UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 24 – Diciembre de 2010

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 3-4
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García Gonzalez
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio
Textos: Vilma Giudice
Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo
webmaster: Elda Beatriz Micheli

Colabora

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 5-7
ISSN: 1815-0640

Editorial

"El iliterato del siglo XXI no será el que no puede leer y escribir,
Sino el que no puede aprender, desaprender y reaprender".
Alvin Toffler
Rethinking the Future (1997).

Estimados colegas e amigos:

Finalizando no ano 2010, que foi fructífero nos aspectos educativos, entre outros, pelos projectos que se apresentaram no Congresso do Bicentenario, com o Programa: Metas 2021: a educação que queremos para a geração dos Bicentenarios, se abre um tempo de esperança, mas também de responsabilidade e de compromisso para uma comunidade iberoamericana em construção desde os alicerces da liberdade, a igualdade e o desenvolvimento. Desde nosso lugar compartilhamos os mesmos objectivos e propósitos, tratando de oferecer melhore-las propostas recebidas sobre Educação Matemática nos diversos ramos que a compõem.

Este número é um monográfico dedicado à Estatística e seu ensino nos diferentes níveis educativos. Graças a contribua-los de docentes e de pesquisadores, de diferentes países, apresentam-se neste volume seis artigos, um deles corresponde à assinatura convidada e quatro das seis secções fixas sobre esta temática, esperamos que resulte atraente e também útil em suas respectivas tarefas docentes.

Complementa-se este número, com artigos sobre outros temas que nos mobilizam e que oferecem interessantes propostas didácticas, já utilizadas e provadas com alunos o que convida à reflexão contínua.

Novamente entramos no período de reflexão sobre o realizado durante este ano e o que fica por fazer num afán de melhora e de lucro de objectivos propostos, mas também e sobretudo, de satisfação pela oportunidade de conhecer e nos comunicar com docentes de outros países que demonstraram com factos seus desejos de colaborar com UNION.

Muito obrigado!! a todos os que colaboraram pára que UNIÃO cumpra em seu sexto ano e continue chegando a milhares de colegas e desejamos que no ano 2011 nos encontre novamente compartilhando ideais.

Destacamos as seguintes notícias:

- A incorporação da **Associação Mexicana de Pesquisadores do Uso da Tecnologia na Educação Matemática** à **Federação Iberoamericana de Sociedades de Educação Matemática.**
- A assunção de **Agustín Carrillo de Albornoz Torres** como **Secretário Geral da FISEM.**

- O labor altruísta da **Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz**, que através da acção do Presidente da Fundação, Salvador Pérez Pérez e sua esposa, Rosario Aurora Estévez González (os pais de Carlos Salvador e Beatriz), ambos professores em Canárias com a colaboração de outras instituições conseguiram construir uma escola em Paraguai, além de contribuir materiais didácticos e elementos indispensáveis para que docentes e alunos possam ter o âmbito de desenvolvimento adequado.

Para Finalizar, um Brindis pelo tempo compartilhado e para que se cumpram seus desejos pessoais e profissionais.

Um abraço fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

Editorial

"O iliterato do século XXI não será o que não pode ler e escrever,
Senão o que não pode aprender, desaprender e reaprender".
Alvin Toffler
Rethinking the Future (1997).

Estimados colegas y amigos

Finalizando el año 2010, que ha sido fructífero en los aspectos educativos, entre otros, por los proyectos que se han presentado en el Congreso del Bicentenario, con el Programa: ***Metas 2021: la educación que queremos para la generación de los Bicentenarios***, se abre un tiempo de esperanza, pero también de responsabilidad y de compromiso para una comunidad iberoamericana en construcción desde los cimientos de la libertad, la igualdad y el desarrollo. Desde nuestro lugar compartimos los mismos objetivos y propósitos, tratando de ofrecer las mejores propuestas recibidas sobre Educación Matemática en las diversas ramas que la componen.

Este número es un monográfico dedicado a la Estadística y su enseñanza en los distintos niveles educativos. Gracias a los aportes de docentes y de investigadores, de distintos países, se presentan en este volumen seis artículos, uno de ellos corresponde a la firma invitada y cuatro de las seis secciones fijas sobre esta temática, esperamos que resulte atractivo y también útil en sus respectivas tareas docentes.

Se complementa este número, con artículos sobre otros temas que nos movilizan y que ofrecen interesantes propuestas didácticas, ya utilizadas y probadas con alumnos lo que invita a la reflexión continua.

Nuevamente entramos en el período de reflexión sobre lo realizado durante este año y lo que queda por hacer en un afán de mejora y de logro de objetivos propuestos, pero también y sobre todo, de satisfacción por la oportunidad de conocer y comunicarnos con docentes de otros países que han demostrado con hechos sus deseos de colaborar con UNIÓN.

Muchas Gracias!! a todos los que colaboraron para que UNIÓN cumpla su sexto año y continúe llegando a miles de colegas y deseamos que el año 2011 nos encuentre nuevamente compartiendo ideales.

Destacamos las siguientes noticias:

- La incorporación de la **Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en La Educación Matemática** a la **Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática**.
- La asunción de **Agustín Carrillo de Albornoz Torres** como **Secretario General de la FISEM.**
- La labor altruista de la **Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz**, que a través de la acción del Presidente de la Fundación, Salvador Pérez Pérez y su esposa, Rosario Aurora Estévez González (los padres de Carlos Salvador y Beatriz), ambos profesores en Canarias con la colaboración de otras instituciones han logrado construir una escuela en Paraguay, además de aportar materiales didácticos y elementos indispensables para que docentes y alumnos puedan tener el ámbito de desarrollo adecuado.

Para Finalizar, un Brindis por el tiempo compartido y para que se cumplan sus deseos personales y profesionales.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Diciembre de 2010, Número 24, página 9
ISSN: 1815-0640

Pere Grima Cintas

Breve Reseña

Nació en Olesa de Monstserrat, Barcelona, España, en 1956. Estudió Ingeniería Industrial en la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC) y después de una etapa profesional en la industria se incorporó como profesor al Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la UPC donde también realizó su tesis doctoral. Desde el año1998 es profesor titular.

Imparte clases en la Escuela de Ingeniería Industrial de Barcelona y en la Facultad de Matemáticas y Estadística de la UPC, donde ha sido Vicedecano Jefe de Estudios de Estadística.

Su área de especialidad son las técnicas estadísticas aplicadas al control y la mejora de la calidad, tema sobre el que ha escrito dos libros y una decena de artículos en revistas especializadas. Durante un tiempo trabajó en temas relacionados con los modelos para la gestión de la calidad y en el año 2000 fue evaluador del *European Quality Award*, otorgado por la *European Foundation for Quality Management.*

La enseñanza y la divulgación de la estadística es un tema que considera muy importante y al que dedica parte de su tiempo. Imparte clases sobre la enseñanza de la estadística en el Máster universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria (UPC), y sobre este tema ha realizado diversas conferencias, escrito dos artículos en colaboración con Roberto Behar, profesor de la Universidad del Valle en Cali, Colombia, y los libros: "55 Respuestas a preguntas a preguntas típicas de estadísticas" también junto con Roberto Behar, publicado por la editorial Díaz de Santos (a principios de 2011 saldrá una nueva edición) y "La certeza absoluta y otras ficciones. Los secretos de la estadística" editado por RBA en la colección "El mundo es matemático". Ha sido editor de "Estadística en acción", un libro que contiene casos prácticos escritos en un tono de divulgación y basados en proyectos final de carrera realizados en la Facultad de Matemáticas y Estadística de la UPC.

También ha impartido cursos y conferencias en diversas universidades latinoamericanas, donde tiene muchos amigos, y espera que cada vez sean más.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 11-26
ISSN: 1815-0640

firma invitada

MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

Estadística: Enseñar y crear actitudes positivas a través de casos prácticos

Pere Grima Cintas

Resumen

Una forma de despertar interés por la estadística es presentando casos prácticos que atraigan la atención de los estudiantes y a partir de ellos sacar las ideas y los conceptos que se quieran transmitir. En este artículo se presentan diez ejemplos, casos o situaciones prácticas, que se pueden utilizar en la enseñanza secundaria y que además de transmitir conocimientos pretenden despertar una actitud positiva, de interés y curiosidad, por todo lo que la estadística puede aportar.

Abstract

One way to create interest in statistics is presenting case studies to attract student's attention and draw from them the ideas and concepts that we want to convey. This article presents ten examples, cases and practical situations, that can be used in high school and that as well as transmitting knowledge can awaken a positive attitude, interest and curiosity, for all that statistics can provide.

Resumo

Uma forma de criar interesse nas estatísticas é apresentando casos práticos para atrair a atenção dos alunos e a partir deles tirar deles as idéias e os conceitos que se queira transmitir. Este artigo apresenta dez exemplos, casos e situações práticas, que podem ser utilizados no ensino secundário e também pretendem despertar uma atitude positiva, interesse e curiosidade, para todos os que as estatísticas podem fornecer.

1. Introducción: Estadística a través de casos prácticos

La estadística es una de las asignaturas que aparece con más frecuencia en los planes de estudio de titulaciones universitarias. Incluso carreras que no suelen incluir las matemáticas en su currículum, como medicina, sociología, ciencias políticas o psicología, sí incluyen la estadística y tienen en esta materia una de sus herramientas de trabajo más importantes. Y no podía ser de otra forma, la estadística trata sobre cómo recoger datos (cuántos, de qué forma) y cómo analizarlos para obtener la información que permita tomar las decisiones más adecuadas.

Pero a pesar de su destacada presencia en las titulaciones universitarias y en muchas actividades profesionales, la estadística suele tener poco protagonismo en la enseñanza secundaria (pongamos, para entendernos, que entre los 14 y los 18 años). Rara vez existe una asignatura específica de estadística, y más bien se presenta incluida en el libro de matemáticas, mucha veces al final, de forma que si no da tiempo a verlo todo esta es la parte que se queda sin impartir.

Otro problema, según mi parecer, es que muchas veces se enseña persiguiendo solo objetivos de conocimientos: se pretende que los estudiantes aprendan algunas cosas de estadística descriptiva (cómo se construyen determinados gráficos, por ejemplo), cálculo de probabilidades (donde lo que se considera más importante –y difícil– es aprenderse las fórmulas de la combinatoria) y quizá también algo sobre el coeficiente de correlación o sobre el cálculo de los coeficientes de una ecuación de regresión. Otra cosa es que esos conocimientos permanezcan y estén disponibles para sacarles provecho cuando se presente la ocasión o que, por el contrario, se derrumben una vez pasado el examen y no solo no quede nada, sino que dejen un poco de rechazo a la estadística, una sensación de que "esto no es lo mío".

Creo que cuando se estudia estadística en la enseñanza secundaria los objetivos no deben estar solo orientados a los conocimientos sino también a crear actitudes positivas hacia esta materia. Me parece muy importante que cuaje la idea de que la estadística es una herramienta para conocer mejor la realidad (natural, física, social,...) que nos rodea y que esto se realiza a través del análisis de datos que reflejen de forma objetiva aquello que se desea conocer[1]. Una forma de crear esa actitud es desarrollando las clases en torno a casos prácticos que atraigan la atención de los estudiantes. Estos casos deben poner de manifiesto las posibilidades de la estadística para resolver problemas de interés y también se deben poder sacar lecciones (conocimientos) sobre la metodología usada y sobre sus posibilidades de aplicación en otras situaciones similares.

Por supuesto que este enfoque no es nuevo. Existen libros de introducción a la estadística (a nivel universitario) que plantean situaciones prácticas para poner en contexto la teoría que a continuación explican (como el de David Moore o el de Gary Smith). También existen libros excelentes solo con casos prácticos, como el de J.M. Tanur *et al*. o el de R. Peck *et al*., que se comentan más adelante y que también se pueden utilizar en la enseñanza secundaria.

A continuación se presentan 10 situaciones prácticas, distribuidas en cinco apartados según la temática o el tipo de mensaje que se desee transmitir y que creo que cumplen ese doble objetivo de aportar conocimientos y generar una actitud positiva hacia la estadística.

2. Casos para destacar la importancia de tomar decisiones en base a datos convenientemente recogidos y analizados

Usar la estadística no necesariamente es sinónimo de utilizar palabras raras o de hacer cálculos complicados. Significa que deseamos ver la realidad de forma

---

[1] Y, por supuesto, hay que saber identificar cuáles son esos datos y cómo recogerlos, y también hay que saber analizarlos aplicando las técnicas más adecuadas, que no necesariamente deben ser complicadas.

objetiva, a través de datos que reflejen de la mejor manera posible qué es lo que está ocurriendo. Una vez se tienen los datos hay que saber sacarles la información y saberla plasmar de forma clara y convincente.

2.1. John Snow y el fin del cólera en Londres

En 1854 se desató una terrible epidemia de cólera en el centro de Londres que ocasionó más de 500 muertos en apenas 10 días. En aquella época imperaba la teoría de la miasma como vía de transmisión de la enfermedad (se suponía que "el veneno" estaba en los vapores que se desprendían de los cuerpos en descomposición) pero al Dr. John Snow esta teoría no le cuadraba con sus observaciones y sospechó que el problema podía estar en el agua.

Para estudiar la situación marcó sobre un plano de la zona el lugar donde vivían los fallecidos y observó que las marcas se distribuían en torno a una fuente (la de *Broad Street*). Los datos y la forma de presentarlos era tan clara y convincente que, a pesar de lo estrafalaria que parecía su teoría, las autoridades ordenaron inutilizar la fuente y a partir de aquel momento los contagios cayeron en picada. Aunque no se entendía muy bien cómo el agua podía contagiar la enfermedad, las ciudades de los países desarrollados prestaron mucha atención a la higiene en la distribución de las aguas y el cólera dejó de ser una amenaza en los países desarrollados[2].

Figura 1: Localización de los muertos por cólera realizada por John Snow sobre un plano de la época (vista parcial). Fuente: Wikipedia:"1854 Broad Street cholera outbreak"

[2] No puedo dejar de comentar que mientras escribo estas líneas están apareciendo en los periódicos noticias e imágenes dramáticas sobre la epidemia de cólera en Haití. Es evidente que la lucha contra las enfermedades no sólo es un problema de conocimiento científico.

¿Qué se aprende? La importancia de basar las decisiones en base a datos recogidos de forma inteligente y rigurosa. Un buen diseño de la recolección de datos facilita su análisis posterior.

Otras actividades: Discutir las posibilidades de uso de este tipo de representación gráfica en otros ámbitos: Identificación de la locación más frecuente de los defectos en un producto (por ejemplo, defectos de soldadura en un circuito impreso). Identificación de puntos negros en las carreteras…

Más información en:

Wikipedia: "John Snow" (más amplio en inglés) y "1854 Broad Street cholera outbreak".

Página web dedicada al Dr. Snow elaborada por el Departamento de Epidemiología de la UCLA: http://www.ph.ucla.edu/epi/snow.html

Tufte, E.R. (1997) Visual Explanations. Graphics Press, pp: 27-37.

2.2. Florence Nightingale: Datos para tomar decisiones que salvan vidas

Se dice que la Guerra de Crimea (1853-1856) fue la guerra de la era moderna: se usó por primera vez el ferrocarril, era la primera vez que se disponía de telégrafo y es la primera guerra de la que se tienen fotografías. Pero también está considerada como la peor dirigida de todas aquellas en las que ha participado Inglaterra, los soldados morían a causa de enfermedades infecciosas, falta de comida, de agua y de condiciones higiénicas. El ambiente en los hospitales de campaña era caótico y la mortalidad muy elevada. Pero el uso del telégrafo no solo estaba a disposición de los militares. También lo usaban los reporteros de guerra para enviar crónicas a sus diarios explicando la incompetencia de los mandos militares y la falta de cuidados de los soldados heridos, generando un estado de opinión que obligó al ministro de la guerra a enviar un cuerpo de enfermeras para mejorar la atención a los heridos.

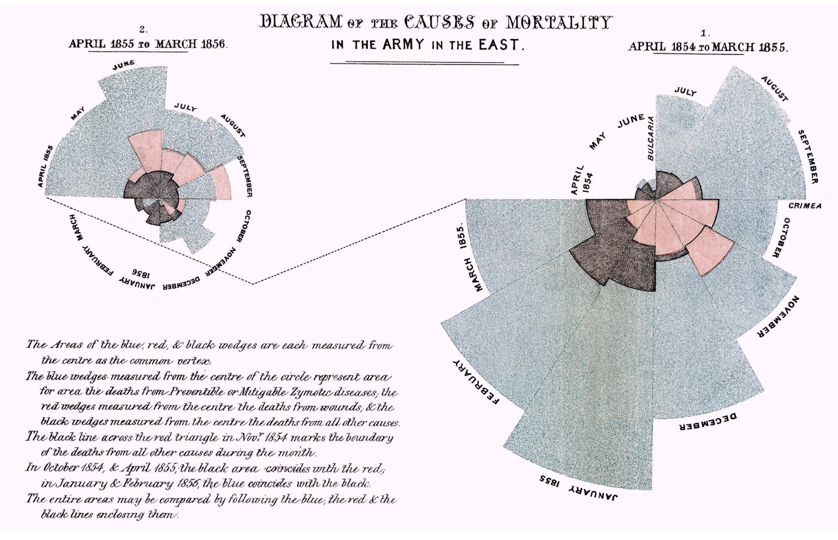


Figura 2: Diagrama sobre las causas de mortalidad y su evolución realizado por F. Nightingale (Fuente: Wikipedia: "Florence Nightingale", en inglés). Una versión animada puede verse en la página web (al final) de la revista Science News

Al frente estaba una mujer entregada e inteligente llamada Florence Nightingale. Cuando llegaron el caos era total, pero Florence Nightingale supo observar, entender y documentar qué era lo que estaba ocurriendo y la asociación entre la masificación de los enfermos y la tasa de mortalidad. Sus conclusiones eran tan claras que convenció a la burocracia militar de la necesidad de realizar un profundo cambio en las formas de actuación: las prioridades fueron el orden y la limpieza, y la tasa de mortalidad bajó de una forma espectacular. Florence Nightingale es reconocida como experta en el uso de la estadística, utilizó nuevas formas de representación gráfica de datos y fue la primera mujer admitida en la Royal Statistical Society.

¿Qué se aprende?: La importancia de los datos para conocer lo que está pasando y para convencer a los que tienen que aportar los recursos (que muchas veces son reticentes a los cambios) de cuáles son las medidas que se deben tomar.

Otras actividades: Profundizar en la vida y las aportaciones de Florence Nightingale. Discutir cómo la estadística pone de manifiesto, incluso en nuestros días, que sin grandes inversiones se pueden salvar muchas vidas.

Más información en:
Wikipedia: "Florence Nightingale".
Florence Nightingale: "Measuring Hospital Care Outcomes", Joint Commission, 1999. Muy interesante la introducción escrita por D. Neuhauser: "Florence Nightingale: A Passionate Statistician", también en Google Books.

3. Ejemplos de la utilidad del análisis exploratorio de datos

Una vez se tienen los datos, realizando gráficos sencillos de entender y de interpretar puede obtenerse una información que ayuda a tomar mejores decisiones.

3.1. El caso de la panadería

El dueño de una panadería está preocupado porque sospecha que las barras de pan que produce tienen un peso demasiado variable, de forma que algunas pueden estar incluso por debajo de los límites que marca la ley.

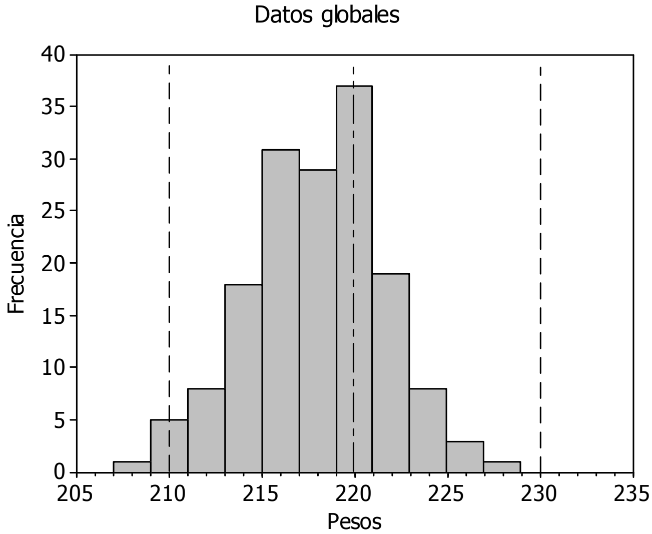
Día	Operario	Máquina 1				Máquina 2			
1	A	220.3	215.5	219.1	219.2	220.3	208.0	214.4	219.2
2	B	215.8	222.0	218.9	213.6	216.9	213.4	217.7	217.7
3	B	220.4	218.7	218.6	219.6	222.9	219.7	209.4	221.6
4	B	221.5	227.0	219.5	222.5	223.1	215.3	220.4	215.6
5	A	215.7	225.3	223.0	218.0	216.0	210.9	221.4	210.9
6	A	222.7	215.1	219.6	217.3	212.1	213.0	218.0	216.5
7	A	216.0	218.8	217.9	213.0	216.9	216.0	213.5	219.2
8	B	219.4	218.3	216.7	224.1	216.2	218.4	216.6	214.9
9	B	219.8	222.6	219.1	217.7	216.2	212.2	216.9	214.9
10	A	220.2	219.5	222.4	219.9	222.9	214.3	219.1	216.7
11	B	218.0	223.9	219.6	221.9	214.9	212.6	219.4	213.3
12	B	219.3	219.6	218.8	219.9	219.0	216.7	216.4	213.5
13	B	220.0	214.1	224.3	217.4	218.0	219.5	219.5	222.3
14	A	223.9	220.6	219.5	219.6	211.8	218.2	218.3	217.4
15	A	218.1	218.8	218.4	217.9	214.6	215.7	218.0	216.4
16	B	216.9	221.6	220.6	222.6	215.6	220.4	217.3	216.2
17	B	217.9	225.7	222.2	216.1	212.5	214.6	209.7	211.3
18	A	224.2	216.2	219.9	220.4	215.8	219.9	216.5	211.9
19	A	214.1	219.7	222.4	224.5	213.7	209.7	216.9	213.1
20	A	221.1	225.0	222.7	222.2	212.5	217.5	217.4	215.7

.

