de abrir las marcas
A lcanzadas por expertos
S abios de todos los tiempos
Y soñando lograremos

P enetrar en las esencias
O cultas de los extremos
E squivos de las conciencias,
S abiendo que toda ciencia
I ncluye cuando queremos
A lgo de amor y cadencia.

José Antonio Hervás (2)

1. Introducción

Afortunadamente, el tema de la interdisciplinaridad va calando cada vez más en el Profesorado de Secundaria y Bachillerato en los centros españoles a la hora de impartir su docencia en las clases (como ya es sabido, en España el alumno accede a la etapa de Secundaria, que es Obligatoria y consta de seis cursos, a la edad de 9 a 10 años, para pasar después al Bachillerato, ya no obligatorio y que consta de dos cursos, como estudios previos a los universitarios). Pues bien, es por tanto ya muy frecuente que, en particular, los Profesores de Matemáticas de estos dos niveles en nuestro país les hablen a sus alumnos sobre la importancia y las aplicaciones que los temas matemáticos que les enseñan tienen en otras asignaturas de su currículo, fundamentalmente científicas, como pueden ser la Biología, la Física o la Química. Así, a la hora de explicar el concepto de *derivada*, un recurso muy socorrido por los profesores de Matemáticas que han hecho suyo desde el principio este aspecto de la interdisciplinaridad suele ser el de comentarle a sus alumnos la relación intrínseca que existe entre este concepto matemático y los conceptos físicos de velocidad y aceleración. De igual forma, al estudiar las *Progresiones Geométricas*, el profesor suele también aludir a la aplicabilidad de estas series de números al tratamiento de problemas de descendencia y procreación de los seres vivos, propios de la Biología. Tampoco la Química se libra, en el buen sentido de la palabra, de esta posibilidad de relacionar los conceptos matemáticos con los de otras disciplinas. Así, ya es frecuente que los profesores de Matemáticas les hablen a sus alumnos de la posibilidad de establecer un vínculo entre el estudio de las *sucesiones numéricas* y las expresiones generales C_nH_{2n+2}, C_nH_{2n} y C_nH_{2n-2}, para los hidrocarburos, saturados o no, del tipo alcanos, alquenos y alquinos, respectivamente.

Son también muy utilizadas otras muchas aplicaciones de las Matemáticas de Secundaria y Bachillerato a otras disciplinas ya no científicas, que también son comentadas por los docentes de Matemáticas. Piénsese, por ejemplo, en aplicaciones de las Matemáticas a la Economía, como puede ser el caso de utilizar las progresiones geométricas para resolver problemas de interés compuesto, o el estudio de la *función exponencial*, tan usada en la resolución de los denominados problemas de primer orden en Demografía, en los que una población crece en cada momento en función del número de individuos existente en ese momento.

Sin embargo, no son tan usuales por parte del profesor de Matemáticas las alusiones durante el transcurso de sus explicaciones a las disciplinas tradicionalmente llamadas de letras, como pudieran ser la Literatura, la Geografía, la Filosofías, el Arte o la Historia, por ejemplo, salvo para problemas mecánicos de enumeración, ordenación o conteo.

Pues bien, en esta última línea es en la que nosotros queremos centrar nuestro trabajo, mostrando algunas posibles relaciones de las Matemáticas con la Literatura en general, y más concretamente, con la Poesía en particular. Dar cumplida respuesta a preguntas del tipo: ¿Puede encontrarse Poesía en las Matemáticas?, ¿Existe matemática en la Poesía?, ¿Puede hablarse de Matemáticas y Poesía al mismo tiempo? o similares es el objetivo que nos planteamos en este artículo.

Nuestra primera intención es hacer ver que los Profesores de Matemáticas pueden y deben utilizar poesías en sus explicaciones. Obviamente, no nos estamos refiriendo a que den sus explicaciones en verso, lógicamente, sino a que utilicen la poesía como una herramienta más dentro de sus recursos metodológicos. De esa manera, no sólo se contribuye a animar a los alumnos en el interés y la motivación por las Matemáticas, sino también a alimentar su formación cultural promoviendo el gusto por la buena literatura en general, y por la poesía, en particular. ¿Cómo se va a olvidar un alumno, por ejemplo, del número pi si su profesor, cuando se lo enseña como cociente entre la longitud de cualquier circunferencia y la longitud de su diámetro, le recita e invita a aprenderla una de las innumerables poesías que existen dedicadas a este número? Véase al respecto la siguiente poesía de Manuel Golmayo (tomada de la web (3)), que nos permite recordar las veinte primeras cifras de este número (3.14159 26535 89793 2384):

Soy y seré a todos definible,
mi nombre tengo que daros.
Cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros.

Por otra parte, esta idea que aquí se muestra de relacionar poesía con Matemáticas no puede decirse tampoco que sea especialmente novedosa. Basta teclear en cualquier buscador en red las palabras “Matemáticas y Poesía” u otras similares para obtener una grandísima cantidad de entradas, que en el caso del idioma inglés superan ampliamente los catorce millones. Algunos ejemplos significativos de estas entradas son las páginas webs (4, 5, 6, 7, 8 y 9), de donde se han sacado parte de las poesías que a continuación se comentan

Dada por consiguiente la gran cantidad de poesías que podríamos encontrar para ser utilizadas por los profesores de Matemáticas en sus clases, nos ha parecido conveniente centrarnos en este artículo en mostrar algunos problemas propuestos como ejemplos para plantear ecuaciones y sistemas, que están escritos en verso. Nuestra intención es abordar en futuros artículos otros aspectos diferentes de esta relación entre Matemáticas y Poesía. No se olvide que el famoso matemático alemán Kart Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, 1815 – Berlín, 1897) ya le comentaba por carta a la también insigne matemática rusa Sofía Kovaleskaya (Moscú, 1850 – Estocolmo, 1891) lo siguiente:

"*Un Matemático no es digno de ese nombre, si no es un poco poeta*."

2. Poesía en los problemas de planteo de ecuaciones

En esta sección pretendemos mostrar una serie de problemas de enunciado de planteo de ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicos escritos en forma de poesía. Estos problemas pueden ser utilizados por el profesor a la hora de abordar estos temas, tanto en los últimos cursos de Secundaria como en el Primero de Bachillerato.

Iniciamos la sección con el texto que Diofanto de Alejandría hizo grabar en su tumba, en forma de epitafio. Este texto no es propiamente una poesía, como podrá constatar fácilmente el lector, pero nos ha parecido oportuno incluirlo porque sirve perfectamente para conseguir el objetivo que se pretende en este artículo.

2.1. El Epitafio en la tumba de Diofanto.

Los breves datos biográficos que indicamos sobre Diofanto pueden ser comentados por el profesor a sus alumnos para ponerlos en situación e ir ya despertando su curiosidad, al tiempo que les reta a descubrir el enigma (es decir, a resolver la ecuación) que se encierra en ese epitafio.

Son poco precisos los datos que se conocen actualmente sobre la vida de Diofanto de Alejandría (sobre el año 200 d.C. – sobre el año 284 d. C.). La mayoría de ellos nos llegan a través de la *Antología Griega*, escrita por Metrodoro en el siglo V d. C. Diofanto vivió en torno al siglo III d.C., durante aproximadamente unos 84 años. Este dato lo conocemos gracias al siguiente epitafio hallado en su tumba:

> *"¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba. A partir de ahí, la séptima parte de existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó, además, un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito. Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra, habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir. Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo. Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte."*

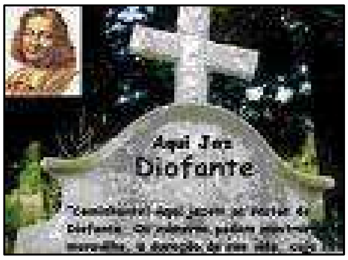


Figura 1. Epitafio en la Tumba de Diofanto

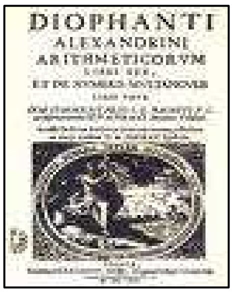


Figura 2. La Aritmética de Diofanto

Conocido como "el padre del Álgebra", Diofanto escribió numerosas obras entre las que destacan los "*Porismas*" (colección de lemas, ya totalmente perdida) y sobre todo, la "*Aritmetica*", que es en realidad un tratado de 13 libros, del que sólo han llegado 6 hasta nuestros días. No es propiamente un texto de álgebra, sino una colección de 150 problemas (escritos sin criterio u orden aparente), que Diofanto resuelve dando una solución para cada uno de ellos, aunque sin preocuparse de la unicidad o no de la misma.

2.2. La poesía en la obra matemática de Bhaskara

Bhaskara, matemático y astrónomo hindú del siglo XII (Bijapur, 1114, Ujjain, 1185) es conocido también como Bhaskara II o como Bhaskaracharya, que significa "Bhaskara el maestro". Es probablemente el matemático hindú mejor conocido de la antigüedad, si bien algunos autores conceden este honor a Brahmagupta, nacido 486 años antes que Bhaskara.

Bhaskara representa la cima del conocimiento matemático del siglo XII. Su trabajo matemático parte del de Brahmagupta que ya manejaba el cero y los números negativos. Pero Bhaskara va más allá en su uso. Así, descubrió el doble signo de los radicales cuadráticos y el carácter anormal de los mismos cuando el radicando es negativo. En su obra *Vijaganita* aparece por primera vez el intento de resolver la división por cero, indicando que se trata de una cantidad infinita.

Actualmente son conocidos seis trabajos de Bhaskara, aunque se cree que un séptimo se perdió. Su obra más conocida es el *Siddhanta Siroman*, escrita en el año 1150, que se divide en cuatro partes: *Lilavati* (aritmética), Vijaganita (álgebra), cuya mejor traducción sería “el arte de contar simientes”, *Goladhyaya* (globo celestial), y *Grahaganita* (matemáticas de los planetas).

Sobre la parte denominada *Lilavati,* así denominada en honor de su hija, que tenía precisamente ese nombre, existe una curiosa leyenda, que es en sí misma pura poesía (Tahan, 2008, p. 130 y siguientes).

Se cuenta que Bhaskara, al nacer su hija, consultó las estrellas y por la disposición de los astros comprobó que ésta estaba condenada a permanecer soltera toda la vida. Como él no se conformara con esa determinación del destino, recurrió a los astrólogos más famosos de su tiempo para ver cómo Lilavati podría lograr desposarse y ser feliz en su matrimonio. Un astrólogo le aconsejó que llevara a su hija a Davira, junto al mar. Allí encontraría un templo excavado en la piedra en el que se veneraba a una imagen de Buda que llevaba en la mano una estrella. Según aquel astrólogo, sólo en Davira podría Lilavati encontrar novio, pero asimismo, dijo, el matrimonio sólo sería feliz si la ceremonia del casamiento se celebraba en un determinado día del calendario, marcado en el cilindro del tiempo, que él mismo supo precisar.

Llevada por consiguiente a Davira por su padre, Lilavati fue al cabo del tiempo pedida en matrimonio por un joven rico, trabajador y honesto, de buena familia. Fijado entonces el día y la hora señalados por el astrólogo, se reunieron los amigos y las familias para celebrar el casamiento.

Los hindúes, en aquella época, medían, calculaban y determinaban las horas del día con auxilio de un cilindro colocado en un vaso lleno de agua. Dicho cilindro, abierto sólo en su parte superior, tenía un pequeño orificio en el centro de su base, de forma que a medida que el agua, entrando por ese orificio invadía lentamente el cilindro, éste se hundía en el vaso hasta que llegaba a desaparecer por completo, a una hora previamente determinada.

Bhaskara colocó ese cilindro de las horas en posición adecuada y con el mayor cuidado esperó hasta que el agua llegara al nivel marcado. Sin embargo, Lilavati, llevada por su curiosidad, quiso observar la subida del agua en el cilindro y se acercó para verla. Entonces, una de las perlas de su vestido se desprendió y cayó en el interior del vaso, obturando fatalmente el pequeño orificio del cilindro y llegando por ello a impedir la entrada de agua en el mismo.

El novio y todos los invitados esperaban pacientemente que llegara la hora marcada, pero ésta pasó sin que el cilindro la indicara como había previsto el astrólogo. El casamiento no llegó a realizarse por tanto y Lilavati quedó soltera para siempre.

Por eso, Bhaskara reconoció que era inútil luchar contra el destino y le dijo a su hija: “*Escribiré un libro que perpetuará tu nombre y perdurarás en el recuerdo de los hombres durante un tiempo mucho mayor del que vivirán los hijos que pudieran haber nacido de tu fracasado matrimonio”.*

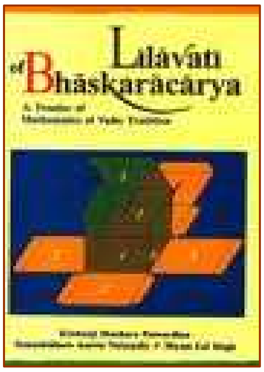


Figura 3. El Lilavati de Bhaskara

Así, esa obra de Bhaskara se hizo célebre y el nombre de Lilavati sigue inmortal en la historia de las Matemáticas. En ese libro, Bhaskara recopila diversos problemas de otros matemáticos añadiendo sus propios resultados. Aparecen de esta forma enunciados muy bonitos, graciosos e incluso románticos, que pueden ser resueltos por medio de ecuaciones y sistemas. Por ejemplo, los siguientes, que aunque no son poesías, también contribuyen a conseguir el objetivo que se persigue en este artículo:

1. Dime, amable y querida Lilavati, de ojos dulces como la tierna y delicada gacela, ¿cuál es el numero que resulta de la multiplicación de 135 por 12?
2. Dentro de un bosque, un número de monos es igual al cuadrado de un octavo del total de un conjunto de ellos que están jugando ruidosamente. Hay doce monos más, que están en una colina cercana y no juegan. ¿Cuántos monos están jugando?
3. Los caballos que pertenecen a 4 hombres son respectivamente 5, 3, 6 y 8. Los camellos que pertenecen a los mismos son 2, 7, 4 y 1. Las mulas son 8, 2, 1 y 3. Los bueyes son 7, 1, 2 y 1. Los 4 hombres tienen igual fortuna. ¿Cuál es el precio de cada uno de los animales?
4. Un pavo real se encuentra posado en el extremo de un poste vertical en cuya base hay un agujero de culebra; observando la culebra a una distancia del pie del poste igual a tres veces su altura, el pavo real se lanza sobre ella en línea recta

mientras la culebra intenta ganar su agujero. Si el pavo real captura a la culebra cuando ambos han recorrido exactamente la misma distancia, ¿a cuántos codos de distancia se produjo la captura?

5. La quinta parte de un enjambre de abejas se posó en la flor de Kadamba, la tercera en una flor de Silinda, el triple de la diferencia entre estos dos números voló sobre una flor de Krutaja, y una abeja quedó sola en el aire, atraída por el perfume de un jazmín y de un pandnus. Dime, bella niña, ¿cuál es el número de abejas que formaban el enjambre?

Naturalmente algunos de estos problemas no tienen solución única. Bhaskara lo sabe y obtiene la mínima en cada caso, Así, para el segundo problema las soluciones son 16 y 48, mientras que para el tercero son 85 para los caballos, 76 para los camellos, 31 para los mulos y 4 para los bueyes (estas soluciones así como las correspondientes a los otros problemas se dejan como ejercicio para el lector).

Otros problemas interesantes que figuran en el Lilivati, esta vez sí escritos en forma de poesía, son los dos siguiente:

6. ¡Oh, muchacha! De un grupo de cisnes,
los siete medios de la raíz cuadrada del número total juegan
en la orilla del estanque.
Los dos restantes pelean
Amistosamente, en el agua.
¿Cuál es el número total de cisnes?

7. Un collar se rompió mientras jugaban dos enamorados.
Y una hilera de perlas se escapó.
La sexta parte al suelo cayó,
La quinta parte en la cama quedó.
Y un tercio la joven recogió.
La décima parte el enamorado encontró
Y con 6 perlas el cordón quedó.
Dime cuántas perlas tenía el collar de los enamorados.

Figura 4. Bhaskara

Figura 5. Obra de Bhaskara

Todos estos problemas (y otros más, que pueden verse (Tahan, 2008, p. 130 y siguientes) pueden ser aprovechados por el profesor en las clases dedicadas a la resolución de ecuaciones y sistemas, así como para atender a la diversidad de razas y culturas en sus clases. Sería asimismo muy interesante que el profesor propusiera a sus alumnos una actividad consistente en enunciar en forma de poesía determinados enunciados de matemáticas que condujesen a la resolución del problema por medio de ecuaciones y sistemas. De esta forma, se tratarían además diversas competencias (exigidas en el sistema educativo español en estos niveles), como la *social y ciudadana*, la *cultural y artística* y la *de autonomía e iniciativa personal*, por ejemplo.

2.3. Poesía en la obra matemática de Fontana

Niccolò Fontana (Brescia, 1500 – Venecia, 1557) fue un matemático italiano apodado *Tartaglia* (tartamudo) desde que de niño recibió una herida en la toma de su ciudad natal. Aunque fue huérfano y sin medios materiales para proveerse una instrucción, Fontana llegó a ser uno de los principales matemáticos del siglo XVI, a pesar de que por la carencia de medios, su aprendizaje fuese esencialmente autodidacta.

Figura 6. Niccolo Fontana (Tartaglia)

Fontana descubrió un método para resolver ecuaciones cúbicas, pero nunca quiso revelarlo. Otro matemático italiano, Scipione del Ferro, también había descubierto otro método para obtener soluciones parciales de estas ecuaciones. Del Ferro se lo contó a su asistente Fior en el lecho de muerte. Tras unos años, Fontana retó a Fior a una competición matemática: cada uno le enviaría al otro 30 problemas y ganaría el que resolviese más de ellos en menos tiempo. Fontana le envió a Fior problemas de varios tipos, pero como Fior creía que era él solo el que podía resolver ecuaciones cúbicas, le envió a Fontana 30 problemas de ese tipo. Fontana los resolvió todos en menos de dos horas, ganando la competición de una manera muy brillante. Fontana no quería revelar a nadie su forma de resolver estas ecuaciones, pero finalmente se lo proporcionó a un famoso doctor y matemático, Gerolami Cardano. No obstante, Fontana le contó su método a Cardano en forma de poema, quizás para evitar que cayera en manos de otro matemático rival.

