UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 25 – Marzo de 2011

Índice

Marzo de 2011, Número 25, páginas 3-4
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García Gonzalez
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio
Textos: Vilma Giudice
Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo
webmaster: Elda Beatriz Micheli

Colabora

CARLOS
SALVADOR
Y BEATRIZ
FUNDACIÓN
CANARIA

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 5-7
ISSN: 1815-0640

Editorial

"*Existe una fuerte sensación de placer, difícil de describir, cuando consideras detalladamente una comprobación elegante, e incluso un placer mayor al descubrir una comprobación que no se conocía*"
Martín Gardner (1915-2010)

Estimados colegas e amigos:

El 2011 ha comenzado brindándonos una enorme satisfacción, que deseamos compartir con ustedes: hemos recibido del Dr. Alejandro Tiana Ferrer, Director General del Centro de Altos Estudios Universitarios (CAEU) de la OEI, la comunicación sobre la incorporación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) y de la Revista digital UNIÓN, como red asociada al CAEU de la OEI, lo que significa un reconocimiento a la fecunda labor de los Fundadores: Luis Balbuena y Antonio Martinón y a todos quienes han colaborado para que UNIÓN continúe creciendo en calidad.

Agradecemos al Dr. Alejandro Tiana Ferrer y a todos los que permitieron que se efectivice la relación entre ambas instituciones, en beneficio de docentes e investigadores de habla hispana y portuguesa para el avance de la Educación Matemática. A partir de este número, UNIÓN se edita desde la plataforma de la OEI pudiendo llegar a una enorme cantidad de lectores.

Un reconocimiento especial para Agustín Carrillo de Albornoz, Secretario General de FISEM por el desarrollo del nuevo sitio en la web y por el apoyo que nos brinda permanentemente en la edición digital de UNION.

En este número, la firma invitada: Inés del Carmen Plasencia Cruz**,** nos ha movilizado con sus *Reflexiones como formadora de formadores*, nos sentimos identificadas con ella y compartimos sus ideas.

Se presentan también temas muy interesantes para considerar como aportes para el aula, entre ellos, la recta numérica como instrumento de representación de los números, resolución gráfica de problemas de álgebra elemental y modelo de resolución de un trinomio elevado a la n.

Los reportes de investigaciones con conclusiones y sugerencias enriquecedoras, como el uso de conceptos teóricos de Álgebra Lineal de una forma práctica, registros de actividades de modelaje matemático, se complementan con interesantes aportes para la formación docente con reflexiones sobre los saberes pedagógicos y los saberes específicos así como el reto de incorporar el razonamiento algebraico en educación primaria.

Como siempre agradecemos a todos los colaboradores y los invitamos a continuar trabajando juntos en este año de cambios curriculares profundos en varios países de nuestra comunidad.

Finalmente, la despedida a una gran educadora: Alicia Villar Icasuriaga, excelente colega que nos acompaño en numerosos congresos y reuniones, aportando siempre ideas creativas y motivando a realizar acciones en beneficio de los docentes de matemática y del avance significativo de la Educación Matemática en los países iberoamericanos. Siempre recordaremos sus enseñanzas.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

Editorial

"Existe una fuerte sensación de placer, difícil de describir, cuando consideras detalladamente una comprobación elegante, e incluso un placer mayor al descubrir una comprobación que no se conocía"
Martín Gardner (1915-2010)

Estimados colegas y amigos

O 2011 começou brindando-nos uma enorme satisfação, que desejamos compartilhar com vocês: recebemos de o Dr. Alejandro Tiana Ferrer, Director Geral do Centro de Altos Estudos Universitários (CAEU) da OEI, a comunicação sobre a incorporação da Federação Iberoamericana de Sociedades de Educação Matemática (FISEM) e da Revista digital UNIÓN, como rede associada a o CAEU da OEI, o que significa um reconhecimento à fecunda labor dos Fundadores: Luis Balbuena e Antonio Martinón e a todos quem colaboraram para que UNIÓN continue crescendo em qualidade.

Agradecemos a o Dr. Alejandro Tiana Ferrer e a todos os que permitiram que se efectivice a relação entre ambas instituições, em benefício de docentes e pesquisadores de fala hispana e portuguesa para o avanço da Educação Matemática. A partir deste número, UNIÓN edita-se desde a plataforma da OEI podendo chegar a uma enorme quantidade de leitores.

Um reconhecimento especial para Agustín Carrillo de Albornoz, Secretário Geral de FISEM pelo desenvolvimento do novo lugar no site e pelo apoio que nos brinda permanentemente na edição digital de UNION.

Neste número, a assinatura convidada: Inés del Carmen Plasencia Cruz, mobilizou-nos com suas Reflexões como formadora de formadores, nos sentimos identificadas com ela e compartilhamos suas ideias.

Apresentam-se também temas muito interessantes para considerar como contribuas para o aula, entre eles, a recta numérica como instrumento de representação dos números, resolução gráfica de problemas de álgebra elementar e modelo de resolução de um trinomio elevado ao n.

Reporte-los de investigações com conclusões e sugestões enriquecedoras, como o uso de conceitos teóricos de Álgebra Lineal de uma forma prática, registos de actividades de modelaje matemático, complementam-se com interessantes contribuas para a formação docente com reflexões sobre os saberes pedagógicos e os saberes específicos bem como o repto de incorporar o razonamiento algebraico em educação primaria.

Como sempre agradecemos a todos os colaboradores e os convidamos a continuar trabalhando juntos neste ano de mudanças curriculares profundos em vários países de nossa comunidade.

Finalmente, a despedida a uma grande educadora: Alicia Villar Icasuriaga, excelente colega que nos acompanho em numerosos congressos e reuniões, contribuindo sempre ideias criativas e motivando a realizar acções em benefício dos docentes de matemática e do avanço significativo da Educação Matemática nos países iberoamericanos. Sempre recordaremos seus ensinos.

Um abraço fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

Marzo de 2011, Número 25, página 9
ISSN: 1815-0640

Apoyo de la OEI a FISEM y UNIÓN

OEI

ORGANIZACIÓN DE ESTADOS IBEROAMERICANOS
PARA LA EDUCACIÓN, LA CIENCIA Y LA CULTURA

Sres.
Miguel Díaz Flores
Luis Balbuena Castellano
Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)

Madrid, 15 de junio de 2010

Estimados amigos,

En respuesta a su carta de fecha 13 de junio, tengo el gusto de comunicarles nuestra aceptación de la petición que nos hacen de incorporar la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) y su revista UNIÓN como red asociada al Centro de Altos Estudios Universitarios (CAEU) de la OEI. Me resulta muy grato informarles de que consideramos muy positiva para nuestro Centro la adhesión de su Federación.

Quiero aprovechar la ocasión para agradecer a su Federación el apoyo que nos vienen dando en el desarrollo del Curso de Profesores Matemática Ñandutí. Tenemos grandes expectativas acerca de su impacto en la educación matemática en la región y espero que en el futuro podamos ir definiendo otras actuaciones conjuntas.

Estoy seguro de que esta colaboración redundará en beneficio de ambas instituciones y, en última instancia, del avance de la educación matemática en la región iberoamericana.

Reciban un cordial saludo,

Alejandro Tiana Ferrer
Director General
Centro de Altos Estudios Universitarios (CAEU)
Organización de Estados Iberoamericanos
para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI)

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Marzo de 2011, Número 25, página 11-12
ISSN: 1815-0640

Inés del Carmen Plasencia Cruz

Breve Reseña

Nació en la isla de la Gomera (Islas Canarias-España) en Abril de 1953. Es Maestra de Primera Enseñanza (Plan 1953) y Licenciada en Ciencias Matemáticas por la Universidad de La Laguna (Junio de 1975).

Presentó su doctorado en Ciencias Matemáticas en Julio del año 2000 en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna.

En la actualidad es Profesora Catedrática de Escuela Universitaria de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de La Laguna.

La labor docente la ha desarrollado en la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de EGB, hoy Facultad de Educación, en la Facultad de Psicología y en la Escuela Universitaria de Arquitectura Técnica.

Ha ocupado los puestos de Vicesecretaria de la Escuela Universitaria del Profesorado de EGB de La Laguna y ha sido subdirectora del profesorado en la misma institución.

La labor investigadora la ha llevado a cabo principalmente en el departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, en la sección departamental de Didáctica de la Matemática. Esta investigación se ha desarrollado, primero, en cuestiones que tienen que ver con la innovación educativa y, más tarde, en trabajos específicos de investigación.

El interés en investigación se orienta principalmente al estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Imágenes mentales y visualización, creencias y concepciones en los alumnos y profesores), y al diseño de materiales curriculares que ayuden a la detección y desarrollo de las inteligencias múltiples en el aula de Educación Infantil y Primaria.

En estas líneas ha publicado en distintas revistas locales, nacionales e internacionales.

Ha dirigido y participado en varios proyectos de investigación relacionados con la Didáctica de las Matemáticas.

Ha impartido cursos de formación y perfeccionamiento del profesorado de Primaria y Secundaria. En la actualidad colabora, con una gran ilusión, con el profesor Luis Balbuena en los proyectos Ñandutí (OEI), para la formación permanente en el área de las Matemáticas y en los que puede participar el profesorado de Enseñanza Secundaria en ejercicio de cualquiera de los países iberoamericanos.

Es una gran amante y practicante del senderismo y le apasiona la música clásica y de los años 60.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada
Marzo de 2011, Número 25, páginas 13-20
ISSN: 1815-0640

Reflexiones de una formadora de formadores

Inés del Carmen Plasencia Cruz

Las reflexiones que escribo en este documento emergen al *mirar* retrospectivamente en mi vida profesional y humana, *miro hacia atrás,* sin mucha calma y, traigo a la *pantalla* de mi mente las imágenes que dan forma a lo que ha sido mi experiencia profesional, mi participación en los programas de formación continua para el profesorado de Educación Infantil, Primaria y Secundaria, en ejercicio, mi andadura a lo largo de treinta y seis años de ejercicio como profesora de la Universidad de La Laguna en el campo de la Educación Matemática, en los diferentes planes de la Diplomatura de Maestros, en los recién estrenados Grados de Maestro de Primaria e Infantil y en los Máster de Formación del Profesorado y de Matemáticas. Paralelamente, he desarrollado un camino en la investigación como plasmaré en páginas posteriores.

¿Cómo entiendo la docencia?

Desde mi punto de vista, estas ideas están en cierta forma *contaminadas* (lo que puede ser no negativo) por lo que *soy* como ser humano, expresan mis intenciones educativas así como mis concepciones científicas y pedagógicas, en las que parto de las propiedades características de la Matemática y del tipo de alumnado al que va dirigida la enseñanza.

Pero quiero empezar recordando mi primera clase, todavía tengo nítido en mi memoria a mi primer grupo de alumnos/as; era un grupo de la especialidad de Maestro en Ciencias Humanas. Corría el año 1975 y una joven y asustada profesora empezaba la aventura de la enseñanza. Llevaba a mis espaldas (en sentido metafórico) una mochila cargada de muchas matemáticas pero donde no había nada, casi nada de Didáctica. Mi alumnado a fuerza de asambleas (¡madre mía, que mal me lo pasé!) quería que yo les enseñara cómo enseñar Matemáticas a los niños, pero no la que yo tenía en mi mochila, teoremas, grupos cociente, homomorfismos, ecuaciones diferenciales… ¡no! eso no querían ellos; me pedían que les enseñara fracciones y yo me preguntaba: ¿Tantos años de estudio para ahora enseñar fracciones? Pero, ¿qué se han creído estos chicos? Y seguí con el programa unos pocos días más porque no me dejaban avanzar…cada clase se convertía en otra asamblea y pedían un cambio de contenidos y otra metodología. ¡Afortunadamente para mi, ellos ganaron!

Ser educadora y formadora de futuros profesores no es tarea fácil. Sin embargo, estoy convencida de que se hace más difícil de lo que realmente es, ya que quizá tratamos de plasmar, en cada uno de nuestros alumnos, una imagen demasiado perfecta y distante. ¿Existe en ese deseo la traslación de algunas de nuestras propias desilusiones? Por principio, nadie puede ser igual a otro, lo cual no quiere decir que no podamos aprender de los demás, pero siempre filtrando lo que nos aportan, para no dejar de ser nosotros mismos.

Sería más sencillo pensar que nuestra profesión de formadores es la de orientar, facilitar, educar en definitiva, para que los alumnos desplieguen al máximo sus responsabilidades, participen activa y responsablemente en la vida social y se integren en el desarrollo de la cultura; como expresaba Don Pedro Puig Adam[1] en relación con la formación del profesorado de Matemáticas: "*no es mi propósito imponer esquemas de lecciones modelos ni de estimular la imitación creando una rigidez de procedimientos esterilizadora. Procuro más bien alentar la personalidad de los profesores en ciernes, crear en ellos un espíritu, una conciencia profesional en el arte de enseñar y en el que, muchas soluciones son posibles y licitas*" (página 417).

Particularmente, intento siempre ser coherente con lo que digo que hay que fomentar y si me olvido, alguno de mis alumnos/as me lo recuerda. Cada encuentro con mis estudiantes, ya sea en clase, en supervisiones o en tutorías, procuro que sea un paso adelante en ese camino del conocimiento compartido, una posibilidad de practicar el sentido crítico y reflexivo, un dar pie a la creatividad, una oportunidad de sacar a relucir las potencialidades de todos y de transmitir amor al aprendizaje y a la enseñanza; una ocasión, en fin, para además compartir sentimientos y valores. Creo que se aprende experimentando y se debe facilitar la construcción del conocimiento.

¿Cómo hacer esta labor en una clase de matemáticas?

Es difícil explicar el cómo se hace. Quizá para mí es muy importante el respeto hacia cada uno de mis alumnos y alumnas, cuando llego a una clase siempre veo en cada alumno a un *ser humano* en un sentido global e imagino lo *grande* que puede llegar a ser, la importancia del trabajo que puede desarrollar, alguno/a será un buen/a político/a (como así ha sucedido), otro/a director/a de un colegio (hay más de uno), otro/a hará innovaciones educativas muy fructíferas (como es el caso de los profesores del colegio Aguamansa, en Tenerife), otros han sido deportistas de élite (un futbolista de 1ª división o una campeona mundial de frontón-tenis), un reconocido compositor musical, otros continuarán su carrera profesional y serán maestros, orientadores o profesores universitarios.

El primer día de clase hablamos sobre el comportamiento que espero de ellos, lo que deseo que hagan y ellos a su vez, después de reunirse en grupo, me dicen lo que esperan de mí como profesora. En cierto modo, estamos negociando *un contrato didáctico* que ambas partes (alumnado y yo) asumimos y respetamos. Presento, además, la forma de la evaluación; propuesta que ellos discuten y que a la semana siguiente volvemos a retomar para adoptar un consenso. Es verdad, que hay partes no negociables y que yo como experta tengo que defender. Hay cursos donde ha habido examen, con otros ha sido negociable el diario reflexivo…depende del número de estudiantes y de la asignatura.

[1] Puig Adam, P. (1959). *La Matemática y su enseñanza actual.* Madrid: MEC, Publicaciones de la Dirección General de Enseñanza Media.

¿Y, cómo introducir la materia? ¿Cómo llamar su atención? ¿Cómo encantarles?

Para empezar, no ha habido uniformidad en lo que he hecho; siempre se me ocurre algo nuevo, últimamente he enseñado al alumnado que será maestro especialista en Educación Física; estos alumnos/as tienen un perfil característico, la mayoría de ellos utiliza la diplomatura como plataforma para seguir la licenciatura, muchos vienen desencantados de sus anteriores encuentros con las Matemáticas, a otros no les interesa la asignatura porque no creen que la necesiten en su futuro profesional, sólo quieren aprobarla y olvidarla. Total, que, en general, son pocos/as los que piensan que las matemáticas son algo más que cálculos. Además, llegaban a mi clase dispersos, unos hablando de futbol, otros de la asignatura de Educación Física, casi todos/as ajenos a las Matemáticas.

Con este alumnado empecé mis clases con unos ejercicios de respiración, inspiramos contando mentalmente hasta cuatro, retenemos durante tres y espiramos en cuatro y ya estamos casi dispuestos a escuchar. Al principio, el lector puede imaginar las caras de algunos/as, pero a la cuarta o quinta clase no hace falta decir nada, tomamos unos minutos de silencio y empiezo la clase, normalmente con un problema, un juego, algo de matemagia. Dedicamos unos minutos a pensar la tarea y luego, voluntariamente ellos se levantan o van saliendo a la pizarra explicando sus métodos. Alguna vez pido a un alumno/a que no interviene que dé su solución. Cuando la solución no se encuentra con rapidez se deja la tarea y se responde en un foro web creado en la asignatura. La participación siempre ha sido excelente. De hecho, con algún grupo de alumnos han sido ellos los que plantean los problemas y entonces, me convierto yo en una alumna más que tiene que encontrar la solución.

En general, propongo distintos tipos de tareas en las que se vaya aumentando el grado de dificultad matemática y se vaya potenciando la autonomía en los alumnos en un ambiente de libertad y confianza.

Aunque yo creo que no hay tareas específicas para el desarrollo de la autonomía. Todas las tareas son susceptibles de incorporar autonomía, aunque eso sí, en mayor o menor grado, ya sea debido a la complejidad de los contenidos que se desarrollan en un momento determinado del curso, o bien se deba a las peculiaridades cognitivas de los alumnos, etc.

Lo ideal sería que la realización de la tarea fuese poco o nada controlada por el profesor. Son los alumnos, en definitiva, quienes tienen la obligación y la responsabilidad de prepararse. Lo que tenemos que hacer es co-planificar, co-desarrollar, co-responsabilizar, etc.

Fomentar la autonomía, la búsqueda de las propias estrategias de aprendizaje en el alumno. En todo caso hay que mantener un difícil equilibrio entre la dirección y la autonomía del alumnado.

Las tareas propuestas dependen del grupo y de la asignatura que enseño, sin pormenorizar, en Matemáticas me gusta tomar como bastión los trabajos de Polya, Schoenfeld y Freudenthal, enseño los *heurísticos* y resolvemos multitud de problemas no rutinarios.

En Didáctica hablamos de errores y dificultades, recursos y medios materiales e informáticos, diferentes algoritmos, actividades y puesta en práctica, psicología, inteligencias múltiples, videos de alguna clase de Primaria, …en el máster de Formación del Profesorado prefiero que leamos documentos y discutamos entre nosotros, aprendamos a elaborar una programación de aula, a escribir un artículo…

Doy mucha importancia al trabajo en grupo; estoy convencida de que es trabajando en grupo cuando salen muchas ideas porque al explicar, confrontar, reflexionar, cambiar, volver atrás, …se resuelven muchos problemas matemáticos, alguien da una idea que otra persona retoma y enriquece y, el *baile* de las ideas continúa mientras se trabaja en grupo.

Soy consciente de que, a veces, las normas sociales del aula y las coacciones del grupo van en contra de la enseñanza, de forma que algunos alumnos/as no preguntan en clase para evitar ser considerados pesados o *pelotas*. Por eso es muy importante el trabajo individual con los alumnos (tutorías y reunión con los pequeños grupos).

Suelo estar relajada y feliz en clase, utilizo con frecuencia las anécdotas y comentarios que surgen para iniciar un dialogo más cercano, paseo por el aula y creo, que nunca me he subido a la tarima. He aprendido a ser ordenada en mis exposiciones, hilar lo que le cuento preguntándoles lo que saben y si algo no lo sé, se los digo tranquilamente y lo preparo para el siguiente día.

Como formadora, deseo que lo aprendido en su viaje académico pueda aplicarlo alguna vez en su vida profesional.

Con toda sinceridad, he de decir que cuando se adopta una postura que haga confiar al alumnado se aprende mucho. De nuevo, me apoyo en los escritos del profesor Don Pedro Puig Adam, a quien tanto admiro: "*nuestra formación dura toda la vida. Cada día aprendemos algo nuevo y maravilloso de nuestros alumnos (Página 419)".* Estoy segura de haber aprendido tanto o más que mis alumnos cuando he llevado a cabo estos principios de compartir responsabilidades.

Para mí, lo importante es resolver en todo momento nuestra coherencia personal y profesional. Recomiendo a mis alumnos que se hagan la siguiente pregunta: *¿qué tipo de profesor quiero, debo y puedo ser?* Cada uno de nosotros resolverá la pregunta de forma distinta, de acuerdo a multitud de factores y circunstancias. Lo importante es buscar alternativas, a pesar de los éxitos y los fracasos.

En resumen, debemos hacer lo que sepamos, debamos y podamos en cada momento. No vale imitar a otros, lo que de ningún modo quiere decir que no podamos aprender de ellos. Cada camino es distinto aunque, a veces, nos encontremos en algunos tramos con personas que *vibran* en nuestra misma onda y entonces se produce un lindo intercambio de ideas y sentimientos… y seguimos el camino.

Lo mejor de esta profesión es que no existen leyes generales que puedan aplicarse a todos los que aprenden.

Creo que cada alumno debe encontrar sus fallos, sus carencias, sus potencialidades y valores.

Mi camino en la investigación

1. El papel de las imágenes mentales

Hace algunos años y por mandato de la Ley de Reforma Universitaria (LRU), se constituyeron los Departamentos en la Universidad española. Y la ley, además, obligó a los profesores de las Escuelas Normales a adscribirse a alguno de ellos. Me incorporé al Departamento de Análisis Matemático y tengo que confesar que supuso un antes y un después en mi carrera investigadora. Llevaba varios años dedicada a la docencia en la Universidad y a los cursos de perfeccionamiento y de repente, tenía que hacer el doctorado si quería seguir mi promoción profesional.

Me interesaba el tema de las imágenes mentales y la visualización y en el año 1994, viajé a EEUU, a Florida State University (Tallahassee) dónde comencé mi investigación en el tema con la experta y reconocida investigadora Norma Presmeg con quien he contraído una *deuda* profesional. Doy también las gracias al profesor Grayson Wheatley, ambos facilitaron y encaminaron mi trabajo de investigación. Presenté mi tesis en el año 2000.

Afortunadamente, en España, en la actualidad existen investigadores excelentes en el campo de la Didáctica de la Matemática y no es necesario recurrir obligatoriamente a profesionales que dirijan tesis doctorales fuera de nuestro país.

Mis preguntas de investigación fueron:

- *¿Cuál es el uso de las imágenes mentales que los estudiantes realizan cuando construyen Matemáticas? ¿Qué relación existe entre su habilidad para construir imágenes y su competencia en Matemáticas?*
- *¿Qué conciencia tienen los profesores de la diversidad de los alumnos y de la existencia de alumnos visualizadores?*

Con respecto a la primera pregunta, encontré que tres de los alumnos investigados, Kevin, Noel y Raúl, en mayor o menor grado, hicieron uso de las imágenes y la visualización mientras resolvían problemas de matemáticas, lo que confirmó mi hipótesis de que las imágenes y la visualización son componentes importantes en la actividad matemática.

Para Kevin, la visualización y las imágenes mentales desempeñan un papel importante en sus procesos de pensamiento cuando resuelve problemas de matemáticas. En su actuación, ante los problemas diseñados para evaluar la "calidad" de las imágenes de los estudiantes, y ante los planteados para analizar la competencia de los alumnos frente a problemas matemáticos no rutinarios, se manifiesta como una persona competente, observadora y creativa.

Noel, en cambio, aunque posee una gran habilidad espacial, en el sentido de que puede comparar "mentalmente" en un tiempo "record" dos objetos que se encuentran en distintas posiciones y decidir si son iguales o diferentes salvo rotación plana o espacial, su aprendizaje está mediatizado por el sistema escolar y, en consecuencia, no le es fácil desarrollar un pensamiento autónomo en el que pueda hacer uso de sus poderosas habilidades espaciales. Además, frente a algunos problemas, Noel pudo haber construido una *imagen incontrolable*, fruto de un *mal* aprendizaje, que persiste en su pensamiento, impidiéndole la apertura a otros caminos.

Por ejemplo, en una de las entrevistas se le pidió calcular el área de la zona sombreada de la siguiente figura:

Desde un principio afirma que es un rombo y midió las diagonales para intentar aplicar la fórmula del área. Persiste en su imagen de rombo; gira el papel noventa grados colocándolo verticalmente para observar mejor “su rombo”; lo dibuja en posición prototípica y dice que le faltan los vértices.

Tiene una imagen *obsesiva* de un rombo y esa imagen es “tan potente” que le impide ver el hexágono.

Con respecto al tercer estudiante, Raúl, “académicamente” el mejor alumno según la maestra (es un “buen estudiante”: realiza la tarea, asiste regularmente a clase, obtiene buenas notas en los exámenes, y sabe resolver con prontitud los problemas planteados en el aula) intenta utilizar todo su “conocimiento dirigido”, pero éste no le sirve cuando se enfrenta a problemas no rutinarios. No es capaz de desarrollar sus propias estrategias cognitivas; en las entrevistas no hemos detectado que las posea, limitándose a aplicar lo que le enseña la maestra. En muchas ocasiones, sólo tuvo éxito cuando repetía algo aprendido de memoria.

Y con respecto a la pregunta de investigación: ¿Qué conciencia tienen los profesores de la diversidad de los alumnos y de la existencia de alumnos visualizadores?

Comprobé la poca valoración que Rocío, la profesora, dio al pensamiento visual de Kevin, en contraste con su apreciación por el aprendizaje procedimental de Raúl, acorde con el currículo escolar.

Desde la literatura se ha señalado que muchos profesores no siempre valoran las soluciones visuales matemáticas que no se ajustan a los métodos estándares. El hecho de que no se haya valorado el pensamiento visual -en este caso concreto- y, probablemente, no se valore en muchos otros, es posible que se deba al desconocimiento de que hay distintos modos de pensar en Matemáticas; hay personas visualizadoras en las que predomina, y prefieren en sus actuaciones, lo visual frente a lo verbal.

En resumen, las historias de Kevin, Noel, Raúl y Rocío, los tres estudiantes y la profesora analizados en el trabajo indicado, son estudios de casos que proporcionan problemas y situaciones reales que ocurren en una clase de matemáticas y que podrían ser valiosos ya que incluyen un extenso abanico de posibilidades para que los profesores reflexionen sobre los hechos que se han presentado; a través del análisis y la discusión, el profesorado podría proponer soluciones viables que a la larga sirvan para mejorar su práctica educativa.

Pero, los tiempos han cambiado y ya la visualización *nos acompaña* en nuestros procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, de hecho ya aparece como parte de la **competencia matemática** que un alumno tiene que adquirir en su formación obligatoria.

2. Necesidad de aunar distintas áreas

Los resultados de la tesis mencionada en el apartado anterior crearon en mí una inquietud que me llevó a conectar con compañeros de áreas distintas a las matemáticas. De estos encuentros surgió la idea de un proyecto que tuviese al niño, desde las primeras edades escolares, como protagonista. Se pretendía encontrar un método educativo que ayudase al maestro a comprender mejor a su alumnado, aprovechando más lo que el niño aporta al proceso educativo.

Pensamos que es posible utilizar un conjunto de capacidades e intereses humanos con objeto de favorecer el aprendizaje de todos nuestros niños.

Nuestra opinión no está centrada exclusivamente en la idea de un currículo básico para todos. Es obvio que la lectura, la aritmética... son objetivos esenciales de la enseñanza escolar; pero creímos que era importante descubrir lo que cada niño puede aportar de manera exclusiva, tanto como asegurarnos que posea las destrezas y herramientas necesarias para desenvolverse en la sociedad.

El reconocimiento de las diferencias individuales de los niños es necesario, porque puede ser una poderosa lente que nos permita centrar los esfuerzos para la reforma de la escuela. Pensamos que es posible utilizar un conjunto de capacidades e intereses humanos con objeto de favorecer el aprendizaje de todos nuestros niños. En este sentido, la finalidad, en relación con la enseñanza y el aprendizaje en los niveles de Educación Primaria, se concretó en:

- Elaborar un procedimiento de diagnóstico previo que se centre explícitamente en la identificación de las capacidades más destacadas de los niños en las áreas curriculares de: desarrollo personal y social; lenguaje, música, pensamiento lógico–matemático y espacial, educación física, tecnología y ciencias naturales.
- Elaborar una guía donde se describan las actividades diseñadas para cada área de aprendizaje.
- Utilizar las capacidades destacadas de los niños para ayudarles a adquirir una comprensión más profunda en otras áreas de conocimiento.

En nuestra investigación nos apoyamos en la teoría de las Inteligencias Múltiples propuesta por Howard Gardner, su consideración multidimensional de la Inteligencia nos ofrece una imagen mucho más rica de la capacidad y del potencial de éxito de un niño que la que nos ofrece la teoría del Coeficiente Intelectual. Se sostiene que cada niño muestra un perfil característico en el que destacan diversas capacidades o inteligencias múltiples; es más, en vez de ser inmutables, estas inteligencias pueden reforzarse si se proporciona al niño un contexto rico en materiales y actividades significativas.

Presuponemos que todos los niños tienen, al menos, una capacidad destacada en un área de contenido, aunque para fomentar las aptitudes más destacadas quizá hay que darles la oportunidad de construir y expresar sus propias ideas en un ambiente de cooperación y juego. Además, si los alumnos ven que cada uno de sus compañeros manifiesta diferentes capacidades frente a una situación de aprendizaje o de resolución de problemas, y que ningún niño se desenvuelve mejor o peor que los demás en todas las áreas de contenido, es probable que valore más sus propias aptitudes y que aumente el respeto a sus compañeros, lo que podría crear un ambiente de mayor respeto y tolerancia, valores que creemos necesarios no olvidar y fomentar en nuestra sociedad.

Desde este marco profesional elaboramos algunos materiales para la educación Infantil y Primaria en varias áreas de conocimiento.

Esta visión de la inteligencia se incorpora al mundo escolar en la forma de competencia básica, y ya los currículos en España se estructuran desde la perspectiva de lo que es básico que un alumno/a desarrolle y aprenda y aparece: la competencia lingüística, la competencia ciudadana,…y otras competencias que aquí no es el momento ni el lugar para desarrollar.

3. El álgebra escolar

En la actualidad he vuelto la mirada hacia la Matemática y estoy co-dirigiendo una tesis doctoral en álgebra. En concreto, hemos puesto el foco de la investigación en el paso de la aritmética al álgebra, uno de los tránsitos más delicados dentro del desarrollo de las matemáticas escolares. Se produce en este tránsito un corte brusco, un paso abrupto desde los contenidos matemáticos familiares al alumnado (la aritmética)) a un nuevo lenguaje (el algebraico) completado desconocido y muy abstracto que es presentado sin solución de continuidad. Queremos incorporar la visualización en el proceso de enseñanza y ver si se produce alguna mejora. Este es el trabajo que nos ocupa actualmente y en el que esperamos obtener el éxito que nos permita entender y mejorar *un poco más* el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Conclusión

Quiero terminar con esta frase que una compañera me enseñó y que atribuye a la profesora Emma Castelnuovo:

Si aprendo a sumar, aprendo a aceptar
Si aprendo a restar, aprendo a desprenderme
Si aprendo a multiplicar, aprendo a crecer
Si aprendo a dividir, aprendo a compartir

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 21-29
ISSN: 1815-0640

Modelo para resolver un trinomio elevado a la n

David Gómez Sánchez; Adoración Gómez Sánchez; Ramón Recio Reyes

Resumen

Se presenta una técnica para resolver un trinomio de la forma $(a+b+c)^n$, donde n es un entero mayor o igual cero, tomando como referencia el triángulo de Pascal. Esta técnica propone la construcción de una pirámide regular triangular donde cada cara es un triángulo de Pascal. Esta pirámide tiene (n+1) secciones transversales en la pirámide, lo que permite resolver el trinomio $(a+b+c)^n$ con cada una de esas secciones. La base de la pirámide es un triángulo equilátero, cuya longitud de las aristas es directamente proporcional a n, proponemos una solución para cada valor de n, la determinación de la cardinalidad de los monomios del resultado final, la identificación de cada asignación de los exponentes correspondiente y obteniendo así una resultado con la misma lógica que se resuelve un binomio de la forma $(a+b)^n$ con el triángulo de Pascal.

Abstract

We present a technique to solve a trinomial of the form $(a+b+c)^n$, where n is a integer greater or equal 0, taking as basis the Pascal's triangle. This technique proposes the construction of a regular triangular pyramid where every face is a Pascal's triangle. This regular pyramid we construct has (n+1) transversal sections into the pyramid, which allows to solve the trinomial $(a+b+c)^n$ which every of those sections. The basis of the pyramid is an equilateral triangle whose side length is directly proportional to n; we propose a solution for every value of n, determining the cardinality of the monomials of the final result, identifying each and assigning the corresponding exponents and thus obtaining a result with the same logic as a binomial of the form $(a+b)^n$ with the Pascal's triangle.

Resumo

Apresenta-se uma técnica para resolver um trinomio da forma $(a+b+c)^n$, onde n é um inteiro maior ou igual zero, tomando como referência o triángulo de Pascal. Esta técnica propõe a construção de uma pirámide regular triangular onde a cada cara é um triángulo de Pascal. Esta pirámide tem (n+1) secções transversales na pirámide, o que permite resolver o trinomio $(a+b+c)^n$ com a cada uma dessas secções. A base da pirámide é um triángulo equilátero, cuja longitude das aristas é directamente proporcional a n, propomos uma solução para a cada valor de n, a determinação da cardinalidad dos monomios do resultado final, a identificação da cada asignación dos exponentes correspondente e obtendo assim uma resultado com a mesma lógica que se resolve um binómio da forma $(a+b)^n$ com o triángulo de Pascal.

Introducción

En el estudio del Álgebra observamos que las operaciones realizadas cuando se multiplican polinomios requieren de mucho tiempo, además de ser un proceso tedioso y en el cual se puede incurrir en errores, lo que dificulta los cálculos y minimiza el grado de precisión en los resultados que se obtienen (Gómez D., Romo J. M. y Gómez A., 2010). Específicamente hablando del trinomio elevado a la n potencia, se observa que a medida que n crece, los productos de los polinomios se complican, teniendo que hacer (n-1) multiplicaciones entre polinomios.

El triángulo de Pascal es una técnica para resolver un binomio elevado a la n, de la forma $(a + b)^n$ que debe cumplir la siguiente condición para el exponente que los valores que tome sean enteros y positivos. El triángulo de Pascal está formado por los coeficientes binomiales de cada uno de los términos del resultado (Baldor, 2007), como se muestra en la figura 1:

n = 0	1
n = 1	1 1
n = 2	1 2 1
n = 3	1 3 3 1
n = 4	1 4 6 4 1
n = 5	1 5 10 10 5 1
n = 6	1 6 15 20 15 6 1
n = 7	1 7 21 35 35 21 7 1
n = 8	1 8 28 56 70 56 28 8 1

Figura 1: Triángulo de Pascal

Así cuando n se incrementa, la base del triángulo crece, formándose los nuevos términos por la sucesión de los anteriores; para el caso de n = 8, el primer coeficiente es 1 el segundo es 8, formado por los dos términos que están por encima de él (1 + 7), mientras que el 28 se formó por (7 +21), y así respectivamente hasta terminar dicha sucesión con el valor final 1 formado al sumar (1 + 0). Nótese que cada fila que compone el triángulo de Pascal es una sucesión finita de términos, que al sumarlos predice el resultado de dicha serie, siendo éste 2^n; lo anterior se puede comprobar en la figura 2. El procedimiento mostrado es el mismo que se aplica para la suma de los términos del resultado del trinomio elevado a la n y comprobar que son correctos.

			2^n
n = 0	S_0 =	1	= 1
n = 1	S_1 =	1 + 1	= 2
n = 2	S_2 =	1 + 2 + 1	= 4
n = 3	S_3 =	1 + 3 + 3 + 1	= 8
n = 4	S_4 =	1 + 4 + 6 + 4 + 1	= 16
n = 5	S_5 =	1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1	= 32
n = 6	S_6 =	1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1	= 64
n = 7	S_7 =	1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1	= 128
n = 8	S_8 =	1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1	= 256

Figura 2: Series del triángulo de Pascal 2n

Hasta ahora se han desarrollado otras formas para resolver un trinomio elevado a la n potencia, Zeither (2002, pp. 256-266) presenta una técnica basados en la Fórmula Trinomial y la Pirámide de Pascal-Sierpinski; por su parte, Chapell (1999, pp.141-142) lo resuelve basado en lo que llama el Triángulo Trinomial. En la el Kalamazoo College, (http://max.cs.kzoo.edu/~jmaker/thoughts/trinomial.html) se encuentra una referencia para resolver un trinomio elevado a la segunda y tercera potencia.

Propuesta del modelo de solución de un trinomio elevado a la n

La propuesta de la solución del trinomio $(a + b + c)^n$ se basa en una pirámide regular de base triangular (figura 3) que llamaremos pirámide trinomial, en donde cada cara de la pirámide está formada por un triángulo de Pascal, y cada arista que une a las caras representa el crecimiento del exponente de a, b y c.

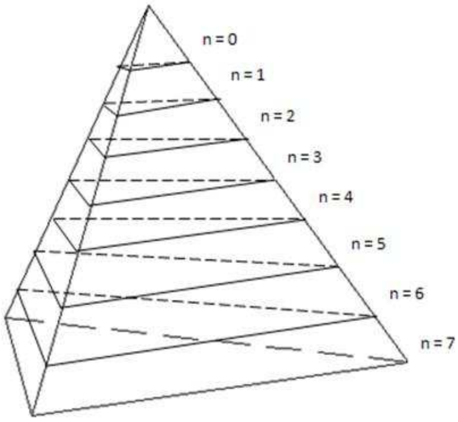


Figura 3 Pirámide Trinomial.

La pregunta entonces es, ¿qué hay dentro de la pirámide? Si se sabe que en cada cara de la pirámide están los coeficientes formados por el Triángulo de Pascal, ahora debemos pensar que dentro de la pirámide están los coeficientes faltantes de los términos del resultado que complementan los términos generados por los triángulos de Pascal. Estos coeficientes que aún no se obtienen estarán en función de los términos a, b y c con sus respectivos exponentes. Se presenta la pirámide resuelta para algunos niveles, sin perder de vista que se extiende indefinidamente hacia abajo. Los niveles están definidos por n que comienza de cero. La pirámide se corta de tal manera que los niveles determinados por cada una de las potencias representen secciones transversales aisladas, lo que permite percibir fácilmente como se forma el interior de la pirámide (figuras 4, 5).

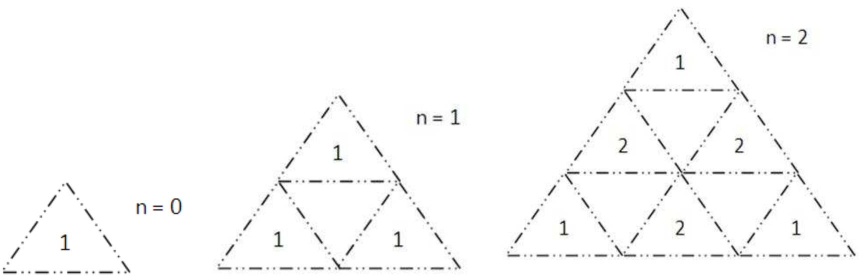


Figura 4 Secciones transversales n es igual 0, 1, 2.

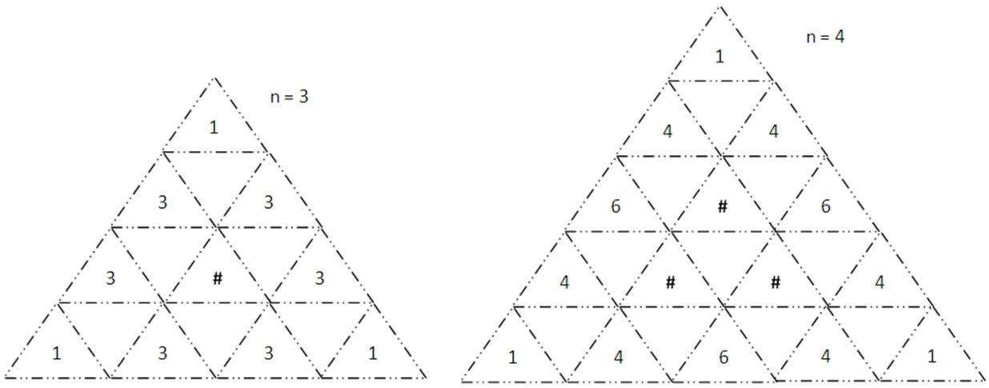


Figura 5 Secciones transversales n es igual 3 y 4 con coeficientes faltantes.

Analizando cada uno de los triángulos que se forman en cada sección transversal triangular (figuras 4, 5) en donde n = 0 y hasta n = 4, se observan las siguientes características específicas:

1. Que los términos de los lados de los triángulos formados por la sección se comportan como si se estuvieran resolviendo binomios elevados a la n.
2. Para cualquier valor de n, la forma de cada sección transversal triangular es un triángulo equilátero.
3. Cada vez que n aumenta en uno, la arista de la base de la pirámide crece de manera lineal en uno.
4. Cada vértice de las secciones transversales triangulares representa un término a, b ó c.

Lo anterior permite establecer cuántos son los términos que están dentro de cada sección transversal triangular; veamos ahora cuales son y cómo se obtienen.

Partiendo de la lógica con que se forma el triángulo de Pascal, se construye la Pirámide Trinomial comenzando de arriba hacia abajo. Considere que cualquier término elevado a la cero potencia tiene como resultado uno y elevado a la potencia uno, el resultado es el mismo término, por lo tanto no hay problema para resolver el trinomio cuando se eleva a éstas potencias. Con la técnica propuesta se determina el resultado cuando la potencia n es mayor o igual a dos. Para encontrar los términos que están en el interior de la pirámide se considera que el término o coeficiente en un nivel inferior de la pirámide está formado por los tres que se encuentran exactamente por encima de él. Por analogía con el triángulo de Pascal se infiere que en cada sección transversal triangular la suma de los términos que la forman es 3^n, lo que nos permite comprobar que los términos que componen la sección son correctos. A continuación, para determinar los términos faltantes, se sobreponen secciones transversales triangulares determinadas por n=2 y n=3 (Figura 6) y las establecidas por n=3 y n=4 (Figura 7).

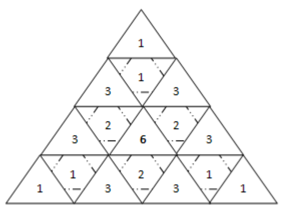


Figura 6 Determinación de los coeficientes interiores para la sección n = 3

Como se observa en la figura 6 el número seis que se encuentra remarcado en negrita, se obtiene sumando los términos que se encuentran sobre de él $(2+2+2)$, los términos restantes en el mismo nivel se obtienen de la misma manera, sin embargo éstos resultan conocidos porque están formados por el triángulo de Pascal que se encuentra en cada cara de la pirámide.

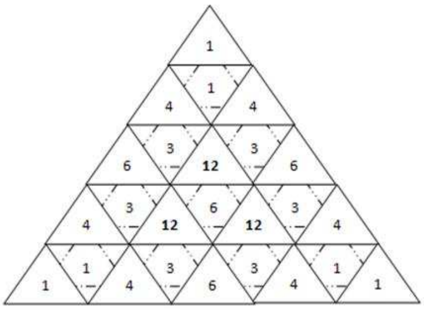


Figura 7 Determinación de los coeficientes interiores para la sección n = 4

De la misma manera, como se observa en la figura 7, el coeficiente 12 se obtiene de sumar los términos que se encuentran en el nivel inmediato superior de la pirámide $(3+3+6)$. De la misma forma, con la superposición de secciones transversales triangulares se van obteniendo los coeficientes faltantes para los niveles inferiores. En las figuras 8 y 9 se muestran los coeficientes interiores de cada sección transversal triangular que corresponden a un trinomio elevado a la cinco, seis y siete potencia respectivamente.

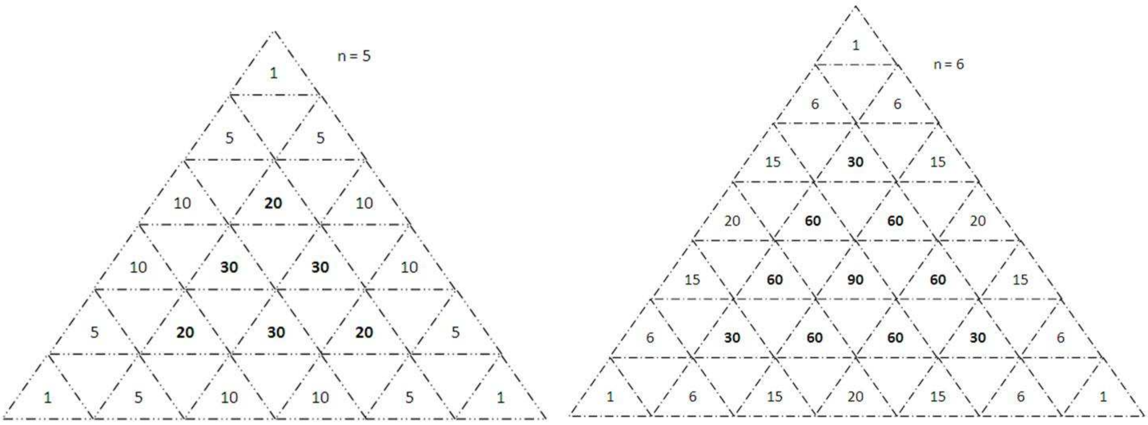


Figura 8 Coeficientes interiores para las secciones n = 5 y n = 6

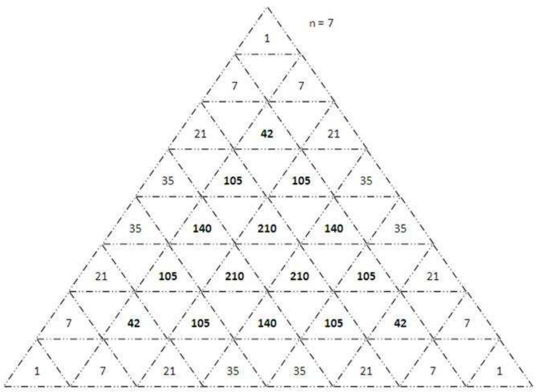


Figura 9 Coeficientes interiores para la sección n = 7

Una vez resueltas las preguntas cuántos términos hay en cada nivel y como se forman, viene otra pregunta ¿cuál es el orden que deben tomar los exponentes? Para responder está pregunta, se considera que todos los términos del polinomio resultante están formados por el producto de los coeficientes (nivel correspondiente de la pirámide) por abc con su respectivo exponente.

Para determinar los exponentes en cada uno de los términos a, b y c debemos considerar que su suma es igual a n, y que crecen desde cero hasta n en la expresión final del polinomio. La forma en que crecen o decrecen los exponentes es convencional y el manejo de las secciones transversales triangulares ayuda a determinar el respectivo exponente de a, b y c en cada término del polinomio. Como se observa en la figura 10 la dirección del crecimiento de los exponentes en cada término puede determinarse siguiendo el sentido de las manecillas del reloj o el contrario, conservando para cada término la misma dirección. Primero se determina la dirección para que crezcan los exponentes de a yendo de un vértice a otro en la sección, y en donde termina su crecimiento es el comienzo del segundo (b) siguiendo el mismo principio para determinar los exponentes de b y c, terminando este último donde comenzó el primero (a). Se debe considerar siempre que los exponentes crecen de la base o lado al vértice opuesto, según se marcó la dirección del crecimiento, tomando el exponente en cada uno de los términos formados por los coeficientes de la base valores de n=0, y en el vértice opuesto el valor de n para cada término alternadamente.

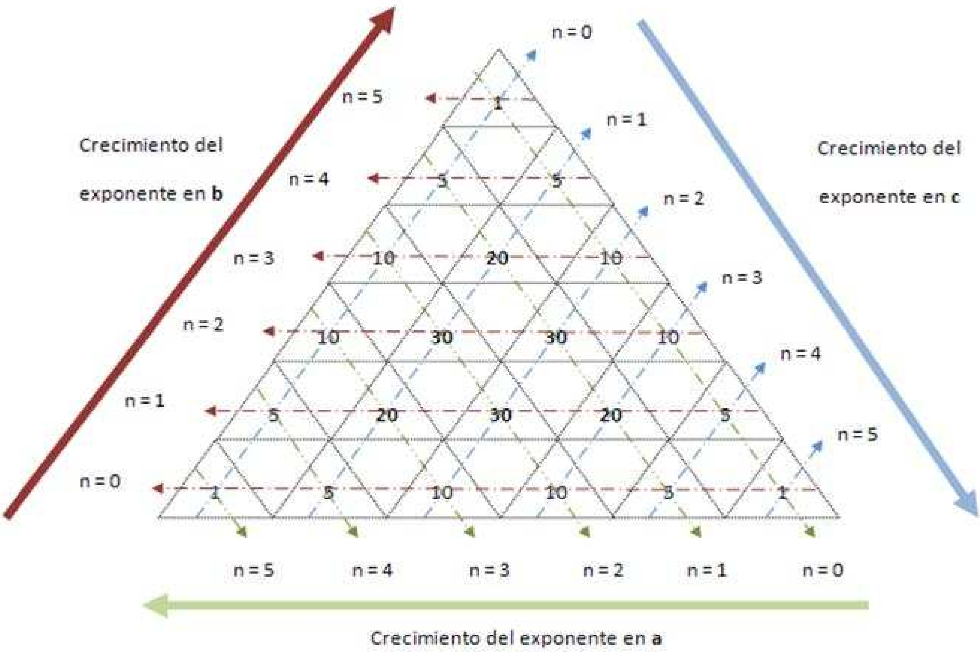


Figura 10 Asignación de exponentes para los términos del trinomio

Haciendo uso de la figura 10, a continuación se presenta la solución de un trinomio de la forma $(a + b + c)^5$. Se comienza por identificar los coeficientes que están en la base, de izquierda a derecha, y se asciende línea a línea hasta llegar al término que está en la cima del triángulo; este orden sólo será para no olvidar algún término, aunque no influya en el resultado final. A continuación se colocan los términos abc en todos los coeficientes de la sección triangular, como se muestra:

$$abc + 5abc + 10abc + 10abc + 5abc + abc + 5abc + 20abc + 30abc + 20abc + 5abc + 10abc + 30abc + 30abc + 10abc + 10abc + 20abc + 10abc + 5abc + 5abc + abc$$

Para determinar los exponentes en cada uno de los términos, se debe considerar que la suma de ellos es igual a n, en este caso particular $n = 5$; los exponentes de cada término se determinan siguiendo las flechas punteadas como se ve en la figura 10, donde cada coeficiente que está en la sección transversal triangular tiene una intersección de tres flechas y cada una de ellas indica con su dirección el exponente (valores de n) de ese término. A continuación se asignan los exponentes para cada uno de los términos. En el caso del primer término, el exponente de a es 5, el de b es 0 y el de c es 0 también, para el segundo término el exponente de a es 4, b es 0 y c es1 y así sucesivamente como se muestra en la siguiente ecuación:

$$1a^5b^0c^0 + 5a^4b^0c^1 + 10a^3b^0c^2 + 10a^2b^0c^3 + 5a^1b^0c^4 + 1a^0b^0c^5 + 5a^4b^1c^0 + 20a^3b^1c^1 + 30a^2b^1c^2 + 20a^1b^1c^3 + 5a^0b^1c^4 + 10a^3b^2c^0 + 30a^2b^2c^1 + 30a^1b^2c^2 + 10a^0b^2c^3 + 10a^2b^3c^0 + 20a^1b^3c^1 + 10a^0b^3c^2 + 5a^1b^4c^0 + 5a^0b^4c^1 + 1a^0b^5c^0$$

Simplificando se obtiene el siguiente resultado:

$$a^5 + 5a^4c + 10a^3c^2 + 10a^2c^3 + 5ac^4 + c^5 + 5a^4b + 20a^3bc + 30a^2bc^2 + 20abc^3 + 5bc^4 + 10a^3b^2 + 30a^2b^2c + 30ab^2c^2 + 10b^2c^3 + 10a^2b^3 + 20ab^3c + 10b^3c^2 + 5ab^4 + 5b^4c + b^5$$

Para comprobar que los coeficientes de la sección son correctos, se calcula el valor 3^n y el resultado es la suma de estos, como se presenta a continuación:

$$3^n = \sum Coeficientes\ de\ la\ sección\ transversal\ triangular$$
$$3^5 = 243$$

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 + 5 + 20 + 30 + 20 + 5 + 10 + 30 + 30 + 10 + 10 + 20 + 10 + 5 + 5 + 1 = 243$$

La técnica propuesta es útil cuando el trinomio está formado por variables, constantes o ambos, independientemente del signo de cada término.

Una manera de simplificar la técnica, es considerar que los coeficientes que se encuentran en las aristas de la sección transversal triangular son los mismos coeficientes del triángulo de Pascal, y que los exponentes en cada una de las aristas es cero para cada término a, b, c alternadamente. Utilizando el mismo ejemplo del trinomio de la forma $(a + b + c)^5$, al comenzar con los coeficientes de las aristas se obtiene:

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 + 5b^4c + 10b^3c^2 + 10b^2c^3 + 5bc^4 + c^5 + 5ac^4 + 10a^2c^3 + 10a^3c^2 + 5a^4c$$

Con este planteamiento se disminuye el número de coeficientes al que hay que asignar exponentes, por lo tanto hay que verificar solamente los exponentes en los seis coeficientes interiores que están formados por el producto de los términos a, b y c, sin olvidar que la suma de los exponentes tiene que ser igual a n, en este caso en particular, $n = 5$.

Finalmente, en todas las secciones transversales triangulares se observa igualdad en algunos coeficientes del centro a cada uno de los vértices por lo que no hay que saber a qué vértice pertenecen, por lo que la siguiente parte del procedimiento es:

$$20abc + 20abc + 20abc + 30abc + 30abc + 30abc$$

a la que solo falta colocar correctamente los exponentes. El razonamiento lógico es el siguiente: si los coeficientes 20 son los vértices del triángulo interior y pertenecen a la segunda línea, el exponente será uno en dos términos y el complemento de n corresponde al tercero alternadamente. Los coeficientes 30 están en la intersección de los exponentes dos para dos términos, por lo que el tercer término será el complemento para tomar el valor de n alternadamente, como se muestra a continuación:

$$20a^3bc + 20ab^3c + 20abc^3 + 30a^2b^2c + 30a^2bc^2 + 30ab^2c^2.$$

Teniendo en consideración todo lo anterior, el resultado final del trinomio es:

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 5ab^4 + b^5 + 5b^4c + 10b^3c^2 + 10b^2c^3 + 5bc^4 + c^5 + 5ac^4 + 10a^2c^3 + 10a^3c^2 \\ + 5a^4c + 20a^3bc + 20ab^3c + 20abc^3 + 30a^2b^2c + 30a^2bc^2 + 30ab^2c^2$$

Que ordenando

$$a^5 + 5a^4c + 10a^3c^2 + 10a^2c^3 + 5ac^4 + c^5 + 5a^4b + 20a^3bc + 30a^2bc^2 + 20abc^3 + 5bc^4 + 10a^3b^2 \\ + 30a^2b^2c + 30ab^2c^2 + 10b^2c^3 + 10a^2b^3 + 20ab^3c + 10b^3c^2 + 5ab^4 + 5b^4c + b^5$$

Se observa que los resultados son los mismos en ambos casos.

Otros trinomios que se podrían resolver son $(2x\text{-}y\text{+}9)^4$, $(y^2\text{+}5y\text{-}4)^3$ o $(8\text{-}4\text{+}2)^5$, este último en realidad es 6^5 sabiendo de antemano que el resultado es 7776, pero en este caso se resuelve como trinomio para demostrar que se obtiene el mismo resultado:

$$(8 - 4 + 2)^5 = (a + b + c)^5$$

Donde: $a = 8, b = -4 \ y \ c = 2$

El resultado es:

$$a^5 + 5a^4 + 10a^3c^2 + 10a^2c^3 + 5ac^4 + c^5 + 5a^4b + 20a^3bc + 30a^2bc^2 + 20abc^3 + 5bc^4 + 10a^3b^2 \\ + 30a^2b^2c + 30ab^2c^2 + 10b^2c^3 + 10a^2b^3 + 20ab^3c + 10b^3c^2 + 5ab^4 + 5b^4c + b^5$$

$$(8)^5 + 5(8)^4(2) + 10(8)^3(2)^2 + 10(8)^2(2)^3 + 5(8)(2)^4 + (2)^5 + 5(8)^4(-4) + 20(8)^3(-4)(2) \\ + 30(8)^2(-4)(2)^2 + 20(8)(-4)(2)^3 + 5(-4)(2)^4 + 10(8)^3(-4)^2 + 30(8)^2(-4)^2(2) \\ + 30(8)(-4)^2(2)^2 + 10(-4)^2(2)^3 + 10(8)^2(-4)^3 + 20(8)(-4)^3(2) + 10(-4)^3(2)^2 \\ + 10(8)^2(-4)^3 + 20(8)(-4)^3(2) + 10(-4)^3(2)^2 + 5(8)(-4)^4 + 5(-4)^4(2) + (-4)^5$$

$$32768 + 40960 + 20480 + 5120 + 640 + 32 - 81920 - 81920 - 30720 - 5120 - 320 + 81920 + 61440 \\ + 15360 + 1280 - 40960 - 20480 - 2560 + 10240 + 2560 - 1024 = 7776$$

Conclusiones

La inclusión del modelo propuesto para resolver un trinomio elevado a la n en el estudio del algebra es factible, ya que facilita la obtención del resultado debido a que se cuenta con el número exacto de términos en la solución final mismos que se encuentran en cada sección de la pirámide trinomial.

El modelo propuesto es más fácil de utilizar para aquellos que ya utilizamos el triángulo de Pascal en la solución de un binomio elevado a la n, lo que proporciona una mejor comprensión, aplicación, enseñanza del mismo.

Este trabajo se realizó pensando en aquellos estudiantes que se desarrollan en el área socio administrativa y que manifiestan cierto temor al estudio del Algebra, siendo un modelo geométrico, que demanda lógica y creatividad en la persona que lo aplica es una alternativa en las estrategias de enseñanza.

Bibliografía

Baldor, A. (2007). *Algebra*. Segunda edición, ed. Grupo editorial patria, 376-388.

Chapell, J., Osler, T. (1999): The Trinomial triangle. *The College Mathematics Journal*. Vol. 30, N°. 2, 141-142.

Gómez Sánchez, D.; Romo Orozco, J.; Gómez Sánchez, A. (2010): Patrones de solución de polinomios y reglas de conteo: Aplicación a un polinomio elevado a la cuarta. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* UNION, Número 21, 31-36.

Huang, Y. (1995): *The Trinomial Theorem*. Recuperado el 22 de febrero de 2009, de: http://staff.washington.edu/znuwu/tritheo/theorem.htm

Kalamazoo College, (2009): Trinomial Shape. Recuperado el 22 de febrero de 2009 de: http://max.cs.kzoo.edu/~jmaker/thoughts/trinomial.html.

Zeitler, H. (2002): Trinomial formula, Pascal-and Sierpinski-pyramid. *International Journal of Matehematical Education Science & Technology*, Vol. 33, Tomo 2, 256-266.

David Gómez Sánchez. Nació en Cd. Fernández, San Luis Potosí, México en 1980, egresado de la carrera de Ingeniero Mecánico Electricista, de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP), y estudió la Maestría en Administración en la misma Universidad. Actualmente es Profesor Investigador de Tiempo Completo en la Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media de la UASLP. **david.gomez@uaslp.mx**

Adoración Gómez Sánchez. Nació en Cd. Fernández, San Luis Potosí, México en 1978, es Ingeniera Civil por la UASLP y Doctora Ingeniera de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad Politécnica de Madrid. Actualmente es docente en la carrera de Ingeniero Civil de la Unidad Académica Multidisciplinaria de la Unidad Zona Media, UASLP. **adoracion@uaslp.mx**

Ramón Gerardo Recio Reyes. Nació en Saltillo Coah., México el 19 de septiembre de 1952, egresado de la carrera de Ingeniero Geólogo, de la UASLP, estudió la Maestría y el Doctorado en Administración en la misma Universidad. Actualmente es Profesor Investigador de Tiempo Completo en la Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media de la UASLP. **reciog@uaslp.mx**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 31-42
ISSN: 1815-0640

Saberes pedagógicos e saberes específicos na formação de professores que ensinam Matemática

Celia María Carolino Pires

Resumo

Neste artigo apresentamos uma reflexão sobre saberes pedagógicos e saberes específicos na formação de professores que ensinam Matemática Essa reflexão baseia-se em alguns resultados de pesquisas sobre Formação de Professores de Matemática que orientamos no âmbito de um grupo que reúne doutorandos e mestrandos do Programa de Estudos Pós - Graduados em Educação Matemática. O projeto que o grupo de pesquisa desenvolve tem como finalidade de investigar os processos de formação inicial e continuada de professores de Matemática, em cursos de Licenciatura e em projetos de formação continuada, buscando identificar mudanças implementadas nessa formação em decorrência das demandas atuais do sistema educacional brasileiro. O conjunto dessas dissertações e teses traz contribuições para a compreensão da trajetória histórica dos cursos de formação inicial e continuada de professores para ensinar Matemática, tanto professores polivalentes como especialistas e possibilita ainda evidenciar as características do conhecimento do professor que ensina matemática e a reflexão sobre os conhecimentos do professor, considerados essenciais, tanto os pedagógicos quanto os específicos, como também a influência de crenças, de concepções e de atitudes do professor. Desde o ano 2000, em que foi concluída a primeira dissertação realizada neste grupo de pesquisa, vários problemas de pesquisa foram propostos e investigados. Os trabalhos que vamos analisar aqui são os de Curi (2000), Silva (2004) e Santos (2000) e que estão centrados na análise da formação inicial em Cursos de Licenciatura de Matemática. Focalizaremos ainda alguns resultados das investigações de Cerqueira (2003), Ramos (2005) e Ribeiro (2005) que têm como cenário a formação continuada de professores de Matemática.

Abstract

This article presents a reflection on pedagogical knowledge and specific knowledge in the training of mathematics teachers. This reflection is based on some research findings about Training of Teachers of Mathematics in a group that brings doctoral and graduates students from the “Programa de Estudos Pós - Graduados em Educação Matemática”. The project investigate processes of initial and continuing training of mathematics teacher in undergraduate courses and continued education programs, to identify changes implemented this training due to current demands of the Brazil educational system. This dissertations and theses includes contributions to understanding the historical trajectory of initial training courses and continuing education to teach mathematics, both classroom teachers and specialists and allows consumers to highlight the characteristics of knowledge of teacher who teaches math, and reflection on knowledge the teacher are seen as essential, both as specific teaching, but also the influence of beliefs, conceptions and attitudes of teachers. Since 2000, which was completed in first place in this dissertation, several research problems were proposed and investigated. The work we discuss here are those of Curi (2000), Silva (2004) and Santos (2000) and are focused on analysis of initial training in Bachelor Degree in Mathematics. We will focus on some results of further investigations Cerqueira (2003), Ramos (2005) and Ribeiro (2005) that have the backdrop of the continuing education of mathematics teachers.

Resumen

En este artículo presentamos una reflexión sobre el saber pedagógico y el saber específico en la formación de profesores que enseñan matemática. Esta reflexión se basa en algunos resultados de investigaciones sobre la formación de profesores de la matemática que dirigimos en un grupo de doctorandos y maestrandos del Programa de Estudios Pós-Graduados en Educación Matemática de la PUC/SP. El proyecto que el grupo de investigación desarrolla tiene como propósito investigar los procesos de formación inicial y de formación continuada de profesores de matemática, en cursos de Licenciatura y proyectos de formación continuada, buscando identificar los cambios implementados en esta formación como resultado de las demandas actuales del sistema educativo brasileño. Estas disertaciones y tesis traen contribuciones para la comprensión de la trayectoria histórica de los cursos de formación inicial y continuada de profesores para enseñar matemática, tanto de profesores como de especialistas, haciendo posible también evidenciar las características del conocimiento del profesor que enseña matemática y la reflexión en el conocimiento del profesor, considerado esencial, tanto los conocimientos pedagógico y específicos, así como también la influencia de la creencia, los conceptos y las actitudes del profesor. Desde el año 2000, donde la primera disertación fue concluida, algunos problemas de la investigación habían sido considerados e investigados. Entre los trabajos que vamos a analizar aquí están los de Curi (2000), Silva (2004) y Santos (2000), que se centran en el análisis de la formación inicial en cursos de Licenciatura de Matemática. Algunos resultados de las investigaciones de Cerqueira (2003), Ramos(2005) y Ribeiro (2005) tienen como escena la formación continuada de profesores de matemática.