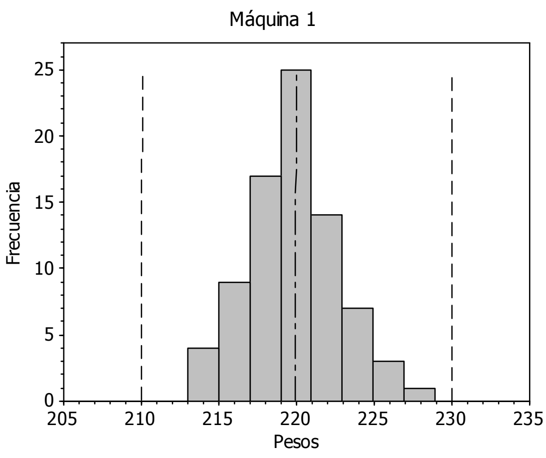
Se utilizan dos máquinas para hacer el pan y también trabajan dos operarios, unos días hace el pan uno y otros días el otro. La siguiente tabla contiene los pesos (en gramos) de una muestra de barras de pan que se han ido recogiendo durante 20 días.

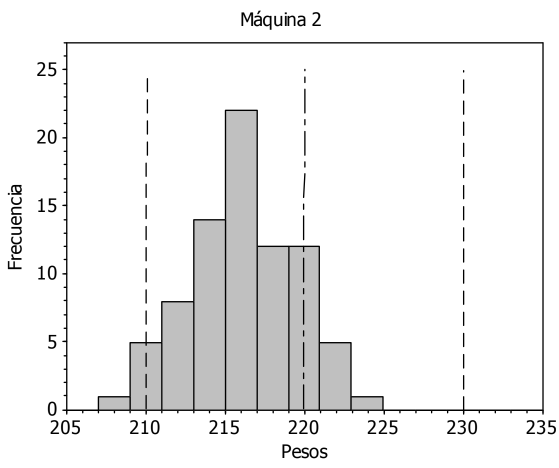
El peso debe ser de 220 ± 10 g y supondremos que estos datos son representativos de la producción general. Las preguntas que nos planteamos son: ¿Existe algún problema? ¿Qué está pasando? ¿Qué hay que hacer para resolver el problema, si es que existe?

Si se intenta sacar conclusiones simplemente mirando los datos es fácil equivocarse. Aunque en este caso solo hay 160 valores, intentar sacar conclusiones “a ojo” es arriesgado. Tampoco es necesario empezar haciendo grandes cálculos o aplicando técnicas sofisticadas, basta con representar los datos gráficamente (mejor si se realizan con algún programa, o con una hoja de cálculo tipo Excel):



Estratificando por operario y máquina se observa que el problema está en la máquina 2, que está descentrada. No hay problema en la máquina 1, y los dos operarios se comportan prácticamente igual.





¿Qué se aprende?: Los datos "en bruto" ocultan información que se puede hacer visible utilizando gráficos sencillos. Esa información permite realizar el diagnóstico correcto y tomar la decisión más adecuada.

Otras actividades: Plantarse preguntas, buscar datos para responderlas y representarlos gráficamente para ver la respuesta de forma clara (ver, por ejemplo, el siguiente caso). Los centros de estadística oficial (en España el Instituto Nacional de Estadística: http://www.ine.es/inebmenu/indice.htm) son una fuente abundante de datos.

Más información en:
Capítulos de estadística descriptiva de buenos textos, como el de David Moore "Introduction to the Practice of Statistics".
Sobre malos usos en las representaciones gráficas (una forma divertida de tratar el tema) un clásico es el libro de Darrell Huff: "How to Lie with Statistics".

3.2. ¿Qué coches resultan baratos y cuáles caros respecto a su potencia?

A muchos jóvenes les interesa el mundo de la tecnología (coches, motocicletas, ordenadores,…) y es fácil obtener datos sobre estos temas a través de internet.

Por ejemplo, en la página web del Real Automóvil Club de España se pueden obtener listados de coches que cumplan unas determinadas condiciones (http://www.race.es/servicios/ofertas_de_coches/buscador_de_coches_nuevos/).

Buscando coches nuevos tipo "turismo-berlina" con motor diesel y 4 puertas se obtienen los datos de 449 coches (obtenido el 10 de noviembre de 2009) cuyo análisis con una hoja de cálculo permite responder a la pregunta planteada en este apartado.

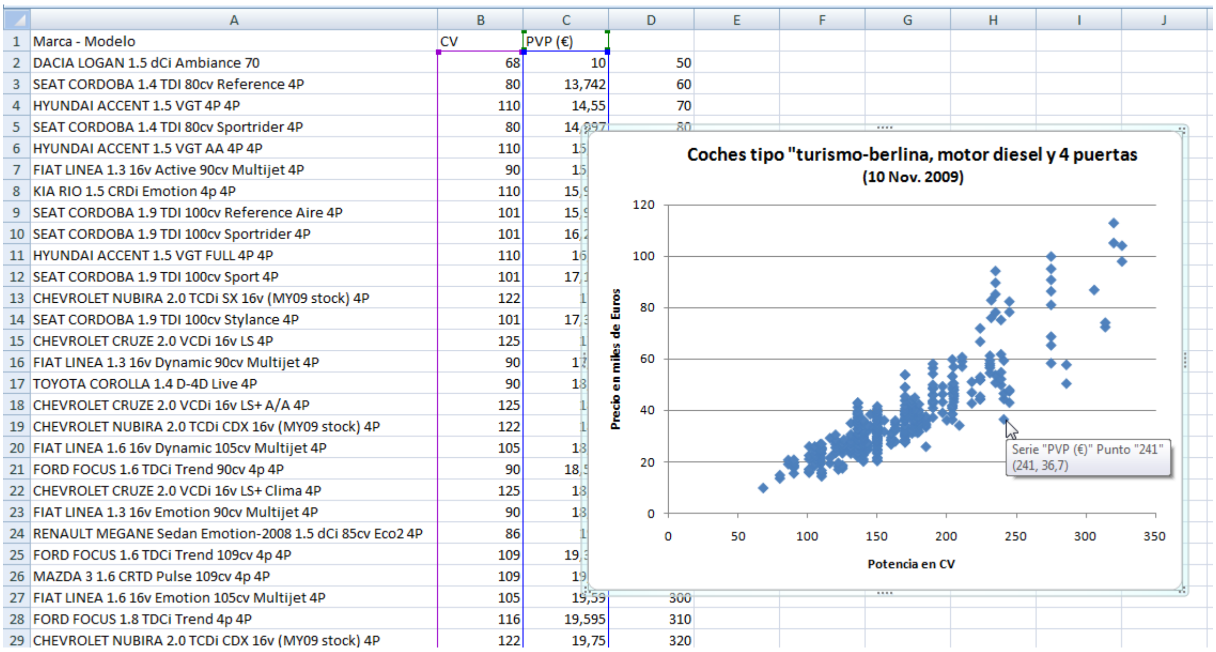


Figura 3: Diagrama bivariante construido con la hoja de cálculo Excel que representa el precio frente a la potencia de un conjunto de coches.

¿Qué se aprende?: Técnicas de análisis gráfico de datos. Uso de la hoja de cálculo para construir gráficos.

Otras actividades: Pueden realizarse investigaciones similares para analizar la relación entre consumo y potencia, o entre consumo y peso del coche. Por supuesto también se pueden realizar con motocicletas e incluso con aviones.

4. Problemas relacionados con la estimación de las características de la población

Estos son problemas típicos: estimar medias, proporciones,… (¿qué proporción de hogares tiene conexión a internet?, ¿qué proporción de votos obtendrá tal partido en las próximas elecciones?). En este apartado se presentan dos casos en los que el objetivo es estimar el tamaño de la población.

4.1. ¿Cuántos peces hay en un lago?

Parece imposible que se pueda responder a esta pregunta, especialmente si el lago es grande y las aguas turbias, pero utilizando métodos razonables (no hace falta vaciar el lago, ni pescar todos los peces, como dicen algunos estudiantes cuando se les pregunta) se puede tener una aproximación suficientemente buena y, lo que también es muy interesante, podemos conocer cuál es la “calidad” de la estimación realizada.

Se trata del método de la pesca y repesca: se capturan *M* peces, se marcan y se devuelven al agua[3], se deja pasar un tiempo en que se supone que los peces marcados se han dispersado por el lago y se capturan otros *C*, de los cuales *R* aparecen marcados. Si *N* es el número total de peces, es razonable considerar que la proporción *M/N* (total de peces marcados respecto al total de peces del lago) será parecida a *R/C* (peces que aparecen marcados en la segunda captura –repesca- respecto al total de peces capturados) y ya podemos despejar *N* para tener una primera aproximación del número de peces que hay en el lago.

$$\frac{M}{N} \cong \frac{R}{C} \quad \rightarrow \quad \hat{N} = \frac{M \cdot C}{R}$$

Por supuesto existen métodos de estimación más precisos, incluso los hay que tienen en cuenta la posible tasa de mortalidad debida a las marcas o la pérdida de ellas. Pero la estadística no se conforma con dar un valor concreto (lo que llamamos “estimación puntual”, más o menos aproximado), sino que trata de dar un intervalo dentro del cual muy probablemente estará el verdadero valor buscado. Cuál es la calidad de la estimación y de qué depende puede indagarse a través de la simulación, mediante *applets* que están disponibles a través de internet o usando una hoja de cálculo.

[3] Esto no es fácil. Hay que hacerlo de forma que la marca no merme las posibilidades de supervivencia y de movilidad del pez, y también debe ser una marca que no desaparezca fácilmente.

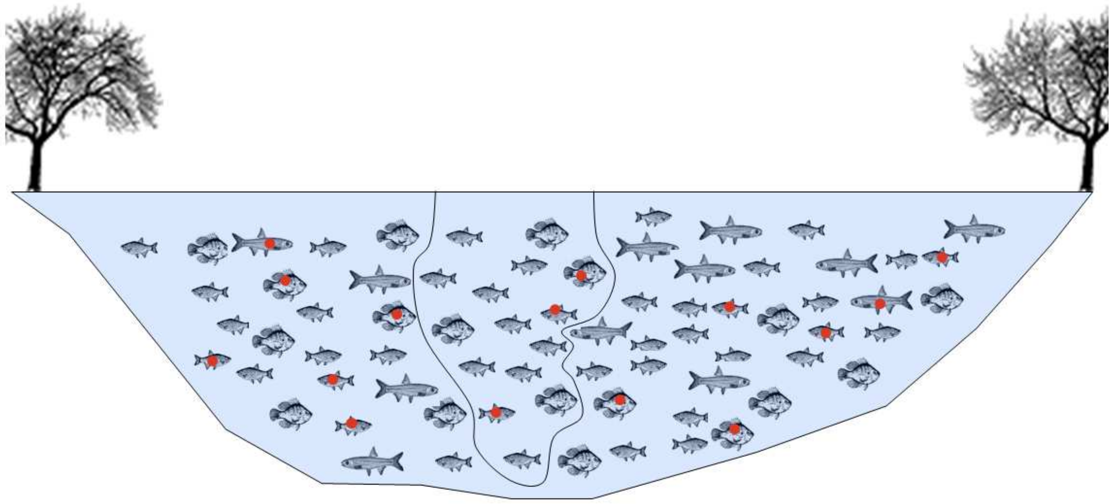


Figura 4: Repesca: dejamos que se dispersen los peces marcados y volvemos a pescar

Por supuesto, esta técnica no sólo sirve para estimar cuantos peces hay en un lago, en general puede servir para estimar la abundancia de una determinada especie en un territorio.

¿Qué se aprende?: Existen técnicas “ingeniosas” que permiten estimar valores que parecen imposibles de conocer. No se pretende acertar el número exacto, pero sí tener un orden de magnitud, que será tanto más preciso cuantos más recursos (número de peces pescados y número de repescados, e incluso número de repescas que se hacen) se destinan a estimarlo. Es posible evaluar la calidad de la estimación realizada.

Otras actividades: ¿Cómo se podría tener una buena estimación de cuantos granos de arroz hay en un kilo si no tuviéramos ningún aparato de medida (en concreto, no se puede pesar ninguna cantidad).

Más información en:
Una buena descripción, en tono de divulgación, se encuentra en el artículo: “*How Many Fish are in the Pond*?” de Roger W. Johnson, que se puede bajar de: http://ts.rsscse.org.uk/gtb/contents.html.
En general, todos los artículos de esta página (selección de los mejores artículos de la revista *Teaching Statistics*) contienen buenas ideas para la enseñanza de la estadística a nivel introductorio.
Muchos ejemplos y ejercicios de matemáticas y estadística aplicados a la ecología se pueden encontrar el libro de los profesores de Universidad Autónoma de Barcelona Josep Piñol y Jordi Martínez-Vilalta: “Ecología con Números”, Ed. Lynx. Contiene un CD con *applets* muy interesantes, que también se pueden bajar de: http://www.ecologiaconnumeros.uab.es/ (Applets de los modelos > Listado de applets > Tema 3. Tamaño y estructura de las poblaciones > Marcaje y recaptura).
Hoja de Excel: http://www-eio.upc.es/~grima/PecesSimulacionExcel.xls
Presentación en Power Point: http://www-eio.upc.es/~grima/Peces_y_Taxis.ppt
Incluye otros temas pero puede ser útil.

4.2. ¿Cuántos taxis hay en una ciudad?

En España lo habitual es que los taxis lleven a la vista un número de licencia (al menos en las grandes ciudades) y que sea un número correlativo desde el 1 hasta un valor igual al número de licencias que existan. El número de licencias es fijo, cuando alguien quiere ser taxista debe comprar la licencia a otro que la desee vender, cambiando el titular de la licencia pero no su número. En estos casos de población numerada no es necesario utilizar el método de la pesca y repesca. Por ejemplo, si μ es la media de una población numerada de forma correlativa siempre ocurre que su número de elementos es igual a $2\mu - 1$ y utilizando la media de la muestra $\bar{x}$ como estimador de la media de la población podemos proponer que el estimador sea $2\bar{x} - 1$. Por ejemplo, si los datos son 16, 28, 45, 48, 68, 72 y 81, como $\bar{x} = 51{,}14$, nuestra estimación podría ser $N = 2 \cdot 51{,}14 - 1 \cong 101$.

Parece un buen método pero tiene un punto débil muy evidente: supongamos que los valores de la muestra son 3, 4, 6 y 15, la media es 7 y por tanto nuestra estimación sería 13, un valor evidentemente falso. Una opción que no presenta este problema es considerar que, por simetría, el número de valores que irán a continuación del último será similar al número de los que hay antes del primero. Esta estrategia también es razonable y nunca dará resultados evidentemente falsos, sin embargo, tiene el inconveniente de que no aprovecha toda la información disponible. La única incógnita es saber cuántos elementos hay a continuación de la última observación y una buena idea es añadirle el promedio que se calcula con los elementos que hay antes del primero, entre el primero y el segundo, entre el segundo y el tercero, etc. Si n es el número de observaciones que se tienen y X_i representa el valor de la observación i-ésima, este promedio será:

$$\frac{(X_1 - 1) + (X_2 - X_1 - 1) + (X_3 - X_2 - 1) + \ldots + (X_n - X_{n-1} - 1)}{n} = \frac{X_n}{n} - 1$$

Y, por tanto, la estimación del número total de elementos queda: $\hat{N} = X_n + \frac{X_n}{n} - 1$

Figura 5: Estimación del número de taxis que hay en Barcelona

Este es un estimador con un comportamiento excelente, con todas las propiedades deseables. Y no solo sirve para contar taxis, también puede servir para estimar el número de participantes en una carrera popular, en la que a cada participante se le da un dorsal con un número correlativo.

¿Qué se aprende?: El método de razonamiento seguido para deducir la expresión del estimador. Que en una situación como ésta es posible realizar una buena estimación con muy poco esfuerzo.

Otras actividades: Se puede practicar en clase construyendo pequeñas tarjetas de cartulina numeradas, del orden de 1000 o 1500, introducirlas en un recipiente y sacando unas pocas deducir cuantas hay. Es relativamente fácil si se utiliza una hoja de Excel y de forma automática se coloca un número en cada celda (hay que cambiar el tamaño, 2x4 cm está bien), a continuación se imprimen y se recortan con una guillotina.
Si se quiere estimar el número de taxis que hay en Barcelona utilizando este método no hace falta que visiten la ciudad (aunque cualquier excusa es buena). Se cita una revista para los taxistas del área metropolitana y hacia el final se incluye un apartado que publica los números de licencia de los taxis que han encontrado objetos perdidos en su vehículo. Esta lista se puede considerar una muestra aleatoria de números de licencia y… ya es muy fácil.

Más información en:
La idea está sacado del artículo "*Estimating the Size of a Population*" de Roger W. Johnson, que se puede bajar del mismo lugar que el comentado para el método de la pesca y repesca: http://ts.rsscse.org.uk/gtb/contents.html.
La presentación en Power Point citada en el apartado anterior también contiene una parte que trata este tema.

5. Problemas de cálculo de probabilidades que despiertan interés

La estadística se apoya en el cálculo de probabilidades para sacar conclusiones pero no creo que sea acertado introducir al principio de los cursos introductorios de estadística unas cuantas lecciones de cálculo de probabilidades ya que desvía el centro de atención que debe tener este tipo de curso y creo que tiene más inconvenientes que ventajas.

De todas formas, también es verdad que este tema puede ser apasionante, que forma parte del contenido obligatorio de muchos cursos de estadística y que se pueden resolver problemas, incluso complicados, de una forma que puede ser divertida y motivadora.

5.1. Coincidencia en las fechas de cumpleaños

En una clase de 30 estudiantes ¿cuál es la probabilidad de que dos o más celebren su cumpleaños el mismo día? Empezamos calculando la probabilidad de que dos personas no hayan nacido el mismo día. La primera no tiene restricciones, ha podido nacer cualquier día del año (365 casos favorables sobre 365 posibles), pero la segunda ha podido nacer cualquier día menos el que ha nacido el primero (364 días favorables sobre 365 posibles):

$$\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}=0{,}9973$$

De forma análoga, la probabilidad de que tres hayan nacido en días distintos será:

$$\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}=0{,}9918$$

Y la probabilidad de que 30 hayan nacido en días distintos:

$$\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\dots\frac{336}{365}=0{,}2937$$

Solo hay dos posibilidades: todos han nacido en días distintos o al menos dos han nacido el mismo día. Luego la probabilidad de que en un grupo de 30 al menos dos hayan nacido el mismo día será:

$$1-0{,}2937=0{,}7063$$

La probabilidad es mayor de lo que intuitivamente se supone. Esta es una carta que tiene en la manga el profesor para impresionar a los alumnos. Con ayuda de una hoja de cálculo se puede construir la curva que relaciona el número de personas y la probabilidad de coincidencia.

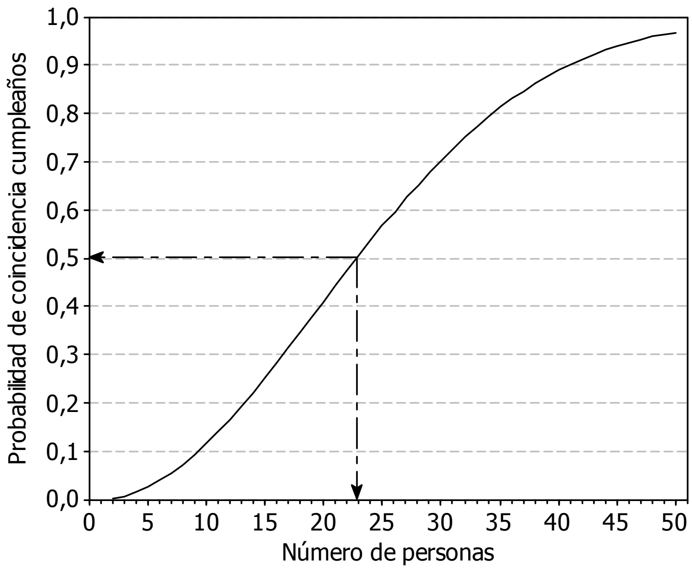


Figura 6: Probabilidad de dos o más personas de un grupo celebren su cumpleaños el mismo día, en función del número de integrantes del grupo

¿Qué se aprende?: Las reglas del cálculo de probabilidades permiten deducir probabilidades que evaluadas de forma intuitiva conducen a resultados erróneos. (Moraleja: las reglas para el cálculo de probabilidades son útiles)

Otras actividades: En un grupo de 23 personas la probabilidad de que dos o más celebren su cumpleaños el mismo día ya es ligeramente mayor del 50% (exactamente del 50,7%). ¿Dónde hay 23 personas?: en un campo de futbol: 11+11+1. En la prensa deportiva (que se puede consultar por internet) es fácil encontrar la alineación de los partidos, y también es fácil encontrar las fechas de

nacimiento de los jugadores (en las páginas web de los clubes o incluso en la wikipedia). Si se elije una jornada de la primera división en España, hay 20 equipos y se juegan 10 partidos, casi seguro que en algún partido dos personas de las que estaban en el campo celebraban su cumpleaños el mismo día.
Otra actividad puede ser estimar estas probabilidades por simulación con una hoja de cálculo http://www-eio.upc.es/~grima/SimulacionCumpleaños.xls (Excel 2007).

5.2. Lotería 6/49: ¿Cuál es la probabilidad de que una misma combinación ganadora salga dos veces?

Una persona juega toda su vida adulta (pongamos 50 años) a la lotería primitiva, si se realizan dos sorteos por semana, ¿cuál es la probabilidad de que durante ese periodo salga más de una vez la misma combinación ganadora?