Indicamos a continuación ese poema, a pesar de que su traducción del italiano al español resulte un poco “pesada” (en él, la palabra “cosa” representa a la incógnita del problema, denominación habitual de aquellos tiempos):

Cuando el cubo y cosas juntas
Son iguales a algún número discreto,
Encontrad dos más que difieran en éste.
Entonces mantendréis esto como un hábito
Que su producto debería ser siempre igual
Exactamente al cubo de un tercio de las cosas.
El resto pues como regla general
De sus raíces cúbicas sustraído
Será igual a vuestra cosa principal.
En el segundo de estos actos,
Cuando el cubo está solo, observareis estos otros acuerdos:
Enseguida dividiréis el número en dos partes
De modo que el uno por el otro produzcan claramente
El cubo del tercio de las cosas exactamente.
Luego de esas dos partes, como regla general,
cogeréis las raíces cúbicas sumadas entre sí,
Y esta suma será vuestro pensamiento.
El tercero de estos cálculos nuestros
Se resuelve con el segundo si tenéis cuidado
Pues por su naturaleza están casi apareados.
Estas cosas descubrí, y no con pasos indolentes,
En el año mil quinientos treinta y cuatro,
con fundamentos fuertes y robustos
En la ciudad fajada por el mar.

2.4. Otros problemas planteados de forma poética

Finalizamos este artículo presentando cuatro poesías más, unas anónimas y otras de diferentes autores, también susceptibles de ser utilizadas por el profesor de Matemáticas en sus clases a la hora de explicar las ecuaciones y los sistemas a sus alumnos. Son las siguientes:

1.- Un ladrón un cesto de naranjas
del mercado robó
y por entre los huertos escapó;
al saltar una valla,
la mitad más media perdió;
perseguido por un perro,
la mitad menos media abandonó;
tropezó en una cuerda,
la mitad más media desparramó;
en su guarida, dos docenas guardó.
Vosotros, los que buscáis la sabiduría,
decidnos:
¿Cuántas naranjas robó el ladrón?

(Córdoba: Escuela del Califa. Año 355 de la Hégira)
(solución: 199)

2.- De los números naturales
sólo pocos se destacan,
particularmente notables
que a otros números opacan.
Números primos, cuadrados perfectos
son ejemplares singulares
de numerales selectos,
de inolvidables propiedades.
Y entre los números importantes
no soy yo la excepción,
seguro que me has visto antes,
pero ahora adivina quién soy.
Pues si mi propia raíz cuadrada
a mí mismo me restan,
por una gracia solo a mí reservada
el resultado es justo treinta.

(Anónimo. Solución: 36)

3.- A un cerezo yo subí
Y cerezas encontré.
Cerezas no me llevé,
Y cerezas no dejé.
¿Cuántas cerezas hallé?

(Anónimo)

4.- Cuando todo quería poner en práctica
siempre debía recurrir a la matemática.
Quería solamente dedicarme al dibujo, a la pintura
pero debía sacar proporciones y medir la altura.
Quería también dedicarme a cantar
pero debía medir el tiempo entre el canto y la música por tocar.
Creí encontrar en el baile una solución
pero si no contaba los pasos era mi perdición.
A la composición de poesías me quise dedicar,
pero debía medir los versos para una buena poesía lograr.
Geografía, historia, música, todas con la matemática se relacionaban
y en mi mente números y números se cruzaban.
Para olvidarme caminé y caminé
y al mirar un letrero que decía 5 km encontré.
Miré mi reloj y una hora había demorado
y en mi mente una pregunta había pasado.
Si en una hora 5 km había caminado
en 4 horas ¿cuántos km habría avanzado?
Dije entonces 1 es 4 como 5 es a x, sin pensar
que con una regla de tres simple me había yo de encontrar.
Multipliqué 5 por el 4 y 20 me dio, despejé la x y el 1 dividiendo pasó,
la x igual a 20 me quedó y 20 km habría de recorrer yo.

Luego pensando me di cuenta que con la matemática me había de nuevo encontrado,
y me di cuenta que ni siquiera caminar podía hacerlo, sin ella a mi lado.
Fue en ese momento cuando su importancia descubrí
y aunque a veces me cansaba, las tablas aprendí.
Pero me di cuenta que aunque de ella escaparme quiera,
hasta en las cosas más sencillas la matemática espera.

(Gabriela Noriega)

Bibliografia y Webgrafía

Tahan, M. (2008). *El hombre que calculaba*. Editorial RBA Libros, Barcelona.
Matemáticas y Poesía. Administrador: J. A. Hervás.
http://www.matematicasypoesia.com.es/
Sobre poesías matemáticas
http://www.albaiges.com/poesia/poesiamatematica.htm
Blog matemático de Luis Miguel Iglesias Albarrán
http://aula21.net/aulablog21/archives/2009/04/30/matematicas-y-poesia/
Matemáticas Divertidas
http://www.matematicasdivertidas.com/Poesia%20Matematica/poesiamatematica.html
Blog titulado “Lo último en Matemáticas y Poesía
http://matematicasypoesia.blogspot.com/
Blog de Poesía y Matemáticas
http://www.albaiges.com/poesia/poesiamatematica.htm
Blog de poesías matemáticas
http://centros5.pntic.mec.es/ies.julio.caro.baroja/departamentos/MATEMATICAS/APUNTES_ACTIVIDADES/POEMAS/poemas_matematicas.htm
Blog AULANET
http://aula21.net/aulablog21/archives/2009/04/30/matematicas-y-poesia/

Juan Núñez Valdés: licenciado y doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Es Profesor Titular de Universidad del Departamento de Geometría y Topología, con sede en la Facultad de Matemáticas de dicha Universidad. Su investigación se centra en la Teoría de Lie y en la Matemática Discreta. También ha publicado artículos sobre Matemática recreativa, Historia y Divulgación de las Matemáticas **jnvaldes@us.es**

Concepción Paralera Morales Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Sevilla y doctora por la Universidad Pablo de Olavide. Profesora Contratada Doctor del Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica de la Universidad Pablo de Olavide. Su investigación se centra en Localización Multiobjetivo. También ha publicado artículos sobre Investigación e Innovación en Educación Matemática. **cparmor@upo.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 163-168
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

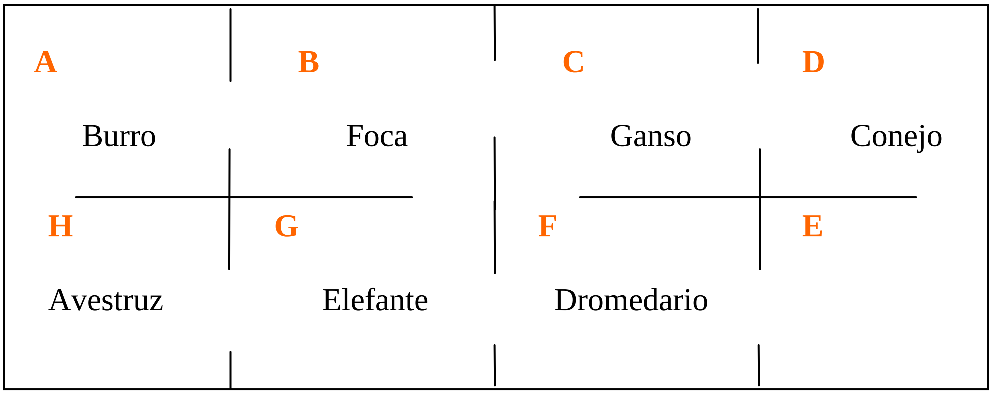
Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Optimización en el zoológico

Problema

En un zoológico, las jaulas están identificadas por letras y los animales están ubicados en cada jaula como se muestra en la figura:



Hallar el número mínimo de movimientos que se necesitan hacer para ubicar a cada animal en la jaula que tiene la letra inicial del nombre del animal, teniendo en cuenta que un movimiento es el traslado de un animal a una jaula adyacente y que nunca deben estar dos animales al mismo tiempo en una jaula.

Este problema lo conocí conversando sobre problemas de optimización con el Dr. André Antibí (IREM de Toulouse) y lo incluí en la conferencia sobre *Resolución de problemas y estímulo del pensamiento optimizador en la educación básica*, que tuve el agrado de impartir en la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM) que se realizó en junio último en Recife, Brasil. Lo consideré muy pertinente al tratar el tema, por ser un problema provocador, estimulante de la intuición optimizadora, que se percibe abordable por alumnos de educación básica – desde el quinto o sexto grado de primaria, o antes – y que ilustra una forma de responder adecuadamente a la pregunta que nunca debe faltar en un problema de optimización *¿cómo sabes que has obtenido un óptimo?*

Ciertamente, una dificultad es llegar a ubicar los animales en los lugares correspondientes, pero una dificultad mayor es hacerlo en el menor número de movimientos y estar seguros de que tal número es efectivamente el mínimo; es decir, de que no hay otra secuencia que lleve a la ubicación pedida de los animales, que tenga un menor número de movimientos. Ahora cumplo con publicar una solución de este problema, promesa hecha a varios de los colegas que luego de mi conferencia me lo pidieron, por haber llamado particularmente su atención.

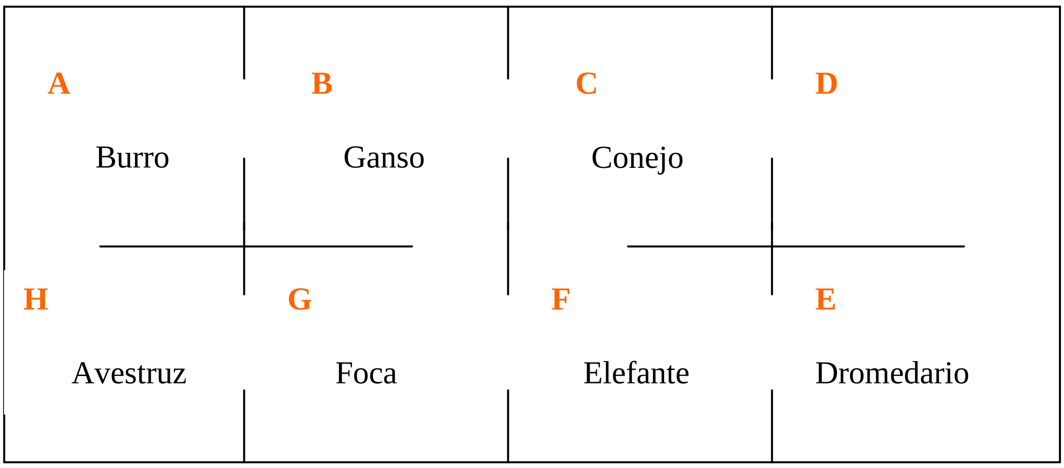
Evidentemente, el ensayo y error es un camino natural para resolver este problema. Luego de experimentar algunos movimientos, es fundamental pasar a practicar el ensayo y error más reflexivamente. Si se tiene en cuenta desde el primer momento que el número de movimientos debe ser el menor posible, es lógico pensar en cómo tener idea de cuál es este número. A continuación expondré una solución[1]

Solución

1. Observando la ubicación de los animales, analicemos cuál es el menor número de movimientos que necesita cada animal para pasar de la jaula en la que está inicialmente, a la jaula que le corresponde:
    - El avestruz necesita al menos 1 movimiento para ser trasladado a la jaula con la letra A.
    - El burro necesita al menos 1 movimiento para ser trasladado a la jaula con la letra B.
    - El conejo necesita al menos 1 movimiento para ser trasladado a la jaula con la letra C.
    - El dromedario necesita al menos 2 movimientos para ser trasladado a la jaula con la letra D.
    - El elefante necesita al menos 2 movimientos para ser trasladado a la jaula con la letra E.
    - La foca necesita al menos 2 movimientos para ser trasladado a la jaula con la letra F.
    - El ganso necesita al menos 2 movimientos para ser trasladado a la jaula con la letra G.

Por lo observado, para que cada animal se ubique en su jaula correspondiente se necesitan al menos 1+1+1+2+2+2+2 = 11 movimientos. El problema estará resuelto si obtenemos una secuencia de 11 movimientos que nos conduzca a la ubicación de cada animal en su jaula correspondiente. Para ello, cada animal debe hacer solamente el número mínimo de movimientos anotados.

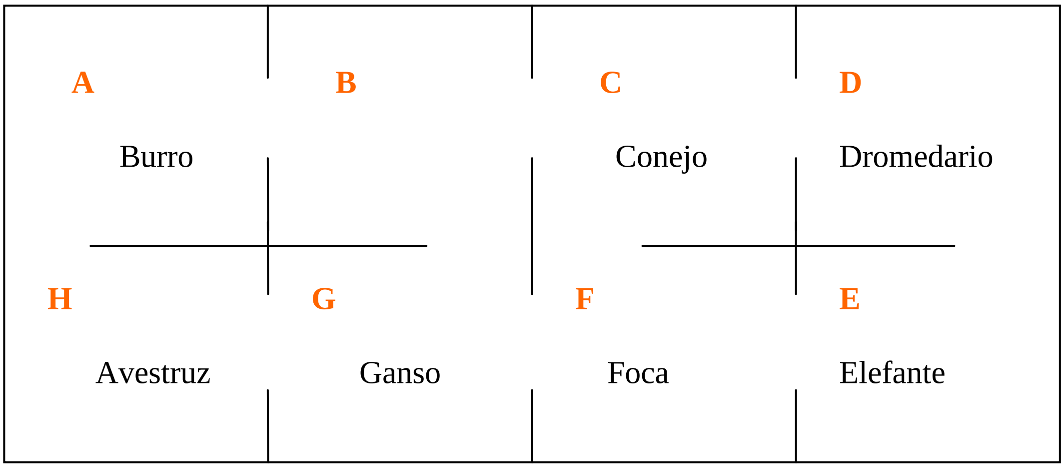
2. Movemos al dromedario, elefante, foca, ganso y conejo (en ese orden) en sentido antihorario. Así obtenemos la siguiente ubicación de los animales:



[1] Basada en la que hizo en el 2007 el alumno universitario Jorge Tipe.

Hasta ahora hemos hecho 5 movimientos. Notemos que el conejo ya está en la jaula con la letra C y realizó 1 movimiento; si lo movemos, ya no lograríamos ubicar con 11 movimientos a todos los animales en sus jaulas correspondientes.

3. Movemos al dromedario, al elefante, a la foca y al ganso (en ese orden) en sentido antihorario. Ahora tenemos la siguiente ubicación de los animales:



Hemos hecho 4 movimientos más; o sea 9 en total. Notemos que el conejo, el dromedario, el elefante, la foca y el ganso ya están en sus jaulas correspondientes y han realizado el número mínimo de movimientos, según lo observado en el paso 1.

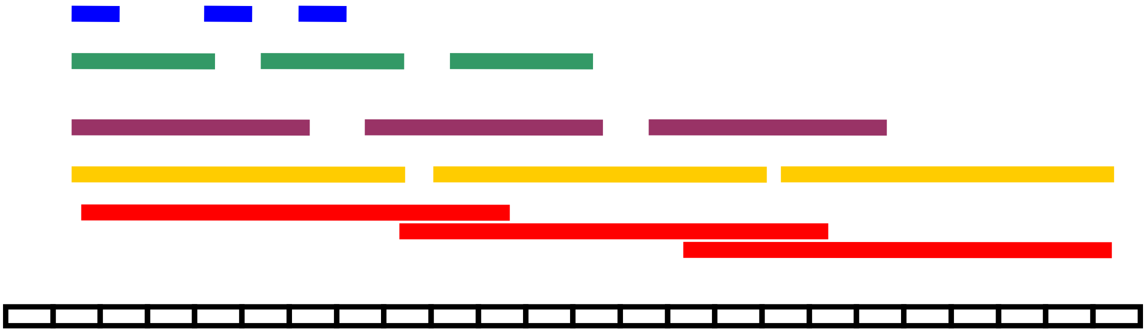
4. Movemos al burro y al avestruz (en ese orden) de la única forma posible; es decir, el burro a la derecha y después el avestruz hacia arriba. Con esto ya conseguimos que todos los animales estén en sus jaulas correspondientes y el número total de movimientos realizados es 11 (5 + 4 + 2). Notemos también que todos los animales han realizado solo el número mínimo de movimientos, según lo observado en el paso 1.
5. Hemos mostrado así una secuencia de 11 movimientos que conducen a la ubicación de los animales en sus jaulas correspondientes y por lo anotado en los pasos 1 y 2, es imposible que haya una secuencia con menor número de movimientos. Así, concluimos que 11 es el número mínimo de movimientos.