Introducción

Nas formulações de propostas para formação de professores, particularmente nas que se referem à formação de professores de Matemática, sempre houve uma grande polêmica em torno de saberes específicos e saberes pedagógicos. A famosa organização curricular conhecida como “3+1” já expressava o resultado do embate: três anos dedicados aos saberes matemáticos e um ano dedicado aos saberes pedagógicos. Importante destacar que os saberes matemáticos ensinados aos futuros professores não incorporavam a discussão a respeito de conhecimentos matemáticos que eles viriam a ensinar a seus alunos da educação básica. Por sua vez, os saberes pedagógicos eram apresentados de forma teórica e genérica e pouco envolviam os alunos nas discussões de caráter pedagógico, sobre “o ensinar e aprender Mmatemática”.

Nos últimos anos diferentes autores trazem contribuições importantes para a reflexão sobre esse embate. Shulman (1986) apresenta categorias de conhecimento do professor: conhecimento do conteúdo; conhecimento pedagógico; conhecimento do currículo; conhecimento dos alunos e de aprendizagem; conhecimento do contexto, conhecimento didático do conteúdo, e conhecimento de filosofia educativa, fins, e objetivos. Elbaz (1983), destaca que o conhecimento profundo dos conteúdos que serão objetos de ensino faz parte de um rol de itens integrantes do conhecimento do professor; considera que o conhecimento do professor é diferente do conhecimento do especialista da disciplina e tem um forte componente do “saber a disciplina para ensiná-la”.

No debate sobre o tipo de conhecimento disciplinar que os professores devem construir Marcelo (1999) destaca que o conhecimento do professor tem de ser diferente, na medida em que é um conhecimento a ser ensinado, o que obriga a que se organizem não apenas em função da própria estrutura disciplinar, mas pensando nos alunos a que se dirigem, o que nos direciona a pensar que se trata de formar professores para que possuam um conhecimento didático do conteúdo a ensinar.

No que se refere ao conhecimento do conteúdo da disciplina a ser ensinada, Shulman (1986) considera que o professor deve compreender a disciplina que vai ensinar a partir de diferentes perspectivas e estabelecer relações entre vários tópicos do conteúdo disciplinar e entre sua disciplina e outras áreas do conhecimento.

O autor destaca a expressão “pedagogical content knowledge” que é denominada por alguns autores como “conhecimento pedagógico disciplinar” ou “conhecimento didático do conteúdo”. Shulman define esta expressão como uma combinação entre o conhecimento da disciplina e o conhecimento do “modo de ensinar” e de tornar a disciplina compreensível para o aluno. Ele defende que esse tipo de conhecimento é uma forma de conhecimento característica dos professores que os distingue da maneira de pensar dos especialistas de uma disciplina; é um conjunto de conhecimentos e capacidades que caracteriza o professor como tal e que inclui aspectos de racionalidade técnicas associados a capacidades de improvisação, julgamento e intuição; é um processo de raciocínio e ação pedagógica que permite aos professores recorrer aos conhecimentos e compreensão requeridos para ensinar algo num dado contexto, para elaborar planos de ação, mas também para improvisar perante uma situação não prevista.

No que se refere ao conhecimento do currículo, Shulman (1992) aponta que esse conhecimento engloba a compreensão do programa, não só de objetivos e conteúdos, mas o programa como um todo; defende também o conhecimento de materiais que o professor disponibiliza para ensinar sua disciplina, a capacidade de fazer articulações horizontais e verticais do conteúdo a ser ensinado, a história da evolução curricular do conteúdo a ser ensinado. Segundo o autor, há necessidade de os professores construírem pontes entre o significado do conteúdo curricular e a construção desse significado por parte dos alunos conforme destaca:

> “... os professores realizam esta tarefa mediante uma compreensão profunda, flexível e aberta do conteúdo; compreendendo as dificuldades mais prováveis que os alunos podem ter com essas idéias...; compreendendo as variações dos métodos e modelos de ensino para ajudar os alunos na sua construção do conhecimento; e estando abertos para rever os seus objetivos, planos e procedimentos à medida que se desenvolve a interação com os estudantes. Este tipo de compreensão não é exclusivamente técnico, nem apenas reflexivo. Não é apenas o conhecimento do conteúdo, nem o domínio genérico de métodos de ensino. É uma mescla de tudo, e é principalmente pedagógico”. (Shulman, 1992)

No artigo “Reflexões sobre os cursos de Licenciatura em Matemática, tomando como referência às orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para formação de professores da Educação Básica”, ao analisarmos os saberes específicos a serem constituídos por alunos da Licenciatura em Matemática, destacamos a questão do tratamento de conteúdos da educação básica, nos cursos de Licenciatura.

> Nos cursos de licenciatura, a conotação dada aos conteúdos da educação básica não deve ser apenas a de revisão daquilo que os futuros professores estudaram (ou “deveriam” ter estudado); se por um lado essas revisões acabam causando desinteresse dos ingressantes, por outro lado é necessário construir conhecimento aprofundado e

> consistente para ampliação do universo de conhecimentos matemáticos e adequá-los às atividades escolares próprias das diferentes etapas e modalidades da educação básica. Os cursos de Licenciatura, que adotam uma perspectiva de preparação para a docência, devem contemplar: o tratamento especial aos conteúdos matemáticos da educação básica com ênfase no processo de construção desses conhecimentos, sua origem, seu desenvolvimento, em disciplinas específicas, em que os estudantes possam consolidar e ampliar conteúdos com os quais irão trabalhar no ensino básico a articulações desses conteúdos de forma articulada com sua didática. O domínio desses conhecimentos matemáticos sustenta o processo de transformação do saber científico para o saber escolar e a compreensão do processo de aprendizagem dos conteúdos da educação básica pelos alunos. (Pires, 2002)

Em sua investigação, Curi (2000) relembra que a disciplina Fundamentos da Matemática Elementar foi incorporada aos currículos de Licenciatura em Matemática pelo Parecer 292/62, com objetivo de fazer uma análise e revisão dos assuntos estudados em Matemática nos ginásios e colégios (atuais ensinos fundamental e médio), com vistas a proporcionar aos futuros professores um conhecimento mais aprofundado desses assuntos e procurar enquadrá-los no conjunto das teorias Matemáticas estudadas no curso superior. Hoje, a preocupação com o aprofundamento dos conteúdos matemáticos não mais se verifica e na disciplina Fundamentos da Matemática Elementar é feita uma revisão ligeira desses conteúdos para que o aluno tenha condições de acompanhar o curso.

Curi considera que as instituições formadoras não têm clareza dos saberes pessoais e dos saberes escolares anteriores dos ingressantes, desconhecem a origem de sua formação anterior (se foi aluno de ensino médio regular ou de ensino supletivo), os motivos que o fizeram buscar um curso de formação de professores, as expectativas com relação ao curso, as concepções em relação à Matemática e seu ensino, etc.. Segundo Curi, o tratamento que tem sido dado aos conteúdos desenvolvidos na disciplina de Fundamentos é de revisão de conteúdos já aprendidos, o que não permite nem o aprofundamento necessário dos conhecimentos matemáticos, que geralmente os ingressantes não dominam, nem o enfoque de questões de ordem didática relativas a esses conteúdos.

Ressalta que mesmo que os ingressantes dos cursos de licenciatura dominassem os conteúdos do Ensino Básico, seria bem diferente conhecer um assunto na condição de ex-aluno desse ensino, do que conhecer esse mesmo assunto na perspectiva de ser um professor que vai ensiná-lo. Esta última perspectiva pressupõe que se saiba identificar, entre outros aspectos, os obstáculos epistemológicos, os obstáculos didáticos, a relação desses conteúdos com o mundo real e sua aplicação em outras disciplinas, sua inserção histórica:

> Tendo em vista as especificidades de um curso de formação de professores é preciso, além de se estabelecer relações entre os conteúdos de aprofundamento das disciplinas do ensino superior e os ministrados no ensino básico, mudar o tipo de tratamento normalmente dado a esses conteúdos. (Curi, 2000)

No trabalho de Santos (2004), que entrevistou coordenadores de cursos de Licenciatura em Matemática, a respeito da abordagem dos conteúdos da Educação Básica, nos Cursos de Licenciatura, pode-se observar argumentos de coordenadores para a inclusão de disciplinas que abordam tais conteúdos:

> “Eu acho que é necessária a retomada desses conteúdos da Educação Básica visto que o aluno tem a perspectiva de aluno daquele conteúdo e ele precisa ter a visão

> como professor, então isso já seria um dos motivos de abordar esse conteúdo novamente. O segundo motivo, que eu acredito ser necessária a abordagem é que os alunos chegam no ensino superior com um conhecimento muito frágil a respeito desses conhecimentos hoje em dia, então mesmo que acabe enfrentando uma geração nos precisamos pegar e retomar esse conteúdo até melhorar o nível dos professores para trabalhar com esses conteúdos na Educação Básica." (Santos, 2004)

> " Nós temos à disciplina Fundamentos da Matemática Elementar 1 que é dada no primeiro semestre que tem como objetivo estudar as Funções e geralmente ela é dada para o curso de Cálculo, esse conteúdo era feito no curso de Cálculo daí nos mudamos, o curso de Cálculo começa logo no primeiro semestre já abordando os Limites, então já começa estudando Limites e concomitantemente com o estudo de Limites tem um outro professor trabalhando com derivada numa abordagem diferenciada também. Então nós temos o curso de Cálculo com dois professores, um trabalhando com Limites e o outro com derivada e a disciplina Fundamentos da Matemática Elementar 1 trabalhando com Funções que seria uma retomada, com uma perspectiva diferente. Logo venho a pensar que este "amparo" que é realizado pelas disciplinas de fundamentos da Matemática elementar 1 e 2, respectivamente as disciplinas de cálculo e Álgebra Linear, vem ao encontro a um formato de abordagem tendo como objetivo construir conhecimento aprofundado e consistente para ampliação do universo de conhecimentos matemáticos". (Santos, 2004)

Uma das coordenadoras entrevistadas por Santos trouxe uma reflexão diferente dos demais:

> "...a gente via um buraco - eles não dominavam bem esses conteúdos, eles tinham muita insegurança com relação a esses conteúdos e não conseguiam fazer sozinhos a ponte da Matemática avançada, que tinham das disciplinas anteriores de Matemática e aquela Matemática que eles deveriam ensinar, então eu acredito que o licenciando ele não consegue fazer esta ponte sozinho, então eu entendo que é bem interessante que você tenha momentos, em algumas disciplinas, aonde se tem que fazer essa ponte...então nós começamos a estabelecer esses momentos, por exemplo, em que a gente, a partir da análise dos conteúdos básicos, que deveriam ensinar nas escolas do ensino fundamental e médio, eles pudessem olhar para os conteúdos avançados e ver a interferência da Matemática como área do conhecimento, como área de investigação sobre esses conteúdos e como esses estudos anteriores deles ajudavam nesta compreensão, então a gente começou a fazer por aí, mas nós vimos que isto não era suficiente...Porém, foi observado que na prática as dificuldades continuavam, pois os alunos ainda não conseguiam ver a importância que os conteúdos básicos tinham para o entendimento dos conteúdos avançados; por isso há dois anos foi implantada a disciplina Matemática do Ensino Básico: Abordagem Crítica, que tem como objetivo a revisão, porém de forma crítica, obrigando o aluno a refletir sobre questões que não eram avaliadas anteriormente, mas sob o ponto de vista bem mais crítico e bem mais avançado, inclusive tentando aprofundar linguagens usadas no tratamento desses conteúdos". (Santos, 2004).

Com relação aos saberes pedagógicos e, em particular, sobre suas articulações com os saberes específicos, o trabalho de Silva (2004) mostra como esse aspecto se trava na discussão de coordenadores de Cursos de Matemática sobre as 400 horas de Prática e as 400 horas de Estágio supervisionado, indicadas na legislação atual (Resolução CNE/CP 2/2002). Nessa discussão ficou evidente que as interpretações feitas pelos coordenadores demonstraram características distintas. Primeiramente, alguns coordenadores ligaram a "dimensão prática" presente na legislação a ações incumbidas aos alunos, como preparar aulas simuladas, fazer entrevistas, fazer observações, atuar em projetos de intervenção nas escolas:

> "... essas quatrocentas horas de prática nós já temos há muito tempo... por exemplo, nós já temos aqui há quase vinte anos a disciplina "Instrumentação para o Ensino da Matemática"... Criamos uma disciplina só para isso: para fazer a transposição didática. Então, nessa disciplina de Instrumentação, que é dada pelo departamento de Matemática, são feitas aulas simuladas." (Silva, 2003).

> "Existem também [outras disciplinas que trabalham a prática]. Existem as disciplinas... A mesma coisa de aulas simuladas também é feito pelo outro departamento. De Metodologia Educacional. Eles também fazem desde a disciplina de Didática." (Silva, 2003).

Silva avalia que parece também existir uma concepção de que somente os componentes curriculares "pedagógicos" poderiam discutir a prática:

> "... são mais as disciplinas voltadas para a formação de professores. Porque são essas que discutem a prática..." (Silva, 2003).

Em contrapartida, a mesma coordenadora relata a interpretação feita por sua instituição, que parece demonstrar uma oposição ao seu discurso citado anteriormente:

> "Mas a leitura que a Universidade fez dessas 400 horas... não de estágio supervisionado, o estágio é o estágio mesmo, vai lá na escola e faz atividades e propõe atividades. Agora essa de Prática como componente curricular, a Universidade fez uma interpretação de que isso envolve a própria discussão sobre a prática. Então, quando você lê textos teóricos que falam da Educação e se referem à prática, então isso também é uma discussão sobre a prática. Então nessa integração da teoria com a prática, eu entendo que a gente interpreta como a teoria educacional, certo?" (Silva, 2003).

Alguns depoimentos relataram experiências inovadoras buscando inserir a prática em todo o curso e discutindo-a em todos os componentes curriculares, inclusive nos específicos de Matemática:

> "É o que está sendo discutido ainda [como as 400 horas de Prática entrarão no curso de Licenciatura], dentro do Projeto Institucional... [a proposta] é propiciar para o aluno esses momentos de discussão, de reflexão, desde o início... Em todos os componentes curriculares... Só não sabe muito como fazer ainda..." (Silva, 2003).

Para Silva o maior obstáculo detectado para que essas instruções ainda não fossem implementadas, ou fossem implementadas parcialmente, é a variedade de formações, concepções e idéias presentes nos docentes que fazem parte do grupo que trabalha nas Licenciaturas em Matemática:

> "... nós temos essa limitação ainda quanto à formação desses professores que dão aula de Cálculo, de Geometria, de Álgebra... Então, nessas disciplinas a gente não tem feito, mas a gente retoma, por exemplo, conceitos do Cálculo quando nós vamos fazer essa Prática de Ensino e Metodologia de Ensino para justificar coisas que nós fazemos lá no ensino fundamental e médio." (Silva, 2003).

Por outro lado, uma coordenadora cita como essa diversidade na composição do grupo de professores poderia ser revertida em benefício do curso:

> "... o professor de Matemática, ele vai ter que estar aberto para discutir aspectos da Educação. Mas o pessoal da Educação vai ter que estar aberto para entender as especificidades de Matemática. É mão dupla. Se a Educação tentar centralizar e fechar "essa discussão educação é minha", não vai funcionar. Se o matemático se fechar "eu não discuto educação porque eu sou matemático", também não vai funcionar. Aí não vai sair do papel nunca... infelizmente não vai estar na mão de lei não... vai estar na mão das pessoas, porque aí é predisposição. Eu posso dizer que

> me abro, e a hora que eu fecho a porta da minha sala de aula eu não me abro." (Silva, 2003).

Saberes específicos e saberes pedagógicos na formação continuada de professores de matemática

Provavelmente, influenciados pelas concepções adotadas na formação inicial de professores de Matemática, os projetos de formação continuada muitas vezes reproduzem a dicotomia entre saberes específicos e saberes pedagógicos, com o agravante que na formação continuada, os "alunos" são sempre professores em atuação.

Nos últimos anos temos avançado nas reflexões sobre a articulação entre formação inicial e continuada. Ponte (1998) nos traz a idéia de desenvolvimento profissional, ou seja, a idéia de que a formação do professor para o exercício da sua atividade profissional é um processo que envolve múltiplas etapas e que, em última análise, está sempre incompleto e discute as diferenças entre formação e desenvolvimento profissional do professor. Ele destaca outro importante aspecto, qual seja o de que a formação está muito associada à idéia de "freqüentar" cursos, enquanto que o desenvolvimento profissional ocorre através de múltiplas formas, que incluem cursos mas também atividades como projetos, trocas de experiências, leituras, reflexões, etc. Na formação o movimento é essencialmente de fora para dentro, cabendo ao professor assimilar os conhecimentos e a informação que lhe são transmitidos, enquanto que no desenvolvimento profissional temos um movimento de dentro para fora, cabendo ao professor as decisões fundamentais relativamente às questões que quer considerar, aos projetos que quer empreender e ao modo como os quer executar.

Numa pesquisa em que analisa o desenvolvimento de um projeto de formação continuada de professores de Matemática, Cerqueira (2003) destaca a importância da articulação, integração entre a formação de professores em relação aos conteúdos propriamente acadêmicos e disciplinares e a formação pedagógica dos professores. Avaliando as atividades desenvolvidas ele pontua a importância da preocupação do grupo de formadores em relacionar questões educacionais e pedagógicas mais amplas com as que envolvem o ensino de Matemática. Uma constatação foi a de que tanto os problemas na formação matemática como a formação pedagógica dos professores não lhes permitia avançar, por exemplo, num debate suficientemente profundo para implementação de inovações curriculares na educação Básica e que é preciso um árduo trabalho nessa direção.

Cerqueira destaca que essa formação que não articula conhecimentos matemáticos e conhecimentos práticos também não articula conhecimentos teóricos e práticos. A esse respeito, Cerqueira observa que, de modo geral, os professores mostram-se avessos às discussões de cunho mais teórico e que suas concepções e crenças são muito fortes e interferem a todo momento no processo de formação continuada. A esse respeito, Cerqueira destaca a convicção expressa várias vezes de que o papel do professor é o de transmitir conhecimentos e de que o aluno deve assimilá-los, apresentando alguns depoimentos de professores:

- *Os meus alunos dizem preferir as aulas expositivas convencionais.*
- *Os alunos apresentaram muitas dificuldades de interpretação; por isso fiz a leitura detalhada dos textos.*
- *Nas atividades, foi necessária a minha intervenção na maioria das vezes.*

- *Houve resistência por parte de alguns alunos porque achavam que não estariam aprendendo sem as aulas essencialmente expositivas. Fiquei insegura.*
- *Eu achei pouca quantidade de exercícios de fixação, insuficientes para a compreensão dos alunos.*

Numa investigação que teve como finalidade contribuir para o entendimento de como se dá o processo de incorporação de temas ligados à combinatória, probabilidade e estatística na Educação Básica, Ramos (2005) revela que, de modo geral, os professores que participavam de um programa de formação continuada que abordava esses assuntos, não acham esses conteúdos viáveis para o ensino fundamental e nem mesmo para o ensino médio. Ele conjectura que essa resistência pode ser uma decorrência do fato de que os professores não dominam esses conteúdos. Nas entrevistas feitas pelo pesquisador, os professores declararam não ter estudado esses conteúdos no curso de graduação e também não ter conhecimento do que é proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ministério da Educação para o ensino de combinatória, probabilidade e estatística. Mesmo diante dessas circunstâncias, no curso de formação continuada acompanhado por Ramos, não houve discussões mais consistentes em relação à prática de ensino desses conteúdos em sala de aula e muito pouco tempo foi destinado ao desenvolvimento do assunto, insuficiente para subsidiar a colocação em prática de propostas para o ensino desses conteúdos, possibilitando boas aprendizagens por parte dos alunos.

Uma contribuição interessante se revela no trabalho de Ribeiro (2005), em que é analisado o papel da reflexão sobre a prática, no contexto da formação continuada de professores de Matemática. O pesquisador ocupou-se em observar como formadores consideraram a prática e a reflexão dos professores que participaram como alunos da formação continuada, assim como verificar quais são as sensações dos professores no decorrer desse curso, frente a essa proposta, e se as experiências vividas e as reflexões feitas no decorrer do curso interferiam em experiências posteriores, focando as mudanças na relação professor/aluno/abordagem de conteúdo/sala de aula. Ribeiro refere-se a Ponte (1994) para quem a formação continuada com uma proposta de abordagem reflexiva deve ser perspectivada em torno de situações educativas retiradas do contexto específico da sala de aula, que apesar de serem de caráter prático permitem, no entanto, suscitar a necessidade de reflexão e aprofundamento teórico para compreender e melhorar essa mesma prática, pois “um professor reflexivo vive permanentemente em ciclo, da prática e da teoria à reflexão, para voltar de novo à teoria e à prática”.

Ribeiro (2005) destaca que a comparação entre algumas falas ou atitudes desse professor durante o processo da formação permitiu a ele identificar algumas mudanças significativas entre os dois momentos observados, o que o levou a conjecturar que a orientação prática, juntamente com a acadêmica, que sugeriu as formas de reflexão desse professor sobre sua própria prática e as implicações desse processo reflexivo em sua atuação docente, se mostrou como uma possibilidade de se aprender a arte, a técnica e o ofício do ensino. Os resultados obtidos na análise dos dados coletados apontam para uma possível evidência do valor da investigação sobre sua própria prática como estratégia de formação, permitindo levar o professor a (re)valorizar o seu papel como investigador da sua própria prática, além de apontar o valor da discussão em grupo no processo de formação.

Dentre os comentários de Ribeiro, destacamos aquele em que ele se refere ao fato de que os professores estavam habituados a falar sobre o seu trabalho e a decidir o que fazer, quando o fazer e como fazer, ou seja, a planejar ao nível da ação, mas eles raramente se referiam explicitamente às razões para o fazer ou a justificação.

Algumas conclusões e encaminhamentos

Em nosso grupo de pesquisa, uma reflexão que freqüentemente aparece em nas reuniões é a de que grande parte das pesquisas na área de Educação Matemática -como as que focalizam o ensino e a aprendizagem, o desenvolvimento curricular, o uso de recursos didáticos e tecnológicos, os procedimentos de avaliação, o processo de construção de conhecimentos pelos alunos, a transposição didática, entre outros -têm como finalidade contribuir para a atuação dos professores em sua tarefa educativa, paradoxalmente, muito pouco têm chegado efetivamente aos professores.

Zeichner (1992) é um dos autores que consideram que a maior parte dos professores não procura a pesquisa acadêmica para instruir ou melhorar suas práticas. Ele destaca que, geralmente, o conhecimento gerado por meio da pesquisa educacional acadêmica é apresentado de forma que não leva os professores nela a se engajarem intelectualmente. Seus resultados são apresentados como definitivos, inquestionáveis, ou usados para impor alguma nova idéia a ser seguida pelos professores. Zeichner acredita que talvez, por essas razões, os professores acabam se afastando das pesquisas acadêmicas.

Mesmo na chamada pesquisa-ação embora muitas vezes seja solicitada uma maior participação dos professores, o centro das decisões e a formas de intervenção na realidade ainda eram focalizadas no pesquisador e em suas sugestões para o professor.

Em termos mundiais, a partir da década de 80, porém, pode-se perceber a preocupação com essa temática. Teorias e conceitos são formulados, princípios são definidos. Uma possível justificativa para a explosão de pesquisas centradas no professor pode estar relacionada ao fato de que este profissional passou a ser considerado um ser que reflete, que pensa e que é capaz de construir sua própria prática e não apenas atuar como simples reprodutor de conhecimentos. Assim, passou a ser relevante compreender o que e como pensam e conhecem os professores e, particularmente, como atuam e como se formam.

E nos chegam trabalhos de diferentes partes do mundo, principalmente os assinados por autores como Tardif, Perrenoud, Schön, Nóvoa, Shulman e outros ligados à Educação Matemática, como Ponte, Serrazina, Llinares com resultados de investigações questões do tipo: “o que os professores conhecem?”, “que conhecimento é essencial para o ensino?”, “quem produz conhecimento sobre o ensino?”.

No Brasil, há também um crescimento nas pesquisas sobre formação de professores, incluindo as de natureza mais geral e as desenvolvidas por áreas específicas, evidenciando uma descoberta importante: a de que a formação deve constituir um objeto fundamental de investigação no terreno educativo. Grupos de pesquisas se organizam e nos congressos já têm lugar assegurado.

Apesar de todo o avanço nessa direção, é possível avaliar que tanto no âmbito das instituições de pesquisa como no das instituições formadoras ainda não se dá a importância devida ao estudo dos processos de formação e de desenvolvimento profissional dos professores. E no que se refere aos professores, pode-se conjecturar que nem sempre as pesquisas sobre eles são devolvidas a eles, até pelo fato de que em muitas delas há muitas críticas à atuação do professor.

Nos últimos anos temos visto o surgimento de pesquisas cooperativas e colaborativas. Para Boavida e Ponte (2002), a colaboração constitui uma estratégia fundamental para lidar com problemas que se afiguram demasiado pesados para serem enfrentados individualmente. Também ressalta que para a investigação sobre a prática, a colaboração oferece importantes vantagens, que a tornam num valioso recurso. Algumas razões para que isso se verifique residem no fato de que juntando diversas pessoas que se empenham num objetivo comum, reúnem-se, só por si, mais energias do que as que possuem uma única pessoa, fortalecendo-se, assim, a determinação em agir; juntando diversas pessoas com experiências, competências e perspectivas diversificadas, reúnem-se mais recursos para concretizar, com êxito, um dado trabalho, havendo, deste modo, um acréscimo de segurança para promover mudanças e iniciar inovações; juntando diversas pessoas que interagem, dialogam e refletem em conjunto, criam-se sinergias que possibilitam uma capacidade de reflexão acrescida e um aumento das possibilidades de aprendizagem mútua, permitindo, assim, ir muito mais longe e criando melhores condições para enfrentar, com êxito, as incertezas e obstáculos que surgem.

Por sua vez, Zeichner acredita na pesquisa colaborativa, na qual professores e pesquisadores das universidades trabalham em parceria, não com uma igualdade absoluta pois cada qual tem seus conhecimentos específicos para a colaboração, mas com paridade no relacionamento, com respeito ao conhecimento do outro e à contribuição que cada um pode dar. Ele avalia que a pesquisa colaborativa vai fazer com que a divisão entre professores e pesquisadores acadêmicos possa ser enfrentada. Enfatiza que é preciso julgar trabalhos com critérios e que há bons e maus trabalhos tanto de professores como de pesquisadores acadêmicos.

O autor conclui que é possível ultrapassar a linha divisória entre os professores e os pesquisadores acadêmicos de três modos: a) comprometendo-nos com os professores em realizar ampla discussão sobre o significado e a relevância da pesquisa que conduzimos, b) empenhando-nos com processos de pesquisa que permitam desenvolver uma colaboração genuína com os professores, rompendo com os velhos padrões de dominação acadêmica, c) dando suporte às investigações feita por professores, ou aos projetos de pesquisa-ação e, acolhendo seriamente os resultados desses trabalhos como conhecimentos produzidos.

Afirma ainda que é necessário que sejam alteradas estruturas das instituições formadoras para que professores acadêmicos possam dedicar-se às escolas do ensino básico. Em muitas universidades quanto mais próxima do professor da educação básica estiver a pesquisa, mais baixo é seu “status” e menor sua chance de se obter financiamento.

Para Zeichner (1993), os professores estão sempre a teorizar, à medida que são confrontados com os vários problemas pedagógicos tais como a diferença entre as suas expectativas e os resultados. A teoria pessoal de um professor sobre a razão por que uma lição de leitura correu pior ou melhor do que esperado, é tanto teoria como as teorias geradas nas universidades sobre o ensino de leitura: ambas precisam ser avaliadas quanto à sua qualidade, mas ambas são teorias sobre a realização de objetivos educacionais. Anderson e Herr (1999), analisando a natureza e a especificidade das pesquisas realizadas por "práticos", indicam que elas fazem do prático um estranho para os pesquisadores que trabalham sob a égide de paradigmas acadêmicos de pesquisa. Cochran- Smith & Lytle (1999) destacam que na maioria dos estudos, os professores são objetos das investigações dos pesquisadores e espera-se que sejam consumidores e implementadores desses resultados. O que está faltando são as vozes dos próprios professores, as questões que eles colocam, os quadros referenciais interpretativos que eles usam para compreender e melhorar sua própria prática de sala de aula. Zeichner & Noffke (2001), ao analisarem pesquisas publicadas por "práticos" consideram que o conhecimento gerado por meio da dessas pesquisas não nos dispensa da questão da validade e da confiabilidade e apresentam critérios de avaliação para elas. Assim, consideramos que, os grupos que se dedicam a investigar a formação de professores não podem deixar essa perspectiva fora do foco de suas atenções.

Bibliografía

Anderson, G. L.; Herr, K. (1999). *The New paradigm wars: is there room for rigorous practitioner knowledge in schools and universities?* Educacional Researcher, v.28, n.5, 12-21.

Boavida, Ana Maria e Ponte, João Pedro da *Investigação colaborativa: Potencialidades e Problemas. Em Reflectir e Investigar sobre a prática profissional.* GTI – Grupo de Trabalho de investigação (organização). Edição da Associação de Professores de Matemática. Portugal: 2002.

Cerqueira, Dermeval Santos. Implementação de inovações curriculares no Ensino Médio e formação continuada de professores de Matemática: as lições de uma experiência. Dissertação de Mestrado Acadêmico. Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática. PUC/SP. 2003.

Cochran-Smith, M; Lytle, S. L. (1999). The Teacher research movement: a decade later. *Educacional Researcher*, v.28, n.7. 15-25.

Curi, E. (2002). *Formação de professores de Matemática*: *realidade presente e perspectivas futuras*. Lisboa: APM.

Elbaz, F. (1983) *Teacher thinking*: a study of practical knowledge. Londres: Croom Helm.

Marcelo García, C. (1998). *Formação de Professores para uma mudança educativa*. Portugal: Porto.

Pires, C. M. Carolino. (2002). Formação inicial e continuada de professores - uma síntese das Diretrizes e dos desafios a serem enfrentados. Formação de professores: Vol. 1. 2001. Brasília: MEC.SEF.

________________. (2003). Formação Inicial e Continuada de Professores de Matemática: possibilidades de mudança. Anais do XV Encontro Regional de Educação Matemática. UNISINOS. Porto Alegre. RS.

________________. (2002). Reflexões sobre os cursos de Licenciatura em Matemática, tomando como referencia as orientações propostas nas Diretrizes

Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica. Revista Educação Matemática em Revista. SBEM.

Ponte, J. P. Concepções dos professores de matemática e processos de formação. *Educação Matemática*: temas de investigação. Lisboa: IIE, 1992. p. 185-239. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/>. Acesso em: 5 jun. 2003.

———. O desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Educação e Matemática*, Lisboa: APM, n. 31, p. 9-12, 1994. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/>. Acesso em: 15 jun. 2003

Ribeiro, R. M. (2005). Formação de professores de Matemática: abordagem reflexiva sobre a prática, num contexto de formação continuada, focalizando funções polinomiais do primeiro grau. Dissertação de Mestrado Acadêmico. Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática. PUC/SP.

Ramos dos Santos, C. O (2005). Tratamento da informação nos ensinos fundamental e médio: currículos prescritos, formação de professores e implementação na sala de aula. Dissertação de Mestrado Profissional. Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática. PUC/SP.

Santos, R. C. (2004). Os saberes matemáticos enfatizados nos cursos de Licenciatura. Dissertação de Mestrado Acadêmico. Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática. PUC/SP.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Research, n. 15 (2), 4-14.

———. (1987). Knowledge and teaching: foundation of the new reform. Harvard Educational Review, n. 57 (1), 1-22.

———. (1992). Renewing the pedagogy of teacher education: the impact of subject-specific conceptions of teaching. In: Mesa, L.; Montero; J.; Vaz, J. *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Santiago de Compostela; Tórculo.

Silva, M. A. (2004). *A atual legislação educacional brasileira para formação de professores: origens, influências e implicações nos cursos de licenciatura em Matemática*. Dissertação de Mestrado Acadêmico. Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática. PUC/SP.

Zeichner, K. (1992). *Novos caminhos para o praticum: uma perspectiva para os anos 90*, in Nóvoa, A (coord). Os professores e sua formação. Lisboa: Dom Quixote.

Zeichner, K.; Noffke, S. Practitioner research. In: Richardson, V. (org.) Handbook of research on teaching. 4.ed. Washington, D. C.: Aera, 2001, p.298-330.

Célia Maria Carolino Pires. Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da PUC/SP . San Pablo, Brasil. **celia@pucsp.br**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 43-61
ISSN: 1815-0640

Clasificación de problemas verbales de álgebra elemental a partir de su resolución mediante un modelo geométrico-lineal

María Victoria Martínez Videla; Francisco Fernández García; Pablo Flores Martínez

Resumen

En el siguiente artículo presentamos los resultados de un estudio exploratorio descriptivo sobre la resolución gráfica de problemas de álgebra elemental. El estudio plantea la caracterización de un modelo de resolución gráfico, que hemos denominado modelo geométrico – lineal, y una clasificación de los problemas presentes en libros de texto a partir de su resolución utilizando dicho modelo.

Abstract

In the following article we show the results of a descriptive exploratory study on the elementary algebra problem solving by a graphic method. The study raises the characterization of a graphical model of resolution, that we have denominated geometrical – linear model, and a classification of the text book´s problems from its resolution using this model.

Resumo

No seguinte artigo apresentamos os resultados de um estudo exploratorio descritivo sobre a resolução gráfica de problemas de álgebra elementar. O estudo propõe a caracterização de um modelo de resolução gráfico, chamado modelo geométrico – lineal, e uma classificação dos problemas presentes em livros de texto a partir de sua resolução utilizando dito modelo.

1. Planteamiento del Problema

El estudio de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar ha sido un tema de amplio debate en Didáctica de la Matemática. Diversos autores han desarrollado investigaciones en torno a este tema abordando distintos aspectos. Es así como se han desarrollado ciertos núcleos temáticos, que han ido evolucionando como temas de interés en los últimos 30 años. Kieran (2006) describe de qué manera el estudio de temáticas como la transición de la aritmética al álgebra, las variables y las incógnitas, las ecuaciones y su resolución y la resolución de problemas de enunciado han sido y siguen siendo importantes núcleos de investigación. Dichos núcleos de investigación se han ido enriqueciendo al incluir otros elementos como el uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, las múltiples representaciones y el papel que desempeña la generalización en el aprendizaje de ciertos conceptos. Además, los últimos quince años, se han sumado a las temáticas anteriores el trabajo en torno al desarrollo del pensamiento algebraico desde la primaria, el álgebra del profesor y la modelización dinámica de situaciones físicas (Kieran, 2006; 2007).

Inmersos en la línea de investigación que tiene por objeto el estudio de la resolución de problemas aritméticos - algebraicos, en este trabajo hemos pretendido caracterizar una herramienta gráfica que permita resolver problemas de enunciado, entendiendo que el uso de diversas representaciones puede facilitar e enriquecer la comprensión de ciertos conceptos e incluso de algunos procedimientos algebraicos (Duval, 1999; Diezman y English, 2001; Gagatsis y Elia, 2004).

La problemática que presentamos, además de guardar relación con la líneas de investigación que se han desarrollado en la didáctica del álgebra, responde a ciertas demandas curriculares actuales, como por ejemplo las realizadas por el NCTM (2000) a través de Los Principios y Estándares para la Educación Matemática, así como el estudio PISA de la OCDE (2004).

En particular, Los Principios y Estándares para la Educación Matemática definen en el Estándar Álgebra, que ésta "*se centra en las relaciones entre cantidades, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio*" (NCTM, 2000, p.39). Además, especifica que, aún cuando muchos equiparan el álgebra escolar con la manipulación de símbolos, es importante que los alumnos comprendan sus conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de símbolos y cómo se pueden utilizar para registrar ideas y comprender situaciones.

Ahora bien, lo descrito en los Estándares respecto de lo que debe ser el álgebra escolar no concuerda exactamente con la visión más frecuente que se suele tener de lo que es, o ha sido hasta ahora, el álgebra en la escuela. En efecto, Kaput (2000) plantea que la imagen tradicional del álgebra se reduce a la simplificación de expresiones algebraicas, la resolución de ecuaciones y el aprendizaje de reglas de manipulación de símbolos, y ha sido enseñada y aprendida como un conjunto de procedimientos desconectado del resto del conocimiento matemático y del mundo real.

Reducir el álgebra a la manipulación simbólica conlleva que tenga muy poca relevancia en la vida cotidiana, cosa que se contrapone con la importancia de que todos los estudiantes tengan una oportunidad efectiva de aprender álgebra, pues sin ella se pierden opciones de ejercer muchas ocupaciones en el ámbito profesional, ya sea bien porque el álgebra es necesaria para llevarlas a cabo, bien porque es necesaria una cualificación previa. Debido a esto, el álgebra es considerada como una puerta para las matemáticas superiores y como el lenguaje científico por excelencia (Kaput, 2000).

Actualmente hay interés por el desarrollo de competencias, siendo éste un importante propósito en Educación Matemática. La prueba PISA que realizó la OECD (2004) se propuso como objetivo determinar las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar matemáticamente y, con dicho fin, ha identificado ocho competencias matemáticas características que permitirían que un sujeto matematice, es decir, que realice y trabaje con tareas matemáticas. Dichas competencias son: pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones y usar herramientas y recursos.

La prueba considera las habilidades de representación como uno de los factores en los que se sustenta el grado de dificultad de un problema, destacando que se abarcan *"desde los problemas en los que solo se emplea una clase de representación hasta aquellos otros en los que los alumnos deben alternar entre distintos modos de representación o hallar por sí mismos el modo de representación más adecuado"* (OCDE, 2006, p. 118).

Queda de manifiesto la necesidad de desarrollar herramientas que favorezcan que la enseñanza y el aprendizaje del álgebra esté basada en la comprensión, mediante la utilización que diversos tipos de representación, que permitan dotar de sentido tanto los conceptos algebraicos, como el lenguaje alfabético-simbólico y los procedimientos dentro de dicho lenguaje, colaborando con el desarrollo de competencias matemáticas específicas como las mencionadas anteriormente.

Kieran (2006) describe que dentro del grupo PME las representaciones gráficas en la década de los 90 comienzan a ser vistas como herramientas para introducir las representaciones simbólicas con significado y, como consecuencia, surge la problemática de la comprensión de las conexiones entre ecuaciones y gráficos, considerado como fundamental para desarrollar el significado de varias representaciones algebraicas.

Basándonos en los planteamientos ya descritos, en el presente trabajo hemos realizado un análisis de los problemas de álgebra elemental que se trabajan en los primeros cursos de educación secundaria y hemos procedido a su resolución a través de un método de resolución gráfico.

Por lo tanto, como elementos para la reflexión, hemos trabajado en dos áreas de referencia: la resolución de problemas (RP) y los sistemas de representación (SR). La RP juega un doble papel en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2000): por una parte, el desarrollo histórico de la matemática muestra que la evolución de los conceptos se debe a la resolución de algún problema determinado y, por otra, se utiliza como metodología de enseñanza, tanto en términos de la instrucción como de la evaluación.

En cuanto a los SR, encontramos en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, dentro del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico (FQM 193 del PAI de la Junta de Andalucía), que se han desarrollado dos tesis doctorales (Fernández, 1997; Espinosa, 2004) relacionadas con la RP de álgebra elemental. En ellas el trabajo se centra en caracterizar tipologías de resolutores de problemas de álgebra, en base a los SR que los estudiantes utilizan.

Un elemento que llamó nuestra la atención de los resultados obtenidos en los estudios de Fernández (1997) y Espinosa (2004) es que, dentro de los SR que emplean los estudiantes para resolver problemas, el menos utilizado es el que se basa en la utilización de gráficos o dibujos. Dicha situación se contrapone con el planteamiento de diversos autores que han resaltado la utilidad del uso de gráficas e imágenes visuales en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos (Rico, 1997; Duval, 1999; NCTM, 2000; Goldin y Shteingold, 2001; Diezman y English, 2001; Gagatsis y Elia, 2004).

Por otra parte, aún cuando en los estudios de Fernández (1997) y Espinosa (2004) el SR que definen como gráfico fue el menos utilizado, éste surge de manera espontánea (no forzada) por parte de los estudiantes, lo que nos llevó a plantearnos el siguiente interrogante:

"*¿Por qué al enfrentar problemas algebraicos no se utiliza el sistema de representación gráfico con mayor frecuencia?*"

Considerando el carácter amplio de la pregunta, nos planteamos si era posible la utilización, de forma general para la RP algebraicos escolares, de un modelo gráfico particular, que vamos a denominar modelo geométrico – lineal (MGL), y que se caracteriza por la utilización de segmentos de una recta para representar y establecer las relaciones entre los datos y las incógnitas de los problemas, como describiremos más adelante. Nos planteamos la RP a través de la utilización de este modelo como una alternativa que puede permitir una mejor y más significativa comprensión del proceso de resolución de un problema verbal.

Centrando la investigación en determinar la utilidad y funcionalidad del modelo escogido nos plateamos los siguientes objetivos generales de investigación:

- Determinar si todos los problemas algébricos presentes en los libros de texto de matemáticas de educación secundaria se pueden resolver utilizando el MGL.
- Determinar y caracterizar tipologías de problemas de álgebra elemental, a partir de las posibles resoluciones basadas en el uso del MGL.

2. Referencias Teóricas

2.1 Sistemas de representación

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se utilizan diferentes SR para poder trabajar con conceptos de naturaleza abstracta. Como plantea Rico (1997), las representaciones que permiten trabajar en un sistema conceptual y los modelos asociados a determinados conceptos, deben considerarse pilares fundamentales en el momento de organizar la enseñanza.

Para efectos de nuestro trabajo vamos a aclarar los términos representación y modelo. Cuando hablamos de representación nos centramos en las representaciones externas que se expresan mediante el uso de papel y lápiz, entendiéndolas en el sentido de Castro y Castro (1997) como: *"notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como su características y propiedades más relevantes"* (pp. 96).

Además, como definición de SR adoptamos la utilizada por Fernández (1997): *"es un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de reglas y convenios, que permite expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto"* (p. 73).

Como plantean algunos autores como Rojano (1996), en términos generales, los SR a los que nos referimos se pueden clasificar en tres grupos: los numéricos, los gráficos y los simbólicos. Fernández (1997) propone una clasificación más detallada de los SR para la RP algebraicos específicamente, compuesta por cinco categorías posibles, que caracterizan tipologías de resolutores. Debido a la riqueza de posibilidades del sistema numérico propone dos tipos de SR numéricos diferenciados: ensayo – error y parte – todo. Por otra parte entre el SR gráfico y simbólico agrega un “híbrido”, considerando que tiene identidad propia como para destacarlo como diferente, al que denomina SR gráfico – simbólico, con el que completa cinco SR.

Nuestro trabajo se sitúa en la utilización del sistema de representación gráfico, considerando a éste como el que utiliza un código gráfico para plantear las relaciones entre datos e incógnitas y en donde las operaciones numéricas se efectúan a partir de las relaciones establecidas en el gráfico (Fernández, 1997).

En nuestro trabajo abordamos el estudio de uno de los posibles modelos para resolver problemas algebraicos dentro del SR gráfico, considerando que un modelo es *“una esquematización abstracta de la realidad, entendiendo que esta realidad puede pertenecer al mundo de los fenómenos o al de los conceptos”* (Castro y Castro, 1997, pp. 106). En este sentido el modelo, que describiremos más adelante, llega a ser una “esquematización abstracta de la realidad” entendiendo que la realidad, en este caso, es la descrita por el enunciado del problema y el modelo representa de forma esquemática esa realidad.

2.2 Resolución de problemas

La RP ha ocupado un espacio importante en las investigaciones que se realizan en el campo de la Didáctica de la Matemática, debido a que se ha considerado como un eje esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a todos los niveles.

Dentro del estándar RP definido en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000), se expresa que la RP no sólo constituye un objetivo del aprendizaje de la matemática, sino que también es una metodología para alcanzarlo. Además, se menciona que ser un buen resolutor de problemas proporciona grandes beneficios en la vida diaria y en el trabajo y que la RP debería utilizarse para ayudar a los estudiantes a desarrollar con fluidez destrezas específicas a la hora de abordar sus problemas cotidianos.

Según Puig (1996), en un comienzo el interés en el estudio de la RP estuvo basado en teorías conductistas y, por tanto, centrado en el producto de las actividades de los resolutores y en cómo era posible enseñar métodos efectivos para solucionar problemas. Sin embargo, a partir de que las investigaciones, se realizaron desde una perspectiva más psicológica, se cambió de foco centrando el interés en el proceso de resolución y en el sujeto que resuelve.

Con el fin de estudiar qué utilización se hace del MGL en la RP se hace necesario realizar un análisis del proceso de resolución, para lo cuál utilizamos las fases descritas por Mayer (1986) y utilizadas por Fernández (1997) y Espinosa (2004) que son:

- Planteamiento: fase en la que se traduce a un lenguaje matemático el texto del problema mediante un sistema de representación, que permite establecer las relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos.
- Ejecución: es el desarrollo de las relaciones establecidas en el planteamiento.
- Desempeño final: explicitación de el/los resultados pedidos en el texto del problema.

2.3 Modelo geométrico - lineal

Como planteamos inicialmente, nuestro trabajo se centró en el estudio de uno de los posibles modelos para resolver problemas algebraicos dentro del SR gráfico, dicho modelo es el que hemos llamado MGL.

El modelo en cuestión se basa en la utilización de segmentos lineales para representar las cantidades de magnitudes (tanto conocidas como desconocidas) y sus relaciones. Este modelo tiene la ventaja de: permitir representar variables discretas y continuas, ser de fácil manipulación, además de ser muy utilizado en problemas de otras áreas como la física. Es sabido también, que el modelo concebido como conjunto de segmentos lineales orientados tiene una estructura matemática de espacio vectorial.

Enmarcado en el SR gráfico, y tomando en cuenta el fundamento de dicho modelo, definimos el MGL en los siguientes términos:

> *Consideraremos que se utiliza este modelo cuando se establecen las relaciones lineales entre los datos y las incógnitas, contenidas en el enunciado del problema, a través de segmentos de recta, en donde las incógnitas están representadas por trazos o partes de esos segmentos. La resolución del problema, por lo tanto, implica determinar el largo de dicho trazo o, en otros casos, establecer el número de trazos que cumplen las condiciones del problema.*

A continuación adjuntamos la resolución en MGL que realizaron dos alumnos sobre problemas escolares:

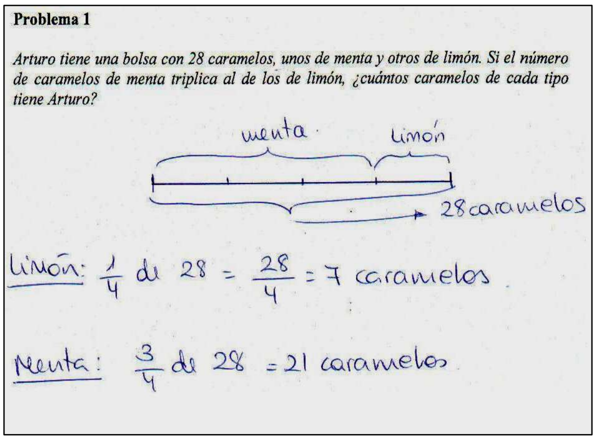


Figura 1

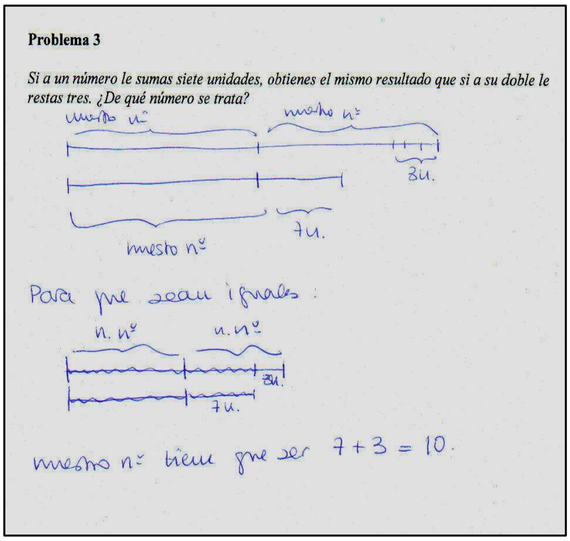


Figura 2

En ambos casos se resuelven los problemas haciendo uso de una gráfica lineal en la que se representan las cantidades involucradas.

El primer problema (Fig. 1), sobre un segmento lineal se establece la relación entre la cantidad de caramelos de menta y la cantidad de los caramelos de limón descrita en el enunciado. En este caso, se conoce el largo total de un segmento y se pretende determinar el largo de las partes contenidas en él.

En el segundo problema (Fig. 2) se han planteado dos segmentos y se determina el largo del segmento desconocido comparando ambos.

3. Metodología

El planteamiento inicial de nuestro trabajo abordaba un campo muy amplio. En este artículo describimos una primera fase que hemos definido como un estudio exploratorio-descriptivo.

Con el fin de establecer una clasificación inicial de los problemas de álgebra escolar se desarrollaron dos etapas:

- Clasificación teórica de los problemas presentes en libros de texto de secundaria
- Elaboración y aplicación de una encuesta sobre el uso del MGL para la RP

El objetivo de la primera etapa fue poner a prueba el uso del MGL, con el fin de proponer una primera categorización del los problemas a partir de la resolución utilizando el modelo. Con la segunda etapa se pretendió elaborar un instrumento que permitiera corroborar las categorías propuestas como resultado de la primera etapa.

3.1 Primera etapa: Clasificación teórica

Se revisaron problemas de álgebra elemental contenidos en textos escolares habituales en el mercado editorial, utilizados normalmente por los profesores y estudiantes de educación secundaria. Se escogieron 4 libros, dos de 1º de ESO y dos de 2º de ESO de ediciones recientes y que se han utilizado en los centros de secundaria. Los textos seleccionados fueron:

- Cólera, J. y Gaztelu, I. (2004). Matemática 1. España: Anaya.
- Cólera, J. y Gaztelu, I. (2003). Matemática 2. España: Anaya.
- Sánchez, J. y Vera, J. (2002a). Matemática 1. España: Oxford.
- Sánchez, J. y Vera, J. (2002b). Matemática 2. España: Oxford.

En ellos se analizaron los problemas de las unidades referidas a álgebra y ecuaciones, se resolvieron dichos problemas utilizando el MGL, lo que permitió identificar ciertas regularidades que dieron origen a una clasificación teórica de los problemas atendiendo a la tipología de su resolución.

3.2 Segunda etapa: Aplicación de una encuesta

Con el fin de averiguar de qué manera un grupo de individuos resuelven problemas utilizando el MGL, se tomaron en cuenta las fases para la RP definidas anteriormente. Los resultados tuvieron en cuenta la utilización, o no, del MGL en las fases de planteamiento y ejecución de los problemas dado que en la fase de desempeño final no procede. Además, en las tres fases (planteamiento, ejecución y desempeño final) se estudió si se realizaron correctamente.

3.3 Encuesta

Para elaborar la encuesta se escogió una muestra de los problemas presentes en los textos escolares, siguiendo los pasos que se describen a continuación:

- Búsqueda de problemas, de los analizados en la primera etapa, que implican resolución algebraica de ecuaciones de primer grado con una incógnita y de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- De acuerdo con la clasificación teórica obtenida en la 1ª etapa, se escogieron los problemas atendiendo a dos características: 1) el número de relaciones gráficas lineales necesarias para resolver el problema (una / más de una); 2) el tipo de números presentes en el enunciado (naturales o decimales).

Tomando en cuenta ambas características y sus combinaciones, se obtienen 4 clases de problemas, como se observa en la siguiente tabla:

	Número de relaciones necesarias	
Tipo de número	Una relación (1)	Más de una relación (2)
Números naturales (1)	(1 , 1)	(1 , 2)
Números decimales (2)	(2 , 1)	(2 , 2)

Tabla 1

A continuación elaboramos una encuesta, basada en tareas de lápiz y papel, formada por una selección de 5 problemas: uno de cada clase más un quinto problema de la clase (1,1), que jugó el papel de réplica, con el fin de verificar los resultados estadísticos.

Los problemas se organizaron en orden creciente de dificultad, de la siguiente manera:

- Problema 1: clase (1 , 1)
- Problema 2: clase (2 , 1)
- Problema 3: clase (1 , 2)
- Problema 4: clase (1 , 1), réplica
- Problema 5: clase (2 , 2)

3.4 Aplicación

Dado que quienes tienen una buena formación matemática tienden a resolver los problemas utilizando el SR simbólico (ecuaciones), y no están habituados a utilizar otros SR, según se puso de manifiesto en la tesis de Fernández (1997), se consideró pertinente elegir un conjunto de individuos que tuvieran una formación matemática avanzada a los que aplicar el instrumento en cuestión. Esto permitiría comprobar si los problemas propuestos se pueden resolver utilizando el MGL por estudiantes no habituados.

En consecuencia, se eligió a un grupo de individuos homogéneo, constituido por 19 estudiantes que cursaron la asignatura “Didáctica de la Matemática” correspondiente al CAP (Certificado de Aptitud Pedagógico) de la Universidad de Granada, durante al curso 2005 – 2006, todos ellos con una formación sólida en matemáticas superiores (17 licenciados en matemática, 1 licenciado en estadística y 1 ingeniero en telecomunicaciones).

4. Análisis de datos y resultados

Durante la investigación se realizaron dos análisis, uno en cada una de las etapas descritas. Como resultado de la 1ª etapa se obtuvo una clasificación que hemos denominado clasificación teórica de los problemas y, a partir de la 2ª etapa, hemos obtenido una segunda clasificación de los problemas que llamamos empírica, producto del análisis estadístico de los datos obtenidos al aplicar el instrumento de los problemas a los individuos descritos.

4.1 Clasificación teórica

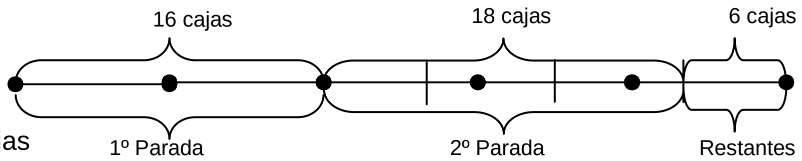
Al resolver los problemas utilizando el MGL, se observó que podemos distinguirlos según el número de relaciones gráficas lineales necesarias para representarlos en la fase de planteamiento, por lo que se ha decido utilizar esta característica como criterio de clasificación.

Entendemos por relación gráfica lineal (RGL): *un segmento de recta sobre el que se representan diversas cantidades de una magnitud (conocidas y desconocidas) y la dependencia entre ellas a partir de las condiciones descritas por el enunciado del problema.* El número de RGL está dado por la cantidad de segmentos de recta que es necesario trazar para representar el problema y manipular dichas magnitudes.

Categoría Nº 1: Está constituida por problemas en que se describen las cantidades como partes de un total o se comparan utilizando la adición y sustracción. En esta categoría encontramos problemas con una o dos incógnitas. Sin embargo, en ambos casos basta con representar los datos y relaciones dadas por el enunciado en una sola RGL.

<u>Ejemplo 1</u>:

Un repartidor de frutas llena su furgoneta con varias cajas de tomates. En su primera parada deja los $\frac{2}{5}$ de su carga, y en la segunda y ultima, los $\frac{3}{4}$ de las cajas restantes. Si al final le quedan 6 cajas sin repartir, ¿cuántas cargó?

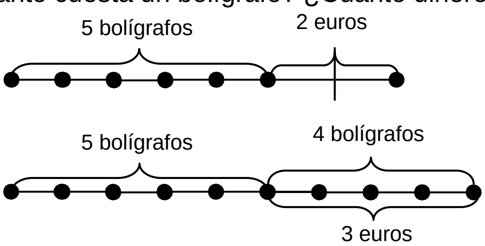


Respuesta: cargó 40 cajas

Categoría Nº 2: Compuesta por problemas en que es necesario plantear dos RGL, ambas dadas directamente por el enunciado que las plantea como una "igualdad". Para determinar la longitud del segmento es preciso comparar ambas RGL.

<u>Ejemplo 2</u>:

Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubiera necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado un euro. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo?



3 : 4 = 0,75

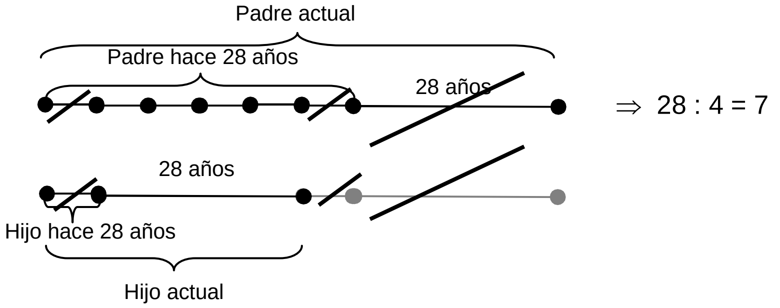
Respuesta: cada bolígrafo cuesta 0,75 euros y llevo 5,75 euros

Categoría Nº 3: Problemas que se caracterizan por utilizar más de dos RGL. En algunas ocasiones se platean dos relaciones iniciales y, posteriormente, requieren la elaboración de nuevas RGL a partir de ellas. En otras ocasiones se plantean directamente tres o más relaciones dadas por el enunciado.

En estos problemas hay que determinar la longitud de dos segmentos, ya que son problemas en que hay dos incógnitas involucradas.

Ejemplo 3:

Hace 28 años, la edad de un padre era 6 veces la de un hijo, pero hoy en día es solamente el doble. ¿Cuál es la edad actual de ambos?



Respuesta:
Edad del hijo: 28 + 7 = 35 años
Edad del padre: 28 + 7.6 = 70 años

4.2 Clasificación a partir de la encuesta. Análisis estadístico.

La encuesta se aplicó en una sesión de 90 minutos. Se les pidió explícitamente a los estudiantes que utilizaran el MGL en la resolución de los problemas propuestos, para lo cuál se comenzó leyendo una serie de instrucciones en este sentido y se comentó el ejemplo que aparece en el primer folio de la encuesta (Anexo).

Para el análisis estadístico de la información obtenida con la aplicación del instrumento, se realizó una codificación numérica de los datos a partir de las variables definidas inicialmente, y después se llevó a cabo un análisis de frecuencias simples y análisis clúster, como se describe a continuación.

4.2.1 Utilización MGL en las fases de planteamiento y ejecución

En la siguiente tabla se muestra el porcentaje de utilización de MGL, para cada problema, en las fases de planeamiento y ejecución:

	Fase					
	Planteamiento			Ejecución		
Problema	% no existe información	% utilizó otro modelo	% utilizó MGL	% no existe información	% utilizó otro modelo	% utilizó MGL
1	0	0	100	0	84,2	15,8
2	0	10,5	89,5	0	42,1	57,9
3	0	5,3	94,7	5,3	31,6	63,2
4	0	15,8	84,2	0	73,7	26,3
5	10,5	0	89,5	21,1	26,3	52,6

Tabla 2

A partir de la tabla anterior podemos precisar que:

- La gran mayoría de los sujetos fue capaz de utilizar el MGL en la fase de planteamiento, por encima del 84% en todos los casos.
- En la fase de ejecución de los problemas 1 y 4, una amplia mayoría de los sujetos (sobre el 70%) no utiliza el MGL.
- En la misma fase de ejecución, en los problemas restantes (2, 3 y 5), la mayoría de los sujetos fue capaz de utilizar el MGL, aunque el dato no supera el 65%.

4.2.2. Corrección en la utilización del modelo en las fases de planteamiento y ejecución

En la siguiente tabla se recoge el porcentaje de sujetos que utilizaron el MGL de manera correcta y el porcentaje que lo hizo incorrectamente en las fases de planteamiento y ejecución de cada problema:

	Fase			
	Planteamiento		Ejecución	
Problema	% uso incorrecto	% uso correcto	% uso incorrecto	% uso correcto
1	10,5	89,5	0	100
2	0	100	0	100
3	16,7	83,3	25	75
4	6,3	93,7	20	80
5	17,7	82,3	50	50

Tabla 3

A partir de la tabla podemos concluir que:

- En la fase de planteamiento, en todos los problemas se utiliza correctamente el MGL (superior al 80%). Además, en la misma fase los problemas 3 y 5 son los que muestran mayor porcentaje de utilización incorrecta del MGL.
- En la fase de ejecución, para problemas 1 y 2 utilizan de manera correcta el modelo en el 100% de los casos y en los problemas 3 y 4 con un alto porcentaje de corrección, 75% y 80% respectivamente.
- El problema 5, en la fase de ejecución, es el que registra mayor porcentaje de uso incorrecto del MGL, llegando dicho porcentaje a un 50%.

4.2.3 Relación entre los valores correctos de las tres fases

La Tabla 4 contiene el porcentaje de respuestas correctas correspondientes a cada etapa: planteamiento, ejecución y desempeño final empleando cualquier SR:

	Fase		
Problema	% Planteamiento Correcto	% Ejecución Correcta	% Desempeño Final Correcto
1	89,5	94,7	89,5
2	100	100	94,7
3	84,2	78,9	89,5
4	89,5	89,5	84,2
5	73,7	26,3	26,3

Tabla 4

- En la fase de planteamiento, todos los problemas son abordados correctamente por un alto porcentaje de individuos (más del 73%), siendo el problema 5 el que presenta menor porcentaje de corrección en dicha etapa.
- En las fases de ejecución y desempeño final, los problemas 1, 2, 3 y 4 se desarrollan correctamente por una gran mayoría de los individuos.
- El problema 5 es ejecutado correctamente por muy pocos individuos (26,3 %) en comparación con el resto de los problemas. Lo mismo sucede en la fase de desempeño final.

4.2.4 Clúster por fases de resolución

Uno de los objetivos planteados para este trabajo consiste en determinar y caracterizar tipologías de problemas de álgebra elemental a partir de la utilización del MGL, para lo cuál hemos utilizado un análisis clúster que, como plantea Salvador Figueras (2001), es una técnica eminentemente exploratoria puesto que la mayoría de las veces no utiliza ningún tipo de modelo estadístico para llevar a cabo el proceso de clasificación. Agrega que es una técnica muy adecuada para extraer información de un conjunto de datos sin imponer restricciones previas en forma de modelos estadísticos.

En nuestro caso, realizamos un análisis de clúster en las distintas fases de la RP, es decir, se realizó uno para la etapa de planteamiento y otro para la de ejecución en las que se consideró el uso o no del MGL y la corrección de la etapa y un tercer clúster para la etapa de desempeño final en la que se consideró sólo la corrección ya que el uso del modelo no procede. Para el análisis se utilizó el paquete estadístico SPSS.

Clúster según planteamiento

Como se puede apreciar en el siguiente gráfico, en la fase de planteamiento, se formaron tres clúster significativos que se describen a continuación:

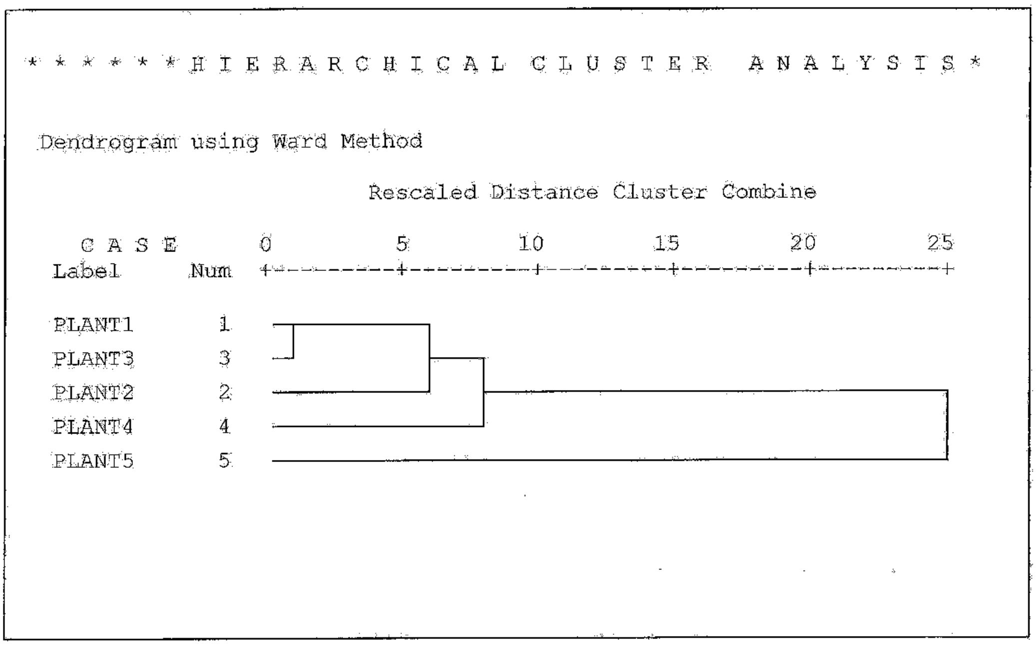


Gráfico 1

Clúster 1. En él se encuentran los problemas 1, 2 y 3, que se caracterizan por ser aquellos problemas en los que se utiliza con mayor frecuencia el MGL y, además, se utiliza correctamente.