Aunque hay otras variantes, lo habitual es elegir 6 números del 1 al 49, y hay 13.983.816 formas de hacerlo (son combinaciones de 49 elementos tomados de 6 en 6) de las cuales solo una es la ganadora.

Suponiendo que esta persona juegue 100 veces al año, jugará 5000 veces a lo largo de su vida y resulta que el problema planteado es análogo al del cumpleaños, pero es como si tuviéramos un año con 13.983.816 días y 5000 personas cada una de las cuales ha nacido uno de esos días ¿Cuál es la probabilidad de que dos o más hayan nacido el mismo día? Aplicado las fórmulas que hemos visto (una hoja de cálculo es imprescindible) resulta que esta probabilidad es del 59%. Luego no es raro que, si lleva bien las cuentas, descubra que ha tocado dos veces la misma combinación.

¿Qué se aprende?: Como en el caso anterior, que a veces la intuición falla al evaluar probabilidades. También se tiene un ejemplo de problema que, aunque aparentemente es muy distinto al anterior, en esencia es el mismo y se resuelven de la misma forma.

Otras actividades: En España se empezó a realizar este tipo de sorteo en 1985. En http://www.onlae.es/primitiva/historicoTodosLosSorteos.aspx se pueden consultar todas las combinaciones ganadoras hay hoy ¿Ha salido alguna vez repetida? Buscarlo es laborioso aunque con una hoja de cálculo se puede hacer de forma eficiente. La respuesta es sí, el 22 de agosto de 2002 y el 10 de diciembre de 2009 salió la misma combinación ganadora.

6. Miscelánea

Existen muchos casos prácticos que se pueden utilizar para enseñar y motivar sobre las posibilidades de la estadística. En este apartado se comenta uno de ellos, el primero que aparece en un libro muy conocido, y también las posibilidades de usar la prensa como fuente de material para la discusión y el aprendizaje.

6.1. La vacuna contra la poliomielitis

La posibilidad de inmunizarse frente a una enfermedad infecciosa seguramente ha sido uno de los descubrimientos que más impacto ha tenido en la mejora de la salud y en la esperanza de vida. Pero cada enfermedad requiere su vacuna específica, y dar con ella no siempre es fácil. Existen varios procedimientos para prepararlas y aunque en experimentos con animales, o con humanos a pequeña escala, se pueden tener bastantes pistas sobre su nivel de eficacia, antes de dar una vacuna por buena y recomendar su uso masivo es necesario estar muy seguros de que sus beneficios compensarán los costos y los riesgos que inevitablemente se asumen.

En 1954 se realizó una prueba a gran escala para evaluar la eficacia de una vacuna contra la poliomielitis (la vacuna Salk, desarrollada por el epidemiólogo Jonas Salk) y el proceso que se siguió está muy bien explicado en el libro de J. Tanur et al.: "La estadística: una guía de lo desconocido"[4]. Se justifica la necesidad de realizar una prueba a gran escala, se comentan las diferentes alternativas que se consideraron en el diseño de la recogida de los datos y las dificultades encontradas al llevarlo a cabo, se justifica la necesidad de tener un grupo de control y aparecen conceptos como "control por placebo" o técnica de "doble ciego". Está escrito en un tono de divulgación, perfectamente al alcance de un estudiante de enseñanza secundaria, y pone de manifiesto el papel clave que juega la estadística en este tipo de estudios. Un aspecto importante es que al final, de éste y de todos los casos que se presentan, se incluye un cuestionario sobre el contenido del caso.

Figura 7: Libros que contienen casos prácticos sobre el uso de la estadística (los dos de arriba son el mismo, en inglés y en español). Ver bibliografía

[4]Capítulo 1: "El mayor experimento de la historia en el campo de la sanidad pública: la gran prueba de la vacuna Salk contra la poliomielitis (1954)" escrito por el profesor Paul Meier de la Universidad de Chicago.

Lamentablemente, la versión española del libro está agotada, aunque seguramente es fácil encontrarlo en las bibliotecas universitarias. En inglés existe un nuevo volumen, editado con mismo espíritu que el primero, y que contiene nuevos casos. En la Facultad de Matemáticas y Estadística de la UPC también editamos un libro de este estilo que puede ser descargado de http://upcommons.upc.edu/e-prints/handle/2117/7915 .

6.2. La estadística en la prensa (y en la publicidad)

A veces en la prensa se encuentran errores o malos usos de la estadística y esos recortes se pueden usar para, de una forma que puede ser divertida, poner de manifiesto los errores a evitar. Creo que lo mejor es que el profesor tenga su propio dosier de prensa local con noticias o titulares que tengan interés a efectos didácticos. Hay que evitar transmitir la idea de que "la prensa nos engaña" (poco se lee…) seguramente en todas partes hay prensa más o menos seria, y cualquiera se puede equivocar. En el dosier, además de muestras de errores debería haber muestras de estudios o gráficos bien hechos, que resaltan de forma clara la información que contienen los datos.


Alerta por la desprotección infantil ante videojuegos violentos

Amnistía Internacional dice que el sector no está bien regulado y pide al Gobierno que intervenga

El 65% de los menores de 10 a 17 años admiten que acceden a programas para mayores de edad

Aun con premisas tan poco edificantes, los adultos pueden hacer lo que quieran. «El problema está en que el 50% de los niños y el 15% de las niñas de entre 10 y 17 años reconocen usar habitualmente videojuegos destinados a mayores de 18 años», dijo Baltà. Estos porcentajes

Figura 8: Ojo con las operaciones con porcentajes. Tomado de: Sara Fontdecaba y María Montón: "Estadística en la prensa. Estudio crítico" (ver referencias)

¿Qué se aprende?: La estadística es omnipresente en los medios de comunicación, a veces se hace un buen uso y otras no tanto. A veces las apariencias engañan y hay que estar atento.

Otras actividades: Los mismos estudiantes pueden participar aportando recortes de prensa o de publicidad que se pueden comentar.

Más información en:
La página web: www.malaprensa.com contiene ejemplos de gráficos poco afortunados y ejemplos de mala interpretación de estadísticas
Sara Fontdecaba y María Montón: "Estadística en la prensa. Estudio crítico" en "Estadística en Acción" publicado por la Facultad de Matemáticas y Estadística de la UPC. Puede descargarse el libro completo. Este es el capítulo 15.

Bibliografía

Grima. P. (editor) (2008). *Estadística en acción. Publicado por la Facultad de Matemáticas y Estadística de la UPC. Barcelona, España.*

Huff, Darell (1993). *How to Lie with Statistics.* Editorial W. W. Norton & Company, USA

Johnson, R.W. (1994). *Estimating the Size of a Population. Teaching Statistics. Volume 16, Issue 2, pages 50–52.*

Johnson, R.W. (1996). *How Many Fish are in the Pond?. Teaching Statistics. Volume 18, Issue 1, pages 2-5.*

Moore, David S. (2007). *Introduction to the Practice of Statistics.* Editorial W. H. Freeman, USA.

Nightingale, F. *et al*. (1999). *Florence Nightingale: Measuring Hospital Care Outcomes.* Editado por Joint Commission on Accreditation of Healthcare.

Peck, R. *et al*. (2005). *Statistics: A guide to the unknown.* Editorial Duxbury Press. USA.

Smith, Gary (1997). *Introduction To Statistical Reasoning.* Editorial Mcgraw-Hill College, USA.

Tanur, J.M. *et al*. (1992). *La Estadística: Una guía de lo desconocido*. Editorial Alianza. Madrid, España. (Versión original: *Statistics: A guide to the unknown.* Editorial Holden Day, USA.

Tufte, E.R. (1997). *Visual Explanations*. Editorial Graphics Press, USA.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 27-43
ISSN: 1815-0640

MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

La resolución de situaciones problema que involucran conceptos estadísticos: un estudio que articula datos cognitivos, género e implicaciones educativas[1]

Yilton Riascos Forero; María Helena Fávero

Resumen

La resolución de problemas estadísticos evalúa la lectura, análisis e inferencia sobre la distribución de dados y los conceptos estadísticos. Así, ofrece subsidios para la Psicología cognitiva y educativa. En este estudio se propuso un problema sobre media, mediana y moda para 137 estudiantes de ambos sexos, de quinta y octava serie de enseñanza fundamental, de una escuela de Brasilia, DF; cuyas edades promedios fueron 10,8 y 13,7, respectivamente. La estrategia más utilizada fue sumar los valores; pocos utilizaron división y tablas de frecuencias; todas las alumnas de 5ª serie desarrollaron alguna estrategia; 18,4% de estudiantes hombres no respondieron; esto se invirtió para la 8ª serie: 27,9% de estudiantes mujeres y 10% de estudiantes hombres no respondieron. Se concluye sobre la importancia de la estadística en el currículo de matemática de enseñanza fundamental; la importancia de considerar el género en la mediación de diferentes áreas de conocimiento; el papel de la Psicología educativa.

Abstract

We studied the relationship between reading, analysing and making inferences, mathematical knowledge and gender. By presenting a problem regarding mean, median and mode to 137 students of both sexes between the ages of 10.8 and 13.7 in the 5th and 8th grades of a public school in Brasília, Brazil, we found that: the majority used addition and avoided division and frequency tables; 100% of female students and 81.6% of males in the 5th grade developed a strategy; 27.9% of female students and 10% of males in the 8th grade did not answer. We defend the teaching of statistics in primary school, that gender be taken into account in mediating knowledge and the role of Educational Psychology.

Resumo

A resolução de problemas estatísticos avalia a leitura, análise e inferência sobre a distribuição de dados e os conceitos estatísticos. Assim oferece subsídios para a Psicologia cognitiva e educativa. Neste estudo propusemos um problema sobre média, mediana e moda a 137 estudantes de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental, com idade média de 10,8 e 13,7, respectivamente, de ambos os sexos, de uma escola pública de Brasília, DF, Brasil. A estratégia mais utilizada foi somar os valores; poucos utilizaram a divisão e as tabelas de freqüência; todas as estudantes de 5ª série desenvolveram uma estratégia; 18,4% do sexo masculino não responderam; isto se inverteu para a 8ª série: 27,9% do sexo feminino e 10 % do masculino não responderam; Se conclui sobre a importância da estatística no currículo de matemática do ensino fundamental; a importância de considerar o gênero na mediação de diferentes áreas do conhecimento; papel da Psicologia Educacional.

[1] Este estudio se desarrolló dentro del Proyecto de Investigación – Las relaciones de los significados de género en al construcción y en la mediación del conocimiento matemático, coordinado por la Profa. Dra. Maria Helena Fávero (Universidad de Brasília), con el apoyo del Consejo Nacional del desarrollo científico y tecnológico. CNPq.

1. Introducción

La literatura internacional sobre Educación Matemática y sobre Educación Estadística tienen señalados tres aspectos de consenso: 1/ la importancia de la enseñanza de la estadística dentro de la enseñanza básica, como instrumento para el desarrollo de la capacidad de leer, analizar y hacer inferencias a partir de la distribución de los datos; 2/ la defensa de que este contenido integre el currículo de matemáticas dentro de la enseñanza básica y 3/ la necesidad de que los profesores y futuros profesores tengan un conocimiento adecuado sobre los objetos matemáticos básicos que subyacen la idea de distribución, sobre todo en lo que se refiere a los gráficos estadísticos, medidas de posición central y de dispersión (ver por ejemplo, Watson & Morritz, 1999; Watson, 2001; Bakker, 2004; Espinel, 2007; Shaughnessy, 2007).

Los estudios en esta línea de investigación cubren una fase etaria muy amplia, que va desde los 8 a los 22 años y se enfocan principalmente en las dificultades que los estudiantes encuentran en la comprensión de los conceptos estadísticos.

Los primeros estudios datan de los años 1980 y evidencian que los errores presentados en la resolución de problemas involucran conceptos estadísticos elementales relacionados con el desarrollo de algunas propiedades matemáticas del concepto de media aritmética, con creencias equivocadas y conocimientos ya adquiridos que operan como obstáculos (Pollatsek, Lima & Well, 1981; Mevarech, 1983).

Los estudios de los años 1990 se apoyan en la perspectiva cognitiva para explicar la evolución de la comprensión de los conceptos estadísticos con los siguientes presupuestos: 1/ la comprensión de que un determinado concepto pasa por diferentes estadios, tal como los manifestados en las respuestas obtenidas en las situaciones problemas aquí propuestas; 2/ la complejidad de los raciocinios que están relacionados con el estadio en el cual el sujeto que dio la respuesta se encuentra en ese momento. Se trata, por tanto, de una perspectiva piagetiana y el objetivo de este estudio era clasificar las respuestas dadas a las situaciones problemas, de acuerdo con una jerarquía que refleja el dominio del contenido de las mismas.

Estos estudios también resaltaron el interés relacionado con la formación de profesores y futuros profesores de matemáticas, en el sentido expuesto en el primer párrafo.

Los estudios de 2000 en adelante, han enfatizado el método longitudinal complementado con entrevistas y procurando explicar la evolución de los esquemas de pensamiento asociados a los niveles de respuesta encontradas en los estudios enfocados en los conceptos estadísticos (Watson & Morritz, 2000, por ejemplo).

Como se sabe, uno de los tipos más frecuentes de análisis estadístico es la comparación de dos distribuciones. Por esto, varios autores se han enfocado en la manera como los estudiantes realizan este tipo de actividades. Los resultados han mostrado que, de manera general, a pesar de la comparación de distribuciones, que formalmente se da a partir de las medidas de posición central y de la dispersión de las variables, los estudiantes no utilizan la media, ni de manera intuitiva, para comparar conjuntos de datos. En lugar de esto, lo más común es que ellos se centren en las frecuencias absolutas y no en las relativas para hacer las comparaciones, incluso frente a muestras de tamaños muy diferentes.

De manera general, los estudios han evidenciado que detrás de la idea de distribución subyacen algunos objetos matemáticos básicos, sobre todo cuando se trata de gráficos estadísticos, medidas de posición central y de dispersión.

En este estudio, procuramos evidenciar la relación entre la capacidad de leer, analizar y hacer inferencias a partir de distribuciones de datos y el conocimiento matemático escolar previo, teniendo en cuenta un corte transversal (5ª y 8ª series). También intentamos obtener datos sobre esta relación y el género de los estudiantes.

2. Método

Participaron de este estudio 137 estudiantes de ambos sexos, de una escuela de la red pública de Brasilia, DF, 64 de quinta serie con edad promedio 10,7±0,7 y 73 de octava serie de enseñanza fundamental con edad promedio 13,7±0,7; las distribuciones de edad y género para cada serie se presentan en las tablas I y II.

Tabla I. Distribución de edad de niños de 5ª Serie, por Sexo y Total

Edad	Mujeres		Hombres		Total	
10	13	48,1%	9	24,3%	22	34,4%
11	11	40,7%	21	56,8%	32	50,0%
12	3	11,1%	7	18,9%	10	15,6%
Total	27	100%	37	100%	64	100%

Tabla II. Distribución de edad de niños de 8ª Serie, por Sexo y Total

Edad	Mujeres		Hombres		Total	
13	22	51,2%	10	37,0%	32	45,7%
14	16	37,2%	14	51,9%	30	42,9%
15	5	11,6%	3	11,1%	8	11,4%
Total	43	100%	27	100%	70*	100%

*3 niños omitieron información acerca de su edad

Se propuso la misma situación problema a todos los estudiantes: la comparación del contenido de dos diferentes marcas de cajas de fósforos, digitado en hojas de papel A4, involucrando las medidas de posición central – Moda, Mediana y Media Aritmética– explicitadas en 3 (tres) casos de muestras ficticias, que de aquí en adelante denominaremos tareas.

En cada una de las 3 (tres) tareas se buscó que los estudiantes determinaran, a partir de sus criterios y cálculos, la marca de fósforos (X ó Y) que, según los datos presentados tenían más contenido en sus cajas, de acuerdo con la siguiente situación problema: *"Las empresas X e Y, fabrican fósforos que venden en cajitas. Todas las cajas presentan una etiqueta que indica 40 fósforos de contenido. Se sabe, por observación y conteo, que algunas cajas no siempre traen el mismo número de fósforos. Algunas veces ellas presentan una mayor o menor cantidad de fósforos; otras veces presentan efectivamente la cantidad* *indicada (40)".* Esta situación era seguida de las siguiente información, pregunta y solicitud:

> *"Para cada caso e independiente uno de los otros, responda las siguientes preguntas: ¿Cuál marca (X ó Y) cree usted que trae más fósforos en sus cajas? ¿Por qué cree que es esta marca? ¿Cómo procedió para escoger esta marca? Por favor responda en los cuadros inferiores y en caso de hacer alguna anotación o cálculo, no lo borre".*

La variación de la distribución de los datos en cada tarea tuvo la intensión de favorecer la utilización de uno de los indicadores de tendencia central (Moda, Mediana y Media Aritmética) como base de la elaboración de la estrategia de solución de la misma. Las tareas de la Moda y la Mediana contenían un total de 20 datos para cada marca, presentados en tablas, mientras que la tarea de la Media Aritmética presentó 20 datos para una marca y 30 datos para la otra, presentados igualmente en tablas.

La estructura de la tarea de la Moda correspondió a la de un proceso para determinar, en cada marca, el valor de contenido de las cajas de fósforos, que presentaba mayor frecuencia absoluta, realizando posteriormente la comparación de estos valores, entre marcas, para determinar aquella que presentaba la mayor cantidad de fósforos en sus cajas.

Los datos de la tarea, junto a una representación gráfica[2] puede observarse a continuación:

X		
39	37	40
37	40	38
41	39	39
37	37	38
40	39	39
39	40	39
41	39	

Y		
40	39	37
40	40	38
39	38	41
41	40	39
38	39	38
37	40	40
37	40	

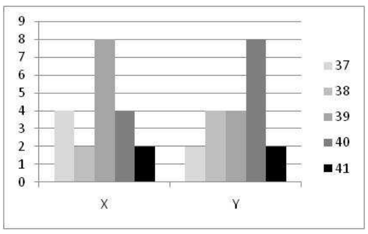


Fig. 1: Distribución de valores y gráfico de los datos de la tarea de la Moda

Considerando la Moda como el indicador de tendencia a calcular para resolver la tarea, las exigencias para su solución serían:

1. Identificar las marcas de fósforos como dos categorías diferentes (X e Y).
2. En cada marca, identificar los diferentes valores de cantidad de contenido de fósforos reportados en las listas de datos (37, 38, 39, 40, 41).
3. Calcular la frecuencia absoluta de cada uno de los diferentes valores reportados en las tablas de datos (X: 37 hay 4, 38 hay 2, 39 hay 8, 40 hay 4, 41 hay 2; Y: 37 hay 2, 38 hay 4, 39 hay 4, 40 hay 8, 41 hay 2).
4. Encontrar, en cada marca, el máximo de las frecuencias absolutas calculadas (X: 8; Y: 8).
5. Identificar, en cada marca, el valor de cantidad de contenido de fósforos asociado al máximo de las frecuencias absolutas encontrado (X: 39; Y: 40).

[2] Los gráficos que aquí se observen, solo son referentes para que los lectores puedan hacerse una idea de la forma de la distribución de los datos presentados en cada tarea y no fueron presentados a los niños evaluados.

6. Comparar los valores de contenido determinados en cada una de las marcas y escoger el mayor de ellos (Y: 40).
7. Seleccionar la marca a la cual pertenece el mayor de los valores de contenido escogido, como aquella que tiene las cajas con mayor contenido de fósforos (Y).

La estructura de la tarea de la Mediana correspondió a la del proceso de determinar el valor ubicado en la mitad de cada conjunto de datos ordenados, realizando posteriormente la comparación de estos valores para encontrar la marca que presentó la mayor cantidad de fósforos por caja.

Los datos, junto a una representación gráfica puede observarse a continuación:

Y		
41	37	38
37	38	41
40	38	40
38	40	37
38	41	37
38	40	41
40	41	

X		
37	41	38
40	38	40
38	40	39
41	41	38
39	37	40
41	38	41
38	40	

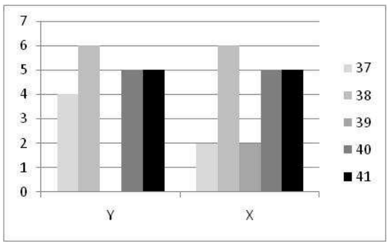


Fig. 2: Distribución de valores y gráfico de los datos de la tarea de la Mediana

Bajo estas consideraciones, las exigencias de la tarea, para alcanzar una solución a partir de la presentación de las tablas de datos serían:

1. Identificar las marcas de fósforos como dos categorías diferentes (X e Y)
2. En cada marca, identificar los diferentes valores de cantidad de contenido de fósforos reportados en las listas (37, 38, 39, 40 y 41)
3. Ordenar de manera consecutiva, creciente o decreciente, en cada marca, todos los valores de cantidad de contenido de fósforos. Esto puede hacerse calculando las frecuencias absolutas de los valores de cantidad de contenido (X: 37 hay 2, 38 hay 6, 39 hay 2, 40 hay 5, 41 hay 5; Y: 37 hay 4, 38 hay 6, 39 no hay, 40 hay 5, 41 hay 5).
4. Determinar, en cada marca, el valor de cantidad de contenido de fósforos ubicado en la mitad de la colección, para lo cual se debe:
   - 4.1. Determinar el total de elementos de cada marca (X: 20; Y: 20).
   - 4.2. Si el número total de elementos en la marca es impar, determinar la posición central de la colección, a través de calcular el cociente del número total de elementos incrementado en una unidad, y dos. Seleccionar como valor el dato ubicado en esa posición. (No aplica para este caso)
   - 4.3. Si el número total de elementos en la marca es par, determinar el valor a través de calcular la semisuma de los datos centrales ubicados, el primero, en la posición determinada por la mitad del número total de elementos, y el segundo, en la posición siguiente; es decir la determinada por la mitad del número total de elementos más una unidad. (X: 39,5; Y: 39)
5. Comparar los valores de contenido determinados en cada una de las marcas y escoger el mayor de ellos. (X: 39,5)

6. Seleccionar la marca, a la cual pertenece el mayor de los valores de contenido escogido, como aquella que tiene las cajas con mayor contenido de fósforos por caja.