Comentarios

a) Éste es un problema que ilustra un método de resolver algunos problemas de minimización: encontrar lógicamente una cota inferior k del conjunto de posibles valores de la función objetivo y luego mostrar un caso particular que corresponde precisamente al valor k. Así, el mínimo es tal número k. Notemos que en este caso la cota inferior k es el número 11, pues el número n de movimientos que conduzca a la ubicación final de cada animal en la jaula con la letra de la inicial de su nombre, tiene que ser mayor o igual que 11, ya que 11 es la suma de los números mínimos de movimientos que se tendría que hacer con cada animal para pasarlo de su ubicación inicial a la final (Lo anotado en los pasos 1 y 2). Es decir, se ha visto lógicamente que para todo n, debe cumplirse que $n \geq 11$ y se ha encontrado una secuencia que tiene precisamente 11 movimientos. Evidentemente, es imposible que exista una secuencia con un número menor de movimientos y en consecuencia 11 es el mínimo.

b) Análisis similar puede emplearse para resolver el problema siguiente:

Si se dispone de reglitas de longitudes 1, 3, 5, 7 y 9 centímetros, respectivamente, 3 de cada una de ellas, ¿Cuál es el menor número de reglitas que se puede usar para cubrir exactamente, poniendo una a continuación de otra, un caminito rectilíneo de 24 centímetros de longitud? [2]



Evidentemente, 1 y 2 son cotas inferiores para el conjunto de posibles valores, pues es imposible cubrir el caminito con un número de reglitas menor que 1 ó 2, pero realmente no resultan cotas inferiores significativas. Como tomar 2 reglitas de la mayor longitud (9 cm) es lo que puede minimizar el número total de reglitas a usar y eso da a lo más 18 cm, es evidente que necesitamos por lo menos una reglita más; sin embargo, siendo 24 un número par y 18 también, será imposible cubrir exactamente el caminito de 24 cm con solo una reglita más, ya que todas tienen longitud impar. Para cubrir los 6 centímetros que faltan (24 – 18) necesariamente debe emplearse por lo menos dos reglitas, y en consecuencia la cota inferior realmente significativa es 4. No es difícil encontrar combinaciones de 4 de las reglitas para obtener el caminito de 24 centímetros de longitud. (Por ejemplo, dos de 9cm y dos de 3 cm cada una; ó dos de 9 cm, una de 1 cm y una de 5 cm.) En consecuencia, 4 es el mínimo número de reglitas.

c) El método usado es uno de los diversos que recomiendo usar al resolver problemas de optimización, según las características propias de cada problema.[3] Estos son:

I. Identificar casos y usar cuadros

II. Hacer representaciones gráficas y visualizaciones geométricas

III. Usar la desigualdad entre medias aritmética y geométrica

IV. Si se busca un camino para llegar a determinado objetivo, “pensar en el camino inverso”

V. Usar diagramas de árbol

---

[2] Para hacer lúdico y dinámico este problema, se pueden emplear reglitas y caminito de cartulinas de colores, escogiendo una unidad de longitud mayor que el centímetro; por ejemplo que las reglitas sean de longitudes 3cm, 9cm, 15 cm, 21 cm y 27 cm y que el caminito a cubrir sea de 72 cm de longitud. Tanto las reglitas como el caminito deben ser todos del mismo ancho, digamos 5 cm. Sobre este problema y una variación interesante, que presentamos en el PME 34, hicimos un comentario amplio en el número 19 de UNION.

[3] Ejemplos concretos de uso de estos métodos puede encontrarse en el texto de la conferencia, publicado en las actas de la XIII CIAEM.

VI. Identificar situaciones equivalentes en el conjunto en el que se busca el máximo o el mínimo

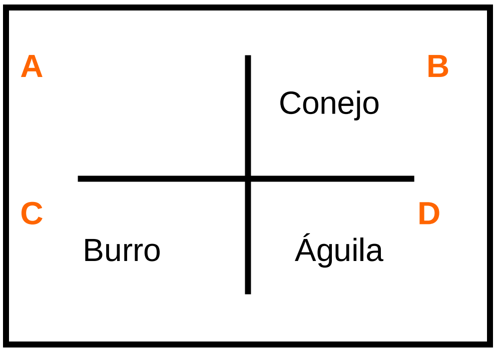
VII. Definir una función objetivo, graficarla y hacer operaciones con el apoyo del álgebra y del análisis.

VIII. Encontrar lógicamente una cota inferior k del conjunto C en el que toma valores la función objetivo y luego exhibir un caso que corresponde a esa cota. La consecuencia es que el mínimo es k.

Similarmente, encontrar lógicamente una cota superior M del conjunto C en el que toma valores la función objetivo y luego exhibir un caso que corresponde a esa cota. La consecuencia es que el máximo es M.

d) Será atractivo para los niños resolver problemas como el de las jaulas y los animales empleando material concreto; por ejemplo, figuras de los 7 animales ubicadas en casillas correspondientes a las 8 jaulas dibujadas en una hoja de papel, o figuras en 7 láminas cuadradas, por ejemplo de 2cm x 2cm, ubicadas en una caja rectangular de 4cm x 8cm. Así, los movimientos se realizan de manera más concreta.

e) El problema es una invitación a crear otros problemas similares, más sencillos o más complejos, y examinar su solución. Resulta interesante y aleccionador, como formación matemática, crear problemas similares con menor número de animales y de jaulas y examinar si la solución existe.
Por ejemplo, si el águila, el burro y el conejo están inicialmente ubicados como se muestra en la siguiente figura, es posible ubicarlos, luego de una secuencia de movimientos, de modo que cada animal esté en la jaula cuya letra coincide con la inicial de su nombre. (¿Cuál es el número mínimo de movimientos?)



Pero… ¿se logrará esa ubicación final, cualquiera que sea la ubicación inicial de los tres animales, cada uno en una de estas cuatro jaulas? ¿Por qué?

Algunas otras preguntas:

- ¿Y qué pasa con seis jaulas y 5 animales?
- ¿Y con 2n jaulas y 2n – 1 animales?
- ¿Influye para la respuesta que las 2n jaulas cuadradas formen un rectángulo o un cuadrado?

Los lectores quedan invitados a buscar respuestas y así ir haciendo matemáticas, examinando casos de existencia de soluciones, haciendo conjeturas y generalizaciones, dando ejemplos y contraejemplos…

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 169- 178
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Desenvolvimento de esquemas de utilização na interação com Geometria Dinâmica

Jesus Victoria Flores Salazar

Resumen

En este artículo presentamos una actividad realizada con estudiantes de segundo año de nivel secundario (16 años) desarrollada en una escuela del estado de São Paulo, Brasil. Tenemos por objetivo analizar las acciones y representaciones de los estudiantes y, sus posibles esquemas de utilización, cuando desarrollan una actividad que envuelve nociones de Geometría Espacial utilizando un *software* de Geometría Dinámica. Tomamos como base la teoría instrumental de Rabardel (1995), para trazar las relaciones entre el sujeto y el objeto mediadas por el instrumento.

Abstract

This article presents an activity realized with Form II students (second year upper school, 16 years old) from a school in the state of Sao Paulo, Brazil. The objective was to analyze the actions and representations performed by the students and the schemes used when developing an activity which involves notions of Spatial Geometry using Dynamic Geometry *software*. We have taken Rabardel´s instrumental theory (1995) in order to observe the relationships between the subject and the object mediated by the instrument.

Resumo

No presente artigo apresentamos uma atividade de realizada com estudantes de segundo ano de Ensino Médio (16 anos) desenvolvida numa escola do Estado de São Paulo, Brasil. Objetivamos analisar as ações e representações dos estudantes e, seus possíveis esquemas de utilização, quando desenvolvem uma atividade que envolve noções de Geometria Espacial utilizando Geometria Dinâmica. Baseamo-nos na abordagem Instrumental de Rabardel (1995) para delinear as relações entre o sujeito e o objeto mediadas pelo instrumento.

1. Introducción

Investigações na área de Educação Matemática, como as de Parzysz (1988; 1991), Cavalca (1997; 1998), Rommevaux (1999), Kaleff (2003), Montenegro (2005), Flores (2002; 2007) e Salazar (2009), bem como as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática PCN (1998) do Brasil, apontam a necessidade de realizar pesquisas que evidenciem como se desenvolve o processo de aprendizagem de Geometria Espacial.

Nesse sentido, o ambiente de geometria dinâmica *Cabri 3D* apresenta-se como uma alternativa para a aprendizagem de Geometria Espacial, uma vez que, permite construir, manipular e explorar figuras espaciais, além de conjecturar e verificar suas propriedades, o que facilita observar a figura sobre diferentes pontos de vista, desenvolvendo a visão tridimensional.

Com esse propósito, apresentamos neste artigo um recorte da tese de doutorado de Salazar (2009). Esta investigação foi realizada com onze estudantes brasileiros de segundo ano de Ensino Médio (16 anos) de uma escola particular do Estado de São Paulo. Expomos uma reflexão sobre as estratégias desenvolvidas por três alunos, que ao mobilizar conhecimentos de Geometria, realizam uma atividade que mobiliza noções de Geometria Espacial utilizando o *Cabri 3D*.

As ações dos estudantes são observadas por meio da abordagem instrumental de Rabardel (1995), uma vez que esta abordagem nos permite observar como eles interagem com esse ambiente computacional e com noções de geometria espacial, além de ressaltar alguns instrumentos que dão suporte as suas ações.

2. O ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D*

O *Cabri 3D* foi lançado em 2004, concebido e desenvolvido por Cabrilog[1]. Fundamenta-se na tecnologia CABRI[2], originada das pesquisas desenvolvidas no Laboratório Leibniz (associado à Universidade Joseph Fourier, em Grenoble, França).

Esse ambiente de geometria dinâmica permite manipular e construir figuras em três dimensões além de verificar e testar suas propriedades. Por exemplo, nas figuras no *Cabri 3D*, a mudança dos tons das cores indica se as figuras estão construídas mais perto do observador ou não, isto é, as cores são mais intensas ou mais tênues, respectivamente.

Além do mais, suas ferramentas e recursos permitem, por exemplo, criar pontos, retas, planos, prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas, etc. e, podem ser utilizados para realizar construções dinâmicas das mais elementares às mais complexas. Favorece a exploração de figuras em vários pontos de vista do observador, isso acontece porque o usuário pode observar sua construção, como se esta estivesse dentro de uma bola de cristal.

Advertimos que a primeira pesquisa sobre o *Cabri 3D* foi desenvolvida na França por Hugot (2005) em sua tese de doutorado *Une étude sur l'utilisabilité de Cabri 3D*[3]. De acordo com o autor, o *Cabri 3D* é um ambiente pedagógico de geometria dinâmica no espaço. O pesquisador mostra que o seu desenvolvimento apoia-se em alguns princípios relacionados à manipulação direta e cita que as funções didático-pedagógicas são diversas, com destaque para:

- Fornecer um ambiente de simulação: porque propõe um ambiente que respeite as leis do modelo de Geometria Euclidiana.
- Poder motivador: pois desperta a vontade do usuário, como por exemplo, os atributos gráficos como: cor, tamanho, textura, etc., que torna as figuras mais atraentes, dinâmicas e "legíveis".

3. A abordagem instrumental

A abordagem instrumental de Rabardel (1995) embasa este artigo. Esta abordagem define o instrumento como uma entidade mista, composta pelo artefato (parte material ou simbólico) e esquemas de utilização.

[1] Logotipo da companhia criadora dos ambientes de Geometria Dinâmica *Cabri II* e *Cabri 3D*.
[2] A sigla CABRI vem do francês **Ca**hier de **Br**ouilon **I**nformatique, que significa Caderno de Rascunho Informático.
[3] Um estudo sobre as possibilidades de uso do *Cabri 3D.*

Nesta abordagem, a transformação do artefato em instrumento articula o sujeito - com suas habilidades e competências cognitivas - o instrumento e o objeto para o qual a ação é dirigida. Esse processo de transformação é chamado por Rabardel (1995) Gênese Instrumental.

Segundo o autor, a *Gênese Instrumental* tem duas dimensões que dependem da orientação. A *instrumentação,* quando é orientada para o sujeito, e *instrumentalização,* quando é orientada para o artefato. Para o autor,

> [...] os processos de **instrumentalização** referem-se ao surgimento e evolução da componente artefato do instrumento: selecionado, agrupando, produzindo e definindo funções, transformando o artefato (estrutura, funções etc.) enriquecendo as propriedades do artefato cujos limites são difíceis de determinar; [...] Os processos de **instrumentação** são relativos ao surgimento e evolução de esquemas de utilização e da ação instrumental: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução por acomodação, coordenação e combinação, inclusão e assimilação recíproca, a assimilação de novos artefatos aos esquemas pré-existentes. (RABARDEL, 1995, p. 111, tradução nossa do original francês) (grifo nosso)

Pontua o autor que os fatores básicos da influência dos instrumentos na atividade cognitiva do sujeito correspondem por um lado às limitações dos instrumentos e por outro às vantagens que eles oferecem para a ação. Assim, o sujeito na utilização e apropriação do instrumento deve levar em conta suas limitações.

4. Esquemas de Utilização

Rabardel (1995) justifica seu interesse pelos esquemas porque eles permitem analisar, de maneira detalhada, a sequencia de ações que o sujeito realiza quando tem que resolver uma situação- problema. Assim, o autor se baseia na redefinição de esquema de Vergnaud[4]. Segundo o autor, o componente psicológico do instrumento, que organiza a atividade do sujeito, é formado pelos esquemas (novos esquemas, esquemas pessoais ou sociais preexistentes), que atuam como mediadores entre o sujeito e sua atividade.

Assim, Rabardel (1995) chama esquemas de utilização **(E.U.)** aos esquemas relacionados ao uso do artefato e, acrescenta que os esquemas de utilização relacionam-se por um lado aos artefatos (susceptíveis de ter um estatuto de meio) e, por outro lado, aos objetos (sobre os quais esses artefatos permitem agir). E afirma que os esquemas são organizadores da ação, da utilização, da aplicação e do uso do artefato.

Portanto, as duas componentes do instrumento – artefato e esquemas de utilização – têm uma relação de interdependência relativa. Um mesmo E.U. pode ser aplicado a uma multiplicidade de artefatos, mas também a artefatos diferentes.

[4] Vergnaud (1996) redefiniu esquema, como organização invariante da conduta para uma dada classe de situações e, afirma que os esquemas não funcionam da mesma maneira em diferentes classes de situações. Assinala que nos esquemas, devem ser procurados, os conhecimentos-em-ato do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que permitem que sua ação seja operatória. Esses conhecimentos contidos nos esquemas são os invariantes operatórios (teoremas-em-ato e/ou conceitos-em-ato) que podem se tornar visíveis na ação.

Inversamente, um artefato pode ser suscetível de se inserir em uma multiplicidade de E.U. que lhe atribuem outro significado e, às vezes, funções distintas. Na atividade, os E.U. têm uma posição instrumental e uma posição de objeto, quando a orientação da atividade é epistemológica. Da mesma maneira, a posição instrumental do artefato depende da ação do sujeito que o usa como meio para atingir os objetivos de sua ação.

5. Metodologia

A metodologia utilizada se apoia em aspectos da Engenharia Didática de Artigue (1995).

> [...] é uma forma de trabalho didático que pode ser comparado com o trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, baseia-se em conhecimentos científicos de sua área e aceita submete-se a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo é obrigado a trabalhar com objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência. (ARTIGUE, 1995, p. 33, tradução nossa do original espanhol).

De acordo com Almouloud (2007), a Engenharia Didática se apoia em um esquema experimental baseado na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino, além da validação, que é a comprovação ou não das hipóteses assumidas no estudo, mediante as análises *a priori* e *a posteriori*.

Na parte experimental trabalhamos com alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola particular do Estado de São Paulo e utilizamos, para coletar os dados, além das atividades, questionários, fichas de observação e gravação das telas dos computadores.

6. A atividade

Apresentamos neste artigo a atividade "trave de futebol"[5] com o intuito de observar as escolhas dos estudantes, tanto das ferramentas e/ou recursos do *Cabri 3D* quanto das noções geométricas mobilizadas por eles. Tal atividade consiste na construção de uma trave de futebol (figura 1) considerando o plano de base do *Cabri 3D* como o chão da trave.

Para observar as ações e os possíveis esquemas de utilização que desenvolvem os alunos participantes no desenvolvimento da atividade, escolhemos de maneira aleatória três estudantes, cujos nomes fictícios são: Andreya, Pedro e Carlos.

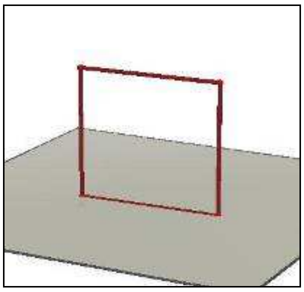


Figura 1: trave de Futebol

[5] Essa atividade forma parte de um grupo de atividades trabalhadas na tese de doutorado de Salazar (2009) p. 168.

Assim, a priori, mostramos dois possíveis esquemas de utilização para a construção da trave.

- **Trave [1]**

Conceitos-em-ato: a construção ocorre por meio da mobilização de noções de segmento, plano paralelo e, reta perpendicular.

Regras-de-ação: criar um segmento qualquer no plano de base, depois criar duas retas perpendiculares a esse plano que passem pelos extremos do segmento. Em seguida, marcar um ponto em uma das duas perpendiculares e criar um plano paralelo ao plano de base, passando por esse ponto, marcar, então, o ponto de interseção da outra perpendicular com o plano paralelo (figura 2) feito isso, usar segmentos para construir a trave de futebol.

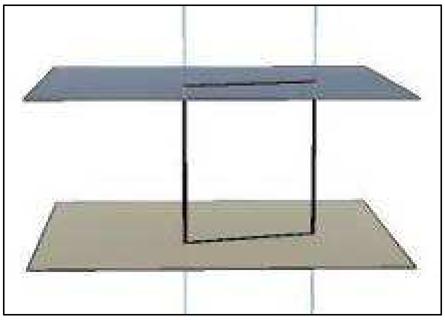


Figura 2: construção da trave de futebol com plano paralelo

- **Trave [2]**

Conceitos-em-ato: na construção, o estudante pode mobilizar a noção de segmento, retas paralelas e retas perpendiculares.

Regras-de-ação: criar uma reta no plano de base e, sobre ela, um segmento. Criar duas retas perpendiculares ao plano de base que passem pelos extremos do segmento. Em seguida, criar uma reta paralela ao segmento e, marcar os pontos de intersecção com as retas perpendiculares (figura 3) Por fim, criar segmentos para construir a trave de futebol.

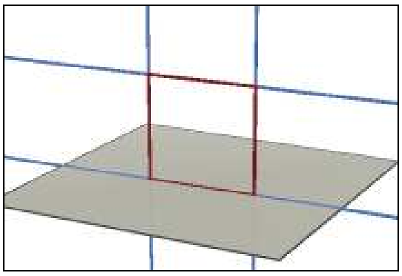


Figura 3: construção da trave de futebol com retas paralelas

A análise da atividade a posteriori é realizada em dois momentos. O primeiro descreve as ações de cada estudante para, em seguida, analisar em conjunto os esquemas mobilizados e as escolhas feitas por Andreya, Pedro e Carlos.