Clúster 2. Este clúster está conformado por el problema 4. Este problema se caracteriza porque un alto porcentaje utiliza el MGL para su planteamiento. Sin embargo, se observa que hay un porcentaje significativo de sujetos, aproximadamente un 15%, que utiliza un modelo alternativo.

Clúster 3. Sólo el problema 5 pertenece este clúster, caracterizándose por ser el problema en el que menos se utiliza el MGL, y por ser el único problema que no es abordado por algunos sujetos (10,5%).

Clúster según ejecución

En la fase de ejecución se formaron tres clúster, como se puede observar en el siguiente gráfico:

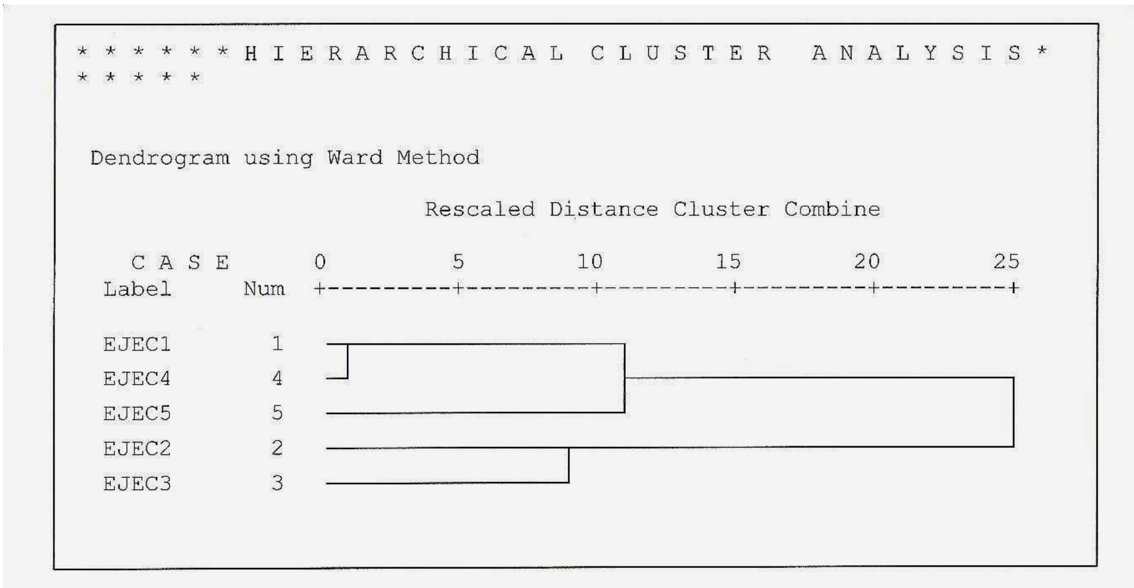


Gráfico 2

Clúster 1. A este clúster pertenecen los problemas 1 y 4, que se caracterizan por tener el menor porcentaje de utilización del MGL y la menor utilización correcta del mismo en la fase de ejecución. La gran mayoría de los sujetos supera la etapa exitosamente utilizando un modelo alternativo.

Clúster 2. Los problemas 2 y 3 conforman este clúster. En dichos problemas la mayoría de los sujetos utiliza el MGL en la fase de ejecución, y lo utilizan correctamente.

Clúster 3. El problema 5 es el único problema incluido en éste cluster y se caracteriza porque aproximadamente el 50% de los sujetos utiliza el MGL y, de éstos, sólo la mitad lo utiliza correctamente. También se observa que el 20% de los individuos no aborda esta fase del problema.

Clúster según desempeño final

En el siguiente gráfico se muestran los dos clúster significativos que se forman en esta fase. Dichos clúster son caracterizados a continuación:

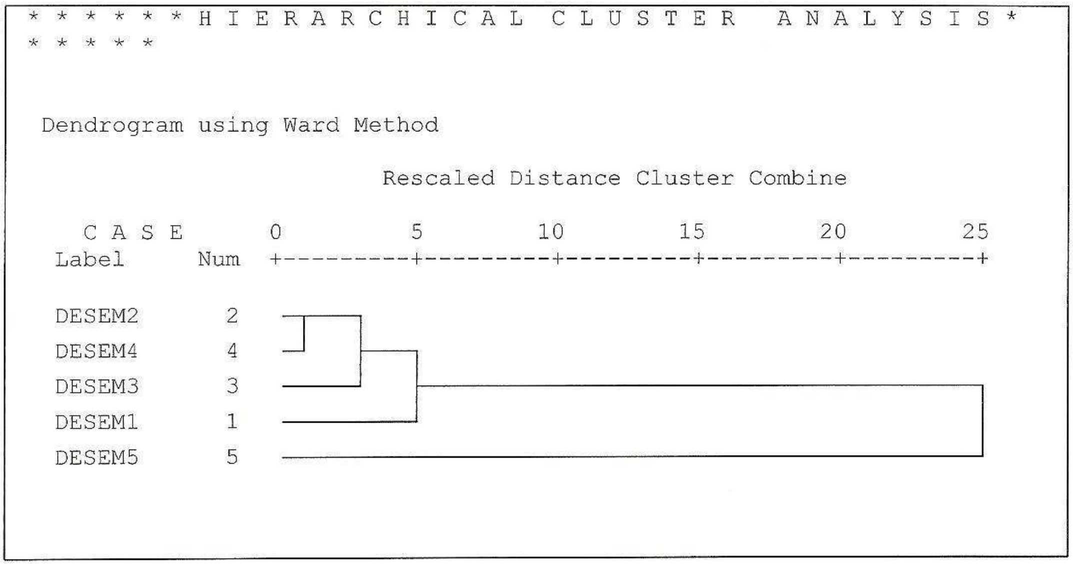


Gráfico 3

Clúster 1. Compuesto por los problemas 1, 2, 3 y 4 que, en esta fase, se caracterizan por el hecho de que gran parte de los individuos determinan la respuesta correcta, superando el 84% en todos los casos.

Clúster 2. Sólo el problema 5 pertenece a este clúster y se caracteriza porque un porcentaje relativamente bajo, sólo el 26,3%, obtuvo la respuesta correcta del problema.

5. Resumen de los resultados

A continuación realizamos un resumen de los resultados obtenidos a partir del análisis de clúster (clasificación empírica) y de la clasificación teórica de los problemas relacionando ambas clasificaciones.

5.1 Conclusiones acerca de los clúster por fases

Al analizar los clúster que resultan para cada fase de la resolución de los problemas se observan algunas regularidades que quisiéramos destacar:

- Los problemas 2 y 3 pertenecen al mismo clúster en todas las fases.
- En todas las fases el problema 5 conforma un clúster por sí sólo.
- En dos de las tres fases los problemas 1 y 4 (el problema 4 es réplica del 1) pertenecen al mismo clúster.

5.2 Conclusiones acerca de la clasificación de los problemas

Si tenemos en cuenta las regularidades anteriores y las contrastamos con las clases de problemas definidas para su selección en la construcción del instrumento, así como las categorías definidas en la clasificación teórica, podemos observar que:

- Los problemas 1 y 4, que pertenecen a la misma clase en la categorización elaborada para la construcción del instrumento (problemas de una relación y en que se emplean números naturales), obtienen resultados similares en la aplicación de la encuesta.
- Aún cuando el problema 2 (problema de una relación y en que se emplean números decimales) y el problema 3 (problema de más de una relación y en que se emplean números naturales) no pertenecen a la misma clase, los resultados cuando se utiliza el MGL para su resolución son similares en la aplicación del instrumento. De hecho, estos problemas tampoco pertenecen a la misma categoría en la clasificación teórica, por lo que es necesario realizar un análisis más profundo, respecto de las similitudes y diferencias de este tipo de problemas, a la luz de la utilización del MGL.

El problema 5 (problema de más de una relación y en que se emplean números decimales) pertenece, claramente, a una categoría diferenciada de los otros cuatro problemas, no sólo por su clasificación empírica y teórica, sino por su agrupamiento en el análisis cluster, en donde por sí solo constituye un clúster en las tres fases estudiadas (planteamiento, ejecución y desempeño final).

6. Conclusiones

Respecto de la clasificación de los problemas podemos decir que:

- Aquellos problemas que en la clasificación teórica corresponden a problemas que se resuelven utilizando una o dos RGL se comportan de manera similar en la aplicación del instrumento.
- De forma destacada, el problema 5 del instrumento, que corresponde a problemas que se resuelven con tres o más RGL en la clasificación teórica, constituye un clúster por sí solo en los tres análisis realizados, por lo que se puede concluir que, efectivamente, es una tipología de problema que se diferencia de los demás.

Por otra parte, en cuanto a los objetivos de investigación, podemos comentar que, utilizando el MGL, fue posible resolver los problemas algebraicos presentes en libros de texto seleccionados. Además, fue posible determinar semejanzas en la utilización del MGL para la RP, lo que permitió proponer una clasificación teórica.

Los resultados obtenidos en la aplicación del instrumento permitieron la elaboración de clúster según las fases de resolución definidas, siendo éstos caracterizados de forma diferenciada. Sin embargo, hay que continuar el trabajo para profundizar en la relación que existe entre ambas clasificaciones.

La caracterización y clasificación de los problemas que se realizaron proporcionan información para la utilización del MGL como metodología significativa, alternativa y complementaria a los sistemas tradicionales, en la RP algebraicos elementales. Ahora bien, para determinar la potencialidad del modelo será necesario ampliar la muestra de problemas y de sujetos que hemos utilizado en nuestra investigación.

Como continuación de esta investigación, nos planteamos la elaboración de una propuesta de aula en donde se plantee a estudiantes de la ESO resolver problemas algebraicos haciendo uso del MGL, con el fin de describir y caracterizar su utilización en una situación de enseñanza y aprendizaje, centrado nuestra observación en la utilidad del modelo, tanto para facilitar el paso de la aritmética al álgebra, como en los procesos de desarrollo del pensamiento algebraico.

Bibliografía

Castro, E. Castro, E. (1997): “Representaciones y modelización”. En: L. Rico (ed.) *La Educación Matemática en la Enseñaza Secundaria,* 95 – 122. Barcelona: HORSORI.

Cólera, J. y Gaztelu, I. (2004): *Matemática 1*. España: Anaya.

Cólera, J. y Gaztelu, I. (2003): *Matemática 2*. España: Anaya.

Diezman, C. y English, I. (2001): “Promoting the Use of Diagrams as Tools for Thinking”. En: A. Cuoco (ed.) *The Roles of Representation in School Mathematics,* 77 – 102. Holanda: NCTM.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Traducido al español por Vega, M. Colombia: Universidad del Valle.

Espinosa, E. (2004): *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Fernández, F. (1997): *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Gagatsis, A. y Elia, I. (2004): “The effects of different modes of representation on mathematical problem solving” En: M. Johnsen-Hoines y A. Fuglestad (eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, 489 – 496.

Goldin, G. y Shteingold, M. (2001): “Systems of representations and the development of mathematical concepts” En A. Cuoco y F. Curcio (eds.), *The roles of representation in school mathematics,* 1 – 21. Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. (2000): *Teaching and learning a new algebra with understanding.* Documento presentado en el encuentro anual de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH, (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441 662)

Kieran, C. (2006): “Research on the learning and teaching of algebra” En: A. Gutiérrez y P. Boero (eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 11 – 49. Sense Publishers.

Kieran, C. (2007): “Learning and teaching algebra at the middle school through college levels” En: R. Lesh (ed.): *Handbook of Research on Mathematics teaching and learning,* 707 - 762. USA: NCTM.

Mayer, R. (1986): *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* España: Paidos.

NCTM (2000): *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.

OECD. (2004): *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* USA: OECD Publishing.

OCDE (2006): PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. España: Santillana Educación S.L.

Puig, L. (1996): *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Rico, L. (1997): “Los organizadores del currículo de matemática” En: L. Rico (ed.) *La Educación Matemática en la Enseñaza Secundaria,* 39 – 55. Barcelona: HORSORI.

Rojano, T. (1996): “The role of Problems and Problem Solving in the Development of Algebra” En: N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (eds.) *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching,* 55 – 52. Netherland: Kluwer academic publishers.

Salvador Figueras, M. (2001): *Análisis de conglomerados o clúster* [en línea] 5campus.org, Estadística <http://www.5campus.org/leccion/cluster> [última consulta: 21 junio 2010]

Sánchez, J. y Vera, J. (2002a): *Matemática 1*. España: Oxford.

Sánchez, J. y Vera, J. (2002b): *Matemática 2*. España: Oxford.

Anexo

Universidad de Granada
Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática

INSTRUMENTO Nº 1

Licenciado/a en ____

Año en que se finalizó la Licenciatura ____________

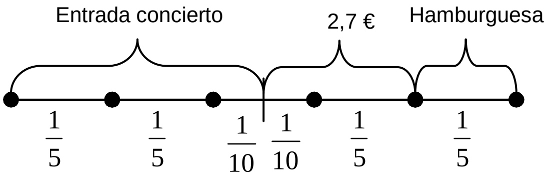
A continuación te presentamos algunos problemas que tienen como fin un trabajo de investigación. Esta prueba no constituye ningún tipo de control o examen, por lo que te pedimos tu colaboración, que te agradecemos de antemano.

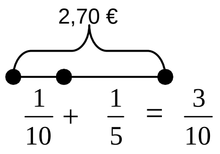
El objetivo consiste en resolver los problemas siguientes, empleando específicamente un modelo gráfico lineal. Para ello te mostramos un ejemplo de un problema resuelto mediante el sistema de representación (estrategia) que proponemos.

Si tienes dificultad en la resolución de alguno de los problemas, continua con el siguiente y, cuando puedas, inténtalo de nuevo.

Es importante hacer el esfuerzo de buscar una solución como la que te pedimos.

Ejemplo:
Marta gasta la mitad de su dinero en la entrada para un concierto, y la quinta parte del mismo en una hamburguesa. ¿Cuánto dinero tenía si aun le queda 2,70 euros?





$\frac{3}{10}$ del total del dinero son 2,70 euros

$\frac{1}{10}$ del total del dinero es 0,90 euros

El total del dinero será 0,9 x 10 = 9 euros

En los cinco folios sucesivos se adjunta los problemas a resolver, un problema en cada folio, con el fin de que los sujetos tuvieran espacio suficiente para trabajar.
Los problemas presentados fueron los siguientes:

Problema 1

Arturo tiene una bolsa con 28 caramelos, unos de menta y otros de limón. Si el número de caramelos de menta triplica al de los de limón, ¿cuántos caramelos de cada tipo tiene Arturo?

Problema 2

Si a un número le sumas siete unidades, obtienes el mismo resultado que si a su doble le restas tres. ¿De qué número se trata?

Problema 3

El transporte en taxi cuesta 2,5 euros de bajada de bandera y 1,50 euros por cada kilómetro recorrido. Si por una carrera has pagado 13 euros, ¿qué distancia has recorrido?

Problema 4

A la quinta parte de un número se le añaden 9 unidades se obtiene la mitad del número. ¿De qué número se trata?

Problema 5

Tres kilos de naranjas y dos kilos de tomates cuestan 6,75 euros, sin embargo, dos kilos de naranjas y tres kilos de tomates cuestan 7 euros. ¿Cuánto cuesta el kilo de naranjas? ¿y el de tomates?

María Victoria Martínez Videla mvmartin@uc.cl
Francisco Fernández García ffgarcia@ugr.es
Pablo Flores Martínez pflores@ugr.es
Universidad de Granada. Facultad de Ciencias de la Educación.
Departamento de Didáctica de la Matemática.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 63-72
ISSN: 1815-0640

Equações quadráticas e a fórmula de Bhaskara: Sucesso garantido?

Rosana Nogueira de Lima

Resumo

Neste artigo, apresentamos uma análise do trabalho de 77 alunos de ensino médio com uma situação não-familiar: a solução de uma equação quadrática escrita na forma fatorada. Os dados são analisados à luz de um quadro teórico que considera três diferentes mundos da Matemática e a influência dos "já-encontrados" derivados de experiências anteriores. Concluímos que ter a fórmula de Bhaskara como o único já-encontrado para resolver equações quadráticas pode não ajudar os alunos a trabalharem situações que as envolvem. Conjecturamos que o aluno deve se envolver com situações relacionadas a pelo menos dois mundos, o corporificado e o simbólico, mas de formas que também permitam considerar características do mundo formal, sem o qual alunos podem criar suas próprias técnicas inapropriadas.

Abstract

In this paper, we present an analysis of 77 14-15 year-old students' work with a non-familiar situation: the solution of a quadratic equation, written in a factorized form. Data is analysed in the light of a theoretical framework that considers three different worlds of Mathematics and the influence of 'met-befores' derived from learning experiences related to them. We show that having the quadratic formula as the only met-before to solve quadratic equations may not help the students to face all kinds of situations involving such equations. In addition, we claim that it is necessary to present to students learning situations that involve at least two worlds, the embodied and the symbolic, but in ways which also allow consideration of characteristics of the formal world, without which students may create their own inappropriate techniques.

Resumen

En este artículo, presentamos un análisis del trabajo de 77 alumnos de nivel medio con una situación no familiar: la solución de una ecuación cuadrática escrita en forma factorizada. Los datos son analizados a la luz de un cuadro teórico que considera tres diferentes mundos de la Matemática y la influencia de los "ya-encontrados" en experiencias anteriores. Concluimos que tener la fórmula de Bhaskara como la único para resolver ecuaciones cuadráticas puede no ayudar los alumnos a trabajar situaciones que se les presenten. Conjeturamos que el alumno debe encontrarse con situaciones relacionadas a por lo menos dos aspectos, el corporificado y el simbólico, pero de forma que también permitan considerar características del mundo formal, sin el cual los alumnos pueden crear sus propias técnicas inapropiadas.

1.Introdução

"olha, muitas [das equações] aí eu já olhei e pensei em Bhaskara, eu não sei por que. Pode tá até errado, eu não sei, né, mas eu olhei e pensei. Porque, assim, a outra professora que eu tive, ela colocava muito assim, fórmulas, que

nem Bhaskara, né. Eu olhava e ela falava assim, 'ó, você olhou para isso daqui, você já tem que pensar na fórmula de Bhaskara'. (...) eu lembro que a professora disse que Bhaskara precisava ter um [a incógnita] ao quadrado, aqui o a, aí aqui o b, que seria o número com o t [a incógnita], no caso, e o número sozinho [o coeficiente independente]."

(Trecho de entrevista com aluno da segunda série do Ensino Médio)

Em nossas experiências de trabalho com professores de Matemática da rede pública do Estado de São Paulo, freqüentemente ouvimos que eles preferem mostrar aos alunos o que chamam de métodos *"mais fáceis"* e *"mais gerais"* de resolver equações. Isso inclui "regras" para transpor um número para o outro lado do sinal de igual no caso das equações lineares; e a fórmula de Bhaskara para equações quadráticas. Tal prática, de acordo com eles, garante que os alunos serão bem sucedidos em resolver equações. Entretanto, pesquisas sugerem (Lima, 2007) que os conceitos matemáticos por trás das regras e fórmulas não estão claros para os alunos. Ao invés disso, eles tomam tais regras como verdades matemáticas, ou criam meios de trabalho para resolver equações. Especificamente no caso da fórmula de Bhaskara, Thorpe (1989) sugere que ela pode apresentar valores para a incógnita, tais como $1 \pm \sqrt{6}$, que podem não ter significado para os alunos, além de a fórmula ser um método que não pode ser generalizado para equações polinomiais de graus maiores.

Neste artigo, apresentamos uma análise de dados coletados em três grupos de alunos de primeira e de segunda séries do Ensino Médio de uma escola pública e um grupo de segunda série de uma escola particular na Grande São Paulo. Foi pedido aos alunos que discutissem e analisassem uma solução dada para a equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$, que não usa a fórmula, uma situação não-familiar para eles. Ao fazê-lo, os alunos mostraram que as suas experiências anteriores usando a fórmula têm grande influência no trabalho deles com esse tipo de equação. Estas experiências podem ser positivas, já que a fórmula garante sucesso se for usada de maneira apropriada, mas podem também ser prejudiciais se tiverem ênfase em um único procedimento para resolver equações quadráticas, sem considerar os princípios algébricos subjacentes a tal procedimento.

Os dados foram analisados usando um quadro teórico de aprendizado a longo prazo, que considera a existência de pelo menos três diferentes tipos de conceito em Matemática, habitam três diferentes mundos (Tall, 2004; Lima; Tall, 2008): o *mundo conceitual corporificado*, o *mundo proceitual simbólico* e o *mundo formal axiomático*. Experiências relacionadas com diferentes conceitos nesses três mundos geram construtos mentais chamados, por Tall (2004) de *"já-encontrados"*[1], e que influencia o trabalho atual dos alunos.

Ter conhecimento de apenas um tipo de já-encontrado, por exemplo a fórmula de Bhaskara, pode impedir que os alunos tenham flexibilidade para escolher o melhor método para resolver um problema ou uma situação com a qual se deparam, o que poderia ter possibilitado que eles fossem bem-sucedidos na tarefa que apresentamos.

[1] Do inglês "met-before", tradução feita por Lima (2007).

2. Diferentes Mundos da Matemática

A análise dos dados coletados foi feita à luz de um quadro teórico que analisa o desenvolvimento cognitivo da matemática a longo prazo, fundamentado no entendimento de que existem pelo menos três diferentes tipos de conceito (Gray; Tall, 2001), que são baseados nas atividades humanas de percepção, ação e reflexão, e que habitam três diferentes mundos da Matemática (Tall, 2004; Lima; Tall, 2008):

- Um mundo *conceitual corporificado* das percepções, no qual os indivíduos observam um objeto, suas propriedades, dão sentido a ele e o descrevem.
- Um mundo *proceitual simbólico*, no qual entidades matemáticas são simbolizadas, e ações podem ser efetuadas sobre eles com o uso de procedimentos que podem ser flexivelmente vistos como um procedimento e como o produto desse procedimento, o conceito, numa dualidade dos *proceitos* (Gray; Tall, 1994).
- Um mundo *formal axiomático* dos axiomas, propriedades, definições e teoremas, que possibilitam construir o corpo axiomático da Matemática por meio de demonstrações.

No caso das equações, acreditamos que abordagens de ensino baseadas no modelo da balança (Vlassis, 2002) ou no modelo geométrico (Filloy; Rojano, 1989) representam exemplos de meios corporificados de se lidar com equações. De acordo com Vlassis (2002), o modelo da balança é efetivo para que alunos consigam entender a idéia de igualdade entre os dois membros de uma equação, mas não é um método apropriado quando números negativos são envolvidos. O mesmo pode ser dito sobre o método geométrico e números racionais (Filloy; Rojano, 1989).

Dadas as dificuldades que ambas as abordagens corporificadas podem trazer para os alunos, faz-se necessário relacioná-las com o mundo simbólico, de forma a representar os pesos de uma balança de dois pratos ou as áreas de figuras geométricas por símbolos algébricos aos quais podem ser dados valores negativos e racionais. Este mundo também exige o uso de procedimentos, para resolver equações, relacionados com o princípio algébrico de "efetuar a mesma operação em ambos os membros da equação". Um uso apropriado de símbolos e de procedimentos inclui entendimento de que o foco deveria ser no *efeito* (Watson, Spyrou, Tall, 2003) do procedimento, e não no próprio procedimento. É essencial que um aluno saiba que, não importa qual método ele use para resolver, por exemplo, uma equação quadrática, o efeito de qualquer método – no caso os valores da incógnita – será o mesmo. Nesse sentido, o mundo simbólico é poderoso porque permite que os alunos sejam flexíveis em entender símbolos algébricos como processos e conceitos, e em perceber a possibilidade de uso de um procedimento apropriado para cada situação que eles têm em mãos.

Nem sempre o mundo simbólico é usado em toda sua potencialidade. Alunos podem usar procedimentos sem entender sua dualidade e flexibilidade, aplicando procedimentos como "regras sem razão" (Linchevski; Sfard, 1991), ou regras relacionadas com as frases usadas para se referir a eles (Freitas, 2002; Cortés; Pfaff, 2000), tais como "passar o número para o outro membro da equação e mudar o sinal". A falta de razões para o uso de procedimentos pode gerar *mal-rules*

(Sleeman, 1984; Payne; Squibb, 1990) ou meios de trabalho (Lima; Tall, 2008) com equações baseados na aplicação errônea das regras conhecidas, possivelmente porque elas não estão conectadas ao princípio de efetuar a mesma operação em ambos os membros (Lima, 2007). Por estas razões, acreditamos que os mundos corporificado e simbólico deveriam estar conectados e relacionados durante o aprendizado de equações nos Ensinos Fundamental e Médio e que, enquanto o mundo formal em sua totalidade é apenas discutido em nível superior, quando a construção da Matemática é estudada a partir de axiomas, definições, teoremas e demonstrações, algumas características desse mundo deveriam ser apresentadas durante o aprendizado de equações na matemática escolar, pelo menos as que estão por trás das "regras" que os alunos usam para resolvê-las.

2.1. O que já encontramos

Não se pode esperar que todos os indivíduos percebam e entendam características de cada um dos três mundos da Matemática, referentes a um dado conceito, da mesma forma. A jornada pelos mundos pode ser diferente para cada um, de acordo com as experiências anteriores que eles tiveram durante experiências de aprendizado dentro ou fora da escola.

Tall e Vinner (1981) definem imagem de conceito como

> "... *a estrutura cognitiva total que é associada com o conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos a eles associados. Ela é desenvolvida durante os anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece*."
>
> (Tall; Vinner, 1981, p. 152, tradução nossa)

Um indivíduo desenvolve a sua própria imagem de conceito a partir das experiências anteriores. Acreditamos que tais experiências são de grande importância, já que elas afetam o aprendizado do indivíduo. Lima e Tall (2008) definem *"já-encontrado"* como "... um construto mental que um indivíduo usa em um dado momento, baseado em experiências que ele encontrou anteriormente." (p. 6). Os já-encontrados fazem parte da imagem de conceito de um indivíduo.

Quando um indivíduo se depara com uma situação similar a uma já encontrada anteriormente, ele é compelido a usar um conhecimento antigo, um já-encontrado, para resolvê-la. Nesse sentido, uma experiência antiga de aprendizado influencia uma nova. Tais influências podem ser tanto positivas quanto negativas, dependendo se o já-encontrado é matematicamente válido ou não, e se é adequado ou não para a nova situação. Por exemplo, a partir do fato de que $3 + 4 = 7$, um conhecimento prévio em Aritmética, um indivíduo pode concluir que $3x + 4x = 7x$. Entretanto, em face de $3 + 4x$, ele pode, erroneamente, concluir que o resultado é $7x$, usando um já-encontrado inadequado para a situação. Dependendo da experiência de aprendizado, um já-encontrado pode ter suas bases em qualquer um ou em todos os mundos da Matemática, isto é, qualquer tipo de experiência, corporificada, simbólica ou formal, pode interferir no aprendizado. Em nosso ponto de vista, já-encontrados são de grande importância no aprendizado de qualquer conteúdo de Matemática, especialmente em equações, nosso caso, porque eles explicitam que tipo de experiências estão interferindo no aprendizado atual e que tipo de experiências os alunos ainda necessitam.

3. A Pesquisa

Os dados coletados neste artigo são parte de nossa pesquisa de doutorado, desenvolvida na PUC/SP e na Universidade de Warwick (UK). Nesta pesquisa, três grupos de alunos do Ensino Médio, um com 32 alunos de primeira série, um com 26 alunos da segunda série, ambos de uma escola pública em Guarulhos/SP, e um grupo de 19 alunos de segunda série de uma escola particular em São Paulo/SP, participaram, e trabalharam com três instrumentos de coleta de dados: um mapa conceitual, um questionário e uma tarefa de resolução de equações. Cada instrumento foi aplicado pelo professor da sala durante uma aula de 100 minutos. Quinze alunos foram selecionados para entrevistas, conduzidas pela pesquisadora, na presença de um observador, e áudio-gravadas para análises posteriores.

Neste artigo, nos concentraremos particularmente nos dados de uma das questões do questionário, na qual pedimos aos alunos para discutir a solução dada a uma equação quadrática (uma análise detalhada do restante dos dados pode ser encontrada em Lima; Tall, 2006a; Lima; Tall, 2006b; Lima, 2007; Lima; Tall, 2008; Lima; Healy, 2010).

3.1. A Questão

Na Questão 8 do questionário, foi pedido aos alunos que analisassem e comentassem uma solução dada para a equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$ (veja Figura 1). Esta é uma tarefa não familiar, considerando que usualmente pede-se para os alunos resolverem equações, e não que discutam uma solução apresentada, ou decidam se ela está ou não correta. Esta questão foi incluída no questionário porque os professores de nossos sujeitos de pesquisa acreditavam que eles usariam a fórmula de Bhaskara para resolver qualquer tipo de equação quadrática. Estávamos interessados em determinar se eles reconheceriam o princípio algébrico que afirma que, se um produto é zero, então um dos fatores deve ser zero, ou o procedimento que faz com que cada um dos fatores seja igual a zero para resolver a equação na forma apresentada na questão. Em outras palavras, queríamos investigar a extensão na qual estes alunos teriam acesso a diferentes procedimentos de resolver quadráticas, se eles mostravam flexibilidade em lidar com procedimentos diferentes para resolvê-las, ou se eles apenas usavam a fórmula. Como pedimos para eles justificarem as soluções dadas por meio de propriedades matemáticas, poderíamos observar se características do mundo formal estariam presentes no entendimento que eles tinham de equações.

Questão 8: Para resolver a equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$ no conjunto dos números reais, Joãozinho respondeu em uma linha:

"$x=3$ ou $x=2$"

A resposta está correta? Analise e comente a resposta de Joãozinho.

Figura 1: Enunciado da Questão 8 do Questionário

4. Resultados e Análise

Em geral, análises de todos os instrumentos mostraram que estes alunos entendem equação como uma conta, similar a uma adição ou multiplicação. Para resolver equações quadráticas, eles usam a fórmula, ou tentam "transformar uma equação quadrática em linear", usando o expoente da incógnita no coeficiente dela, ou simplesmente retirando esse expoente, e então, usam as mesmas técnicas que usam em equações lineares. A Tabela 1 apresenta acertos e erros referentes à resolução das equações quadráticas da atividade de resolução de equações.

Tabela 1: Resolução das equações quadráticas na atividade

Equação	$a^2 - 2.a - 3 = 0$	$r^2 - r = 2$	$3.l^2 - l = 0$	$m^2 = 9$
Correto	5	3	3	1
Uma das raízes	-	9	-	15
Incorreto	40	31	40	27
Total	23	25	25	25

De tais resultados, evidenciamos que os alunos têm a fórmula de Bhaskara como um já-encontrado para resolver equações como o único procedimento matematicamente correto que eles conhecem. Mesmo assim, poucos alunos usam a fórmula de maneira apropriada. Somente *sete* alunos resolveram corretamente pelo menos uma das equações de todos os instrumentos de coleta de dados. A Tabela 2 apresenta quantidade de alunos que resolveram correta ou incorretamente as equações da atividade de resolução de equações por meio da fórmula de Bhaskara.

Tabela 1: Uso da formula de Bhaskara em cada equação

Equação	$a^2 - 2.a - 3 = 0$	$r^2 - r = 2$	$3.l^2 - l = 0$	$m^2 = 9$
Correto	4	2	3	1
Incorreto	6	5	3	2
Total	10	7	6	3

Aparentemente, o mundo simbólico é o que está em foco no trabalho deles com equações; entretanto, uma flexibilidade de escolher um procedimento apropriado para cada situação está ausente, dado que eles apenas conhecem a fórmula como um procedimento. Relações entre os mundos corporificado e simbólico podem ser vistas apenas quando os alunos usam o que chamamos de *"corporificações procedimentais"* (Lima; Tall, 2008; Lima, 2007). Elas são evidentes quando eles resolvem a equação $m^2 = 9$ como apresentado na Figura 2, explicando que eles "pegam o 2 e colocam do outro lado", com uma mágica adicional de transformá-lo em uma raiz quadrada (Lima, 2007). Como resultado, técnicas são procedimentos mágicos com significados relacionados com movimentos ao invés de relações matemáticas.

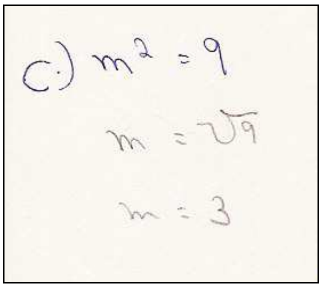


Figura 2: Resolução do aluno [SP205]

Especificamente para a Questão 8, encontramos que 30 alunos disseram que a resposta do Joãozinho está correta. Eles dão tais respostas baseados em diferentes (ou nenhuma) razões. Nenhum deles disse que a resposta de Joãozinho estava correta por causa de um princípio algébrico que garante que, quando um produto é igual a zero, então um de seus fatores deve ser zero. Na realidade, nenhum dos alunos parecia ter tal princípio como já-encontrado, nem mesmo o procedimento de tomar cada fator como igual a zero para obter os resultados. As respostas dos alunos foram similares às apresentadas na 12 e na **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**:

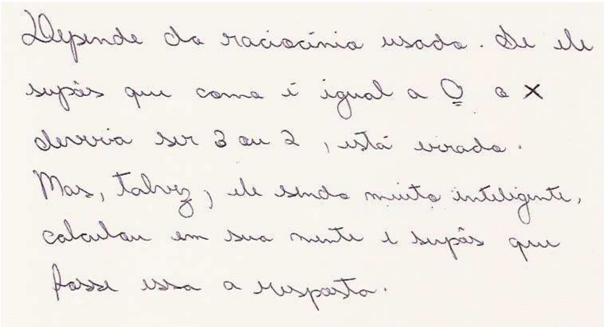

Depende do raciocínio usado. Se ele supôs que como é igual a 0 o x deveria ser 3 ou 2, está errado. Mas, talvez, ele sendo muito inteligente, calculou em sua mente e supôs que fosse essa a resposta.

Figura 3: Resposta do aluno [SP204] para a Questão 8

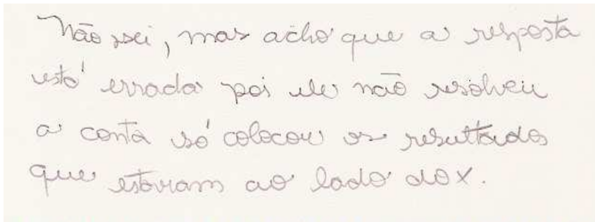
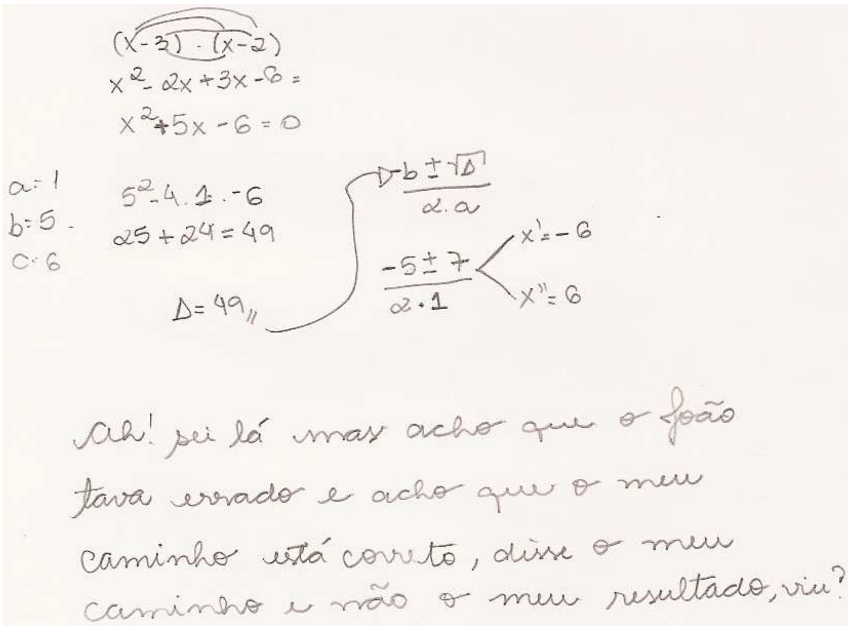

Não sei, mas acho que a resposta está errado pois ele não resolveu a conta só colocou os resultados que estavam ao lado do x.

Figura 4: Resposta do aluno [SP214] para a Questão 8

Para muitos, a formula de Bhaskara parece ser o único já-encontrado válido que eles conhecem para resolver equações quadráticas. Onze alunos declararam que "Joãozinho não resolveu a equação" porque ele não usou a fórmula, e outros três acreditam que "ele usou a fórmula, mas ele não mostrou seus cálculos". De fato, apenas quatro alunos usaram a fórmula para resolver a equação e comparar resultados com os de Joãozinho. Um aluno que cometeu erros ao usar a fórmula, obteve valores diferentes dos de Joãozinho e disse (Figura 5):


$(x-3)\cdot(x-2)$
$x^2 - 2x + 3x - 6 =$
$x^2 + 5x - 6 = 0$

a: 1
b: 5
c: 6

$5^2 - 4.1.-6$
$25 + 24 = 49$
$\Delta = 49$

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$\frac{-5 \pm 7}{2 \cdot 1}$ $x' = -6$, $x'' = 6$

Ah! sei lá mas acho que o João tava errado e acho que o meu caminho está correto, disse o meu caminho e não o meu resultado, viu?

Figura 5: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 8

"O jeito dele" de resolver equações é a fórmula, e é o jeito correto. Outro aluno, em entrevista, disse que *"está errado porque Joãozinho não usou a fórmula"*.

Outra maneira de resolver esta questão apresentada por quatro alunos foi substituir os resultados de Joãozinho na equação. Um deles disse (Figura 6):

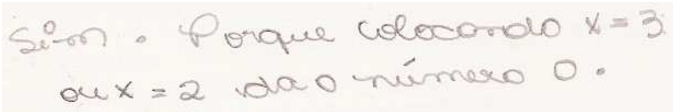


Figura 6: Resposta do aluno [GU122] para a Questão 8

Dois alunos deram respostas similares a esta, apresentadas na Figura 7 e o quarto aluno respondeu como na Figura 8.

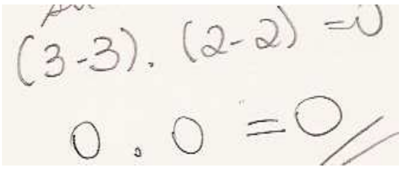


Figura 7: Um aluno substitui ambos os valores de x de uma vez.

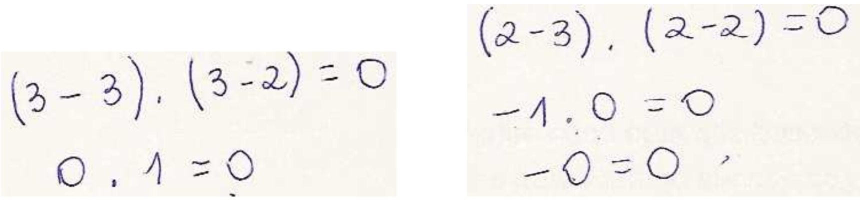


Figura 8: Um aluno substitui um valor de x por vez.

No caso da Figura 7, apesar de os alunos substituírem ambas as raízes ao mesmo tempo, eles mostram um entendimento de equação que não foi anteriormente apresentado na análise dos dados de todos os instrumentos: que os valores de *x* deveriam fazer com que a equação inicial fosse verdadeira. Na Figura 8, o aluno está consciente de como substituir a incógnita para o valor dado de forma a testá-lo e ter certeza de que ele é correto. Tal comportamento, em ambos os casos, pode também ser explicado como uma corporificação procedimental, quando o aluno "põe" o valor no lugar de *x* e vê o que acontece. Eles podem estar tratando os valores de *x* como entidades físicas que podem ser posicionadas onde a incógnita está. Um outro já-encontrado também está em jogo: o entendimento de que os resultados de uma equação devem satisfazer a inicial.

5. Discussão final

Apresentar um único procedimento para resolver equações não parecer ser uma abordagem bem sucedida, dadas as respostas desses alunos. A fórmula de Bhaskara não provou ser um método significativo entre estes alunos, e parece tê-los inibido de criar diferentes já-encontrados para resolver quadráticas. Em uma situação não-familiar, tal como a apresentada neste artigo, muitos dos alunos tiveram que usar a fórmula para terem certeza de quais eram as raízes da equação. Se eles tivessem a flexibilidade de lidar com símbolos, eles seriam capazes de buscar diferentes maneiras de abordar o problema, e, talvez, serem mais bem-sucedidos. Uma gama de já-encontrados provavelmente ampliaria a visão deles sobre a situação, e eles poderiam explorar características mais gerais de equação.

Por exemplo, os quarto alunos que tentaram substituir *x* pelos valores obtidos (três no questionário e um durante entrevistas), mostraram que um já-encontrado diferente ofereceu uma rota mais suave de resolver e justificar a situação. Além disso, quando eles usam uma corporificação procedimental, é de forma a trazer sucesso, evidenciando que este tipo de procedimento pode também provocar resultados efetivos, e não apenas negativos como se suspeitava anteriormente.

A falta de respostas discutindo o fato de que “se uma multiplicação de números reais é zero, então um dos fatores deve ser zero” mostra que características formais de equação e dos métodos de resolução deles podem não ter sido discutidos durante as experiências de aprendizado. De acordo com Tall (2004), o mundo formal não está em jogo em nível secundário, dado que tal mundo pressupõe a construção da Matemática por meio de demonstrações baseadas em axiomas, definições e teoremas. Concordamos que não é possível lidar com o mundo formal como um todo no nível de escolaridade dos sujeitos desta pesquisa. Entretanto, é nossa conjectura que não é possível evitar o uso de qualquer característica do mundo formal em níveis mais baixos que o superior, e é de fundamental importância que os alunos as conheçam. Isso pode impedir que eles dêem significados corporificados inapropriados para os símbolos, como em algumas corporificações procedimentais; criem novas técnicas, desconectadas de princípios algébricos; e confiem em um único já-encontrado para todas as situações.

Sugerimos que novas pesquisas sejam feitas, para estudar os resultados de apresentar para os alunos situações de ensino que emerjam de pelo menos dois dos mundos, corporificado e simbólico, de forma que um mundo possa complementar o outro, criando uma imagem de conceito mais rica relacionada com equações e os métodos de resolução delas, de forma que uma ampla gama de já-encontrados possa ajudar os alunos a desenvolverem uma maneira flexível de pensar com símbolos, e de ficarem conscientes das características corporificadas e formais que podem estar emaranhadas em tais relações.

Bibliografia

Cortés, A., & Pfaff, N. (2000). Solving equations and inequations: operational invariants and methods constructed by students. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, Hiroshima, Japan: PME, 193-200.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations, the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics , 9* (2), 19-25.

Freitas, M. A. (2002). *Equação do primeiro grau: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio.* Master Dissertation (Mathematics Education), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, São Paulo.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: a Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education , 26* (2), 115-141.

Gray, E., & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. *Proceedings fo the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, 65-72. Ultrech: PME.

Lima, R. N. (2007). *Equações Algebricas no Ensino Médio: Uma jornada por diferentes mundos da Matemática.* Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Lima, R. N., & Healy, L. (2010). The didactic cut in equation solving or a gap between the embodied and the symbolic mathematical worlds? *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Belo Horizonte: UFMG.

Lima, R. N., & Tall, D. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics , 67* (1), 3-18.

Lima, R. N., & Tall, D. (2006). The concept of equations: what have students met before? *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 233-241. Prague, Czech Republic.

Lima, R. N., & Tall, D. (2006). What does equation mean? A brainstorm of the concept. *3rd International Conference on the Teaching of Mathematics at Undergraduation Level.* Istambul, Turquia: ICTM.

Linchevski, L., & Sfard, A. (1991). Rules without reasons as processes without objects - The case of equations and inequalities. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, 317-324. Assisi, Itália: PME.

Payne, S. J., & Squibb, H. R. (1990). Algebra mal-rules and cognitive accounts of error. *Cognitive Science* , 445-448.

Sleeman, D. (s.d.). An attempt to understand students' understanding of basic algebra. *Cognitive Science , 8*, 387-412.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics , 12*, 151-169.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th International Conference of the Group for Psychology of Mathematics Education*, *1*, 281-288. Bergen.

Thorpe, J. A. (1989). Algebra: What sould we teach and how should we teach it? In: S. Wagner, & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4, 11-24. EUA: NCTM.

Vlassis, J. (2002). The balance model: hindrance or supprt for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics , 49*, 341-359.

Watson, A., Spyrou, P., & Tall, D. (2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education , 1* (2), 73-97.

Rosana Nogueira de Lima Tem mestrado e doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, tendo feito doutorando sanduíche na Universidade de Warwick (Grã-Bretanha). É Pesquisadora e Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo, orientando pesquisas principalmente em Álgebra. É Membro de corpo editorial do Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática – JIEEM. **rosana.lima@uniban.br**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 73-88
ISSN: 1815-0640

Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores

Walter F. Castro G.; Juan Díaz Godino; Mauro Rivas Olivo

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio exploratorio sobre las competencias de análisis didáctico de dos grupos de futuros maestros. Se comenta su desempeño en el análisis de dos tareas, en el contexto del diseño de una Unidad Didáctica sobre el razonamiento algebraico elemental. La diversidad exhibida por los dos grupos de futuros maestros, al hacer los análisis epistémicos, se vincula con la necesidad de reforzar el estudio de este tipo de tareas en la formación inicial de maestros.

Abstract

On this paper, an exploratory study is presented on two pre-service groups didactic analysis' competencies. Their performance on two math exercises is commented while designing a Didactic Unit on elementary algebraic reasoning. The diversity in their analysis is shown, and it is linked to the need to reinforce the study of this type of tasks in the education of preservice teachers

Resumo

Neste trabalho realiza-se um estudo exploratorio sobre as concorrências de análise didáctica de dois grupos de futuros mestres. Comenta-se seu desempenho na análise de duas tarefas, no contexto do desenho de uma Unidade Didáctica sobre o razonamiento algebraico elementar. A diversidade exibida pelos dois grupos de futuros mestres, ao fazer as análises epistémicos, vincula-se com a necessidade de reforçar o estudo deste tipo de tarefas na formação inicial de maestros.

1. Introducción

Diversas investigaciones y propuestas curriculares recomiendan la incorporación del razonamiento algebraico elemental en los distintos niveles de educación primaria (Kaput, 2000; Davis, 1985; Vergnaud, 1988). Kaput (2000) hizo una propuesta denominada “algebra for all”, en la que sugiere promover el álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas en lugar de ser inhibidora. Esta propuesta de Kaput se ha llamado la “algebrización del currículo”, la misma ha generado una visión ampliada sobre el álgebra escolar.

En esta línea de ideas, en el ámbito de la formación inicial de maestros, resulta natural plantearse la cuestión: ¿Qué tipo de formación debe ser ofrecida a los maestros en formación inicial para que puedan reconocer tanto el carácter algebraico de las tareas matemáticas, como promover el razonamiento algebraico en los niños?

En este trabajo presentamos algunos resultados iniciales de un proyecto de investigación en curso, orientado hacia el estudio de los problemas que plantea la formación en razonamiento algebraico elemental y su didáctica para futuros maestros de educación primaria. Es una investigación en la que se indaga sobre el desarrollo del "conocimiento matemático para la enseñanza" (MKT[1]) (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008), en la formación inicial de profesores, en relación con el razonamiento algebraico elemental. En este sentido, por medio de la realización de tareas de análisis didáctico[2] se busca desarrollar tres de las formas de conocimiento matemático para enseñar propuestas por Ball y colaboradores, a saber: (1) conocimiento común del contenido: conocimiento matemático del currículo escolar; (2) conocimiento especializado del contenido: es el utilizado por el profesor en la enseñanza y que va más allá de la matemática del currículo en sí; (3) conocimiento del contenido y de los estudiantes: la intersección del conocimiento matemático y el conocimiento acerca de los alumnos. (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008)

La manifestación de estas formas de conocimiento es observada al indagar sobre las competencias, exhibidas por un grupo de maestros en formación inicial, para identificar y analizar tareas que promuevan el razonamiento algebraico elemental, en el contexto del diseño de una unidad didáctica.

Previamente presentamos algunas reflexiones sobre el papel del álgebra en educación primaria y sobre la visión ampliada del álgebra que comporta su incorporación en los primeros niveles educativos.

2. El razonamiento algebraico elemental en la escuela

En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) se propone el *Álgebra* como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad, con la particularidad de que este bloque se debe desarrollar, no sólo en los niveles de enseñanza secundaria, sino incluso desde Preescolar. Carraher y Schliemann (2007, p. 675) formularon dos preguntas: ¿Pueden los niños de escuela elemental operar con álgebra?, ¿Pueden los maestros enseñar álgebra?

En relación con la primera pregunta, diversas investigaciones refieren a los logros de niños de escuela primaria cuando trabajan con tareas propias del razonamiento algebraico elemental (Amit y Neria, 2008; Becker y Rivera, 2008, Britt e Irwin, 2008). En relación con la segunda pregunta algunos estudios informan sobre las competencias y creencias de maestros activos en relación con aspectos centrales del razonamiento algebraico elemental, tales como la resolución de problemas de palabras (Van Doren, Verschaffel y Onghema, 2003), el signo igual y la variable (Asquith, Stephens, Knuth, y Alibali, 2007), la equivalencia y el pensamiento relacional (Stephens, 2006) y en general sobre el reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico por parte de un profesor durante las clases (Blanton y Kaput, 2005). Estos estudios señalan algunas deficiencias en la formación inicial de maestros quienes podrían desaprovechar, debido a esas deficiencias, las competencias algebraicas espontáneas de los niños.

[1] Siglas correspondientes a la expresión inglesa, "Mathematical Knowledge for Teaching".
[2] Una aplicación de esta forma de análisis puede verse en Godino, Rivas, Castro y Konic (2008)

En atención a las sugerencias de inclusión del álgebra en el currículo de la matemática escolar que la contemple como un nuevo contenido trasversal con los demás bloques temáticos (NCTM, 2000), a los logros de los niños de escuela elemental (Becker y Rivera, 2008), las experiencias de inclusión del razonamiento algebraico en el currículo de algunos países (Fong, 2004; Watanabe, 2008), los reportes sobre investigaciones longitudinales que apoyan la inclusión del razonamiento algebraico desde la escuela elemental (Derry, Wilsman y Hackbarth, 2007); parece pertinente ofrecer a los futuros maestros experiencias de formación, sobre planeación y análisis didáctico de tareas, que incluyan algunos aspectos del razonamiento algebraico elemental, para iniciarlos en su reconocimiento y promoción cuando este sea manifestado por los niños.

2.1. Aproximación desde el Enfoque Onto-semiótico

Algunos autores han propuesto aproximaciones al razonamiento algebraico elemental en la escuela primaria (Kaput, 2000; Kieran, 1996; Burkhardt, 2001). Tales aproximaciones favorecen una visión más amplia del álgebra escolar, diferente de la que resulta de la aproximación truncada de “álgebra como aritmética generalizada” como manejo de expresiones literales. Apoyados en las nociones de práctica, objeto y proceso matemático introducidas en el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), se propone una aproximación al Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) que lo considera como el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.).

2.2. Conocimiento matemático para la enseñanza

Ball y colaboradores, de la Universidad de Michigan, han publicado diversos trabajos sobre el conocimiento matemático para la enseñanza que se vinculan, en particular, con la competencia tanto para reconocer el razonamiento algebraico elemental en los materiales curriculares como para promover las manifestaciones matemáticas de los niños.

La propuesta de Ball y colaboradores sugiere un fraccionamiento del “conocimiento didáctico del contenido” (Shulman, 1986) que favorece el estudio de cada una de sus componentes y las relaciones entre las mismas (Ball, Thames y Phelps, 2008). Para operacionalizar la propuesta de Ball y cols., es necesario diseñar instrumentos que puedan ser usados por los formadores de maestros para promover tanto el reconocimiento del conocimiento matemático presente y emergente en la resolución de una tarea matemática como en las resoluciones dadas por los niños.

Para Blanton y Kaput (2005, p. 414): “la mayoría de los profesores de escuela elemental tienen poca experiencia con los aspectos ricos y conexos del razonamiento algebraico elemental…” y agregan “…debemos proveer formas apropiadas de apoyo profesional que produzca cambio en las prácticas curriculares” (p. 414).

Por tanto se ha considerado pertinente investigar y valorar el diseño de una herramienta que favorezca el reconocimiento de los conocimientos matemáticos, sus relaciones y su adecuación para la enseñanza, en el contexto de un curso de formación inicial de maestros de primaria.

2.3. Exploración de competencias de diseño y análisis didáctico

Discutiremos dos competencias específicas para la formación didáctica de los futuros maestros (Godino, .Rivas, Castro y Konic, 2008), considerando algunos elementos del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007). La primera refiere a la competencia de diseño de un proceso de estudio didáctico-matemático, que involucra: la selección de problemas matemáticos pertinentes para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental de los alumnos; además de definir, enunciar y justificar los conceptos, procedimientos y propiedades en función de su uso en un proceso de enseñanza. La segunda se refiere al conocimiento didáctico específico que permite utilizar el reconocimiento de conceptos, procedimientos y propiedades en función de la enseñanza, conllevando a la identificación de conflictos de significado que posiblemente se manifiesten en el aprendizaje matemático involucrado en el razonamiento algebraico elemental.

Godino (2009) presenta un modelo para el estudio del conocimiento didáctico-matemático del profesor, en el que se identifican diversas dimensiones (epistémica, cognitiva, afectiva, instruccional y ecológica) implicadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos. Considerando diversas propuestas para el estudio del conocimiento del profesor (Shulman, 1986, Hill, Ball y Schilling, 2008; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008), haciendo uso de herramientas teóricas propuestas por el EOS; se observa, en el uso de este modelo, un refinamiento que posibilita realizar un análisis más detallado de la puesta en juego de esta forma de conocimiento.

En relación con estas aportaciones, pretendemos observar la manifestación de las dimensiones epistémica y cognitiva del conocimiento didáctico-matemático, exhibido por un grupo de maestros en formación inicial, al diseñar una propuesta de enseñanza que involucra el razonamiento algebraico elemental.

Si bien las dos competencias referidas se enuncian separadamente, su desarrollo tiene como tarea común el llevar a efecto un análisis didáctico (epistémico y cognitivo) en el que se desarrolla el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), puesto que comprende: (a) una solución de un problema matemático; lo cual requiere el desarrollo del *conocimiento común del contenido*, (b) identificación de conceptos, propiedades y procedimientos puestos en juego en el proceso de resolución del problema, esta identificación se debe hacer en función de que esa resolución sea explicada y discutida con los niños; lo cual fomenta el desarrollo del *conocimiento especializado del contenido*, (c) además, esa identificación, comprende el señalamiento de posibles conflictos de significado que podrían surgir en la interacción didáctica, cuyo objetivo es incrementar la idoneidad del proceso de enseñanza y aprendizaje planificado; esta acción está en relación con el desarrollo del *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (Hill, Ball y Schilling, 2008).

En síntesis, la manifestación y desarrollo de estas formas del conocimiento matemático para la enseñanza es puesto en juego por medio del uso de una herramienta de análisis didáctico utilizada para el desarrollo de las dimensiones epistémica y cognitiva propuestas por el EOS. En el siguiente apartado informamos sobre la puesta en juego de esa herramienta y su valoración cuando es utilizada por maestros en formación inicial en el contexto del diseño de una Unidad Didáctica sobre razonamiento algebraico elemental.

2.4. El Análisis Epistémico mediante la GROS

En el EOS se ha introducido la noción de configuración de objetos y significados como un recurso para describir los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de un problema matemático. Esta noción favorece ampliar la atención dada a las representaciones e incluir el estudio de los tipos de entidades (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) y el papel que desempeñan en la actividad matemática (Font, Godino y D'Amore, 2007).

La noción se concreta en una herramienta denominada Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) que comprende la identificación de los tipos de objetos o entidades primarias referidas, puestas en juego en la solución del problema, agrupadas en los siguientes tipos: elementos lingüísticos (términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas), conceptos (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición), procedimientos (técnicas, operaciones, algoritmos), propiedades (enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba) y argumentos (justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas). Así mismo, para cada una de estas entidades se identifican posibles conflictos de significado que podrían surgir durante la actividad de resolución del problema.

Esta herramienta vincula la primera competencia referida al diseño de un proceso de estudio didáctico-matemático, en tanto que requiere la selección y resolución de problemas matemáticos con fines didácticos, con la segunda, referida al uso y reconocimiento de objetos y significados matemáticos para la identificación de conflictos potenciales en el desarrollo del razonamiento algebraico elemental. En el apartado 4.2 se mostrará un ejemplo de análisis epistémico, dado por un grupo de maestros en formación inicial. Se incluyen comentarios valorativos y vinculaciones con un trabajo análogo, realizado por otro grupo de futuros maestros.

3. Metodología

Con la finalidad de explorar las competencias de diseño y de análisis didáctico sobre RAE que exhiben los futuros maestros, se les propuso diseñar una unidad didáctica sobre el álgebra, para el sexto curso (11-13 años) de primaria. La investigación se realizó en el marco del curso "Currículo de Matemáticas en Educación Primaria" impartido en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, España, el cual tiene una componente práctica y una teórica.

Durante el desarrollo del curso, el conocimiento del contenido del álgebra y su didáctica no fueron motivo de estudio. Al margen del desarrollo del curso, sólo se les dio a los futuros maestros una aproximación al RAE, desde la perspectiva del EOS. La investigación en cuestión se realizó durante el primer cuatrimestre del curso 2008-2009. Los maestros en formación inicial sobre quienes se informa en este documento tienen en promedio 20 años, manifiestan gusto por las matemáticas, no tienen experiencia docente, sin embargo suelen dar asesorías a niños de escuela primaria. Durante las reuniones de trabajo mostraron un pensamiento crítico e independiente. Específicamente se informa sobre la actuación de dos grupos, conformados por cuatro maestros en formación inicial, cada uno.

3.1. Toma de datos

Se realizó un proceso de estudio con los dos grupos donde el primer autor jugó un doble papel de participante y observador, y donde se procuró no ejercer autoridad epistémica ni deontológica para favorecer la participación y la manifestación de conocimientos y creencias por parte de los participantes. Así mismo se intentó crear conflictos epistémicos y se estimuló el debate sobre la explicación; los participantes debían tomar decisiones no sólo sobre la selección e inclusión de los ejercicios sino sobre su carácter algebraico. Como tarea opcional se les solicitó cumplimentar la Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados -GROS- cuyo uso no estaba considerado como requisito para el diseño de su Unidad Didáctica.

Se sostuvieron 8 reuniones con cada grupo, con una duración promedio de 45 minutos. Para obtener comprensión del proceso experimentado por los futuros maestros se efectuó una triangulación y se usaron varias fuentes de datos: solución escrita de ejercicios, identificación escrita de elementos algebraicos, borradores previos de las unidades didácticas, audio de las discusiones y video de las presentaciones finales de las unidades didácticas.

4. Análisis y resultados

4.1. Los análisis realizados por los grupos

Mostramos a continuación parte del trabajo realizado por dos grupos de maestros en formación inicial, al proponer, resolver y analizar dos problemas de razonamiento algebraico elemental, seleccionados de un libro de texto de sexto curso de primaria, un problema por cada grupo. Observaremos que el primer grupo, al analizar la tarea, realiza un análisis epistémico mediante el uso de la GROS, mientras que el segundo no. Por razones de espacio sólo mostraremos algunas de las entradas de las tablas (1 a la 4) propuestas por el primer grupo. Para cada tabla se presentan comentarios valorativos de las identificaciones realizadas por este grupo, las cuales, tal como podrá observarse, refieren al desarrollo del *conocimiento especializado del contenido*.

4.1.1. Grupo uno (G-1)

Este grupo propuso la siguiente tarea de razonamiento algebraico elemental:

Problema: Cambia las letras por números del 1 al 16 de manera que sumados en cualquier dirección, el resultado sea 34

A	3	B	13
5	10	C	D
E	6	7	F
4	G	H	1

Figura 1: Problema de RAE propuesto por G-1

Los integrantes del G-1 proponen una solución algebraica del problema, que pone de manifiesto su conocimiento común del contenido, y justo después hacen uso de la GROS.

Comentario sobre los elementos lingüísticos identificados por G-1 (Tabla 1): Las interpretaciones de los elementos lingüísticos presentadas por el G-1, se limitan a parafrasear el enunciado del problema e identificar una frase que consideran clave "En cualquier dirección". El parafraseo mostrado muestra que se comprenden las demandas del enunciado, quedando implícitas interpretaciones más específicas, presentes en las condiciones planteadas en el problema. Las condiciones planteadas en el problema sugieren una solución de carácter aritmético, en tanto que se pide "cambiar las letras por números". Es posible que el procedimiento escogido por un niño sea el de ensayo y error. Los términos lingüísticos usados: "cambia… de manera que… el resultado sea", introducen conceptos tales como: incógnita, ecuación, igualdad, cuyos significados, propiedades y procedimientos pueden relacionarse argumentativamente de manera compleja y en formas que favorezcan o inhiban la solución del problema (Castro y Godino, 2009).

Tabla 1. Identificación de elementos lingüísticos

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
Elementos lingüísticos: representaciones (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Cambia las letras por números del 1 al 16 de manera que sumados en cualquier dirección, el resultado sea 34	Si sumamos los números colocados en cada una de las casillas de una fila, columna o diagonal, el resultado debe ser 34.
En cualquier dirección	Se suma de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo y en sentido diagonal (principal y secundaria)

En relación con la solución algebraica propuesta por el G-1, en el apartado de conflictos, se comentan posibles conflictos de significado.

Tabla 2. Identificación de conceptos

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
Conceptos (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Introducción a la notación algebraica mediante el uso de incógnitas.	Los valores numéricos con los que debemos rellenar el cuadro son desconocidos, por ello usamos las incógnitas A,B,C,D, E, F, G y H para designarlos
Suma	Operación que nos permite encontrar el total, o suma, a partir de la unión de dos o más números a los que llamamos sumandos.
Resta	Operación utilizada para encontrar la diferencia, o proceso de quitar un número de otro para encontrar la cantidad restante
Ecuaciones de primer grado con una incógnita	Expresión matemática que establece una relación de igualdad entre dos términos, cada uno de los exponentes [sic] que acompañan a las cifras que componen cada uno de los dos términos son 0 o 1.

Comentario sobre los conceptos identificados por G-1 (Tabla 2): Nótese que los significados conferidos a los conceptos de suma y de resta son expresados en términos de "operaciones", que son usados en la solución del problema. El G-1 reconoce la presencia de elementos algebraicos en el problema tales como ecuación, incógnita y grado de la ecuación. Llama la atención el significado conferido al concepto de "ecuación" dado en términos de la igualdad, pero invocando el significado de "relación" en lugar del de resultado; la importancia de esta asignación de significado relacional al signo igual y su rol en las tareas de RAE ha sido resaltada por diversos autores (Carpenter, Levi, Franke y Zeringue, 2005; Fujii y Stephens, 2001).

Comentarios sobre los procedimientos identificados por G-1 (Tabla 3): Los procedimientos identificados se corresponden con los usados por el G-1 en la solución matemática del problema, y los significados conferidos se adecuan al problema. Nótese que los significados para "algoritmo de sumar y de restar" se expresan en términos de lo que el procedimiento "permite" hacer. Mientras que el procedimiento de "resolución" se indica en términos de "propósito". El significado conferido a "asignación de un valor numérico…" se da en términos de sustitución de letras por números.

Tabla 3. Identificación de procedimientos

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Traducción de lenguaje ordinario a lenguaje algebraico	Al leer en el enunciado: "Los sumandos en cualquier dirección tienen que sumar 34…", el alumno lo traduce al lenguaje algebraico, buscando ecuaciones en las que sólo desconozca un dato y las iguala a 34 que sabe que debe ser el resultado de cada suma. *Ej: 3 + 10 + 6 + G = 34*
Algoritmo de sumar	Nos permite establecer las relaciones entre los sumandos y el total
Algoritmo de restar	Nos permite calcular el valor de cada una de las letras, ya que restamos al total (que es un valor constante y conocido), el valor de cada uno de los sumandos salvo uno, que es el sumando cuyo valor deseamos conocer
Resolución de ecuaciones de primer grado	Para hallar el valor de cada una de las incógnitas.
Asignación de un valor numérico a una incógnita que era desconocida en un principio.	Se sustituye cada una de las letras del crucigrama, por el valor numérico calculado mediante los procedimientos que se indican.