La estructura de la tarea de la Media Aritmética correspondió a la del proceso de determinar, en cada marca, el valor de cantidad de contenido de fósforos tal que sumado *n* veces[3] dé como resultado la suma total de los valores de contenido observados; esto se consigue a partir de calcular, en cada marca, la división de la suma de los datos por el número total de ellos; realizando posteriormente la comparación de estos valores para encontrar la marca que presenta la mayor cantidad de fósforos en sus cajas. Los datos, junto a una representación gráfica se observan a continuación.

X			
39	39	39	39
39	41	40	37
39	39	40	40
40	39	39	39
37	38	39	37
37	41	41	38
40	40	38	37
	39	37	

Y		
39	41	40
37	38	40
39	41	39
39	38	39
41	39	38
39	37	38
39	41	

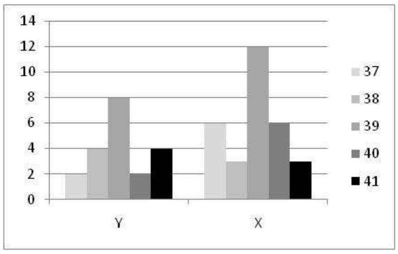


Fig. 3: Distribución de valores y gráfico de los datos de la tarea de la Media Aritmética

Al igual que en los casos anteriores, suponiendo la Media Aritmética como la medida de tendencia central a través de la cual sería posible resolver la situación, las exigencias de la tarea a partir de la presentación de las tablas de datos serían:

1. Identificar las marcas de fósforos como dos categorías diferentes (X e Y).
2. Para cada marca, calcular la suma de los valores de contenido de fósforos de todos elementos (X: 1167 e Y: 782).
3. Contar, en cada marca, el número de elementos (X: 30 e Y: 20).
4. Calcular el cociente entre la suma de los valores de contenido y el total de elementos de cada marca (X: 38,9; Y: 39,1).
5. Comparar los valores determinados en cada una de las marcas y escoger el mayor de ellos (Y: 39,1).
6. Seleccionar la marca a la cual pertenece el mayor de los valores de contenido escogido, como aquella que tiene las cajas con mayor contenido de fósforos por caja.

3. Resultados y discusión

Como ya dijimos, se recopilaron 64 pruebas de estudiantes de 5ª serie y 73 pruebas de estudiantes de 8ª serie. El procesamiento para analizar los datos, se dividió por serie y por tareas.

Inicialmente, el conjunto de evaluaciones se organizó teniendo en cuenta el género y el número de tareas que cada estudiante, hombre y mujer, procuró resolver. Así, se puede observar que la mayoría de estudiantes de 5ª serie presentó intento de solución en las tres tareas, siendo superior este porcentaje en

[3] Esta cantidad *n*, corresponde al total de datos de cada marca

estudiantes mujeres que en estudiantes hombres. Aunque las distribuciones de las soluciones son muy parecidas, resalta el hecho que en los estudiantes de hombres, el 18,9% no resolvió ninguna tarea, frente al 0,0% de las estudiantes mujeres. Las distribuciones completas pueden observarse en la Tabla II, a bajo.

Tabla III. Distribución porcentual del número de tareas que intentan solucionar los estudiantes de 5ª Serie, según sexo

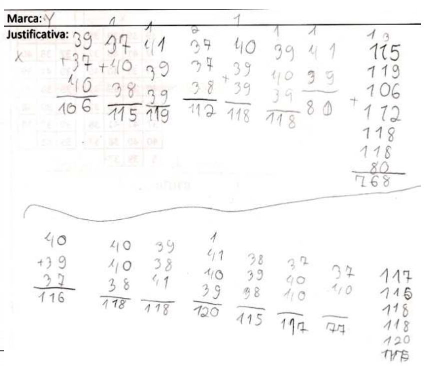
	Intento de solución	
Total Tareas	**Hombres**	**Mujeres**
0	18,9%	0,0%
1	10,8%	18,5%
2	8,1%	3,7%
3	62,2%	77,8%
Total	100%	100%

El conjunto de datos, considerando todos los estudiantes de la 5ª serie, evidenció en primer lugar que la gran mayoría intenta resolver la primera tarea (Moda). El análisis de las estrategias utilizadas en la solución de las tres tareas presentadas evidencio el desarrollo progresivo y creciente de estrategias, encontrándose en la primera tarea (Moda), 4 (cuatro) categorías, y en la segunda y la tercera tareas (Mediana y Media Aritmética) 5 (cinco) categorías, incluyendo en cada caso las 4 categorías iniciales.

Se pudieron identificar 6 categorías distintas utilizadas por los estudiantes de la 5ª serie en la solución de las tres tareas.

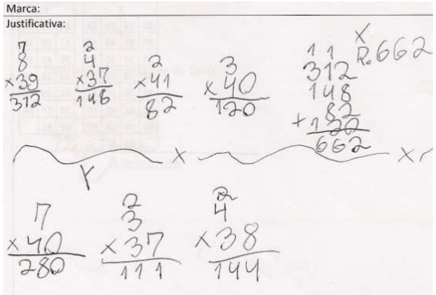
A continuación se describen las 6 categorías de estrategias construidas. Aunque no en todas las estrategias se logra evidenciar la secuencia ejecutada, cada categoría permitió establecer un tipo solución a la tarea, así:

1. Suma: Está conformada por las estrategias en las cuales se presenta una organización en columna de, la totalidad o parte de, los datos para calcular un indicador de cantidad (Suma Total) que permitiera realizar la comparación de los grupos y tomar la decisión por una de las marcas. Algunos ejemplos observados son las siguientes:

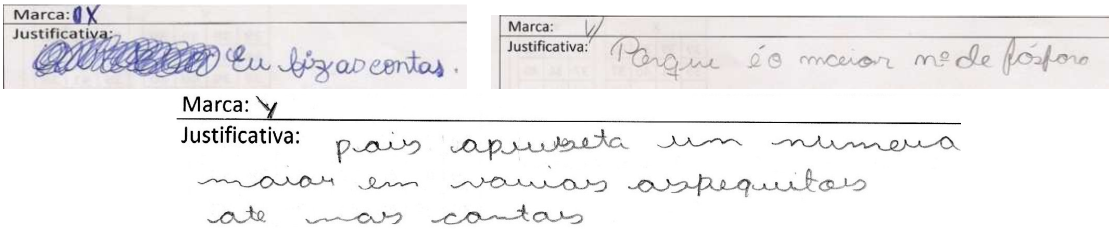


2. Multiplicación: Se incluyen aquí, aquellas estrategias en las que aparecen relacionados los distintos valores presentados en la lista de datos, junto con la cantidad que de ellos se encontró, calculando al final una suma de los productos.

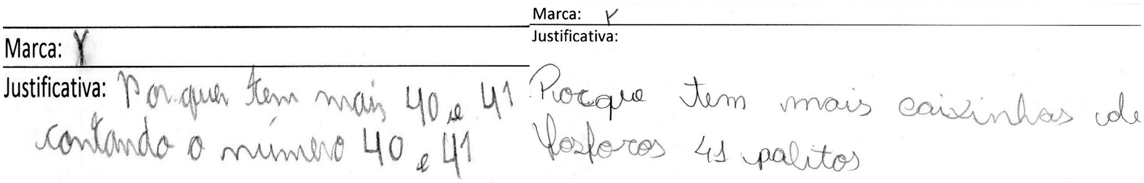
Podemos decir que el objetivo de las estrategias de esta categoría es igual al de las incluidas en la categoría anterior. Un ejemplo de esta estrategia es el siguiente:



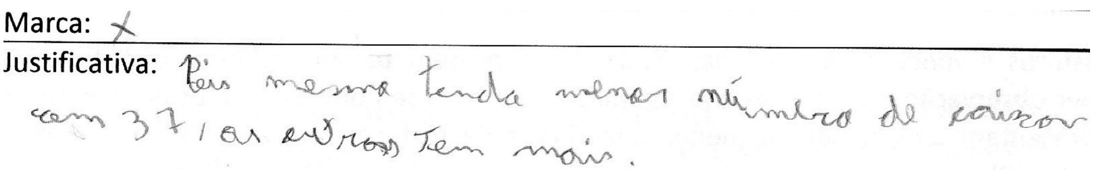
3. Discurso Explicativo: aparecen aquellas estrategias que presentan textos que los estudiantes utilizaron como argumentos para sustentar su decisión, con la particularidad que no fue posible evidenciar, en ninguno de los casos, existencia de hechos que soportaran el discurso, como se observa en los ejemplos siguientes.



4. Proporcionalidad Directa: se encuentran aquí, aquellas estrategias a través de las cuales los estudiantes escogieron la marca que presenta el mayor valor con la mayor frecuencia o aquella que, en su criterio, presentaba mayor cantidad de valores de contenido más altos. A continuación se presentan ejemplos:



5. Proporcionalidad Inversa: corresponde a aquellos procesos en los cuales los estudiantes escogieron la marca, a partir de comparar los valores de cantidad de contenido de fósforos más pequeños y con menor frecuencia. Esta estrategia se evidenció en las soluciones presentadas al resolver la tarea de la Mediana. Un ejemplo se observa en seguida.



6. Cantidad de Datos: considera aquellos casos en los cuales, en la tarea de la Media Aritmética, la estrategia se base en escoger la marca a partir de la comparación de la cantidad de datos que se presentaban en las listas, un ejemplo se observa a continuación:

Marca: X

Justificativa: Porque a marca X contém mais números e números altos assim a marca Y não poderia alcançar a X

X			
39	39	39	39
39	41	40	37
39	39	40	40
40	39	39	39
37	38	39	37
37	41	41	38
40	40	38	37
	39	37	

Y		
39	41	40
37	38	40
39	41	39
39	38	39
41	39	38
39	37	38
39	41	

Es de notar que aquellos estudiantes que utilizaron estrategias clasificadas en la tercera categoría, no presentaron ningún tipo de cálculo matemático que acompañara su texto escrito, de otro lado, los estudiantes que implementaron otras estrategias, algunos utilizaron argumento textual en su respuesta. En la mayoría de estos últimos casos se observan errores en los cálculos realizados, así como el desarrollo de procesos de forma inconclusa. Las distribuciones de frecuencias, por género, de la clasificación de las estrategias en las categorías de solución identificadas para los resultados presentados en cada una de las tres tareas, por los niños de la 5ª serie se muestran a continuación en las tablas IV, V y VI.

Tabla IV. Distribución de frecuencias de las estrategias utilizadas en la solución de la tarea de la Moda, por género, para los estudiantes de 5ª serie

Tarea de la Moda			
	Estrategia	**Hombres**	**Mujeres**
1	Suma	31,3%	44,4%
2	Multiplicación	3,1%	14,8%
3	Discurso explicativo	53,1%	25,9%
4	Proporcionalidad Directa	12,5%	14,8%
		100%	100%

Tabla V. Distribución de frecuencias de las estrategias utilizadas en la solución de la tarea de la Mediana, por género, para los estudiantes de 5ª serie

Tarea de la Mediana			
	Estrategia	**Hombres**	**Mujeres**
1	Suma	16,0%	28,0%
2	Multiplicación	-	12,0%
3	Discurso explicativo	80,0%	52,0%
4	Proporcionalidad Directa	4,0%	4,0%
5	Proporcionalidad Inversa	-	4,0%
		100%	100%

Tabla VI. Distribución de frecuencias de las estrategias utilizadas en la solución de la tarea de la Media Aritmética, por género, para los estudiantes de 5ª serie

Tarea de la Media Aritmética			
	Estrategia	**Hombres**	**Mujeres**
1	Suma	13,0%	17,3%
2	Multiplicación	-	8,7%
3	Discurso explicativo	52,2%	30,4%
4	Proporcionalidad Directa	4,3%	13,0%
6	Cantidad de Datos	30,4%	30,4%
		100%	100%

En las distribuciones de frecuencias de los resultados de los estudiantes hombres, las estrategias más utilizadas, en todas las tareas, fueron clasificadas en la categoría de Discurso Explicativo (53,1%; 80,0% y 52,2% respectivamente), mientras que en el caso de las estudiantes mujeres, ésta categoría sobresale en la segunda tarea (52,0%), mientras que en la primera tarea es la categoría de la Suma (44,4%) y en la última aparecen dos categorías: Discurso Explicativo y Cantidad de Datos, con el 30,4% cada una.

Considerando las tablas IV, V y VI, y las exigencias de cada una de las tres tareas, como se describió antes, podemos decir que las 6 categorías utilizadas para clasificar las estrategias utilizadas por los estudiantes de la 5ª serie en la solución de cada una de las tres tareas, muestran que éstas no respondieron a las exigencias de las mismas. Al parecer, los estudiantes de la 5ª serie evitaron los algoritmos requeridos, sobretodo el de la división y el de la ordenación de los datos. Este hecho es interesante para nuestro estudio, una vez que, como dijimos antes, una de nuestras intensiones era evidenciar la relación entre la capacidad de leer, analizar y hacer inferencias a partir de distribuciones de datos y el conocimiento matemático escolar previo.

Para el caso de los estudiantes de la 8ª serie, la distribución de los resultados de las tentativas de solución de las tareas por género, se pudo observar que el porcentaje de estudiantes mujeres que no responden, supera significativamente el de estudiantes hombres, lo que resulta contrario al resultado observado en el caso de los estudiantes de 5ª serie. Como se observó en éstos últimos, la mayoría de los estudiantes de la 8ª serie igualmente intentan resolver todas las tareas, las distribuciones por género se presentan en la tabla VII a continuación.

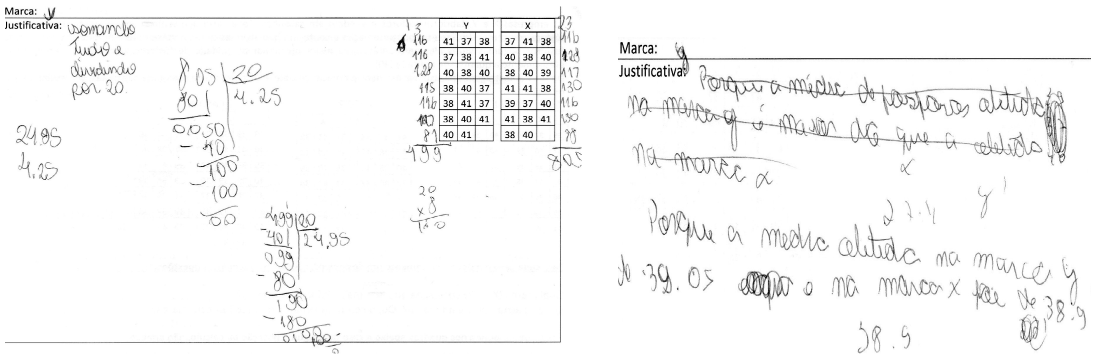
Tabla VII. Distribución porcentual del número de tareas que intentan solucionar los estudiantes de 8ª Serie, según sexo

Total Tareas	Intento de solución	
	Hombres	**Mujeres**
0	10,0%	25,6%
1	0,0%	2,3%
2	13,3%	0,0%
3	76,7%	72,1%
Total	100%	100%

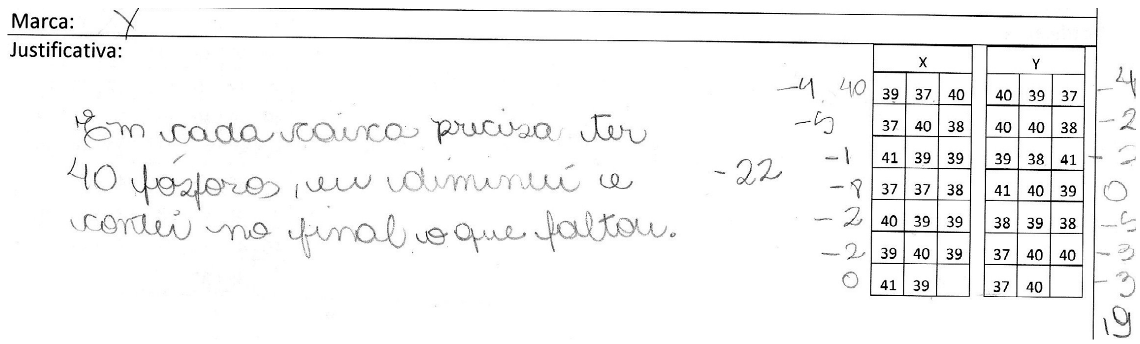
Las estrategias elaboradas por los estudiantes de esta serie, fueron clasificadas en 9 categorías, las cuales incluyeron las 6 observadas en las estrategias utilizadas por los estudiantes de la 5ª serie en su solución.

Por ello, se presentará la descripción de las tres categorías de estrategias restantes.

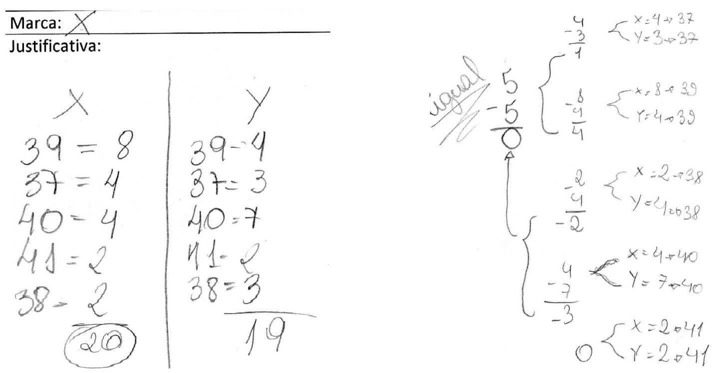
7. Suma y División (Media Aritmética): Quedan aquí aquellas estrategias en las que se presentaron algoritmos que involucraban la suma de los datos y su posterior división por el total de ellos, lo que caracteriza el algoritmo de la media aritmética. Algunos estudiantes lo identificaron con el nombre de media, otros solo utilizan el procedimiento para encontrar el valor a comparar. Algunos ejemplos se presentan a continuación:



8. Suma de Diferencias a 40: En esta categoría, se encuentran las estrategias en las que se calcula la diferencia de cada dato con el valor 40, realizando posteriormente la suma de estos valores calculados y finalmente se comparan estas sumas para decidir por la marca cuya cantidad fuera menor. Un ejemplo es el siguiente.



9. Cálculo de Frecuencias Absolutas: Se incluyen aquellas estrategias que consisten en realizar un listado en dos columnas, en el cual la primera presenta los distintos valores de contenido observados y la segunda, la cantidad de veces que cada dato aparece registrado. Realizando posteriormente comparaciones entre los valores de las frecuencias, considerando el valor de contenido al cual está asociado. La característica principal de esta estrategia radica en la construcción total de la tabla de frecuencias. Ejemplos de este tipo son los siguientes:



Estas últimas tres categorías, resultan consecuentes con las exigencias de solución de las tareas y permiten alcanzar el éxito de la misma, aunque, como puede observarse a continuación en las tablas de distribuciones frecuencias (VIII, IX y X) correspondientes a los resultados de los estudiantes de la 8ª serie, los porcentajes de estudiantes ubicados en esas categorías son mínimos, llegando a lo sumo a alcanzar cerca de un 17% (tarea de la Mediana) en los estudiantes hombres y un 7% (tarea de la Media Aritmética) en las estudiantes mujeres.

Tabla VIII. Distribución de frecuencias de las estrategias utilizadas en la solución de la tarea de la Moda, por género, para los estudiantes de 8ª serie

Tarea de la Moda			
	Estrategia	**Hombres**	**Mujeres**
1	Suma	33,3%	56,3%
2	Multiplicación	11,1%	6,3%
3	Discurso explicativo	14,8%	12,5%
4	Proporcionalidad Directa	22,2%	18,8%
5	Proporcionalidad Inversa	3,7%	-
7	Suma y división (Media Aritmética)	7,4%	-
8	Suma de Diferencias a 40	3,7%	3,1%
9	Cálculo de Frecuencias Absolutas	3,7%	3,1%
		100%	100%

Tabla IX. Distribución de frecuencias de las estrategias utilizadas en la solución de la tarea de la Mediana, por género, para los estudiantes de 8ª serie

Tarea de la Mediana			
	Estrategia	**Hombres**	**Mujeres**
1	Suma	29,2%	58,1%
2	Multiplicación	4,2%	
3	Discurso explicativo	29,2%	22,6%
4	Proporcionalidad Directa	16,6%	12,9%
6	Mayor cantidad de datos	4,2%	
7	Suma y división (Media Aritmética)	4,2%	
8	Suma de diferencias a 40	4,2%	3,2%
9	Cálculo de frecuencias	8,3%	3,2%
		100%	100%

Tabla X. Distribución de frecuencias de las estrategias utilizadas en la solución de la tarea de la Media Aritmética, por género, para los estudiantes de 8ª serie

Tarea de la Media Aritmética			
	Estrategia	**Hombres**	**Mujeres**
1	Suma	12,5%	56,7%
3	Discurso explicativo	12,5%	13,3%
4	Proporcionalidad Directa	20,9%	6,7%
6	Cantidad de Datos	41,7%	16,7%
7	Suma y División (Media Aritmética)	4,2%	
8	Suma de Diferencias a 40	4,2%	3,3%
9	Cálculo de Frecuencias Absolutas	4,2%	3,3%
		100%	100%

Considerando las tablas VIII, IX y X, y las exigencias de cada una das tres tareas, como se describió antes, podemos decir que las 9 categorías utilizadas para clasificar las estrategias utilizadas por los estudiantes de la 8ª serie en la solución de cada una de las tres tareas, muestran que solo las tres últimas responden a las exigencias de las mismas. Observando que en estas tres categorías la frecuencia de estudiantes que las utilizan fue muy baja, respecto a la prevalencia de las estrategias de Suma, Discurso Explicativo y la Proporcionalidad Directa. Como ocurrió con los estudiantes de la 5ª serie, la mayoría de los estudiantes de la 8ª serie también evitó los algoritmos, sobretodo el de la división y el de la ordenación de los datos.