- **Ações de Andreya**

Três tentativas de resolução da atividade foram desenvolvidas pela estudante. É importante observar que Andreya foi a única que utilizou uma estratégia totalmente diferente dos outros estudantes e da que nós pressupúnhamos.

Em sua primeira tentativa, criou um cubo, como mostra a figura 4 e tentou "deletar" cinco de suas seis faces, de maneira que apenas uma sobrasse, esta seria a trave solicitada na atividade. Ao tentar validar essa ação, ficou surpresa ao notar que o cubo desaparecia quando uma de suas faces era destruída.

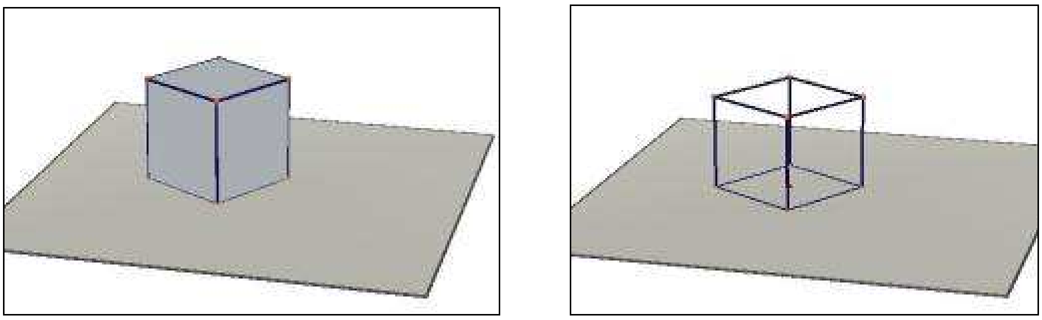


Figura 4: primeira tentativa de construção realizada por Andreya

Em sua segunda tentativa, a estudante criou dois pontos na parte visível (de cor cinza) do plano de base e outros dois fora dele. Feito isso, criou segmentos a partir desses pontos e a trave foi construída. Em um primeiro momento, ficou satisfeita com sua construção que parecia estar correta. Instigada pelo professor a usar o recurso "mudar de vista" (figura 5), alterou a posição do plano de base e observou que os pontos criados fora da parte visível ainda pertenciam a ele, o que mostrou que a trave não foi construída corretamente.

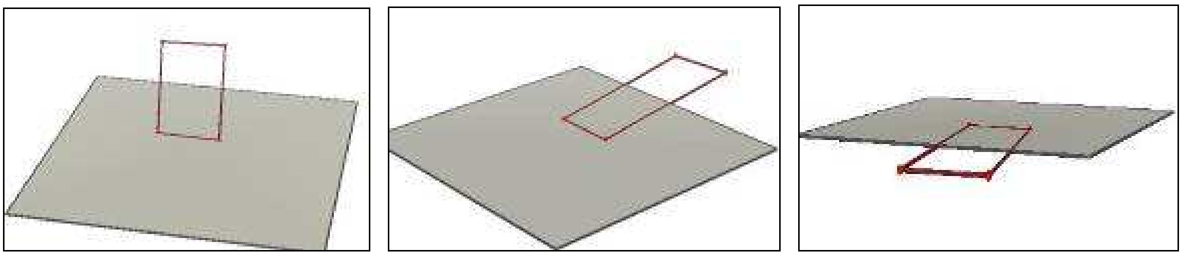


Figura 5: segunda tentativa de construção realizada por Andreya

Já na terceira, Andreya voltou à estratégia que consistia em construir a trave a partir do cubo (figura 6) e, novamente, um cubo foi criado, mas ela já sabia que não podia "destruir" os elementos que o compunham. Então, criou segmentos nas arestas de uma face do cubo e, em seguida, com o atributo "esconder/mostrar" escondeu o cubo e confirmou que sua construção estava correta, com o recurso "mudar de vista".

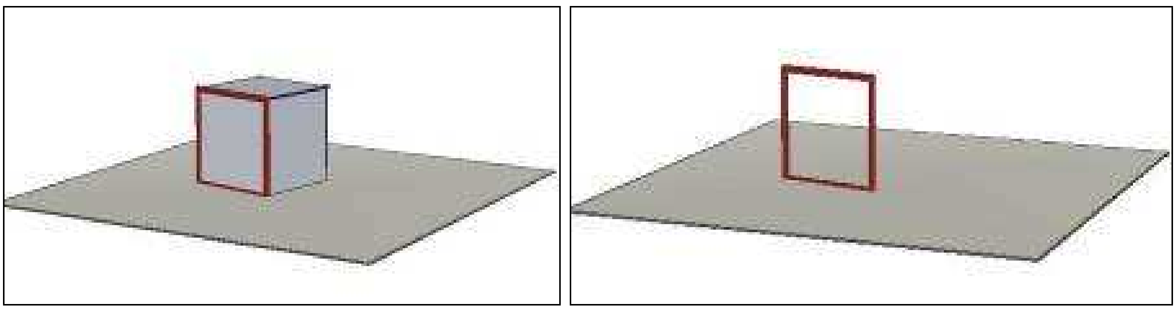


Figura 6: terceira tentativa de construção realizada por Andreya

- ## Ações de Pedro

Diferente de Andreya, Pedro realizou só uma construção, criou um segmento no plano de base e depois duas retas perpendiculares ao plano de base, passando pelos extremos do segmento. Depois disso, criou segmentos em cada reta perpendicular para construir os lados da trave de futebol, verificou a medida dos segmentos paralelos e igualou os dois, manipulando-os manualmente. Por fim, criou outros dois segmentos para fechar a trave de futebol, como mostra a figura 7. Outra vez, verificou que os dois novos segmentos tinham o mesmo comprimento e, dessa maneira, construiu sua trave de futebol.

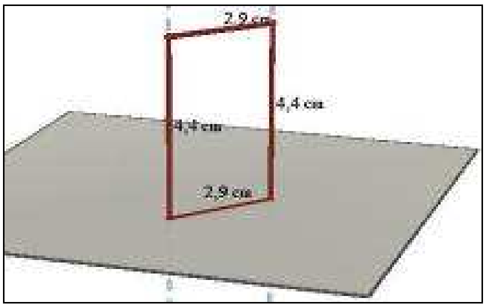


Figura 7: construção realizada por Pedro

- ## Ações de Carlos

O estudante observou detidamente a trave na ficha de atividades e criou um segmento, com um extremo no plano de base e o outro extremo no espaço. Para isso, utilizou a tecla Shift, mas teve uma dúvida e perguntou ao professor: como faço o segundo segmento? O professor orientou-o que mudasse de posição o plano de base – o botão direito do mouse – ele mudou e depois optou por copiar e colar o segmento já criado, obtendo dessa maneira dois segmentos paralelos (figura 8). Em seguida, criou segmentos nos extremos dos segmentos paralelos e construiu a trave de futebol.

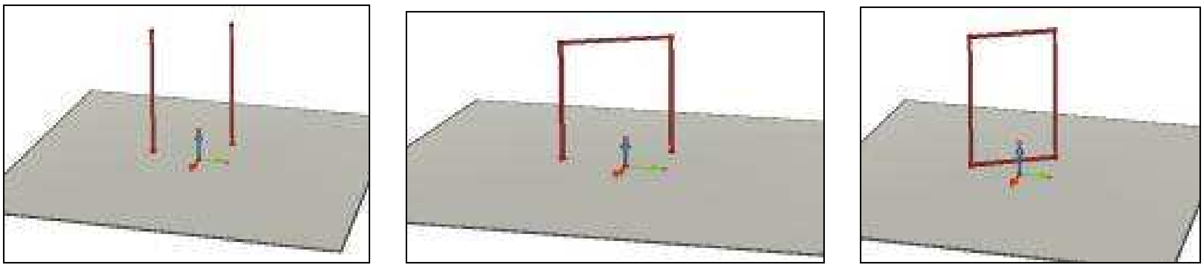


Figura 8: processo de construção realizada por Carlos

Observamos que as ações de Andreya, Pedro e Carlos mostraram que eles utilizaram diferentes ferramentas do *Cabri 3D* (parte do artefato) e, também, esquemas distintos aos apresentados na análise a priori: Trave [1] e Trave [2]. Assinalamos que os esquemas de utilização podem ou não terem sido desenvolvidos com base em esquemas preestabelecidos.

Nesse sentido, temos indícios de que o processo de instrumentação aconteceu. Isso se tornou evidente quando observamos, em cada construção, o tratamento no registro figural[6] que chamamos de registro figural dinâmico[7].

---

[6] No sentido de Duval (1995).

Deste modo, detivemo-nos nas ações que Andreya seguiu nas três tentativas para construir a trave, pois elas são diferentes da sequência de ações pressupostas e, também, porque diferem das construções dos colegas.

Como a construção da trave de Futebol é uma atividade realizada depois de atividades introdutórias ao *Cabri 3D*, pressupomos que a estudante utilizaria as ferramentas, plano e reta como aconteceu, com Pedro e Carlos. O esquema de construção utilizado por Andreya partia do cubo, pois, ela associou a forma das faces do cubo com a trave de Futebol. Tal construção, nos fez pensar na possibilidade de que para ela, as ferramentas, plano e reta ainda não são artefatos, no sentido de Rabardel.

Dos três estudantes, somente Andreya verificou, por meio da manipulação direta – botão direito do mouse – se a construção feita estava de acordo com o solicitado. Isso aconteceu na segunda tentativa, quando deslocou o plano de base em relação a um referencial, isto é, quando mudou seu ponto de vista.

As construções de Pedro e Carlos pareciam certas, e eles até mudaram o ponto de vista, porém, não manipularam as figuras construídas, (figuras 9(a) e 9(b)). Se a manipulação fosse feita, teriam verificado que suas construções não conservavam as características da construção inicial, isto é, são inconsistentes (figuras 9 (c) e 9(d)).

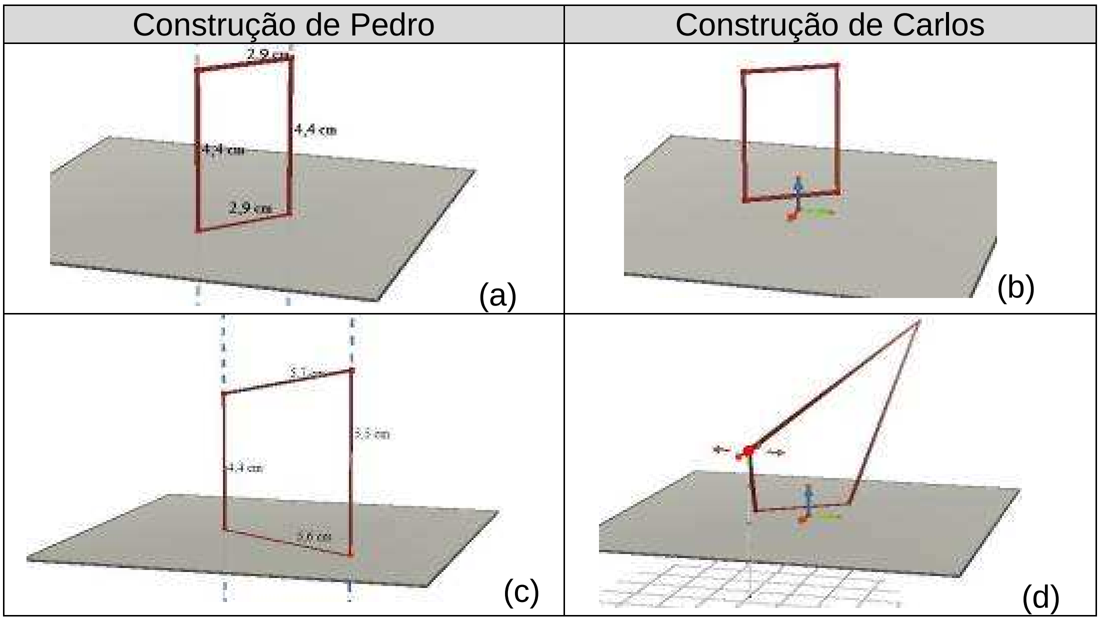


Figura 9: manipulação da trave de futebol construída por Pedro e Carlos

Após observar as ações de Pedro e Carlos, podemos afirmar que os esquemas utilizados por eles limitaram-se à questão visual, pois, as estratégias usadas na construção apresentavam indícios que os dois estudantes não tiveram preocupação com as propriedades matemáticas exigidas para a construção (lados paralelos dois a dois e ângulos retos).

[7] Entendemos como *registro figural dinâmico,* o registro figural utilizado em ambientes de Geometria Dinâmica. No artigo, as figuras são construídas no *Cabri 3D*, razão pela qual consideramos esse registro.

7. Considerações finais

Por meio dos esquemas de utilização da análise a priori, descrevemos de maneira detalhadamente a possível sequência de ações que os estudantes seguiram no desenvolvimento da atividade quando interagiram com o ambiente de geometria dinâmica Cabri 3D.

Além, do mais, os estudantes estabeleceram relações entre as ferramentas e recursos do Cabri 3D e seus conhecimentos matemáticos, pois, suas ações evidenciaram a mobilização de esquemas pré-estabelecidos e/ou a criação de novos esquemas de utilização. Esse fato nos dá subsídios da ocorrência do processo de instrumentação com o Cabri 3D e com as noções de Geometria.

A parte do artefato Cabri 3D, ferramentas e recursos utilizados, com os esquemas de utilização criados pelos estudantes durante o desenvolvimento da atividade “trave de Futebol” foram diferentes aos esquemas da análise a priori.

Por outro lado, não podemos afirmar que existe uma única sequência de ações para uma atividade. Entretanto, para que os estudantes utilizem e/ou criem esquemas de utilização similares aos que o professor prevê, a priori, cabe a ele fazer as escolhas adequadas e orientar o desenvolvimento do trabalho, de acordo com o conteúdo escolhido.

Enquanto à interação dos estudantes com o *Cabri 3D*, o software permitiu, durante o desenvolvimento das atividades, a exploração delas sob diferentes pontos de vista do observador, além de identificar e interpretar, de modo direto, as formas diferentes de objetos matemáticos envolvido na construção realizada na atividade.

O esquema criado por Andreya permitiu que ela relacionasse os elementos estruturais da figura, com noções matemáticas mobilizadas.

Na atividade realizada os três estudantes demonstraram estar familiarizados com as ferramentas e recursos do *Cabri 3D*, visto que estabeleceram relações entre estes e seus conhecimentos matemáticos.

Bibliografía

CABRI 3D, Manual do usuário. Recuperado el 1 de Marzo de 2008, de http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/c3dv2/user_manual_pt_br.pdf.

Cavalca, A. de P. (1997). *Espaço e Representação Gráfica: Visualização e Interpretação. Dissertação* (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Bern, Peter Lang.

Flores, C. R. (2002). *Abordagem histórica no ensino de Matemática: o caso da representação em perspectiva*. Contrapontos. v. 2, n. 6. p. 423-437.

_____. (2007). *Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva*. São Paulo. Musa.

Hugot, F. (2005). *Une étude sur l'utilisabilité de Cabri 3D. Mémoire de Recherche, Environnements Informatiques d'Aprentissage Humain et Didactique.* Université Joseph Fourrier Grenoble I, França.

Kaleff, A. M. (2003).*Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao calculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos*. EdUFF.

Montenegro, G. (2005). *Inteligência Visual e 3–D: Compreendendo conceitos básicos da Geometria Espacial*. São Paulo: Edgard Blücher.

Parzysz B. (1988). Knowing vs. Seeing: Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics,* n.19, p. 79-92.

_____. (1991). Representation of space and students' conceptions at High school Level. *Educational Studies in Mathematics*, n. 22, p. 575-593.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Rommevaux, M.-P. (1999). Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. *Revista Educação Matemática Pesquisa*. v. 1, n. 1, p 13-65.

Salazar, J.V.F. (2009). *Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço*. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Verillon, P. (2008). *Artifacts and cognitive development: how do psychogenetic theories of intelligence help in understanding the influence of technical environments on the development of thought?*. Recuperado el 5 de Abril de 2008, de http://www.iteaconnect.org/Conference/PATT/PATT15/Verillon.pdf.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceptuais. In: Jean Brun (Ed.). *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Jesús Victoria Flores Salazar. Doctora en Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil. Docente del departamento de Matemática, Universidad Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Brasil. floresjv@gmail.com.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 179-194
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar

Hacia una generalización del Teorema de Pitágoras

José María Sigarreta; Javier González Mendieta

Resumen

La relación que se establece entre el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, conlleva a una reflexión sobre el sentido y aplicabilidad del Principio de Aditividad. En este artículo, mostramos como su utilización, sustentada en el método inductivo, favorece la búsqueda, formulación y demostración de una generalización del Teorema de Pitágoras.

Abstract

In any right triangle, the area of the square whose side is the hypotenuse is equal to the sum of the areas of the squares whose sides are the two legs, implies a reflection on the meaning and applicability of the Principle of Additivity. In this paper, we describe their use, based on the inductive method, for the search, formulation and demonstration of a generalization of the Pythagorean Theorem.

Resumo

A relação estabelecida entre a área do quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo e as áreas dos quadrados construídos sobre as pernas, levando a uma reflexão sobre o significado ea aplicabilidade do princípio da aditividade. Neste trabalho, descrevemos a sua utilização, baseada no método indutivo incentiva a pesquisa, desenvolvimento e demonstração de uma generalização do Teorema de Pitágoras.

1. Introducción

En el artículo se trabaja haciendo énfasis en la situación típica de la metodología de la matemática, denominada "tratamiento de teoremas y sus demostraciones", el objetivo fundamental de esta situación es que los estudiantes se apropien, en lo fundamental, de determinados teoremas, métodos y técnicas de demostración, para la comprensión o aplicación de una determinada teoría. Además, el tratamiento de teoremas y sus demostraciones, permiten el desarrollo de habilidades matemáticas, tales como: reconocer relaciones, hacer suposiciones, argumentar, comprender la lógica de las demostraciones y generalizar.