Nótese que el concepto de incógnita, inmerso en la solución del problema, no ha sido específicamente mencionado por el G-1 en su listado de conceptos, sin embargo, aparece en los significados que surgen en la identificación de procedimientos: valor desconocido que debe y puede ser hallado y que se suele representar por una letra. Se resalta aquí una característica de la GROS: la promoción del surgimiento de objetos y significados vinculados con el problema que emergen a lo largo del análisis epistémico. En tal sentido la GROS es una herramienta que da cuenta de un proceso complejo y dinámico, y que puede ser cumplimentada de varias maneras; lo cual pone de manifiesto la relatividad de los objetos y significados matemáticos (Radford, 2006).

Comentarios sobre las propiedades identificadas por G-1 (Tabla 4): El G-1 logra identificar dos propiedades, entre varias que se pueden señalar, en la resolución del problema.

La primera propiedad identificada es la de la unicidad del valor numérico, la cual es posteriormente considerada como un posible conflicto de significado, en tanto que, si esta propiedad no es reconocida en acto por los niños, podrían dar varios valores a la misma incógnita.

La segunda propiedad identificada determina el procedimiento que utiliza el G-1para resolver el problema: en cada fila o columna escogen las ecuaciones con dos incógnitas que pueden ser reducidas a una sola incógnita, a partir de las incógnitas previamente determinadas. Nótese que este criterio es el mismo que se usa en el método de reducción de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Tabla 4: Identificación de propiedades

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
Propiedades (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
P1: Cada una de las incógnitas tiene un único valor numérico	A cada una de las letras del cuadro le corresponde un único valor numérico, que debe estar comprendido entre 1 y 16
P2: Solo podemos calcular el valor de aquellas incógnitas situadas en una fila, columna o diagonal en la que el resto de los datos son conocidos.	Por trabajar con ecuaciones de primer grado con una sola incógnita, para tratar de hallar el valor numérico de las letras del cuadro, debemos saber que el resto de valores situados en la misma fila, columna o diagonal deben ser conocidas.

4.1.2. Grupo dos (G-2)

En la siguiente figura mostramos un ejercicio y la propuesta de análisis realizada por el segundo grupo, el cual no utilizó la GROS durante el proceso de elaboración de la unidad didáctica. Seguidamente se presentan comentarios valorativos del trabajo realizado por este grupo.

***Problema:* ¿Qué números pueden ser?**

? + ? + ? + ? = 13

Busca todos los números que cumplan estas condiciones: La suma de sus cuatro cifras es 13; la cifra de las decenas es 0; la cifra de las unidades de millar es el triple que la de las unidades.

[La solución matemática dada por el G-2, es:]

$$3x + y + 0 + x = 13 \quad ; \quad 4x + y = 13 \quad ; \quad y = 13 - 4x$$

RESULTADOS: x = 0 y = 13; x = 1 y = 9 ; x = 2 y = 5 ; x = 3 y = 1

Fig. 2: Problema de RAE y solución dada por el G-2.

Comentarios sobre la propuesta y resolución del G-2: De esta propuesta dos aspectos llaman la atención: el primero es que la tarea pone en juego varios elementos propios del razonamiento algebraico elemental, tales como: variable, ecuación, solución de una ecuación; la segunda es que la solución dada no es fácil de entender, en tanto que no se ha especificado cómo, a partir de las condiciones dadas, se obtiene una ecuación, tampoco se ha asignado significado a las letras “x” e “y” ni se indica cómo, a partir de los valores asignados a estas letras, se puede dar la respuesta al problema planteado.

Aún cuando se deduce, del planteamiento del problema y de su resolución, un posible manejo implícito de los elementos propios del razonamiento algebraico referidos, la competencia didáctica de los maestros, referida específicamente a la selección de problemas matemáticos pertinentes y a la definición, enunciación y justificación de los conceptos, procedimientos y propiedades en función su enseñanza, está pobremente manifestada en este caso.

Parece que este grupo considera que es suficiente proveer una solución al problema para enseñarlo; los problemas didácticos convocados por el problema no han sido reconocidos por el G-2, cuyos integrantes podrían no estar del todo preparados para abordar con pertinencia su enseñanza para niños de sexto curso de primaria (11-13 años). No se evidencia, como en el caso del G-1, el desarrollo del conocimiento matemático para enseñar, excepto en su forma de conocimiento común del contenido.

Para Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnets (2006) “la idea no es simplemente atribuir significado algebraico a las actividades matemáticas de la escuela primaria. Los contenidos matemáticos deben ser transformados sutilmente para resaltar su carácter algebraico”, (p. 88). La competencia de transformación referida anteriormente no se evidencia en el trabajo realizado por el G-2.

4.2. Identificación de posibles conflictos de significado

A partir de la discusión de los objetos y de sus significado intervinientes y emergentes durante la resolución particular dada al ejercicio, se pueden señalar posibles conflictos de significado que podrían surgir durante la interacción didáctica. Desde la perspectiva del desarrollo del conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009; Hill, Ball y Schilling, 2008) se considera que la preparación de una actividad matemática con fines instruccionales no solamente debe considerar la “solución matemática” sino un conjunto de posibles conflictos y modos de abordarlos. Esto se hace aún más pertinente cuando se trabaja con maestros en formación quienes posiblemente carecen del conocimiento de los niños (Shulman, 1986) y de los conflictos que estos suelen manifestar.

4.2.1. Conflictos identificados por el G-1

Los conflictos de significado identificados por el G-1 refieren a elementos lingüísticos, conceptos y procedimientos. A continuación señalaremos algunos de tales conflictos en el orden indicado (Fig 3 a la 5). Para cada tipo de conflicto identificado se presentan comentarios valorativos correspondientes.

- La instrucción "en cualquier dirección" podría ser interpretada también, en el sentido "diagonal"; que sólo es valida para las diagonales principales pero no para las diagonales secundarias.

- Si los niños resuelven el problema algebraicamente, obtendrán "muchas" ecuaciones e incógnitas, lo cual podría desmotivarlos dado que hay muchas incógnitas y los niños podrían pensar que no es posible resolver el problema.

- Si resuelven el problema aritméticamente, por ensayo y error, podrían presentarse dos soluciones:

- ***En la primera, los niños podrían no tener en cuenta que aunque los valores de las letras no se conocen, estos son únicos; de tal suerte que podrían dar valores diferentes a la letra A en la ecuación de la primera fila (A+3+B+13=34), y un valor diferente cuando se considera la misma letra en la correspondiente ecuación de la primera columna (A+5+E+4=34).***
- ***En la segunda solución, por ensayo y error, los niños podrían desanimarse en tanto que algunos valores de las letras asignados por ellos, en unos casos no servirán para resolver las ecuaciones en otros casos.***

Figura 3: Conflictos relacionados con elementos lingüísticos identificados por G-1

Comentarios sobre los conflictos relacionados con elementos lingüísticos identificados por G-1 (Fig. 3): *Nótese que estas identificaciones podrían ubicarse preferentemente en "procedimientos", pero han sido ubicadas por el G-1 en "elementos lingüísticos" en tanto que fueron originadas en las consideraciones motivadas por estos. Desde un punto de vista didáctico, no importa en que categoría se rotule un objeto, sus significados y los eventuales conflictos; sino la identificación de los mismos.*

Se resalta la identificación de elementos lingüísticos cuya interpretación puede modificar el proceso de significación y solución del ejercicio por parte de los niños; para MacGregor y Price (1999) "la conciencia de las estructuras del lenguaje y la habilidad para manipular esas estructuras puede ser una manifestación de un proceso cognitivo más profundo que también subyace la comprensión de la notación algebraica" (p. 462).

- El concepto de ecuación será muy difícil para los niños.
- Los niños no han visto ecuaciones y no se les ha enseñando cómo resolverlas.
- Lo mismo sucede con el concepto de "sistemas de ecuaciones"

Figura 4: Conflictos relacionados con conceptos identificados por G-1

Comentarios sobre los conflictos relacionados con conceptos identificados por G-1 (Fig. 4): *La solución algebraica del problema, propuesta por el G-1, conlleva al uso de conceptos (ecuaciones, sistemas de ecuaciones) en un sentido algebraico avanzado, lo cual se considera difícil para el nivel de primaria. Este reconocimiento debe conducir a buscar formas alternativas para la planificación y desarrollo de la actividad de enseñanza, por ejemplo; modificar las variables de la tarea, hacerla resoluble por medio de una asignación sencilla de valores.*

- En la resolución algebraica la "resolución del sistema" de ecuaciones y el "orden" en que se deben resolver, es la mayor dificultad para los niños; ya que los niños deben elegir el orden en que se deben escoger las ecuaciones, siempre buscando tener una ecuación con una incógnita;
- Deben resolver todas las ecuaciones en pirámide;
- Si los niños resuelven el problema por ensayo y error, entonces el problema es mas difícil, pues los niños ensayarán valores en desorden y se liaran mucho con la solución

Figura 5: Conflictos relacionados con procedimientos identificados por G-1

Comentarios sobre los conflictos relacionados con procedimientos identificados por G-1 (Fig. 5): El G-1 no refiere a que los niños podrían tener dificultades para resolver las ecuaciones con una sola incógnita. Al parecer consideran que el procedimiento de "operar en reversa" o de "transponer" términos será naturalmente desarrollado por los niños. (Filloy, Rojano y Puig, 2008)

4.2.2. Conflictos identificados por el G-2

Los conflictos identificados por el G-2 se presentan en la Figura 6.

Comentarios sobre los conflictos identificados por G-2 (Fig. 6): Si bien es cierto que el G-2 identifica eventuales conflictos que podrían ser manifestados por los niños durante el proceso de resolución, también es cierto que algunos de ellos son tan difíciles de comprender como la solución matemática que dieron al problema. La identificación de conflictos hecha por el G-2 parece no dar importancia al subsiguiente proceso de explicación y discusión del ejercicio con niños reales.

- Los niños no reconocerán las tres condiciones; en el enunciado nos indica que busquemos "todos" los números, y les resultará un problema saber si los que han puesto serán todos, o si les falta alguno.
- Los niños van a suponer que todos los números que van a buscar para que les den 13, serán números naturales, y en cambio, a partir de x=4, se obtienen números negativos.
- La interrogación puede confundir a los niños, ya que puede que piensen que al ser el mismo símbolo, también será el mismo número.
- Las condiciones segunda y tercera son confusas porque sus enunciados, muestran a todos los sumandos, como si se tratase de una cifra de 4 dígitos, aspecto que no se aprecia en la representación gráfica, ya que se consideran números individuales.

Figura 6: Conflictos identificados por G-2

La comparación con el trabajo de identificación del G-1 no puede ser evitada. Se considera que un proceso de identificación de posibles conflictos de significado como el realizado por el G-1 es más deseable, por la especificidad de sus identificaciones, en contraste con la generalidad de las identificaciones realizadas por el G-2.

5. Implicaciones para la formación de maestros

Parece que ambos grupos G-1 y G-2 manifiestan competencia para seleccionar ejercicios tipo RAE en libros de texto para sexto curso de primaria. Sin embargo, el G-1 también manifiesta competencia para el análisis didáctico; para reconocer, definir, y enunciar los conceptos, procedimientos y propiedades en función de su enseñanza. Mientras que el G-2 no lo hace.

El análisis didáctico efectuado por el G-1 le permite identificar posibles conflictos de significado más pertinentes y específicos, implicados en la tarea considerada. La idoneidad potencial del proceso de enseñanza planificado por el G-1 es mejor que la correspondiente al G-2, al no exhibir, este último, competencia para el análisis didáctico que debería preceder a la enseñanza de un tema matemático.

A pesar que ambos grupos tuvieron la oportunidad de discutir la pertinencia del análisis didáctico/epistémico (uso de la GROS) para el diseño de la unidad didáctica, el G-2 no lo utilizó para identificar los conocimientos matemáticos intervinientes y emergentes durante la solución del ejercicio, ni reconocer algunos conflictos potenciales más específicos y pertinentes. Podría ser el caso que este grupo no considere necesario realizar el análisis epistémico en tanto que el ejercicio propuesto y su análisis no serán puestos en práctica con niños en un contexto escolar real. También podría ser que las creencias dominantes de los futuros maestros entren en conflicto con las exigencias del análisis epistémico en tanto que cambiar las creencias es una tarea difícil que demanda un esfuerzo continuado (Wubbels, Korthagen y Broekman, 1997).

La puesta en práctica de la GROS ha permitido al G-1 efectuar un reconocimiento más específico de algunos elementos propios del razonamiento algebraico elemental; siendo la mera solución del ejercicio insuficiente, tanto para reconocer los diversos objetos y significados puestos en juego, como para planificar su enseñanza para los niños.

Se debe reconocer que la puesta en práctica de la GROS es un reto para los futuros maestros. La identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados resulta conflictiva, ya que supone un cierto nivel de actividad metacognitiva (Jaworski, 2005) a la que no están habituados. Sin embargo, la actividad de análisis epistémico enmarcado en la formación inicial de maestros promueve el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps., 2008; Godino, 2009) en tanto que se ofrece una herramienta que promueve el reconocimiento de los diversos tipos de entidades y los significados que intervienen en la actividad de la instrucción matemática.

En consecuencia, este tipo de actividades de reflexión y análisis podría ayudar a profundizar la comprensión de los objetos y procesos de significación matemáticos en el contexto de la didáctica, que a su vez coadyuvan al reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico elemental.

6. Reflexiones finales

Somos conscientes que nuestro énfasis en sólo dos competencias didácticas no da cuenta de la complejidad del proceso de diseño didáctico en términos de la propuesta de Ball, Thames y Phelps (2008); Godino (2009). Sin embargo, consideramos que la focalización en estas dos competencias y su puesta en práctica en tareas de razonamiento algebraico elemental, mediante el uso de la GROS, ha favorecido no sólo el reconocimiento del complejo entramado de objetos y significados inmersos en la solución de una tarea algebraica, sino que ha permitido avanzar hacia una respuesta a la pregunta: ¿Qué tipo de formación debe ser ofrecida a los maestros en formación para que puedan reconocer tanto el carácter algebraico de las tareas matemáticas como promover el razonamiento algebraico en los niños?.

En este sentido el presente trabajo aporta alguna información para apoyar la urgente necesidad de revisar los planes de formación de maestros en el área de matemáticas y de contemplar el razonamiento algebraico y su didáctica en el desarrollo de los distintos bloques de contenido.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER

Bibliografía

Amit M., Neria D. (2008): *Rising to the challenge: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students*. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 11-119.

Asquith P., Stephens A., Knuth E., Alibali M. (2007):*Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable.* Mathematical Thinking and Learning, 9(3), 249-272.

Ball D. L., Thames M. H., Phelps G. (2008): *Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?.* Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Beker J. R., Rivera F. D. (2008):*Generalization in algebra: the foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades*. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 1.

Blanton M. L., Kaput J.J. (2005): *Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning.* Journal for Research in Mathematics Education, 36(5), 412-446.

Britt M., Irwin K. (2008): *Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study*. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 39-53.

Burkhardt H. (2001): *Algebra for all: What does it mean? How are we doing?* En: H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, J. Vincent (eds.) The future of the teaching and learning of algebra, Vol. 1, pp. 140-146. University of Melbourne, Australia.

Carpenter T., Levi L., Franke M.L., Zeringue J.K. (2005):*Algebra in elementary school: Developing relational thinking.* ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 37, 53-59.

Carraher D. W., Schlieman A. (2007):*Early algebra and algebraic reasoning*. En: F. Lester (ed.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Vol. 2, 669-705. Information Age Publishing, Inc. y NCTM, Greenwich.

Castro W., Godino J.D. (2009): *Cognitive configurations of pre-service teachers when solving an arithmetic-algebraic problem*. Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education. Université Claude

Bernard, Lyon, France. Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

Davis R. B. (1989): *Theoretical considerations: Research studies in how humans think about algebra*. En: S. Wagner, C. Kieran (eds.) Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra Vol. 4, 266-274. NCTM y Laurence Erlbaum Associates, Reston, VA.

Derry S. J., Wilsman M. J., Hackbarth A. J. (2007):*Using contrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching*. Mathematical Thinking and Learning, 9(3), 305-329.

Filloy E.; Rojano T., Puig L..(2008). *Educational Algebra: A theoretical and Empirical Approach* (Vol. 43): Springer.

Fong N. S. (2004):*Developing algebraic thinking in early grades: A case study of the Singapore primary mathematics curriculum*. The Mathematics Educator, 8(1), 39-59.

Fujii T., Stephens M. (2001):*Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables*. En: H. L. Chick, K. Stacey, J. Vincent, J. Vincent (eds.) Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra, Vol. 1, 258-264. University of Melbourne, Melbourne.

Godino J. D. (2009):*Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas*. UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

Godino J. D., Batanero C., Font V. (2007):*The onto-semiotic approach to research in mathematics education*. ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135**.** [Versión ampliada en español**:** Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm]

Godino J. D., Rivas M., Castro W. F., Konic P. (2008):*Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas.* Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia. Centro de Profesores y Recursos. Murcia. Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm .

Hill H. C., Ball D.L., Schilling S.G. (2008):*Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students.* Journal for Research in Mathematics Education, 39, 372-400.

Jaworski B. (2005):*Tools and tasks for learning and meta-learning*. Journal of Mathematics Teacher Education, 8, 359-361.

Kaput J. J. (2000):*Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum*. En: National Research Council (ed.) The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a National Symposium. National Academy Press, Washington, DC. Disponible en http://eric.ed.gov/ (Eric # ED441664).

Kieran C. (1996):*The changing face of school algebra*. En B. Hodgson, C. Alsina, J. Alvarez, C. Laborde, A. Pérez (eds.) 8[vo] Congreso Internacional de Educación Matemática: Selección de conferencias, 271-290. Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”, Sevilla, España.

MacGregor M., Price E. (1999):*An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning*. Journal for Research in Mathematics Education, 30(4), 449-467.

National Council of Teachers of Mathematics (2000): Principles and standards for school mathematics. NCTM, Reston, VA.

Radford L. (2006):*The anthropology of meaning*. Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 39-65.

Schoenfeld A. H., Kilpatrick J. (2008):Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En: D. Tirosh, T. Wood (eds.) Tools and Processes in Mathematics Teacher Education, 321-354. Sense Publishers, Rotterdam.

Shulman L. S. (1986):*Those who understand: Knowledge growth in teaching.* Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Stephens A. C. (2006):*Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions*. Journal of Mathematics Teacher Education, 9, 249-278.

Stump S. L., Bishop J. (2002):*Preservice elementary and middle school teachers' conceptions of algebra revealed through the use of exemplary curriculum materials.* En: D. S. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant, K. Nooney (eds.) Proceedings of the Twenty-Fourth annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1903-1914, PME, Columbus, OH.

Vergnaud G. (1988): *Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre.* En: C. Laborde, N. Balacheff (eds.) Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'informatique, 189-199, La Pensée Sauvage, Grenoble, Paris.

Van Dooren W., Verschaffel L., Onghema P. (2003): *Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems*. Journal of Mathematics Teacher Education, 6, 27-52.

Watanabe T. (2008): *Algebra in elementary school: A Japanese perspective*. En: C. E. Greenes, R. Rubenstein (eds.) Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics, 183-193. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

Wubbels T., Korthagen F., Broekman H. (1997):*Preparing teachers for realistic mathematics education*. Educational Studies in Mathematics, 32, 1-28.

Walter F. Castro G, docente de la Universidad de Antioquia, Facultad de Educación Medellín, Colombia. Licenciado en Educación, Matemático, Magíster en Matemáticas, Magíster en Didáctica de las Matemáticas, Candidato a Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada, España. **wcastro@ugr.es**

Juan Díaz Godino, Catedrático de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Coordina un grupo de investigación sobre los fundamentos teóricos y metodológicos de investigación en Didáctica de la Matemática. Una selección de sus trabajos está disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino

Mauro Rivas Olivo, docente de la Universidad de los Andes, Mérida. Venezuela. Profesor en Educación Matemática y Magíster en Matemática. Universidad de los Andes. Venezuela. Master en Didáctica de la Matemática y Candidato a Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada, España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 89-107
ISSN: 1815-0640

Una clase de aritmética modular, matrices y cifrado para Ingeniería

Ángela Rojas; Alberto Cano

Resumen

El Álgebra Lineal tiene una gran cantidad de aplicaciones sin embargo se suele abordar casi siempre de una forma bastante abstracta a nivel universitario. Así que para motivar a nuestro alumnado planificamos realizar actividades académicas que hicieran uso de conceptos teóricos del Álgebra Lineal de una forma práctica, útil e interesante. Las imágenes digitales son matrices donde cada elemento de la matriz coincide con el nivel de gris dentro de una escala de grises. Por este motivo, muchas herramientas del Álgebra Lineal son frecuentemente utilizadas en el procesamiento de imágenes. Por otro lado, hemos comprobado cómo nuestros alumnos encuentran la criptografía muy atractiva, así que nos planteamos realizar algunas actividades relacionadas con el cifrado de una imagen digital que mostraremos en este artículo.

Abstract

Linear Algebra has got a lot of applications; however it is usually dealt with in quite an abstract way at the university level. So, in order to motivate our students, we are planning some activities that make use of theoretical concepts of Linear Algebra in a practical, useful and interesting way. Digital images are matrices composed by elements within a grey-scale. Hence, many Linear Algebra tools are frequently used in image processing. Besides, we have noticed that our students find cryptography very attractive; therefore, we are planning to carry out some activities in relation to encryption of a digital image we show in this paper

Resumo

O Álgebra Lineal tem uma grande quantidade de aplicações no entanto costuma-se abordar quase sempre de uma forma bastante abstracta a nível universitário. Assim que para motivar a nosso alumnado planificamos realizar actividades académicas que fizessem uso de conceitos teóricos do Álgebra Lineal de uma forma prática, útil e interessante. As imagens digitais são matrices onde a cada elemento da matriz coincide com o nível de cinza dentro de uma escala de cinzas. Por este motivo, muitas ferramentas do Álgebra Lineal são frequentemente utilizadas no processamento de imagens. Por outro lado, comprovámos como nossos alunos encontram a criptografía muito atraente, assim que nos propomos realizar algumas actividades relacionadas com o cifrado de uma imagem digital que mostraremos neste artigo.

1. Introducción

El Álgebra Lineal se suele presentar generalmente de una forma bastante abstracta en las titulaciones universitarias, alejada de aplicaciones reales. Basta con mirar lo que se hace en las universidades españolas para comprobar que la parte práctica de la asignatura se suele reducir únicamente a la resolución de la clásica relación de problemas tan habituales en Matemáticas pero sin incluir aplicaciones prácticas relacionadas con los estudios universitarios que los alumnos están cursando. Esto nos hace pensar que los profesores de Matemáticas contextualizamos poco nuestras asignaturas. Además, el hecho de presentar a nuestros alumnos aplicaciones prácticas de los conceptos que están trabajando en clase consigue una mayor motivación en el alumnado.

Resulta que el Álgebra Lineal tiene múltiples e interesantes aplicaciones que se pueden trabajar con alumnos de primer curso de cualquier ingeniería:

- La compresión JPEG se implementa a través de un producto matricial con matrices ortogonales.
- Los procesos de Markov nos permiten estudiar la evolución de un ecosistema y ver qué ocurre a largo plazo, tema de interés en la actualidad. En esta aplicación aparecen los conceptos de autovalores y autovectores que aparecen en todos los programas de Álgebra Lineal.
- El algoritmo PageRank de Google, permite ordenar de una forma adecuada las páginas que contienen enlaces con las palabras claves introducidas por el usuario. Esta ordenación está basada en el cálculo del autovector asociado al autovalor de mayor magnitud de una matriz inmensa (Fernández, 2004 y Moler, 2002).
- La edición de imágenes para hacer un fotomontaje (recortar un trozo de una imagen y pegarla en otra) se puede llevar a cabo resolviendo un sistema lineal de ecuaciones (Pérez, 2003).
- El coloreado de una imagen digital en escala de grises (proporcionando como información para el coloreado alguno trazos de color introducidos manualmente sobre la imagen en escala de grises por la persona que desea colorear la imagen) puede hacerse resolviendo también un sistema lineal de ecuaciones (Levin, 2004).
- La descomposición en valores singulares de una matriz es una técnica del Álgebra Lineal que se estudia después de la diagonalización de una matriz cuadrada. Una de las aplicaciones de esta descomposición matricial es que permite detectar los sistemas de ecuaciones mal condicionados: aquellos donde una pequeña perturbación en los coeficientes del sistema o en los términos independientes producen grandes perturbaciones en la solución. Además nos permite resolver de forma adecuada problemas de mínimos cuadrados tan habituales en Ciencias e Ingeniería (Rojas et al., 1999).
- La descomposición en valores singulares nos permite también comprimir una imagen digital (Rojas et al. 1999, Abrahamsen et al. 2001).
- El reconocimiento automático de rostros humanos (o de dígitos escritos a mano) se puede conseguir también empleando técnicas del Álgebra Lineal, concretamente los conceptos de autovectores y autovalores y la descomposición en valores singulares (Rojas et al. 2010).
- Los códigos detectores y correctores de errores permiten, por ejemplo, grabar la información de música en un CD de forma que el lector pueda detectar posibles errores (un arañazo) y corregirlos en la medida de lo posible. Eso nos permite poder reproducir correctamente la música de un CD aun estando ligeramente dañado. Algo parecido ocurre con una película grabada en un DVD. Los códigos Hamming, por ejemplo, emplean matrices booleanas (matrices de ceros y unos)

y constituyen una forma sencilla de introducir al alumnado en el tema de códigos detectores y correctores de errores (Rojas et al. 2009).

Las imágenes digitales en escala de grises no son más que matrices donde cada elemento de la matriz coincide con el nivel de gris del píxel correspondiente. Si la imagen es una imagen en color RGB entonces el color del píxel es una terna (r, g, b) con la cantidad de rojo, verde y azul presentes en el color del píxel correspondiente (el color es una combinación de los tres colores primarios, Red Green Blue); en definitiva, una imagen en color se corresponde con tres matrices, una para el rojo, otra para el verde y otra para el azul. Por esta razón, en el procesamiento de imágenes digitales se utilizan muchas técnicas del cálculo matricial.

Por otro lado, la criptografía es un tema de gran actualidad debido al auge de Internet y el correspondiente aumento de intercambio de información: comercio electrónico, transacciones bancarias, etc. Por lo tanto, es imprescindible disponer de herramientas que nos permitan intercambiar información de manera segura a salvo de intrusos malintencionados. Además no sólo se producen intercambios de mensajes de texto entre usuarios sino que también se producen intercambios de otro tipo de ficheros digitales como imágenes, ficheros de audio, etc.

Además la criptografía atrae la atención del alumnado, así que decidimos incluir actividades relacionadas con el cifrado en nuestras clases de Álgebra Lineal para así presentar aplicaciones útiles y actuales. Nosotros las vimos con estudiantes de primer curso de Ingeniería Técnica Informática en la asignatura de Álgebra Lineal. Hacen falta unos conocimientos elementales de aritmética modular. Nuestros alumnos ya poseen estos conocimientos ya que cursan también en primer curso una asignatura de Matemática Discreta donde se estudia, entre otras cosas, cómo se trabaja en aritmética modular.

En este trabajo veremos cómo relacionar matrices y cifrado de imágenes digitales. La organización del trabajo es como sigue: en la sección 2 se repasan los conceptos necesarios de aritmética modular, en la sección 3 se introduce el cifrado de una imagen mediante el uso de matrices, en la sección 4 se mostrará cómo compartir una imagen secreta entre varios participantes de modo que ninguno de ellos por separado pueda ver la imagen y sólo cuando se junten un número autorizado de ellos sí que se pueda recuperar la imagen secreta. Por último, la sección 5 se dedica a conclusiones.

Mostramos en este trabajo, por tanto, unas aplicaciones del Álgebra Lineal en temas de interés en la actualidad como es el cifrado de imágenes digitales y el reparto de una imagen secreta. Se incluirá también el código necesario para llevar a cabo algunos de los algoritmos propuestos utilizando Matlab o su versión libre Octave.

2. Matrices en Z_m

Sabemos que el conjunto Z_m está formado por los números $\{0,1,2,\ldots,m-1\}$ coincidiendo con los posibles restos de la división entera de un número entero entre el módulo m. Por ejemplo, $Z_5=\{0,1,2,3,4\}$ y en este conjunto $121=1(\mathrm{mod}\,5)$ y $-18=2(\mathrm{mod}\,5)$. La función de Matlab “mod” sirve para esto: mod(8,5)=3.

En este conjunto podemos sumar, por ejemplo, $4+3=7=2(\bmod 5)$ y también multiplicar: $4\times 2=8=3(\bmod 5)$. Resulta fácil construir la tabla de sumar y la tabla de multiplicar en este conjunto. En la tabla 1 podemos ver la tabla de multiplicar.

Podemos también observar, viendo la tabla de multiplicar de Z_5, que todos los números no nulos de Z_5 son inversibles: para cada uno de ellos siempre hay otro que multiplicado por él da como resultado la unidad. Así, el inverso de 2 módulo 5 es el 3 ya que $3\times 2=6=1(\bmod 5)$.

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2

Tabla 1: Tabla de multiplicar módulo 5

Sin embargo, como podemos ver con la tabla de multiplicar en $\boldsymbol{Z}_6$, mostrada en la tabla 2, no todos los números no nulos son inversibles. El 5 sí es inversible ya que $5\times 5=25=1(\bmod 6)$, sin embargo, 2 no es inversible.

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2

Tabla 2: Tabla de multiplicar módulo 6

El siguiente programa de Matlab permite obtener la tabla de multiplicar de la tabla 1:

```
m=5;
A=zeros(m,m);
for i=0:m-1
   for j=0:m-1
A(i+1,j+1)=mod(i*j,m);
   end
end
disp(A);
```

Para averiguar si un número es inversible o no y, en caso afirmativo, calcular el inverso, se puede utilizar el siguiente programa que calcularía todas las posibilidades (método de la fuerza bruta) hasta dar con el inverso de un número ***x*** módulo m si es que existe:

```
x=120;m=131;
inverso=0;
for inverso=1:m-1
   if mod(inverso*x,m)==1
     break;
   end
end

if inverso==0
disp('no existe inverso');
else
disp(inverso);
end
```

En el caso anterior, para $x=120$ y para $m=131$, el programa devuelve 119. Efectivamente podemos ver que $120\times 119=1\,(\bmod 131)$.

Es fácil saber cuándo un número ***x*** es o no inversible en Z_m ya que basta con que sea primo relativo con el módulo m, es decir que el máximo común divisor de ambos sea 1: $mcd\,(m,x)=1$. En el caso particular de que el módulo m sea un número primo, todos los elementos no nulos de Z_m serán primos relativos con él y, por lo tanto, serán inversibles. Matlab trae incorporada una función que calcula el máximo común divisor de dos números: la función "gcd" (greatest common divisor). Así, por ejemplo: gcd(2, 5)=1

Hemos visto anteriormente cómo podemos averiguar el inverso de un número probando todas las opciones (método de la fuerza bruta). Sin embargo, existe una forma más sencilla de calcularlo usando la identidad de Bezout: si $d=\mathrm{m}\quad(x,y)$ entonces seguro que existen dos números enteros a y b tales $ax+by=d$. Estos números a y b se calculan usando el algoritmo extendido de Euclides. Afortunadamente Matlab nos calcula los elementos de la identidad de Bezout, basta con ejecutar la orden: [d a b]=gcd(x, y)

Por ejemplo, si ejecutamos en Matlab: [d a b]=gcd(2,5), el programa nos devuelve: $d=1$, $a=-2$ y $b=1$ ya que $2\times(-2)+5\times(1)=1$. Si en la expresión anterior tomamos módulo 5 nos queda:

$$2\times(-2)+0\times(1)=1\,(\bmod 5)\Rightarrow 2\times(-2)=1\,(\bmod 5)\Rightarrow 2^{-1}=-2=3\,(\bmod 5)$$

A continuación, escribimos una función en Matlab que devuelve el inverso de un número si es que existe, en caso contrario devuelve -999, un número ficticio que sólo sirve para indicar que no hay inverso.

También se puede trabajar con matrices en Z_m. Las operaciones de sumar, multiplicar, etc. son las mismas salvo que la aritmética se hace módulo m. Sabemos que una matriz es inversible cuando su determinante es no nulo. Por ejemplo, la inversa de una matriz de orden 2 se calcula de la siguiente forma:

$$\text{Si } A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } |A|=ad-bc\neq 0 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Eso sería en la aritmética habitual pero en ahora será necesario que el número $|A|=ad-bc$ sea inversible en Z_m. Por ejemplo, la matriz: $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ no será inversible módulo 15 ya que el determinante vale 10 que no es primo relativo con el módulo, sin embargo, la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ sí será inversible módulo 7 ya que: $|A|=10=3\,(\text{mod}\,7)$ y 3 tiene inverso módulo 7 que es el 5 ya que: $3\times 5=1\,(\text{mod}\,7)$.

Además la inversa se calcularía de la siguiente forma:

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & -10 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}(\text{mod}\,7)$$

Podemos comprobar cómo: $AA^{-1}=I\,(\text{mod}\,7)$. De igual forma podemos razonar para calcular la inversa de una matriz de orden 3. Sabemos que la inversa de una matriz de orden 3 se calcula de la siguiente forma:

$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}(adj(A))^t=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ siendo A_{ij} el adjunto del elemento a_{ij} de la matriz A. Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -7 & 11 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix} \text{ en la aritmética habitual.}$$

Si trabajamos módulo 5, el determinante es 8 que módulo 5 es 3 y 3 es primo relativo con el módulo 5 por lo tanto es inversible y su inverso es 2, entonces:

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -7 & 11 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} -7 & 11 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 22 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ 16 & -16 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}(\text{mod}\,5)$$

El programa Matlab tiene una función "inv" que calcula la inversa de una matriz en la aritmética habitual. Así las órdenes de Matlab:

```
A=[ 2 1 3; 2 1 2; 0 4 1];
inv(A)
```

devuelven la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} -0.875 & 1.375 & -0.125 \\ -0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Que efectivamente coincide con la expresión $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -7 & 11 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ anteriormente obtenida. ¿Cómo podemos usar Matlab para obtener la inversa de una matriz módulo m?.

Si en el ejemplo anterior ejecutamos det(A)*inv(A) se obtiene la matriz:

$\begin{pmatrix} -7 & 11 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ es decir la transpuesta de la adjunta: $(adj(A))^t$.

Bastará con multiplicar por el inverso de 8 módulo 5 (que es un 2) y después tomar módulo 5. Así que la orden será: mod(2*(det(A)*inv(A)), 5). Un programa para calcular la inversa de una matriz A módulo m sería:

```
m=5;
A=[2 1 3;2 1 2;0 4 1];
determinante=det(A);
[d a b]=gcd(mod(determinante,m),m);
if(d~=1)
    fprintf('la matriz no es inversible');
else
    B=determinante*inv(A);
    inverso_determinante=mod(a,m);
    B=mod(inverso_determinante*B,m);
    disp(B);
end
```

También se puede calcular la matriz inversa utilizando el método de Jordan-Gauss que es muy efectivo cuando las matrices son de órdenes elevados. La única diferencia es que las operaciones hemos de realizarlas en Z_m. Vamos a detallar a continuación un ejemplo del cálculo de la inversa de una matriz de orden 3 módulo 5 utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pasos a seguir:

- Se divide la primera fila por el inverso de 2 módulo 5 que es 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 5$$

- A la segunda fila se le resta la primera multiplicada por 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 5$$

- Se intercambian las filas 2 y 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \pmod 5$$

- La fila 2 se multiplica por el inverso de 4 módulo 5 que es 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \pmod 5$$

- La fila 3 se multiplica por el inverso de 4 módulo 5 que es 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \pmod 5$$

- A la fila 2 se le resta la fila 3 multiplicada por 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \pmod 5$$

- A la fila 1 se le resta la fila 3 multiplicada por 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \pmod 5$$

- A la fila 1 se le resta la fila 2 multiplicada por 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \pmod 5$$

En esta sección hemos visto los conocimientos necesarios de aritmética modular para poder abordar en las siguientes secciones unas interesantes aplicaciones del cálculo matricial al cifrado de una imagen y al reparto de una imagen secreta.

3. Cifrado matricial de una imagen digital

3.1. Cifrado de Hill

Lester Hill (1929) propuso un método de cifrado de mensajes de texto. La idea es bastante sencilla, como vamos a exponer a continuación directamente adaptada al caso de imágenes digitales. En este caso vamos a cifrar una imagen en escala de grises como la mostrada a la izquierda de la figura 1. Se trata de una imagen de tamaño 320×320. El rango de niveles de gris varía entre 0 (correspondiente al negro) hasta 255 (correspondiente al negro). Esto supone 1 byte por píxel, ya que 0 en binario es 00000000 y 255 en binario es 11111111. Por tanto con 8 bits, es decir 1 byte, se puede almacenar un número entre 0 y 255.

Usaremos una matriz secreta K sólo conocida por emisor y receptor, por ejemplo de tamaño 2×2, como la siguiente:

$$K = \begin{pmatrix} 21 & 35 \\ 18 & 79 \end{pmatrix}$$

Iremos cogiendo los niveles de gris de los píxeles de dos en dos, empezando en la esquina superior izquierda de la matriz y moviéndonos de izquierda a derecha y de arriba a abajo: el primer bloque será a_{11}, a_{12}, el segundo bloque será $a_{13,}$ a_{14}, y así sucesivamente. Supongamos que los dos primeros niveles de gris son: 125 y 137. El cifrado de los dos niveles de gris se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 21 & 35 \\ 18 & 79 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 125 \\ 137 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7420 \\ 13073 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 252 \\ 17 \end{pmatrix} (\bmod 256)$$

Es necesario hacer la congruencia módulo 256 para obtener siempre un nivel de gris válido, es decir, un número entre 0 y 255. De esta forma, los dos niveles de gris originales que eran 125 y 137 se transformarán en 252 y 17 respectivamente.

En la figura 1 podemos ver la imagen original y la imagen cifrada resultante usando la matriz clave K anterior.

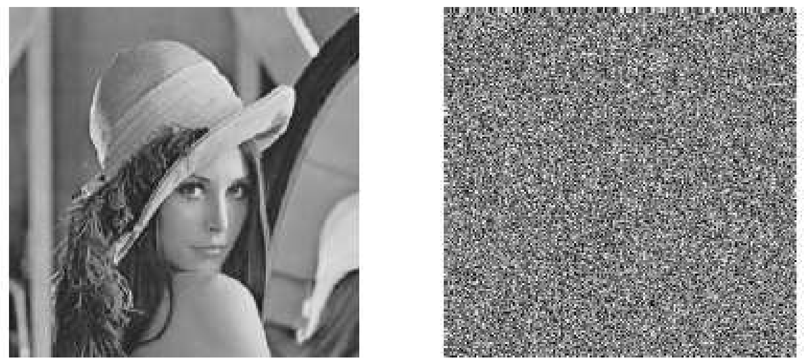


Figura 1: Cifrado de Hill: imagen original e imagen cifrada

Hay que hacer una observación importante: no vale cualquier matriz clave K. Por ejemplo, si se usa la matriz: $K = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$, el emisor podrá cifrar la imagen, pero el receptor no podrá descifrar, por lo tanto, no sirve para nada.

Como estamos trabajando módulo 256 es necesario además que $|K|$ sea un número inversible módulo 256. Para que eso ocurra $|K|$ debe ser primo relativo con 256, es decir: $\mathrm{mcd}(|K|,\ 256)=1$.

Si el determinante es un número impar será inversible. Por esta razón, $K=\begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$ no es una matriz de cifrado válida ya que: $|K|=20$ y este número no es primo relativo con 256.

Sin embargo $K=\begin{pmatrix} 21 & 35 \\ 18 & 79 \end{pmatrix}$ resulta que: $|K|=1029=5\ (\mathrm{mod}\,256) \Rightarrow \mathrm{mcd}(5,256)=1$.
Eso quiere decir que 5 tiene inverso módulo 256.

Este número resulta ser 205, de modo que:

$$K^{-1}=205\begin{pmatrix} 79 & -35 \\ -18 & 21 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 67 & 249 \\ 150 & 209 \end{pmatrix}(\mathrm{mod}\,256)$$

El receptor de la imagen cifrada usará la matriz de descifrado anterior y podrá recuperar fácilmente la imagen original.

En este método de cifrado se cambian los niveles de gris de los píxeles. En la figura 2 se muestra el histograma de frecuencias de los niveles de gris de la imagen original y en la figura 3 se muestra el histograma de la imagen cifrada. Como vemos, este método de cifrado tiende a distribuir de forma uniforme los niveles de gris.

Por eso el histograma de la imagen cifrada es prácticamente uniforme, es decir, los niveles de gris entre 0 y 255 tienen frecuencias muy parecidas en la imagen cifrada.

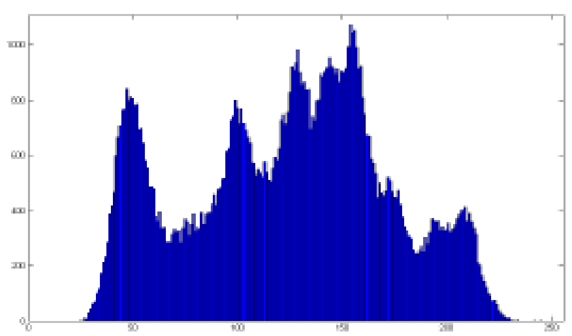


Figura 2: Histograma de la imagen original

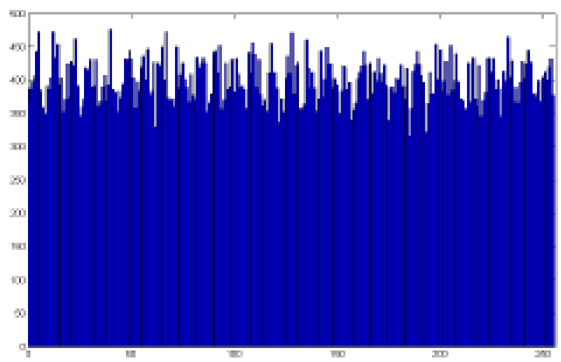


Figura 3: Histograma de la imagen cifrada

El método de Hill es muy fácil de implementar en cualquier lenguaje de programación ya que sólo son necesarias unas pocas líneas de código.

Mostramos a continuación el código en Matlab.

```
K=[21 35;18 79];
A=imread('lena.png');
A=double(A);
B=zeros(320,320);
for i=1:320
    for j=1:2:320
   resu=mod(K*[A(i,j); A(i,j+1)], 256);
        B(i,j)=resu(1); B(i,j+1)=resu(2);
    end
end
imshow(uint8(B));
```

Las líneas de código anteriores tienen una fácil interpretación: se lee la imagen con la orden "imread": la matriz A estará formada por enteros de 8 bits entre 0 y 255. Para poder trabajar con esos números es necesaria la conversión en formato "double". Después se recorre la imagen cogiendo los niveles de gris de dos en dos, se hace el producto matricial y se toma el módulo 256. Por último mostramos la imagen resultante B usando la orden "imshow" (que sólo funciona si los números son enteros de 8 bits por eso se usa antes la orden "uint8").

El método descrito admite múltiples variaciones lógicamente. En Ayarcha (2009) podemos ver cómo se sigue investigando en este tipo de cifrado. También se puede aplicar a imágenes en color.

3.2. Cambiando los píxeles de posición

Supongamos que seguimos trabajando con la imagen de la figura 1, que era de tamaño 320x320, y que las coordenadas de los píxeles se indican por (x, y) siendo x la fila, y la columna, variando entre 0 y 319.

Figura 4: Ejes de coordenadas considerados en la imagen

Hacemos ahora la transformación: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{320}$ (1)

siendo, por ejemplo, $K = \begin{pmatrix} 21 & 35 \\ 18 & 79 \end{pmatrix}$.

En este caso llevaremos el nivel de gris de la imagen original A de la posición (x, y) a la posición (x', y'). Es decir, crearemos una matriz B de tamaño 320x320 originalmente vacía y después, de acuerdo a la aplicación o transformación (1) haremos: $B(x', y') = A(x, y)$.

Esta transformación nos hace preguntarnos cuestiones muy interesantes.

1. ¿Habrá dos píxeles de la imagen original A que vayan a la misma posición en B?. Es decir, se nos está preguntando si la aplicación es inyectiva. En el caso que nos ocupa, donde la matriz K es inversible, es inmediato comprobar que la aplicación es inyectiva.
2. ¿Se quedará algún píxel de B vacío? Se nos está preguntando si la aplicación es sobreyectiva. De nuevo, al ser la matriz K inversible, es inmediato comprobar que es sobreyectiva.

Estas dos propiedades nos permiten afirmar que la transformación (1) es una biyección entre A y B, es decir, simplemente se trata de una permutación de los píxeles. En la figura 5 se muestra el resultado de la transformación (1) al aplicarla sobre una imagen.

Figura 5: Imagen original e imagen permutada

Como vemos en la figura 5, el resultado es una imagen con aspecto pseudo-aleatorio. Ahora, a diferencia del cifrado de Hill, los histogramas de la imagen original y de la imagen cifrada serán idénticos ya que sólo se han cambiado los píxeles de posición. A continuación el código Matlab:

```
K=[21 35;18 79];
A=imread('lena.png');
A=double(A);
B=zeros(320,320);
for i=1:320
    for j=1:320
        resu=mod(K*[i-1;j-1],320);
       B(resu(1)+1,resu(2)+1)=A(i,j);
    end
end
imshow(uint8(B));
```

El receptor de la imagen cifrada, usará un método idéntico sólo que en lugar de usar la matriz K usará la matriz K^{-1}. Por lo tanto, la matriz secreta K deberá ser inversible módulo 320.

Seguimos planteándonos cuestiones interesantes acerca de la transformación (1): ¿qué ocurre si aplicamos de manera reiterada la transformación anterior?

Es muy fácil comprobar que si tenemos la imagen original A y le aplicamos la transformación (1) n veces consecutivas, entonces el resultado es equivalente a aplicar una sola iteración del método (1) pero con la matriz K^n ya que:

- Primera iteración: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \pmod{320}$
- Segunda iteración: $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = K^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \pmod{320}$
- Tercera iteración: $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = K^3 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \pmod{320}$
- Así sucesivamente. Por tanto, después de n iteraciones el píxel (x_0, y_0) irá a la posición: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = K^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \pmod{320}$

Lógicamente es mucho más lento calcular 10 iteraciones, por ejemplo, del método (1) utilizando la matriz K que hacer una sola iteración del método (1) usando la matriz K^{10}. En la siguiente figura se muestra la imagen original, la imagen cifrada obtenida con 10 iteraciones y la imagen cifrada con 32 iteraciones.

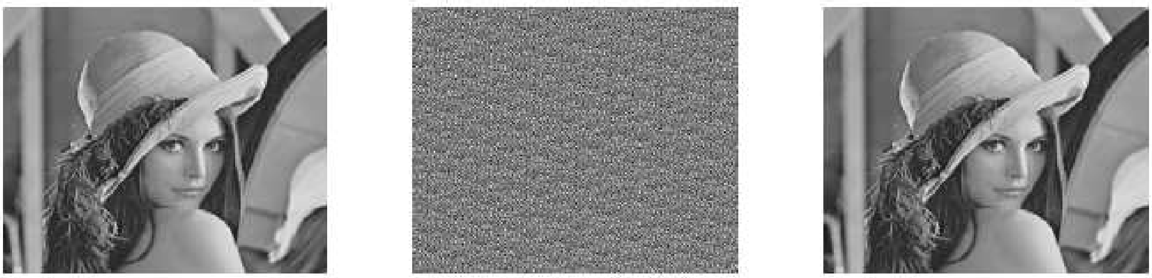


Figura 6: Imagen original, imagen permutada con 10 y 32 iteraciones respectivamente.

Como vemos en la figura 6, en este caso después de 32 iteraciones resulta que todo vuelve a su lugar ¿era esto previsible? Observemos que en nuestro ejemplo resulta que:

$$K = \begin{pmatrix} 21 & 35 \\ 18 & 79 \end{pmatrix} \Rightarrow K^{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{320}$$

Por lo tanto, al ser el resultado la matriz identidad, es lógico que cada píxel se quede en el mismo sitio tras 32 iteraciones.

Otra pregunta que nos planteamos es ¿si cambiamos la matriz K por otra diferente va a ocurrir lo mismo? Vamos a responder a continuación a esta cuestión.

Como estamos trabajando módulo 320 el número de matrices que podemos formar de tamaño 2x2 con números por tanto entre 0 y 319 es un número finito, concretamente podemos formar: 320^4 matrices diferentes. Cuando calculemos las potencias: $K, K^2, K^3, \ldots$ llegará un momento en que una potencia se repita y coincida con alguna anteriormente obtenida, es decir:

$$K^{n+m} = K^n \pmod{320}$$

Si suponemos que la matriz K es inversible, entonces multiplicando sucesivas veces por la inversa en la expresión anterior deducimos que: $K^m = I \pmod{320}$. Por lo tanto, concluimos que cualquiera que sea la matriz K empleada, siempre que sea inversible, volverá todo a su lugar transcurridas un número determinado de iteraciones. Es decir, es un proceso periódico. Ahora bien, el número de iteraciones necesarias dependerá del módulo en el que estemos trabajando (es decir del tamaño de la imagen) y de la matriz K empleada. En la tabla 3 podemos ver cuál es el periodo de la transformación (1) con la matriz K anterior pero con diferentes tamaños de imágenes.

Tamaño imagen	320x320	500x500	512x512	520x520
Periodo	32	100	256	168

Tabla 3: Periodo de la transformación.

El siguiente código sirve para calcular el periodo:

```
K=[21 35;18 79];
resu=[1 0;0 1];
for k=1:1000
    resu=resu*K;
    resu=mod(resu,320);
    if resu==[1 0;0 1]
        fprintf('periodo=%d \n',k);
        break;
    end
end
```

Por último, observar que un sistema de cifrado se considera realmente seguro si incluye dos fases en el proceso de cifrado: una fase de *confusión* donde los píxeles cambien de posición y una fase de *difusión* donde los píxeles cambien sus niveles de gris. En esta sección se ha visto cómo podemos llevar a cabo cada una de estas fases con un método matricial muy sencillo.

4. Reparto de secretos

El reparto de secretos es un protocolo criptográfico que persigue repartir un secreto entre varios participantes de modo que sólo se pueda recuperar el secreto de forma íntegra cuando se junten un número concreto de ellos.

Pensemos, por ejemplo, en la clave secreta que abre una caja blindada de un banco. No es adecuado por motivos de seguridad que sea conocida por un solo empleado del banco. Por el contrario, puede ser deseable que varios empleados autorizados dispongan de parte de esa información pero que sólo se pueda conseguir la clave cuando se junten un número determinado de empleados. Por ejemplo, en lo que se llama un esquema umbral (3, 2) habrá tres participantes en este proceso, cada uno de ellos con cierta información, pero sólo cuando se junten dos de ellos se podrá recuperar íntegramente la clave secreta (Shamir, 1979).

Pero no sólo puede interesar estudiar formas de repartir un número secreto entre varios participantes sino que en ocasiones puede interesar algo similar pero con otro tipo de ficheros. Pensemos en una imagen digital con posiciones estratégicas dentro de un mapa en el ámbito militar o en la imagen de un prototipo de un nuevo coche para una empresa automovilística, etc. Es lógico que deseen mantener en secreto este tipo de imágenes. Pues bien, en esta sección veremos cómo emplear esquemas de reparto de secretos en el caso de imágenes digitales.

4. 1. Reparto de secretos con métodos matriciales

Vamos a describir un esquema (2, 2) muy sencillo para repartir una imagen secreta. Se dará cierta información cifrada a cada uno de los participantes pero de tal modo que ninguno por separado tenga información sobre la imagen secreta pero al juntarse los dos sí que se pueda recuperar íntegramente dicha imagen.

Vamos a fijarnos en la imagen de la izquierda de la figura 7. Se trata de una imagen de tamaño 256x256. Nuestro objetivo es aplicarle un esquema de reparto de secretos (2, 2).

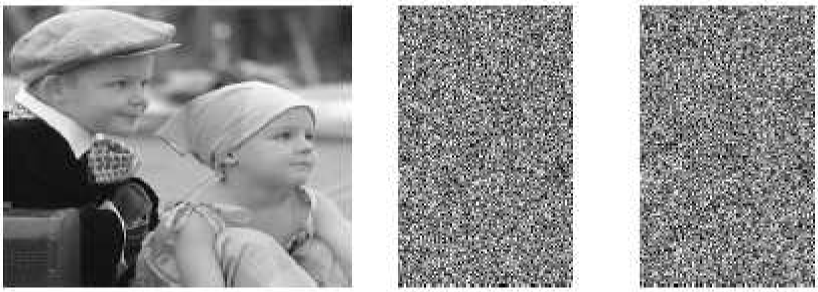


Figura 7: Imagen original y las dos sombras

Supongamos que elegimos como clave secreta de nuevo la matriz:

$$K = \begin{pmatrix} 21 & 35 \\ 18 & 79 \end{pmatrix}$$

Efectuamos un cifrado de Hill. Supongamos que la imagen cifrada es S. Formamos una matriz S_1 con las columnas impares de la matriz resultado S y otra S_2 con las columnas pares. Entonces ambas matrices tendrán de tamaño 256x128. Estas imágenes se muestran también en la figura 7 y se suelen conocer como “sombras” de los participantes.

Al participante 1 se le proporciona la sombra S_1 y como clave secreta la primera columna de K. Al segundo participante se le proporciona la sombra S_2 y como clave secreta la segunda columna de K. El secreto se puede recuperar fácilmente cuando se junten las dos sombras.

4.2. Reparto de secretos con recurrencias

Vamos a ver ahora un esquema (3, 2). Supongamos que tenemos la imagen de la siguiente figura que dividiremos en bloques 3x3. La imagen es de tamaño 320x320, así que podemos completar con una fila y columna de más, para que haya un número exacto de bloques de tamaño 3x3 (por ejemplo, repitiendo la última fila y columna).

Figura 8: Imagen original

Supongamos que C_1 de tamaño 3x3 es uno de estos bloques de la imagen secreta, en nuestro caso con números entre 0 y 255 ya que son niveles de gris de la imagen. Elegiremos también una matriz C_2 de tamaño 3x3 de forma aleatoria con números entre 0 y 255. Sean A y B dos matrices también de ese tamaño. Vamos a aplicar la siguiente recurrencia:

$$C_n = AC_{n-1} + BC_{n-2} \pmod{256} \quad \text{siendo } n \geq 3 \qquad (2)$$

Por ejemplo:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 29 & 18 & 83 \\ 147 & 237 & 227 \\ 126 & 113 & 126 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 115 & 19 & 66 \\ 53 & 4 & 88 \\ 246 & 0 & 233 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Supongamos que hacemos n iteraciones, por ejemplo, $n = 7$. Puede comprobarse que usando la recurrencia (2) se obtiene:

$$C_3 = \begin{pmatrix} 111 & 211 & 163 \\ 174 & 90 & 28 \\ 166 & 70 & 137 \end{pmatrix}, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7 = \begin{pmatrix} 147 & 78 & 203 \\ 3 & 173 & 201 \\ 55 & 180 & 4 \end{pmatrix}$$

El código sería:

```
C=zeros(3,3,7);
A=[115 19 66;53 4 88;246 0 233];
B=[1 0 0;2 1 2;3 1 5];
C(:,:,1)=[3 4 5;7 6 5;2 3 1];
C(:,:,2)=[29 18 83;147 237 227;126 113 126];
for n=3:7
    C(:,:,n)=mod(A*C(:,:,n-1)+B*C(:,:,n-2),256);
end
```

Si la matriz B es inversible módulo 256 conseguiremos que este proceso sea reversible ya que, conociendo C_n y C_{n-1} podremos recuperar C_{n-2}, ya que despejando de la ecuación (2) tenemos que:

$$C_{n-2} = B^{-1}(C_n - AC_{n-1}) \pmod{256} \qquad (3)$$

Supongamos que tenemos 3 participantes en el reparto de secretos y que al participante 1 se le proporciona C_5, al participante 2 se le proporciona C_6 y al participante 3 se le proporciona C_7. Los tres conocen las claves A y B.

Entonces, usando la fórmula (3) podrán recuperar el secreto, en este caso C_1, en los siguientes casos:

- Cuando se junten los participantes 1 y 2: conocemos C_5 y C_6, bastará aplicar la fórmula (3) para $n = 6$ para recuperar C_4. Con C_4 y C_5 se recuperará C_3 utilizando la fórmula (3). Y así sucesivamente hasta llegar a C_1.
- Cuando se junten los participantes 2 y 3: conocemos C_6 y C_7, bastará aplicar la fórmula (3) para $n = 7$ y determinaremos C_5. Y así sucesivamente hasta llegar a C_1.
- Cuando se junten los participantes 1 y 3: conoceremos C_5 y C_7, como $C_7 = AC_6 + BC_5 \pmod{256}$, si la matriz A es también inversible (en nuestro ejemplo lo es) podremos despejar de la expresión anterior y obtener C_6 y después razonamos como en los casos anteriores.

A continuación vamos a aplicar esta idea a cada bloque 3x3 de la imagen. Cada bloque de la imagen nos dará un C_1 y para cada uno de ellos se obtendrá un C_2 de forma pseudoaleatoria (uno por cada bloque). Las matrices A y B son las mismas matrices que usamos en el ejemplo anterior para todos los bloques de la imagen. Hacemos 7 iteraciones y C_5, C_6 y C_7 serán las sombras de los tres participantes. El resultado puede verse en la siguiente figura:

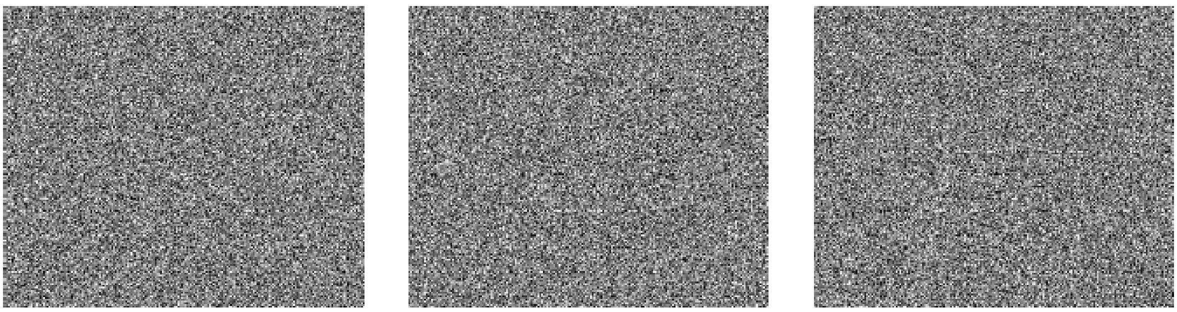


Figura 9: Sombras de los tres participantes

Como hemos dicho antes, cuando se junten dos cualesquiera de los tres participantes se podrá recuperar exactamente la imagen de la figura 8.

Existen otros métodos del Álgebra Lineal para el reparto de secretos que no se incluyen en este artículo por falta de espacio (Shamir 1979, Thien y Lin 2002, Rojas 2008).

5. Conclusiones

En este trabajo hemos visto cómo las matrices y la aritmética modular tienen una interesante aplicación en el mundo actual como es el cifrado de una imagen digital y el reparto de una imagen secreta entre varios participantes.

Estas ideas se pueden llevar al aula en clases prácticas o plantearlas como trabajos opcionales a nuestros alumnos de la asignatura Álgebra Lineal en cualquier titulación de Ingeniería.

Esperamos que este material pueda ser útil a otros profesores de Matemáticas que se animen a llevar estas ideas al aula.

Bibliografía

Abrahamsen A.,Richards,D. *Image compression using singular value decomposition*. Consultado el 20 de julio de 2010 de la dirección en: http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/laproj/fall2001/adamdave/textwriteup.pdf

Acharya B. et al. (2009). Image *encryption with advanced Hill Cipher algorithm*. International Journal of Recent Trends in Engineering, 1(1), 663-667.

Fernández, P. (2004). *El secreto de Google y el Álgebra Lineal*. Boletín de la Sociedad Matemática Española, 30, 115-141.

Hill, L.S. (1929). *Cryptography in an algebraic alphabet*. The American Mathematical Monthly, 38, 135-154.

Levin, A. (2004). *Colorization using optimization*, ACM Transactions on Graphics 23, nº 3, Proceedings of ACM SIGGRAPH 2004, 689-604.

Moler, C. (2002). *The world's largest matrix computation.* Consultado en línea el 20 de julio de 2010 en: http://www.mathworks.com/company/newsletters/news_notes/clevescorner/oct02_cleve.html

Pérez, P., Gangnet, M., Blake, A. (2003). *Poisson Image Editing*. ACM Transactions on Graphics , 22(3), 313-318.

Rojas, A., Torralbo, M. (1999). *Aproximaciones de bajo rango de una matriz*. SUMA: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, 30, 47-51.

Rojas, A. (2008). *Cómo repartir un secreto*. Epsilon, 70, 41-49.

Rojas, A. Cano, A. (2009). *Aplicaciones de las Matemáticas en la vida cotidiana*. Actas de las XIV JAEM: Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Girona (España).

Rojas, A., Cano, A. (2010). *Trabajando con imágenes digitales en clase de Matemáticas.* La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 13(2), 317-336.

Shamir, A. (1976). *How share a secret*. Communications of the ACM, 22 (11), 612-613.

Thien, C.C., Lin, J.C. (2002). *Secret image sharing*. Computer and Graphics, 26 (5), 765-770.

Ángela Rojas Matas. Licenciada en Matemáticas, Doctora en Informática. Profesora del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Córdoba, España. Durante muchos años ha impartido las asignaturas de Matemática Discreta y Álgebra Lineal en el primer curso de la titulación universitaria de Ingeniería Técnica en Informática.
Angela.Rojas@uco.es

Alberto Cano Rojas, nacido en Córdoba (España) en 1987, es estudiante de último curso de Ingeniería Informática de la Universidad de Córdoba. Alumno colaborador del departamento de Matemáticas de la Universidad de Córdoba durante varios años. Interesado en las Matemáticas desde un punto de vista recreativo y en las aplicaciones de las Matemáticas en el mundo de la Informática. **.i52caroa@uco.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 109-125
ISSN: 1815-0640

Registros de representação semiótica em atividades de Modelagem matemática: uma categorização das práticas dos alunos

Lourdes María Werle de Almeida; Rodolfo Eduardo Vertuan

Resumo

O trabalho busca uma aproximação entre Modelagem Matemática e Registros de Representação Semiótica. A partir da análise de atividades de Modelagem desenvolvidas com grupos de alunos identificamos que suas práticas no que se refere à produção e articulação de registros podem ser agrupadas em três categorias: usam diferentes registros, mas não estabelecem relações entre eles; realizam conversões entre pares de registros, mas não chegam a coordenar a totalidade de registros; fazem a coordenação entre os registros e estabelecem relações com o problema em estudo.

Abstract

In this paper we are looking for an approach between Mathematical Modeling and the Registers of Semiotics Representation. Starting from the analysis of Modelling activities developed by students we identified that them practices in what refer to the production and articulation of registers in the extent of the development of the activities can be contained in three categories: they use different registers, but they don't establish relationships among them; they accomplish conversions among two registers, but they don't get to coordinate the totality of the registers; they coordinate the different registers and they establish relationships with the modelling activity.

Resumen

El trabajo busca una aproximación entre Modelización Matemática y Registros de Representación Semiótica. A partir del análisis de actividades de Modelización desarrolladas con algunos grupos de alumnos identificamos que sus prácticas en lo que se refiere a la producción y articulación de registros pueden ser agrupadas en tres categorías: usan diferentes registros, pero no establecen relaciones entre ellos; realizan conversiones entre pares de registros, pero no llegan a coordinar la totalidad de ellos; y los que hacen la coordinación entre los registros y establecen relaciones con el problema en estudio.

1. Introdução

Foco de pesquisas na área da Educação Matemática, a aprendizagem tem sido entendida como um processo dinâmico, complexo e influenciado por múltiplos fatores, combinados de tal modo que, torna-se praticamente impossível discuti-los e inferir sobre suas influências de forma isolada.

Neste trabalho, para tratar da compreensão dos alunos em relação à conceitualização dos objetos matemáticos, recorremos à Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Segundo o autor, o que os alunos fazem das representações semióticas de objetos matemáticos são determinantes para a compreensão em matemática. No entanto, o modo como os alunos lidam com tais registros depende, em parte, das atividades desenvolvidas em ambiente escolar. Neste sentido, tratamos da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica.