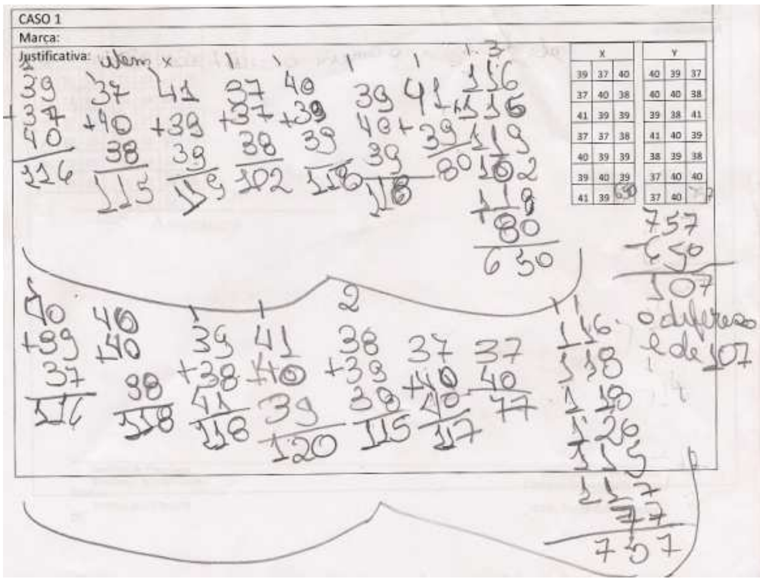
Las mismas tablas nos evidencian que las estudiantes mujeres de la 8ª serie permanecieron en la primera categoría, es decir, en la Suma. Además de esto, ellas evitaron estrategias clasificadas en la categoría de Suma y división (Media Aritmética), en todas las tareas presentadas.

4. Conclusión

Podemos decir así que nuestros resultados evidencian dos aspectos muy importantes: el primero, respecto a la relación entre la capacidad de leer, analizar y hacer inferencias a partir de distribuciones de datos y el conocimiento matemático escolar previo, y el segundo, respecto a la interacción entre esta relación y la cuestión de género.

Con respecto al primer aspecto, podemos adelantar desde ya que, aunque el estudio haya sido realizado con estudiantes de 5ª y 8ª serie de Enseñanza Fundamental, lo que supone una historia de escolarización, parece que la interacción de estos estudiantes con el conocimiento matemático, durante su formación escolar, no se presentó como instrumento para la resolución de situaciones problemas como los propuestos.

Una prueba de esto y que llamó la atención son los ejemplos de aplicación de los algoritmos de solución de problemas en el sentido de la simplificación consecutiva de cálculos hasta conseguir obtener un solo valor, como es el caso que presentamos como ejemplo a bajo. Como podemos observar, el estudiante culmina en una resta, posterior al proceso de suma de los datos de cada grupo, pero no indica el significado que tiene ese resultado en el contexto del problema para alcanzar la solución; solo se limita a expresar el resultado último, sin hacer referencia a la pregunta que plantea el problema.



Así, podemos decir que estos datos evidencian coherencia con los datos de la literatura internacional sobre Educación Estadística, desde aquellos de los años de 1980 (Pollatsek, Lima & Well, 1981; Mevarech, 1983) que como ya dijimo antes evidenciaron los errores presentados en la resolución de problemas que involucran conceptos estadísticos elementales que se relacionan con el desarrollo de algunas propiedades matemáticas del concepto de media aritmética, con creencias equivocadas y conocimientos ya adquiridos que operaban como obstáculos. Del mismo modo, estos datos son compatibles con los estudios de la Psicología de la Educación Matemática, que han insistido, como lo hace Fávero (1999; 2007; 2009a; 2009b), defendiendo que, detrás de ese hecho hay dos cuestiones centrales: la ruptura entre conocimiento científico y el pensamiento filosófico y una práctica de enseñanza en la cual la memorización de reglas tiene primacía sobre la comprensión conceptual.

La cuestión de notación del algoritmo matemático y del registro de las tentativas de solución en las situaciones de resolución de problemas vienen siendo particularmente bastante estudiadas, una vez que, como evidenció nuestro estudio, ella explica de forma clara la manera como la educación formal lidia con el conocimiento matemático, en por lo menos dos aspectos: la naturaleza de su mediación y la competencia de los profesores. La cita abajo resalta tales aspectos:

> *En verdad, detrás de estas cuestiones de escolarización está la relación entre conceptos y los sistemas de signos usados en el pensamiento y en la comunicación* (…) *La inserción del individuo, sea niño, adolescente o adulto, presupone la interacción de este individuo con los instrumentos de representación del conocimiento humano ya institucionalizados* (Fávero e Soares, 2002, p. 48, traducción nuestra).

Estas observaciones son compatibles con el estudio de Berger (2004), por ejemplo, que trató de considerar la utilización funcional de lo signo matemático en relación con las implicaciones epistemológicas que esto puede traer para los estudiantes universitarios, es decir, cómo un estudiante universitario de matemática se apropia de un objeto matemático que es nuevo para él, pero que hace parte del discurso oficial de la matemática. Esta autora se fundamenta en la teoría de Vygotsky (1986) para argumentar que los estudiantes utilizan los signos matemáticos de dos formas: como un objeto con el cual se comunica (en analogía al uso de la palabra) y como un objeto en el cual centrar y organizar sus ideas matemáticas, aunque antes de que él o ella pueda comprender totalmente el significado de este signo.

Esto significa que el concepto matemático esta imbuido de significados personales del mismo modo que una palabra nueva para un niño. Como esto es socialmente regulado, como lo dijeran Fávero y Soares (2002), el concepto implica para el estudiante, un uso que compite con su uso en la comunidad matemática. Este uso del signo matemático antes de la comprensión matemática, Berger (2004) lo denomina como “uso funcional”.

Podemos decir, entonces que, la escolarización no ha respondido adecuadamente a su papel de establecer la interacción entre el uso funcional y el uso matemático de los conocimientos matemáticos oficiales.

Por otro lado, si consideramos los datos relativos al género, evidenciados en nuestro estudio, podemos considerar que esta situación se complica cuándo se articula con los significados de género masculino y femenino, como resaltó Fávero (2009 b).

La literatura sobre este aspecto es vasta e importante porque retoma la cuestión de la elección de profesión de jóvenes de sexo masculino y de sexo femenino, resaltando que la división de roles masculinos y femeninos extrapolan la vida privada y se adentra en la vida pública y profesional. Gonzalez-Pienda y Coll. (2006) señalan que en su mayoría, los estudios evidencian que, en relación a la matemática, las mujeres se perciben menos competentes que los hombres.

Fávero (2010) sienta su posición respecto de esta cuestión, recalcando los que ésta dice respecto de la socialización, que, como ella misma subraya, no se restringe al contexto familiar. La educación formal, por ejemplo, desempeña un papel indiscutible en el mantenimiento de los significados de género tanto desde el punto de vista más amplio, como desde el punto de vista de las prácticas escolares cotidianas. O sea, para esta autora, la construcción del conocimiento es la adquisición de nuevas competencias en el ámbito de las prácticas escolares y educativas involucrando mucho más que saber cómo se construyen las estrategias cognitivas. Ellas involucran también la cuestión *del cómo y cuales* al igual que los valores sociales que permiten las informaciones, los procedimientos y las propias actividades que fundamentan, en resumen, los propios *paradigmas personales* (Fávero, 1994; 2007b).

Así, podemos considerar que nuestro estudio evidencia, como propone Fávero (2010), que la construcción de las prácticas de socialización presupone una historia de la Educación y una historia del acceso al saber. Tanto una como la otra no son neutras ideológicamente y están íntimamente ligadas a las prácticas discriminatorias de clase socil, etnia e género.

Para fundamentar su discusión, Fávero (2010) retoma a Abramo (2004) y su análisis sobre la división del trabajo según la categorización de las esferas pública y privada, para un análisis crítico sobre la utilización de la noción de *"fuerza de trabajo secundario"* empleada para caracterizar la fuerza de trabajo femenino en América Latina, ella defiende junto a Abramo (2004) que, esa caracterización de *"fuerza de trabajo secundario"* es uno de los elementos centrales de la estructuración de los patrones de discriminación de género que persisten y se reproducen en el mercado de trabajo latino-americano.

Considerando las publicaciones nacionales e internacionales de los años 2000 enfocadas en la articulación entre género, trabajo y organización, Fávero (2010) resalta tres aspectos principales. El primero es el énfasis en la desigualdad de oportunidades entendida como un desafío aún por ser superado. El segundo aspecto se refiere a la naturaleza generada de las relaciones en el trabajo y en los espacios organizacionales y las concepciones naturalizadas que aún fundamentan la dicotomía entre género y actividades profesionales. El tercer aspecto concierne al acceso y a la actuación de mujeres en las llamadas áreas científicas, tecnológicas y políticas, vistas clásicamente como masculinas.

Ahora, podemos entonces, finalizar esta conclusión, asumiendo con esta autora que, en resumen, un sistema de diferencias como el género, se torna, en verdad, un ***principio organizador de las relaciones sociales.*** Esto significa que, si consideramos que las creencias culturales son un importante componente de ese sistema, entonces, los contextos relacionados –tales como las instituciones educativas- entendidos como el *locus* donde tales creencias están en juego, deben ser igualmente considerados. Este es, por tanto, el desafío que se presenta para el estudio de la interacción entre conocimiento, educación y género el que se traduce en nuestro caso, para la cuestión particular de la interacción entre escolarización, género y matemáticas, un desafío que como nuestro estudio evidenció, no puede ser ignorado.

Bibliografía

Abramo, L. (2004) Inserción laboral de las mujeres em America Latina: uma furerza de trabajo secundaria? Estudos Feministas, Florianópolis, 12(2), maio-agosto/2004, p. 224-235.

Berger, M. (2004) The functional use of a mathematical sign. Educational Studies in Mathematics, 55, 81, 102.

Fávero, M. H. (1999). Desenvolvimento cognitivo adulto e a iniciação escolar: a resolução de problemas e a notação das operações. Temas em Psicologia, 7(1), 79-88.

Fávero, M.; Soares, M. T. (2002). Iniciação escolar e notação numérica: uma questão para o estudo do desenvolvimento adulto. Psicologia Teoria e Pesquisa, 18(1), pp.43-50.

Fávero, M. H. (2007). Paradigme personnel et champ conceptuel:implications pour les situations didactiques. Em M. Merri (Org.), Activité Humaine et Conceptualisation (pp. 625-634). Toulouse, França: Presses Universitaires du Mirail.

Fávero, M. H. (2009a). La psicología del conocimiento y la construcción de competencias conceptuales en la escuela. Revista Internacional Magistério, 7(39), Junio-Julio, Colombia, 18-22.

Fávero, M.H. (2009b). Os fundamentos teóricos e metodológicos da psicologia do conhecimento. Em M. H. Fávero & C. da Cunha (Orgs.), Psicologia do Conhecimento. O diálogo entre as ciências e a cidadania (pp. 9-20). Brasília: UNESCO/ Liber Livro.

Fávero, M.H. (2010) Psicologia do gênero. Psicobiografia, Sociocultura e Transformações. Curitiba: Editora da Universidade Federal do Paraná (no prelo).

Fernandes, S.; Healy, L. (2007) Ensaio sobre a inclusão na Educação Matemática. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 10, 59-76.

Gonzalez-Pienda, J.A.; Núñez, J.C.; Solano, P.; Silva, E.H.; Rosário, P.; Mourão, R.; Valle, A. (2006) Olhares de género face à matemática: uma investigação no ensino obrigatório espanhol. Estudos de Psicologia, 11(2), 135-141.

Pollatsek, A., Lima, S.; Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. Educational Studies in Mathematics, 12, 191-204.

Mevarech, Z. (1983). A deep structure model of students'statistical misconceptions. Educational Studies in Mathematics, 14, 415-429.

Vygostsky, L.S. (1986) Thought and Language, A. Kozulin, (ed and trans.), Cambridge, Mass.: MIT Press,

Watson, J. M. & Moritz, J. B. (1999). The developments of concepts of average. Focus on Learning Problems in Mathematics. 21(4), 15-39.

Watson, J. M.; Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. Mathematical Thinking and Learning. 2(1&2), 11-50.

Yilton Riascos Forero. Estadístico con una maestría en Ingeniería de Sistemas y otra en Educación Matemática. Actualmente está terminando su doctorado en Psicología en la Universidad del Valle, Cali, Colombia. Es profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca, Popayán, Colombia, en donde lidera el grupo de investigación GEMAT-Unicauca, profundizando en el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas y la Estadística. yirifo@unicauca.edu.co.

María Helena Fávero. Psicóloga con doctorado en psicología y dos posdoctorados, (uno con Doise (1998) y otro con Vergnaud (2001)) es investigadora del CNPq y profesora Asociada II, orientadora del Programa de Pos-Graduación en Procesos de Desarrollo Humano y de la Salud de la Universidad de Brasilia, Brasil, donde también coordina, desde 1998, el curso de Especialización en Psicopedagogía Clínica e Institucional. Su campo es el estudio de la Psicología del Desarrollo Humano, con énfasis en las competencias conceptuales, desarrollo psicológico adulto, psicología del género y psicología de la Educación Matemática. faveromh@unb.edu.br.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 45-56
ISSN: 1815-0640

MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

Un estudio comparativo de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos

Assumpta Estrada; Jorge Luis Bazán; Ana Aparicio

Resumen

Presentamos un estudio inicial que compara las actitudes hacia la Estadística entre profesores españoles y peruanos de educación primaria. Nuestros resultados indican que las actitudes son diferentes considerando una medida global. Adicionalmente mostramos diferencias en actitudes específicas. Estos resultados sugieren la necesidad de revisar el rol de la Estadística en la formación de los profesores de cada país así como muestran la importancia de estudios comparativos entre países.

Abstract

We present an initial study that compares the attitudes towards the Statistics between Spanish and Peruvian teachers of primary education. Our results indicate that the attitudes are different considering a global measure. In addition we show differences in specific attitudes. These results suggest the need to evaluate the role of the Statistics in the formation of the teachers of every country and show the importance of comparative studies between countries.

Resumo

Nos apresentamos um estudo que compara as atitudes em relação à Estatística entre professores espanhóis e peruanos de educação primaria. Nossos resultados indicam que as atitudes são diferentes considerando uma medida global. Adicionalmente mostramos algumas diferenças em atitudes específicas. Os resultados sugerem a necessidade de revisar o papel da Estatística na formação dos professores da cada país e mostram a importância de estudos comparativos entre países.

Introducción

La importancia de la estadística en la sociedad actual se ve reflejada en su incorporación en las estructuras curriculares de los países iberoamericanos. No obstante algunos trabajos como los de Estrada et al. (2005) y Aparicio et al. (2004), indican que los profesores tienen dificultades para la enseñanza de estos temas e incluso hay evidencias de que no terminan siendo enseñados. Para algunos autores (Heaton, 2002; Gattuso y Pannone, 2002; Mendonça, Coutinho y Almouloud, 2006), esto es debido, en parte, a la escasa preparación estadística con la que el profesor termina sus estudios, lo que hace que cuente con pocos recursos a la hora de dar sus clases y tienda a suprimir el tema, acortarlo o a presentarlo con una metodología inadecuada. Asistimos, por tanto, a un círculo vicioso, en el que los profesores, faltos de formación, van generando actitudes negativas hacia la materia, infravalorando su utilidad, percibiéndola como un contenido difícil que no pueden llegar a dominar, incluso comparten concepciones erróneas y dificultades con sus alumnos (Watson, 2001; Makar y Confrey, 2004; Stohl, 2005), dudando de su capacidad para enseñar la materia y asumiendo que este tema no debe incluirse en la formación básica de sus alumnos. Estos sentimientos de rechazo les llevan inconscientemente a posponer su autoformación estadística, a prescindir del uso de un instrumento que podría mejorar muchos aspectos de su actuación profesional y, en lo posible, a omitir su enseñanza.

En este trabajo realizamos una comparación de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos del nivel primario, los cuales, a nuestro parecer, son los responsables de la formación estadística de los futuros profesionales y ciudadanos. Para este fin se usó una escala de actitudes diseñada específicamente para profesores, desarrollada por Estrada (2002) que permite valorar la actitud de manera general y en cada una de sus preguntas, esta escala para fines de comparación fue modificada en el numero de ítems como se explicara posteriormente.

1. Investigaciones previas

El análisis de las actitudes hacia la estadística, en España y a nivel internacional, tiene ya una cierta tradición (Carmona, 2004) y, sobre todo en las dos últimas décadas, se han elaborado un número importante de trabajos. Un análisis detallado de estas investigaciones previas aparece en Estrada (2002), complementado posteriormente por Carmona (2004) con el estudio de las evidencias basadas en la relación de las actitudes con diferentes variables externas. En general estas investigaciones realizadas se han orientado fundamentalmente hacia la construcción de un instrumento de medida, entre los que destacamos el SAS de Roberts y Bilderback (1980), el ATS de Wise (1985) y el SATS de Schau, Stevens, Dauphinee y Del Vecchio (1995), por ser los cuestionarios más utilizados. Otros trabajos analizan la influencia de diversas variables tales como el género (Harvey, Plake y Wise, 1985; Anastasiadou, 2005), el rendimiento académico (Harvey, Plake y Wise, 1985; Roberts y Reese 1987; Nasser, 2004), la experiencia formativa en Matemáticas y Estadística (Elmore y Vasu, 1980, 1986; Auzmendi, 1992; Mastracci 2000), el tipo de bachillerato o el área de estudios (Silva et al. 1999; Gil Flores, 1999; Cuesta et al. 2001).

En nuestra revisión encontramos que las actitudes hacia la estadística han sido estudiadas principalmente en universitarios y escolares, pero son escasas las investigaciones con profesores, posiblemente, porque la estadística no es una materia obligatoria en su formación. Sólo los trabajos de Onwuegbuzie, (1998, 2003), los de Watson et al. (2003), Nasser (1999, 2004) y en España los de Estrada et al. (2002, 2004, 2005, 2008) dedican su atención a este colectivo estudiando sus actitudes juntamente con otras variables.

Así Onwuegbuzie (2003) utiliza un modelo multivariado para la predicción del rendimiento en asignaturas de Estadística. Se dedica fundamentalmente al estudio de la ansiedad y de las actitudes de los profesores, medidas estas últimas a través del ATS. Watson, Kromrey, Ferron, Lang y Hogarty, (2003) aplicaron conjuntamente el SATS y el cuestionario de ansiedad denominado STARS a una muestra de 200 graduados universitarios matriculados en Facultades de Educación.

Nasser y sus colaboradores han realizado en la última década varios estudios en los que también analizan la relación entre las actitudes o la ansiedad y el rendimiento; (Nasser. 1999; Wisenbaker, Nasser y Scott, 1999) y en Nasser (2004) es donde trata de construir un modelo estadístico para predecir las actitudes de futuros profesores en función de diferentes variables tales como la ansiedad hacia las Matemáticas y la Estadística, la aptitud matemática, la motivación y el rendimiento

Finalmente, Estrada et al. (2002, 2004, 2005, 2008) orientan sus investigaciones al estudio de las actitudes hacia la estadística analizando sus componentes, los diferentes instrumentos de evaluación existentes en la literatura internacional, así como las variables que las afectan, entre las que destacamos los conocimientos estadísticos de los profesores en formación sobre aquellos conceptos elementales que han de explicar a sus alumnos. El objetivo final de estos estudios es fundamentar la acción didáctica que permita incidir en las actitudes de los profesores e indirectamente en la mejora de la enseñanza de la Estadística en la Educación Primaria.

Por otro lado en el Perú, nos encontramos ante una situación diferente, las investigaciones realizadas en relación a este tema, son recientes, y se han dirigido principalmente a profesores. Los diferentes trabajos sobre las actitudes hacia la estadística en el Perú pueden verse en Bazán (2008) y comprenden, entre otros, los de Aparicio; Bazán y Abdounur (2004) que realizan un primer estudio sobre la actitud y el rendimiento académico en el Perú siguiendo un diseño pre test –post test con una muestra efectiva de 44 profesores peruanos de educación básica. En esta investigación se introduce las escalas de Cazorla et al. (1999) y Estrada et al. (2003), encontrándose adecuadas características psicométricas, así como el efecto de la enseñanza en la mejora de la actitud de los profesores. Estos resultados son confirmados en Aparicio y Bazán (2006a) y Aparicio y Bazán (2006b, 2008).

2. Instrumentos

En el momento de llevar a cabo nuestro estudio, se decidió usar la escala de Estrada (2002), por que se construyó combinando tres escalas: Escala SAS (Roberts y Bilderback, 1980); Escala ATS (Wise, 1985) ambas consideradas internacionalmente como las mas usuales y la española de Auzmendi (1992). En el proceso de elaboración se siguieron las recomendaciones de Osterlind (1989) y Thorndike (1989) y se contemplaron los componentes pedagógicos y antropológicos descritos; en Estrada (2002). En primer lugar, se delimitó el contenido a evaluar, y se especificó el formato de los ítems. Éstos constan de un enunciado y una escala de 5 puntos, que valoran las respuestas desde “muy en desacuerdo” (1 punto) hasta “muy de acuerdo” (5 puntos). A partir de las tres escalas citadas, se elaboró un primer listado de ítems; seguidamente se realizó una selección contemplando los diferentes componentes pedagógicos y antropológicos y, dando un peso equivalente a cada uno, se fue intentando incluir tanto ítems redactados en forma afirmativa ("la Estadística ayuda a entender el mundo de hoy"), como otros en forma negativa ("en la escuela no se tendría que enseñar Estadística"). Y todo ello para evitar el problema de la aquiescencia (Morales, 1988), por el que algunos sujetos tienden a responder con la forma "de acuerdo" sea cual sea el contenido del ítem.