En el tratamiento de teoremas y sus demostraciones , se puede estructurar en tres etapas fundamentales: **búsqueda del teorema,** en esta etapa se pretende que el estudiante sea capaz de encontrar una determinada suposición y formular como proposición; **búsqueda de la demostración,** como su nombre lo indica se pretende encontrar los medios para la demostración, en particular en la demostración que se desarrolla se pone al descubierto la cadena de inferencias que conducen de la premisas a la tesis, a través de una serie de etapas intermedias y por último la **representación de la demostración,** pretendiendo aquí escribir correctamente la cadena de inferencias lógicas en un esquema de demostración conveniente y claro.

Para el tratamiento de la generalización del Teorema de Pitágoras, utilizaremos el método inductivo, en lo fundamental, porque con la aplicación de este método los procesos parciales de obtención y aseguramiento del conocimiento, transcurren uno tras otro y la apropiación del conocimiento es subdividido en forma clara para los alumnos , utilizándolo, como elemento esencial para la representación de la demostración en un esquema apropiado.

A lo largo del artículo se ponen de manifiesto los procesos parciales que permiten la instrumentación de cada una de las etapas señaladas. La búsqueda del teorema se desarrolla a través de los siguientes procesos parciales: motivación hacia el teorema; orientación hacia el teorema y formulación del teorema. La búsqueda de la demostración se desarrolla a través de la motivación de la necesidad de una demostración, delimitación de los métodos y medios de demostración y la elaboración de un plan de solución. La representación de la demostración se desarrolla teniendo en cuenta la comprobación de los pasos y las observaciones perspectivas y retrospectivas del método de solución empleado.

Se ha puesto de manifiesto (Ruesga y otros 2007, Ruesga y otros 2008, Sigarreta y otros 2004, Sigarreta y otros 2006) que la aplicación consciente y planificada de la situación típica “tratamiento de teoremas y sus demostraciones” tiene múltiples repercusiones en la formación integral del alumno, por ejemplo, favorece su pensamiento lógico-matemático, permite el desarrollo de cualidades de su personalidad, pone al descubierto la importancia y necesidad de realizar demostraciones, se familiariza con la heurística y las formas de trabajo típicas de la matemática. El esquema de demostración que se desarrolla en el trabajo, permite representar la estructura de la demostración en forma clara, hacer visibles los medios de demostración empleados, la formulación verbal de la demostración y se dejan espacios intermedios que son utilizados como problemas parciales.

No se sabe si los geómetras de la antigüedad pensaron en una generalización del Teorema de Pitágoras, quizás lo intentaron con medias circunferencias y hasta es posible imaginar que hayan pensado en la posibilidad de triángulos esféricos, si fue así, no hubo un geómetra con la capacidad de sistematizar y hacer coherente una teoría con esas ideas. Pappus de Alejandría, (290-350) llevó sus ideas sobre la generalización un poco más allá e instrumentó, una demostración que generaliza la idea del teorema de Pitágoras, tal demostración no fue entendida en su tiempo como una generalización, y por ello, no trascendió. En tiempos más recientes, quizá desde el siglo XIX se han desarrollado generalizaciones con las figuras asociadas a los lados de un triangulo rectángulo: triángulos, rectángulos, círculos, polígonos regulares y hasta no regulares. Tales demostraciones se basan en un análisis trigonométrico y más allá, muchos han conjeturado la posibilidad de asociar otro tipo de figuras. Ahora, después de una reflexión exhaustiva, tenemos la posibilidad de demostrar, que la variedad de figuras asociadas a los lados de un triángulo rectángulo, se puede extender. Esta es la esencia de este trabajo, y por ello, la trascendencia que tiene como un elemento más, para la formalización de los conceptos de la Geometría.

2. Primera aproximación a una generalización del Teorema de Pitágoras

La idea de la equivalencia en áreas del cuadrado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y los cuadrados construidos sobre los catetos, conlleva a la reflexión sobre el sentido del Principio de Aditividad de las Àreas ,y en este caso, a la generalización del Teorema de Pitágoras. Si las figuras dibujadas sobre los lados del triángulo rectángulo resultan ser triángulos equiláteros, entonces el Teorema de Pitágoras es cierto. La demostración es simple y se le deja como ejercicio al lector. El caso de que en cada lado se construye un cuadrado, es el clásico Teorema de Pitágoras, así, que intentaremos llevar estas ideas un poco más lejos.

Ahora, consideremos polígonos regulares construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo ABC. En la Fig. 2 se han considerado pentágonos, como elemento intuitivo e inductivo de la demostración, pero la prueba como se verá tiene sentido para cualquier polígono regular de n lados. Estos polígonos no tienen un tamaño arbitrario, son proporciónales a los lados del triángulo y están inscritos en las circunferencias C_1, C_2 y C_2; entonces, considerando eso y el hecho de que las áreas de los polígonos semejantes son entre sí como el cuadrado de los diámetros de los círculos que los circunscriben, (Proposición 1 del libro XII de LOS ELEMENTOS de Euclides).

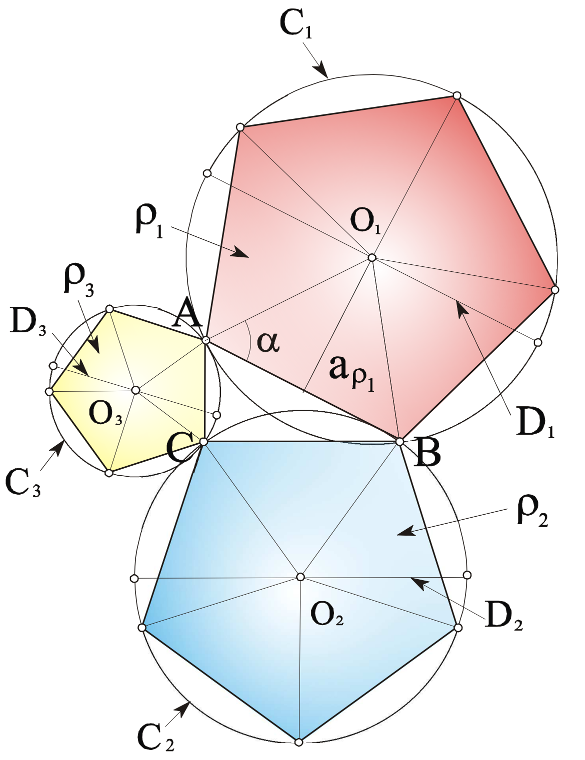


Figura 2: El Teorema de Pitágoras para el caso de polígonos regulares de n lados.

Podemos pensar en el Teorema de Pitágoras para polígonos regulares de cualquier numero de lados. La demostración se basa en las ideas siguientes; primero, consideraremos la proporcionalidad que los polígonos tienen con respecto a los lados del triángulo, segundo, consideraremos la proporcionalidad de los diámetros de las circunferencias con relación a los polígonos y tercero, utilizaremos la proposición 1 del libro XII de Euclides.

Decimos que dos segmentos de recta AB y CD son proporcionales si existe una constante $k > 0$, $k \in \Re$ tal que: $\frac{AB}{CD} = k$, de ahí que, dos polígonos, no necesariamente regulares, $A_1A_2A_3,..., A_{n-1}A_n$ y $B_1B_2B_3,..., B_{n-1}B_n$ son proporcionales si existe la constante $A_1A_2A_3,..., A_{n-1}A_n$, $k \in \Re$ que cumpla con la relación: $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = ... = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = k$.

Es decir; cualquier lado del primer polígono guarda la misma proporción al lado homòlogo del segundo; y en el caso de los polígonos regulares decimos que son proporcionales a un segmento AB porque todos sus lados son proporcionales a AB. Tomando eso en consideración construyamos, sobre los lados del triángulo rectángulo ABC, polígonos regulares ρ_1, ρ_2 y ρ_3 de lados AB, BC y CA con áreas A_1, A_2 y A_3 y circunscritos a las circunferencias C_1, C_2 y C_3; la C_1 pasa por los vértices A y B, la C_2 por B y C y C_3 por C y A, Fig. 2. Esto hace que los polígonos sean proporcionales a los lados del triángulo y, a su vez, los diámetros D_1, D_2 y D_3 también lo son.

Efectivamente, que los polígonos ρ_1, ρ_2 y ρ_3 son proporcionales a los lados del triángulo es evidente; sin embargo, haremos una reflexión más exhaustiva con la finalidad de dar cabida a otras ideas del problema. Consideremos las áreas de cada uno de los polígonos ρ_1, ρ_2 y ρ_3 de n lados; para el polígono ρ_1 de lado AB se tiene: $A_1 = n(AB)a_{\rho_1}/2$ en donde: a_{ρ_1} representa el apotema del polígono ρ_1; en forma similar se tiene que: $A_2 = n(BC)a_{\rho_2}/2$ y $A_3 = n(CA)a_{\rho_3}/2$ siendo a_{ρ_2} y a_{ρ_3} los apotemas respectivos de ρ_2 y ρ_3. Ahora, dado que, para un caso determinado, el número n de lados del polígono es fijo, lo mismo que el apotema, podemos entonces considerar que: $na_{\rho_1}/2 = k_1$, $na_{\rho_2}/2 = k_2$ y $na_{\rho_3}/2 = k_3$ y escribir: $A_1 = k_1(AB)$, $A_2 = k_2(BC)$ y $A_3 = k_3(CA)$, lo que muestra que las áreas A_1, A_2 y A_3 son directamente proporcionales a los lados del triángulo y, por ello, los polígonos también lo son.

Ahora bien, todo polígono de n lados determina n triángulos isósceles, con dos de sus lados iguales al radio r del círculo C que lo circunscribe, a excepción del hexágono que tiene tres. Los triángulos así determinados están en proporción directa del lado l del polígono, en este caso de los lados del triángulo ABC y, por ello, el tamaño del círculo C también lo está.

En efecto, si α es la mitad del ángulo interno del polígono entonces: $\alpha = \pi(n-2)/2n$ y de ahí que: $2.r.\mathbf{cos}\alpha = \mathbf{l}$, lo que demuestra que el lado del polígono es directamente proporcional al radio y, por la misma razón, el lado l del polígono es proporcional al diámetro D del círculo que lo circunscribe, ya que: $D.\mathbf{cos}\alpha = \mathbf{l}$. Si D_1, D_2 y D_3 son los diámetros de las circunferencias C_1, C_2 y C_3 entonces se tiene que: $D_1\cos\alpha = AB$, $D_2\cos\alpha = BC$ y $D_3\cos\alpha = CA$ y, por lo tanto, el triángulo formado por los diámetros D_1, D_2 y D_3 es proporcional al triángulo ABC; y como $\alpha \neq 90°$, es decir, $cos\alpha \neq 0$, para todo valor de n, entonces se debe cumplir que:

$$D_1^2 = D_2^2 + D_3^2 \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{(AB)^2}{cos^2\alpha} = \frac{(BC)^2}{cos^2\alpha} + \frac{(CA)^2}{cos^2\alpha} .$$

Ya que el Teorema de Pitágoras se cumple para el triángulo ABC; es decir, ¡La relación pitagórica también se cumple entre los diámetros! Pero sabemos, por Euclides, que: las áreas de los polígonos semejantes son entre sí como el cuadrado de los diámetros de los círculos que los circunscriben, y si consideramos que: A_1, A_2 y A_3 denotan las áreas de los polígonos construidos en proporción a los lados AB, BC y CA, respectivamente, entonces se tiene que:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2} \qquad \frac{A_2}{A_3} = \frac{D_2^2}{D_3^2} \qquad \frac{A_3}{A_1} = \frac{D_3^2}{D_1^2} \qquad \frac{A_3}{A_2} = \frac{D_3^2}{D_2^2} .$$

Como: $D_1^2 = D_2^2 + D_3^2$ entonces se tiene que: $\dfrac{D_1^2}{D_2^2} = 1 + \dfrac{D_3^2}{D_2^2}$.

Lo que nos lleva a: $\dfrac{A_1}{A_2} = 1 + \dfrac{A_3}{A_2} = \dfrac{A_2 + A_3}{A_2}$

Es decir: $A_1 = A_2 + A_3$ ■

Y, como la demostración no depende del número de lados de los polígonos, se concluye que el Teorema de Pitágoras se cumple para el caso de polígonos regulares de cualquier número de lados. Todo esto nos hace reflexionar y llegar a la conclusión de que todas las partes homólogas lineales de las circunferencias C_1, C_2 y C_3 cumplen el Teorema de Pitágoras; por ejemplo, los tres radios correspondientes cumplen el Teorema de Pitágoras, los apotemas de los polígonos correspondientes, cumplen el Teorema de Pitágoras y las longitudes de los lados de los ángulos inscritos en las circunferencias también.

3. Segunda aproximación a una generalización del Teorema de Pitágoras

Ahora surge la cuestión siguiente, ¿Se cumple el Teorema de Pitágoras si las figuras dibujadas sobre los lados de un triángulo rectángulo son sólo semejantes? Antes de intentar una demostración de esta pregunta consideremos las 4 ilustraciones de la Figura 3. Todas ellas involucran un triángulo rectángulo y cierta ley de proporcionalidad entre sus partes. Esto debe bastar para hacer ver que si se considera cualquier tipo de figura f plana sobre la hipotenusa y figuras semejantes a f, de tamaño proporcional, en los catetos del triángulo, entonces se tiene el Teorema de Pitágoras Generalizado. El área encerrada por cualquier figura plana, simple y cerrada, listones, globos, anillos y prácticamente cualquier figura que tenga un contorno bien definido tiene su equivalente, en área, en la suma de las áreas encerradas por figuras semejantes y de tamaño proporcional, conceptos que tendremos que formalizar, construidas sobre los catetos del triángulo.

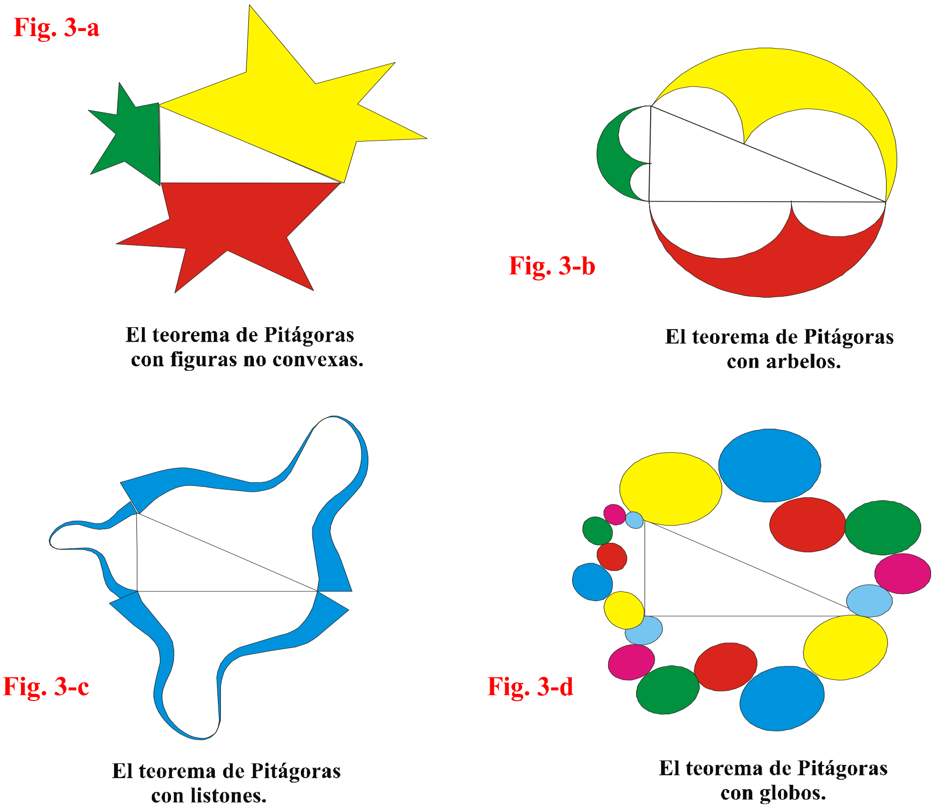


Fig. 3. Generalización del teorema de Pitágoras.

En la Fig. 3-a se han considerado figuras no convexas, es difícil de probar el Teorema de Pitágoras en esta situación, no obstante tienen una característica muy especial, se pueden triangular y en esa forma eventualmente puede encontrarse el área de cada una de ellas y comprobar la veracidad que guardan sus áreas. En la Fig. 3-b se han dibujado arbelos proporcionales a los lados del triángulo; es fácil demostrar que sus áreas correspondientes cumplen el Teorema de Pitágoras, se deja como ejercicio al lector. En la Fig. 3-c se han dibujado listones sobre cada uno de los lados del triángulo rectángulo; estos listones determinan la misma forma en cada lado, pero no son del mismo tamaño, cada uno tiene el tamaño justo entre sus puntas para determinar los lados del triángulo, son proporcionales. En la cuarta ilustración, Fig. 3-d se ha considerado una colección de elipses, "globos", que determinan figuras proporcionales en cada uno de los lados del triángulo; nótese la similitud de las figuras sobre cada uno de los lados, además, estos globos están determinados por curvas simples y suaves, es decir, sin puntas o picos.

Ante esta situación surge otra cuestión, ¿Qué debemos entender por figuras proporcionales? Intuitivamente, lo que debemos considerar para que dos figuras f_1 y f_2 sean proporcionales es que pueda obtenerse una a partir de la otra, mediante una transformación geométrica, cambiar sus dimensiones, ampliándola o reduciéndola. Tal transformación debe determinar el tamaño, y luego, mediante una isometría, debemos acomodarlas para hacerlas coincidir, ya sea mediante una traslación o una rotación.