Para subsidiar nossas argumentações sobre o potencial da Modelagem para proporcionar a coordenação entre os diferentes registros de representação associados a um objeto matemático e como esta coordenação influencia a compreensão dos alunos a respeito destes objetos, desenvolvemos atividades de modelagem com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática e de alunos de um curso de Especialização em Educação Matemática com alunos adultos e idades entre 19 e 28 anos.

A análise das práticas destes alunos nos leva a identificar três categorias com relação às práticas dos alunos no que diz respeito ao uso que fazem dos registros de representação quando envolvidos com atividades de modelagem, quais sejam: os alunos usam diferentes registros, mas não estabelecem relações entre eles; os alunos realizam conversões entre pares de registros, mas não chegam a coordenar a totalidade dos registros; os alunos fazem a coordenação entre diferentes registros e estabelecem relações com o problema de que trata a atividade de modelagem.

2. Conceitualização em Matemática e os Registros de Representação Semiótica

Diversas pesquisas, especialmente no âmbito da Educação Matemática, têm tratado da produção dos registros dos alunos, do modo como eles lidam com tais registros e das relações destes registros com a aprendizagem. Neste sentido, a aprendizagem de conceitos matemáticos estaria subordinada, ao menos em parte, às representações deste conceito, uma vez que, em Matemática, os objetos matemáticos, enquanto ideias, tornam-se acessíveis por meio de suas diferentes representações.

A compreensão do conceito associado ao objeto matemático[1], todavia, implica em ir além de identificar e saber operar suas representações prototípicas. Implica em reconhecer nos diferentes registros o mesmo objeto matemático, bem como saber coordenar estes registros. Considerando esse entendimento a respeito da compreensão dos conceitos em Matemática, tratamos, neste texto, da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Segundo essa teoria, compreender um conceito matemático implica em ser capaz de diferenciar o objeto matemático da representação que o torna acessível. Para Duval (2003), "[...] os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos" (p.14) e o acesso aos objetos matemáticos acontece por meio da utilização de uma representação. Estas representações podem ser mentais, internas (ou computacionais) e semióticas (Duval, 2004). As representações mentais cumprem a função de objetivação[2] e consistem num conjunto de imagens e concepções que um

[1] Objeto matemático é "*qualquer entidade ou coisa à qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de alguma maneira na atividade matemática*" (Godino, Batanero & Font, 2006, p. 5).

[2] Objetivação *"[...] é uma operação imaginante e estruturante, pela qual se dá uma forma (ou figura) especifica ao conhecimento acerca do objeto, tornando-o concreto, quase tangível, o conceito abstrato, materializando a palavra"* (SÁ, 1993, p.39).

indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação ou sobre aquilo que está associado ao objeto ou a situação (Duval, 2004). Já as representações internas ou computacionais, segundo Duval (2004), são aquelas que privilegiam a execução automática de uma determinada tarefa, a fim de produzir uma resposta adaptada à situação. Trata-se, portanto, de um registro mecânico que o sujeito executa sem pensar em todos os passos necessários para a sua resolução, tal como acontece quando realizamos o algoritmo da multiplicação, por exemplo.

As representações semióticas, por sua vez, são produções constituídas pelo emprego de signos[3] pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento (Duval, 2004). Tais representações são externas e conscientes ao indivíduo e realizam de maneira indissociável as funções de objetivação e a manipulação, de forma intencional, com vistas à obtenção de respostas.

Duval, ao longo de suas pesquisas sobre as representações semióticas, tem usado o termo ‘registros de representação semiótica’ para designar os diferentes tipos de representação semiótica. As representações língua natural, tabular, gráfica, figural e algébrica são exemplos de tipos diferentes de registros de representação. Cada uma delas consiste num registro de representação[4] diferente (ou num sistema de representação).

Neste sentido, um objeto matemático pode ser identificado por meio de diferentes registros de representação semiótica, os quais podem pôr em evidência distintas características do objeto.

Considerando que compreender um objeto matemático implica em conhecer suas distintas características e propriedades, Duval (2003) argumenta que

> Na medida em que a matemática tende a diversificar os registros de representação, sua aprendizagem específica pode contribuir fortemente para o desenvolvimento das capacidades cognitivas dos indivíduos. Visar esse desenvolvimento sem se fixar de forma míope sobre a aquisição de uma ou outra noção particular é, provavelmente, o aporte maior que se pode esperar da aprendizagem matemática para a sua educação (p.30).

O uso de diferentes registros associados a um objeto matemático envolve duas operações fundamentais: o tratamento e a conversão.

O tratamento consiste em uma transformação interna a um registro, mantendo o mesmo sistema de registros. A simplificação de uma fração é um exemplo de tratamento.

Já a conversão, segundo Duval (2004) consiste na

> [...] transformação de um registro de um sistema de representação para outro sistema de representação, conservando, pelo menos, a referência ao mesmo objeto ou à mesma situação apresentada, mas mudando, de fato, o conteúdo de representação (p.30).

[3] Tomamos o signo como algo que, para alguém, toma lugar de outra coisa (o objeto), não necessariamente em todos os aspectos desta coisa. É, portanto, uma representação parcial do objeto, em termos de sua forma ou capacidade (PEIRCE, 2005).
[4] Usamos os termos “registro” e “registro de representação” com o mesmo significado de “registro de representação semiótica”.

Passar de uma tabela para um gráfico, ou de um gráfico para uma expressão de algébrica, são exemplos de conversões. Segundo o autor, a conversão é uma atividade cognitiva essencial, aquela “[...] que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão” (Duval, 2004, p.16).

Considerando estes mecanismos, é importante que as conversões sejam realizadas nos dois sentidos, uma vez que as dificuldades e os custos cognitivos relacionados às conversões realizadas num sentido podem não ser iguais àqueles associados às conversões realizadas noutro sentido. Realizar as conversões nos dois sentidos implica em conhecer características do conceito matemático que se evidenciam em cada um dos registros (o de chegada e o de partida), mantendo a referência ao objeto em estudo, mesmo que em sistemas semióticos distintos.

Esta dinâmica – realizar as conversões nos dois sentidos – pode possibilitar e potencializar a apreensão conceitual de um objeto matemático, bem como levar à identificação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência. A tais atos cognitivos, Duval (2004) denomina “noésis” que, por sua vez, só acontecem por meio de significativas “semiósis”, entendida como “a apreensão ou a produção de uma representação semiótica” (p.14). Para o autor, não existe noésis sem semiósis, ou seja, não há conceitualização de um objeto matemático sem utilizar, para isso, representações deste objeto. Isto implica em dizer que a compreensão em Matemática acontece na medida em que o sujeito que aprende, consegue coordenar os vários registros de representação associados a um mesmo objeto matemático.

Neste sentido, Jahn e Karrer (2004) colocam que

> [...] a aprendizagem de um conceito matemático consiste em desenvolver coordenações progressivas entre vários sistemas de representação semiótica. Sua teoria (de Duval) está inserida no modelo cognitivo do processo da aprendizagem matemática, cujo foco está na complexidade cognitiva do pensamento humano. Neste contexto, a principal preocupação reside na análise das condições cognitivas internas, necessárias para o estudante entender Matemática, as quais compõem o que ele intitula de arquitetura cognitiva. Desta forma, na concepção desse autor, o entendimento matemático depende, então, da mobilização de vários registros e, por conseqüência, um indivíduo aprende Matemática se ele integra, em sua arquitetura cognitiva, todos os registros necessários como novos sistemas de representação (p.16-17).

Segundo Damm (1999), a coordenação entre registros de representação permite que os alunos, ao trabalharem com um determinado objeto matemático, troquem de registro de modo a escolher aquele em que os custos de tratamento e funcionamento sejam menores.

É possível estabelecer, então, a seguinte conjectura: saber coordenar diferentes registros implica em potencializar a realização de tratamentos e conversões entre registros, enquanto a coordenação em si, é alcançada quando os sujeitos realizam tratamentos e conversões.

Diante desta conjectura e do fato de que a conversão é uma atividade cognitiva que o professor tem de provocar nas aulas, faz-se conveniente adotar um caminho para a aprendizagem matemática que vislumbre a necessidade de realizar conversões. Com esta perspectiva tratamos da Modelagem Matemática.

3. Um Caminho para a Aprendizagem Matemática – a Modelagem Matemática

Entendemos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem da Matemática, a partir da qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática (Almeida e Brito, 2005). Por ser assim entendida, a Modelagem tem como aporte maior a realização de investigações em sala de aula em que diferentes hipóteses são elencadas e por meio das quais diferentes resoluções matemáticas são empreendidas com vistas a resolver um problema. Neste ambiente de investigação, tão importante como as respostas encontradas para os problemas investigados, são as discussões realizadas durante a resolução do problema.

Em atividades de Modelagem, de modo geral, os alunos são levados a escolher um problema de seu interesse, fato que, em muitas situações, faz os alunos sentirem-se corresponsáveis pela investigação. Desse modo, é como se os estudantes aceitassem a um convite, o de responder a um problema por meio da matemática.

Ao fazer uso da matemática, considerando tanto o uso de algoritmos quanto conceitos matemáticos[5] em si, os alunos podem, ou aplicar conhecimentos já construídos durante as aulas, ou construir novos conhecimentos. Em muitas situações, ao se envolver com atividades de Modelagem, os alunos se deparam diante de um obstáculo para o qual não possuem, provisoriamente, conhecimentos suficientes para superá-lo, emergindo assim a necessidade de construir esse conhecimento por meio dessa atividade. Logo, em Modelagem, os alunos tanto ressignificam conceitos já construídos quanto constroem outros diante da necessidade de seu uso.

Os interesses e conhecimentos de cada grupo de alunos envolvido com atividades de Modelagem, remetem à resoluções que podem fazer uso de diferentes conceitos matemáticos. Neste sentido, ao compartilhar as diferentes resoluções, os alunos tanto põe em evidência aquilo que sabem e pensam a respeito do assunto em questão, quanto conhecem outros modos de pensar sobre o assunto – em termos da Matemática usada e das hipóteses e simplificações realizadas.

Segundo Almeida e Ferruzzi (2009)

> [...] a atividade de Modelagem se configura como uma atividade que, para os envolvidos na atividade, implica em um conjunto de ações como a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático), a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a analise da solução que implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não (p.120 e 121).

[5] Utilizamos os termos “conceito matemático” e “objeto matemático” com o mesmo significado.

Embora tais ações não aconteçam seguindo uma ordem determinada, geralmente, o ponto de partida consiste em um problema a ser investigado. Segue-se então a busca e/ou coleta de informações que viabilizem essa investigação. A partir de então, os alunos elencam hipóteses que norteiam toda a resolução, desde a realização de simplificações até a obtenção de uma conclusão para o problema e a comunicação dos resultados, passando pela construção de um modelo matemático da situação.

O modelo matemático, por sua vez, é uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam (Kehle e Lester, 2003). Segundo Lesh (2010), um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e permitir a realização de previsões sobre este outro sistema. Ainda de acordo com o autor, é possível que o modelo construído para representar uma situação num dado momento sirva, também, para representar outro sistema em um momento posterior.

Um modelo matemático pode ser escrito utilizando-se para isso diferentes sistemas semióticos. Uma equação, uma tabela, um gráfico, são exemplos de sistemas semióticos que podem ser utilizados para representar modelos matemáticos. Neste contexto, em que a Modelagem Matemática consiste na obtenção, validação e aplicação de modelos matemáticos (D`Ambrosio, 1986), o uso de diferentes registros de representação semiótica parece não só viabilizar a resolução do problema, como potencializar tal resolução, na medida em que diferentes características dos objetos matemáticos, advindas de suas diferentes representações em registros distintos, possibilitam diferentes interpretações do problema.

Esta complementaridade de interpretações advindas da complementaridade de registros é o que justifica a nossa escolha pela Modelagem Matemática como caminho para a aprendizagem matemática. Ora, se a Modelagem Matemática leva à produção, à interpretação e à coordenação entre diferentes registros, o tratamento e a conversão destes registros são atividades cognitivas necessárias, independente de serem realizadas de modo espontâneo ou não. Se tais atividades cognitivas acontecem em atividades de Modelagem Matemática, os alunos são levados a conhecer e a relacionar as diferentes características dos objetos matemáticos, dadas nos diferentes registros. Isso implica em considerar os objetos matemáticos não apenas como ferramentas úteis para a resolução dos problemas, mas sim, como importantes em si, enquanto conceitos. Se há coordenação entre registros, podemos inferir, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que há aprendizagem dos conceitos matemáticos e, como conseqüência, que atividades de Modelagem aliadas a esta teoria, contribuem para a aprendizagem.

4. Práticas dos alunos identificadas em relação ao uso dos registros nas atividades de Modelagem Matemática

As considerações que fazemos são advindas de informações que coletamos durante dois cursos ofertados pelos autores deste texto com a temática “Modelagem Matemática”. O primeiro deles refere-se à disciplina de Modelagem Matemática oferecida em um curso de Especialização em Educação Matemática, tendo como público professores de Matemática da Educação Básica. O segundo diz respeito a um curso de extensão em Modelagem oferecido a alunos do 1º ano do curso de um curso de Licenciatura em Matemática.

Para o desenvolvimento das atividades de Modelagem, nestes cursos, nos orientamos nas argumentações de Almeida e Dias (2004), que ponderam que a introdução de atividades de Modelagem Matemática em cursos regulares pode ser realizada de forma gradativa. As autoras apontam três momentos pelos quais podem passar os alunos de modo a se ambientarem à dinâmica de atividades de Modelagem. Em um primeiro momento o professor desenvolve com os alunos um trabalho de Modelagem já estruturado, cabendo a ambos, alunos e professor, a resolução do problema. Num segundo momento o professor propõe uma situação-problema no contexto não-matemático, para que os alunos selecionem variáveis, formulem hipóteses, construam um modelo, validem-no e o apliquem ao contexto inicial de modo a tirar conclusões. Finalmente, no terceiro momento, os alunos desenvolvem uma atividade de Modelagem Matemática desde a escolha do problema até a obtenção de respostas para o mesmo. Segundo as autoras,

> [...] na medida em que o aluno vai realizando as atividades nos diferentes momentos [...] a sua compreensão acerca do processo de Modelagem, da resolução dos problemas em estudo e da reflexão sobre as soluções encontradas vai se consolidando (Almeida e Dias, 2004, p. 26).

Em relação ao primeiro momento, foram desenvolvidos trabalhos sobre as temáticas “Incidência de Câncer”, “Movimento das Marés”, “Embalagens” e “Número de Veículos de uma cidade”. Reunidos em grupos, os alunos discutiram, de acordo com a dinâmica do segundo momento apresentado para as atividades de Modelagem, situações relacionadas à “Carga Tributária”, aos “Estados de Nupcialidade”, às “Alergias” e ao “Tratado de Kyoto”. Finalmente, em relação ao terceiro momento os alunos estudaram os temas “Mercúrio das lâmpadas fluorescentes”, “Dinâmica do Desemprego no Brasil”, “Venda de Automóveis” e “Novos Velhos”, entre outros.

Frente às análises das informações que coletamos por meio de gravações em áudio e vídeo e por meio da análise dos registros dos alunos durante cada uma das atividades de Modelagem desenvolvidas, tanto no que concerne à dinâmica de construção de modelos e aplicação destes às questões investigadas, quanto no que diz respeito ao comportamento dos alunos diante de tais atividades em relação aos registros matemáticos utilizados e ao modo como eram utilizados, verificamos a presença marcante de três práticas.

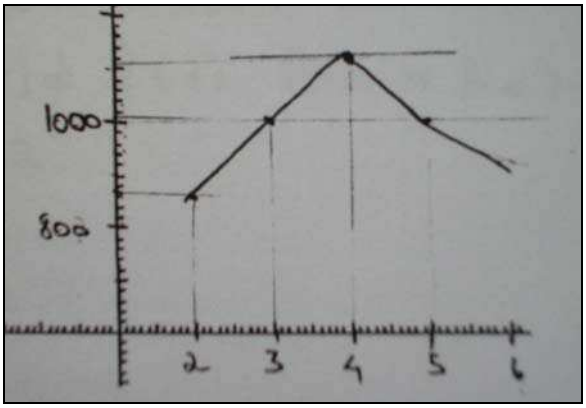
Notamos que, às vezes, os diferentes registros de um objeto matemático eram mobilizados, mas não eram relacionados entre si, sendo o “tratamento” a única transformação presente. Outras vezes, os diferentes registros surgiam por meio de conversões obtidas a partir do registro inicial. Neste caso, os alunos estabeleciam relações entre pares de registros e não entre todos os registros utilizados. Outra prática presente nos registros dos alunos consistia na coordenação dos registros associados aos objetos matemáticos envolvidos. As interpretações advindas de tal coordenação eram utilizadas para responder à situação-problema.

Frente à identificação destas práticas estabelecemos três categorias que levam em consideração o modo como foram usados os registros nestas atividades, conforme apresentamos a seguir.

4.1. Categoria 1: Diferentes registros são utilizados sem que se estabeleçam relações entre eles (os alunos fazem somente tratamentos).

Durante o desenvolvimento das primeiras atividades de ambos os cursos, os alunos utilizavam somente a conversão do registro inicial em que o problema era apresentado para o registro algébrico, concluindo a atividade com este registro do modelo matemático. Esta prática conduzia a incoerências em relação à análise da situação problema em estudo.

Em outros momentos, os alunos utilizavam os diferentes registros de um objeto matemático, sem, no entanto, estabelecer relações entre eles. Este foi o procedimento de alunos do 1º ano do curso de Licenciatura em Matemática para buscar uma representação gráfica para o modelo $V(x) = 600x - 100x^2 + 4x^3$ obtido na situação “Embalagens”. Para construir o gráfico tomando somente alguns pontos, sem considerar características deste tipo de função, obtiveram representações gráficas não adequadas à expressão algébrica *V(x)* (figura 1).



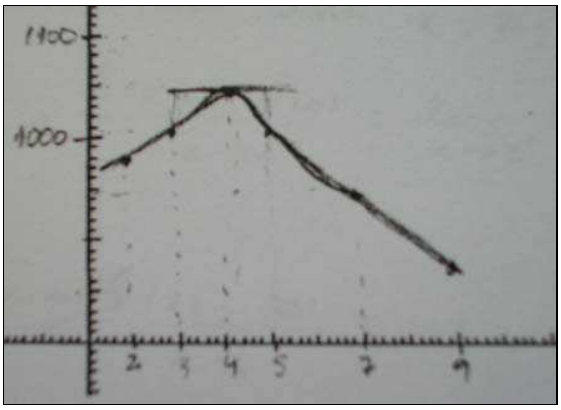


Figura 1: Representações gráficas equivocadas da função V(x)

Segundo Duval (2003),

> [...] a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1 etc.) (p.17)

Neste exemplo, encontrar pares ordenados e representá-los adequadamente no plano cartesiano parece não ter sido suficiente para que os alunos esboçassem o gráfico da função cúbica.

A dificuldade de associar adequadamente diferentes registros também se evidenciou na atividade da Carga Tributária Brasileira, quando os grupos apresentavam as diferentes resoluções uns aos outros. Um grupo utilizou uma função cúbica para ajustar aos dados, a partir da ideia de um aluno que reconhecia na tendência dos dados este tipo de curva.

No entanto, dos 10 alunos presentes no curso naquele dia, somente este aluno conhecia a representação gráfica desta função polinomial. A interação com os alunos nos fez perceber que mesmo conhecendo a simbologia $y = x^3$ e mesmo sabendo encontrar raízes de uma função polinomial, nunca tiveram a possibilidade de relacionar esta expressão com nenhum tipo de representação gráfica. Isso aponta para a necessidade de se utilizar e de se relacionar os diferentes registros de um objeto matemático para compreendê-lo, uma vez que “a compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro” (Duval, 2003, p.21).

4.2. Categoria 2: Os alunos realizam conversões entre pares de registros, mas não chegam a coordenar a totalidade dos registros

A maior parte dos registros produzidos pelos alunos se enquadra nesta categoria, uma vez que, em atividades de Modelagem, as conversões não são realizadas por uma questão de escolha, mas de necessidade. Necessidade de trocar de registro para melhor interpretar a situação em estudo, necessidade de obter uma representação em outro registro a fim de complementar os registros iniciais ou a fim de responder ao problema discutido, ou ainda, de trocar de registro para realizar tratamentos matemáticos sem tantas dificuldades. Realizar uma conversão implica em estabelecer relações entre as representações de saída e de chegada, relações estas que têm em comum, ao menos alguns aspectos do objeto matemático representado. Como afirma Duval (2003), “[...] passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto” (p.22). Segundo Almouloud (2007)

> [...] tudo o que se pode observar numa representação não é necessariamente pertinente, ou seja, representativo ou significante e, por outro lado, o que é pertinente nem sempre é percebido pelos aprendizes [...]. É por meio do estudo sistemático da passagem de um registro para outro que se apresenta a possibilidade de perceber a importância da forma das representações e da identificação daquelas que são pertinentes (p.75 e 76).

Nesta categoria enquadram-se aquelas conversões realizadas entre pares de registros, sem que a coordenação seja utilizada em sua plenitude.

O que podemos perceber é que, nas atividades que se encaixam nesta categoria, dificilmente os alunos realizavam a validação e aplicação do modelo encontrado. A obtenção de um modelo matemático dado em seu registro algébrico era, ao ver dos alunos, suficiente para pôr fim à investigação.

Um exemplo desta categoria pôde ser observado na situação “Mercúrio das Lâmpadas Fluorescentes”, desenvolvida por um grupo de alunos no terceiro momento da Modelagem Matemática. A situação foi suscitada por uma matéria de jornal que denunciava o descaso da universidade com as lâmpadas fluorescentes descartadas, a céu aberto, expondo à comunidade ao risco de contaminação por mercúrio com a quebra destas lâmpadas.

A partir da matéria do jornal os alunos buscaram informações sobre a problemática e definiram a questão: Que quantidade de mercúrio tem sido liberada (ou pode ser) no ambiente advindo das lâmpadas fluorescentes descartadas, a céu aberto, na Universidade?

Considerando esse problema e as informações encontradas, inclusive referentes à meia vida do mercúrio, o grupo de alunos que discutiu a situação realizou uma conversão para o registro algébrico e, a partir de então, apenas tratamentos neste registro, obtendo o modelo $Q_n = 31025{,}87.(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}} + 28974{,}12$. As análises frente ao modelo encontrado foram limitadas ao registro utilizado e, por isso, embora calculassem a quantidade de mercúrio no ambiente para um ano qualquer, não conseguiam descrever a tendência dos dados, ou seja, o comportamento da quantidade de mercúrio no ambiente no decorrer dos anos.

Diante das limitações, propusemos que os alunos realizassem ao menos uma conversão para o registro gráfico, a partir do qual realizaram análises mais completas em relação à situação e em relação aos conceitos matemáticos utilizados.

4.3. Categoria 3: Diferentes registros são utilizados e relacionados e as interpretações provenientes destas relações possibilitam que os alunos tirem conclusões sobre o problema em função dos registros (presença da coordenação e de relações com o problema).

Coordenar os diferentes registros associados a um objeto matemático e utilizar as interpretações advindas desta coordenação para refletir sobre a situação, responder ao problema inicial e tomar decisões se for o caso, tornou-se freqüente na medida em que se envolviam com maior número de atividades de Modelagem. Isto parece ir ao encontro do argumento de Duval (2003) de que é a coordenação dos registros que "constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática, e não o inverso" (p. 22), ou seja, os alunos foram percebendo que aprendiam matemática e encontravam soluções para os problemas usando a coordenação entre registros.

O que se pode perceber, também, é que na segunda metade dos cursos os alunos já estavam familiarizados com atividades de Modelagem. Nesta etapa, os alunos vinham para a aula com ideias de temas para serem investigados, bem como com informações que pudessem viabilizar o estudo. A intenção dos alunos passou a ser a investigação de problemas de seus interesses. A aprendizagem matemática, por sua vez, passou a ser uma conseqüência destas investigações.

Na situação cujo tema era a Carga Tributária, por exemplo, os alunos, a partir dos resultados e registros matemáticos presentes na resolução, estabeleceram relações com o problema, chegando a discutir as condições dos serviços públicos brasileiros frente à cobrança de impostos tão altos, a corrupção que assola nosso país e a diminuição de impostos que seria possível se não houvesse um rombo tão grande nos cofres públicos. Além disso, enfatizaram o fato da matemática permitir uma interpretação diferente e "mais crítica" de situações que, geralmente, são camufladas para atender ao interesse de alguém.

Outro exemplo de atividade de Modelagem Matemática em que a categoria 3 se evidenciou é a situação "Novos Velhos", apresentada por um grupo de alunos do Curso de Especialização em Educação Matemática.

4.3.1. "Novos Velhos"- a coordenação de registros na atividade de Modelagem

O grupo que desenvolveu esta atividade estava interessado em investigar o comportamento da expectativa de vida dos brasileiros. A partir de dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) que revelam a expectativa de vida dos brasileiros para quem nasceu no período entre 1940 e 2000, os alunos iniciaram o seu estudo.

Tabela 1: Dados do IBGE sobre a expectativa de vida

Ano	tempo em anos (d)	Expectativa de vida (E)
1940	0	42,74
1950	10	45,9
1960	20	52,37
1970	30	52,49
1980	40	61,74
1990	50	65,78
2000	60	68,55

Fonte: IBGE – Variável auxiliar d introduzida pelos alunos

Neste caso, o registro inicial é uma tabela que já passou por um tratamento matemático quando os alunos criaram uma coluna para a variável auxiliar d. Diante das informações, é possível investigar qual a expectativa de vida para quem nasceu em 2010 ou para quem nasceu em 1996, por exemplo. Para isso, a intenção dos alunos era construir um modelo matemático por meio do qual fosse possível realizar previsões da expectativa de vida para diferentes anos de nascimento, procurando respostas para a questão: Como calcular a expectativa de vida de uma pessoa, dado seu ano de nascimento?

Os dados da tabela 1 revelam um crescimento na expectativa de vida no decorrer dos anos, embora, esse crescimento seja decrescente no período. Essa tendência dos dados ficou ainda mais evidente quando os alunos representaram os pares ordenados (d, E) no plano cartesiano (Figura 2). Com a finalidade de construir um modelo matemático para descrever este comportamento dos dados e permitir a realização de previsões, os alunos começaram a realizar investigações em torno do registro gráfico apresentado. Em uma destas investigações, trabalharam com os pares ordenados (E, d), o que implica em considerar os pares ordenados simétricos aos (d, E) em relação ao eixo de simetria y=x, como observamos no gráfico da figura 3 (tratamento no registro gráfico).

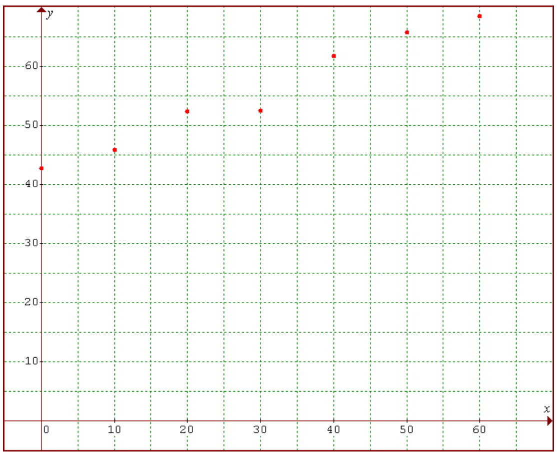


Figura 2: Pares Ordenados (t; E).

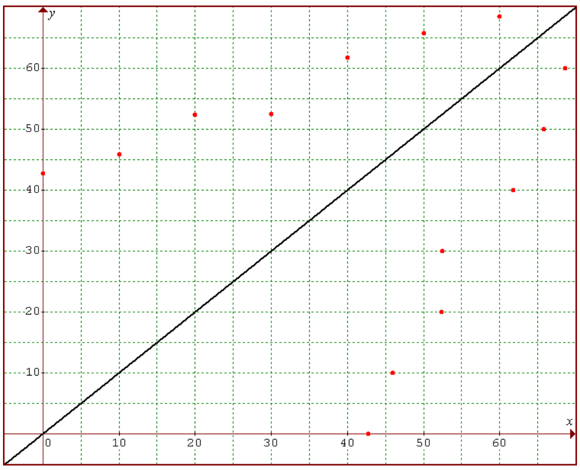


Figura 3: (d; E), (E, d) e eixo de simetria y=x.

Frente à disposição dos pares ordenados (E, d) no plano cartesiano (os pontos abaixo do eixo de simetria), o grupo considerou a hipótese contrária àquela já descrita. Consideraram, então que, neste caso, o que acontece é um crescimento cada vez maior, "mais acelerado", o que denota o comportamento de uma função do tipo exponencial. Frente a esta hipótese, mais um tratamento foi realizado no registro tabular, como segue.

Tabela 2: Tratamento no registro tabular – (E;d)

Expectativa de vida (E)	tempo em anos (d)
42,74	0
45,9	10
52,37	20
52,49	30
61,74	40
65,78	50
68,55	60

Para o ajuste exponencial, os alunos partiram da expressão $y = a.e^{bx}$ e, determinando os parâmetros a, b, por meio de tratamentos algébricos, obtiveram o modelo $y = 0{,}497.e^{0{,}0709.x}$, cuja representação gráfica está na figura 4.

Em seus tratamentos, os alunos ignoraram o ponto (42,74; 0) já que não existe *ln y* para y=0 – ação empreendida para determinar os parâmetros a, b do modelo.

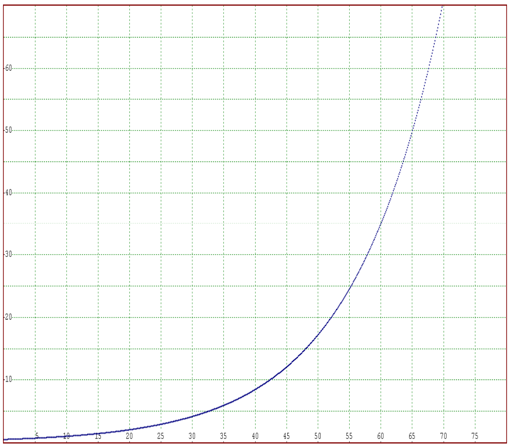


Figura 4: Gráfico da Função

A partir deste modelo exponencial, os alunos tiveram que realizar uma adaptação para contemplar as informações (d, E), tal como são dadas originalmente. Para isso, encontraram a função inversa daquela obtida. No entanto, como nem toda função admite inversa, tornou-se necessário investigar se o modelo em questão era representado por uma função bijetora. Para isso, utilizaram o conceito de função bijetora, bem como a coordenação entre as características da função dadas em sua expressão algébrica, em seu registro gráfico e tabular.

Uma vez confirmado que a função era bijetora, restringindo seu domínio aos números reais positivos e diferentes de zero, por meio de uma sequência de tratamentos obtiveram $E(d) = \dfrac{\ln d}{0{,}0709} + 9{,}8589$, sendo ***E*** a expectativa de vida ao nascer e ***d*** o ano de nascimento, considerando d=0 como 1940.

A relação d=(t-1940), permite escrever

$$E(t) = \frac{\ln(t-1940)}{0{,}0709} + 9{,}8589 \qquad (1)$$

cuja representação gráfica está na figura 5. A tabela 3 mostra a validação deste modelo obtido.

Tabela 3: Validação do Modelo da situação "Novos Velhos"

tempo (t)	tempo (t) - modelado	Expectativa (E)
1940	42,74	
1950	45,9	42,34
1960	52,37	52,11
1970	52,49	57,83
1980	61,74	61,89
1990	65,78	65,04
2000	68,55	67,61

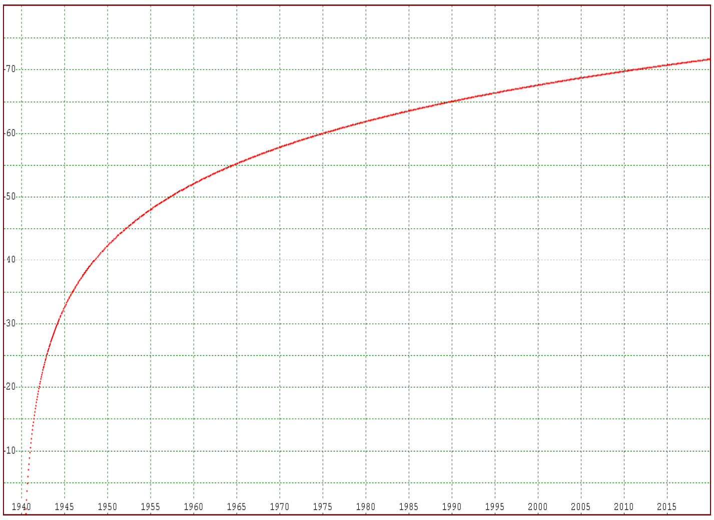
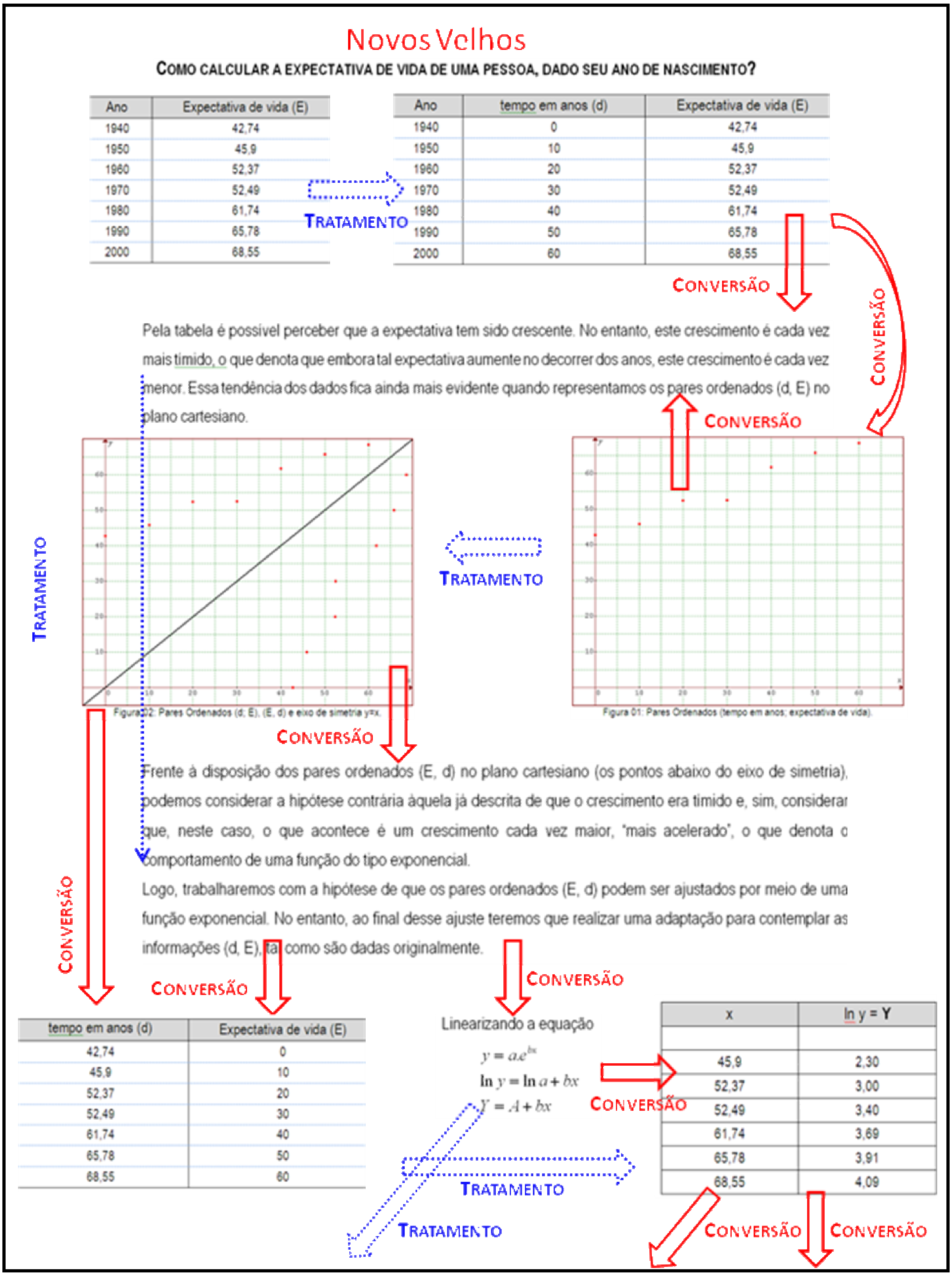


Figura 5: Gráfico da Função

Usando o modelo (1) as previsões dos alunos revelam que a expectativa de vida para quem nasceu em 1996 e em 2010 é de, 67 e 70 anos, respectivamente.

Nesta atividade de Modelagem os alunos realizaram um conjunto de atividades cognitivas que envolvem tratamentos, conversões e coordenação entre registros, conforme apresentamos na figura 6 e na figura 7. É possível observar que, em alguns momentos, os alunos não realizaram uma conversão única de um registro para o outro, mas sim, mobilizaram simultaneamente dois ou mais registros para produzir uma representação em outro registro. Segundo Duval (2003), "[...] é necessário distinguir cuidadosamente o que sobressalta [...] em uma conversão, esta consistindo em uma simples mudança de registros ou em uma mobilização em paralelo de dois registros diferentes” (p. 24).



Novos Velhos

COMO CALCULAR A EXPECTATIVA DE VIDA DE UMA PESSOA, DADO SEU ANO DE NASCIMENTO?

Ano	Expectativa de vida (E)
1940	42,74
1950	45,9
1960	52,37
1970	52,49
1980	61,74
1990	65,78
2000	68,55

Ano	tempo em anos (d)	Expectativa de vida (E)
1940	0	42,74
1950	10	45,9
1960	20	52,37
1970	30	52,49
1980	40	61,74
1990	50	65,78
2000	60	68,55

Pela tabela é possível perceber que a expectativa tem sido crescente. No entanto, este crescimento é cada vez mais tímido, o que denota que embora tal expectativa aumente no decorrer dos anos, este crescimento é cada vez menor. Essa tendência dos dados fica ainda mais evidente quando representamos os pares ordenados (d, E) no plano cartesiano.

Figura 02: Pares Ordenados (d; E), (E, d) e eixo de simetria y=x.

Figura 01: Pares Ordenados (tempo em anos; expectativa de vida).

Frente à disposição dos pares ordenados (E, d) no plano cartesiano (os pontos abaixo do eixo de simetria), podemos considerar a hipótese contrária àquela já descrita de que o crescimento era tímido e, sim, considerar que, neste caso, o que acontece é um crescimento cada vez maior, "mais acelerado", o que denota o comportamento de uma função do tipo exponencial.

Logo, trabalharemos com a hipótese de que os pares ordenados (E, d) podem ser ajustados por meio de uma função exponencial. No entanto, ao final desse ajuste teremos que realizar uma adaptação para contemplar as informações (d, E), tal como são dadas originalmente.

tempo em anos (d)	Expectativa de vida (E)
42,74	0
45,9	10
52,37	20
52,49	30
61,74	40
65,78	50
68,55	60

Linearizando a equação

$$y = ae^{bx}$$
$$\ln y = \ln a + bx$$
$$Y = A + bx$$

x	ln y = Y
45,9	2,30
52,37	3,00
52,49	3,40
61,74	3,69
65,78	3,91
68,55	4,09

Figura 6: Atividades cognitivas realizadas na atividade “Novos Velhos” – parte 1.

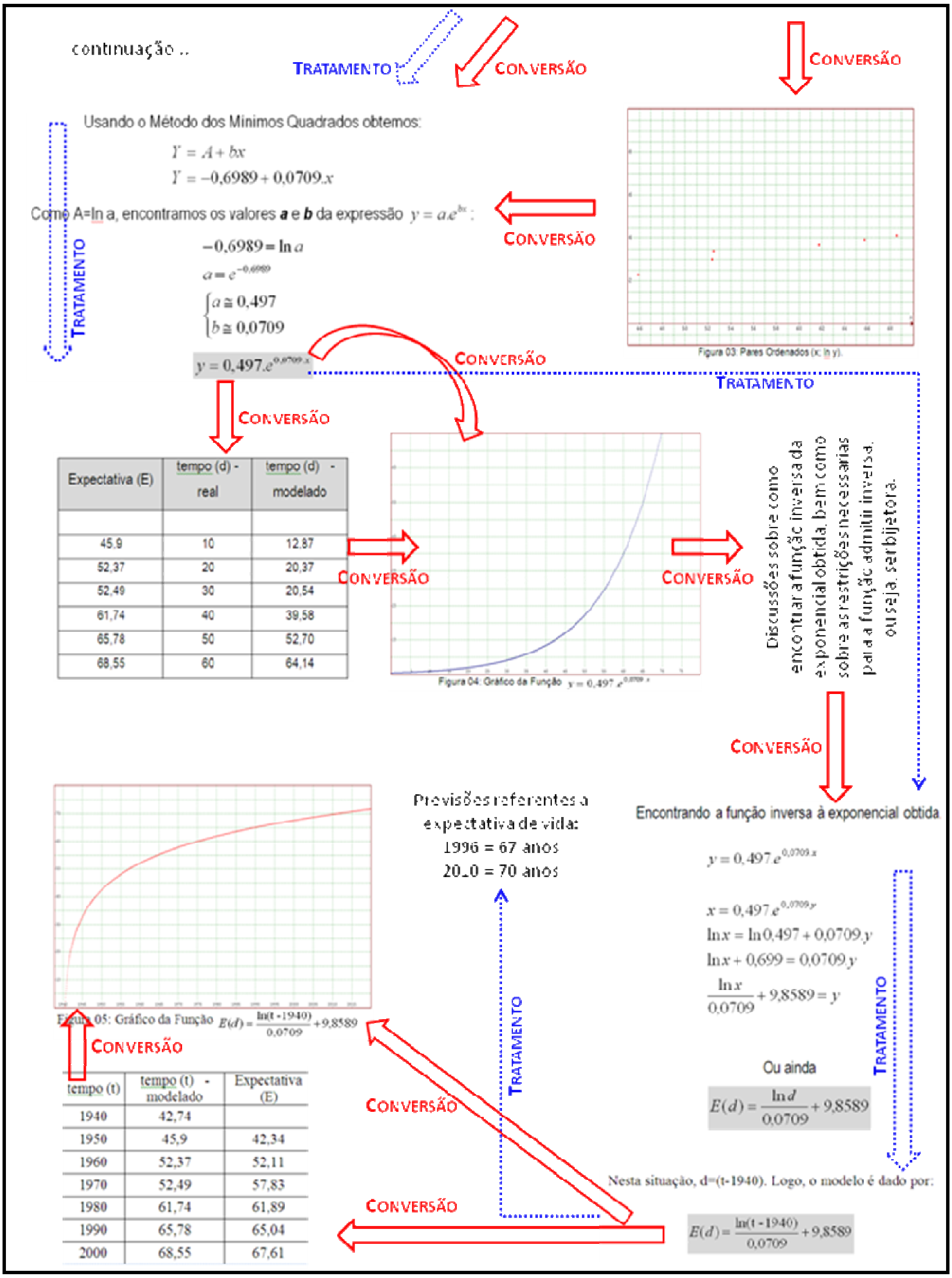


Figura 7: Atividades cognitivas realizadas pelos alunos na atividade "Novos Velhos"– parte 2.

Considerando esses registros e essa articulação de registros realizada pelos alunos, argumentamos que a prática dos alunos nesse caso é da categoria três, ou seja, há fortes indícios de coordenação de registros e de influência dessa coordenação sobre a análise da situação-problema em estudo.

Na situação dos "Novos Velhos", além de discutir o aumento crescente na expectativa de vida dos brasileiros e as possíveis causas deste aumento, os alunos, também professores da Educação Básica, discutiram formas de encaminhamento desta atividade em suas salas de aula, conjecturando que há nas atividades de Modelagem, potencial para aprendizagem em Matemática na perspectiva da teoria de Duval em que a compreensão é associada à produção e articulação dos diferentes registros de representação associados ao objeto matemático.

5. Considerações Finais

Investigar uma situação-problema por meio da Matemática com a finalidade de conhecer, analisar e tomar decisões em relação à situação, são ações que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática. Ao desenvolver atividades desse tipo, os alunos são inseridos em contextos que ativam a produção e o uso constante de diferentes registros dos objetos matemáticos como condições necessárias para a investigação do problema. Por outro lado, enquanto realizam a atividade de Modelagem, os alunos acabam por discutir os objetos matemáticos em suas várias facetas, e este uso diversificado dos registros é fundamental para a compreensão dos objetos matemáticos.

Produzir e coordenar os diferentes registros de um mesmo conceito matemático faz-se importante em atividades de Modelagem diante da necessidade do uso dos diferentes registros para a produção de uma resposta para o problema em estudo. Essa necessidade é o que permite ao aluno optar por aquele registro em que os custos cognitivos são menores, em que as interpretações do problema são potencializadas ou, então, aquele em que a solução do problema parece se tornar mais evidente (VERTUAN, 2007).

A análise das atividades desenvolvidas durante os cursos, contudo, nos leva a caracterizar diferentes categorias de práticas dos alunos em relação à produção e articulação de registros no âmbito das atividades de Modelagem. Estas práticas dos alunos, entretanto, foram se modificando no decorrer da familiarização com atividades de Modelagem, de modo que alunos que em atividades iniciais eram incluídos na categoria que só realiza tratamentos, passaram a realizar coordenações entre registros. Isso aconteceu devido ao envolvimento com atividades de Modelagem em que, se por um lado, emergem diferentes registros, por outro lado, a coordenação destes registros é fundamental para a conceitualização dos objetos matemáticos bem como para a elaboração de respostas convincentes e satisfatórias para as situações-problema em estudo.

Bibliografia

Almeida, L.; Brito, D. S. (2005) Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Ciência & Educação*, v. 11, n. 3, 483-497.

Almeida, L.; Dias, M. R. (2004) Um estudo sobre o uso da modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema,* Rio Claro, v. 17, n.22, 19-35.

Almeida, L.; Ferruzzi, E. C. (2009) Uma aproximação Socioepistemológic para a Modelagem Matemática. *Alexandria (UFSC)*, v.2, 117-134.

Almoulouds,S.Ag.(2007) *Fundamentos da Didática da Matemática.* Paraná: UFPR.

D'Ambrosio, U. (1986). *Da Realidade à Ação*: *Reflexões sobre Educação e Matemática*. Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas.

Damm, R. F. (1999) Registros de Representação. In: Machado, Silvia Dias Alcântara. *Educação Matemática*: *uma introdução*. São Paulo: EDUC, 135-154.

Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia D. A. *Aprendizagem em Matemática*: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Editora Papirus, p.11-34.

Duval, R.(2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Colômbia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. (2006) *Um enfoque ontosemiótico do conhecimento e a instrução Matemática*. Disponível em: http://www.ugr.es/local/jgodino capturado em 1/5/2006.

Jahn, A.P.; Karrer, M. (2004). Transformações lineares nos livros didáticos: uma análise em termos de registros de representação semiótica. *Educação matemática em revista*, Recife/PE, Ano 11, n.17, 16-28.

Kehle, P.; Lester, F. K, Jr. (2003). A semiotic look at modeling behavior. In: Lesh, & Doerr, H., *Beyond constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 97-122.

Lesh, R.(2010) Tools, Researchable Issues & Conjectures for investigating what it means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v.1, n.2, 16-48.

Peirce, C. S. (2005). *Semiótica*. Tradução de José Teixeira Coelho Neto. 2. reimpr. da 3. ed. de 2000. v.46. São Paulo: Perspectiva,. (Estudos).

Sá, C. P. (1995). Representações sociais: o conceito e o estado atual da teoria. In: Spink, M.J. (Org.*). O conhecimento no cotidiano: as representações na perspectiva da psicologia social.* São Paulo: Brasiliense, 19-45.

Vertuan, R. E. (2007). *Um olhar sobre a modelagem Matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica*. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Londrina, Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina.

Lourdes María Werle de Almeida,Licenciada em Matemática, Mestrado em Matemática e Doutorado em Engenharia de Produção. Professora da Universidade Estadual de Londrina e atuando no curso de graduação em Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Atualmente é coordenadora do GT de Modelagem Matemática da SBEM nacional. **lourdes@uel.br**

Rodolfo Eduardo Vertuan, Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina , Especialização em Educação Matemática e Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Atualmente é Doutorando do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). É professor assistente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. **rodolfovertuan@utfpr.edu.br**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 127-139
ISSN: 1815-0640

La resolución de problemas para construir conocimiento matemático curricular

Romà Pujol Pujol; Lourdes Figueiras Ocaña; Jordi Deulofeu Piquet

Resumen

Destacamos algunas posibilidades que la resolución de problemas tiene en la enseñanza de la matemática en la etapa secundaria. A partir de un problema profundizamos en la construcción de conocimiento matemático curricular.

Abstract

We emphasize some possibilities that problem-solving has in mathematics teaching at secondary school. From a problem we deepen the construction of curricular mathematical knowledge.

Resumo

Destacamos algumas possibilidades que a resolução de problemas tem no ensino da matemática na etapa secundária. A partir de um problema aprofundamos na construção de conhecimento matemático curricular.

1. Introducción

Niños, adolescentes y adultos tropezamos en nuestro día a día con acontecimientos que, en ocasiones, percibimos como situaciones de difícil salida. Para afrontarlos, una vez vislumbrada la demanda, no disponemos de algoritmo, fórmula, proceso o rutina alguna que brinde una vía directa a su resolución; nos referimos a dichos episodios con el término problema.

Es razonable esperar a lo largo de la vida topar con aprietos que requieren la toma de decisiones bajo determinadas condiciones. Afrontar dificultades, aventurar actuaciones, convivir con errores y corregir las posiciones adoptadas es apremiante si aceptamos que la educación debe incidir en el desarrollo creativo y afectivo de todo ciudadano. Por otra parte, un justo dechado de contenidos curriculares es necesario para la formación del discente que pretende proseguir sus estudios.

Experimentar y observar para favorecer el descubrimiento de patrones, regularidades e invariantes facilita el descubrimiento de resultados plausibles que se basan en nuestra experiencia e intuición. Provocar el descubrimiento de resultados que toman su fuerza en el sentido común, llamados conjeturales, una parte de los cuales puedan, posteriormente, ser refutados, fuerza al estudiante a convivir con el error y, además, reclama la consolidación, prueba o demostración de aquéllos que no permiten, con facilidad, atinar con un contraejemplo que los invalide. Desde este punto de vista la enseñanza de la matemática puede facilitar entornos de aprendizaje útiles para todo discente. Además, para aquellos estudiantes que cultivan la matemática con intención propedéutica, los conocimientos adquiridos dispondrán de un significado que no se limitará sólo a los resultados finales conseguidos.

> La cuestión de la calidad debe contemplarse teniendo en cuenta la manera en que las distintas sociedades definen la finalidad de la educación. En la mayoría de ellas se plantean dos objetivos principales: el primero estriba en garantizar el desarrollo cognitivo de los educandos; el segundo en hacer hincapié en que la educación estimule su desarrollo creativo y afectivo para que puedan adquirir valores y actitudes que les permitan ser ciudadanos responsables.
>
> (UNESCO, 2005, p. 5)

Asimismo, entre la enseñanza que brindamos y el aprendizaje del que finalmente se adueña el discente se establece una vía que, como en todo proceso de comunicación, padece hasta cierto punto de una razonable pérdida. Pretender que el receptor recaude la totalidad de la información recogida en los mensajes emitidos es deseable; utópico es suponerlo.

Focalizamos la atención en una propuesta que se desprende de la resolución de un problema. Veremos que, adicionalmente a la participación que pueda tener en el desarrollo creativo del estudiante, brinda otro cognitivo a través de la construcción de algunos resultados matemáticos. La visión retrospectiva en la resolución del problema sugerida por Pólya (1987) facilita, por una parte, la obtención de la fórmula que permite calcular la suma de los primeros términos de una progresión aritmética. Por otra posibilita negociar la terminología utilizada para denotar los números negativos e introducir el número entero desde un enfoque que, en la actualidad, es llamado deductivo. Adicionalmente permite establecer un “puente didáctico” entre los primeros pasos de la matemática escolar por el número negativo y la presentación axiomática del conjunto de los números enteros.

Las dos finalidades descritas por la UNESCO (2005, p. 5), relativas a la calidad de la educación orientan la propuesta de enseñanza que mostramos en las líneas siguientes puesto que proponemos una construcción de conocimiento matemático que participa del desarrollo cognitivo a través de entornos de aprendizaje que inciden en el creativo.

2. Interés didáctico de los enunciados incompletos

Griggs (1991, p. 442) recupera el problema de los números consecutivos a partir de la definición de número “educado”, utilizada en el número 24 de la revista Sesame de Open University, posteriormente retomada por Adams (1993). Llama “educado” a un número natural que puede ser escrito en forma de suma de dos o más números naturales. Esta delimitación del campo numérico sugiere un enunciado como el siguiente:

¿*Cuáles son los números naturales que se pueden expresar como la suma de dos o más números naturales*?

Esta formulación no deja lugar a dudas sobre los números que participan en el juego. Sin embargo los encargos, mandatos o cometidos con los que nos codeamos en nuestra vida cotidiana son a menudo imprecisos. Pólya (1966, min. 18) abogó por dicha proximidad con nuestro día a día a través de enunciados incompletos. Desde este punto de vista el enunciado podría concederse como sigue:

¿Qué números se pueden expresar como suma de consecutivos?

Con este interrogante abarcamos el estudio de los números naturales que se pueden expresar como suma de dos o más números naturales, tal como se formula en el primer enunciado; sin embargo dejamos abiertas otras posibilidades. No se excluye que un número natural pueda ser interpretado como un entero positivo y expresado como suma de dos o más enteros, sean éstos positivos o negativos. El segundo enunciado, formulado a partir de la sugerencia de George Pólya, no quita la posibilidad de indagar qué números enteros, positivos o negativos, se pueden expresar como la suma de enteros consecutivos, positivos o negativos. Esta segunda formulación del problema armoniza más con la imprecisión de nuestra realidad cotidiana.

Algunos números pueden aceptar más de una descomposición como suma de números consecutivos, tal vez sólo una, o quizá ninguna. Algunas descomposiciones pueden tener una u otra cantidad de sumandos; tampoco se descarta a partir del enunciado la posibilidad de aceptar que todo número se pueda considerar como la suma de un solo sumando, es decir, el mismo número. Un enunciado incompleto requiere concretar y precisar lo que se aborda en cada momento pero, además y gracias a su imprecisión, sugiere nuevas preguntas. Consideremos un determinado número, ¿cuántos sumandos tienen sus descomposiciones?, ¿existe alguna relación entre dicha cantidad de sumandos y el número que pretendemos descomponer?

No todos los números tienen por qué admitir la misma cantidad de descomposiciones como suma de consecutivos. Adams (1993), siguiendo la nomenclatura rescatada por Griggs (1991), dice que un número tiene “educación 0” si no admite descomposición alguna. En la misma línea llamaremos “p–educado” o que tiene “educación p” a todo número que admite p descomposiciones como suma de números consecutivos. Con esta jerga no pretendemos en ningún caso abandonar la esencia del problema. Pero si ello facilita que un solo individuo se sume al juego habrá cumplido su cometido. ¿Tal vez usted haya decidido hojear, ni que sea en diagonal, este texto por la curiosidad que entraña el título? En cualquier caso una nueva pregunta ha asomado: ¿Cuántas descomposiciones como suma de números consecutivos admite un número? O, expresado de otra forma, ¿cuán educados son los números?

3. Regularidades numéricas

Este problema de los números consecutivos sugiere preguntas y fomenta el juego, el descubrimiento y, en general, el trabajo intelectual con los números y con la propia imaginación. La suma de tres, cinco o siete naturales consecutivos resulta múltiplo de tres, cinco o siete, respectivamente; ¿será este patrón siempre cierto? La experimentación muestra que dicha regularidad no se mantiene ante la suma de dos, cuatro o seis números naturales consecutivos, puesto que los resultados no son siempre múltiplos de dos, cuatro o seis respectivamente. Sin embargo, la suma de dos naturales consecutivos parece que siempre es impar, la suma de cuatro múltiplo de dos, la suma de seis múltiplo de tres... Con Mason et al. (1988, p. 92), formular, comprobar y modificar conjeturas son procesos que constituyen la espina dorsal de la resolución de un problema. Además de los descubrimientos mencionados, la experimentación puede revelar que las potencias de dos no se pueden expresar como suma de dos o más números naturales consecutivos.

Examinar la cantidad de sumandos de las descomposiciones puede sugerir una conexión con los divisores del número que pretendemos descomponer; pero ello no siempre es cierto. Mientras 15=4+5+6 admite una descomposición con tres sumandos, siendo 3 un divisor de 15, o con cinco sumandos, 15=1+2+3+4+5, siendo 5 un divisor de 15, también admite una con dos sumandos, 15=7+8, pero 2 no es un divisor de 15.

El recuento de la cantidad de sumandos de las descomposiciones conduce a un procedimiento que faculta la obtención de descomposiciones de un número en suma de números consecutivos a partir de sus divisores impares. Así, 15=3•5=5+5+5=3+4+5, o también 15=5•3=3+3+3+3+3=1+2+3+4+5. Pero, ¿permite este procedimiento lograr todas las descomposiciones de un número como suma de números consecutivos? Parece que no, pues 15=7+8, pero 2 no es un divisor impar; ¡nuestro gozo en un pozo!

4. Consolidación de resultados conjeturales

El resultado conjetural conquistado, relativo a que toda descomposición de un número como suma de consecutivos tiene tantos sumandos como alguno de sus divisores, ha sido batido por un contraejemplo. Es necesario reconocer el conocimiento que sólo se ampara en evidencias basadas en nuestra intuición y sentido común. ¿Qué nos hace pensar que los demás resultados obtenidos no perecerán de forma parecida? Consolidar, solidificar, probar o demostrar los resultados conjeturales debería convencer al receptor a partir de razonamientos y premisas transparentes para el discente. Una nomenclatura enrevesada debe ser evitada. Con Halmos (2006, p. 72), la mejor notación es la ausencia de notación; siempre que podáis evitar usar un complicado sistema alfabético, ¡evitadlo!

La finalidad de la demostración es pues convencer y satisfacer. Además, con Pujol et al. (2007), la necesidad de dar rigor quedará justificada cuando el alumno conjeture propiedades que él ha descubierto, que él ha defendido y que también él ha refutado. Si todos los resultados que la experimentación facilita son confirmados por experimentaciones más extensas, es difícil que el estudiante constate la necesidad de demostrar.

Griggs (1991), a partir de la fórmula que permite obtener la suma de los primeros términos de una progresión aritmética, demuestra que toda suma de consecutivos tiene por resultado un número con un factor impar. Acto seguido considera un número con un factor impar mayor o igual a 3 y encuentra, también a partir de dicha fórmula, el primero y la cantidad de números consecutivos que tienen por suma el número considerado. Los llamados números educados por Griggs (1991) son llamados amables por Holton (2008). A pesar de la diferencia terminológica, este último autor se basa en el mismo resultado para demostrar que para que un número no sea amable, la condición necesaria y suficiente es que sea una potencia de dos.

Conocida la suma de los primeros términos de una progresión aritmética y supuesta una cierta competencia con el trabajo algebraico dichas demostraciones son incuestionables. Sin embargo la fórmula enmascara la transparencia y difumina la elegancia de la demostración puesto que, con Puig Adam (1960, p. 95), su uso no enseña precisamente a urdir, que es lo educativo. Los argumentos matemáticos que se derivan de la misma convierten el resultado en incuestionable, pero la demostración difícilmente pueda cautivar al oyente o al lector que perciben su uso con molestia. Compartimos que ciertas rutinas pueden ser necesarias, aunque no como un fin en sí mismo, pero, ¿es necesaria la fórmula que permite obtener la suma de los primeros términos de una progresión aritmética para demostrar los resultados conjeturales obtenidos?

5. Analogía con un problema histórico

Adams (1993), continuando la posición iniciada por Griggs (1991), define la educación de un número natural como el número de formas en que dicho número puede ser expresado como suma de números naturales. En su estudio obtiene, también a partir de la fórmula que permite obtener la suma de los primeros términos de una progresión aritmética, un método que permite medir la educación de un número natural. En particular obtiene que las potencias de dos son los números con educación 0, 0–educados o, si se nos permite, mal educados.

Supongamos en este apartado el problema dirigido a alumnos familiarizados con el número entero y revisemos lo realizado bajo este punto de vista. Tomemos las descomposiciones del 15 que se desprenden de la aplicación del procedimiento anteriormente expuesto y que detallamos en el caso concreto siguiente:

15=1•15=15

15=3•5=5+5+5=3+4+5

15=5•3=3+3+3+3+3=1+2+3+4+5

15=15•1=1+…$^{15)}$+1=(–6)+(–5)+(–4)+(–3)+(–2)+(–1)+0+1+2+3+4+5+6+7+8=7+8

Para cada divisor impar obtenemos una descomposición de dicho número como una suma de tantos números enteros consecutivos como indica el divisor impar considerado. Para ello hemos aceptado que el 15 es suma de un sumando, el mismo número. E inmediatamente nos asalta una pregunta, ¿toda suma de números enteros consecutivos tiene por resultado un número entre cuyos divisores se encuentra la cantidad de sumandos?

Consideremos una suma de números consecutivos con una cantidad impar de sumandos. Aplicando el procedimiento de descomposición en sentido inverso al utilizado hasta este momento, dicha suma se puede convertir en otra con la misma cantidad de sumandos, pero iguales; dicha cantidad de sumandos divide la suma. Veamos tres ejemplos:

4+5+6+7+8=6+6+6+6+6=5•6=30. Y 5 divide 30.

(–2)+(–1)+0+1+2+3+4+5+6=2+…9)+2=9•2=18. Y 9 divide 18.

(–10)+(–8) +…7) + (–4)+(–3)= (–6)+…7) +(–6)=7•(–6)=–42. Y 7 divide (–42).

Atendamos a continuación una suma de números consecutivos con una cantidad par de sumandos. Con números naturales un adecuado razonamiento muestra que la suma de los dos números consecutivos centrales es un factor impar del resultado, cuando la suma se presenta ordenada. Sin embargo, con números enteros dicha suma puede ser convertida en otra de números consecutivos con una cantidad impar de sumandos, ¿cómo? Sólo falta añadir (o quitar) el cero y los números necesarios para que siga tratándose de una suma de números consecutivos equivalente, es decir, sin que varíe el resultado. En virtud de lo expuesto, la cantidad impar de sumandos divide la suma. Veamos tres ejemplos:

3+4=(–2)+(–1)+0+1+2+3+4=1+…7)+1=7•1=7. Y 7 divide 7.

1+2+3+4=0+1+2+3+4=2+…5)+2=5•2=10. Y 5 divide 10.

(–3)+(–2)=(–3)+(–2)+(–1)+0+1+=(–1)+…5)+(–1)=5•(–1)=–5. Y 5 divide (–5).

Ampliar el campo numérico a los números enteros nos ha permitido ver que:

1. Toda suma de números enteros consecutivos se puede expresar como otra con una cantidad impar de sumandos. Su resultado es el producto de la cantidad de sumandos por el número que está situado en el centro de la suma, cuando la expresamos ordenada. Tiene pues un divisor impar y, ¡no es una potencia de 2!
2. Todo número entero que no es una potencia de 2 tiene un divisor impar. Es expresable pues como una suma de números iguales con una cantidad impar de sumandos. También se puede expresar como una suma de números enteros consecutivos con tantos sumandos como indique uno de sus divisores impares. Tal vez la cancelación de términos conduzca finalmente a una suma con una cantidad par de sumandos.

Así pues, todo número entero admite tantas descomposiciones como suma de números consecutivos como divisores impares tiene. Un nuevo problema se ha gestado: ¿cuántos divisores tiene un número? Y, más concretamente, ¿cuántos divisores impares?

Con el fin de obtener todas las descomposiciones de un número natural como suma de consecutivos hemos ampliado el campo numérico a los enteros para, una vez obtenidas, retornar a los naturales. Como apunta Josep Pla (2006, p. 411), Rafael Bombelli se percató de que la ecuación x^3–15x–4=0 no se puede resolver haciendo uso de la expresión general que permite resolver toda cúbica de la forma x^3+px+q=0, si limitamos el campo numérico a los números reales. Sin embargo, aceptar nuevos números, en la actualidad llamados complejos, le condujo a tres raíces reales; una de ellas es x=4. Nos encontramos pues ante una analogía con un problema histórico pero, mientras Bombelli se introduce en los números complejos para obtener soluciones reales, nosotros nos introducimos en los enteros para obtener descomposiciones de números naturales. La propuesta conduce pues a una ampliación del campo numérico análoga, pero más sencilla, que la vivida por Rafael Bombelli.