Se consiguió un listado de 36 enunciados, que se sometieron a un "panel de jueces", es decir, expertos con diferentes perfiles profesionales y que emiten su opinión respecto a la adecuación y univocidad de las sentencias, quedando después de la valoración la escala definitiva compuesta por 25 ítems, 14 afirmativos frente a 11 negativos, (ver Estrada, 2002). Finalmente, para el presente estudio, que es a nivel comparativo, se excluyeron los ítems (3, 21y 23) de correlación ítem total muy baja con lo que la escala aquí utilizada consta de 22 ítems cuya distribución según los componentes evaluados por cada ítem es la que aparece en la tabla 1

Tabla 1. Componentes de las actitudes evaluadas en la escala de Estrada

	Componente antropológico		
Componente pedagógico	Social	Educativo	Instrumental
Afectivo	1, 11, 25	7, 12,	10, 13, 16,20
Cognitivo	2, 19,	4, 6, 17	24
Comportamental	9, 18	8, 15, 22	5, 14

Dado que los ítems no están redactados en el mismo sentido, todos ellos han sido codificados de modo que una puntuación mayor vaya asociada a una actitud más positiva y viceversa. Hacemos notar que los ítems 1, 6, 9, 11, 14, 15, 19 y 25 tienen un enunciado desfavorable a la actitud que tratamos de medir. Siguiendo a Morales (1988), tomamos la decisión de incluir este tipo de ítems en nuestra escala de actitudes para evitar el problema de la aquiescencia. Es por ello que, en estos ítems la puntuación otorgada será la contraria al modo usado en el resto de los ítems, es decir, se puntuará con el siguiente criterio (1 = muy de acuerdo, 2 = de acuerdo, 3 = indiferente, 4 = en desacuerdo, 5 = muy en desacuerdo).

Las medias y desviaciones típicas que se reportan para los ítems, se hacen respecto a la puntuación otorgada a la respuesta y en consecuencia siempre se deben interpretar en una escala positiva. Por ejemplo, en el caso de los ítems negativos como el 6, el enunciado preguntado es "En la escuela no se habría de enseñar estadística" pero el enunciado que corresponde al puntaje asignado es "En la escuela se habría de enseñar estadística". Esta decisión se toma, por un lado, para poder tener una escala homogénea de comparación de todos los ítems, en que una media más (o menos) alta indique siempre una actitud más (o menos) positiva, independientemente de si el ítem se redacta con enunciado positivo o negativo. Por otro, en el cálculo de la puntuación total, es necesario que todos los ítems tengan la misma dirección. De esta manera, la puntuación total en actitudes, será la suma de las puntuaciones de los veintidós ítems, y representará la actitud de cada encuestado respecto a la estadística.

3. Resultados y discusión

3.1. Características psicométricas de la escala por países

En la siguiente tabla presentamos algunas estadísticas para la evaluación de la normalidad del puntaje de Actitud en los diferentes grupos de interés en este estudio así como el valor de la fiabilidad de la escala determinada por el alfa de Cronbach.

Tabla 2. Evaluación de la Normalidad del puntaje de Actitud en diferentes grupos y de la fiabilidad de la escala

			Prueba de Normalidad		Fiabilidad
		Profesores	Estadística (SW)	Significación (SW)	Alfa de Cronbach
Países	España	66	0.965	0.058	0.753
	Perú	80	0.989	0.705	0.839
Todos		140	0.988	0.248	0.844

SW: Shapiro Wilks Significación *: <0.05

De acuerdo con la significación de la estadística Shapiro Wilks (SW) para probar si el puntaje de Actitud se distribuye como una distribución normal, en todos los casos se acepta esta hipótesis. Adicionalmente los valores de alfa de Cronbach para determinar la fiabilidad de la escala en la muestra completa y en los subgrupos son satisfactorios (> 0.75), encontrándose mejor en el grupo de Perú que en el de España.

3.2. Comparación de la actitud hacia la estadística entre los países

Respecto a la puntuación total a la vista de los resultados obtenidos, y teniendo en cuenta que la puntuación correspondiente a la posición de indiferencia es 66 (22 ítems respondidos en indiferencia con puntuación 3) podemos afirmar que la actitud de los encuestados respecto a la estadística es positiva, en ambos países. Esto se evidencia en la Tabla 3, donde se observa medias de actitud de 83.9 y 72.9. Sin embargo encontramos que las actitudes son más positivas entre profesores españoles en consonancia con las diferencias de énfasis del currículo de Educación Primaria pues al comparar los contenidos de estadística de España (LOE, 2006) y Perú (MINEDU, 2005) en el currículo de Educación Primaria (6-12años), encontramos que el currículo español es más amplio y de mayor nivel que en el caso del Perú. Esto indica que es necesario un mayor nivel de preparación de los profesores en España así como de la exigencia de la sociedad española para sus estudiantes, que en el caso de Perú.

Tabla 3. Comparación de la Actitud hacia la Estadística entre profesores españoles y peruanos

País	N	Media	D.T	% de logro actitud final	t	Valor p
España	66	83.9	7.2	76.3	7.16	0.00**
Perú	80	72.9	11.1	66.3		

Significación **: <0.01

Los resultados indican que hay diferencias significativas, los profesores españoles presentan una actitud más positiva que los profesores peruanos, pero por otro lado, estos presentan una mayor variabilidad en sus actitudes que sus pares españoles encontrándose entre los peruanos el profesor con menor actitud.

Adicionalmente cuando se calcula el porcentaje de logro actitudinal definido como el porcentaje que representa el puntaje obtenido del máximo posible (en este caso 22 preguntas por 5 puntos) se nota que ambos grupos presentan actitudes que podemos considerar en promedio positivas con 76 % y 66 % para los profesores españoles y peruanos respectivamente. La distribución de puntajes de Actitud hacia la Estadística entre los profesores de ambos países se puede observar en la figura 1.

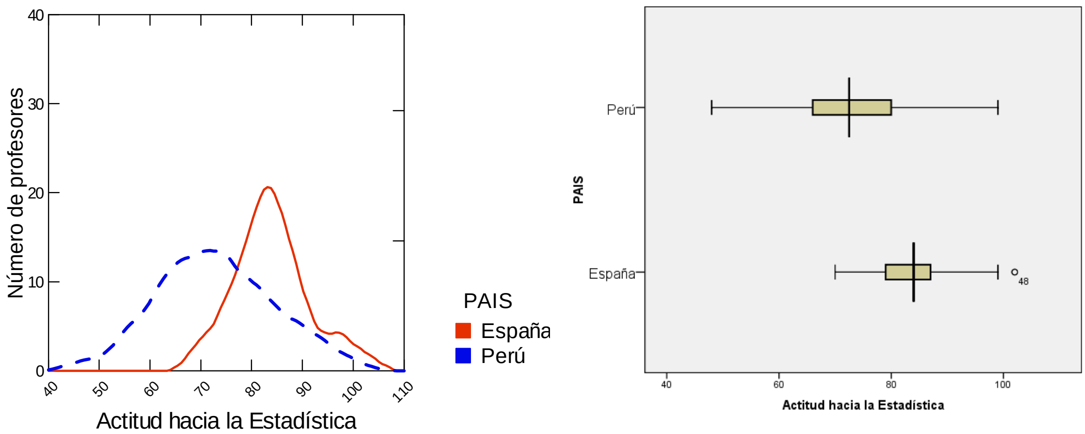


Figura 1. Distribución de puntajes de Actitud hacia la Estadística entre profesores españoles y peruanos (Grafico de densidad y Boxplot)

3.3. Actitudes especificas entre países

En la tabla 4 presentamos las medias y desviaciones típicas de las puntuaciones referentes a cada uno de los 22 ítems, tal como fueron codificadas.

Los enunciados de los ítems con (*) son negativos en la escala y de esta manera se preguntaron a los profesores, aunque en la tabla 4 ha sido modificada la redacción para facilitar su interpretación

Para los profesores españoles todos los ítems tienen una valoración positiva, puesto que todos tienen un valor medio superior a 3. El que tienen puntuación mas baja es el 16 (“Me apasiona la Estadística”) lo que sugiere que la Estadística resulta una materia poco atractiva.

Esto concuerda con lo especificado por Moore (1997) y no es en realidad una falta de la propia disciplina, sino de la manera en que se enseña. Habría que seguir las recomendaciones del autor citado, quien sugiere, por un lado, cambiar los contenidos y enseñar una Estadística basada en los datos, con menor énfasis en la probabilidad, que resulta más difícil a los alumnos. Por otro lado, se debiera cambiar la metodología introduciendo la tecnología y el trabajo con proyectos.

Entre los ítems mejor valorados por los profesores españoles, destacamos el ítem 20 con 4,49 puntos, que corresponde a un componente afectivo, al ser una manifestación de un sentimiento o afecto hacia la materia que, además, en este caso, es positiva.

Tabla 4. Media y desviación típica en cada ítem para ambos países

Enunciado del ítem	Media PERU	Desv. Típica PERU	Media ESPAÑA	Desv. Típica ESPAÑA
1. No me molesta la información estadística que aparece en algunos programas de T.V. (*)	3.35	1.09	3.21	1.01
2. La Estadística ayuda a entender el mundo de hoy.	3.98	0.92	4.00	0.60
4. Es fundamental en la formación básica del futuro ciudadano.	3.88	0.89	3.73	0.79
5. Uso la Estadística para resolver problemas de la vida cotidiana.	3.54	0.96	3.52	0.82
6. En la escuela se tendría que enseñar Estadística. (*)	4.05	1.13	4.24	0.74
7. Me divierto en las clases en que se explica Estadística.	2.83	1.20	3.18	0.67
8. Los problemas de Estadística me resultan fáciles.	2.41	1.06	3.94	1.01
9. Entiendo las informaciones estadísticas que aparecen en la prensa. (*)	3.31	1.06	3.85	0.74
10. Me gusta la Estadística porque me ayuda a comprender más profundamente la complejidad de ciertos temas.	3.35	0.98	3.82	0.97
11. No me siento intimidado ante datos estadísticos. (*)	3.05	0.99	3.91	0.62
12. Encuentro interesante el mundo de la Estadística.	3.58	0.95	4.00	0.74
13. Me gustan los trabajos serios en que aparecen estudios estadísticos.	3.36	1.09	3.85	0.93
14. Utilizo mucho la Estadística fuera de la escuela. (*)	2.70	1.15	3.79	0.81
15. En clase de Estadística siempre entiendo de qué están hablando. (*)	3.70	0.97	3.73	0.66
16. Me apasiona la Estadística porque ayuda a ver los problemas objetivamente.	3.14	1.17	3.00	0.99
17. La Estadística es fácil.	2.40	1.02	3.79	1.17
18. Me entero más del resultado de las elecciones cuando aparecen representaciones gráficas.	3.51	1.13	4.36	0.77
19. La Estadística no sólo sirve a la gente de ciencias. (*)	3.93	1.03	3.12	0.59
20. Me gusta hacer problemas cuando uso la Estadística.	2.88	1.08	4.49	0.66
22. Con frecuencia explico a mis colegas los problemas de Estadística que no entienden	2.83	1.08	4.33	0.73
24. La Estadística ayuda a tomar decisiones más documentadas.	3.65	1.00	3.97	0.76
25. No evito las informaciones estadísticas cuando las leo. (*)	3.59	1.13	4.12	0.77

Con una puntuación ligeramente inferior (4,36), tenemos el ítem 18, que constata la importancia que se otorga a la presencia de la estadística en la vida cotidiana, uno de los pilares básicos que justifican su presencia en la enseñanza obligatoria, como formación básica de todos los ciudadanos (Gal, 2002).

Para los profesores peruanos llama la atención el ítem 6 (En la escuela no se tendría que enseñar estadística) como el mejor valorado (4.05) y comentado anteriormente. Por otro lado los que presentan puntuaciones más bajas son los ítems 8 (Los problemas de estadística me resultan fáciles) y 7 (La estadística es fácil) con 2.41 y 2.40 respectivamente. Esto contrasta con las actitudes de valoración más bien positiva encontrada en los otros ítems y en el puntaje de actitud. Una interpretación que podemos dar es que en tanto la estadística es valorada positivamente en general, de manera específica la estadística no es percibida como fácil y hay un rechazo hacia su inclusión en la escuela, esta también nos indica que la resolución de problemas de estadística puede representar un obstáculo importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En la figura 2 se muestran los promedios en cada ítem del cuestionario ordenados en promedio creciente para los profesores de España.

Los profesores de España tienden a expresar mayor valoración positiva que sus pares de Perú respecto a que utilizan poco la estadística fuera de su escuela (ítem 14) a que la estadística es fácil (ítem 17)), a que los problemas de la estadística les resultan fáciles (ítem 8), a que a menudo explican a sus compañeros problemas de estadística que no han entendido (ítem 22) y a que les gusta hacer problemas cuando usan la estadística (ítem 20); en tanto que en el ítem 19 (La estadística sólo sirve para la gente del área de ciencias) son los profesores peruanos los que tienden a mostrar mayor acuerdo. Estos resultados indican que los profesores de España tiende a valorar mejor educacional (8, 22,17) e instrumentalmente (14 y 20) la estadística que sus pares peruanos mientras estos valoran que la estadística es mas para personas en el área de ciencias.

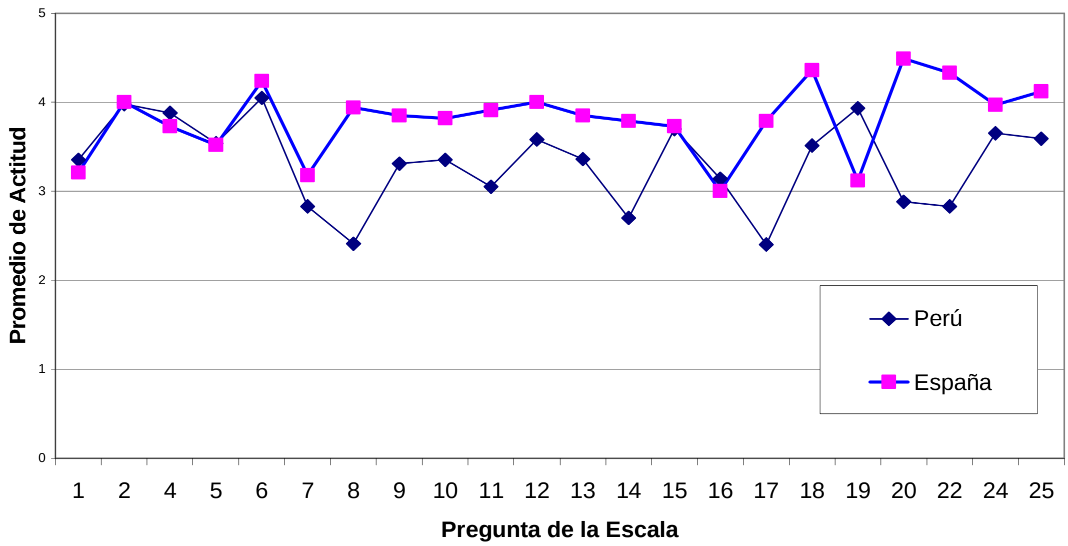


Figura 2. Promedio de actitudes especificas entre profesores españoles y peruanos

4. Conclusiones e implicancias para la enseñanza

A la vista de los resultados obtenidos, podemos afirmar que la actitud de los encuestados respecto a la estadística es positiva en ambos países aunque encontramos que las actitudes son más positivas entre profesores españoles en consonancia con las diferencias de énfasis del currículo de Educación Primaria

Algunas de las actitudes especificas en las que los profesores de España se diferencian de sus pares peruanos esta en tener mayor acuerdo de que la estadística es fácil y que les resultan fáciles y les gusta los problemas de estadística, incluso explicando a sus compañeros. En tanto que persiste la idea entre profesores peruanos de que la estadística es mas para personas del área de ciencias.

Estas actitudes con mayor acuerdo en España pueden ser explicadas, en parte, por el mayor trabajo, aunque todavía insuficiente y dependiendo de las universidades (Estrada y Batanero 2008), en formación de profesores, en currículo y en Didáctica de la estadística en España frente al caso peruano, donde más bien existen nuevos retos por enfrentar como indica Bazán (2006).

El movimiento hacia una educación estadística de mayor nivel para una sociedad mejor es previsible considerando las rutas que siguen unos países con mayor tiempo en este esfuerzo como se ha encontrado aquí en la comparación de las actitudes hacia la estadística entre profesores de España y Perú. Un mayor trabajo en formación de profesores, mejores esfuerzos en didáctica de la estadística (investigaciones, materiales de estudio, instrumentos de medida) permitirá mejorar las actitudes hacia la estadística de los profesores.

Por ello nuestro trabajo pretende llamar la atención de la importancia de la evaluación de las actitudes de los profesores porque éstas pueden influir en que la estadística no llegue a ser estudiada por todos los alumnos, a pesar de las orientaciones curriculares. Adicionalmente, sabemos que las actitudes hacia la Estadística de profesores bajo contextos de capacitación son modificables positivamente como ha sido probado por los estudios de Aparicio y Bazán (2006a y 2006b). Esto permite indicar algunas rutas inmediatas para programas de entrenamiento en profesores.

Este esfuerzo debe ser acompañado por una revisión de las concepciones predominantes sobre la afectividad y las actitudes en la educación y la elaboración de propuestas que ubiquen las actitudes dentro de un modelo de aprendizaje de la matemática-estadística como es sugerido en Bazán y Aparicio (2007) y en Estrada y Batanero (2008)

Nota: Trabajo apoyado por el Proyecto SEJ2007-60110/EDUC. MCYT-FEDER y realizado durante la Estancia en la Universidad de Granada del segundo autor con apoyo de la Fundación Carolina y el Departamento de Ciencias de la PUCP-Perú bajo supervisión de Carmen Batanero.

Bibliografia

Anastasiadou, S. (2005). Affective reactions and attitudes of the last class of greek high school students towards statistics Proceedings of CERME IV, European Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guíxols, Girona: CERME On line, http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius.

Aparicio, A., Bazán, J., Abdounur, O. (2004). Atitude e desempenho em relação à estatística em professores de ensino fundamental no Peru: primeiros resultados. *VII Encontro Paulista de Educação Matemática. Junho 9-12. .Faculdade de Educação Universidade de São Paulo*.

Aparicio, A. y Bazán, J (2006a). Actitud y rendimiento en Estadística en profesores peruanos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19,* 644-650. Clame 2005.

Aparicio, A. y Bazán, J. L. (2006b). Actitudes hacia la estadística en profesores de nivel primario. En González, M., Bazán, J. L., Sánchez, R. (eds).

Coloquios sobre Matemática Educativa 2005, parte 2., 127-133. Reporte de Investigación 19. Serie C. Sección Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú

Aparicio, A. y Bazán, J. L (2008). Aspectos afectivos intervinientes en el aprendizaje de la estadística: actitudes y sus formas de evaluacion. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *21,* 180-189. Clame 2007.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero. Bilbao.

Bazán, J. L. (2006). La estadística llega a la escuela en el Perú. En Gonzales, M., Bazán, J. L., Sánchez, R. (eds). Coloquios sobre Matemática Educativa 2005, parte 2., 87-109. Reporte de Investigación 19. Serie C. Sección Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú

Bazán, J. L. (2008). Actitudes hacia la matemática-estadística: Una revisión de trabajos. En Gaita, C. (editora). *Actas del III Coloquio Internacional de la Enseñanza de la Matemática*. IREM-PUCP. Fondo Editorial. 1-13.

Bazán, J. L. and Aparicio, A. (2007). Las actitudes frente a la matemática dentro de un modelo deaprendizaje. *Revista de Educación*. PUCP 15-(28), 7-20.

Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. Statistics Education Research Journal, 3 (1), 5-28. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ3(1)_marquez.pdf

Cazorla, I., Silva, C., Vendramini, C. & Brito, M. (1999). Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à Estatística. Em *Anais da Conferência Internacional: Experiências e perspectivas do ensino de Estatística, desafios para o século XXI*, Florianópolis, Brasil.

Cuesta, M., Rifá, H., y Herrero, F.J. (2001). Un estudio exploratorio, en estudiantes de psicología, de una escala de actitudes hacia la estadística. Póster presentado en el VII Congreso de Metodología de las Ciencias Sociales y de la Salud, Madrid.

Elmore, P. B. y Vasu, E. S. (1980). Relationship between selection variables an statistics achievement. Journal of Educational Psychology, 72, 457-467.

Elmore, P. B. y Vasu, E. S. (1986). A model of statistics achievement using spatial ability feminist attitudes and mathematics. Related variables as prediction. Educational and Psychological Measurement, 46, 215-222.

Estrada, A. (2002). Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Estrada, A.; Batanero, C.; e Fortuny, J. (2003). *Actitudes y Estatística em profesores em formación y en ejercicio.* 27 Congreso Nacional de Estatística e Investigación Operativa. Lleida, 8-11 de abril. España.

Estrada, A., Batanero, C y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias,* 22 (2), 263-274.

Estrada, A., Batanero, C., Fortuny, J. M. y Diaz, C. (2005).A structural study of future teachers' attitudes towards statistics. En M.Bosch (ed.). Proceedings the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 508-517). CERME 4 Sant Feliu de Guíxols, Girona: ERME. ISBN: 84-611-3282-3. CDROM.

Estrada, A., & Batanero, C. (2008). Explaining teachers' attitudes towards statistics. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.). Joint ICMI/ IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference. Monterrey: International Commission on Mathematical Instruction e International Association for Statistical Education. CD- ROM

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilites. *International Statistical Review*, 70(1), 1-52.

Gil Flores, J. (1999). Actitudes hacia la Estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. Revista Española de Pedagogía, 214, 567-590.