Una demostración elemental del Teorema de Pitágoras Generalizado, nos lleva a considerar inicialmente un tipo de figuras que llamaremos Curvas Cerradas Simples. Intuitivamente, consideramos una Curva como la trayectoria que describe el movimiento de una partícula en el espacio; en particular, si los puntos que la constituyen están todos en un mismo plano, decimos que la Curva es Plana. La trayectoria puede tener auto intersecciones, pero no saltos, es decir, la partícula no desaparece en un punto determinado y aparece en otra parte. Y algo más, consideremos que la trayectoria es esencialmente suave, ¿Qué quiere decir eso? Pues simplemente que la trayectoria no tenga una cantidad que no podamos contar, de puntas y asperezas, lo que equivale a decir que la curva tiene una tangente bien definida en cada uno de sus puntos. Si particularmente la curva no tiene auto intersecciones, entonces decimos, que es una Curva simple. Si la curva es plana, cerrada y simple se le llama Curva de Jordan, debido al eminente matemático francés Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922).

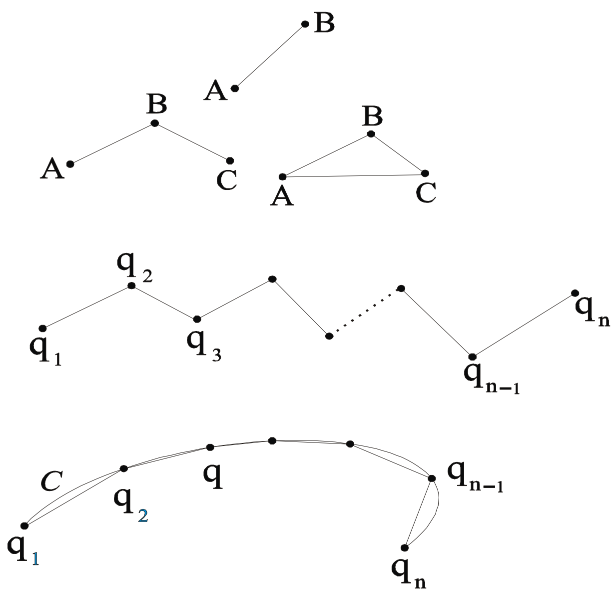


Figura 4: Poligonales y quebradas

Para profundizar más en éstas ideas, consideramos como curvas aquellas trayectorias que puedan aproximarse mediante una poligonal, para ello trataremos primero de introducirnos en la idea de poligonal. Consideremos tres puntos no colineales A, B y C, (Fig. 4), y a los segmentos que determinan. A la unión de los segmentos AB y BC se le llama poligonal de ABC. Los segmentos AB y BC se llaman lados de la poligonal y a los puntos vértices de la poligonal.

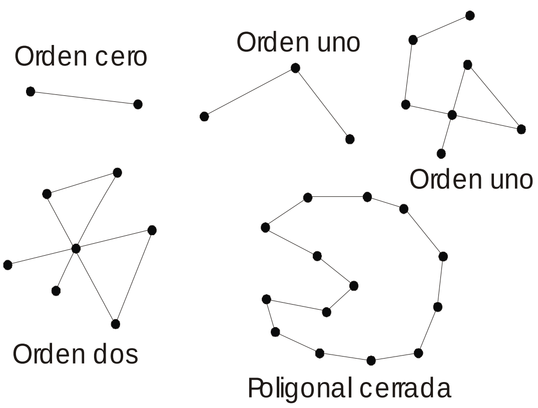


Figura 5: Puntos de ramificación

El punto A es el vértice inicial del lado AB, y el punto B su vértice final. Así mismo, el punto B es el vértice inicial del lado BC y el punto C su vértice final. Así, un vértice, de una poligonal, puede ser inicial para un lado y final para otro. Podemos considerar al segmento de recta AB como el caso extremo de un poligonal con un sólo lado, siendo A su vértice inicial y B su vértice final. Si A=B la poligonal es un punto y su longitud es cero.

En general, llamamos poligonal o quebrada de n puntos $q_1;\ q_2;...;\ q_{n-1}; q_n$, a la unión de los segmentos $q_1q_2;\ q_2q_3;...;\ q_{n-1}q_n$, de tal manera que el vértice final q_{i-1} del lado $q_{i-2}q_{i-1}$ sea el vértice inicial del lado $q_{i-1}q_i$, i=1,2,3,… n. Además, dos segmentos con un vértice común no pueden pertenecer a la misma recta. Así, una poligonal de n puntos puede representarse mediante la notación: $P(q_1, q_2, q_3,..., q_{n-1}, q_n)$ o simplemente: $P(q_i)$ con i=1, 2, 3,…, n. Los segmentos que constituyen a una poligonal se llaman lados de la poligonal y los vértices de los lados vértices de la poligonal.

Una poligonal es plana si todos los lados, y por ello sus vértices, que la constituyen, están en un mismo plano. Una poligonal se llama Cerrada si el vértice final de su último lado, coincide con el vértice inicial del primer lado, es decir, $q_1 = q_n$; de lo contrario se llama Abierta.

Un punto común a dos o más lados, se llama punto de ramificación; si un punto es común a dos lados, entonces se dice que la ramificación es de primer orden; si es común a tres lados, se dice que es de segundo orden, si es común a cuatro lados, es de tercer orden y así sucesivamente. Un punto que sólo pertenece a un lado, puede ser considerado punto de ramificación de orden cero, por ejemplo, si la poligonal es abierta, entonces sus vértices, inicial y final, son puntos de ramificación de orden cero. (Fig. 5). Si cada lado de una poligonal tiene a lo más dos punto de ramificación de orden uno, se dice que la poligonal es simple. Una poligonal $P(q_i)$ cerrada se llama convexa si ninguna de las rectas q_1q_k , k=2, 3, …, n -1, n se intercepta con alguno de los lados q_2q_3 , q_3q_4 ,…, $q_{n-2}q_{n-1}$, k =3,4,5,…,n–1 más que en los puntos q_k , (Fig. 6).

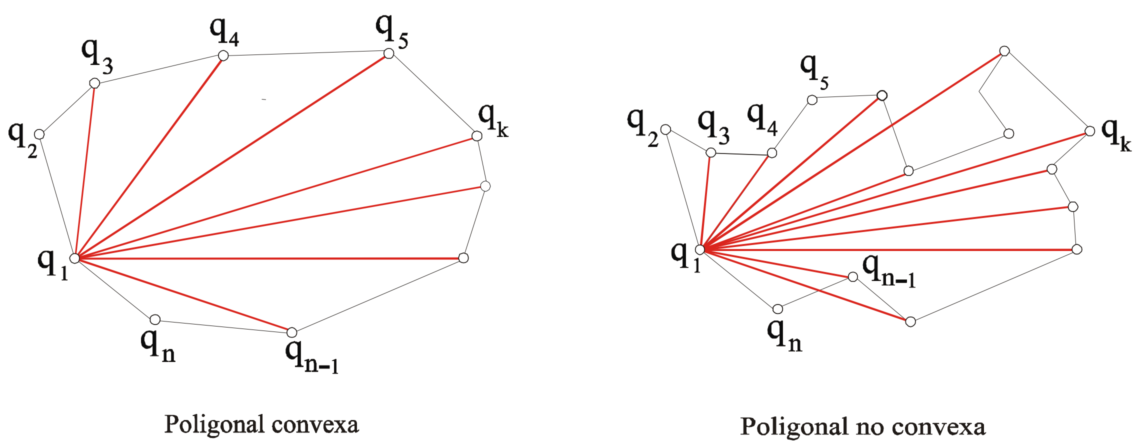


Figura 6. Poligonales convexa y no convexa.

Llamamos longitud de la poligonal $P(q_i)$ a la suma de las longitudes de todos sus lados y la representamos por: $s(P(q_i))$ por lo que: $s(P(q_i)) = \sum_{k=1}^{n-1} q_k q_{k+1}$.

Se llama área de una poligonal simple, cerrada y convexa $P(q_i)$ a la suma de las áreas de los triángulos: $\Delta(q_1q_2q_3)$, $\Delta(q_1q_3q_4)$, $\Delta(q_1q_4q_5)$,…, $\Delta(q_1q_{n-2}q_{n-1})$, $\Delta(q_1q_{n-1}q_n)$, y se representa por: $A(P(q_i))$.

Así tenemos que: $A(P(q_i)) = \sum_{k=3}^{n} A(\Delta(q_1q_{k-1}q_k))$.

En donde: $A(\Delta(q_1q_{k-1}q_k))$, k =3,4,5,…,n–1, representa el área de los triángulos $\Delta(q_1q_{k-1}q_k)$, k =3,4,5,…,n–1.

Si la poligonal $P(q_i)$ no es convexa podemos determinar su área mediante una triangulación de otro tipo, lo que resulta más complejo, pero esencialmente podemos asignar una área a las poligonales cerradas.

El estudio de las técnicas para la determinación del área de las poligonales no convexas, requiere un análisis más extenso y sólo se estudia con la finalidad de las aplicaciones a otras ramas de la matemática, ya que eventualmente se requiere del cálculo y de los conceptos e ideas de la Geometría Diferencial; sin embargo, las poligonales se asemejan mucho a las Curvas Simples, de hecho, podemos aproximar, con un buen grado de exactitud, una curva mediante poligonales; y con todo, la definición de curva es más amplia de lo que puede parecer a primera vista.

No obstante, consideramos como curvas simples, aquellas que no se cortan a sí mismas y con longitud finita. Esta idea, la de curva simple, proviene de la Física, al determinar la trayectoria de una partícula en el espacio, y conllevó mucho tiempo después, a la idea rigurosa de curva en Matemática. Y así, conjugando esas dos ideas, la de curva y poligonal, podemos aproximar la trayectoria determinada por el movimiento de una partícula mediante poligonales.

Se dice que una poligonal $P(q_i)$ aproxima a la curva C si todos los vértices de $P(q_i)$ pertenecen a C, lo que podemos representar mediante: $P(q_i) \approx C$; si en la aproximación de $P(q_i)$ a C se considera un número n de puntos entonces decimos que una partición de orden n constituye a la poligonal, lo que representamos mediante $P_n(q_i)$. Un refinamiento $P_{n+k}(q_i)$, k=1,2,3,… de la partición de una poligonal consiste en la adición de uno o más vértices a la poligonal que aproxima a C.

En este sentido $P_{n+k}(q_i)$, k∈N aproxima mejor a C que $P_n(q_i)$ ya que:

$$(q_i) = \{q_1, q_2, q_3,...q_{n-1}, q_n\} \subset \{q_1, q_2, q_3,...q_{n-1}, q_n, q_{n+1},..., q_k\} = (q_{n+k}) .$$

Los refinamientos determinan un orden en las particiones, es decir:

$$(q_n) \subset (q_{n+1}) \subset (q_{n+2}) \subset ... \subset (q_{n+k-1}) \subset (q_{n+k}).$$

Mediante refinamientos sucesivos de una poligonal ,podemos aproximar cada vez mejor a una curva. Nótese que no estamos definiendo una curva mediante poligonales, sino la aproximación por medio de poligonales a una curva. Aún y con todo, podríamos considerar a una curva continua como una poligonal, con un número infinito de vértices, a la que podemos asignarle una longitud, ya sea finita o infinita, e incluir a las curvas clásicas y fractales.

Un ejemplo de una curva clásica, resulta si se considera a un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia C de radio r; ahí podemos ver a los vértices q_i de la poligonal plana $P_n(q_i)$ como los vértices del polígono; además, si el número n de lados tiende a infinito el poligonal tiende a tener la forma de la circunferencia C y, por ello, determina una longitud bien especificada, a saber $2\pi r$, es decir: $C \approx P_n(q_i)$, $\forall n \in N$. Posiblemente el mejor ejemplo de una poligonal con longitud infinita es la Curva de Koch; el matemático sueco Fabian Helge von Koch (1870-1924) la construyó, utilizando un proceso recursivo, como una poligonal cuya longitud crece con cada etapa. Así pues, la teoría de las poligonales puede servir para estudiar curvas clásicas y cierto tipo de figuras fractales constituidas por segmentos de recta.

Si consideramos que una curva C que es aproximada mediante la poligonal $P_n(q_i)$ entonces no es difícil percatarnos que al efectuar una transformación geométrica sobre C, la poligonal puede adaptarse a la curva. Para ello, imaginemos un alambre que pudiera representar a una curva simple y amarremos pequeñas cuerdas elásticas, más o menos a distancias iguales, a lo largo del alambre. Entonces la deformación del alambre conlleva a la deformación de las cuerdas. ¡Pero claro! no siempre las cuerdas aproximan por igual a la curva, pero si pensamos en un gran número de ellas, de longitud pequeña comparada con la longitud total de la curva, entonces la aproximación será cada vez mejor.

Bajo esa idea, la de aproximar una curva por medio de una poligonal $P_n(q_i)$, nos llega el concepto de equivalencia de curvas: Consideremos dos curvas planas y simples C_1 y C_2, es decir, curvas que no tengan auto intercepciones y que puedan ser aproximadas por poligonales simples. Se dice que dos curvas C_1 y C_2 son *Equivalentes* si, mediante una rotación o traslación, pueden sobreponerse, lo que equivale a decir que una misma poligonal $P_n(q_i)$ puede aproximarlas por igual. Con más precisión, C_1 es equivalente a C_2, es decir: $C_1 \approx C_2$, si y solo si $\exists$ $P_n(q_i)$ tal que: $P_n(q_i) \approx C_1$ y $P_n(q_i) \approx C_2$; esto induce una relación de equivalencia. Y debe entenderse que cualquier refinamiento $P_{n+k}(q_i)$, k=1,2,3,… de la poligonal $P_n(q_i)$ aproxima mucho mejor a ambas curvas.

Ahora bien, un concepto más general es el de *Semejanza de Curvas*. Consideremos dos curvas, C_1 y C_2, y pensemos que existen las poligonales $P_n(q_i)$ y $P_n(q_i^1)$ tales que: $C_1 \approx P_n(q_i)$ y $C_2 \approx P_n(q_i^1)$. Si las curvas C_1 y C_2 son semejantes entonces debe existir una razón de semejanza entre los lados correspondientes de las poligonales que las aproxima; podemos entender esto considerando una *Transformación Geométrica* entre los puntos de las poligonales $P_n(q_i)$ y $P_n(q_i^1)$.

La idea de transformación geométrica aparece muy frecuentemente en geometría, desde tiempos muy antiguos se ha utilizado. Una transformación geométrica T en el plano es un mapeo que asocia, bajo una regla determinada, a cada punto $q_i(x_i, y_i)$ del plano $\Re^2$ otro punto bien especificado de $\Re^2$. En otras palabras, si $q_i \in \Re^2$ entonces el transformado $T(q_i)$ también lo está. Todo esto lo escribimos así: $T:\Re^2 \rightarrow \Re^2$, $T(q_i) = q_i^1$. Un ejemplo de ello es la *Transformación de Homotecia* especialmente importante en relación con las poligonales.

Consideremos un punto cualquiera O del plano, y una poligonal $P_n(q_i)$ simple, Fig. 7. Si hacemos pasar por cada punto q_i la recta Oq_i y sobre cada una de éstas líneas consideramos, desde O, la distancia $k(Oq_i)$, $k \in \Re$,los puntos así determinados son los vértices de otra poligonal, $P_n(q_i^1)$. A la constante k se le llama *razón de homotecia o semejanza* y a las poligonales homotéticas, semejantes o proporcionales en la razón k. Si $k < 1$, entonces $T(q_i)$ es una contracción; si $k = 1$, una isometría; y si $k > 1$, una dilatación.

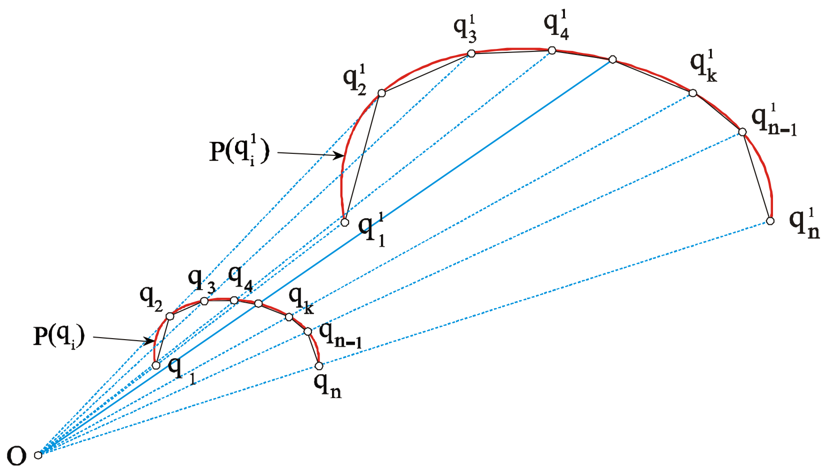


Figura 7. Poligonales homotéticas.

De lo anterior se concluye que si dos poligonales, determinadas por los puntos q_i y q_i^1, son homotéticas entonces se tiene:

$$k = \frac{Oq_1^1}{Oq_1} = \frac{Oq_2^1}{Oq_2} = \frac{Oq_3^1}{Oq_3} = \dots = \frac{Oq_n^1}{Oq_n}.$$

Esto nos lleva a considerar la semejanza de las curvas C_1 y C_2 siempre que existan poligonales $P_n(q_i)$ y $P_n(q_i^1)$ que las aproximen y que sean proporcionales en la razón k.

Nuestro afán por demostrar un *Teorema de Pitágoras Generalizado,* nos ha conducido a la discusión de lo que entendemos por curva, poligonal y semejanza de curvas; sin embargo, todos sabemos que el Teorema de Pitágoras, nos lleva a considerar la relación entre las áreas de las figuras asociadas a sus lados, entonces, ¿Qué relación tienen las áreas que determinan las poligonales cerradas y homotéticas? ¿Están en la misma razón que las longitudes de sus lados?

Consideremos un cuadrado $ABCD$ de lado $L_1 = 2$ y a su cuadrado homotético $A^1B^1C^1D^1$, cuyo lado ha sido amplificado a lo doble de L_1, es decir $L_2 = 4$. Fig. 8. Entonces, su razón de homotecia viene dada por: $\frac{L_2}{L_1} = k = 2$. Si un cuadrado tiene lado $L_1 = 2$ su área es: $A_1 = 4$, y si un cuadrado es de lado $L_2 = 4$ su área es: $A_2 = 16$, es decir, la longitud aumenta al doble pero el área ha aumenta cuatro veces. Dicho de otra forma, la relación de las áreas es: $\frac{A_2}{A_1} = \frac{16}{4} = 4 = 2^2 = k^2$.