La fórmula que permite sumar los primeros términos de una progresión aritmética no nos ha sido necesaria para consolidar los resultados conjeturales obtenidos; nosotros hemos optado por ampliar el campo numérico. Además, en el próximo apartado veremos que, a partir del problema de los números consecutivos, se puede obtener una vía para descubrir la fórmula que permite sumar progresiones aritméticas. Así pues, lo que era un resultado necesario para consolidar los descubrimientos logrados, se ha convertido en innecesario para, como veremos acto seguido, ¡ser construido a partir del propio problema!

6. Construcción de resultados útiles: suma de una progresión aritmética.

Según cuenta la leyenda, para sumar los números enteros del 1 al 100, Johann Carl Friedrich Gauss, a los siete años de edad, optó por escribir dicha suma dos veces pero poniendo el segundo sumando en orden inverso. Sumando término a término obtuvo el doble del resultado deseado; Andrey Nikolaevich Kolmogorov lo consiguió a los cuatro años de edad. Dicho procedimiento puede ser entendido por un estudiante pero requiere un punto de genialidad para ser descubierto. Con Pólya (1966, min. 2, 3), Si aceptamos que enseñar es dar la oportunidad a los estudiantes de que descubran cosas por sí mismos, tal vez éste no sea el punto de partida más acertado.

Supongamos conocido y estudiado el problema de los números consecutivos. Nos proponemos a continuación obtener la suma de los primeros términos de una progresión aritmética a partir del razonamiento ya realizado. Para ello suponemos una cierta familiaridad con las progresiones aritméticas, pero no con la fórmula que permite obtener la suma de sus primeros términos.

Puesto que del 1 al 100 hay una cantidad par de sumandos, convertimos dicha suma en su equivalente con una cantidad impar, esto es, 0+1+2+…+99+100. El procedimiento de descomposición permite convertir dicha suma en otra de 101 sumandos iguales:

$$0+1+2+\ldots+99+100=50+50+\ldots+50+50=101\cdot 50=5050.$$

Nos proponemos a continuación sumar la siguiente progresión aritmética:

$$1+3+5+\ldots+999.$$

Puesto que su diferencia es 2 puede ser escrita como:

$$(2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1)+\ldots+(2\cdot 500-1).$$

Sumamos 500 veces 1 obteniendo $2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+2\cdot 500$.

Dividimos por 2 obteniendo $1+2+3+\ldots+500$.

Esta suma de números consecutivos con una cantidad par de sumandos puede ser convertida en otra con una cantidad impar, sólo falta añadir el 0.

El procedimiento utilizado en el problema facilita expresar dicha suma como otra con 501 sumandos iguales:

$$1+2+3+\ldots+500=0+1+2+3+\ldots+500=250+250+250+250+\ldots^{501)}+250=501\cdot 250=125250.$$

Finalmente rehacemos las modificaciones preliminares multiplicando este resultado por 2 y restando 500 para obtener el resultado deseado, es decir, 250000.

Acto seguido vamos a sumar la siguiente progresión aritmética:

$$4+7+10+13+\ldots+100+103.$$

Puede ser escrita como:

$$(3\cdot 1+1)+(3\cdot 2+1)+(3\cdot 3+1)+(3\cdot 4+1)+\ldots+(3\cdot 33+1)+(3\cdot 34+1).$$

Restamos 34 veces 1 obteniendo $3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+3\cdot 33+3\cdot 34$.

Dividimos por 3 obteniendo $1+2+3+\ldots+34$.

Esta suma de números consecutivos con una cantidad par de sumandos puede ser convertida en otra con una cantidad impar, sólo falta añadir el 0.

El procedimiento utilizado en el problema de los consecutivos facilita expresar dicha suma como otra con 35 sumandos iguales, tal como mostramos a continuación:

$$1+2+3+\ldots+34=0+1+2+3+\ldots+34=17+17+17+17+\ldots^{35)}+17=35\bullet17=595.$$

Para acabar rehacemos las modificaciones preliminares multiplicando este resultado por 3 y sumando 34 para obtener el resultado deseado, es decir, 1819.

Vamos a continuación a sumar los n primeros términos de la progresión aritmética que tiene por primer término a_1 y por diferencia d, es decir:

$$a_1+(a_1+d)+\ldots+(a_1+(n-1)d).$$

Restando n veces a_1 obtenemos $0+d+2d+\ldots+(n-1)d$ y dividiendo por d obtenemos $0+1+2+\ldots+(n-1)$.

Si n es impar consideramos la suma $0+1+2+\ldots+(n-1)$, para que tenga una cantidad impar de sumandos; si n es par consideramos $1+2+\ldots+(n-1)$ por el mismo motivo.

Para el primer caso el procedimiento permite convertir la suma en n sumandos iguales: $0+1+2+\ldots+(n-1)=(n-1)/2+\ldots n)+(n-1)/2=n(n-1)/2$. Para el segundo caso convertimos la suma en otra con una cantidad impar de sumandos y, a continuación, el procedimiento permite convertir la suma en: (n–1) sumandos iguales:

$$0+1+2+\ldots+(n-1)=1+2+\ldots+(n-1)=(n/2)+\ldots n-1)+(n/2)=n\bullet(n-1)/2.$$

Falta sólo rehacer las modificaciones preliminares multiplicando este resultado por d y sumando n veces a_1 para obtener el resultado deseado:

$$d\bullet n(n-1)/2+n\bullet a_1=(n/2)(d(n-1)+2\ a_1)=(a_1+a_n)n/2.$$

La expresión que nos permite obtener la suma de los primeros términos de una progresión aritmética no sólo no es necesaria en la resolución del problema de los consecutivos sino que, además, se puede obtener a partir del mismo.

7. Incorporación de nuevos números: ampliación del campo numérico.

Conocido el problema de los consecutivos limitemos inicialmente el campo numérico a los naturales. Ello lo hacemos con la pretensión de añadir nuevos números cuando éstos sean requeridos por el procedimiento de descomposición expuesto anteriormente y que suponemos ahora conocido. La terminología con la que denotaremos los nuevos entes no la supondremos conocida y sugeriremos su negociación.

Buscar descomposiciones del número 14 nos conduce a expresarlo como la suma de siete sumandos iguales. El procedimiento de descomposición desemboca en la necesidad de admitir un ente que no es un número natural y que, en virtud de la propuesta realizada, debemos aceptar como un nuevo número si queremos obtener la descomposición deseada, como se puede visualizar en la Figura 1.

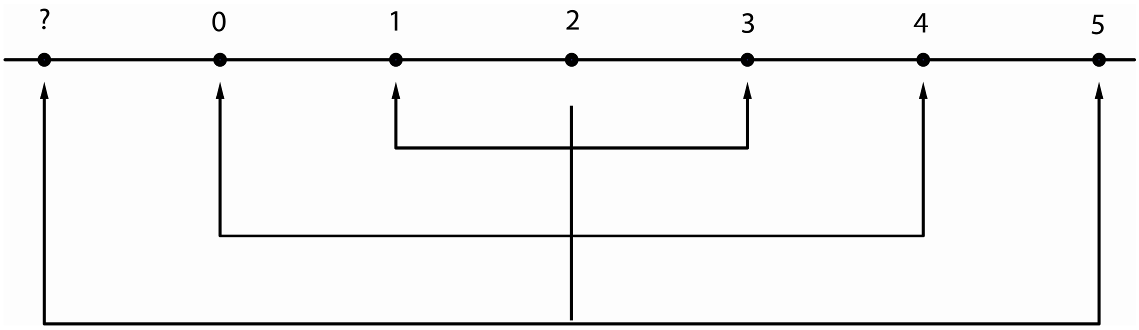


Figura 1. El número 14 se puede escribir como la suma de siete doses. En el gráfico se muestra como se puede convertir dicha suma en otra de números consecutivos en la que uno de ellos es un ente que debemos aceptar como número si queremos obtener la descomposición deseada.

El número que hemos denotado por "?" nace para conseguir una descomposición del 14 como suma de números consecutivos a partir del procedimiento descrito, pero no proviene de representar cosas reales y concretas, como apunta Félix Klein (1927, pp. 32–33). La palabra número tiene, pues, en cada una de las sucesivas fases de la aritmética significado cada vez más amplio.

Las operaciones con números naturales tienen una correspondencia inmediata con acciones empíricas conocidas: sumar con añadir, restar con quitar, multiplicar con añadir repetidas veces una misma cantidad y dividir con repartir una cantidad en partes iguales. Pero este nuevo número se añade a los naturales sin mantener la misma transparencia. Con Rey Pastor (1976, p. 85), será preciso definir las operaciones fundamentales pero no lo haremos arbitrariamente, sino, de tal modo, que las operaciones conocidas para los números naturales queden incluidas en las nuevas definiciones como caso particular. Si estas nuevas definiciones diesen resultados distintos a las antiguas, la aritmética construida sería contradictoria consigo misma.

Sumar a un número natural otro produce un desplazamiento hacia la derecha en la recta numérica de tantas unidades como indica el número sumado; restar produce un desplazamiento a la izquierda. Extender este comportamiento al nuevo número que se requiere en la descomposición del 14 sugiere una negociación sobre la terminología con la que lo vayamos a denotar: ?+1=0, ?+2=1, ?+3=2, … Con números naturales el orden de los sumandos no altera la suma. Si aceptamos que el nuevo número debería conservar esta propiedad entonces 1+?=0, 2+?=1, 3+?=2, … Vemos pues que sumar el nuevo número, denotado por ?, tiene un comportamiento equivalente a restar 1; ello sugiere denotarlo por –1.

El símbolo "–" recae pues en una polisemia que debe ser aclarada puesto que los números que llamamos negativos los denotamos con un símbolo que ya no tiene un significado exclusivamente emparentado con la acción quitar. Con González et al. (1990, p. 28) subrayamos que probablemente el término «negativo» provenga de ser utilizado para denotar los valores negados cuando se obtenían como raíces de una ecuación; situación distante de la introducción a través de modelos concretos propuesta en la actualidad.

Los nuevos números que incorporamos tienen un comportamiento diferente del conocido para los naturales. Por ejemplo, sumar –1 produce un desplazamiento a la izquierda de la recta numérica de una unidad. ¿Y restar –1?, por ejemplo: ¿2–(–1)? Si convenimos que dicha expresión debe tener sentido, su resultado es en principio desconocido; llamémosle x, es decir, 2–(–1)=x.

Extendemos la segunda noción común del primer libro de los Elementos de Euclides (si a cosas iguales añadimos cosas iguales los totales son iguales) al nuevo número y tenemos, 2–(–1)+(–1)=x+(–1), equivalentemente, 2=x–1; consecuentemente 2–(–1)=3. Así pues, si aceptamos que restar –1 tenga algún sentido, éste debe ser el mismo que sumar 1; hecho que denotamos por –(–1)=+1. En la recta numérica (–1) y 1 se visualizan opuestos con relación al origen, análogamente (–2) y 2, …, ¡buen motivo para llamarles opuestos!

Con Borel y Drach (1895, pp. 128–135) puesto que (–1) es un número que cuando lo sumamos se comporta como si restásemos 1 sabemos que 1+(–1)=0. Si aceptamos que estos nuevos números deben cumplir la propiedad distributiva, transparente para números naturales, entonces para todo entero a, a•(1+(–1))=0 o equivalentemente a+a•(–1) =0. Así pues a•(–1)=–a ya que es un número que cuando lo sumamos se comporta como si restásemos a. Consecuencia de extender la misma propiedad es que (–1)•((–1)+1)=0 y equivalentemente (–1)•(–1)+(–1)•1=0. Puesto que 1+(–1)•1=0, por el principio de cancelación de la adición, (–1)•(–1)=1. El comportamiento de las operaciones entre números enteros se desprende de la extensión a ellos de las conocidas propiedades para números naturales.

Esta introducción del número entero que se desprende del problema de los números consecutivos se corresponde con la que ha sido llamada “deductiva” por Arcavi y Bruckheimer (1981), posteriormente también por Cid (2003), y toma su fuerza en el principio de permanencia de las leyes formales.

> Al generalizar el concepto de número mediante definiciones por abstracción del nuevo concepto, pasaremos del natural al entero, de éste al racional, luego al real, y de aquí al complejo, de manera que puedan definirse operaciones de adición y multiplicación entre los nuevos entes que cumplan dichas reglas de cálculo antes establecidas. Éste es el llamado método genético, y en él se debe tomar como norma el principio de permanencia de las leyes formales, enunciado así por Hankel: «Al generalizar un concepto se debe tratar de conservar el mayor número de propiedades, y al nuevo concepto debe corresponder como caso particular el anterior».
>
> (Rey Pastor et al., 1969, p. 23)

La sucesión de notaciones que va descubriendo el alumno a lo largo de la enseñanza no debería consistir en una lista de símbolos y reglas impuestas para su utilización y manipulación. Las matemáticas tratan de problemas, y las técnicas específicas, los procedimientos, las fórmulas pero también las notaciones para denotar los números y las reglas que rigen las operaciones surgen de ellos.

> Las matemáticas proporcionan un medio de comunicación de la información conciso y sin ambigüedad porque hacen un uso amplio de la notación simbólica. Sin embargo es la necesidad de usar e interpretar esta notación y de entender las ideas y conceptos abstractos que le sirven de base, lo que resulta un escollo para mucha gente. En efecto, la notación simbólica que capacita a las matemáticas para que se usen

> como medio de comunicación y así ayuda a hacerlas «útiles», puede también hacer las matemáticas difíciles de entender y usar.
>
> (Cockcroft, 1985, p. 4)

Históricamente fue la necesidad de validez general de los métodos de resolución de ecuaciones a la que deben su existencia los números negativos, como apunta Hans Freudenthal (1983, p. 433). Posteriormente, con González et al. (1990, p. 33), fue Girard el primero que apreció el carácter algebraico-geométrico del negativo. No sólo tuvo en cuenta su validez algebraica sino que lo interpretó geométricamente: «Lo negativo en geometría indica un retroceso mientras que lo positivo es un avance». Si aceptamos la importancia de la historia de la matemática como eje vertebrador de su enseñanza, ¿no deberían los primeros pasos por el número negativo convivir con el pensamiento algebraico?

8. Conclusiones

En la actualidad la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas está propuesta en la mayoría de los currículos vigentes. Pero cuando decimos que debe poner el énfasis en la resolución de problemas caben, por lo menos, tres interpretaciones.

Enseñar para resolver problemas es uno de los cometidos de la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas que nadie pone en duda. Promover la experimentación, la observación, la búsqueda de patrones y regularidades, presentar resultados conjeturales y contrastarlos para desaprobarlos o aceptarlos con la intención de consolidarlos constituye tal vez el foco principal de la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas que, en nuestros días, es un propósito aceptado.

Enseñar sobre resolución de problemas es otra encomienda que permite acercar a los alumnos estrategias que faciliten el descubrimiento, la indagación y la invención: resolver un problema similar más sencillo, considerar casos particulares, dividir el problema en partes, variar las condiciones del problema, buscar un problema relacionado, examinar el problema desde un campo numérico más amplio, …

Enseñar a través de la resolución de problemas entendemos que toma su máxima autoridad cuando, además de facilitar el desarrollo creativo del discente, permite construir conocimiento matemático curricular. El problema de los números consecutivos lo hace con la suma de los primeros términos de una progresión aritmética. También ofrece una introducción deductiva de los números enteros que sugiere una negociación sobre la terminología que utilizamos para denotar los números negativos. Facilita incidir en la polisemia en la que recae el símbolo “–” así como obtener las reglas que rigen las operaciones entre números enteros. También, como se puede ver en Pujol (2008) faculta una introducción deductiva del conjunto de los números enteros que establece un “puente didáctico” con su presentación axiomática.

Griggs (1991) y Adams (1993) focalizan la atención en una enseñanza para resolver problemas, más concretamente, para resolver el problema de los números consecutivos. Derek Holton (2008) promueve el descubrimiento de regularidades que posteriormente consolida. Un cierto dechado de conocimientos previos es necesario para abordar el problema, pero no el resultado que permite obtener la suma de los primeros términos de una progresión aritmética. Tomamos estos ejemplos para mostrar que enseñar a través de la resolución de problemas es una empresa difícil. Hacer uso de resultados conocidos, visualizarlos o manipularlos es tal vez más frecuente, generarlos a partir de la resolución de problemas parece mucho más excepcional.

García Cruz (2002), refiriéndose a un artículo de M. Fernández, dice: «[…] me aventuré a indicar lo que creo suele olvidarse: la propuesta de problemas con el fin de elaborar una teoría, esto es, para explorar y aprender nuevos conceptos. En efecto, comentó, pese a ser eminentemente formativa, no es frecuente que se tenga en cuenta por el profesorado». Y nos preguntamos: si algunos contenidos curriculares no se elaboran a partir de la resolución de problemas, ¿cómo se introducen?, ¿tal vez algunos se instruyen para después ser aplicados para resolver problemas? ¿Conviven tal vez dos o más estilos de enseñanza algunos de los cuales facilitan el desarrollo creativo mientras que otros permiten "cumplir" con el currículo? Buscando algunas respuestas hemos hallado más preguntas…

La construcción de conocimiento matemático que se desprende del problema de los consecutivos fue descubierta a posteriori. Nuestra experiencia nos dice que tomar un determinado contenido curricular y buscar problemas que faciliten su construcción sólo será posible si, con anterioridad, la visión retrospectiva en la resolución de algún problema lo ha conseguido. La divulgación de la resolución de problemas no acostumbra a sintetizar qué contenidos curriculares pueden ser construidos por cada problema. Ésta parece, al menos en una cierta medida, una tarea pendiente.

Ayudas recibidas

Este artículo se ha realizado en el marco del proyecto EDU2009-07298 financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación y el plan de actuación del grupo de investigación consolidado PREMAT (2009SGR364) de la Generalitat de Catalunya (España).

Bibliografía

Adams, K. (1993): How polite is x? *The Mathematical Gazette* 77(478), 79-80.

Arcavi, A.; Bruckheimer, M. (1981): How shall we teach the multiplication of negative numbers?. *Mathematics in School* 10(5), 31-33.

Borel, E.; Drach, J. (1895): *Introduction a l'étude de la Théorie des Nombres et de l'Algèbre Supérieure*. Librairie Nony, París.

Cid, E. (2003): *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión*. Pre-publicaciones del seminario matemático García de Galdeano, Universidad de Zaragoza.

Cockcroft, W.H. (1985): *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft.* Ministerio de Educación y Ciencia. Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado, Madrid.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematics as an educational task.* Reidel Publishing Company, Dordrecht (Holanda).

García Cruz, J.A. (2002): *La didáctica de las matemáticas: una visión general.* RTEE, http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/rtee.htm

González et al. (1990): *Números enteros.* Síntesis, Madrid.
Griggs, Terry S. (1991): Impolite numbers. *The Mathematical Gazette* 75(474), 442-443.
Halmos, P. (2006): Com cal escriure en matemàtiques. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 21(1), 53-79.
Holton, D. (2008): What VIEW of mathematics should we learn at school? *Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI,* Rome.
Klein, F. (1927): *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, vol. 1. Madrid: [s.n.].
Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (1988): *Pensar matemáticamente.* Labor, Barcelona.
Pla i Carrera, J. (2006): *Introducció a la metodologia de la matemàtica.* Publicacions i edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona.
Pólya, G. (1966): *Teaching us a lesson;* MAA Video Classics. The Mathematical Association of America.
Pólya, G. (1981): Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving. Wiley, New York.
Pólya, G. (1987): Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, México.
Puig Adam, P. (1960): *La Matemática y su enseñanza actual.* Ministerio de Educación Nacional, Madrid.
Pujol, R. (2008): *Una reconsideració dels nombres enters per a l'ensenyament postobligatori,* Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.
Pujol, R.; Bibiloni, Ll.; Deulofeu, J. (2007): Del treball conjectural al rigor: la resolució de problemes als ulls de l'alumne. *Biaix* 26, 66-80.
Rey Pastor, J. (1976): *Elementos de análisis algebraico.* Biblioteca Matemática, Madrid.
Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; Trejo, A. (1969): *Análisis matemático, vol I. Análisis algebraico, teoría de ecuaciones y cálculo infinitesimal de una variable*. Kapelusz, Buenos Aires.
UNESCO (2005): *Educación para Todos. El imperativo de la calidad.* UNESCO, Informe de Seguimiento de la EPT en el Mundo 2005, París.

Romà Pujol Pujol. Nació en Castellet i la Gornal (Barcelona. España) el 10 de abril de 1969, es Catedrático de Matemáticas en el Instituto de l'Arboç (Tarragona, España) y profesor colaborador y asociado del Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat Autònoma de Barcelona (España). El centro de interés de su investigación reside en la construcción de conocimiento matemático a través de la resolución de problemas. Es uno de los investigadores principales del proyecto financiado EDU2009-07298 del grupo consolidado PREMAT. Autor de diversos libros de texto y artículos actúa como formador de profesores de educación primaria y secundaria. Recientemente ha escrito en la publicación de los manuales que la editorial Graó ha dirigido al Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria. **Roma.Pujol@uab.cat**

Lourdes Figueiras Ocaña y Jordi Deulofeu Piquet. Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat Autònoma de Barcelona.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 141-154
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

Relato de una experiencia: Taller de curiosidades geométricas

Teresa Facello; Elsa Osio.

Resumen

Existen objetos interesantes (rompecabezas, teselados y módulos origami) cuyas propiedades y connotaciones matemáticas no se incluyen en los programas académicos por no formar parte de ninguna teoría sistemática. Además es cada vez más difícil motivar a los alumnos en el estudio de temas de Matemática, particularmente de Geometría. Por esto es de gran relevancia el material didáctico utilizado en las clases. Por este motivo es pertinente realizar talleres que permitan convertir en herramientas didácticas novedosas los elementos mencionados al principio.

Abstract

There are interesting objects (puzzles, tessellations and origami modules) whose properties and mathematical connotations are not included in the academic programs because they are not a part of any systematic theory. It is also increasingly difficult to motivate students to study subjects of mathematics, especially geometry. Therefore it is very important to select the educational material used in class. So It is an useful activity to organize workshops that enable create innovative teaching tools from the elements at the beginning.

Resumo

Existem objectos interessantes (rompecabezas, teselados e módulos origami) cujas propriedades e connotaciones matemáticas não se incluem nos programas académicos por não fazer parte de nenhuma teoria sistémica. Ademais é a cada vez mais difícil motivar aos alunos no estudo de temas de Matemática, particularmente de Geometría. Por isto é de grande relevancia o material didáctico utilizado nas classes. Por este motivo é pertinente realizar oficinas que permitam converter em ferramentas didácticas inovadoras os elementos mencionados ao princípio.

1. Fundamentación

Algunas propiedades interesantes no llegan a incorporarse a los programas académicos por no formar parte de ningún cuerpo de conocimientos sistemáticos; sin embargo tienen una justificación matemática rigurosa. Es el caso de las fórmulas de Herón y de Pick. Tampoco es habitual utilizar la expresión determinante de la ecuación de la recta por dos puntos, a pesar del amplio uso de su análoga para el plano por tres puntos. Asimismo, la teselación del plano es un tema frecuente en las actividades artísticas y su justificación geométrica está basada en transformaciones planas. Por su parte el origami (arte japonés de doblado de papel o papiroflexia) permite la construcción de poliedros y el estudio de sus propiedades.

En general la urgencia por cumplir los contenidos de los programas oficiales impide incluir actividades de aplicación de estas propiedades. Se observa además, que cada vez es más difícil motivar a los alumnos en el estudio de temas de matemática y en particular de la geometría; los docentes muchas veces carecen de medios, materiales educativos y técnicas adecuadas para atraer el interés de los alumnos a fin de guiarlos hacia un aprendizaje significativo. Existe dificultad en la didáctica que el docente imparte. Al respecto, Chevallard (1991) manifiesta que la didáctica es el corazón en la formación de todo maestro.

El material didáctico en las clases cumple un rol muy importante para el aprendizaje ya que bien utilizado motiva a los alumnos al estudio de los temas, entendiendo por motivación *todo aquello que inicia, sustenta o causa un orden o una fuerza de interés a favor de un comportamiento en particular* (Goog y Brophy, 1990). Por este motivo es pertinente realizar talleres que permitan cubrir la deficiencia de algunos temas y utilizar además para ello las herramientas didácticas mencionadas (rompecabezas, teselados y origami).

2. Experiencia

2.1 Objetivos

- Mediante la generación de teselados periódicos recordar las definiciones y propiedades de las transformaciones planas.
- Divulgar algunas fórmulas y procedimientos poco utilizados en la actividad académica.
- Construir poliedros con materiales de fácil obtención y recordar las propiedades de los poliedros regulares y semirregulares.
- Brindar a los alumnos del Profesorado de Matemática y Licenciatura actividades que fomenten la motivación, dinamismo y creatividad, así como también incentivarlos en la búsqueda de actividades didácticas no tradicionales y más participativas.

2.2. Población y metodología

En el taller participaron 22 estudiantes de Profesorado y Licenciatura en Matemática y se desarrolló en cuatro encuentros de 4 horas cada uno y en un quinto encuentro en el que se concretó la presentación de los trabajos que debieron realizar los asistentes para lograr la acreditación del mismo.

Para el primer encuentro se requirió de una sala de informática ya que se utilizaron distintos programas de geometría dinámica, entre ellos: Cabri, Geogebra y Geómetra. La duración total de este taller, incluyendo las actividades presenciales y no presenciales, fue de 30 horas-reloj.

2.3. Desarrollo de las actividades

2.3.1. Primer encuentro

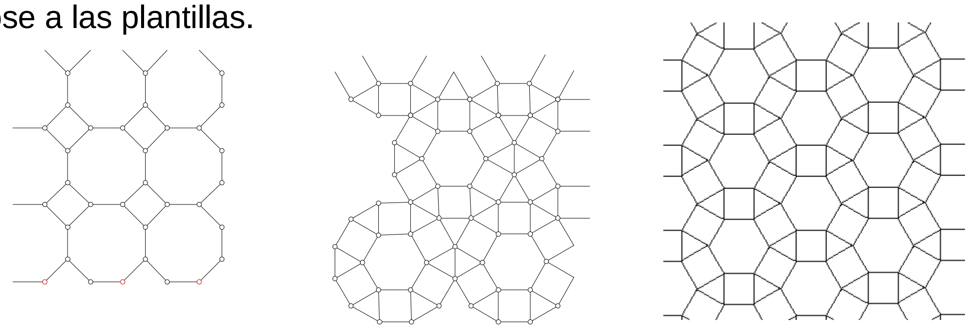
Se definió el teselado periódico del plano y se presentaron ejemplos. Se describió el conjunto de condiciones que deben cumplir las figuras que permiten teselar el plano. Asimismo se comentaron algunos antecedentes históricos.

A continuación se propuso la construcción de algún teselado a partir de una figura a elección, aplicando transformaciones planas mediante un programa de Geometría Dinámica, había una computadora por cada participante.

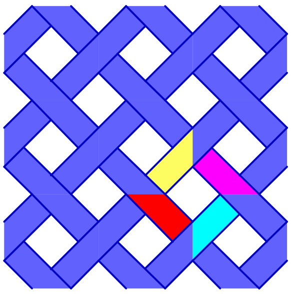
Las actividades sugeridas fueron:

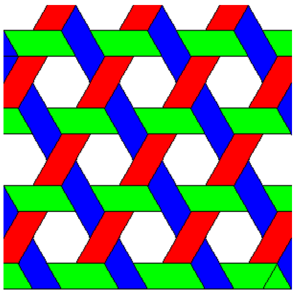
• Reproducir las siguientes figuras, utilizando GD o lápiz y papel:

• Reproducir plantillas como las de la figura. Generar dibujos con simetría ajustándose a las plantillas.

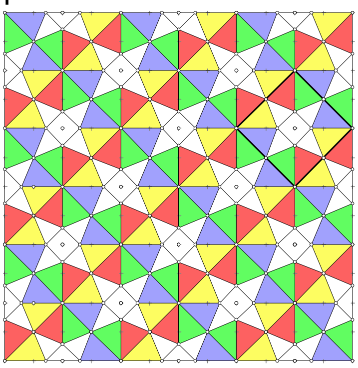


• Para la figura adjunta, determinar las piezas generadoras. ¿Existe una *única* pieza que se reproduzca infinitamente "teselando" el plano?





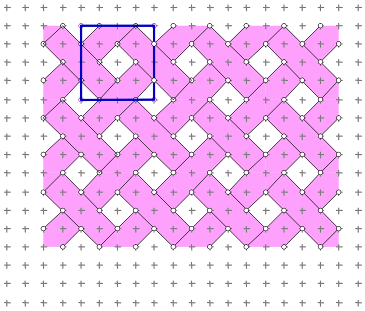
• Generar la figura adjunta a partir de un módulo conveniente:



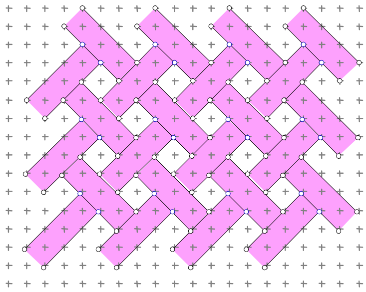
• Sobre base cuadriculada

1º. Construir el ensamblado de la figura con rectángulos aplicando transformaciones planas.

2º: Generar el mismo ensamblado con un módulo único (cuadrado)

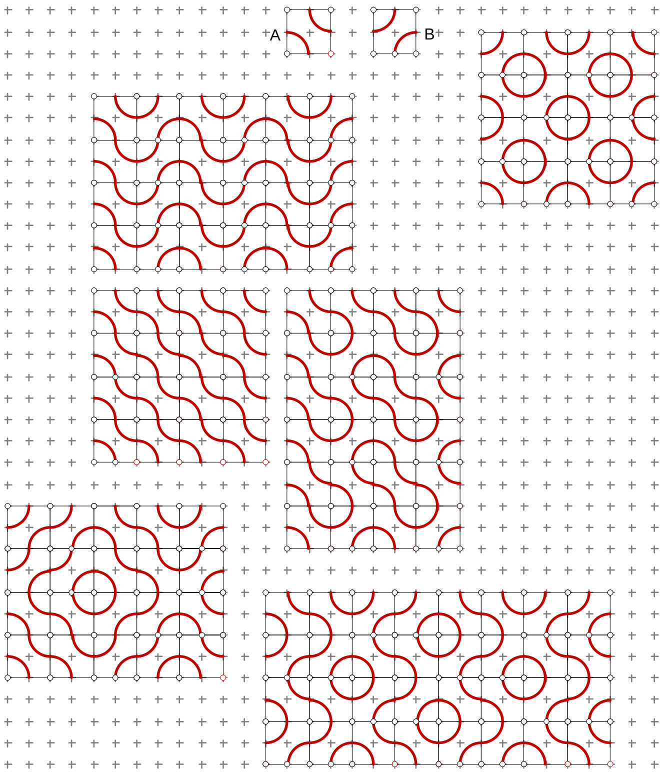


Un solo módulo
con diferentes definiciones.



Dos módulos simétricos

• Además de reproducir las teselaciones de la figura siguiente, representar en una matriz el patrón de distribución de los módulos (A y B) de cada caso. Analizar la posibilidad de definir nuevos módulo de teselado como combinación de las piezas originales.

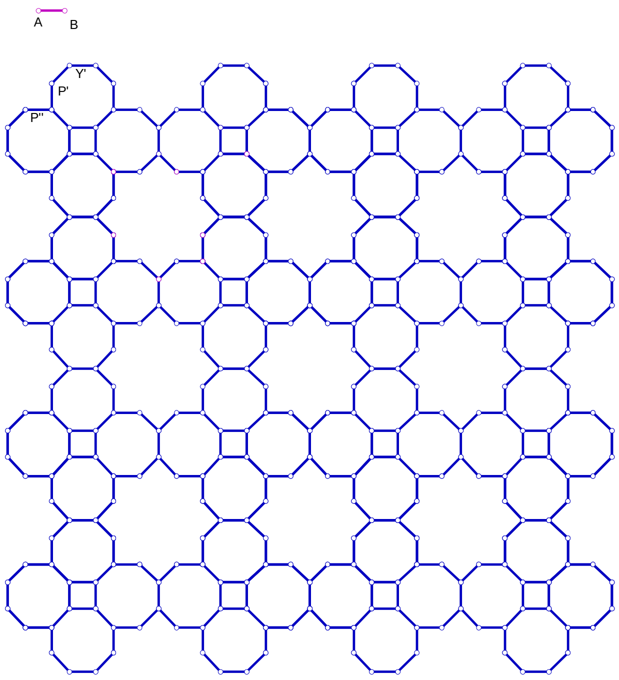


Buscar todas las combinaciones posibles.

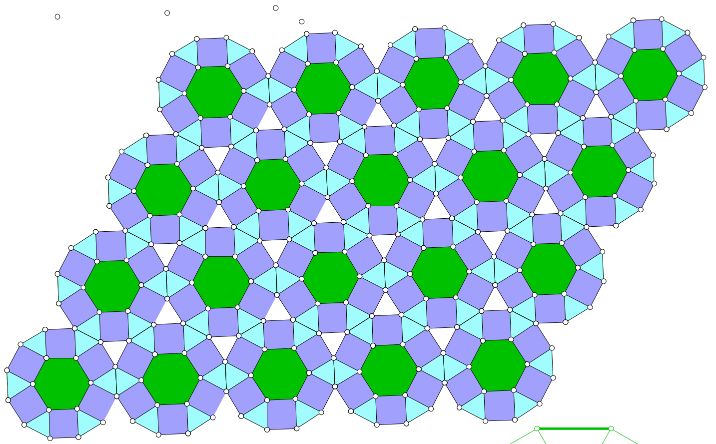
<u>Conclusiones del primer encuentro</u>:

Las respuestas de los participantes superaron las expectativas. Mostraron enorme interés y la clase fue muy dinámica, a pesar de las diferencias en el grado de habilidad en el manejo del programa. Además, manifestaron repetidas veces su curiosidad sobre las capacidades que brindan estos programas, quedando en pie la posibilidad de realizar actividades de entrenamiento en el uso de los mismos.

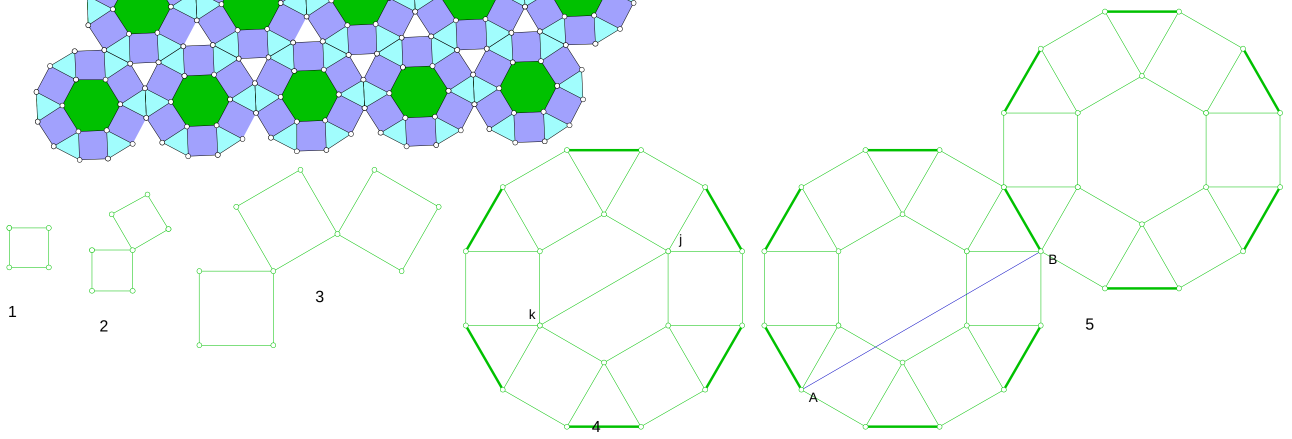
Las siguientes son algunas de las figuras obtenidas por los alumnos. Cabe destacar que se exigió la presentación del trabajo acompañado con una descripción de la sucesión de transformaciones utilizadas, se presenta la misma de manera textual:



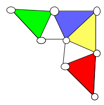
Lo primero que hice fue construir un vector (AB) que me permitiera poder manipular los dibujos del teselado.
Luego construí un punto, el cual lo transforme teniendo en cuenta el vector AB, próximo a partir de ese punto construí un segmento (YP), al cual le realice rotaciones dandole origen a un octogono (cada rotación con un ángulo de 135º).
Después de construir el octogono fui seleccionando algunos de sus lado (como marca de centro) y los refleje. De la misma manera lo hice para las figuras compuestas por los mismos, dándole genesis a este hermoso teselado; el cual a partir del vector (AB), se puede modificar.



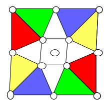
Construimos segmento que rotamos tres veces con un angulo de 90º para formar un cuadrado(fig 1).
luego ese cuadrado fue rotado desde uno de sus vertices un angulo de 150º (fig 2), Con el transformado realizamos la misma operación(fig 3).
trazamos el segmento kj y respecto a este reflejamos la figura 3 (fig 4).
Cerramos la figura 4 para contruir un dodecagono.
Marcamos el vector AB y realizamos una traslación respecto de la figura 4.(fig 5)



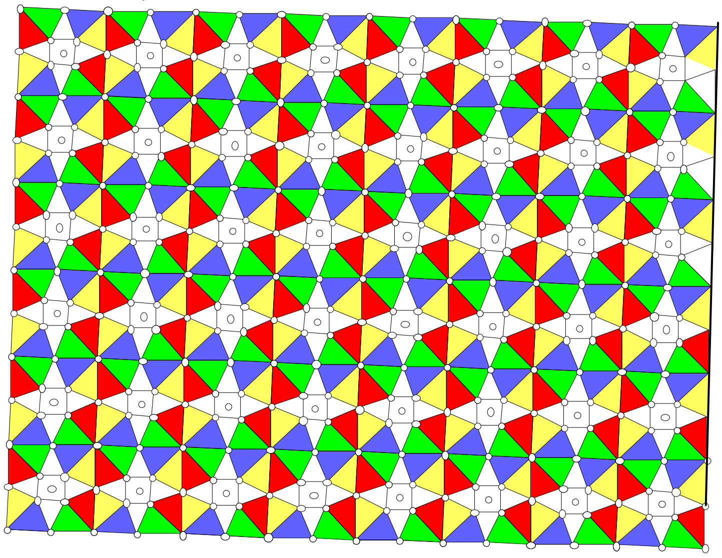
Primero creamos la siguiente figura, mediante traslaciones y rotaciones del segmento inicial



Segundo por el punto medio del cuadrado central marcamos el simétrico de la figura anterior

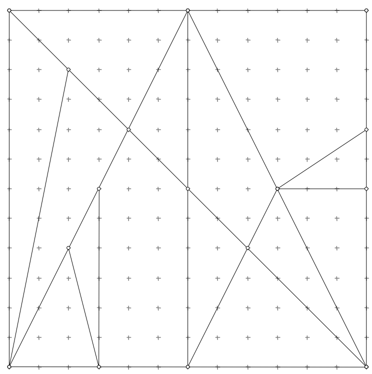


tercero por traslaciones armamos el teselado

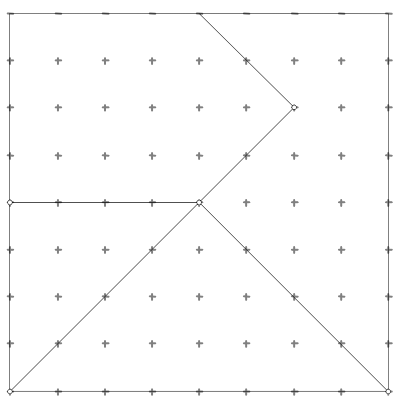


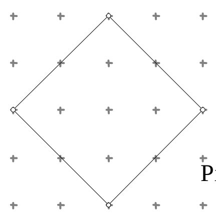
2.3.2. Segundo y tercer encuentros

- Se comenzó con un breve comentario sobre el *Stomachion* de Arquímedes, haciendo notar que su construcción se realiza fácilmente sobre una cuadrícula.



- Se entregaron las cuatro piezas de un rompecabezas (mucho más sencillo que el Stomachion) con el objetivo de formar un cuadrado. La resolución fue prácticamente inmediata.





Pieza extra

- A continuación se agregó una quinta pieza con el fin de formar *otro* cuadrado. Los participantes se enfrascaron entusiastamente en la resolución del nuevo problema, que resistió durante un buen rato.
- Vencido un plazo razonable, se propuso estudiar la solución sistemáticamente, a partir del cálculo de áreas.
- Como planteo inicial, se reproduce el cuadrado original (cuatro piezas) sobre una cuadrícula, en cuyos nodos coinciden todos los vértices de las piezas dadas. La *cuadrícula* (acotada) se define como:

  $\{(x,y)\ ,\ x, y \in \mathbb{Z}\ ,\ 0 \le x \le n\ ,\ 0 \le y \le n\ \}$. (Unidad: arbitraria)

- En este momento se presenta la *fórmula de Pick*: Área = $\frac{b}{2} + i - 1$

  siendo: b: cantidad de nodos en el borde; i: cantidad de nodos en el interior y la unidad de área el cuadrado de la rejilla.

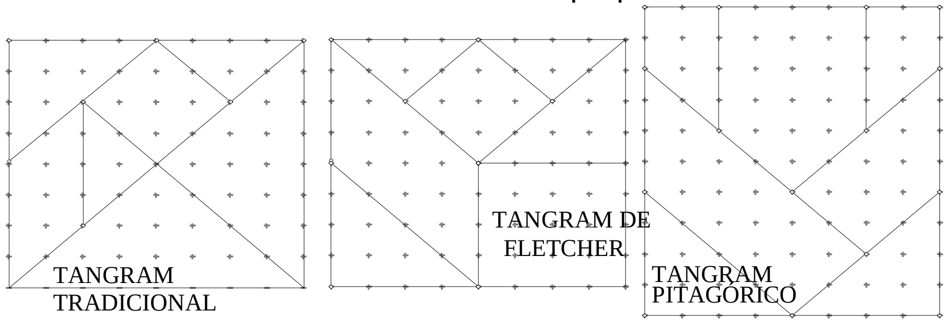
  Las condiciones de aplicación: *Todos* los vértices del polígono rectilíneo son nodos de la rejilla. (Nota: ¡No se requiere que el polígono sea convexo!)

- Luego de alguna ejercitación de la fórmula presentada, se aplica al cálculo del área del cuadrado mayor propuesto como rompecabezas, con el fin de deducir posteriormente el *lado* de dicho cuadrado.
- Inmediatamente se propone analizar cuáles segmentos de la figura original servirían para componer los lados del cuadrado mayor a armar. Con este recurso, el problema es finalmente vencido, con gran satisfacción de los participantes.
- En vista de la proximidad con el tema, se presenta la *fórmula de Herón* para el área de un triángulo a partir de las longitudes de sus lados:

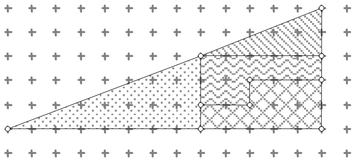
  $$\text{Área triángulo} = \sqrt{\mathbf{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}}$$

  siendo: a, b, c los lados y p el semiperímetro.

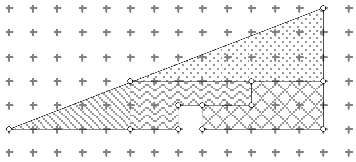
- Con fines de ejercitación se retoma el *Stomachion* y se eligen algunos triángulos para aplicación de la fórmula.
- Como efecto de esta actividad, se ofrecen ejemplos de cálculos entre números irracionales que dan como resultado números racionales.
- Finalmente se ofrecen varios diagramas con los que eventualmente podría realizarse la misma secuencia de actividades. Se propone estudiarlos.



- Se presenta la clásica paradoja del "*cuadrito perdido*".



Área =



Área =

Para explicar la aparente contradicción se calculan las pendientes de los segmentos de los dos triángulos, que resultan ser ligeramente diferentes.

- Inmediatamente surge la conveniencia de contar con la ecuación de la recta sostén (en $\mathbb{R}^2$). Para ello se presenta la fórmula

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_1} & \mathbf{y_1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_2} & \mathbf{y_2} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Inesperadamente los participantes se enfrascaron con entusiasmo en la justificación de la fórmula, lo que se logró partiendo de la habitual expresión

$\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y considerando que $\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & 1 \\ \boldsymbol{\beta} & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$.

- Se presenta un problema relacionado con la graficación en cuadrículas enteras, que consiste en determinar (sin contar explícitamente) el número de nodos que se encuentran en un segmento dado por sus extremos (dos puntos siempre en la cuadrícula). Contando con la ecuación de la recta, la resolución del problema planteado, geométrico en su origen, se transforma en un problema de divisibilidad de enteros, que los participantes encuentran curioso e interesante.
- Como variante del problema anterior, se propone encontrar algún procedimiento que permita determinar el número de nodos por debajo (encima) de una recta que atraviese la cuadrícula. (Aquí se debe considerar la superposición de la cuadrícula discreta con el plano cartesiano.)
- Otras variantes propuestas son:

a) Encontrar un procedimiento para determinar cuántos nodos de la rejilla contiene una recta que pasa por dos puntos dados (dentro de la cuadrícula, siempre acotada)

b) Encontrar un procedimiento para determinar cuántos nodos de la rejilla contiene una recta que pasa por un punto con pendiente dada (dentro de la cuadrícula, siempre acotada)

c) Encontrar un procedimiento para determinar cuál es el nodo más próximo a uno dado sobre una recta dada.

d) Encontrar un procedimiento para determinar cuántos nodos de la rejilla están estrictamente por debajo (encima) de una recta dada.

Si bien el entusiasmo y la curiosidad se mantuvieron durante todo el encuentro, no se lograron soluciones significativas.

Conclusiones del segundo y tercer encuentros

- La propuesta resultó interesante y las fórmulas presentadas en general no eran conocidas por los participantes.
- La presentación a través de rompecabezas resultó sumamente atractiva y novedosa para la mayoría.
- Varios de los asistentes mostraron su inquietud por utilizar esta herramienta como elemento motivador en sus clases cuando fuera oportuno, aunque no pudieron precisar por el momento para qué tema concreto.

El desarrollo de estos encuentros no sólo ha permitido familiarizar a los participantes con las fórmulas presentadas, sino también les ha permitido conocer la utilidad de los rompecabezas como herramienta didáctica motivadora.

Si bien no se llegó a resolver la totalidad de los problemas planteados en la última parte, su presentación quedó como propuesta de estudio para los interesados.

2.3.3. Cuarto encuentro:

El estudio de cuerpos tridimensionales se facilita enormemente si se tiene la oportunidad de manipular modelos físicos que los representen.

Para construirlos, el papel es un material accesible y económico (incluso gratuito si se recicla), además de no necesitar herramientas para trabajarlo.

Por otra parte, la construcción en sí misma resulta para la gran mayoría de alumnos una actividad gratificante.

- Se exhibieron varios modelos de poliedros construidos con módulos Origami de aristas, y de caras triangulares.
- A continuación se recordaron las definiciones y condiciones de existencia de los poliedros regulares y semirregulares.
- Se explican las características del formato A de papel. Se dan sugerencias para construir rectángulos de formato A de diversos tamaños.
- Se describe la confección de un módulo de cara triangular a partir de un rectángulo A , y la construcción de los sólidos platónicos de caras triangulares, cada uno de ellos con la cantidad de piezas necesarias. A tal efecto los participantes trabajaron en grupos.
- Para completar la colección de regulares por sus caras, se muestra la construcción del cubo de Sonobés y el dodecaedro de pentágonos de nudo de cinta continua (utilizando cinta de registradora)
- Como alternativa se presenta la construcción de módulos de arista, con los que se pueden construir también todos los poliedros semirregulares.
- Finalmente se mencionan algunas construcciones alternativas, como el "trenzado" de poliedros a partir de tiras de papel plegadas. Durante el plegado de tiras de triángulos se menciona un procedimiento de aproximación al ángulo de 60º de los sucesivos pliegues.

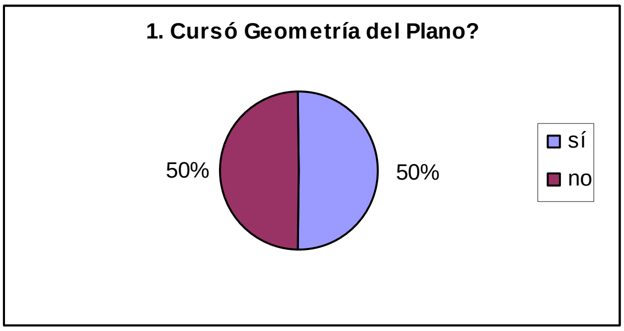
<u>Conclusiones del cuarto encuentro</u>

- Fue evidente el entusiasmo de los participantes en esta etapa.
- Los participantes reconocieron que estas herramientas pueden contribuir a un aprendizaje significativo, en vista del efecto que observaron sobre sí mismos durante la actividad realizada.
- El proceso de "límite" de plegados resultó extraordinariamente interesante y curioso, y varios de los participantes se propusieron justificar la validez del procedimiento.

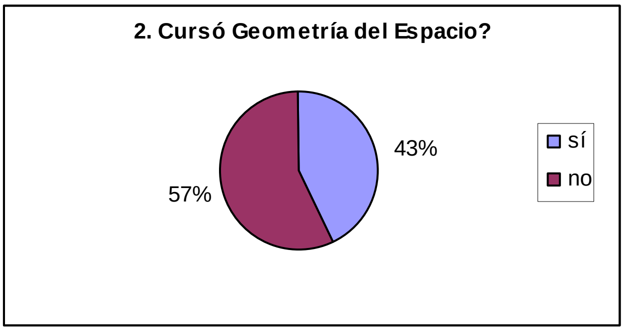
3. Encuesta

Una vez finalizado el taller se distribuyó una encuesta que debían responder de manera individual, se presenta la misma en conjunto con las respuestas dadas por los participantes:

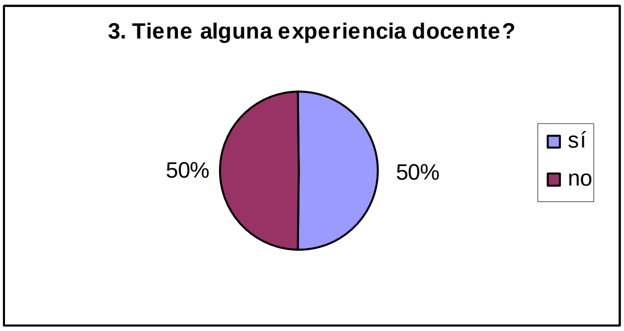
1. ¿Cursó la asignatura Geometría Euclidiana en el Plano?



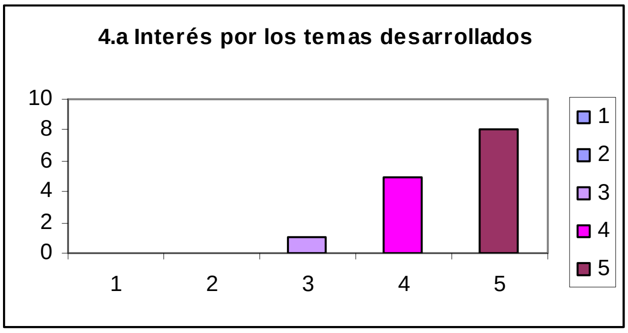
2. ¿Cursó la asignatura Geometría Euclidiana en el Espacio?



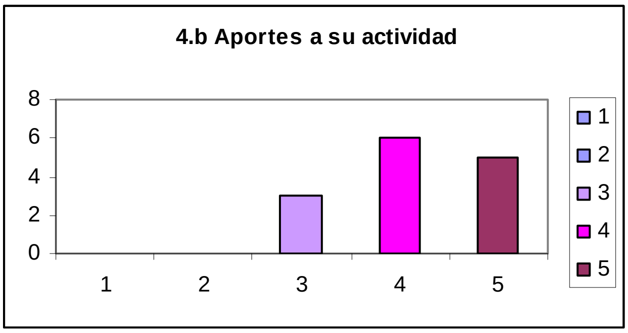
3. ¿Tiene alguna experiencia como docente?



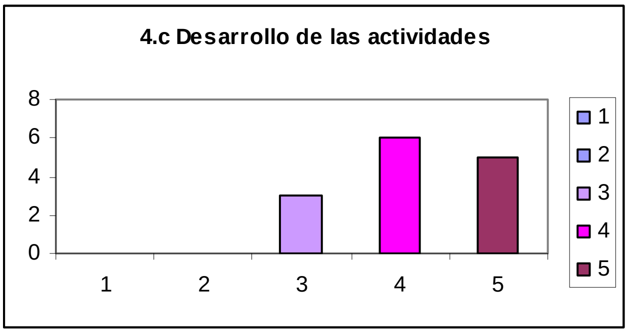
4. Le pedimos ahora, que califique con una valoración de 1 a 5 los aspectos del taller que se detallan a continuación:
   a) Interés por los temas desarrollados.



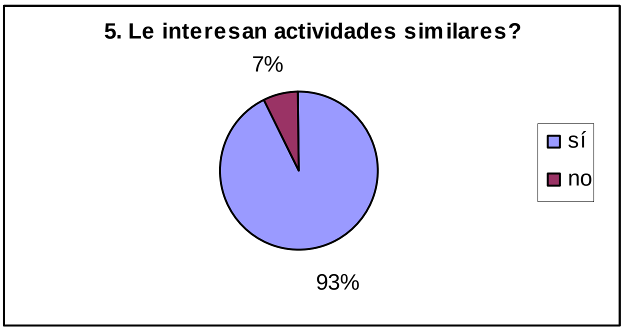
   b) Aportes del taller a su (futura) actividad docente.



   c) Desarrollo general de las actividades.



5. ¿Le interesa realizar otras actividades similares?



6. En caso de que su respuesta a la pregunta anterior sea afirmativa, podría sugerir alguna actividad.

   Algunas de las actividades sugeridas por ellos se transcriben a continuación: "*Realizar, con programas como el utilizado, moldes para construir los poliedros*", "*Profundizar más el tema de las cuadrículas, y cómo aplicarlas en clase de Geometría*.”, "*Trabajar con más programas de computadora, puesto que es muy atractivo para los alumnos*."

4. Evaluación

La evaluación se realizó mediante la preparación y exposición de un trabajo relacionado con los temas incluidos en el taller. Cada trabajo, individual o grupal (hasta tres integrantes) debía contener elaboraciones personales de cada uno de los temas incluidos en el taller: Teselados/Transformaciones, Polígonos en cuadrículas y Modelos de Poliedros.

Se presentaron cuatro trabajos que evidenciaron un alto grado de elaboración por parte de los integrantes. En la mayoría de los casos, el desarrollo del contenido culminaba con propuestas didácticas.

Los resultados presentados muestran una importante investigación de los temas por parte de los alumnos, lo que demuestra el interés que el taller despertó en ellos.

A continuación se presenta, de manera textual, una de las propuestas presentadas, a misma consta de 4 actividades:

<u>Actividad 1</u>
Situación problemática: *TESELANDO EL PISO DE MI AULA DE CLASES*
Introducción
En el presente proyecto, se pretende que a partir de la situación problemática, el estudiante desarrolle habilidades, realice aprendizajes significativos y elabore una propuesta de solución, valorizando y relacionando conceptos de polígonos y teselación del plano, con la realidad y el arte.
Las capacidades que se esperan desarrollar en el alumno, son:

- Identificar los polígonos que teselan el plano.
- Argumentar utilizando dibujos, la teselación del plano.
- Investigar la relación entre el arte y la teselación del plano.
- Resolver situaciones problemáticas relacionados con su realidad.

Se plantea una situación problemática y a partir de ella se recuperan saberes previos: ¿CÓMO RECUBRIR O DISEÑAR EL PISO DEL AULA DE CLASES?
¿Cuáles polígonos se pueden usar para hacer teselados regulares?
Para descubrirlo realiza las siguientes actividades:

- Recorta varios triángulos equiláteros iguales.
- De la misma manera, recorta (con la ayuda de un molde) cuadrados, pentágonos, hexágonos y octógonos. Recuerda que todos deben ser polígonos regulares.
- Utiliza hojas blancas. Pega en una de ellas los triángulos tratando de cubrir todo el plano.
- Repite la misma operación para los cuadrados, pentágonos regulares, hexágonos y octógonos.
- Ahora responde:
  ¿Cuáles son los polígonos que se pueden usar para hacer teselados regulares?

Se espera que responden sugiriendo los polígonos que según ellos podrían recubrir el piso (plano). Deben justifican haciendo esquemas o dibujos.

Por ejemplo, deberían poder decir, que el octógono no puede utilizarse para teselar el plano.

También se podría esperar que investiguen sobre la teselación y el arte, y así elaboran un resumen o ensayo sobre el tema.
Forman equipos de trabajo.

Actividad 2

Mide ahora los ángulos interiores de los distintos polígonos regulares y suma la medida de los ángulos interiores de los mismos.

- ¿Qué condición debe existir en cuanto a la suma de los ángulos en un vértice común para poder tener un teselado?
- Se ponen de acuerdo, dan sugerencias para teselar un metro cuadrado de papel (que representaría un metro cuadrado del piso del salón).
- Teselan un metro cuadrado de papel.
- Muestran su trabajo a sus compañeros de clase y explican el razonamiento y procedimiento que realizaron.
- Coordinan con la profesora y demás grupos para realizar una exposición en el patio.
- Elaboran una ficha de auto evaluación y el grupo evalúa a cada uno de sus integrantes.
- Elaboran una ficha de co-evaluación y evalúa el trabajo de los otros equipos.

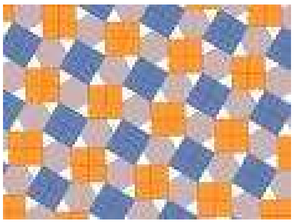
Actividad 3

Ahora, realiza tus propias teselaciones

- Utiliza uno de los polígonos regulares con los que se puede teselar el plano, por ejemplo, un cuadrado.
- Utiliza esta figura como molde para copiarla en una hoja, después trasládala sobre la hoja sin que haya traslapes.
- Hacer cálculos y proponer el tamaño de la baldosa con la que trabajarán (el polígono).
- Elaboran un esquema a escala, del diseño que pretenden realizar, en una hoja de cuaderno, indicando las dimensiones de las losetas, posición, ubicación, colores, etc.

Actividad 4

Observa el siguiente teselado, ¿puedes descubrir el patrón que se repite?



5. Conclusiones y proyección futura

Menos de la mitad de los participantes tenía cursado el conjunto de asignaturas de Geometría de la carrera, a pesar de lo cual los trabajos presentados resultaron muy completos e interesantes, no sólo por el rigor de las fundamentaciones, sino también por la originalidad con que la mayoría de las presentaciones culminaba en una propuesta didáctica pensada para alumnos de nivel medio.

De lo anterior se desprende que:

- Las actividades del Taller presentadas en forma de desafíos (construcción de teselados, demostración de proposiciones relacionadas con cuadrículas) incentivaron a los asistentes a revisar sus conocimientos de geometría, y en muchos casos a investigarlas por iniciativa propia.

- El tradicional esquema Teoría → Aplicaciones no es el único que permite resultados satisfactorios, ya que el hecho de dedicarse a la resolución de un problema incita a la búsqueda de conceptos y propiedades útiles para el caso.

En vista de lo expresado, concluimos que se han alcanzado los objetivos propuestos para el Taller. Por otra parte, a partir de lo manifestado en las encuestas, se plantea la posibilidad de realizar nuevos talleres con los mismos o similares contenidos, para ofrecerlos a docentes de otros niveles y estudiantes de Profesorado y Licenciatura

Bibliografía

Coxeter, H. (1971). *Fundamentos de Geometría.* Lisuma-Wiley.

Keller, J. M. (1987). *Estrategias para estimular la motivación aprender. Funcionamiento e instrucción*. Universidad de Estados de la Florida.

Lang, S., Murrow, G. (1988) *Geometry*. Springer.

Novak, J. D., Gowin, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Martínez Roca, Barcelona.

Pazos, M. (1995). *El Tangram: un recurso para la educación matemática.* 7ª JAEM . Madrid.

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente*. Editorial Gedisa, Barcelona.

Puig Adam, P. (1969). *Curso de Geometría Métrica*. Tomo I: Fundamentos. Biblioteca Matemática S. L..

Santaló, Luis A. (1993). *La Geometría en la formación de profesores.* Red Olímpica.

Stomachion. http://www.juegotangram.com.ar/tipostangram/Stomachion.htm

Facello, Teresa del Carmen. Docente de Matemática y algunas disciplinas afines en diferentes niveles educativos. Docente del Dpto. de Matemática de la Facultad de Economía y Administración de la Universidad Nacional del Comahue (U.N.Co.), Argentina. Integrante del proyecto de investigación “Enseñanza de la Geometría: Qué dar, qué no dar, qué mejorar” de la (U.N.Co.). **tfacello@uncoma.edu.ar**

Osio, Elsa Beatriz. Calculista Científica. Universidad Nacional de La Plata, Argentina. Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas. Orientación Matemática. Universidad Nacional del Comahue (U.N.Co.). Participación en el Proyecto “*Ciencias Básicas y orientación Vocacional de articulación entre la Universidad Nacional del Comahue con escuelas Medias de Río Negro y Neuquén.* Integrante del proyecto de investigación “Enseñanza de la Geometría: Qué dar, qué no dar, qué mejorar” de la U.N.Co. **osioe@jetband.com.ar**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 155-160
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Jarras, vasos, agua y funciones

Problema[1]

Se tiene una jarra vacía cuya forma es de tronco de cono circular recto, con base inferior de mayor radio que la base superior. Con un vaso, se va llenando de agua a la jarra. Determinar la función que expresa cómo va cambiando la altura del nivel del agua en la jarra, conforme se le va añadiendo agua con el mismo vaso.

El no tener datos numéricos en este problema, orienta a pensar en una solución de carácter general, para lo cual es importante considerar sus aspectos intrínsecos. Como suele hacerse, siguiendo las recomendaciones de Polya, podemos pensar en un problema más sencillo para tener mejores elementos para resolver el problema propuesto. Así, pensemos en la siguiente situación:

> *Se tiene una jarra vacía cuya forma es de cilindro circular recto. Con un vaso, se va llenando agua a la jarra. Determinar la función que expresa cómo va cambiando la altura del nivel del agua en la jarra, conforme se le va añadiendo agua con el mismo vaso.*

Una primera observación, obvia, es que el nivel del agua en la jarra irá subiendo conforme se vaya vaciando agua con el vaso. Así, podemos afirmar que la función pedida es una función creciente, que parte del origen. Por la forma de la jarra, el nivel del agua se irá incrementando en un número igual de unidades de longitud, por cada vaso de agua que se vierta en la jarra. Si asumimos que ese número de unidades de longitud, digamos centímetros, es m, tendremos entonces:

Número de vasos	Altura del nivel del agua en cm
1	m
2	$2.m$
3	$3m$
…..	….
v	vm

Y podemos concluir que la función correspondiente es $f(v) = mv.$

En rigor, deberíamos precisar que la variable independiente, v, varía sólo en los números enteros no negativos por estar representando número de vasos; o más

---

[1] Expreso mi agradecimiento al amigo y colega Emilio Gonzaga, por haberse dado el tiempo para resolver con entusiasmo este problema con valores específicos y estimularme a escribir el artículo para este número de UNION tratando este tema.

precisamente, cantidad de agua correspondiente a número de vasos llenos de este líquido. Sin embargo, es natural hacer la extensión a los números reales, considerando cantidades de agua correspondientes a porciones del vaso. Con esta aclaración, podríamos decir que tenemos una función lineal, restringida a los números reales no negativos:

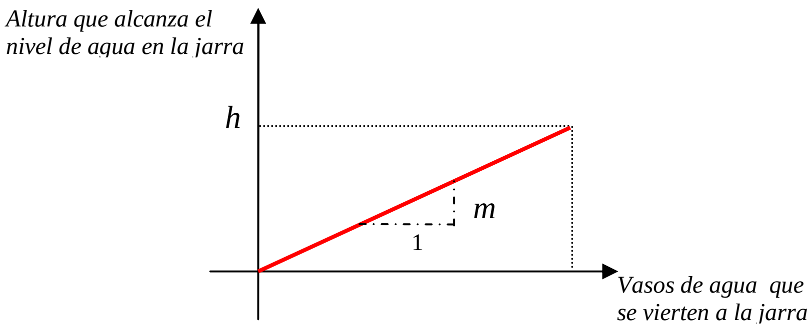
$$f(v) = mv, \text{ con } \quad v \geq 0 .$$

Sin embargo, asumiendo que se vierte agua solo hasta que se llena la jarra, deberíamos restringir más la variable *v*. Si consideramos que la jarra tiene una altura *h,* la restricción se obtiene resolviendo la ecuación *mv* = *h*. Así, la función pedida es:

$$f(v) = mv, \text{ con } \quad 0 \leq v \leq \frac{h}{m}.$$

El problema es suficientemente ilustrativo como para explotarlo más para el estudio de las funciones y en particular de las funciones lineales.