Harvey, A.L., Plake, B.S., y Wise, S.L. (1985,). The validity of six beliefs about factors related to statistics achievement. Comunicación presentada en el Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago.

L.O.E. Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Madrid: Ministerio de Educacion y Ciencia.

Mastracci, M. (2000). Gli aspecti emotive nell'evolution dell'apprendimento della statistica e della sua valutazione. Un caso di studio sugli studenti di SSA. Tesis de Laurea. Universidad La Sapienza de Roma.

MINEDU (2005). Diseño Curricular Nacional. Ministerio de Educación del Perú

Moore, C. M. (1987). *Group techniques for idea building*. Sage. Newbury Park, CA.

Morales, P. (1988). *Medición de actitudes en psicología y educación.* Universidad de Comillas. San Sebastián.

Nasser, F. (1999). Prediction of college students achievement in Introductory Statistics Course. Comunicación presentada a la 52nd ISI –International Statistical Institute- Session, Helsinki.

Nasser, F. M. (2004). Structural model of the effects of cognitive and affective factors on the achievement of arabic-speaking pre-service teachers in introductory statistics. Journal of Statistics Education, 12 (1). On line: www.amstat.org/publications/jse/v12n1/nasser.html.

Onwuegbuzie, A.J. (1998). Teachers` attitudes toward statistics. Psychological Reports, 83, 1008-1010.

Onwuegbuzie, A.J. (2003). Modeling statistics achievement among graduate students. Educational and Psychological Measurement, 63(6), 1020-1038.

Osterlind, S. (1989). *Constructing test items.* Kluwer, Boston

Pretorius, T. B. y Norman, A. M. (1992). Psycometric data on the Statistics Anxiety Scale for a sample of South African students. Educational and Psychological Measurement, 52, 933-937.

Roberts, D.M. y Bilderback, E.W. (1980). Reliability and validity of a statistics attitude survey. *Educational and Psychological Measurement,* 40, 235-238.

Roberts, D.M. y Reese, C.M. (1987). A comparison of two scales measuring attitudes toward statistics. Educational and Psychological Measurement, 47, 759-764.

Schau, C., Stevens, J., Dauphine, T. y del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes towards statistics. *Educational and Psychological Measurement,* 55 (5), 868-875.

Silva, C.B., Cazorla, I.M., y Brito, M.R.F. (1999). Concepçöes e atitudes em relaçao à estatística. Comunicación presentada a la Conferência

Internacional Experiências e Expectativas do Ensino da Estatística: Desafios para o Século XXI, Florianópolis.

Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicada*. Limusa. México.

Watson, F., Kromrey, J., Ferron, J., Lang, T. y Hogarty, K. (2003). An assessment blueprint for Encstat: A statistics anxiety intervention program. Comunicación presentada al AERA Annual Meeting, San Diego.

Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 45, 401-405.

Assumpta Estrada Roca, Licenciada en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Zaragoza, Magíster en Didáctica de las Matemáticas y las Cs Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona. Dra en Didáctica de las Matemáticas y las ciencias Experimentales .Profesora Titular de Universidad de la Universidad de Lleida (España). aestrada@matematica.udl.cat

Jorge Luis Bazán Guzmán, Ingeniero Estadístico por la Universidad Agraria la Molina (UNALM) del Perú, Psicólogo por la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), Magíster en Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Dra en Estadística por la Universidad de Sao Paulo (USP) Brasil. Actualmente docente asociado de la PUCP (Perú). jlbazan@pucp.edu.pe

Ana Sofía Aparicio Pereda, Psicóloga graduada por la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM) en Perú. Magíster en Educación con mención en Enseñanza de Ciencias y Matemática por la Universidad de Sao Paulo (USP) Brasil. Actualmente docente de la UNMSM (Perú).
anasofiaaparicio@gmail.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 57-68
ISSN: 1815-0640

MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

Dualidad de la probabilidad y enseñanza de la estadística

Pablo Carranza; Jenny Fuentealba

Resumen

En este artículo nos interesamos en la noción de probabilidad y algunas de sus implicaciones didácticas. En la primera parte nos centraremos en los dos principales significados de la probabilidad, uno denominado frecuentista, el otro bayesiano. En la segunda, nos interesaremos en algunas cuestiones didácticas que se desprenden de esta dualidad, en particular nos centraremos en algunas dificultades de su tratamiento en clase.

Abstract

In this article we are interested to the notion of probability and some of his didactic implications. In the first part we will centre on both principal meanings of the probability, one named frecuentista, another bayesiano. In the second one, we will be interested to some didactic questions that part with this duality, especially we will centre on some difficulties of his treatment on class

Resumo

Neste artigo interessamos-nos à noção de probabilidade e algumas de seus envolvimentos didácticos. Na primeira parte centrar-nos-emos nos dois principais significados da probabilidade, um denominado frecuentista, o outro bayesiano. Na segunda, interessar-nos-emos a algumas questões didácticas que se desprendem desta dualidad, em particular centrar-nos-emos em algumas dificuldades de seu tratamento em classe.

1. La probabilidad. Dualidad de significados

A diferencia de como muchos docentes la hemos aprendido, la probabilidad tiene dos significados bien distintos, cada uno de estos nos reenvía a paradigmas inferenciales diferentes. En efecto, bajo el término probabilidad es posible representar por un lado la estabilización de la frecuencia de aparición de un fenómeno y por otro lado una medida de certeza de la veracidad de una proposición. A la primera se la conoce como probabilidad frecuentista, a la segunda como bayesiana. La noción frecuentista corresponde a la inferencia llamada “clásica”, la segunda a la bayesiana, en fin, dos métodos estadísticos bien diferentes de inferir.

Si la noción bayesiana como una medida de certeza resulta al lector una novedad, ello no debe sorprendernos, los sistemas educativos suelen centrar su atención en la primera interpretación, la llamada frecuentista. Tampoco debería sorprendernos que, luego de una breve descripción, el lector sienta una cierta familiaridad con la noción bayesiana, aunque jamás haya entendido hablar de ella en su formación. Esta familiaridad se explicaría porque la dualidad de significados es una característica indisociable al concepto de probabilidad. La hayamos aprendido en nuestra formación o no, esta noción se ha ido construyendo en nosotros por las diferentes situaciones a las que nos hemos enfrentado.

Para comprender la dualidad de la probabilidad es necesario considerar dos dimensiones, la primera la llamaremos calculatoria, la segunda, semántica. Por dimensión calculatoria entenderemos todos aquellos aspectos que se refieren al valor numérico de una probabilidad. Por dimensión semántica, entenderemos aquellos aspectos vinculados al significado dado a un cálculo. Por ejemplo, tomemos el ejercicio que se presenta a continuación, el mismo es de un libro de texto francés destinado a alumnos de aproximadamente 16 años (Belin 1S, página 199):

Sea un conjunto Ω sobre el cual se define una ley de probabilidad P y tres eventos A, B y C tales que:

$$P(A) = 0{,}5; P(B) = 0{,}7; P(C) = 0{,}4; P(A \cup B) = 0{,}8 \; y \; P(B \cap C) = 0{,}1$$

Calcular $P(A \cap B)$

Este problema se centra en la dimensión calculatoria de la probabilidad. En efecto, no solo no hay ningún indicio que nos permita asociar tal o cual significado al cálculo realizado, sino que además, ninguno de esos significados podria contribuir a responder a la pregunta del problema. Es entonces un ejercicio focalizado sobre la dimensión calculatoria.

Tomemos otro problema donde las dos dimensiones están presentes, tanto la calculatoria como la semántica. Un ejemplo lo constituye el ejercicio siguiente, extraído de otro libro de texto francés, siempre para alumnos de 16 años (Didier 1S, página 210):

Se lanzan dos dados cúbicos simétricos, se busca la frecuencia de aparición de un doble, es decir, por ejemplo, 2 veces el 1, 2 veces el 2, etc.(…) Realizar un gran número de simulaciones y estimar la frecuencia de aparición de cada [doble]; Calcular, ayudándose de la simulación, la probabilidad de aparición de cada doble.

En este último ejercicio, la dimensión calculatoria es clara, se le pide al alumno “Calcular”. La semántica por el contrario aparece dejando entrever que el cálculo debe asociarse a la estabilización de frecuencias proveniente de la simulación, en este caso, el significado dado a la probabilidad es frecuentista.

Para comprender entonces la dualidad de la probabilidad es necesario situarse en la dimensión semántica de la probabilidad y no en la calculatoria. En esta última no encontraremos indicio alguno de lo que significa una probabilidad, y esto simplemente porque la dimensión calculatoria es la misma para ambas interpretaciones. Continuaremos con la presentación de algunas características que, creemos, ayudaran a diferenciar estas dos interpretaciones, características que a su vez, nos servirán para comprender la complejidad y la riqueza de esta dualidad, sabiendo siempre que, en este enfoque habrá dos dimensiones alternándose, una calculatoria y otra semántica.

2. Diferencias entre los significados de la probabilidad

2.1. Primera diferencia: sobre qué contextos se evalúa la probabilidad

Veremos que, independientemente de nuestros gustos o afinidades hacia tal o cual enfoque probabilístico, hay contextos que son frecuentistas y otros que son bayesianos. Es decir que hay una cierta objetividad en la interpretación de la probabilidad asociada a un contexto dado. Comenzaremos describiendo las características de los contextos frecuentistas. Para ello nos basaremos en la definición que Richard von Mises propone para la probabilidad[1] (frecuentista). Este autor remarca que, para poder hablar de probabilidad debe haber un conjunto (*collective*) satisfaciendo dos axiomas (von Mises, 1928). Este conjunto no es ni más ni menos que la serie de resultados de la reproducción de un fenómeno. Los dos axiomas que debe satisfacer este conjunto son los siguientes:

- Axioma de convergencia: La proporción de aparición del carácter observé en el conjunto tiende a un valor dado cuando el conjunto tiende al infinito.
- Axioma de aleatoriedad: El valor límite de la proporción de aparición no se ve afectada por la selección de cualquier subconjunto infinito, a condición que la regla de selección de los elementos del subconjunto infinito sea fija.

Esta definición de la probabilidad frecuentista, tan acertada como concisa, refleja las características que debe satisfacer el conjunto de reproducciones de un fenómeno dado, sea este real o hipotético. Entonces, y tal cual lo remarca el autor, la probabilidad frecuentista solo se aplica a casos donde hay un conjunto infinito de reproducciones de un fenómeno dado (o evento).

El último ejercicio que reprodujimos es un ejemplo de probabilidad frecuentista. En efecto, el problema se interesa la proporción de la aparición de un fenómeno cuando se reproduce la experimentación (hipotéticamente) una infinidad de veces, el segundo axioma, claro esta, queda implícito.

Para la probabilidad bayesiana la situación es menos restrictiva. En efecto, dado que ella representa un grado de certeza de la veracidad de una proposición, es suficiente que dispongamos de una proposición y que desconozcamos su veracidad. Esto bastaría para poder utilizar el término probabilidad. De esta manera la probabilidad representa numéricamente cuanto creemos en una proposición.

Tomaremos como ejemplo de probabilidad bayesiana un problema propuesto por Pascal (Pascal, 1670). Este problema resulta interesante por tres

[1] Richard von Mises, al igual que su hermano Lutwin y que Kart Popper (Popper, 1957, 1959, 1959) fueron acérrimos defensores del enfoque frecuentista, en otras palabras opositores al enfoque bayesiano.

razones, la primera porque la probabilidad en este problema no admite otra interpretación que la bayesiana, la segunda porque nos muestra que, desde su emergencia, las dos interpretaciones[2] estuvieron representadas por el término probabilidad, y la tercera porque pone en evidencia la función de la probabilidad como una herramienta para la toma de decisiones en contexto de incertidumbre.

El problema de Pascal que aquí sintetizamos es conocido como “La Gran Apuesta” y puede ser resumido como sigue (Hacking, 2002) : habiendo personas que, no convencidos por las pruebas de la religión (católica) y aun menos por los argumentos de los ateos, duda entre la fe o la incredibilidad. Para resolver esta duda, Pascal propone una modelización del problema en términos de probabilidad donde el argumento decisional de adherir a los preceptos de la Iglesia o llevar una vida sin privaciones, se basa en la utilidad máxima obtenida para cada una de estas dos acciones posibles. De esta manera, según Pascal claro, convendría adherir a los preceptos de la Iglesia aunque la probabilidad que Dios exista sea mínima, pues adhiriendo a los preceptos de la Iglesia y Dios existiendo, la ganancia seria infinita (el paraíso) y ella superaría a cualquier otra ganancia posible.

Lo que nos interesa aquí retener es el significado de la probabilidad subyacente al problema. En este caso, podemos afirmar que la expresión “la probabilidad que Dios exista” se refiere a una medida de certeza sobre su existencia y en ningún caso, a la frecuencia con la que Dios existe. Es sin dudas, una probabilidad bayesiana.

En el ejemplo que acabamos de resumir, la interpretación bayesiana se aplicó a proposiciones (“Dios existe”, “Dios no existe”). Como dijimos anteriormente, los contextos bayesianos son menos restrictivos que los frecuentistas, basta una proposición de la cual no estemos convencidos para que podamos utilizar el término probabilidad. Para la probabilidad frecuentista en cambio, es necesario un contexto mas complejo, una experimentación que sea repetida (al menos mentalmente) infinitas veces y bajo las mismas condiciones.

Si bien, como hemos visto, los contextos bayesianos son menos restrictivos que los frecuentistas, será conveniente descomponer los primeros, en dos grupos. Esto nos ayudara a comprender de qué manera las dos interpretaciones de la probabilidad se relacionan. Descompondremos entonces los contextos bayesianos en dos categorías, a una la llamaremos “hipótesis”, a la otra “evento genérico”, comenzaremos con el último, el “evento genérico”.

Una proposición es un evento genérico cuando, interesados siempre en su veracidad, podemos concebirlo como un evento formando parte de un conjunto mas vasto de eventos, en otras palabras, cuando lo pensamos como uno entre otros, de ahí la denominación de genérico. Veamos un ejemplo de un evento genérico: Nahuel tiene que decidir entre tomar la autopista A o la B. Lo único que sabe de estas autopistas es que la tasa de mortalidad por accidentes de transito de A es de 5 por mil, mientras que la de la autopista B es de 2 por mil. Para ese evento, Nahuel no dispone de otra información que del dato

[2] Pascal propuso dos problemas, uno se refiere a la probabilidad frecuentista (Le Partage) el otro a la probabilidad bayesiana (Le Gran Pari) ambos publicados en la misma época.

estadístico de la tasa de accidentes mortales, él decide entonces, en base a esta información, tomar la autopista B.

Veamos primero por qué esta situación es bayesiana. La cuestión que preocupa a Nahuel se refiere a su persona, él se interesa en saber si "él" tendrá un accidente mortal o no. Imposibilitado de conocer la verdad de esa proposición, aborda la cuestión en términos de probabilidad, una suerte de medida de certeza de tener un accidente mortal, es entonces un contexto bayesiano. Veamos ahora por qué es un evento genérico. Para evaluar cuán seguro está de tener un accidente mortal, Nahuel considera la información disponible, nada particular sabe de lo que ocurre en esas autopistas en ese momento, ni del vehiculo que él conduce tampoco, solo dispone de información genérica (la tasa de accidentes por autopistas). De esta manera, al no disponer de información específica, Nahuel inscribe su caso dentro de un conjunto y lo considera como uno entre otros. Esta inclusión de su caso en el conjunto de usuarios de las autopistas le permite evaluar numéricamente cuanto creer en la proposición. Remarcamos que, si aquí Nahuel toma la frecuencia de accidentes mortales como un argumento no es mas que para justificar su razonamiento (Hacking & Dufour, 2004). Si el dispusiese de información mas precisa, seguramente la evaluación de la probabilidad sería otra. Por ejemplo, si el tuviera conocimiento de la tasa de accidentes mortales correspondientes al día de la semana en cuestión, y/o a la edad de los conductores… En fin, vemos que el valor numérico de la probabilidad bayesiana esta en función de la información disponible (probabilidad condicional).

Es necesario remarcar aquí que, a pesar que Nahuel hace intervenir la frecuencia de accidentes, la cuestión no deja de ser nunca bayesiana, y si esta frecuencia aparece, es porque Nahuel la considera como una razón para evaluar cuánto creer en la proposición.

Veamos otro ejemplo de contexto bayesiano del tipo evento genérico donde se pone en evidencia el rol de la información disponible a la hora de evaluar numéricamente la probabilidad. Imaginemos dos personas frente a una mesa, Belén a la izquierda y Emilce a la derecha. Se coloca una hoja de papel sobre la mesa como muestra la Figura 1. Se tira una moneda de tal manera que ella cae a la derecha de la hoja de papel, frente a Emilce. Claro está, Belén no tiene posibilidad de ver el resultado del lanzamiento. Se les pregunta a ambas, cual es la probabilidad que la cara visible de la moneda sea "cara".

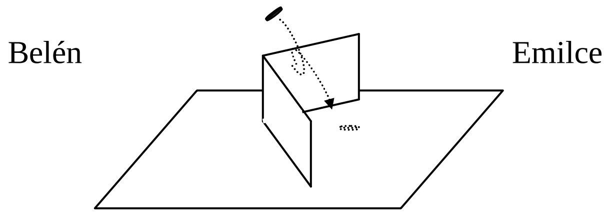


Figura 1

La respuesta de Emilce debería diferir de la de Belén. Para la primera, no habría ninguna incertidumbre a considerar, interrogada en términos de probabilidad, ella diría 1 o 0, dos medidas de certeza, por cierto. El problema para Belén es otro, ella desconoce el resultado, su vecina no le desliza ningún indicio, tampoco conoce nada de la moneda que ha sido lanzada. En fin, no teniendo ningún motivo para privilegiar un resultado sobre otro (Keynes, 1921), Belén decide atribuirle a las dos posibilidades las mismas probabilidades.

Vemos en este ejemplo dos valores de probabilidad diferentes, y ninguno erróneo por cierto. Podríamos preguntarnos si estos dos valores (el de Emilce y el de Belén) son los únicos posibles. He aquí una pregunta que los bayesianos gustan responder, sobre todo frente a aquellos que nos hemos formado dentro de la matemática. La respuesta de un bayesiano como (de Finetti, 1937, 1974) sería no, no hay un valor correcto y único para una probabilidad bayesiana, lo que hay son mejores razones que otras.

Incluso es posible, según los bayesianos, que un mismo individuo evalúe de manera diferente la probabilidad de una misma proposición si, a momentos diferentes, dispone de informaciones diferentes. Por ejemplo, supongamos que tanto Emilce como Belén obtienen un premio si al lanzar la moneda, sale “cara” y supongamos que, al caer la moneda, Belén constata en Emilce un gesto de satisfacción. La pregunta es, deberíamos juzgar como incorrecto un eventual valor de probabilidad de 0,8 y corregir a Belén diciendo que la probabilidad “es” 0,5? Sería un acto inteligente de nuestra parte, una tal corrección?

Nos queda por describir el otro caso posible para una probabilidad bayesiana, el que hemos denominado “hipótesis”.

La principal diferencia entre una “hipótesis” y un “evento genérico” es que, para el primero no disponemos de un conjunto donde inscribirlo. En el caso tanto sea de Nahuel como el de Emilce y Belén, se disponía de conjuntos que nos permitían considerarlo como uno entre otros, en efecto, Nahuel se incluyó en el conjunto de usuarios de las autopistas A y B, y Belén, para evaluar la probabilidad de “cara”, consideró ese lanzamiento como uno entre otros. En fin, podríamos decir que un evento genérico, se caracteriza por su inclusión dentro de un conjunto de casos posibles.

El tipo de contexto “hipótesis” carece de esa posibilidad, su unicidad no nos permite inscribirlo dentro de un conjunto. De esta manera su evaluación numérica se torna “problemática”. De hecho, el ejemplo de Pascal (La gran apuesta) es un problema bayesiano del tipo “hipótesis”. En efecto, en que conjunto inscribiríamos la existencia de Dios? Aquí, la evaluación de la probabilidad de la proposición se torna “subjetiva”, cada persona atribuirá una medida que irá desde 1 (certeza de su existencia) a 0 (certeza de su no existencia).

Acabamos de utilizar el termino “subjetiva” para referirnos a la evaluación de una probabilidad bayesiana del tipo “hipótesis”, sin embargo, esto no es más que una impresión producto de nuestras costumbres. En efecto, la evaluación de una probabilidad bayesiana es siempre subjetiva y si nadie de nosotros cuestiona que la probabilidad de obtener “cara” al lanzar una moneda es 0,5, es porque el argumento de los casos posibles sobre los favorables es el de mayor peso (Bernoulli, 1713; Condorcet, 1805; De Finetti, 1974; de Moivre, 1756; Jaynes, 1995; Laplace, 1795; Leibniz, 1765; Savage, 1968; Shafer, 1994).

Cuando nos enfrentamos a problemas donde no disponemos que de un solo conjunto donde inscribir nuestro evento, nadie duda de la pertinencia del argumento, tal es el caso de la moneda, pero en cuanto aparecen varios tipos de conjuntos, como podría ser el caso de Nahuel (día de la semana, edad, tipo de vehiculo, etc.) la subjetividad de la probabilidad queda develada. ¿Cuál conjunto tomar? En sí, todas las posibilidades de evaluación terminan siendo subjetivas. La única diferencia entonces entre una "hipótesis" y un "evento genérico" es la disponibilidad o no de un conjunto sobre el cual referenciar la evaluación.

En estos últimos párrafos hemos estado alternando entre las dos dimensiones de la probabilidad. Nos hemos referido tanto al significado de la probabilidad como al valor numérico de la misma. Precisamente, los criterios de evaluación de una probabilidad son otra diferencia entre las dos interpretaciones de la probabilidad, presentaremos ahora esta diferencia de una manera esquemática.