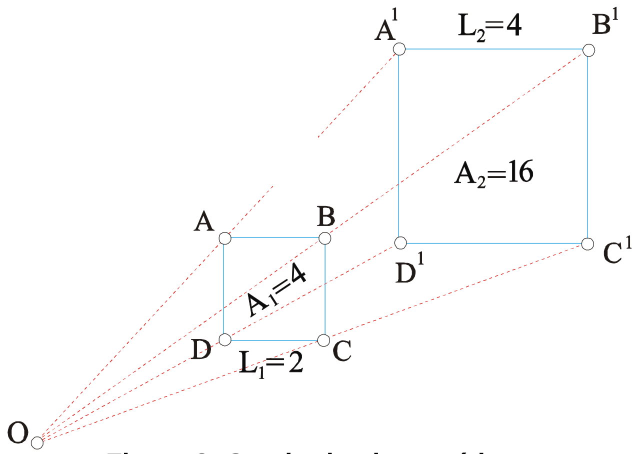


Figura 8: Cuadrados homotéticos

Todo esto nos lleva a considerar que, si a una poligonal cerrada $P_n(q_i)$ podemos asociarle una área $A(P_n(q_i))$ y encontramos, por medio de una homotecia de razón k, la poligonal $P_n(q_i^1)$, con área asociada $A(P_n(q_i^1))$, entonces la razón de sus áreas debe ser k^2, es decir: $A(P_n(q_i^1)) = k^2 A(P(q_i))$; o mejor dicho, las áreas aumentan o disminuye en la razón de k^2.

Esto nos hace pensar que lo mismo sucede en relación de las áreas si en vez de poligonales consideramos curvas de Jordan. Si C_1 y C_2 son dos curvas cerradas que pueden ser aproximadas mediante las poligonales $P_n(q_i)$ y $P_n(q_i^1)$ y son semejantes en la razón k, entonces la razón de sus áreas es k^2 ya que $A(P_n(q_i^1)) = k^2 A(P(q_i))$.

De otro modo tendríamos que: $A(C_2)/A(C_1)$ no se aproxima, en el límite, a k^2, mientras que: $A(P_n(q_i^1)) = k^2 A(P(q_i))$; pero eso no puede ser, ya que los refinamientos de las poligonales aproximan cada vez mejor a las curvas.

Sin mucha dificultad podemos ver que esto es cierto para el caso simple de un círculo de radio $r = 1$; en este caso tenemos que su área es π y su longitud 2π; ahora, si aumentamos el radio a lo triple, $k = 3$, el área no aumenta a lo triple sino que es 9π, es decir, $k^2\pi$, mientras que su longitud sólo aumenta a lo triple, 6π; y es fácil considerar a un polígono de n lados como una poligonal cerrada, plana y simple que aproxima cada vez mejor al círculo.

Ahora podemos echarle un vistazo más de cerca a una demostración elemental del *Teorema de Pitágoras Generalizado*, que, por el momento, sólo incluya figuras convexas limitadas por poligonales planas, cerradas y simples o, en todo caso, por curvas cerradas, planas y simples que puedan ser aproximadas mediante poligonales.

Consideremos una poligonal $P_n(q_i)$ simple y cerrada que determina un área $A(P_n(q_i))$; si sobre los lados de un triángulo rectángulo ABC dibujamos poligonales proporcionales a sus lados en relación a $P_n(q_i)$, entonces se tiene el: Teorema de Pitágoras Generalizado para poligonales convexas:

El área que determina la poligonal cerrada y proporcional a la hipotenusa, es igual a la suma de las áreas que determinan las poligonales cerradas y proporcionales a los catetos.

Todo esto nos lleva a considerar que si el teorema es cierto para poligonales cerradas, aunque no estén unida a los lados, entonces la misma situación se presenta, en los triángulos rectángulos, si se consideran curvas cerradas y proporcionales, las áreas guardan la misma proporción, el área delimitada por la curva cerrada sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas delimitadas por las curvas proporcionales asociadas a los catetos del triángulo.

En efecto, supongamos que tenemos una curva C simple y cerrada a la que podemos aproximar por medio de una poligonal $P_n(q_i)$, es decir, $C \approx P_n(q_i)$. Tal poligonal determina una área $A(P_n(q_i))$, y podemos considerar, sin perder generalidad, que la poligonal $P_n(q_i)$ determina la unidad de área. Fig. 9.

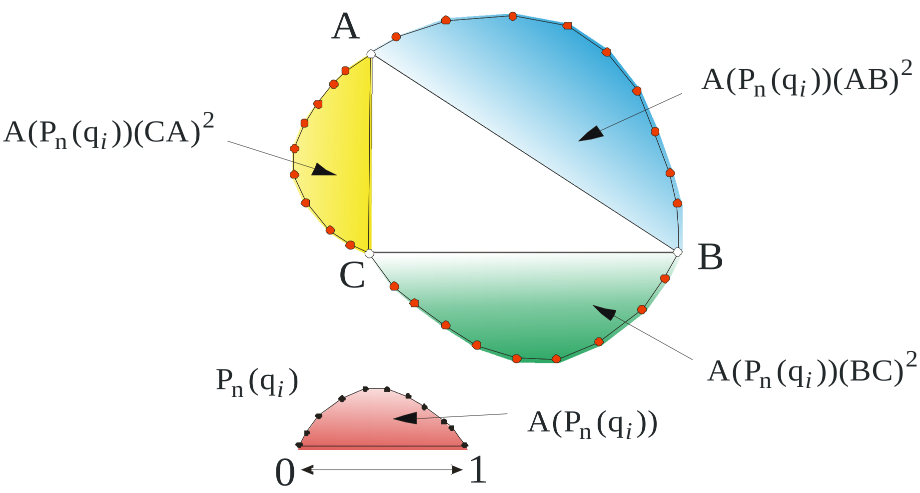


Figura 9: El Teorema de Pitágoras generalizado para poligonales

Ahora, consideremos un triángulo rectángulo ABC, entonces, si multiplicamos la longitud del lado q_1q_n de la poligonal $P_n(q_i)$, y consecuentemente todos los demás, por la magnitud del lado AB su área resultara ser: $A(P_n(q_i))(AB)^2$, lo que sugiere hacer lo mismo con la relación pitagórica para el triángulo rectángulo ABC, es decir, cada uno de los términos de la ecuación $(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2$ se multiplica por: $A(P_n(q_i))$, para obtener:

$$A(P_n(q_i))(AB)^2 = A(P_n(q_i))(BC)^2 + A(P_n(q_i))(CA)^2 \qquad \text{------}(*)$$

Pero se tiene que: $A(P_n(q_i))(AB)^2$ representa el área de la poligonal construida, proporcionalmente, sobre la hipotenusa AB del triángulo ABC; y lo mismo sucede con: $A(P_n(q_i))(BC)^2$ y $A(P_n(q_i))(CA)^2$ en relación a los lados BC y CA, lo que significa que cada uno de los términos en la ecuación $(*)$ establece el área de las poligonales construidas sobre los lados del triángulo ABC. Ello demuestra que la suma de las áreas de las poligonales proporcionales construidas sobre los catetos es igual al área de la poligonal proporcional construida sobre la hipotenusa.

Una reflexión más exhaustiva sobre la relación que guardan las poligonales con las curvas y sus áreas nos hará ver cómo puede el Teorema de Pitágoras ser cierto para curvas. Efectivamente, la poligonal $P_n(q_i)$ se aproxima cada vez mejor a la curva C si el número n de sus vértices se considera muy grande, y, por ello: $\lim_{n\to\infty} A(P_n(q_i)) = A(C)$. De otro modo no se entiende cómo es que la poligonal $P_n(q_i)$ se aproxima cada vez mejor a la curva C y no así su área y, por ello, debemos considerar que si se dibujan curvas proporcionales y convexas sobre los lados de un triángulo rectángulo la proporción de sus áreas está en relación a los lados del triángulo, es decir, cumplen la relación pitagórica.

De esta forma llegamos a conjeturar que el Teorema de Pitágoras no sólo es verdadero para el caso de las curvas que delimitan una región convexa, también debe serlo para las curvas cerradas y no convexas, asociadas a los lados del triángulo, ya que las curvas cerradas y no convexas, dibujadas proporcionalmente sobre los lados del triángulo, pueden ser aproximadas mediante poligonales proporcionales y, en el límite de las particiones, las áreas determinadas por las curvas también deben satisfacer el Teorema de Pitágoras. Ante ello las cuestiones no se hacen esperar ¿Se puede generalizar aún más el tipo de regiones asociadas a los lados en el Teorema de Pitágoras? ¿Cuáles son las restricciones que se deben imponer a una curva que delimita una región para que se cumpla el Teorema de Pitágoras? ¿Cómo probamos esto?

Si ABC es un triángulo rectángulo y f, g y h son curvas semejantes, cerradas, simples y no necesariamente convexas asociadas proporcionalmente a los lados del triángulo, entonces se debe cumplir que: A(f)=A(g)+A(h); (Fig. 10).

Una demostración de esta aseveración utilizando poligonales se hace sumamente complicada y laboriosa, debemos utilizar el concepto de integral, pero no olvidemos que, en última instancia, la integral de Riemann, para determinar la longitud de una curva, es una suma infinita de longitudes que constituyen una poligonal. Luego, se deben hacer las consideraciones necesarias para poder incluir, en el Teorema de Pitágoras, regiones con agujeros, es decir, regiones conexas y múltiplemente conexas y con ello ampliar el conjunto de regiones que cumplen el teorema.

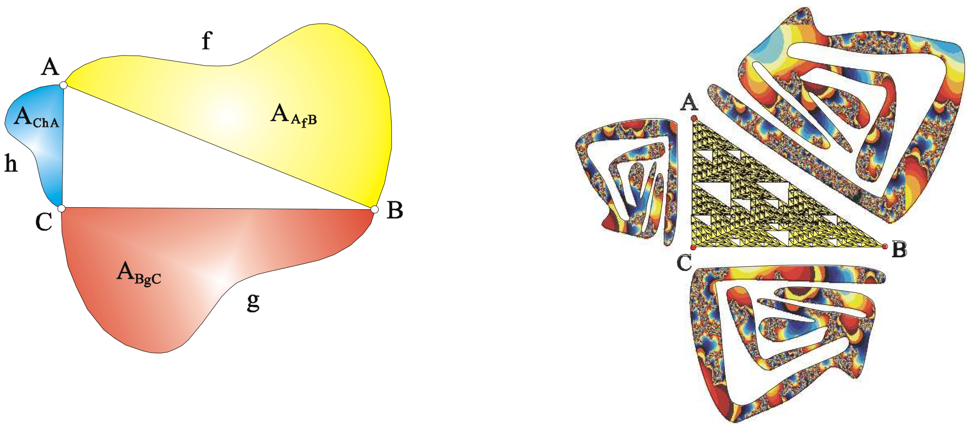


Figura 10. El teorema de Pitágoras para regiones no convexas.

Bibliografía

Altshiller, N. *An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle.* Ed. Barnes Noble, Inc. 1952.

Allman, G, J. (1989) *Greek geometry*: *From Thales to Euclid*. Ed. Dublín University Press.

Boltyanskll, V. G. (1973). *Figuras equivalentes y equidescomponibles.* Ed. Limusa Wiley. Méx.

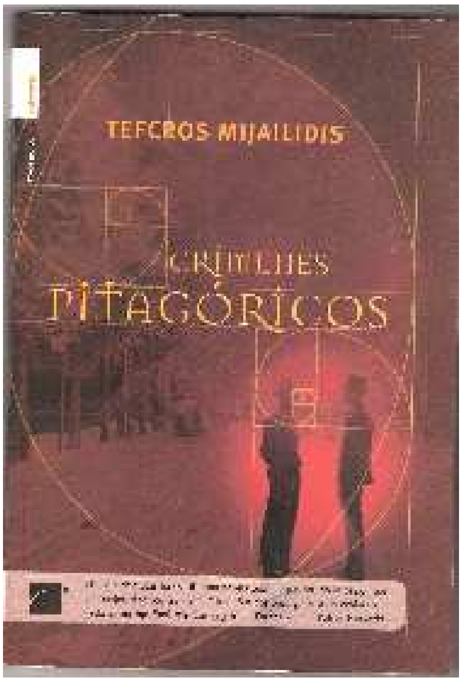
Bracho, J.. (2009). *Introducción analítica a las geometrías*. Ed. Fondo de Cultura Económica. Méx..
Caniff, P. (2004). *Pitágoras*. Colección Grandes Biografias. Edimat Libros S. A. España.
Euclides (h. 300 a.C.): *Stoicheia*. Traducido al español en Euclides: Elementos. Editorial Gredos.
Gómez Pérez, M. (2002). *Pitágoras*. Ed. Grupo Editorial Tomo S. A. de C. V. México.
Pogorélov, A. V. (1974) *Geometría Elemental.* Ed. Mir. Moscú.
Ruesga, P.; Breda, A.; Sigarreta, J. M. and Rodríguez, J. M. (2008) Geometry and problems solving. Appl. Math. Sciences, Vol 2, 213-221.
Ruesga, P.; Sigarreta, J. M. and Valls, F. (2007). *Diagrams of logical relations in transformational task*. Far East Journal of Mathematical Education. Volume 1, Issue 2, 95-124.
Sigarreta, J.; Ruesga, P. (2004). Evolución de la geometría desde su perspectiva histórica. Bol. Aso. Mat. Ven. XI 85 -95.
Sigarreta, J. M.; Ruesga, P. and Rodríguez J. M. (2006). La solución de problemas una visión histótico-didáctica. Bol. Aso. Mat. Ven. XIII (1) 53- 67.
Yakoliev, G. N. (1985). *Geometría*. Ed. MIR. Moscú.

José María Sigarreta Almira. Es Catedrático de Matemática en la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Doctor en Ciencias Pedagógicas (Cuba) y Doctor en Ciencias Matemáticas (España). Ha publicado más de 70 artículos de investigación. josemariasigarretaalmira@hotmail.com

Javier González Mendieta. Es Profesor de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Master en Ciencias y estudiante del Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. jgmendieta@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 195-196
ISSN: 1815-0640



Crímenes Pitagóricos

Autor:
Tefcros Mijailidis.

Serie:
Misterio.

Año de primera edición: 2008.
ISBN: 978-84-92429-45-5
Editorial: Rocaeditorial

"Crímenes Pitagóricos" es un libro de misterio. Es una novela policial, ambientada en la Europa de principios del siglo XX, que oculta una obra de divulgación de Historia de la Matemática.

Su autor, Tefcros Mijailidis, nació en Atenas en 1954, es doctor en Matemáticas de la Universidad de Pierre et Marie Curie, dedicado a la docencia y a la divulgación científica.

Con la excusa de esclarecer un crimen, el relato nos introduce en la historia de las matemáticas griegas, da cuenta de la situación de la ciencia en el 1900 al momento de realizarse en Paris el Congreso Internacional de Matemática y las consecuencias de la conferencia que David Hilbert pronunciara.

La trama se desarrolla en un marco histórico y geográfico real por lo que los datos científicos aportados, además de ciertos, están puestos en su contexto social, político e histórico.

Con un estilo claro, ameno y apasionado el autor nos explica los distintos problemas que han preocupado a los matemáticos y como las respuestas encontradas produjeron grandes e inesperados avances.

Los protagonistas de la novela son personajes ficticios, que nos acercan a los hombres detrás de los mitos y nos guían en el desfile de los matemáticos de la época con sus distintas personalidades, opiniones políticas, interacciones, diferencias y coincidencias; mezcladas con la discusión de sus resultados.

La lectura de la novela es una oportunidad de combinar la pasión por la matemática y por los policiales. Es de fácil lectura para un público no experto y el crimen se resuelve, como corresponde al género, de forma inesperada.

Cristina Cano.
Universidad Nacional del Comahue.
Argentina.

.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 197-199
ISSN: 1815-0640

Matemátic@s en l@ red

Proyecto Gauss

Dirección: **http://recursostic.educacion.es/gauss/web/**

El Proyecto Gauss ha sido desarrollado por el Instituto de Tecnologías Educativas (ITE), según dice el director del ITE en la página de inicio, el Programa Escuela 2.0 está dirigido por el Ministerio de Educación de España y responde a las demandas de modernización del sistema educativo, el mismo se desarrolla entre los años 2009 y 2013 y afecta a los alumnos de enseñanza primaria y media. El Proyecto brinda al profesorado material didáctico para los distintos contenidos a impartir en los niveles de enseñanza mencionados, con el fin de mostrar una forma diferente y creativa de enseñar y aprender.

S e presenta a continuación la página de inicio:

En la misma se encuentra un link que permite acceder a cinco sitios, los mismos se presentan a continuación:

1. Materiales didácticos

Cada ítem didáctico contiene una construcción realizada con GeoGebra, una introducción y un cuestionario especialmente diseñado para que los alumnos lo respondan con ayuda de la construcción. Los contenidos se presentan de acuerdo al nivel de enseñanza y son los siguientes:

- Para primaria los temas son: Aritmética (Naturales, enteros, patrones, decimales y fracciones, cálculo mental) Geométrica (acertijos, la necesidad de medir, procedimientos, polígonos, escalas y planos, figuras curvas, simetrías y cuerpos) y Estadística (Recuento, medidas, estimación
- Para secundaria los temas son: Aritmética (Naturales y enteros, Patrones, Decimales y fracciones, Irracionales y Cálculo mental), Álgebra (Pautas y fórmulas, Progresiones, Identidades notables, Ecuaciones y sistemas), Funciones (Representaciones diversas, Características, Funciones concretas), Geometría (Acertijos, La necesidad de medir, Procedimientos, Ángulos, Polígonos, Tales y Pitágoras, Escalas y planos, Figuras curvas, Simetrías, Teselados, Grupos de isometrías, Cuerpos y Trigonometría) y Estadística y probabilidad (Recuento y Medidas)

2. Recursos complementarios

Se pueden ver animaciones interactivas de GeoGebra sin necesidad de que el programa esté instalado, si queremos modificar sí hace falta tenerlo instalado. Estas “construcciones sueltas” están organizadas de acuerdo al nivel de enseñanza en que puedan ser trabajadas, porque muchas son propuestas que pueden ser llevadas sin dificultad al aula.