Pasemos al registro gráfico:

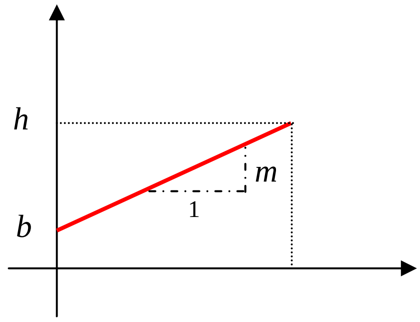


Por lo asumido en el problema, por cada vaso de agua que se vierte en la jarra, el nivel del agua sube *m* centímetros y esto significa gráficamente que estando en un punto cualquiera de la recta roja, al avanzar una unidad horizontalmente, se tendrá que subir verticalmente *m* unidades para encontrar a otro punto de la recta roja. Esta es la idea básica en el concepto de *pendiente de una recta*.

Como es muy frecuente el uso de las funciones lineales afines, podemos relacionar éstas con el contexto dado por el problema. Una función lineal afín es de la forma:

$$f(x) = mx + b$$

En términos del problema, interpretamos *b* como la altura que tiene el nivel de una cantidad de agua en la jarra, antes de iniciar a verter agua con el vaso. Así, cuando se han vertido 0 vasos de agua, el nivel de agua en la jarra es de *b* cm. La gráfica correspondiente es:



Resulta interesante observar que si la cantidad inicial de agua en la jarra cambia, pero se sigue usando el mismo vaso, la consecuencia en la gráfica de la función será una traslación paralela a sí misma de la recta roja; es decir, habrá un nuevo punto de intersección con el eje de ordenadas, digamos $(0; b_1)$, donde b_1 es la nueva altura que tiene el nivel del agua inicial en la jarra. La traslación paralela será hacia arriba o hacia abajo, según el nivel de la cantidad inicial de agua sea mayor o menor ($b_1 > b$ ó $b_1 < b$). En la expresión algebraica correspondiente sólo cambiará la constante b por la b_1:

$$f(x) = mx + b_1$$

Por otra parte, si se mantiene la misma cantidad inicial de agua en la jarra, pero se usa otro vaso de agua, de diferente volumen, para llenarla, la consecuencia gráfica será que la recta roja mantendrá su punto de intersección con el eje de ordenadas en $(0; b)$, pero cambiará su inclinación; es decir, si con el nuevo vaso el nivel de agua en la jarra crece m_1 centímetros por cada vaso lleno de agua que se vierta, la nueva recta roja será más empinada si $m_1 > m$ ó menos empinada si $m_1 < m$. En la expresión algebraica correspondiente sólo cambiará la constante m por m_1:

$$f(x) = m_1 x + b$$

En términos coloquiales podríamos decir que al usar un vaso más grande, la altura del nivel del agua en la jarra crecerá más rápidamente (el segmento de recta que lo representa será más empinado) y al usar un vaso más pequeño, la altura del nivel del agua en la jarra crecerá más lentamente (el segmento de recta que lo representa será menos empinado.)

Comentarios

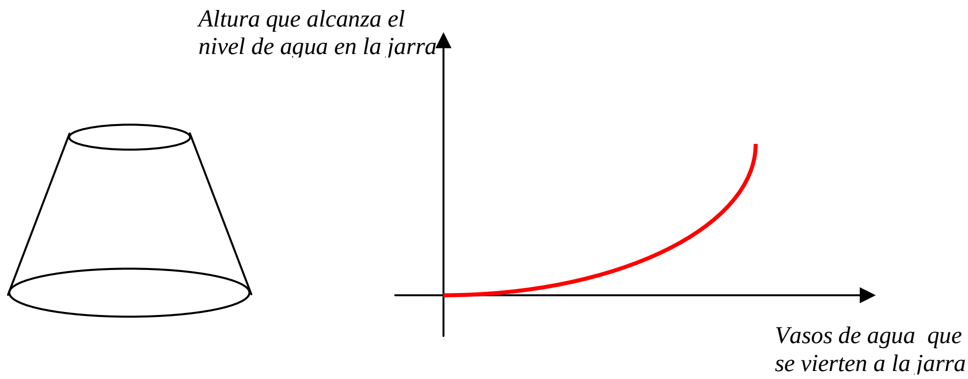
1. Al resolver un problema más sencillo que el original, nos hemos encontrado con uno que permite tratar las funciones lineales de modo que se facilita el tránsito entre los registros verbal, gráfico y algebraico, como recomienda Duval[2]. Mis experiencias al considerar este problema para la enseñanza-aprendizaje de funciones lineales con alumnos de humanidades, del primer ciclo universitario, han sido muy fructíferas.
2. La situación puede afrontarse de manera muy práctica, con una jarra y un vaso concretos, haciendo las mediciones correspondientes y sus registros en una tabla. No es indispensable que la forma de la jarra sea la de un cilindro circular recto; basta con que sea cilindro recto.
3. Las experiencias obtenidas al resolver el problema con la jarra en forma de cilindro circular recto, nos dan una base importante para la familiarización con el problema inicial y para intuir la forma de la gráfica de la función que se pide.

El problema inicial

Volviendo al problema inicial, encontramos que la diferencia esencial con el problema que hemos resuelto, radica en que a medida que se vayan vaciando vasos

[2] Duval, R. (1993) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*. Traducción DME- CINVESTAV, 1997, México

de agua en la jarra con forma de tronco de cono circular recto, con base inferior más grande que la base superior, el nivel del agua en la jarra irá subiendo *pero cada vez el incremento de la altura será mayor*, pues conforme el agua sube de nivel, es mayor la altura de la nueva porción de cono que se llenará con el siguiente vaso de agua. Es decir, con cada vaso de agua que se vierte a la jarra, se obtiene una porción de tronco de cono que cada vez tiene una altura mayor que la anterior, por tener bases inferior y superior más pequeñas, respectivamente. En pocas palabras podemos decir que la función que expresa la altura del nivel de agua, conforme se añaden vasos de agua, es una función creciente, pero que cada vez crece más. En este tipo de funciones, los economistas suelen usar la expresión “crecimiento a tasas crecientes”. Evidentemente, la representación gráfica de tal función ya no es una semirrecta. Por lo dicho anteriormente, podemos intuir que es una curva creciente, con concavidad hacia arriba, similar a la rama de una parábola en el primer cuadrante del sistema de coordenadas, con eje vertical y vértice en el origen, que se abre hacia arriba.



A fin de verificar cuantitativamente esta apreciación cualitativa – muy importante en el manejo del concepto de función – consideramos una situación concreta, con datos numéricos que son coherentes con la información esencial que se da en el problema. Asumamos que el radio de la base inferior es 10 cm, el de la base superior es 5 cm y la altura de la jarra es 20 cm. Con esta información, la generatriz del cono tiene ecuación $y = 40 - 4x$ y el tronco de cono es parte del cono cuyo vértice está a 40cm de altura respecto a su base.

Así, cada tronco de cono con agua, que se va formando en la jarra al verter agua con el vaso, tiene base inferior de radio 10 cm, base superior de radio *x* cm y altura *y* cm. En consecuencia su volumen, en centímetros cúbicos, está dado por

$$V = \frac{\pi}{3}\left[100\times 40 - x^2(40-y)\right]$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left[4000 - \left(\frac{40-y}{4}\right)^2(40-y)\right]$$

$$V = \frac{\pi}{48}\left[64000 - (40-y)^3\right]$$

Si asumimos que con el vaso se vierte cada vez 100 centímetros cúbicos de agua, la cantidad de vasos de agua en este tronco de cono será

$$v = \frac{\pi}{4800}\left[64000-(40-y)^3\right]$$

Ahora, despejando y, que expresa la altura del tronco de cono en centímetros, tenemos:

$$y = 40-(64000-\frac{4800}{\pi}v)^{\frac{1}{3}}$$

Asumiendo continuidad, es fácil verificar que una función de este tipo ($y = K_1-(K_2-K_3 v)^{\frac{1}{3}}$, con las constantes K_1, K_2 y K_3 positivas) tiene primera y segunda derivadas positivas, lo cual se refleja gráficamente en una curva creciente, cóncava hacia arriba, similar a la curva roja que se había adelantado, intuitivamente. Ciertamente, también se puede verificar que la gráfica de la función tiene esa forma usando un software matemático adecuado, como Mathematica o Derive.

Comentarios finales

1. Resulta natural considerar un problema similar al propuesto con una jarra en forma de tronco de cono con base inferior de radio menor que el de la base superior e imaginar que la curva correspondiente a la función que exprese el cambio de la altura del nivel del agua en la jarra conforme se vaya vaciando agua con un vaso, será también creciente, pero ahora cóncava hacia abajo, pues cada vez el nivel del agua subirá menor número de unidades de longitud. Queda como ejercicio para el lector resolver el problema, considerando, por ejemplo, una jarra con radio de 5 cm en la base, radio de 10 cm en la "boca" y altura de 20 cm, y un vaso con el que se vierte cada vez 100 cm^3 de agua.
2. Es un ejercicio interesante proponer diferentes formas de jarras y esbozar las correspondientes formas de las gráficas de las funciones que expresan la altura que va alcanzando el nivel de agua en la jarra, conforme se le va añadiendo agua con un vaso[3]. Siempre se tendrán funciones crecientes, pero la concavidad de las curvas correspondientes dependerá de la forma de la jarra. Hay casos de cambio de concavidad y resulta ilustrativo relacionar el punto de inflexión con la parte correspondiente en la jarra.
3. Considerar que hay una cantidad inicial de agua en la jarra, tiene un correspondiente gráfico: una traslación vertical hacia arriba, de la curva que corresponde al caso de una jarra vacía.
4. Es particularmente importante este tipo de problemas en la enseñanza y aprendizaje de funciones, pues, lamentablemente es frecuente reducir su estudio a definiciones formales, seguidas de expresiones algebraicas, reglas para graficar y determinación de dominios y rangos, sin enfatizar en ideas intuitivas y la representación de los cambios mediante funciones. Recomiendo tratar seriamente las funciones, con una metodología activa, basada en la resolución de problemas, en el marco de una configuración epistémica

[3] Este ejercicio ya lo proponía nuestro recordado amigo y colega Miguel de Guzmán en el libro de Matemáticas para Bachillerato, en coautoría con José Colera y Adela Salvador.

empírica y teniendo en cuenta los criterios de idoneidad que considera el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Esto implica, en términos prácticos, no encasillarse en el formalismo, estimular las percepciones intuitivas y fomentar tránmsitos frecuentes entre lo gráfico, lo verbal, lo algebraico, lo intuitivo y un contexto adecuado[4].

[4] Un trabajo amplio en esta línea puede encontrarse en el capítulo 6 de Malaspina, U. (2008) *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. www.pucp.edu.pe/irem/Tesis_Doctoral_Uldarico_Malaspina_Jurado.pdf

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 161- 174
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Presentación y resolución dinámica de problemas mediante GeoGebra

**Eva Barrena Algara; Raúl Manuel Falcón Ganfornina;
Rosana Ramírez Campos; Ricardo Ríos Collantes de Terán.**

Resumen

GeoGebra es un software de Matemáticas, diseñado para enseñar y aprender, que ofrece herramientas para la resolución dinámica de problemas. Sin embargo, a la hora de exponer dicha resolución, parece que a priori no ofrece una forma de elaborar presentaciones secuenciales. Para solventar esta dificultad, en el presente artículo se explora la posibilidad de usar herramientas como deslizadores, casillas de control y operadores booleanos, junto a unas básicas nociones de Java.

Abstract

GeoGebra is a mathematic software, designed for teaching and learning, which offers tools for the dynamical resolution of problems. However, for the exposition of such a resolution, it seems that a priori the program does not offer facilities for the elaboration of sequential presentations. In order to solve it, the possibility of using tools such as sliders, check boxes and boolean operators, together with basic notions of Java programming, are analyzed in deep in the core part of this work.

Resumo

GeoGebra é um software de Matemáticas, desenhado para ensinar e aprender, que oferece ferramentas para a resolução dinâmica de problemas. No entanto, à hora de expor dita resolução, parece que a priori não oferece uma forma de elaborar apresentações secuenciales. Para solventar esta dificuldade, no presente artigo explora-se a possibilidade de usar ferramentas como sliders, caixas de controle e operadores booleanos, junto a umas básicas noções de Java.

1. Introducción

Un *slideware* o programa de presentaciones es una herramienta informática que se utiliza para mostrar información de forma visual, normalmente mediante una secuencia de diapositivas en las que se permite colocar texto, gráficos y otros objetos. Entre los más difundidos se encuentran *PowerPoint* (*Microsoft*), *Keynote* (*Apple*) o *Impress* (*OpenOffice*). En los últimos años el uso docente de *slidewares* ha aumentado de forma exponencial puesto que estos programas permiten expresar ideas de forma concisa, enfocar la atención del alumnado, comprender conceptos de forma visual y adecuar el ritmo de trabajo atendiendo a la diversidad del aula (García Manzano, 2009, p.193). No obstante, existen argumentos razonados en contra tanto del abuso como del uso incorrecto de estas herramientas. En este sentido puede mencionarse la creación de diapositivas con una alta densidad de información o con excesivas animaciones que distraen al alumnado (Hassner, 2005, p. 395). Por otra parte, cabe observar que una metodología basada únicamente en este tipo de presentaciones invita al alumnado a una relajación y a un desplazamiento de la atención del profesor a la pantalla, al mismo tiempo que no promueve una confrontación dialéctica profesor-alumno (García Manzano, 2009, p. 194). Esto conlleva a una debilitación de la capacidad analítica del estudiante y a una pérdida de su razonamiento verbal y espacial (Tufte, 2003, pp. 12 y 25), que resulta aún más patente en el aula de Matemáticas, donde el desarrollo cognitivo se centra en la resolución de problemas y no tanto en la exposición en sí de la materia. La manipulación de los elementos que intervienen en los mismos es fundamental y no es suficiente realizar una presentación secuencial que refleje únicamente las distintas partes de la exposición de un problema (enunciado, planteamiento y resolución), sino que se requiere de una interacción por parte del estudiante que le permita asimilar conceptos y profundizar en su conocimiento.

En el sentido de facilitar una interacción por parte del alumnado, los avances llevados a cabo en los últimos años en sistemas informáticos basados en geometría dinámica (*DGS*), como pueden ser *Cabri*, *Cinderella* o *GeoGebra*, han permitido tanto la presentación de resultados como la resolución de problemas matemáticos, haciendo uso de una metodología docente basada en la manipulación de objetos. Sin embargo, a diferencia de los *slidewares*, que se basan en una secuencia de diapositivas o páginas individuales, los *DGS's* incorporan todos los elementos de la presentación en una única pantalla, donde se van acumulando en pasos sucesivos tanto los elementos geométricos utilizados, como los textos informativos que guían al alumnado en la resolución de un determinado problema, lo que representa el inconveniente de saturación de información.

No obstante, la versatilidad de este tipo de programas a la hora de generar *applets* interactivos en *Java*, permite que una alternativa para aligerar esta saturación de información sea crear un entorno web donde aparezcan, por una parte, un marco que muestre la pantalla del correspondiente *DGS* a utilizar por el alumnado y, por otra, las distintas explicaciones asociadas al problema en cuestión. Sin embargo, cuando la naturaleza del problema requiera una larga secuenciación entre textos explicativos y manipulación de los elementos del *DGS* por parte del estudiante, la extensión de la página web correspondiente puede llegar a ser un inconveniente, pues no se podría visualizar en una misma pantalla instrucciones y entorno de trabajo. En el presente artículo plantearemos como solución el uso de las herramientas existentes en un *DGS* para elaborar una presentación secuencial interactiva en el marco del programa informático en sí. En concreto utilizaremos las siguientes herramientas disponibles en *GeoGebra*: deslizadores, animación automática, casillas de control, operadores booleanos y creación de *applets* de *Java*. A través de ejemplos prácticos, el lector podrá preparar una secuencia de diapositivas que ilustren la explicación de problemas matemáticos, creando su propio modelo de *slideware* y disponiendo de las herramientas necesarias para la creación de materiales adaptados a las necesidades de su aula.

Como ilustración de las distintas herramientas que se van a explicar, se mostrará su utilización con vistas a crear en GeoGebra[1] una presentación que englobe diferentes resoluciones del problema de Sam Loyd "La piedra de afilar" (Sam Loyd, 1914, p. 172), gran inventor de rompecabezas y acertijos, que divulgó

[1] En el desarrollo del presente artículo se ha utilizado la versión 3.2.45 de GeoGebra.

las matemáticas extensamente y gozó de gran popularidad gracias a la aparición de sus trabajos en revistas y diarios durante más de 50 años, así como por el uso de algunos de sus acertijos en campañas publicitarias de importantes candidatos a la presidencia de los EE.UU.[2]

2. Presentaciones secuenciales en GeoGebra

GeoGebra memoriza el orden de los pasos realizados a la hora de llevar a cabo una construcción geométrica, pudiéndose utilizar la *barra de navegación por pasos* para crear una presentación lineal del algoritmo de construcción. Si bien es posible determinar los elementos geométricos a mostrar marcándolos como *puntos de interrupción*, la linealidad a la que está sometida la construcción no permite hacer desaparecer de la pantalla dichos elementos, salvo que se oculten expresamente. De esta forma, la presentación resultante dispone solamente de una única diapositiva en la que es difícil separar convenientemente las distintas fases de la exposición de un problema: enunciado, planteamiento y resolución. Por otra parte, la linealidad citada imposibilita atender las diversas opciones de resolución que surgen a la hora de abordar cualquier problema matemático, por ello que se hace necesario elaborar un mecanismo de navegación alternativo que posibilite tanto la aparición y desaparición de elementos como la elección de la ruta de resolución a seguir.

Una posibilidad consiste en crear una barra de navegación personalizada, haciendo uso de un *deslizador* que permitiese al usuario poder elegir la etapa de la presentación que quisiera visualizar. En particular, si la presentación a elaborar constase de *n* etapas diferenciadas, bastaría crear un deslizador *Etapa* definido en el *Intervalo [1, n]* con *Incremento 1.* Cabe observar que una presentación básica estaría formada al menos por las siguientes tres etapas:

1. *Enunciado.* 2. *Elección de la ruta de resolución.* 3. *Resolución.*

La presentación de cada etapa puede estar constituida a su vez por un conjunto de diapositivas que sería regulado a partir de un segundo deslizador. Cada etapa estaría entonces vinculada a una serie de elementos que deben aparecer en la pantalla únicamente cuando el deslizador se encuentra en la posición exacta asociada. Esto puede lograrse haciendo uso de la opción *"condición para exponer el objeto"*, dentro de las propiedades avanzadas de cada elemento. Sería suficiente escribir *Etapa == m*, siendo *m* el número asociado a la etapa en cuestión. Cuando el usuario moviese el deslizador a una etapa anterior o posterior, el objeto desaparecería, tal y como ocurriría en una presentación secuencial al uso.

Este procedimiento tiene el inconveniente de que si posteriormente se necesita intercalar una etapa intermedia, sería necesario modificar las condiciones de todos los objetos creados hasta el momento. Para evitar esta circunstancia es recomendable hacer uso de *variables booleanas* asociadas a cada etapa. En el caso de una presentación con las tres etapas indicadas anteriormente, dichas variables se definirían por ejemplo como:

enu = Etapa == 1 *sol = Etapa == 2* *res = Etapa == 3*

Como condición para exponer objetos se introduciría entonces los nombres de dichas variables en lugar de la expresión *Etapa == m*. De esta forma, en caso de

[2] Puede ampliarse información sobre Loyd en la dirección web http://www.samuelloyd.com.

tener avanzada la presentación y necesitar intercalar una nueva etapa (como, por ejemplo, una etapa de "conocimientos previos" entre el enunciado y la elección de solución), bastaría aumentar el intervalo de definición del deslizador de *[1, n]* a *[1, n+1]* y modificar únicamente la definición de las variables booleanas correspondientes, sin necesidad de cambiar las propiedades de todos los objetos ya existentes en la hoja de trabajo.

El uso de variables booleanas es también fundamental a la hora de determinar la ruta de resolución a llevar a cabo. Es necesario crear para ello tantas *Casillas de Control para Ocultar Objetos* como métodos de resolución se tengan previstos plantear en la presentación. Su valor booleano verdadero (1) / falso (0) (según esté activada o no la casilla, respectivamente), puede utilizarse entonces como condición para exponer un determinado objeto. Sin embargo, dado que GeoGebra no permite casillas de control de selección única, hay que analizar los mencionados valores booleanos para obligar al usuario a marcar una única casilla. De esta forma, se puede por ejemplo incorporar un mensaje de error si, al pasar a una etapa posterior mediante el deslizador, no se ha seleccionado ninguna casilla o se ha marcado más de una. En concreto, si existen *k* posibles métodos de resolución asociadas a las casillas de control Sol_1, Sol_2, …, Sol_k, se define la variable:

$$Sol = Sol_1 + Sol_2 + \ldots + Sol_k$$

De esta forma, si la variable Sol tiene valor nulo, entonces el usuario no ha marcado ninguna solución, mientras que si tiene un valor mayor que la unidad, entonces ha marcado más de una solución. Se pueden crear por tanto un par de textos con mensajes de error asociados a cada una de las anteriores situaciones.

Finalmente, en el planteamiento y la resolución del problema es cuando pueden aplicarse explícitamente las herramientas algebraicas y geométricas de GeoGebra. Dependiendo de cada problema en cuestión, la combinación de éstas con los deslizadores permite mejorar una de las características más atractivas de los *slidewares*, como es ofrecer una interfaz gráfica para incorporar animaciones basadas en rotaciones, desplazamientos, etc. Por su parte, unos conocimientos básicos en HTML posibilitan generar applets interactivos en Java que no se encuentran incluidos como tales en GeoGebra.

3. Ejemplo práctico

Siguiendo las ideas presentadas en la anterior sección y como ilustración de las mismas, se muestran a continuación los diversos pasos a llevar a cabo para elaborar una presentación secuencial en GeoGebra con tres rutas distintas de resolución del siguiente problema de Sam Lloyd[3] llamado "*La piedra de afilar*", el que se presenta a continuación.

"Se dice que dos sirios honestos reunieron sus ahorros y compraron una piedra de afilar. Como vivían a varias millas de distancia, convinieron que el mayor conservaría la piedra hasta que el tamaño de ésta se hubiera reducido a la mitad, y luego se la daría al otro hombre. La piedra tenía un diámetro exacto de 22 pulgadas, con un orificio de 3 pulgadas 1/7 en el centro de la manija, como lo muestra el dibujo. ¿Cuál sería el diámetro de la piedra al recibirla el segundo hombre?"

[3] Se puede obtener una versión completa del ejemplo práctico a desarrollar en la dirección web http://www.geogebra.org/en/upload/files/spanish/omthales/Loyd/Loyd.html.

Figura 1. Portada del problema “The Grindstone Puzzle” (Sam Loyd, 1914, p. 172).

3.1. Barra de navegación: deslizador

En una nueva hoja de trabajo de GeoGebra, se ocultan los ejes y se visualiza la *Barra de Entrada*. Seguidamente se realizan los siguientes pasos:

En la esquina superior derecha se inserta un deslizador de nombre *Etapa* en el *Intervalo [1,3]* con *Incremento 1* y *Ancho 300*. Con el botón derecho del ratón sobre el deslizador se desactiva la opción *Muestra Rótulo*.

ABC Encima del deslizador se inserta el siguiente texto:

Enunciado | *Soluciones* | *Resolución*

Entrada: En *Entrada* se define las variables booleanas asociadas:

enu = Etapa == 1 *sol = Etapa == 2* *res = Etapa == 3*

En la vista algebraica se puede comprobar cómo cambian los valores booleanos al desplazar el deslizador (Fig. 2).

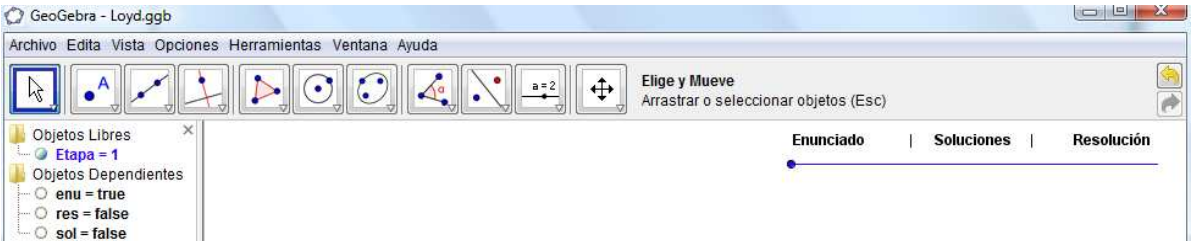


Figura 2. Creación de un deslizador que actúa como barra de navegación

3.2. Primera etapa: enunciado

En la hoja de trabajo creada, según se especifica en la sección anterior, se plantea el enunciado del problema a resolver siguiendo los siguientes pasos:

Se inserta la imagen del problema en la esquina superior izquierda.

ABC Se inserta el texto del enunciado del problema debajo del deslizador secuencial. En las *Propiedades Avanzadas* del texto se impone *enu* como *Condición para Exponer el Objeto*. (Fig. 3). De esta forma, cuando el usuario mueve el deslizador a una etapa posterior, el texto del enunciado desaparece, tal y como ocurriría en una presentación secuencial.

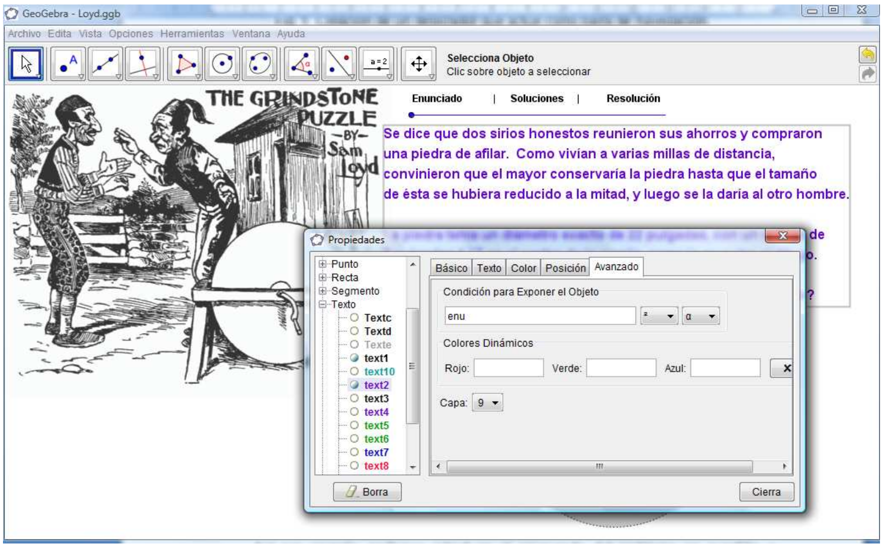


Figura 3. Vinculación de un texto a la primera diapositiva

3.3. Segunda etapa: elección de la ruta de solución (casillas de control)

Para posibilitar la elección de la ruta de solución, se mueve el deslizador hacia el intervalo correspondiente a la etapa Soluciones y se llevan a cabo los siguientes pasos:

Se insertan tres casillas de control que tendrán como *Subtítulos* una descripción de cada tipo de solución (Fig. 4): *Aproximación mediante deslizador*, *Solución Algebraica* y *Solución de Loyd: Teorema de Pitágoras para círculos*.

Figura 4. Creación de casillas de control para elegir entre las posibles soluciones

En *Propiedades* (Fig. 5), se cambian sus nombres respectivamente por *Sol_1*, *Sol_2* y *Sol_3*. Estas casillas sólo deben verse cuando el deslizador está en el instante *Soluciones*. Para ello, en sus *Propiedades Avanzadas* imponemos *sol* como *Condición para Exponer el Objeto*.

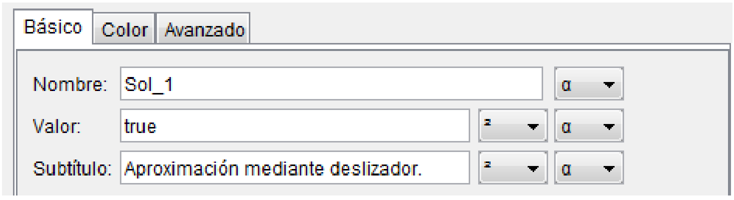


Figura 5. Propiedades básicas de una casilla de control

Entrada: Se crea la variable *Sol* = *Sol_1* + *Sol_2* + *Sol_3*.

ABC Se insertan los siguientes textos: "No has marcado ninguna casilla" con res $\wedge$ Sol = 0 como Condición para Exponer el Objeto y "Has marcado más de una casilla" con condición res $\wedge$ Sol > 1.

3.4. Tercera etapa: resolución

En la etapa de resolución se plantean los diferentes métodos de resolución del problema. La construcción de cada uno de ellos se hace de forma separada. Así, en este caso concreto se distinguen tres métodos de resolución: basado en animaciones automáticas, resolución algebraica y resolución geométrica, cuyas construcciones se detallan en las siguientes secciones.

3.4.1. Animaciones automáticas

El primer método de resolución será aproximativo. La idea es crear un deslizador asociado al diámetro de la piedra a medida que ésta se va desgastando (Fig. 6). A partir de dicho diámetro se puede calcular el área de la piedra en todo momento y compararla con el área de la superficie gastada. Desplazando el deslizador llegará un instante en el que ambas áreas coincidan.

Todos los elementos que intervengan en esta resolución tendrán asociada la condición *res* $\wedge$ *Sol* = *1* $\wedge$ *Sol_1* = *1* para ser expuestos. Además, con vistas a trabajar en una pantalla lo más limpia posible de elementos, previamente debe marcarse la casilla de control *Aproximación mediante deslizador* y desplazarse el deslizador hasta la etapa *Resolución*. A continuación se siguen los siguientes pasos:

Entrada: Se introducen en la barra de entrada los datos de partida:

diámetro *d* del orificio y diámetro inicial D_0 de la piedra:

d = *3* + *1* / *7* *D_0* = *22.*

Se crea el deslizador *diam* en el *Intervalo [d,* D_0*]*, con *Incremento 0.01* y *Ancho 400,* correspondiente al diámetro de la piedra restante.

Se dibujan tres círculos concéntricos C_1, C_2 y C_3, empezando por el mayor, de radio D_0, el segundo, de radio *diam,* y el del orificio, de radio *d*.

En *Propiedades* puede elegirse un color y sombreado para cada círculo.

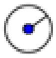


Figura 6. Utilización de deslizadores para incorporar animaciones

ABC Deben añadirse los textos asociados a las medidas de las áreas:

"Área inicial = " + (Area[C_1] – Area[C_3])

"Área final = " + (Area[C_2] – Area[C_3])

"Área gastada = " + (Area[C_1] – Area[C_2])

También se podría insertar otro texto encima del deslizador *diam* para indicar las instrucciones de buscar una solución aproximada de la solución desplazando el deslizador.

3.4.2. Resolución algebraica

El segundo método de resolución será algebraico, mostrando únicamente cómo se resuelve el problema utilizando la fórmula del área de una corona circular (Fig. 7). En concreto, si D_f es el diámetro buscado, entonces, dado que el área inicial debe ser el doble que el área final, debe cumplirse que:

$$\frac{\pi\left(\frac{D_0}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{D_f}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}=2 \Leftrightarrow \frac{D_0^2-d^2}{D_f^2-d^2}=2 \Leftrightarrow D_f=\sqrt{\frac{1}{2}(D_0{}^2-d^2)+d^2} \qquad (1)$$

Bastaría entonces con que el alumno introdujese la última fórmula anterior en la barra de entrada de GeoGebra para obtener el valor de D_f:

D_f = sqrt((D_0² - d²) / 2 + d²).

En caso de querer incluir un texto informando al usuario acerca de dicha fórmula, ésta podría ser incorporada en la hoja de trabajo como imagen o bien haciendo uso por ejemplo de la herramienta *LaTex* disponible en GeoGebra, que permite introducir símbolos matemáticos con una mayor calidad.

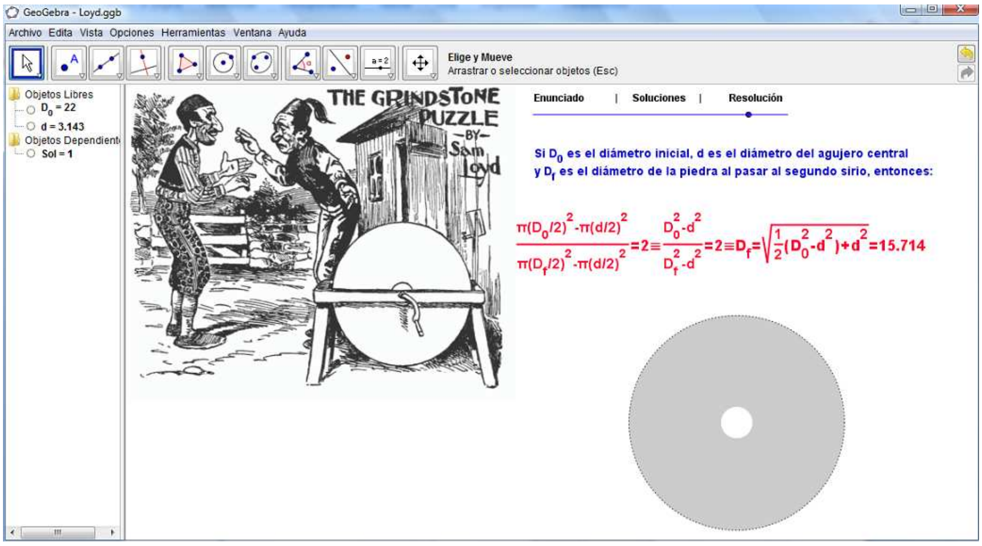


Figura 7 Solución algebraica

En concreto, una vez marcada la casilla de control *Solución Algebraica* y desplazado el deslizador hasta la etapa de *Resolución*, bastaría introducir los siguientes dos textos:

a) *"Si D_0 es el diámetro inicial, d es el diámetro del agujero central y D_f es el diámetro de la piedra al pasar al segundo sirio, entonces:"*

b) \frac {π \left(\frac{D_0}2\right)² - π \left(\frac d2\right)²} {π \left(\frac {D_f}2\right)² - π \left(\frac d2\right)²} = 2 \, ≡ \, \frac {D_0² - d²} {D_f² - d² } = 2 \, ≡ \, D_f = \sqrt{ \frac 12 \left(D_0² - d²\right) + d²}

En el segundo texto habría que marcar la casilla *Fórmula LaTex* (Fig. 8). Ambos textos deben tener asociados la condición *res ∧ Sol = 1 ∧ Sol_2 = 1.*

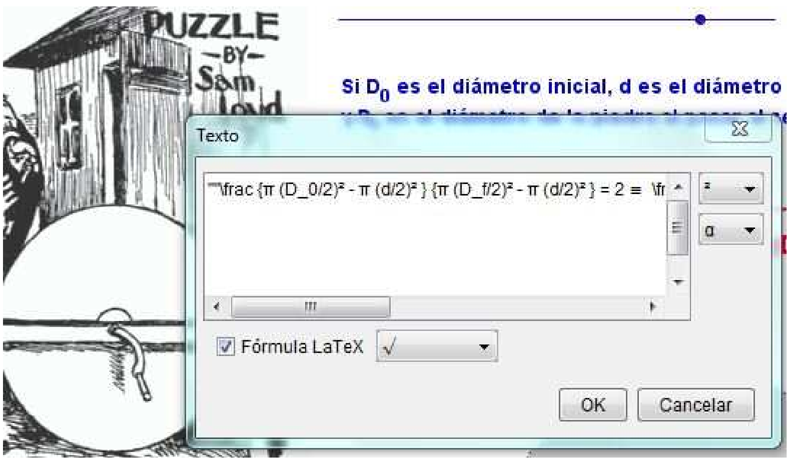


Figura 8: Fórmula LaTex.

3.4.3. Resolución geométrica

El tercer método de resolución será geométrico, si bien se basa en la primera igualdad que aparece en (1), de donde se puede deducir que:

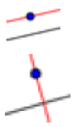
$$\pi\left(\frac{D_f}{2}\right)^2=\frac{\pi\left(\frac{D_0}{2}\right)^2+\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}{2} \qquad (2)$$

Esto es, el área de la piedra de afilar en el momento del cambio será igual a la mitad del área que tendría inicialmente la piedra si no hubiese agujero, más la mitad del área de la circunferencia que determina dicho agujero. El propio Lloyd basa su resolución en este razonamiento, haciendo uso de los siguientes dos resultados:

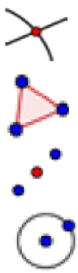
1. El área de la circunferencia inscrita a un cuadrado es la mitad del área de la circunferencia circunscrita a dicho cuadrado.
2. Teorema de Pitágoras para circunferencias: La suma de las áreas de dos circunferencias de radios r_1 y r_2 es igual al área de la circunferencia que tiene por radio la hipotenusa h del triangulo rectángulo de catetos r_1 y r_2:

$$\pi\cdot r_1^2+\pi\cdot r_2^2=\pi\cdot\left(r_1^2+r_2^2\right)=\pi\cdot h^2 \qquad (3)$$

Dado que esta resolución es más compleja, será necesario definir un segundo deslizador *Diapositiva* en el *Intervalo [1,3]* con *Incremento 1* y condición res □ Sol = 1 □ Sol_3 = 1, que permite alternar entre tres diferentes diapositivas (Fig. 9), siendo en la primera de ellas donde se introducirá el texto explicativo correspondiente a la presente resolución. Mostramos a continuación los pasos a seguir en las otras dos diapositivas, indicando entre paréntesis las condiciones a imponer en cada caso.

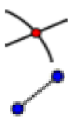


(***res*** □ ***Sol* = *1*** □ ***Sol_3* = *1*** □ ***Diapositiva* = *2***). Con vistas a crear el cuadrado inscrito a la circunferencia C_1 de la piedra inicial, se crea una recta r_1 paralela al eje *OX* (se necesitaría visualizar los ejes) y su perpendicular r_2, pasando ambas por el centro de C_1.

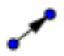


Se obtienen los cuatro puntos de intersección de ambas rectas con C_1 y se unen dichos puntos mediante la herramienta *Polígono*, para crear el cuadrado inscrito.

Se calcula el punto medio *M* de uno de los lados del cuadrado y se crea la circunferencia C_4 inscrita al cuadrado, con centro el mismo que C_1 y que pasa por *M*. Este mismo proceso se realiza en la circunferencia C_3 correspondiente al agujero, creando la circunferencia C_5.

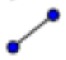


(***res*** □ ***Sol* = *1*** □ ***Sol_3* = *1*** □ ***Diapositiva* = *3***). Se calculan los puntos de intersección P_1 y P_2 de r_1 y C_4 y los puntos de intersección P_3 y P_4 de r_2 y C_5. Se crean los segmentos P_1P_2 y P_3P_4.

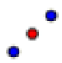


Se crea el vector v con origen P_3 y extremo P_2.

Se trasladan el segmento P_3P_4 y la circunferencia C_5 mediante el vector v, dando lugar al segmento P_2P_5 y la circunferencia C_6.



Se crea el segmento P_1P_5, cuya longitud será el diámetro buscado.



Para concluir el dibujo correspondiente al Teorema de Pitágoras para circunferencias, se calcula el punto medio M_1 de P_1P_5 y se obtiene la circunferencia C_7 de centro M_1 que pasa por P_1.

Una vez realizada la construcción, pueden ocultarse todos los elementos salvo circunferencias, segmentos y longitudes.

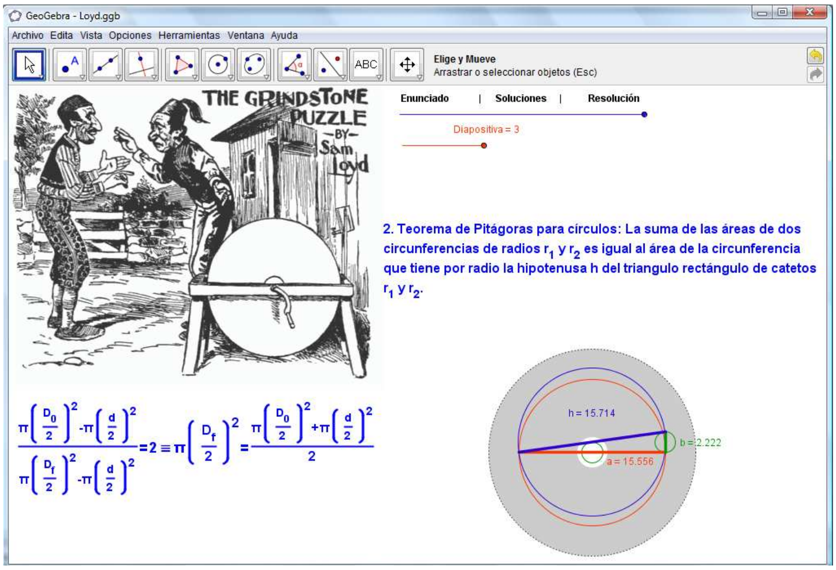


Figura 9 Teorema de Pitágoras para circunferencias

3.5. Interactividad mediante Java

A la hora de presentar el problema al alumnado es recomendable darle la posibilidad de usar GeoGebra para construir de forma interactiva la solución. También es interesante que pueda comprobar su construcción con la planteada en la presentación, sin necesidad de tener que ir cambiando continuamente de ventana, pudiendo así trabajar en pantalla completa. Esto se consigue creando una página Web con dos columnas, la primera para la presentación que se ha ido elaborando en los puntos anteriores y la segunda para incorporar un elemento interactivo con vistas a comprobar la solución y un área de trabajo en blanco de GeoGebra a disposición del alumnado (Fig. 10).

Figura 10 Pantalla completa

La elaboración de esta página Web puede dividirse en cuatro pasos. En el primero de ellos hay que seguir trabajando en nuestra presentación, incluyendo un texto explicativo, una nueva variable y dos textos de acierto/error. Con el primer texto se indica al alumnado la posibilidad de resolver el problema en la ventana de la derecha, junto a la ayuda que dispone con alguna de las soluciones propuestas. Este texto se podría insertar en la Etapa 2, “Soluciones”.

Entrada: Se introduce a continuación la variable *SolAlumno* = *0*, que estará asociada a la solución que introducirá el alumnado. Su valor inicial es cero.

ABC Los dos textos de acierto/error indicarán si la solución es aproximadamente correcta o no:

a) *“Si tienen que cambiarse la piedra cuando tenga un diámetro de " + SolAlumno + " pulgadas, uno de los dos sirios se lleva más de la mitad de la piedra.*

SOLUCIÓN INCORRECTA."

b) *"Efectivamente, tiene que devolver la piedra cuando tenga un diámetro de " + SolAlumno + " pulgadas aprox. Siendo más precisos: 15,714 pulgadas."*

Las condiciones a imponer a cada texto son respectivamente:

a) $\boldsymbol{(SolAlumno > 15.8 \vee SolAlumno \leq 15.6) \wedge (SolAlumno \neq 0)}$

b) $\boldsymbol{SolAlumno > 15.6 \wedge SolAlumno \leq 15.8}$

En el segundo paso es necesario abrir un nuevo archivo de GeoGebra, que será donde el alumnado pueda construir su propia solución. Debe reducirse el tamaño de esta nueva ventana en blanco para que junto con la ya construida quepa en una única pantalla (Fig. 10).

El tercer paso consiste en *Exportar* a *Hoja Dinámica como Página Web (HTML)* desde el menú *Archivo*, los dos archivos de GeoGebra creados. Denominaremos *Loyd.html* y Blanco.html, respectivamente, a cada una de las dos páginas Webs. Previamente, en la pestaña *Avanzado* se pueden seleccionar aquellos elementos del programa de GeoGebra que se quieren mostrar en cada una de ellas. En concreto, en el archivo de presentación deben desmarcarse todos los ítems y en el de la ventana en blanco deben marcarse como mínimo las Barras de Herramientas y de Entrada, y la funcionalidad del clic derecho del ratón. En el primer archivo se puede escribir como título *“La piedra de afilar (Sam Loyd)”*.

En el cuarto y último paso se necesitarán unos conocimientos básicos sobre HTML. Este lenguaje funciona por etiquetas que se encuentran entre los símbolos < y > y que se cierran igual que se abren añadiendo /. Así, por ejemplo, una tabla comienza con *<table>* y termina con *</table>*. Dentro de la tabla, las filas se encuentran entre *<tr>* y *</tr>* y las columnas entre *<td>* y *</td>*. Finalmente, los applets que genera GeoGebra se enmarcan en la primera fila y columna de una tabla entre las etiquetas *<table><tr><td><applet>* y *</applet></td></tr><table>*.

La idea a seguir es incorporar las dos ventanas de GeoGebra creadas hasta el momento en dos columnas de una única página Web e incorporar también en la segunda columna una casilla de introducción de texto que permita al alumnado insertar su solución. En concreto se va a crear una casilla de introducción de texto acompañada de un botón para comprobar si la solución es correcta o no (Fig. 10).

Para ello es necesario abrir las dos páginas Webs creadas mediante un editor de texto como *Notepad* o *TexEdit* y localizar los códigos applets de ambas ventanas de GeoGebra. Se modifica entonces el archivo *Loyd.html* localizando dónde termina la primera columna de la tabla en la que se encuentra el applet y añadiendo entre las etiquetas </*td*> y </*tr*> la siguiente columna:

```
<td>
<form>
<p align="center"> ESCRIBE TU SOLUCI&Oacute;N:<br>
<b>El di&aacute;metro tiene que medir </b>
<input type="text" name="T1" size="5" value="0" /> <b> pulgadas
aproximadamente.</b><br>
<input type="button" value="Comprobar" name="B1"
onclick="document.ggbApplet.evalCommand('SolAlumno='+T1.value);"/>
</p>
</form>
<applet name="ggbApplet" code="geogebra.GeoGebraApplet"
archive="geogebra.jar"
codebase="http://www.geogebra.org/webstart/3.2/unsigned/" width="385"
height="410" mayscript="true">
…
</applet>
</td>
```

La primera parte corresponde a la casilla de control de solución, mientras que el código applet corresponde a la ventana de trabajo del alumnado, que puede copiarse directamente del archivo *Blanco.html*. Para que la casilla de control funcione correctamente es necesario renombrar este último applet, modificando por ejemplo el código *applet name="ggbApplet"* por *applet name="ggbApplet2"*.

Una vez guardado el archivo resultante, éste puede abrirse con cualquier navegador ofreciendo el resultado final. Un ejemplo puede verse en la siguiente dirección Web:

http://www.geogebra.org/en/upload/files/spanish/omthales/Loyd/Loyd.html.

4. Conclusiones

A la hora de realizar una presentación interactiva con GeoGebra es necesario utilizar herramientas del programa que en un primer momento parecen destinadas a otros fines, pero que son de gran utilidad para la consecución de dicha presentación. En el presente artículo se han mostrado tales herramientas y se ha profundizado en su uso con vistas a crear una secuencia de diapositivas que permitan presentar de forma dinámica y activa la resolución de un problema matemático. A través de un ejemplo práctico se ha iniciado al lector en la elaboración de este tipo de material que puede resultar de utilidad como forma de atraer la atención del alumnado en el aula de matemáticas.

Bibliografía

García Manzano A. A. *(2009): Redes sociales y aprendizaje a través de las presentaciones on-line.* Revista Electrónica Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información 10 (1), 193-216.

Hassner R. E. (2005): *Sliding into Home Plate: How to Use Slideware to Improve Your Presentation (While dodging the Bullets*). Political Sciences and Politics 38 (3), 393-397.

Loyd, S. (1914): *Cyclopedia of puzzles*. The Lamb Publishing Company, New York.

Tufte, E. R. (2003). *The cognitive style of PowerPoint*. Graphics Press, Cheshire, CT.

Dos Santos, J. M. (2010): Taller *“Geogebra, Internet, e intercomunicación con JavaScript”.* Jornadas de Geogebra de Andalucía.

Eva Barrena Algara. Doctora en Ciencias Matemáticas por la Technische Universität Kaiserslautern. Actualmente es investigadora postdoctoral en el Dpto. de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla. Autora de publicaciones y aportaciones a congresos sobre toma de decisiones basadas en lógica difusa, diseño de redes aplicado a transporte, didáctica y divulgación de las matemáticas. **ebarrena@us.es**

Raúl Manuel Falcón Ganfornina. Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla, donde trabaja actualmente como profesor ayudante doctor del Dpto. de Matemática Aplicada I. Autor de publicaciones y aportaciones a congresos sobre cuadrados latinos, su aplicación en estadística, criptografía y diseño, didáctica y divulgación de las matemáticas. **rafalgan@us.es**

Rosana Ramírez Campos. Licenciada en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada. Vocal de olimpiada y concursos matemáticos en la S.A.E.M. Thales por Almería. Autora de varias publicaciones y aportaciones a congresos sobre didáctica y divulgación de las matemáticas. **roracam@gmail.com**

Ricardo Ríos Collantes de Terán. Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Vocal en el Instituto de GeoGebra de Andalucía. Coordinador T.I.C. del I.E.S. Sofía. Autor de publicaciones y aportaciones a congresos sobre unicidad de sistemas independientes, didáctica y divulgación de las matemáticas. **profesofricardo@yahoo.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 175-190
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar

La recta numérica como instrumento de representación de los números

José Antonio Redondo González; Ricardo Francisco Luengo González; Luis Manuel Casas García; José Luis Redondo García.

Resumen

En el presente artículo, extraído de una experiencia con alumnos de Educación Primaria, se comentan las virtualidades y el papel cognitivo que desempeña la Recta Numérica como metáfora e instrumento de representación de los números. En ella, mediante el lenguaje espacial y visual, pueden modelarse la estructura, operaciones, y propiedades del sistema de numeración. De modo que los alumnos puedan formase una correcta representación mental del mismo.

Abstract

In this article, taken from an experience with students of primary education, we discuss the potentialities and the cognitive role played by the Number Line as a metaphor and an instrument of representation of numbers. In it, through language and visual spatial, can be modeled the structure, operations and properties of numbering system. So that students can form an accurate mental representation of it.

Resumo

No presente artigo, extraído de uma experiência com alunos de Educação Primaria, comentam-se as virtualidades e o papel cognitivo que desempenha a Recta Numérica como metáfora e instrumento de representação dos números. Nela, mediante a linguagem espacial e visual, podem modelarse a estrutura, operações, e propriedades do sistema do numeración. De modo que os alunos possam formasse uma correcta representação mental do mesmo.

1. Introducción

Todos los años en las aulas de Educación Primaria los alumnos se enfrentan a la tarea de aprender el lenguaje de los números, es este uno de los objetivos fundamentales establecido dentro del área de matemáticas.

Se presenta, a continuación, en la siguiente figura "*dos formas de hacer*" de dos alumnos, ambos pertenecientes al tercer curso de Educación Primaria frente a una misma consigna:

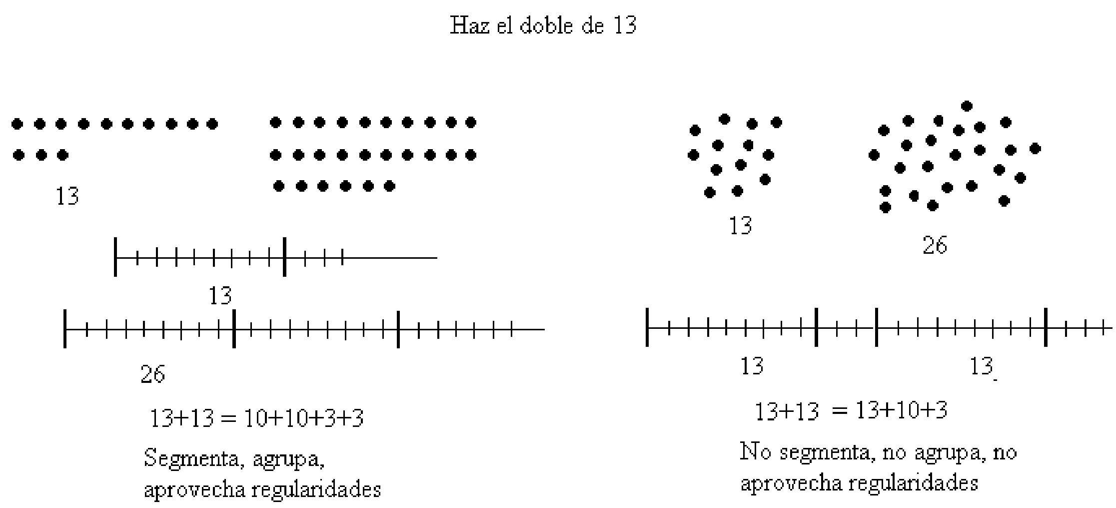


Figura 1

El ejemplo extraído del modo de proceder de dos alumnos pone al descubierto dos modos de funcionamiento cognitivo distantes entre sí: para el primer alumno todo es más diáfano y sencillo, agrupa decenas por un lado y unidades por otro, el segundo coloca un número a continuación del otro y suma elemento a elemento, no se aprovecha de la estructura del sistema de numeración.

La diferencia radica en que al segundo alumno se le escapa información relevante, no percibe que la decena puede ser utilizada como una unidad superior, como un ente diferenciado que ya no es necesario recontar porque ya se da por hecho que consta de diez elementos. Esta estructura en grupos de diez, que es la que precisamente da al sistema de numeración toda su potencia, no está lamentablemente captada e incorporada a su red de conocimientos por el segundo alumno.

Esta tarea, en apariencia fácil, de percibir un grupo de elementos como un todo, entraña dificultades para algunos alumnos. Estos dos alumnos, como dijimos, forman parte de una experiencia llevada a cabo en dos aulas de tercer curso de Educación Primaria en las que se trabajó el aprendizaje del sistema de numeración con la recta numérica como instrumento de representación.

2. La búsqueda de información y los instrumentos de representación

La búsqueda de información aparece como una actividad crucial en cualquiera de los aspectos en que se desenvuelve la vida humana, siempre es deseable saber más, tener un mayor número de datos sobre cualquier situación. Por ejemplo a la hora de tomar una decisión se reclama saber todo cuanto sea posible, con el deseo de minimizar el error.

En los aprendizajes, como se ha visto en el ejemplo anterior de la decena, la búsqueda de información constituye la esencia misma de la tarea, lo que se pretende es que el alumno pueda hacer suya toda la información necesaria, para que a partir de ella pueda construir las representaciones que suponen comprender y asimilar un contenido.

Los instrumentos de representación contribuyen a que la información sea más fácilmente perceptible y asimilable y con ello facilitan el aprendizaje. Se construyen con información, y a su vez, son vehículos de la misma, su función es sacar información oculta hasta la superficie. Un instrumento de representación es más eficaz y transparente cuanto más visibles y explícitos hace aflorar los significados.

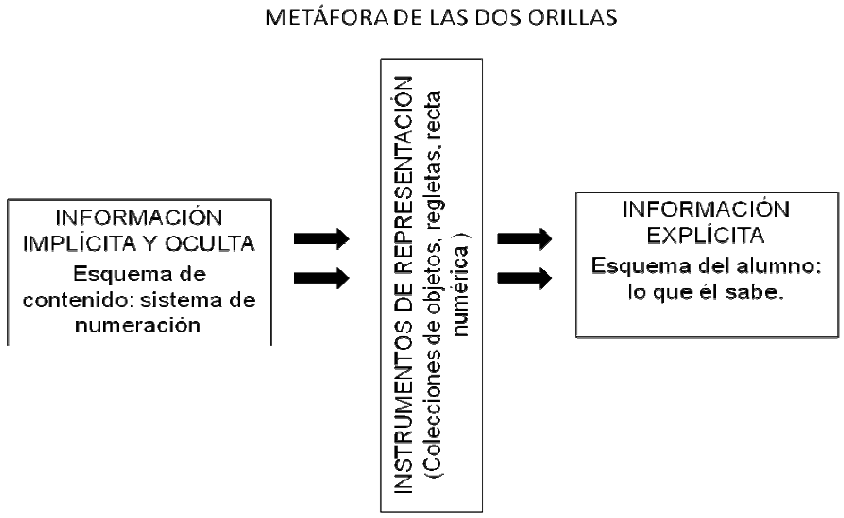


Figura 2

El papel de los instrumentos de información es hacer viajar información de una a otra orilla. No todos los instrumentos de representación son igualmente eficaces. Unos son más potentes y eficaces que otros para aprehender los conceptos matemáticos, ocultan unos aspectos y resaltan otros, aquellos que definen o distinguen un concepto. Con el desarrollo del pensamiento matemático los instrumentos de representación se han ido afinando, han aparecido otros nuevos más potentes que han permitido desechar los anteriores. Comparar por ejemplo en lo referido a la representación numérica la eficacia del sistema de numeración decimal (numerales indo-arábigos) frente a una representación simple mediante piedrecitas, marcas en un palo, o el sistema de numeración romano.

3. La representación numérica mediante elementos espaciales y visuales: la recta numérica como instrumento de representación

Existe un excelente estudio sobre las representaciones discretas de los números en Educación Infantil (Martín Sánchez 2008), en él se destaca la importancia de la percepción visual en el concepto de número. Martín Sánchez plantea la necesidad de percibir los números menores de diez como constelaciones o grupos de objetos que son aprehendidos de un solo golpe de vista. Por ejemplo:

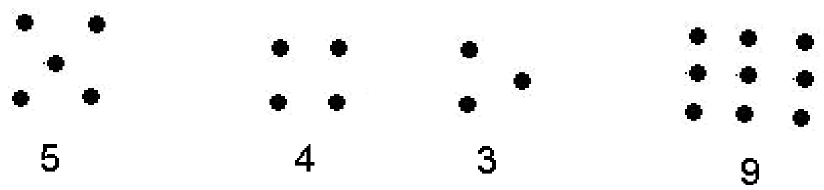
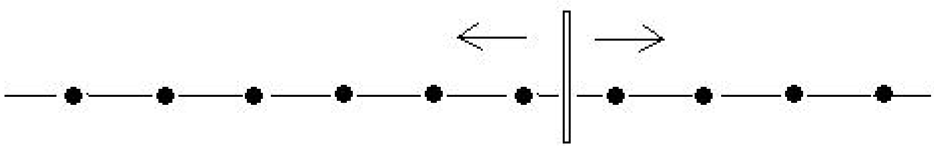


Figura 3

Los niños aprenden los números en actividades de conteo en la serie numérica, con saber contar puede ser suficiente para hacer los cálculos. Para calcular 5+4 se puede contar cinco dedos en una mano y cuatro en la otra, después contar todos juntos y llegar al nueve. La utilidad de esta estrategia de cálculo es poco práctica y costosa en procesamiento. Y es la que siguen usando todos los alumnos que fracasan en matemáticas en los cursos superiores de primaria. Si la percepción global de estas cantidades menores de diez está mal adquirida o alterada todo el posterior progreso matemático queda en buena medida mediatizado por esa dificultad

La siguiente actividad propia del último curso de Educación Infantil o primer curso de Educación Primaria sirve para trabajar con los alumnos todas las descomposiciones posibles de la decena o de números menores de 10.

"Mueve el cursor separador hacia la izquierda o hacia la derecha y escribe todas las posibles combinaciones de 10"



$$6 + 4 = 10$$

$$9 + 1 = 10$$

Figura 4

Esta representación tiene caracterrísticas discretas, todavía aparece el grupo de objetos, pero también continuas, están ya dispuestos en una línea.

Las representaciones discretas (dedos, números, marcas sobre el papel) muy pronto se muestran insuficientes para representar el concepto de número. A partir de siete u ocho objetos, estas agrupaciones ya no caben en la memoria de trabajo y no es posible manejarlas mentalmente. No son funcionales para comparar dos números, para recrear las operaciones que con ellos es posible realizar, para estimar un resultado, para imaginar números mayores etc.

Cubierta una primera etapa de representación en forma discreta, se hace necesario asociar el concepto de número a una nueva forma de representación más versátil y funcional. Así el concepto de número se asocia a la magnitud longitud, los niños de Educación Infantil comienzan a manejar las regletas como sucedáneos de los números y con ellas realizan operaciones. Es una forma de representación que nace de la observación y de la experiencia (lo alto y largo de los objetos, la medida) y cuya principal razón de ser es que se adapta mejor a las posibilidades limitadas de la memoria de trabajo.

Lakoff y Nuñez (1998) señalan que el mejor modo para representar los números es mediante dos magnitudes del espacio: longitud y el movimiento. A través de la longitud y el movimiento pueden hacerse transparentes todas las propiedades de los números. Estas magnitudes se materializan funcionalmente en un instrumento de gran transparencia y capacidad de representación que es la recta numérica. La recta numérica puede dibujarse sobre el suelo o bien construirse en un modelo de madera. En ella deben quedar marcados los números nudos que se corresponden con las decenas, la separación de cinco en cinco que se corresponde con la mitad de la decena llevará también una marca un poco más corta que las decenas pero a su vez más larga que las unidades que se corresponden con el resto de los números. Es un instrumento espacial, en cuanto que los significados, que son los números y operaciones, se manifiestan mediante características del espacio.

Los números son los puntos o marcas en la recta numérica, el cero es el origen o punto de partida, los números positivos están a la derecha del origen y los números negativos están a la izquierda del origen. El número entero más pequeño, el uno, es un paso adelante desde el origen. El tamaño del número es la longitud desde el origen hasta un determinado punto. El resultado de una operación matemática es un punto de la recta numérica. Las operaciones matemáticas son los pasos que se dan al avanzar en uno u otro sentido, la suma de una cantidad dada es avanzar en una dirección a partir de una distancia dada, la resta es caminar hacia atrás o también caminar desde el número más pequeño al mayor.

En las agrupaciones de objetos el cero no surge de forma tan natural como otros números, representa la ausencia de objetos en un conjunto. No es tan fácil darse cuenta de que haya que representar precisamente la ausencia de objetos. Sin embargo en la recta numérica el cero es igual que cualquier otro número, él es también un punto o una marca. Como el conteo de objetos en grupos es uno de los primeros referentes en la concepción del número, puede apreciarse por qué tuvo que pasar mucho tiempo para que el cero fuera incluido como tal, y por qué hubo mucha resistencia a denominar al cero como un número.

En principio las agrupaciones de objetos sirven para enseñar aritmética porque es la forma más natural de hacerlo. Pero estas representaciones tan naturales tienen fecha de caducidad, limitadas a los números naturales y a los inicios de las operaciones básicas. Sirven para explicar algunas partes de la aritmética, pero no pueden aplicarse a otras, por ejemplo a los números netativos.

Como los casos de cualquier instrumento de representación la recta numérica tiene también su propio lenguaje (Lakoff y Nuñez 1998). 37 está lejos de 198712; 4,9 son casi 5; el resultado está alrededor de 40, o próximo a 40; contar hasta 20 sin saltarse ningún número; contar hacia atrás desde 20; nombrar todos los números desde 2 hasta 10. Los ejemplos lingüísticos son importantes porque muestran como el idioma de la manipulación de objetos y el movimiento pueden solaparse de una manera casi perfecta al hablar de aritmética.

4. Virtualidades de la recta numérica como elemento de representación

Construir una representación mental del sistema de numeración no es fácil ni inmediato. Cuando un alumno se inicia en el aprendizaje de los números sucede como cuando se visita una ciudad por primera vez. El primer paseo si no se va acompañado por nadie es un deambular sin rumbo. Poco a poco, a base de ir recogiendo información parcial, se va elaborando un mapa mental donde figuran las referencias que se consideran más importantes para después poder orientarse, pueden ser sus monumentos más significativos, o una avenida importante, o las diferentes manzanas o grupos de edificios que la componen. A partir de esas informaciones aisladas se va construyendo una representación mental que permite estar situados permanentemente y dirigirse a un objetivo preestablecido en cualquier punto de la ciudad. Algo similar debe suceder con el aprendizaje de los números, se debe viajar solo, en compañía de otras personas, o incluso perderse, para al final de esas experiencias diversas poder construir una representación mental válida y ajustada de la estructura del sistema de numeración. Esa representación mental debe ser completa para poder expresar todas las propiedades, transparente para que los mecanismos y operaciones aparezcan claros, y funcional cognitivamente en cuanto que facilite el manejo mental de los números. La recta numérica, ayuda a construir esa representación.

Una ventaja importante de la recta numérica sobre otras representaciones de los números es que es un instrumento perdurable. Muchas de las formas de representación de comprensión de la notación decimal una vez realizada su labor son abandonadas, en cambio la recta numérica se mantiene y es aplicable a multitud de contenidos relevantes, desde las primeras actividades de conteo, en la descomposición de números, en el aprendizaje de los algoritmos y el significado de las operaciones, en la resolución de sencillos problemas, en los conceptos de divisores y múltiplos, en proporcionalidad, hasta otros más complejos de análisis como pueden ser los de límite, etc.

Dos aspectos son destacados en la recta numérica como elemento de representación: su carácter intuitivo y su carga de información:

4.1. Su carácter intuitivo:

Es un modelo sencillo que lleva una enorme carga intuitiva, está asociado a acciones muy cotidianas y de gran contenido visual, como el movimiento, la percepción de alturas, la medida etc. Esto constituye una enorme ventaja, el pensamiento humano es deudor de sus experiencias más familiares.

Puede construirse como un modelo físico sobre el suelo, constituido por una cinta con divisiones en la que van marcados los números nudos como son las decenas, centenas etc. El avanzar o retroceder en la recta numérica es fácilmente aprehensible por los alumnos porque se relaciona de forma muy directa con acciones cotidianas que ellos realizan, al deslizarse hacia delante los números son cada vez mayores y al deslizarse hacia atrás se hacen más pequeños. Hay números que son como hitos o mojones a lo largo de ese camino y que sirven de puntos de referencia por ejemplo las decenas 10, 20, 30, 40 etc. También las centenas y los millares. Con la ayuda de ellos se sabe en qué punto exacto de este camino se está situado.

Desde muy pronto muchos preescolares pueden usar su representación mental de la serie numérica para resolver problemas sencillos como saber cuál es el anterior y posterior de un número "tres pastelitos y uno más" o "cinco muñecas menos una que te quedas" (Barody 1984). Sumas de números pequeños, cuatro pelotas más dos pelotas, cinco lápices menos dos. En estos problemas un niño puede entrar en la serie numérica por el punto especificado por el primer número y continuar para adelante o para atrás según lo expresado en el segundo número. Como el empleo de esta representación mental de la serie numérica es muy adecuado para determinadas respuestas relacionadas con el número anterior y posterior y sencillas sumas, muchos niños de cuatro o cinco años pueden dar mentalmente, y con rapidez, las respuestas a problemas sencillos. Posteriormente estas estrategias deben irse ampliando y completando, debe existir la capacidad para ir sumando trozos o fragmentos más amplios. Dominar mentalmente primero las descomposiciones numéricas más sencillas 7+3. 8+2, 9+1 etc. y a partir de ellas otras más complejas 62+13, 45+15, 4 por 25, 4 por 15 etc.

Otros procedimientos concretos de representación no tienen el mismo grado de adaptabilidad mental y flexibilidad que la recta numérica. Su poso intuitivo queda reflejado en que para los alumnos es más fácil contar hacia delante que contar hacia atrás, las restas son más difíciles que las sumas (Gelman 1982). La resta puede hacerse contando hacia atrás y luego los alumnos aprenden una estrategia de resolver las restas contando hacia delante, entonces su dificultad se equipara a la de la suma. Contar progresivamente se parece al enfoque del sumando ausente, pero aplicado a la sustracción (Carpenter y Moser 1982). Implica partir del sustraendo y contar hacia delante hasta llegar al minuendo, al tiempo que se lleva la cuenta del número de pasos dados. Aunque contar progresivamente no refleja la noción informal que el alumno tiene de la sustracción, a la hora de realizar el cálculo es cognoscitivamente más fácil que contar regresivamente (Barody 1984).

Algunos libros de texto presentan la automatización del algoritmo de la resta de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} 45 \\ \underline{28} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} 3 & 15 \\ \underline{2} & \underline{8} \\ 1 & 7 \end{array}$$

De ocho a quince son siete.
Como el cuatro le ha dado
una decena, sólo quedan
tres. De dos a tres uno

Según lo recogido a través de la observación de los alumnos y puntos de vista de los profesores en nuestra experiencia esta forma de automatización del algoritmo de la resta es inferior a la siguiente:

$$\begin{array}{c} 45 \\ \underline{28} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} 4 & 15 \\ \underline{3} & \underline{8} \\ 1 & 7 \end{array}$$

De ocho a quince son siete.
Como me llevo una en lugar de
ir de dos a cuatro voy de tres a
cuatro que es uno.

La razón argüida más convincente es que en la segunda forma se respeta en todo momento el mecanismo intuitivo de caminar hacia delante en la recta numérica, cosa que no sucede en el primer método en que en uno de los pasos se cuenta regresivamente.

Algo similar sucede con la división, los alumnos la convierten en un multiplicación, porque caminar hacia delante en la recta numérica es intuitivamente más sencillo.

$135 : 12$

$12 \times 10 = 120;$

$120 + 12 = 132$

Da de cociente 11 y
de resto 3

Mentalmente es más fácil construir el número mediante sumas sucesivas o la multiplicación que destruir el número mediante la resta sucesiva o división.

4.2. Su carga de información:

Una imagen puede estar construida con una gran cantidad de significados, o lo que es lo mismo, a partir de muchas unidades de información Pylysyn (1986). Esto mismo sucede con la resta numérica como instrumento de representación.

Por supuesto que no basta presentar la imagen de la recta numérica para que su contenido pueda ser asimilado por los alumnos. Para que los alumnos se formen una representación mental con sentido, es necesario que por diferentes medios puedan adquirir cuanta información sea posible sobre ella. La imagen que los adultos conocedores del tema tienen formada de la recta numérica está construida sobre multitud de unidades de información del tipo: el 52 está dos unidades más allá que el cincuenta, el 55 equidista del 50 y el 60, al 59 le falta uno para llegar al 60, de 30 a 40 hay diez unidades etc. En realidad la recta numérica esta constituida por infinitas unidades de información porque infinitos son sus elementos. Ningún procesador y tampoco el humano a pesar de su extraordinaria capacidad de almacenar información es capaz de retener un número infinito de datos. Lo que sucede en la recta numérica esta organizada en torno a un gran número de regularidades, lo que demuestra la maestría con que está construido el sistema de numeración. Pero naturalmente hay que ser consciente de esas regularidades y aprovecharlas para poder manejar mentalmente el sistema numérico: 2+5 es igual que 5+2, pronto los alumnos se dan cuenta que no importa el orden en que se sumen los números porque el resultado es el mismo; de hecho esto reduce ya el número de combinaciones a la mitad. El resultado de 8+7 es fácilmente generalizable a 18+7 o 28+7 etc.

Para poder operar hay que estar continuamente echando mano de esas unidades de información que se posee. Para sumar 31 más 8 habría que razonar que el 31 está una unidad más allá del 30, que al 8 le faltan 2 unidades para llegar a 10, por tanto que si al 31 se le suma 8 se queda a una unidad del 40, que es tanto como decir que el resultado es 39. Todos estos ítems de información se hacen transparentes a través de la recta numérica. En ella muchas unidades de información quedan encuadradas en una sola forma de representación espacial-visual.

Las operaciones deben abordarse desde un conocimiento profundo del sistema de numeración y uno de los modos más accesible y eficaz de enseñarlo es mediante su representación en la recta numérica.

5. Estrategias cognitivas en la recta numérica. Aprendizaje de las combinaciones básicas

5.1. Combinaciones básicas de la suma

Todo el sistema de numeración y las operaciones que en él son posibles realizar, ya se han visto ejemplos de la suma y de la resta, pueden ser muy bien modeladas y aprendidas utilizando la recta numérica como instrumento de representación. Pero aún más importante que en la recta numérica se puedan modelar el sentido general de las operaciones es que en ella como soporte puedan llevarse a cabo los mecanismos mentales que permiten aprender y aplicar los algoritmos de estas operaciones.

Bien sea para realizar el algoritmo de la suma o el de la resta el dominio ágil de las combinaciones básicas del tipo 7+5 o 9-4 es imprescindible. Al calcular cualquier suma o resta, no importa lo grandes que puedan ser los números, todo se reduce, una vez colocadas las cantidades convenientemente, a aplicar esas combinaciones sencillas.

Cuando se suman o se restan los dos números de una combinación básica, por ejemplo 6+3, es necesario realizar estrategias de conteo. En la suma a partir del primer número avanzar en la recta numérica tanto como indica el segundo, en la resta avanzar desde el número menor al mayor. Estas estrategias de conteo pueden realizarse de dos formas, que se corresponden con dos estados de conocimiento muy diferentes: una de ellas es realizar la suma de modo automático, de un solo salto, seis más tres son nueve; la otra es mucho más primitiva, sumar elemento a elemento, avanzar desde el seis, paso a paso, tres pasos, para finalizar en el nueve.

La decena es el bucle a partir del cual se genera todo el sistema de numeración, la serie numérica es una sucesión de decenas. Por ello las combinaciones de los números menores de diez 3+2=5; 4+3= 7 etc. deben ser plenamente automatizadas como requisito previo del aprendizaje numérico. Son esenciales en sí mismas y también para sumar otras combinaciones. Una suma de dos números de una combinación básica puede llevarse a cabo dentro de una decena, por ejemplo 13+5 que no es más que una generalización de 3+5, o bien saltar de una decena a la siguiente, por ejemplo 18+7. En todas estas operaciones se está poniendo a prueba la capacidad de procesamiento de la memoria a corto plazo. Para sumar 18+7 hay que apoyarse en el próximo número nudo (veinte), saber que de 18 a 20 hay dos pasos, tener presente que el 7 puede descomponerse como 2+5 porque hay que ir de un salto de 18 hasta 20, se han sumado dos, y concluir sumando los cinco restantes a 20 que son 25. En ambos tipos de sumas se está dando uso a la descomposición de un número menor de diez.

Son variados los argumentos que se dan sobre el porqué de que el sistema de numeración está construido sobre la base diez, se hace referencia al tamaño adecuado de los números o a que la actividad de contar se realizaba con la ayuda de los dedos de las manos que son diez. También pueden darse razones de tipo cognitivo, y son de peso, como que es una distancia ideal para ser abarcada y partida mentalmente en la memoria de trabajo. Está en el límite de lo que la capacidad media humana puede manejar con solvencia. Especial relevancia cobran las decenas que constituyen la primera centena, es decir los números inferiores a 100, porque es el tramo de la serie numérica en el que se realizan las operaciones mentales que permiten resolver los algoritmos de las cuatro operaciones, a partir de ahí se trabaja preferentemente con lápiz y papel.

Una gran parte de los impedimentos al aprendizaje numérico de algunos alumnos radican en su incapacidad para saltar del conteo elemento a elemento al manejo del grupo de elementos. Son incapaces de aprehender la estructura de grupo de elementos, que proporciona una estrategia mucho más flexible, no se aprovechan de la organización del sistema de numeración en decenas. La posibilidad de segmentar y agrupar de una forma sabia según la conveniencia de la situación es fundamental para conocer bien el propio sistema de numeración decimal y poder desplazarse por él. Si al realizar la suma 56 + 9 se hace paso a paso, sin apoyarse en las decenas (números nudo) esta estrategia es costosa en tiempo, facilita los errores y agota mentalmente. Es decir, que la actividad mental de partir o segmentar los números, de acoplar fragmentos en la recta numérica, es un requisito necesario para aprender las combinaciones básicas más sencillas 4 + 5; 9 + 6; etc., otras más complejas 38 + 9; 48 + 9; etc. y con ello tener una visión de la serie numérica y poder realizar un cálculo ágil y eficaz.

En los algoritmos de la suma y la resta con lápiz y papel del tipo 389+256; la mayoría de los alumnos que dominan con soltura las combinaciones básicas los resuelven correctamente y con rapidez, basta saber manejar números menores que 20, 9+6= 15; 8+5+1 = 14; 3+2+1 = 6; pero incluso los que no las dominan de un modo automático, pueden utilizar sus dedos y sumar elemento a elemento, con lo que en la mayoría de las veces, con mayor inversión de tiempo y esfuerzo, son capaces de obtener el resultado correcto.

5.2. Combinaciones básicas de la multiplicación:

Como en el caso de la suma y la resta para poder abordar los algoritmos de la multiplicación y división es necesario conocer las combinaciones básicas de estas operaciones recogidas en las tablas de multiplicar.

Las estrategias de conteo juegan también un papel destacado en el aprendizaje de las combinaciones básicas de la multiplicación, aquellos alumnos que las realizan adecuadamente tienen más facilidad para moverse en la recta numérica y aprenden con rapidez las tablas de multiplicar. Para construir la tabla del 7 se va sumando de 7 en 7, pero si esta suma se realiza uno a uno significa que los alumnos no visualizan adecuadamente la recta numérica, su conocimiento es demasiado particular, no manejan trozos más amplios de ella, no se representan la serie numérica hasta el 100 y fallan al tratar de retenerlas.

La técnica de sumar elemento a elemento, de caminar en la recta numérica paso a paso, de ayudarse con los dedos como apoyo concreto, no puede llevarse a cabo en las combinaciones básicas de la multiplicación, por ejemplo para calcular 9x8 no hay dedos. De ahí su dificultad cognitiva en relación con la suma o la resta. En la multiplicación es imprescindible tener una representación interna para poder situar los dos números y el resultado de la combinación básica y poder memorizarla. Cuando se pretende aprenderlas de memoria sin haberlas construido mentalmente fallan en su propósito.

Se debe estimular explícitamente a contar a intervalos, sobre modelos físicos construidos. Dibujar la recta numérica sobre el suelo y mediante pasos ir simulando los avances que se producen en cada una de las tablas. Así en la tabla del nueve los pasos son más grandes y se camina más lejos que en la del 6. Estas actividades contribuyen a la interiorización y representación. Pero no basta con presentar una imagen de la recta numérica para que se forme una representación, es necesario tratar de transmitir toda la información que contiene esa imagen, para ello lo mejor es utilizar preguntas que afloren y vayan haciendo explícita toda esa información.

En el siguiente ejemplo se muestra la construcción de la tabla del 8 con alumnos que tienen dificultades para retenerla comprensivamente:

Profesor: *¿Desde donde partimos*?

Alumno: *Desde el* 0.

Profesor: *Escribe* el 0 *y señala el* 0 *en la recta numérica que tenemos dibujada. Ahora súmale ocho, es decir da 8 pasos ¿hasta dónde avanzamos*?

Alumno: *Avanzamos hasta* 8. *Está aquí* (señalando dónde se encuentra) 8 *pasos más adelante*.

Profesor: *Muy bien. Como estamos construyendo la tabla del* 8 *vamos a sumar* 8, *o lo que es lo mismo, vamos a avanzar otros ocho pasos más. ¿Cuál es la decena más próxima que tenemos delante*?

Alumno: *El diez*

Profesor: *¿A cuántos pasos estamos del* 10?

Alumno: *A dos pasos*.

Profesor: *Tenemos que sumar* 8, *si hasta* 10 *hemos sumado ya* 2 *¿Cuántos nos quedan por sumar*?

"Esta es una de las preguntas que les resultan difíciles a los alumnos. Se alternan las preguntas utilizando términos de la metáfora longitud, pasos, distancias, y los términos propios de la numeración"

Alumno: *Si teníamos que avanzar* 8 *y ya hemos avanzado* 2 *nos quedan* 6 *por avanzar*. 10 *más* 6 *son* 16.

Profesor: *Muy bien, lo has hecho muy bien*.

De esta manera se construye la tabla hasta el cuarenta, del cuarenta al ochenta se vuelven a reproducir las mismas situaciones en la recta numérica (en lugar de 8+8, 48+8, en lugar de 16+8, 56+8 etc.). Todas estas preguntas, se realizan mientras el alumno va apuntando las cantidades y trabajando y desplazándose física o visualmente sobre la recta numérica. Estas mismas preguntas pueden completarse con otras que profundicen y propicien una representación mental en el alumno de la serie de los números, por ejemplo cuando se pregunta cuántos pasos hay de 24 a 30 si el alumno no lo sabe se le deberá preguntar ¿cuántos pasos hay de 25 a 30? Y ayudarle a razonar que si de 25 a 30 hay 5, desde 24 a 30 hay 6.

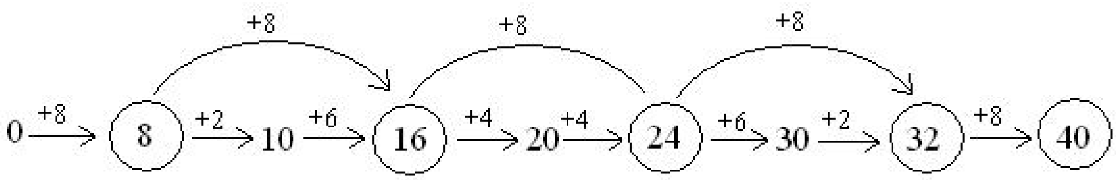


Figura 4

Comenzar por las tablas del 5, del 10, del 2. Como los niños aprenden a contar de dos en dos, de cinco en cinco y de diez en diez antes de aprender a contar tres en tres de cuatro en cuatro etc., las combinaciones del dos, del cinco y hasta del diez son relativamente fáciles para la mayoría de los niños. Por tanto, no se debe retrasar la práctica con las tablas del cinco y del diez. De hecho la tabla del cinco, al partir exactamente la decena en dos partes iguales, es una candidata psicológicamente ideal para introducir la multiplicación pues es más fácil la visualización de sus intervalos en la recta numérica.

La representación que el profesor debe ayudar a construir a sus alumnos se produce sobre la serie numérica, ella es el referente que visto mentalmente permite a los alumnos recordar de forma comprensiva y eficaz el resultado de aplicar una operación a un par de números. Los números nudos (decenas) ocupan un papel fundamental en esta representación, a partir de ellos utilizados como hitos o mojones en el camino se pueden situar los demás números.

De las representaciones espaciales y visuales numéricas al cálculo mental. Combinaciones y senderos de menor coste de representación

El ser y finalidad de la recta numérica como instrumento físico de representación es llegar a un momento en que pueda ser prescindible. Ello será posible cuando la representación externa no sea necesaria porque se ha adquirido e interiorizado una representación mental. Los apoyos concretos mediante lápiz y papel y los modelos físicos son una ayuda pero nunca pueden sustituir a las estrategias puramente mentales. Necesariamente muchas operaciones deben realizarse de forma mental, por motivos obvios de velocidad de procesamiento, si todos los pasos, hasta los más simples se realizaran sobre el papel, cualquier sencillo calculo como el algoritmo de una suma, no digamos una división, se eternizaría en el tiempo.

Cuando los alumnos están preparados van conociendo con mayor soltura los cálculos básicos, comienzan a ser menos necesarios los procedimientos concretos y se van abandonando en favor de los procedimientos mentales. El cálculo mental es una actividad considerada de especial importancia por todos los profesores, porque perciben que aquellos alumnos que son capaces de realizar estimaciones o resolver sumas y restas mediante cálculo mental progresan sin problema en cualquier tipo de aprendizaje matemático. El cálculo mental, al carecer de elementos concretos en que apoyarse, necesita de una buena capacidad de representación. Aquellos alumnos que son capaces de realizarlo con soltura la poseen y además conocen muy bien los tramos de sistema de numeración, 10, 20, 30 100, 200, 300 etc. y son capaces de crear estrategias y de utilizarlas con flexibilidad. Por ejemplo si se les solicita que sumen 25 más 37, son capaces de imaginar una situación similar a la siguiente:

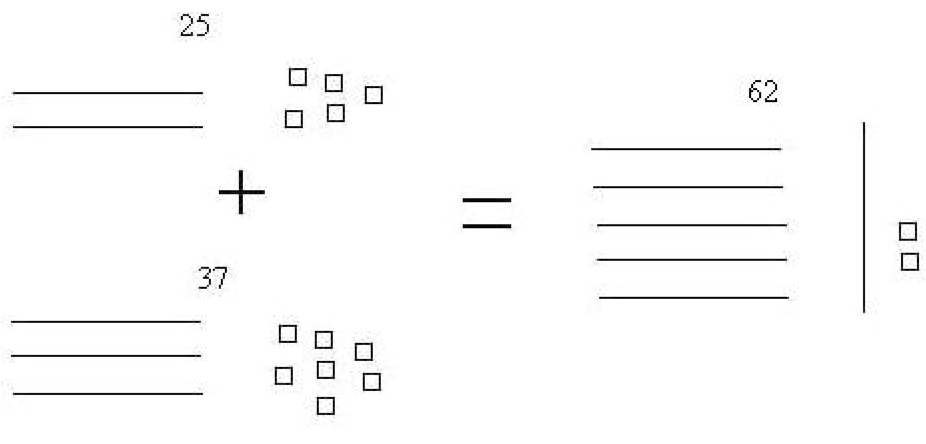


Figura 5

En el escenario planteado, crean una nueva decena, suman las decenas, y teniendo en cuenta las unidades restantes obtienen el resultado. Los alumnos que fallan al realizar este tipo de actividad es que no tienen la posibilidad de imaginar alguna forma de representación mental para poder llevar a cabo estas operaciones, mientras esto no sea posible, la enseñanza se realiza en el vacío, a ciegas, con pocos o nulos progresos que son olvidados de un día para otro. Y la consiguiente frustración y desgana que ello lleva consigo.

Las estrategias mentales utilizadas deben ser aquellas que sean más eficaces, pero a la vez se eligen las que exigen menor esfuerzo de representación, que requieren menor carga en la memoria de trabajo.

Dobles: es un hecho constatado que la suma de dos números iguales exige de menor carga en la memoria de trabajo que la suma de dos números diferentes. Por ello los alumnos utilizan esta estrategia en diferentes tipos de sumas. No es necesario hacer el análisis y la descomposición de dos números sino de uno sólo que se repite. Existe también una simetría que facilita la suma.

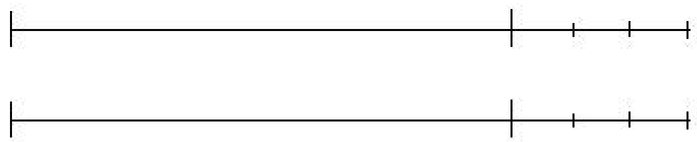


Figura 6

13 + 13 = (10 + 10) + (3 + 3) = 20 + 6 = 26

Dobles más/menos uno: cuando se plantean sumas donde uno de los números supera al otro en una unidad hay muchos alumnos que espontáneamente realizan el doble del número menor y le añaden después una unidad, o bien el doble del número mayor y le restan una unidad al resultado. Aunque es más frecuente lo primero que lo segundo porque es más fácil avanzar en la serie numérica hacia delante que retroceder.

13 + 14 = (13 + 13) + 1 = 26 + 1 = 27

Dobles mas/menos dos: no es tan habitual pero algunos alumnos son capaces de descomponer los sumandos cuando uno de ellos supera al otro en dos unidades.

15 + 17 = (15 + 15) + 2 = 30 + 2 = 32.

Llegar hasta la decena: esta estrategia es de extraordinaria importancia. Permite desplazarse en la recta numérica. Es el modo de proceder mentalmente en la mayoría de las situaciones en las que intervienen números. Se utiliza con profusión en los algoritmos de las cuatro operaciones.

57 + 8 = (57 + 3) + 5 = 65

Combinaciones de más fácil acople en la recta numérica: en general es más fácil retener, porque son más fáciles de visualizar, aquellas combinaciones que se acoplan de modo perfecto en tramos señalados de la recta numérica. Por ejemplo es más fácil 4 por 25 que se acopla en la centena que 7 por 13 o 4 por 17.

En las operaciones de cálculo mental más complejas siempre se busca utilizar las vías que necesitan de menor esfuerzo de visualización.

Al calcular mentalmente 200 **:** 14, puede hacerse:

14 por 10 = 140 14 + 14 = 28 28 + 28 = 56 140 + 56 = 196

Como, desde 196 hasta 200 son 4, entonces 200 son diez veces 14, más cuatro veces 14 que son 196 y quedan cuatro de resto. También se podría realizar:

5 por 14 = 70 70 por 3 = 210

Como 210 son quince veces 14, se tiene que 200 **:** 14 son catorce veces 14 y quedan 4 de resto.

Como puede observarse las posibilidades que ofrece el cálculo de llegar por caminos distintos a un mismo resultado son prácticamente ilimitadas. Las actividades de enseñanza deben favorecer en los alumnos la aparición de este tipo de técnicas. Fácilmente imitables entre compañeros de un mismo nivel, a través de discusiones y diálogos en voz alta sobre las forma de realizarlas, y con una actitud por parte del profesor de admitir respuestas distintas pero igualmente acertadas a los cálculos planteados. Para los alumnos puede ser muy interesante descubrir itinerarios de cálculo que hagan más fácil llegar mentalmente a un resultado.

6. Algunas actividades tipo

El aprendizaje del sistema de numeración y de los algoritmos de cálculo no tiene porqué ser aburrido y monótono para los alumnos. Siempre que sea posible es preferible proponer actividades abiertas, se adaptan mejor a las posibilidades individuales de cada alumno, permiten la creatividad al poder elegir entre diferentes caminos y estimulan el aprendizaje.

Se proponen algunos ejemplos.

- **Parchís.**

Es uno de los juegos que mejor pueden servir para la interiorización de la serie numérica. Las habilidades básicas de contar precursoras de otras más complejas pueden entrenarse y evaluarse mediante este juego.

- **Llegar hasta 180 (puede proponerse cualquier otro número).**

Cada alumno elige e indaga el camino que él estima más oportuno para llegar al objetivo. Muchos se apoyan en las decenas para avanzar. Utilizan diferentes intervalos y las operaciones de suma, resta, y multiplicación. Lo importante es que permite ampliar y profundizar el conocimiento propio que tienen del sistema de numeración.

- **Números diana: con los números 7, 3 y 5 y las cuatro operaciones conseguir el número 860.**

Mediante los números diana se puede practicar de un modo divertido las cuatro operaciones aritméticas. Es posible proponer ejercicios de muy diferente grado de complejidad, desarrollando la creatividad y la autonomía de los alumnos.

- **Parte de 0 y añade 5. Continua siempre así, añade siempre 5 al resultado que obtienes. ¿Llegarás en alguna ocasión a conseguir el número 43? ¿Y el número 70? ¿Y si comenzamos partiendo del número 2? ¿Y partiendo del número 3?**

Actividades como las anteriores permiten la interiorización del sistema de numeración, a través de ellas se va creando una representación completa y ajustada del mismo.

7. Conclusión

El dominio del sistema de numeración, objetivo importante de los alumnos de Educación Primaria, constituye desde su inicio un enorme ejercicio de visualización. Sucede desde las primeras representaciones discretas de los números menores de diez que deben ser aprehendidas de un solo golpe de vista (de modo similar a como aparecen representadas las cantidades en un dado). A la vez que se reconocen estas constelaciones de objetos se van adquiriendo formas de representación simbólicas alternativas, a cada cantidad menor de nueve se le asigna un número. Posteriormente, para poder manejar y representar mentalmente cantidades mayores, en un nuevo ejercicio visual, se forman grupos de diez elementos: surgen las decenas. No es posible designar con la misma marca al grupo de diez elementos que a las unidades sueltas, este hecho queda diferenciado por otro aspecto visual, como es la posición relativa que las decenas ocupan dentro del número.

Las representaciones discretas tienen mayormente su razón de ser para números menores de diez elementos. A partir de esa cantidad son necesarias otras formas de representación, surge la recta numérica como un instrumento de representación continua, de naturaleza claramente visual. Los hitos en el camino, cada paso o desplazamiento, decenas y centenas, quedan señaladas mediante marcas en el camino. En la recta numérica se pueden modelar, de forma transparente, las operaciones aritméticas y todas sus propiedades.

El atribuir significados mediante contenidos visuales es un componente importante de todas las matemáticas y también del aprendizaje numérico. Esto no sólo se manifiesta en las percepciones globales de conceptos, si no también en detalles necesitados de un análisis fino, por ejemplo en el caso de la estrategia de llegar hasta la decena, comentado en un apartado anterior, un alumno manifestaba que al visualizar la operación 57 + 8 la descomposición de 8 en 3+5 la veía como si se quebrara el segmento.

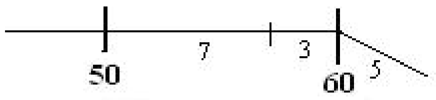


Figura 7

Muestra que la visualización puede ser fuertemente idiosincrásica, pero lo más importante es que cumpla su objetivo funcional de atribuir significados.

Hay alumnos para los que este paso del Rubicón de aprender los números y sus reglas se produce con facilidad, para otros entraña relativas dificultades que al final con una mayor o menor inversión de tiempo y esfuerzo son superadas, para un tercer grupo se convierte en una tarea bastante difícil de llevar a cabo.

Para favorecer la visualización y comprensión de los números es deseable que se programen actividades abiertas, que puedan resolverse por diferentes caminos y permitan la libertad de indagación y pensamiento. También la utilización de aquellas formas de representación más intuitivas, transparentes y perdurables, como puede ser el caso de la recta numérica. Útiles para cualquier alumno, y especialmente necesarias para alumnos con algún tipo de dificultad en su aprendizaje del sistema de numeración y algoritmos de cálculo.

Nota: se está trabajando en la creación de un diseño informático de la recta numérica en el que la que el alumno puedan trabajar visualmente todas las operaciones que es posible realizar en ella.

Bibliografía

Barody A.J. (1988) *El pensamiento matemático de los niños*. Visor.

Carpenter, T.P. y Moser, J. M. (1982) *The development of addition and subtraction problem-solving skills.* Hillsdale, NJ: Lawrenece Erlbaum Associates.

Gelman, R. (1982). Basic numerical habilitéis. En R. J. Stemberg (Ed), *Advances in the psycology of intelligence.* Hillsdale, NJ: Lawrenece Erlbaum Associates.

Lakoff, G, & Johnson, M. (1980). *Metáforas de la vida cotidiana*. Ediciones Cátedra, Madrid, Traducción de 1990.

Lakoff, G. y Núñez, R. (1998). Conceptual metaphor in mathematics, en Koenig J.P. (ed.). *Discourse and Cognition:Bridging the Gap*, 219-237. Stanford: CSLI-Cambridge.

Pylyshyn Z. W. (1986) Imágenes e inteligencia artificial en Albea J.E. *Percepción y computación*. Madrid. Ediciones Pirámide S.A.

Martín Sánchez E. (2008) Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* Marzo de 2008, Número 13, 51-60.

José Antonio Redondo González. Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de la Junta de Extremadura. Doctor en Ciencias de la Educación con una tesis sobre la Visualización en Matemáticas. **jredondog@juntaextremadura.net**

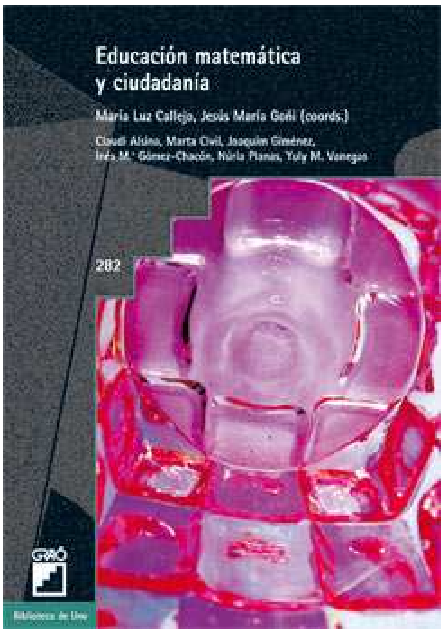
Ricardo Francisco Luengo González, Catedrático de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. Doctor en Ciencias de la Educación, autor de numerosas publicaciones y trabajos sobre Matemáticas y Nuevas Tecnologías aplicadas a la Didáctica de las Matemáticas. **rluengo@unex.es**

Luis Manuel Casas García, Profesor Asociado de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. Doctor en Ciencias de la Educación, autor de diversas publicaciones sobre Didáctica de las Matemáticas. **luisma@unex.es**

José Luis Redondo García, Técnico de Apoyo de la Universidad de Extremadura. Ingeniero en Informática, colabora en la creación de herramientas informáticas aplicadas a la Didáctica de las Matemáticas. **jluisred@unex.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 191-192
ISSN: 1815-0640



Educación, Matemática y ciudadanía.

Autores:
María Luz Callejo, Jesús María Goñi (coords.).
Claudi Alsina, Marta Civil, Joaquim Giménez,
Inés María Gómez Chacón, Núria Planas;
Yuly M. Vanegas.

Serie: Didáctica de las matemáticas.

Colección: Biblioteca de Uno, 282.

Año de edición: 2010.

Páginas: 168.

ISBN: 978-84-7827-979-1

En este libro podemos encontrar enfoques de la educación matemática que buscan favorecer la formación de ciudadanas y ciudadanos bien informados, participativos, críticos, conscientes de sus derechos y responsables de sus deberes, también se presentan propuestas curriculares adecuadas para este tipo de formación.

Es una propuesta académicamente solvente para conducir la educación matemática, que parte de un fuerte compromiso ético y social, por ello es un aporte fundamental para la transformación de la práctica educativa.

Este libro está dirigido al profesorado de matemática, tanto a quiénes se encuentran en ejercicio como a aquellos que aún se encuentran en etapa de formación. Proporciona un nuevo punto de partida a los “formadores de formadores”, despertando muchas reflexiones y abriendo oportunidades de investigación e innovación educativa.

Autores de prestigio plantean interesantes propuestas en cada artículo de este libro, cuya estructura presentamos a continuación:

- **La aspiración a la ciudadanía y el desarrollo de la competencia matemática**.
  María Goñi Zabala

- **Matemáticas: mente disciplinar, mente creativa, mente ética. Una propuesta de educación ciudadana**
  Inés María Gómez Chacón
- **Matemáticas para la ciudadanía**
  Claudi Alsina Catalá
- **Disfrutar de y luchar por los derechos humanos: las matemáticas también cuentan**.
  María Luz Callejo de la Vega
- **Participación diversidad lingüistica y aprendizaje matemático**.
  Núria Planas, Marta Civil
- **Aprender a enseñar matemáticas y educar en ciudadanía**.
  Yuly Vanegas Muñoz, Joaquim Giménez

Los invitamos a que disfruten de este libro, para enseñar matemática y, a su vez, educar en ciudadanía.

Equipo editorial.

Marzo de 2011, Número 25, páginas 193-195
ISSN: 1815-0640

Matemáticas en la red

Webs interactivas de matemáticas

Autor de la Aplicación: Manuel Sada Allo

Dirección:http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/index.htm

Ejemplos diversos de webs interactivas de Matemáticas Euskaraz nuevo

diseñadas con GeoGebra por Manuel Sada Allo.

El objetivo que el autor persigue al crear cada una de estas páginas es el de facilitar el aprendizaje de conceptos matemáticos relacionados con la Geometría, el Análisis y el estudio de ciertas funciones, a través del uso del programa *GeoGebra*, software de geometría dinámica, libre y de sencillo manejo, que funciona tanto bajo Windows como Linux y del que también se incluye el programa para descargar, un Manual y un Tutorial.

Para poder visualizar correctamente las figuras interactivas se necesita tener la *máquina java*, pero desde la misma página se puede descargar el mismo.

En el inicio se encuentran los siguientes íconos, desde cada uno de ellos se accede a distintos temas:

Se describe a continuación cada colección de páginas, según los temas desarrollados:

- Áreas: Se plantea el origen de las fórmulas de área y la deducción de las mismas.
- Medidas de ángulos: Se busca la visualización de ángulos de polígonos, el entendimiento de la inscripción de estos en circunferencias y las medidas de los mismos.
- Puntos y rectas notables de un triángulo: A través de Geometría Dinámica, se pretende que los alumnos construyan los puntos y las rectas notables de un triángulo.
- Movimientos y transformaciones en el plano: Se presentan figuras interactivas con el objetivo de que los alumnos experimenten con las figuras simétricas y con los diferentes tipos de isometrías. Se busca que se logre la composición de movimientos.
- Teorema de Pitágoras: Se proponen cuatro demostraciones visuales de este famoso teorema.
- Geometría analítica: Se trabajan dos temas de la geometría analítica del plano: vectores y rectas. Aquí, el uso del *GeoGebra* es especialmente interesante, motivo por el cual se incluyen una serie de ejercicios para el uso directo del programa.
- Estudio de las cónicas: Se muestran figuras interactivas mediantes las cuales se visualizan los cuatro tipos de cónicas, permitiéndose la modificación de los correspondientes parámetros a fin de observar los cambios desde la gráfica.
- Familias de funciones elementales: El objetivo de lo aquí propuesto es observar los cambios producidos en cada tipo de funciones elementales mediante la modificación de los parámetros.
- Cálculo diferencial: Se indican especialmente una serie de figuras que permiten la comprensión de los principales conceptos del Cálculo diferencial. El uso del zoom en el aspecto gráfico es de incalculable valor.
- Problemas de Optimización: Se presentan problemas de optimización para un tratamiento interactivo, pensados desde un punto de vista diferente en la que la representación gráfica y la comprensión de lo que se hace son esenciales.
- Trigonometría: Se plantean actividades que tienen como objetivo ayudar o guiar a los alumnos para que aprendan por sí mismos y visualicen las diferentes razones trigonométricas de un ángulo.
- Distribución normal: Se muestran figuras interactivas que permiten calcular los valores correspondientes a la distribución normal.
- Igualdades notables: Se presentan aquí tres formulas algebraicas con el objetivo de que se visualice las mismas, tratando de eliminar la concepción de estas como una fórmula a memorizar.
- Disecciones y Cicloides y Trocoides: Se proponen dos grupos de páginas *web* diferentes a las demás, pues no son temas que correspondan a la currícula de ese nivel. El primer grupo contiene figuras dinámicas y el segundo un conjunto de curvas matemáticas curiosas e interesantes.

Como él mismo comenta, las páginas no sólo están pensadas para constituirse para el profesor de Matemáticas del nivel medio, en una herramienta didáctica a ser utilizada dentro del aula ya sea, por él mismo como soporte en el desarrollo de las clases o por los estudiantes bajo su dirección para que interactúen con las figuras, introduzcan cambios y observando los resultados puedan descubrir regularidades, conjeturar y así construir su propio conocimiento sino que también, han sido pensadas para que fuera del ámbito escolar los estudiantes fomenten su curiosidad experimentando con las figuras propuestas.

Presenta además:

- Un índice de las páginas por rama de la matemática a la que pertenecen y por nivel educativo que cubren.
- Actividades, algunas de ellas guiadas y con soluciones
- El desarrollo de la Unidad Didáctica: Lugares geométricos.
- Enlaces con otras páginas que utilizan Geogebra.
- Otros recursos informáticos elaborados para la enseñanza de las matemáticas.

Tanto las actividades como la Unidad Didáctica se plantean pensando en el papel activo del estudiante en el proceso de aprendizaje y el *GeoGebra* como herramienta que colabora en ello.

Elegimos comentar esta página debido a que en ella se presentan una serie de recursos didácticos no utilizados habitualmente en la clase; en correspondencia con las nuevas tendencias en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, que dan más protagonismo al alumno, considerándolo un agente activo en el proceso de aprendizaje.

Claudia Reyes y Valeria Cerda.
Dpto. de Matemática.
Facultad de Economía y Administración.
Universidad Nacional del Comahue. Argentina.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 197-202
ISSN: 1815-0640

Información

58 ayudas de material escolar. Y seguimos …

Las matemáticas, tan importantes siempre, nos sirven para ofrecer los datos de lo realizado hasta ahora en ayudas a material escolar: hasta **enero de 2011** las ayudas han sido **58**. Cincuenta y ocho. La última fue en enero de 2011 a la ciudad de Horqueta, en el Departamento de Concepción, en Paraguay. Y seguimos…

Estas acciones se han venido realizando desde el momento en que la Fundación era un embrión. Su presidente, Salvador Pérez, en la doble condición de profesional de la educación como profesor de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) y del periodismo en diversos medios escritos de las Islas Canarias, logró poner en marcha dos proyectos de periódicos escolares involucrando en la acción a un extenso grupo de ilusionados estudiantes con los que conjugó las técnicas nuevas de Internet y el papel de siempre.

En efecto, el año 2000 se ideó un periódico escolar en el Colegio Público *Camino Largo* de La Laguna (Tenerife) que contaba con todos los ingredientes propios de una redacción periodística: director, adjuntos al director, subdirector, redactores jefes, secretario de redacción, redacción, maquetación, parte administrativa… todos ellos alumnos y alumnas de los cursos 1º y 2º de la ESO. Se titulaba *El Camino siempre es Largo,* tenía 36 páginas y se publicó en junio de 2000 con el precio de 300 pesetas (aún no había llegado el euro…). Tuvo amplia difusión y unas buenas ventas.

Un año después, en junio de 2001, se publicó el siguiente periódico que titulamos en esta ocasión *El Punto y Seguido,* en el Instituto Canarias *Cabrera Pinto* e igualmente realizado por estudiantes de los mismos niveles. Se puso a la venta con el mismo precio: 300 pesetas (1,8 euros) pero esta vez con 40 páginas. Aumentó el número de participantes con la novedad de contar con editor, directora, jefe de documentación, jefes de montaje, jefe de publicidad, gerente, defensor del lector…Consiguió de nuevo una gran difusión, mejores ventas y repercusión en los medios informativos.

El dinero conseguido en los dos periódicos ascendió a 304.503,88 pesetas (1830 euros y tanto el profesorado como el alumnado tenían claro que ese dinero tendría que servir para hacer un mundo mejor, ser solidarios en una palabra. Y así fue porque fue utilizada toda la partida para llevar a cabo la primera obra de colaboración con América: se enviaron 150 kilos de material escolar nuevo a escuelas de Cochabamba, en Bolivia. Ese fue el comienzo en **junio de 2001**.

En los años siguientes, también hacia América y hasta la actualidad, se han continuado haciendo envíos de material escolar nuevo o llevándolo en equipajes con destino a alguno de estos cuatro países: Perú, Bolivia, Paraguay y Argentina.

En todas las entregas se hace un acto en el que se reúnen alumnos, profesores y padres levantando un acta y tomando imágenes. En la web de la Fundación tienen más información.

MATERIAL ESCOLAR PARA LA PAZA, PERÚ

Dentro del capítulo de actividades de la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz hay que destacar las entregas de material escolar nuevo. Siempre existen educadores muy profesionales, conscientes de su deber y con capacidad de sacrificio para hacer bien a los demás sin nada a cambio.

Es el caso de José Ventura Vegas, residente en La Victoria, Chiclayo, Perú que coordinó su quehacer con la profesora, Elva Vásquez Altamirano, docente en la Sierra Cajamarquina, una zona rural muy carenciada. Su centro de población queda de Chiclayo a unas 20 horas en movilidad pues primero hay que ir a la provincia de Chota (12 horas) y luego al Distrito de Choropampa (8 horas) y finalmente caminar unos 15 minutos al centro poblado de La Paza.

Las escuelas pertenecen a la I.E. Nº 10987 CPM La Paza, Distrito de Choropampa, provincia de Chota. El envío costó a la Fundación la cantidad de 267,31 € entre el material comprado en Tenerife y el paquete postal económico.

El material estaba formado por lápices, bolígrafos, tijeras, tijeras de aula, un compás de bigotera, compases, cajas de lápices de colores, transportadores de ángulos semicirculares, transportadores de ángulos circulares, cajas de lápices plásticos de color, dos cajas de acuarelas, cajas de rotuladores, cajas de ceras, gomas de borrar, afiladores metálicos, afiladores plásticos, barras de pegamento, cajas de tizas, reglas, escuadras…

El acta de recepción de los materiales fue el 13 de julio de 2010 (los paquetes fueron enviados el 9 de junio), a las 9 de la mañana, en una reunión donde estaban profesores, padres y madres de familia y alumnos y alumnas del centro. Fueron entregados del primero al sexto grado (con nombre y apellidos de cada alumno) además del restante material que quedo para ser utilizado para todas las aulas de forma conjunta.

Las firmas de la recepción del material enviado cuenta con la del Director, con cuño del centro, profesores, padres y madres y también la firma y cuño del Teniente de Alcalde de la Municipalidad de Chorompampa.

La Fundación tiene una fuente de ingresos con la venta de la obra póstuma de uno de los protagonistas, Carlos Salvador. Está formada por tres libros: *Dioses para cinco minutos*, prologado por escritor y periodista, Eduardo Haro Tecglen; *Retrato de un viejo prematuro*, cuyo prólogo es del periodista y escritor, Alfonso González Jerez y *Duelos del extranjero ilimitable*, siendo el periodista y escritor, Juan Cruz Ruiz el autor del prólogo. Las portadas son cuadros de Munch. Se realizaron seis presentaciones en Canarias entre 2004 y 2005. Van por su segunda edición. Las ediciones han sido financiadas por los padres del autor y, como se ha indicado, el importe íntegro de la venta es utilizado para desarrollar los proyectos que promueve la Fundación. *El futuro en esta vida “sin ellos” es dedicar nuestros esfuerzos al camino de la educación y la cultura*, opina los padres de Carlos Salvador y Beatriz.

El convenio de colaboración que mantienen la Fundación y la revista UNIÓN prevé la creación de una línea de ayudas a estudiantes o profesores noveles que deseen participar en eventos educativos en la República de Argentina. Es una acción que ya se ha iniciado y que se espera poder ampliar en el futuro.

Por otra parte, se sigue trabajando en pro de la educación en Paraguay, en concreto en la comunidad escolar de Cerro Poty. En estos momentos se está elaborando un protocolo que permita abrir unas ayudas económicas para que se puedan acoger a ellas alumnos y alumnas que acaben la enseñanza obligatoria y que, reuniendo determinados requisitos, continúen sus estudios.

Salvador Pérez, Presidente de la Fundación, en el acto de inauguración de las escuelas de Cerro Poty, Asunción, Paraguay.

Para tener más información, les invitamos a que visiten nuestra página web:

www.carlossalvadorybeatrizfundación.com

Hay muchas fotos pues, muchas veces, una imagen vale más que mil palabras.

¡¡Les esperamos!!

58 ayudas de material escolar. Y seguimos …

As matemáticas, tão importantes sempre, nos servem para oferecer os dados do realizado até agora em ajudas a material escolar: até **janeiro de 2011** as ajudas foram **58**. Cinquenta e oito. A última foi em janeiro de 2011 à cidade de Horqueta, no Departamento de Concepção, em Paraguai. E seguimos…

Estas acções vieram-se realizando desde o momento em que a Fundação era um embrião. Seu presidente, Salvador Pérez, na dupla condição de profissional da educação como professor do Ensino Secundário Obrigatória (ISSO) e do jornalismo em diversos meios escritos das Ilhas Canárias, conseguiu pôr em marcha dois projectos de jornais escoares envolvendo na acção a um extenso grupo de ilusionados estudantes com os que conjugó as técnicas novas de Internet e o papel de sempre.

Efectivamente, no ano 2000 criou-se um periódico escolar no Colégio Público Caminho Longo da Laguna (Tenerife) que contava com todos os ingredientes próprios de uma redacção jornalística: director, adjuntos ao director, subdirector, redactores chefes, secretário de redacção, redacção, maquetación, parte administrativa… todos eles alunos e alunas dos cursos 1º e 2º da ISSO. Titulava-se O Caminho sempre é Longo, tinha 36 páginas e se publicou em junho de 2000 com o preço de 300 pesetas (ainda não tinha chegado o euro…). Teve ampla difusión e umas boas vendas.

Num ano depois, em junho de 2001, publicou-se o seguinte jornal que titulamos nesta ocasião O Ponto e Seguido, no Instituto Canárias Cabrera Pinto e igualmente realizado por estudantes dos mesmos níveis. Pôs-se à venda com o mesmo preço: 300 pesetas (1,8 euros) mas desta vez com 40 páginas. Aumentou o número de participantes com a novidade de contar com editor, directora, chefe de documentação, chefes de montagem, chefe de publicidade, gerente, defensor do leitor…Conseguiu de novo uma grande difusión, melhores vendas e repercussão nos meios informativos.

O dinheiro conseguido nos dois jornais ascendeu a 304.503,88 pesetas (1830 euros e tanto o profesorado como o alumnado tinham claro que esse dinheiro teria que servir para fazer um mundo melhor, ser solidarios numa palavra. E assim foi porque foi utilizada toda a partida para levar a cabo a primeira obra de colaboração com América: enviaram-se 150 quilos de material escolar novo a escolas de Cochabamba, em Bolívia. Esse foi o começo em **junho de 2001**.

Nos anos seguintes, também para América e até a actualidade, se continuaram fazendo envios de material escolar novo ou o levando em bagagens com destino a algum destes quatro países: Peru, Bolívia, Paraguai e Argentina. Em todas as entregas se faz um acto no que se reúnem alunos, professores e pais levantando um acta e tomando imagens. No site da Fundação têm mais informação.

MATERIAL ESCOLAR PARA A PAZA, PERU

Dentro do capítulo de actividades da Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz há que destacar as entregas de material escolar novo. Sempre existem educadores muito profissionais, conscientes de seu dever e com capacidade de sacrifício para fazer bem aos demais sem nada a mudança.

É o caso de José Ventura Vegas, residente na Vitória, Chiclayo, Peru que coordenou sua quehacer com a professora, Elva Vásquez Altamirano, docente na Sierra Cajamarquina, uma zona rural muito carenciada. Seu centro de população fica de Chiclayo a umas 20 horas em movilidad pois primeiro há que ir à província de Chota (12 horas) e depois ao Distrito de Choropampa (8 horas) e finalmente caminhar uns 15 minutos ao centro povoado da Paza.

As escolas pertencem à I.E. Nº 10987 CPM A Paza, Distrito de Choropampa, província de Chota. O envio custou à Fundação a quantidade de 267,31 € entre o material comprado em Tenerife e o pacote postal económico.

O material estava formado por lápices, bolígrafos, tijeras, tijeras de aula, um compás de bigotera, compases, caixas de lápices de cores, transportadores de ângulos semicirculares, transportadores de ângulos circulares, caixas de lápices plásticos de cor, duas caixas de acuarelas, caixas de rotuladores, caixas de ceras, borrachas de apagar,, afiladores metálicos, afiladores plásticos, barras de cola, caixas de tizas, regras, escuadras…

O acta de recepção dos materiais foi o 13 de julho de 2010 (os pacotes foram enviados o 9 de junho), às 9 da manhã, numa reunião onde estavam professores, pais e mães de família e alunos e alunas do centro. Foram entregados do primeiro ao sexto grau (com nome e apellidos da cada aluno) além do restante material que baixo para ser utilizado para todas as aulas de forma conjunta.

As assinaturas da recepção do material enviado conta com a do Director, com cuño do centro, professores, pais e mães e também a assinatura e cuño do Tenente de Prefeito da Municipalidad de Chorompampa.

A Fundação tem uma fonte de rendimentos com a venda da obra póstuma de um dos protagonistas, Carlos Salvador. Está formada por três livros: Deuses para cinco minutos, prologado por escritor e jornalista, Eduardo Haro Tecglen; Retrato de um velho prematuro, cujo prólogo é do jornalista e escritor, Alfonso González Jerez e *Duelos do estrangeiro ilimitable, sendo o jornalista e escritor, Juan Cruz Ruiz o autor do prólogo. As portadas são quadros de Munch. Realizaram-se seis apresentações em Canárias entre 2004 e 2005. Vão por sua segunda edição*. s edições foram financiadas pelos pais do autor e, como se indicou, o custo íntegro da venda é utilizado para desenvolver os projectos que promove a Fundação. O futuro nesta vida “sem eles” é dedicar nossos esforços ao caminho da educação e a cultura, opina os pais de Carlos Salvador e Beatriz.

O convênio de colaboração que mantêm a Fundação e a revista UNIÃO prevê a criação de uma linha de ajudas a estudantes ou professores noveles que desejem participar em eventos educativos na República de Argentina. É uma acção que já se iniciou e que se espera poder ampliar no futuro.

Por outra parte, segue-se trabalhando em pró da educação em Paraguai, em concreto na comunidade escolar de Cerro Poty. Nestes momentos está a elaborar-se um protocolo que permita abrir umas ajudas económicas para que se possam acolher a elas alunos e alunas que acabem o ensino obrigatório e que, reunindo determinados requisitos, continuem seus estudos.

Salvador Pérez, Presidente da Fundação, no acto de inauguração das escolas de Cerro Poty, Asunción, Paraguay.

Para ter mais informação, convidamos-lhes a que visitem nossa página site:

www.carlossalvadorybeatrizfundación.com

Há muitas fotos pois, muitas vezes, uma imagem vale mais que mil palavras.

¡¡Esperamos-lhes!!

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 203-207
ISSN: 1815-0640

Despedida a una gran educadora:

María Alicia Villar Icasuriaga

Prof. Etda Rodríguez
Presidente de SEMUR

La profesora uruguaya María Alicia Villar Icasuriaga nació un 7 de febrero en la ciudad de Florida distante 100 km de Montevideo. Su padre un ingeniero que trabajaba en la empresa de Aguas Corrientes y su madre una reconocida maestra. Se trasladó a Montevideo para continuar sus estudios y, siendo muy joven y culminando una brillante carrera, se recibió de Profesora de Matemática y de Física en el Instituto de Profesores "Artigas", su querido IPA. Se casó y tuvo dos hijos. Luego de algunos años dedicados a la enseñanza de la Matemática en liceos de Montevideo realizó estudios de posgrado en el IPA para enseñar en nivel terciario con la orientación del Prof. Marcelino Gallárreta, obteniendo el título de Profesor Agregado en Geometría.

> *“…..las Matemáticas deben salir de las aulas y expandirse por todas las actividades de la vida. Los estudiantes deben ser capaces de “ver” situaciones matemáticas en muchos aspectos de ésta”, resaltando de esta manera uno de los objetivos primordiales de la enseñanza básica y media, el cuál no consiste en embutir en la mente del niño un amasijo de información que, se piensa le va a ser muy necesaria como ciudadano en la sociedad. El objetivo fundamental deberá consistir en ayudarle a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, físicas, de modo armonioso….”*

Ganó una beca del Instituto Italiano de Cultura que le permitió trasladarse a Roma dónde estudió Metodología y Didáctica de Matemática bajo la supervisión de Emma Castelnuovo.

Durante muchos años se dedicó a la enseñanza de Didáctica Especial, de Matemática Básica y de Geometría en el IPA. Fue fundadora y la primera Presidente de la Sociedad de Educación Matemática URuguaya –SEMUR. Dio cursos en diferentes ciudades de Brasil, Argentina y Paraguay para profesores y maestros de Educación Matemática. Participó como conferencista invitada en numerosos congresos de Educación Matemática (Brasil, Argentina, Venezuela, Costa Rica, Rep. Dominicana, USA, Canadá, Chile, Bolivia, España, Hungría). Se destacó como organizadora de congresos de Educación Matemática nacionales e internacionales en especial la 1ª Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur y la X CIAEM. Publicó módulos didácticos entre ellos: "La Matemática y el Campeonato Mundial de Fútbol", "Número de Oro, Arte y la Pintura de Torres García", "Volver al Futuro", "Enseñando Geometría", etc. Fue vicepresidente del Comité Interamericano de Educación Matemática 1999 - 2003 y participó en grupos de trabajo del ICME-7(Canadá). El pasado 4 de febrero de 2011 falleció en Montevideo dejando, esta Gran Docente, un imborrable recuerdo entre quienes fuimos sus alumnos, colegas y amigos.

Alicia Villar y la FISEM.

Luis Balbuena Castellano

Alicia Villar seguirá en el recuerdo de quienes la conocimos y en la historia de la Educación Matemática de nuestro ámbito Iberoamericano. Desde el primer día en que la conocí pude captar el entusiasmo y la vehemencia que ponía en sus proyectos e ideas. Era imposible no sumarse a sus iniciativas. Tuve el privilegio de estar en el acto de presentación de la Sociedad Uruguaya de Educación Matemática (SEMUR) en Montevideo. Así, su pequeño gran país se sumaba al movimiento asociativo que, poco a poco, se iba propagando y creando un ambiente de colaboración y de ganas de trabajar para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Alicia lo tenía claro y por eso promovía encuentros de diverso tipo tanto nacionales como internacionales. Coincidí con ella en muchos acontecimientos y ello me permitió mantener largas conversaciones sobre los más variados temas pero, muy especialmente, en torno a lo que más nos unía que era la educación matemática.

Cuando conoció la idea de la posible creación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), ella fue una de las se sumó con su entusiasmo habitual impulsando el proyecto y consultándome aquellos aspectos que no le quedaban claros del borrador de Estatuto que había enviado a todas las sociedades existentes con el objetivo de portar ideas de mejora, discutirlo y cerrar todos los aspectos, en espera de encontrar el momento para proceder a la creación de la Federación. Recuerdo que uno de los asuntos que le preocupaba de manera especial era el del voto. En el caso de ser ponderado al número de socios, comentaba que su sociedad, incluso en las condiciones más óptimas, siempre tendría una cantidad mucho menor que el de algunas de las sociedades federadas. Había que tratar de evitar que las sociedades de estas características se pudieran sentir marginadas de las decisiones importantes. Eso nos obligó a buscar fórmulas de ponderación que evitasen la preponderancia de ninguna sociedad, por muchos socios que tuviese. Afortunadamente, hasta el momento y esperemos que siempre sea así, las decisiones que se han tenido que tomar lo han sido por consenso.

Después de un largo deambular de este proyecto que había nacido en Santiago de Chile, en el marco del CIAEM de 1995, por fin, el momento de la ansiada reunión llegó. Pudimos reunir a los presidentes y presidentas de las sociedades que así lo decidieron y creamos en 2003 la FISEM. Fue en el mes de julio de ese año, en Puerto de la Cruz, isla de Tenerife, Canarias, un archipiélago que siempre fue y sigue siendo, un puente entre la Península y América. Allí acudió Alicia para ser una de las fundadoras de esta Federación que nos aglutina a todos y que, esperemos, que siga avanzando en ese trabajo común que es la Educación Matemática.

Esa reunión de constitución de la FISEM se realizó dentro de las actividades programadas en las XI Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (XI JAEM) que organiza cada dos años la Federación Española de Sociedades de Matemáticas. En esa ocasión correspondió a la Sociedad *Isaac Newton* de Canarias, su organización.

En las actas del evento, se puede leer:

6. Otras actividades

6.1. Creación de la FISEM.

Hasta este momento y desde 1995 no se habían reunido tantos responsables máximos de Sociedades de Educación Matemática. De las reuniones mantenidas durante estos días cabe destacar:

- Se constituyó en primer lugar una Mesa de Edad, formada por Dª Nelly Vázquez de Tapia como Presidenta y por Luis Balbuena Castellano como Secretario, con el fin de regular la primera reunión celebrada el día 1 de julio y que tenía como único punto en el orden del día la discusión y posterior aprobación de los borradores de Estatuto y de Reglamento de Régimen Interior que tratarán de fijar la actuación de esta Federación en el futuro. El texto aprobado se firmó en el acto de constitución de la FISEM que se celebró el 2 de julio, primer día de las XI JAEM.

- Tras la constitución de la FISEM, se celebró la primera reunión de las personas que forman la Junta de Gobierno para proceder a la elección de los cargos previstos en el Estatuto.

En primer lugar se acordó, por consenso, un sistema de votación que, una vez realizado, dio el siguiente resultado:

• Presidenta de la FISEM: Celia Carolino Pires (Brasil)

• Vicepresidenta: Ismenia Guzmán (Chile)

• Al no haberse presentado ningún candidato a la convocatoria de Secretario General realizada en enero de 2003, tal y como se había acordado en reuniones anteriores, la Junta de Gobierno designó a Luis Balbuena Castellano para que ocupe el cargo por un periodo máximo de dos años.

• Para el cargo de Tesorero, Luis Balbuena propuso a la Junta a Miguel Ángel Riggio, siendo aceptada la propuesta.

- En las reuniones mantenidas a continuación se hicieron propuestas para impulsar y legalizar la situación.

En la VII reunión de Didáctica de las Matemáticas del Cono Sur celebrado en Asunción (Paraguay) en el mes de septiembre de 2009, se le rindió un sentido homenaje en el que me correspondió el honor de participar como orador en nombre de la FISEM, precisamente. Allí le hice entrega (simbólicamente a José Luis Muñiz, pues ella no se pudo trasladar) de una placa cuya leyenda dice así:

La FISEM
(Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática)
reconoce y agradece a
Doña ALICIA VILLAR ICASURIAGA
el trabajo y el impulso dado a la Educación Matemática en nuestro ámbito.
Asunción, Paraguay. Septiembre de dos mil nueve.

Por tanto, Alicia, esa semilla que ayudaste a sembrar ya da frutos.

Para conocer más sobre sus publicaciones ingresar a los siguientes sitios

http://www.fisem.org/web/union/revistas/20/Union_020_023.pdf
http://www.sinewton.org/numeros/numeros/34/Articulo05.pdf
http://www.semur.edu.uy/

Marzo de 2011, Número 25, páginas 209-210
ISSN: 1815-0640

Convocatoria para la Dirección de Unión

La dirección de la revista UNION, que avala y nombra la Junta de Gobierno de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), ha de convocarse cada tres años.

La actual dirección cumple su mandato en diciembre de 2011, por lo que se realiza la convocatoria de candidaturas para la dirección de la revista UNIÓN editada por la Federación Iberoamericana de Sociedades de Profesores de Matemáticas para el periodo 2012-2014.

Los profesores o profesoras interesados en participar en esta convocatoria deberán enviar una solicitud a la Secretaría General de la FISEM antes del 30 de septiembre de 2011.

El procedimiento y los documentos que deben presentarse son los siguientes:

• Solicitud dirigida al Presidente de la FISEM en la que consten al menos estos datos: nombre completo, domicilio, Sociedad federada a la que pertenece, e-mail, situación profesional y lugar de trabajo.

• Certificado del Secretario de su Sociedad en el que conste su condición de socio activo así como su antigüedad como tal que debe ser superior o igual a cinco años.

• Una memoria de un máximo de tres folios en la que exponga la orientación que desea dar a la revista así como las secciones fijas que va a crear y otros datos que aclaren la línea que tiene previsto aplicar.

• Currículum vítae.

Las solicitudes y la documentación se enviarán por correo postal al Presidente de la FISEM a la siguiente dirección:

Arturo Mena
Secretario General
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Casilla 4059. Valparaíso.
Chile.

El solicitante comunicará al siguiente e-mail el envío de la documentación: sg@fisem.org

Todas las solicitudes recibidas serán posteriormente enviadas a la Junta de Gobierno de la FISEM para que decida cuál es la candidatura que presenta el programa más adecuado a los fines de la Federación.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 211-213
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2011

Organizan: Sociedad Matemática de Chile y las 10 universidades del Consejo de Rectores de la Zona Sur.
Lugar: Universidad de la Frontera. Pucón, Chile.
Fecha: 27 al 29 de abril de 2011.
Información: **http://jzonasur.ufro.cl**

II Evento Internacional la Matemática, la Informática y la Física en el siglo XXI
FIMAT XXI

Lugar: Holguín. Cuba.
Organizan: Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la Luz y Caballero" y la Sociedad Cubana de Matemática y Computación
Fecha: 15 al 17 de junio de 2011.
Información: **fimat@ucp.ho.rimed.cu**

XIII CIAEM: XIII Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática
Lugar**:** Recife. Brasil
Convoca: Comité Interamericano de Educación Matemática.
Fecha: 26 al 29 de junio de 2011
Información: **http://www.ce.ufpe.br/ciaem2011**

15 JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.
Convoca: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática.
Lugar: Gijón. España.
Fecha: 3 al 6 de julio de 2011.
Información: **http://www.15jaem.org**

Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y la Universidad "Ignacio Agramonte y Loynaz"
Fecha: 11 al 15 de julio
Lugar: Camagüey, Cuba.
Información: **www.clame.org.mx**
www.relme25.reduc.edu.cu

11th International Conference of The Mathematics Education into the 21st Century Project

Grahamstown, Sudáfrica, 10 al 16 de setiembre.

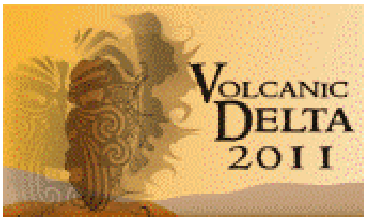
Organiza: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.
Lugar: Montevideo, Uruguay.
Fecha: 19 y 20 de septiembre de 2011
Información: **www.semur.edu.uy**

XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Convoca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Organiza: Universidad Castilla la Mancha.
Lugar: Ciudad Real Castilla la Mancha, España.
Fecha: 7 al 11 de octubre de 2011
Información: **www.seiem.es**

Conferencia de GeoGebra-Latin America 2010. Brasil

Lugar: San Pablo. Brasil
Fecha: 12 al 15 de noviembre de 2011.
Información: **http://www.geogebra.org/cms/en/events**



Fecha: 27 de noviembre al 2 de diciembre.
Lugar: Rotorua, Nueva Zelanda.
Información: **www.delta2011.co.nz**

AÑO 2013

En septiembre en Uruguay

VII CIBEM
VII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.cibem7.semur.edu.uy

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, página 215-216
ISSN: 1815-0640

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@gmail.com**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**
4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
    - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
    - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

Para libro:
Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista:

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com