3. Materiales formativos para el Profesorado

El objetivo principal es animar a usar las construcciones de GeoGebra como un **recurso didáctico** que ha demostrado ser útil y enriquecedor en la práctica de la docencia de las Matemáticas. Al tiempo, se ofrecerán los procedimientos para realizar nuestras propias construcciones. Se busca alcanzar este fin a través de los siguientes objetivos:

- Conocer las posibilidades de construcciones matemáticas que se pueden realizar con el programa.
- Conocer el entorno gráfico e interactivo del programa.
- Conocer los métodos básicos para realizar modificaciones en construcciones ya realizadas.
- Conocer los procedimientos para realizar nuestras propias construcciones.

4. EDA Experimentación didáctica en el aula

EDA es un proyecto que pretende ayudar a los profesores y profesoras a incorporar las TIC a su actividad en el aula, detectar las ventajas e inconvenientes de utilizar estas nuevas tecnologías y encontrar nuevos enfoques didácticos de enseñanza y aprendizaje. Aunque inicialmente se inició sólo para matemáticas, EDA se ha extendido en los últimos años a las áreas de inglés y física así como a otros proyectos más amplios.

Promovido por el ITE en convenio con algunas comunidades autónomas, propone al profesorado la puesta en práctica de un plan de experimentación en el que se usan materiales digitales en la mayoría de las clases durante al menos dos meses. Durante ese tiempo los profesores y profesoras participantes cuentan con materiales específicos de guía y referencia, con asesoramiento tutorial para los aspectos metodológicos y también con asesoría técnica específica sobre los programas y materiales. En esta página se recogen los materiales de experimentación y los resultados obtenidos, materiales contrastados y validados que aglutinan muchas horas de trabajo práctico en el aula y que, por tanto, pueden ser útiles al profesorado que se acerca por primera vez al uso de las TIC en clase.

5. Enlaces de interés

Permite acceder a algunas páginas de interés relacionadas con GeoGebra, las mismas se encuentran agrupadas como sigue:

- Institutos de GeoGebra.
- Geometría Dinámica.
- Construcciones.
- Guías y Ayudas.
- Foros.
- Wikis.
- Páginas Personales.

Equipo Editor

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 201-207
ISSN: 1815-0640

Información

PROGRAMACIÓN DE LA FUNDACIÓN CANARIA *CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ* PARA EL AÑO 2012

1. Nuevas escuelas en Paraguay

Se seguirá con las obras de nuestras segundas escuelas en Paraguay. Recordar que las primeras escuelas, con cocina, comedor y servicios higiénicos se construyeron en Cerro Poty, en las afueras de Asunción, capital de Paraguay e inauguradas el 10 de septiembre de 2010 con la asistencia de dos ministros, 250 niños y niñas, padres y madres de alumnos y presupuesto de 12.300 €.

Ahora se continuará con nuestras segundas escuelas en Paraguay**.** El sitio se encuentra en el Departamento de Caaguazú, en el distrito de Repatriación. Pertenece a la comunidad mbya y es la Escuela Básica Nº 6226 llamada "Y paú Señorita", ubicada a 242 Km. de Asunción. También se prevé la construcción de las escuelas y servicios higiénicos y dotarlo de mobiliario adecuado. Los planos y fotos, según nos informa la Coordinación de Infraestructura del MEC (Ministerio de Educación y Cultura de Paraguay), nos indican que tendrá una estructura que estará en la línea de las construidas en Cerro Poty.

Escuelas de Cerro Poty, Asunción, Paraguay

2. Nuevas escuelas en Perú

El Presidente de nuestra Fundación ha entrado en contacto con la *Asociación Guanchera de Amigos de los Pueblos*, legalmente constituida, habiéndose recibido un informe con sus iniciativas y proyectos. Salvador Pérez, y el miembro del Patronato, Eduardo León, informan de varios aspectos de la asociación y precisan datos de su proyecto llamado "Sonrisas 2012" que se va a desarrollar del 29 de junio al 22 de julio de 2012, en Huánuco, Perú. En Junta General de la Fundación se aprueba, por unanimidad de los asistentes, proceder a colaborar y celebrar una reunión con dicha Asociación para, entre otros objetivos, concretar los términos de la futura colaboración. La reunión tuvo lugar el día 29 de junio de 2011.

3. Proyecto en CajaCanarias- Banca Cívica

El código de nuestro proyecto en Banca Cívica para el año 2012 es el número 31789. El proyecto presentado de tipo genérico, lleva el nombre de la Fundación y en el mismo se dice que será para construir más escuelas, abrir una línea de ayudas al estudio en Canarias y ampliar la abierta en Paraguay así como continuar con los envíos de material escolar y otros. El programa de CajaCanarias- Banca Cívica “Tú eliges, tú decides” va a ser la fuente de financiación de estos proyectos.

Estamos haciendo una campaña informativa a través de cartas, mail, entrevistas y notas de prensa y radio gratuitas. Se trata de conseguir que voten por este proyecto tanto socios como empresas, colectivos, etc. “Este programa -decimos- te permite destinar a nuestro proyecto un 20 %, un 30 % o el 100 % del beneficio que genera tu relación con Banca Cívica (¡ojo, no de tus beneficios!). Les animamos a que se vote el 100 % al proyecto 31789 que es el nuestro.

Si las cosas van bien y tenemos éxito seguiremos con el programa en el 2013.

4. Ayudas al estudio en Canarias

La Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz* desea contribuir a la promoción de aquellos estudiantes que, siendo residentes en Canarias, tengan dificultades económicas para proseguir sus estudios y que dispongan de una trayectoria académica que les avale. Por esta razón ha decidido abrir una vía de ayudas que se otorgarán siguiendo un protocolo que las regule. Se prevé iniciar el desarrollo del proyecto para tratar de conceder las primeras ayudas en el inicio del curso 2011-2012, es decir, en septiembre de 2011 y seguir en el futuro.

5. Ayudas al estudio en Paraguay

La idea surgió con motivo de la inauguración de nuestras primeras escuelas en Paraguay. Se trata de poner en marcha un “Plan de Ayudas al Estudio Posobligatorio en la Comunidad Indígena de Cerro Poty, Asunción”

Para establecer las bases de estas ayudas y controlar su desarrollo, se ha constituido un comité en el que participan el MEC, la Secretaría Nacional de la Niñez, la OEI, Fundación y la propia Comunidad Indígena de la Escuela. El Comité lleva muy avanzados los estudios para una inminente puesta en práctica de las ayudas que serán financiadas en su totalidad por la Fundación. En una reunión del Patronato se acordó, por unanimidad, nombrar como representante de la Fundación en dicho Comité a su Vicepresidente, Luis Balbuena Castellano

6. Envíos de material escolar

Se continuará la acción de los envíos de material escolar a países de América, una labor que dio comienzo en el año 2001 y que, hasta septiembre de 2011, ha conseguido llegar al envío número 60.

Entrega de una ayuda económica para el programa de envíos de material escolar por parte de estudiantes del Instituto de Enseñanza Secundaria *Canarias Cabrera Pinto*, de La Laguna, Tenerife, España.

7. Revista UNIÓN

Colaboración económica con la revista digital **UNIÓN** cuya periodicidad es trimestral y se descarga en PDF de forma gratuita también desde nuestra web. Es la revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), una organización creada el 3 de julio de 2003, a la que pertenecen trece países y que cuenta con un número aproximado de 30.000 miembros.

8. Becas Revista UNIÓN

Con la colaboración económica de la Fundación, la revista UNIÓN de la FISEM ofrecerá becas a sus afiliados que tengan escasos recursos y lejanía de las ciudades donde se celebran congresos, seminarios, charlas y cursos.

9. Plan de ediciones de libros

La Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz* tiene entre sus objetivos el de trabajar por la cultura y la educación. Por eso ha creado un plan de ediciones. Los libros hasta ahora publicados son:

Los tres póstumos de Carlos Salvador (que escribía desde niño) cuyos títulos son:

Dioses para cinco minutos, prólogo del escritor y periodista, Eduardo Haro Tecglen.

Retrato de un viejo prematuro, prólogo del periodista y escritor, Alfonso González Jerez.

Duelos del extranjero ilimitable, prólogo del periodista y escritor, Juan Cruz Ruiz. Van por la segunda edición. El precio de los tres ejemplares es de 30 € que se destinan íntegramente al desarrollo de los fines de la Fundación.

Otros títulos publicados:

El ñandutí y las matemáticas, de Luis Balbuena sobre esta popular artesanía de Paraguay. Se vende al precio de 10 euros. Y hay que precisar que los derechos de autor han sido donados, de forma altruista, sin nada a cambio, a los proyectos y realizaciones de la Fundación.

Guía Matemática de San Cristóbal de La Laguna, de Luis Balbuena y que está patrocinado por la Fundación CICOP, Ayuntamiento de La Laguna, Obra Social de CajaCanarias, la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas y nuestra Fundación. El precio de este nuevo libro es de 15 € y la Fundación los vende a cualquier lector que se ponga en contacto con nosotros. No olvidar que los beneficios en la venta de estos libros son para sufragar las realizaciones de nuestra Fundación.

Hay mucha más información de la Fundación en la página web:
www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com
¡¡Aquí les esperamos!!

PROGRAMACIÓN DA FUNDAÇÃO CANARIA

CARLOS SALVADOR E BEATRIZ PARA O ANO 2012

1. Novas escolas em Paraguai

Seguir-se-á com as obras de nossas segundas escolas em Paraguai. Recordar que as primeiras escolas, com cocina, comedor e serviços higiénicos se construíram em Cerro Poty, nas afueras de Assunção, capital de Paraguai e inauguradas o 10 de setembro de 2010 com a assistência de dois ministros, 250 meninos e meninas, pais e mães de alunos e orçamento de 12.300 €.

Agora continuar-se-á com nossas segundas escolas em Paraguai. O lugar encontra-se no Departamento de Caaguazú, no distrito de Repatriación. Pertence à comunidade mbya e é a Escola Básica Nº 6226 telefonema "E paú Señorita", localizada a 242 Km. de Assunção. Também se prevê a construção das escolas e serviços higiénicos e o dotar de mobiliario adequado. Os planos e fotos, segundo informa-nos a Coordenação de Infra-estrutura do MEC (Ministério de Educação e Cultura de Paraguai), indicam-nos que terá uma estrutura que estará na linha das construídas em Cerro Poty.


Escolas de Cerro Poty, Assunção, Paraguai

2. Novas escolas em Peru

O Presidente de nossa Fundação entrou em contacto com a Associação Guanchera de Amigos dos Povos, legalmente constituída, tendo-se recebido um relatório com suas iniciativas e projectos. Salvador Pérez, e o membro do Patronato, Eduardo León, informam de vários aspectos da associação e precisam dados de seu projecto chamado “Sorrisos 2012” que se vai desenvolver do 29 de junho ao 22 de julho de 2012, em Huánuco, Peru. Em Junta Geral da Fundação aprova-se, por unanimidade dos assistentes, proceder a colaborar e celebrar uma reunião com dita Associação para, entre outros objectivos, concretar os termos da futura colaboração. A reunião teve lugar no dia 29 de junho de 2011.

3. Projecto em CajaCanarias- Banca Cívica

O código de nosso projecto em Banca Cívica para o ano 2012 é o número 31789. O projecto apresentado de tipo genérico, leva o nome da Fundação e no mesmo diz-se que será para construir mais escolas, abrir uma linha de ajudas ao estudo em Canárias e ampliar a aberta em Paraguai bem como continuar com os envios de material escolar e outros. O programa de CajaCanarias- Banca Cívica “Tu eleges, tu decides” vai ser a fonte de financiamento destes projectos.

Estamos a fazer uma campanha informativa através de cartas, mail, entrevistas e notas de imprensa e rádio gratuitas. Trata-se de conseguir que votem por este projecto tanto sócios como empresas, colectivos, etc. “Este programa -dizemos- permite-te destinar a nosso projecto um 20 %, um 30 % ou o 100 % do benefício que gera tua relação com Banca Cívica (¡olho, não de teus benefícios!). Animamos-lhes a que se vote o 100 % ao projecto 31789 que é o nosso.

Se as coisas vão bem e temos sucesso seguiremos com o programa no 2013.

4. Ajudas ao estudo em Canárias

A Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz deseja contribuir à promoção daqueles estudantes que, sendo residentes em Canárias, tenham dificuldades económicas para prosseguir seus estudos e que disponham de uma trajectória académica que lhes avale. Por esta razão decidiu abrir uma via de ajudas que outorgar-se-ão seguindo um protocolo que as regule. Prevê-se iniciar o desenvolvimento do projecto para tratar de conceder as primeiras ajudas no início do curso 2011-2012, isto é, em setembro de 2011 e seguir no futuro.

5. Ajudas ao estudo em Paraguai

A ideia surgiu com motivo da inauguração de nossas primeiras escolas em Paraguai. Trata-se de pôr em marcha um "Plano de Ajudas ao Estudo Posobligatorio na Comunidade Indígena de Cerro Poty, Assunção"

Para estabelecer as bases destas ajudas e controlar seu desenvolvimento, constituiu-se um comité no que participam o MEC, a Secretaria Nacional da Niñez, a OEI, Fundação e a própria Comunidade Indígena da Escola. O Comité leva muito avançados os estudos para uma iminente posta em prática das ajudas que serão financiadas em sua totalidade pela Fundação. Numa reunião do Patronato lembrou-se, por unanimidade, nomear como representante da Fundação em dito Comité a seu Vice-presidente, Luis Balbuena Castellano

6. Envíos de material escolar

Continuar-se-á a acção dos envios de material escolar a países de América, um labor que deu começo no ano 2001 e que, até setembro de 2011, conseguiu chegar ao envio número 60.

Entrega de uma ajuda económica para o programa de envios de material escolar por parte de estudantes do Instituto de Ensino Secundário Canárias Cabrera Pinto, da Laguna, Tenerife, Espanha.

7. Revista UNIÓN

Colaboração económica com a revista digital UNIÃO cuja periodicidad é trimestral e se descarga em PDF de forma gratuita também desde nosso site. É a revista da Federação Iberoamericana de Sociedades de Educação Matemática (FISEM), uma organização criada o 3 de julho de 2003, à que pertencem treze países e que conta com ou numero de 30.000 membros.

8. Bolas Revista UNIÓN

Com a colaboração económica da Fundação, revista-a UNIÃO da FISEM oferecerá bolsas a seus filiados que tenham escassos recursos e lonjura das cidades onde se celebram congressos, seminários, charlas e cursos.

9. Plano de edições de livros

A Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz tem entre seus objectivos o de trabalhar pela cultura e a educação. Por isso criou um plano de edições. Os livros até agora publicados são:

Os três póstumos de Carlos Salvador (que escrevia desde menino) cujos títulos são:

Dioses para cinco minutos, prólogo do escritor e jornalista, Eduardo Haro Tecglen.

Retrato de un viejo prematuro, prólogo do escritor e jornalista, Alfonso González Jerez.

Duelos del extranjero ilimitable, prólogo do escritor e jornalista, Juan Cruz Ruiz. Vão pela segunda edição. O preço dos três exemplares é de 30 € que se destinam integralmente ao desenvolvimento dos fins da Fundação.

Outros títulos publicados:

El ñandutí y las matemáticas, de Luis Balbuena sobre este popular artesanato de Paraguai. Vende-se ao preço de 10 euros. E há que precisar que os direitos de autor foram doados, de forma altruísta, sem nada a mudança, aos projectos e realizações da Fundação.

Guía Matemática de San Cristóbal de La Laguna, de Luis Balbuena e que está patrocinado pela Fundação CICOP, Prefeitura da Laguna, Obra Social de CajaCanarias, a Sociedade Canaria de Professores de Matemáticas e nossa Fundação. O preço deste novo livro é de 15 € e a Fundação vende-os a qualquer leitor que se ponha em contacto conosco. Não esquecer que os benefícios na venda destes livros são para sufragar as realizações de nossa Fundação

Há muita mais informação da Fundação na página site:
www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com
¡¡ Aqui esperamos-lhes!!

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 209-210
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2011

XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Convoca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Organiza: Universidad Castilla la Mancha.
Lugar: Ciudad Real Castilla la Mancha, España.
Fecha: 7 al 11 de octubre de 2011
Información: **www.seiem.es**

Convoca: Sociedad de Matemática de Chile
Lugar: Termas El Corazón.
Fecha: 3 al 5 de noviembre de 2011
Información: **http://encuentro2011.somachi.cl/descripcion.html**

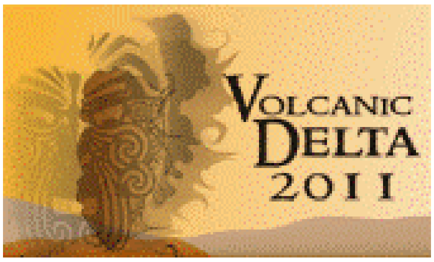
II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática. (II ENEM)

I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. (I CIECyM)

Lugar: Tandil. Provincia de Buenos Aires. Argentina.
Organizan: Departamento de Formación Docente. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
Fecha: 8 al 11 de noviembre de 2011.
Información: **iienem@exa.unicen.edu.ar**

Conferencia de GeoGebra-Latin America 2010. Brasil

Lugar: San Pablo. Brasil
Fecha: 12 al 15 de noviembre de 2011.
Información: **http://www.geogebra.org/cms/en/events**



Lugar: Rotorua, Nueva Zelanda.
Fecha: 27 de noviembre al 2 de diciembre de 2011.
Información: **www.delta2011.co.nz**

AÑO 2013

Del 16 al 20 de septiembre en Uruguay

VII CIBEM
VII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.cibem7.semur.edu.uy

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, página 211-212
ISSN: 1815-0640

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@gmail.com**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “Arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**
4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

Para libro:
Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista:

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com