2.2. Segunda diferencia: los criterios de evaluación de una probabilidad

Esta es otra de las diferencias entre la probabilidad frecuentista y la bayesiana. Recordemos que la probabilidad frecuentista se refiere a la estabilización de la frecuencia de ocurrencias de un fenómeno dado. En este sentido, el valor numérico de la probabilidad es una característica de la serie de repeticiones (Popper, 1959; von Mises, 1928). Es por ello que se suele decir que la probabilidad frecuentista es "objetiva": dos o más observadores dan el mismo valor de probabilidad. En efecto, dado que la frecuencia de aparición es una propiedad de la serie de repeticiones, dos individuos deberían estar de acuerdo en el valor de la misma.

Podríamos decir que la probabilidad frecuentista en tanto que proporción de aparición de un fenómeno cuando las repeticiones tienden al infinito, no deja de ser un valor teórico. Este valor teórico es sea estimado, sea evaluado a partir de hipótesis a priori. Para el último caso, es común utilizar hipótesis de equiprobabilidad de casos elementales, esto permite deducir el valor límite de la probabilidad, para el primer caso, cuando estas hipótesis carecen de sustento, la probabilidad se estima con una muestra.

Para la probabilidad bayesiana la situación es diferente. El valor de probabilidad no es una característica del objeto como en la frecuentista sino una medida personal. Hemos visto ya un criterio de evaluación para la probabilidad bayesiana: la formula de Laplace (casos favorables sobre posibles). Otro criterio es el principio frecuentista (Gärdenfors et al., 1988; Hacking, 2002; Jeffreys, 1939) según el cual, asignamos un valor de certeza proporcionalmente a la frecuencia de ocurrencia del fenómeno, en otros términos, cuanto mas frecuente ocurre algo, mas creemos en ese fenómeno, así medida de certeza coincide con frecuencia de aparición.

Estos no son los únicos criterios, entre otros figura el llamado principio de razón insuficiente según el cual se asignan los mismos valores de probabilidad a las posibles hipótesis cuando no hay razones para privilegiar una sobre otras (Keynes, 1921).

En realidad, para los bayesianos, la cuestión de la evaluación es más compleja puesto que ellos se interesan más que nada a la evolución de la probabilidad cuando hay un incremento en la información disponible. En otras palabras, la pregunta que les interesa a los bayesianos es: ¿De qué manera se deberían modificar los valores de probabilidad cuando se acaba de conocer una información significativa?

La respuesta a esta pregunta la da la formula de Bayes, de ahí el nombre de la escuela inferencial. Veamos brevemente cómo es considerada esta formula por los bayesianos:

El esquema inferencial bayesiano podría resumirse como sigue:

$$P_B(H_j) = \frac{P_{Hj}(B)}{P(B)} \times P(H_j)$$

donde:

$P(H_j)$: La probabilidad de la hipótesis H_j antes de la llegada de la información B *i*=1,…, *j*,…, *n* (probabilidad *a priori*)

$P_{Hj}(B)$: La probabilidad de *B* bajo la hipótesis H_j

$P(B)$: La probabilidad total del hecho B es: $\sum_{i=1}^{n} P_{H_j}.(B) \times P(H_j)$

$P_B(H_j)$: La probabilidad de la hipótesis H_j luego de la llegada de *B* (probabilidad *a posteriori*).

Esta formula, ampliamente conocida por los profesores de matemática, condensa un criterio objetivo para la reasignación de probabilidades cuando se obtiene información (B) referida al sistema de hipótesis posibles. Veamos un ejemplo: Seguramente el lector poseerá una cuenta de mail, entonces el lector habrá observado entre sus correos entrantes, que algunos son derivados a una carpeta llamada “no deseados” o spams. Pues bien, el algoritmo utilizado para que un mail sea enviado o no a esa carpeta, se basa en la formula de Bayes. El esquema para los mails es el siguiente: Un mail ingresa a la cuenta, a su ingreso, una probabilidad de correo no deseado le es asignada, llamémosle P (Spam). Luego, el texto es analizado en función de las palabras que contiene (entre otras cosas), esa información (B) sirve para aumentar o disminuir su probabilidad de no deseado, de esta manera se obtiene al final del algoritmo la probabilidad P_B (Spam). Si este valor supera un cierto sesgo, el correo es enviado a la carpeta de no deseados para la confirmación del usuario.

Esto, que no es más que un escueto esquema del funcionamiento de nuestras cuentas de mail, es un ejemplo de cómo funciona el procedimiento de evaluación de probabilidades en función de la información disponible. Otro ejemplo, y esta vez de uso escolar, lo constituye el llamado test de detección según el cual se refuerza o no la probabilidad de un diagnostico medical en función de los resultados de los análisis realizados. En fin, los ejemplos son numerosos e incluso son utilizados en algoritmos de inteligencia artificial para que robots guías realicen tomas de decisiones (Min, 2005).

En fin, invitamos al lector profesor de matemática a explorar esta formula tan conocida por nosotros desde este enfoque y descubrirá sentirse muy probablemente familiarizado con este tipo de razonamientos.

Las diferencias entre las dos interpretaciones de la probabilidad no terminan aquí, pero creemos que alcanzan para comenzar a interrogarse sobre algunas cuestiones didácticas que se desprenden de la dualidad de la probabilidad, a continuación analizaremos algunas de ellas.

3. ¿Es necesario incluir los dos enfoques de la probabilidad en la enseñanza?

En párrafos precedentes hemos mencionado que la dualidad de significados es una condición inherente a la noción de probabilidad. En otros términos, pareciera imposible que las dos nociones no aparezcan en la enseñanza.

Para corroborar esta hipótesis, hemos realizado un estudio sobre libros de textos franceses (Carranza & Kuzniak, 2006) y hemos mostrado que esta dualidad subyace a los ejercicios propuestos a los alumnos, aunque la noción institucionalmente reconocida sea la frecuentista. Es decir que, de reproducirse este fenómeno de manera generalizada, podríamos decir que la dualidad de la probabilidad está ya presente en la enseñanza. Una noción, reconocida e institucionalizada por el docente, la otra, la bayesiana, por no contar con el reconocimiento institucional, su conceptualización estaría bajo responsabilidad del alumno.

En otros términos, los dos enfoques ya se encuentran en los ejercicios propuestos a los alumnos, sólo que uno de ellos es institucionalizado. Como se logra un tal ocultamiento? Hemos observado en los manuales analizados que en los ejercicios bayesianos, la atención se centra en aspectos calculatorios, sin ninguna intervención de la dimensión semántica.

4. ¿En qué casos es necesario reconocer el significado correcto de una probabilidad?

Para responder esta pregunta, es necesario considerar las dos dimensiones de la probabilidad: la calculatoria y la semántica. Si proponemos a los alumnos ejercicios exclusivamente calculatorios, no habría en principio necesidad de consagrarse al significado de la probabilidad, puesto que los dos enfoques, tanto el frecuentista como el bayesiano, se sirven de los mismos axiomas de Kolmogoroff.

Sin embargo es necesario remarcar que, presentando a nuestros alumnos sólo ejercicios calculatorios, estaríamos cercenando el concepto a enseñar reduciéndolo a un simple número, lejos, muy lejos de su verdadera función.

En efecto, una de las funciones para la que fue creada la probabilidad es la de herramienta para la toma de decisiones en contextos de incertidumbre (Cox, 1946; Droesbeke, Fine, & Saporta, 2002; Hacking, 2002), y es precisamente cuando la probabilidad interviene en una decisión que emerge su significado. En otras palabras, cuando se solicita justificar una decisión a tomar, será necesario significar el valor de la probabilidad interviniente.

Algunos casos elementales decisionales pueden encontrarse utilizando el criterio de maximización de la esperanza o simplemente el criterio de máxima probabilidad. Estos criterios decisionales, aunque sencillos, constituyen casos muy interesantes para cuestionar las concepciones determinísticas de los alumnos. En tipo de problemas sencillos ya puede verse la estructura argumentativa de la estadística, donde, a diferencia de la matemática deductiva, una decisión es tomada no por el valor lógico de la conclusión sino por el peso de la argumentación. En efecto, por tratarse de contextos indeterminísticos, el valor lógico de la conclusión no es asegurado, es entonces que interviene la razonabilidad de los argumentos presentados.

Decidir una estrategia de un juego en base al criterio de maximización de la esperanza es un ejemplo, en este caso la estrategia elegida no se valida ni invalida por haber ganado ni perdido, sino por la racionalidad de los argumentos expuestos.

Cuando se pregunta sobre los argumentos expuestos, se incita a explicitar el sentido dado a la probabilidad. Es entonces a través de problemas decisionales que encontramos una vía para que el significado de la probabilidad cobre sentido

5. ¿Qué dificultades se prevén al intentar explicitar los dos significados de la probabilidad?

Los conceptos en juego al momento de introducir la probabilidad son elementales, es de esperarse que no haya mayores dificultades con respecto a los contenidos en juego. Las dificultades que hemos observado en nuestras experimentaciones se refieren a la adaptación a los cambios que implica la introducción de aspectos de orden estadístico en una clase de matemática. Veamos algunos ejemplos:

- Métodos de razonamiento. Un problema decisional, puede ser una novedad para la clase de matemática que, habituada a situaciones hipotético-deductivas, no encuentra sustento en argumentos que no aseguran el resultado propuesto. Suele ocurrir que los alumnos, al final de un problema decisional, soliciten al docente la verificación del resultado. Esta solicitud, funcionando como validación es una consecuencia de la resistencia a aceptar este género de argumentos. Suele ocurrir también que un docente ceda ante esta presión de los alumnos. En este caso, el develamiento de la incertidumbre del problema anula la función argumentativa de las herramientas utilizadas en el problema, perdiendo así sentido el procedimiento utilizado.
- Distribución de la palabra en la clase. Tanto sea el discurso decisional como la interpretación de una probabilidad, ambos se realizan en el registro del lenguaje (oral y escrito). Este último, en clase de matemática, se ve intencionalmente relegado por la potencia del lenguaje simbólico de las matemáticas. En lo que respecta al lenguaje oral, nuestra experiencia como docente, como investigador y en particular en nuestras experimentaciones,

nos han mostrado que el docente tiende a monopolizar la palabra en clase. Esto dificulta, por un lado que los alumnos expresen el significado atribuido a una probabilidad y por otro lado, la creación de un consenso grupal respecto a la pertinencia de los argumentos utilizados.

A pesar de esta, y otras dificultades observadas, hemos constatado que, en problemas decisionales tanto sean frecuentistas como bayesianos, y luego de la institucionalización de estas dos nociones, los alumnos no manifiestas signos de resistencia a ninguno de estos dos conceptos ni a su convivencia bajo el mismo termino "probabilidad". Por el contrario, las resistencias las hemos encontrado en los docentes que, al ver la noción bayesiana como valores de certeza, temen cambios rotundos en el contrato didáctico de la clase.

En fin, hemos aquí solo presentado la cuestión de la dualidad de la probabilidad y algunas consecuencias didácticas. Consideramos que si bien las investigaciones son incipientes en este tema, la enseñanza de la dualidad podría resultar menos conflictiva que lo pensado y que su explicitación en clase permitiría un trabajo mas profundo sobre aspectos propios tanto a la noción de la probabilidad como a la estadística inferencial.

Bibliografía

Bernoulli, J. (1713). *The art of conjecturing* (E. D. Sylla, Trans. 2006 ed.). Bâle: Johns Hopkings.

Carranza, P., & Kuzniak, A. (2006). *Dualité de la notion de probabilité et enseignement de la statistique au lycée en france.* Paper presented at the XXXVIII journées de statistique de la Société française de statistique, Clamars, France.

Condorcet, J.-A.-N. (1805). *Eléments du calcul des probabilités* (F.-J.-M. Fayolle, Trans.). Paris: Fayolle, F.-J.-M.

Cox, R. T. (1946). Probability, frequency, and reasonable expectation. *American Journal of Physics, 14*, 1-13.

de Finetti, b. (1937). La prévision: Ses lois logiques, ses sources subjectives, *Annales de l'I.H.P.* (Vol. 7, pp. 1-68): Numdam.

De Finetti, B. (1974). *Theory of probability*:Wiley classics library.

de Moivre, A. (1756). *The doctrine of chances* (A. Millar, Trans. 2002 ed.). London: Strand.

Droesbeke, J.-J., Fine, J., & Saporta, G. (2002). *Méthodes bayésiennes en statistique*.Paris: Sfds.

Gärdenfors, P., Sahlin, N.-E., Ramsey, F., Luce, D., Raiffa, H., Savage, L., et al. (1988). *Decision, probability and utility*:Cambridge University Press.

Hacking, I. (2002). *L'émergence de la probabilité*.Paris: Seuil.

Hacking, I., & Dufour, M. (2004). *L'ouverture au probable*.Paris: Armand Colin.

Jaynes, E. (1995). *Probability theory: The logic of science* (2003 ed.).

St. Louis, U. S. A.: Washington University.

Jeffreys, H. (1939). *Theory of probability* (1960 ed.). Oxford: University Press.

Keynes, J. M. (1921). *A treatise on probability*.London: MacMillan and Co.

Laplace, P. S. (1795). *Essai philosophique sur les probabilités* (1816 ed.). Paris: Pour les mathématiques et la Marine.

Leibniz, G. W. (1765). *New essays concerning human understanding* (A. Langley, Trans. 1916 ed. Vol. 1). Chicago: The Open Court Publishing Company.

Min, H. J. (2005). *Navigation of a mobile robot using behavior network with bayesian inference.* Paper presented at the Mechatronics and Automation.

Pascal, B. (1670). *Pensées* (É. Périer, Trans. 1995 ed.): Num. BNF de l'éd. de: Cambridge (Mass.).

Popper, K. R. (1957). The propensity interpretation of the calculus of probability and the quantum theory. *The Colston Papers, 9*, 65-70.

Popper, K. R. (1959). *The logic of scientific discovery*.London: Hutchinson.

Popper, K. R. (1959). The propensity interpretation of probability. *The British Journal for the Philosophy of Science, X*(37), 25-42.

Savage, L. (1968). Probabilité personnelle et induction. *Mathématiques et sciences humaines, 23*, 5-15.

Shafer, G. (1994). The subjective aspects of probability. In *Subjective probability* (pp. 53-73). Wiley: George Wright and Peter Ayton.

von Mises, R. (1928). *Probability, statistics and truth* (1981 ed.). New York: Dover.

Pablo Carranza, Profesor Adjunto Regular de la Universidad Nacional de Río Negro. Argentina. **pcarranza@unrn.edu.ar**

Jenny Fuentealba, Auxiliar Regular de la Universidad Nacional de Río Negro. Argentina.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 69-83
ISSN: 1815-0640

MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

El uso de juegos para la promoción del razonamiento probabilístico

Hugo Mael Hernández Trevethan; Verônica Yumi Kataoka;
Marcelo Silva de Oliveira

Resumen

La secuencia didáctica que se presenta busca trabajar la idea de probabilidad, su cálculo e interpretación con el uso de dados y que puede auxiliar a los alumnos en etapa pre universitaria (16 a 18 años) a observar fenómenos aleatorios, a levantar datos y a tomar decisiones. Los resultados fueron satisfactorios, pues los alumnos pasaron a un nivel más avanzado de razonamiento probabilístico, y que puede contribuir en la transición al razonamiento estadístico.

Abstract

The didactic sequence here aims to raising the level of the probabilistic reasoning on students in pre-college stage (16-18 years old) with the use of dices. This sequence uses the idea that development of the probabilistic reasoning can help the students to observe random phenomena, to raise data and to make decisions. The results were satisfactory, since students passed to a more advanced level of probabilistic reasoning, which can contribute in the transition to the statistical reasoning.

Resumo

A sequência didáctica que se apresenta procura trabalhar a ideia de probabilidade, seu cálculo e interpretação com o uso de dados e que pode auxiliar aos alunos em etapa pré universitária (16 a 18 anos) a observar fenómenos aleatorios, a levantar dados e a tomar decisões. Os resultados foram satisfatórios, pois os alunos passaram a um nível mais avançado de razonamiento probabilístico, e que pode contribuir na transição ao razonamiento estatístico.

Introducción

En una sociedad cada vez más informatizada, muchos educadores están buscando desarrollar actividades con el apoyo de la computadora teniendo como idea que, en la mayoría de los casos, una de las principales ventajas es la rápida reproducción de resultados de ensayos experimentales; Con todo, no podemos perder de vista que muchas veces el alumno no sabe con certeza lo que ocurre en un proceso de simulación ya que las operaciones ocurren dentro de la computadora. De acuerdo con esta limitante, afirmamos por hipótesis que sería mejor cognitivamente trabajar conjuntamente la experimentación real y la computacional, es decir, una experiencia didáctica en la que los alumnos manipulen primero los materiales concretos, en nuestro caso los dados, para después pensar en el comportamiento de esta misma actividad computacionalmente.

Al trabajar con la combinación de experimentación física y computacional, se tiene el objetivo de permitir a los alumnos alcanzar un nivel superior en razonamiento probabilístico. Considerando que la construcción del concepto de probabilidad debería realizarse a partir de la comprensión de sus tres nociones básicas: percepción del azar; idea de la experiencia aleatoria; y noción de probabilidad. De acuerdo con Dias:

> La *experimentación con fenómenos aleatorios* proporciona al alumno una experiencia difícil de adquirir en su relación con lo cotidiano. La falta de experiencia parece ser la causa de de algunas intuiciones incorrectas en la enseñanza de la probabilidad. Construir experimentos en el salón de clases puede confrontar estas intuiciones incorrectas y dar la base para la construcción de nuevos conocimientos, que sean congruentes con la teoría de Probabilidad (2004).

Como destaca Truran (1994) en el título de su artículo – “What is the probability of...?” – existe la necesidad de que los docentes retomen esta interrogante por medio de cuestiones más sofisticadas, además de involucrar a los estudiantes en la comparación y evaluación de las diferentes formas de la probabilidad. Este autor muestra, por medio de un experimento involucrando el lanzamiento de un dado, que hay por lo menos tres diferentes maneras de estimar la probabilidad de obtener la cara seis y que estos valores pueden ser completamente diferentes. Esas formas se denominan probabilidad Simétrica, probabilidad Experimental y probabilidad Subjetiva.

En la secuencia didáctica que proponemos dimos énfasis a la probabilidad Simétrica, definida por Laplace, siendo esta la herramienta que el alumno utilizó para resolver los problemas propuestos racionalmente, más también fue posible proponer ideas basadas sobre un razonamiento probabilístico totalmente subjetivo y probar algunas hipótesis por medio de la experimentación.

De acuerdo con las ideas discutidas anteriormente Batanero y Godino (2002) trazan algunas orientaciones sobre como ayudar a los niños en el desarrollo del razonamiento probabilístico:

- proporcionar amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios e diferenciarlos de los deterministas;
- estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de esos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad;
- organizar el levantamiento de datos de experimentación de modo que los alumnos tengan la posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias;
- resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por partes; ayudar a apreciar el fenómeno de convergencia, mediante acumulación de resultados de toda la clase, y comparar la confiabilidad de pequeñas y grandes muestras.

Frente a lo expuesto, por medio de la metodología de Resolución de Problemas, nuestro trabajo tuvo como objetivo desarrollar una secuencia didáctica utilizando dados con diferentes números de lados para presentar o recordar algunos conceptos de las probabilidades Clásica, Subjetiva y Experimental, así como ayudar a los alumnos en la toma de decisiones basadas sobre el razonamiento probabilístico. Este estudio fue desarrollado con alumnos, de edades entre los 16 y 17 años, del nivel medio superior en etapa pre universitaria del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), plantel Naucalpan, de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Ciudad de México, México.

Filosofía de la Probabilidad

El uso del concepto de aleatorio, siendo que aún no es formalmente definido, puede ser identificado en registros muy antiguos, tales como las referencias bíblicas a los objetos sacerdotales israelitas *Urim* y *Tumim* (aproximadamente 1.500 a.C.) y la literatura de los rabinos, pasando por referencias arqueológicas tales como los huesos (*astragali*) utilizados por los antiguos romanos como objetos para resultados aleatorios, hasta llegar a las consideraciones de Galileo Galilei al respecto de de principios que definirían el evento aleatorio (Hald, 2003).

También puede considerarse que dichos axiomas de Galileo serían los esfuerzos más antiguos para formalizar el cálculo de probabilidades, pero fue en el siglo XVI que el matemático y jugador italiano Jerónimo Cardano (1501-1576), decidió estudiar las probabilidades de ganar en diversos juegos de azar. Analizó las probabilidades de seleccionar ases de un mazo de cartas, de obtener “sietes” con dos dados, y publicó los resultados de estas investigaciones en un manual para jugadores llamado “Liber de Ludo Aleae” (El libro de los juegos de azar – 1526).

De acuerdo con Lopes y Meirelles (2005), Cardano es considerado el iniciador de la Teoría de Probabilidades, ya que fue el primero en hacer observaciones del concepto probabilístico de un dado “honesto” y en escribir un argumento teórico para calcular probabilidades. Él afirmó que, al jugar dados, la probabilidad de obtener uno, tres o cinco era la misma que la de obtener dos, cuatro o seis.

Sin embargo, el consenso es que las cartas intercambiadas entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal al respecto del problema del cálculo de probabilidades en juegos de azar son la inauguración de la teoría matemática de este cálculo. Después de Fermat y Pascal se tienen las contribuciones de Pierre Simón de Laplace y Carl Friedrich Gauss, entre otros, en el siglo XIX (Stigler, 1986), y la profusión de estudios en el siglo XX que culminaron con la teoría axiomática de A. N. Kolmogorov.

El cálculo de probabilidades tiene en su literatura más antigua un gran esfuerzo para la definición formal (matemática) del concepto de probabilidad. Una conclusión parsimoniosa trataría tal concepto en posesión de dos interpretaciones, una llamada *frecuentista* y la otra *grado de creencia o fe* (Folks, 1981). La primera identifica la probabilidad de un evento con la frecuencia relativa de ese evento en una larga secuencia (*long run*) de repeticiones del fenómeno que contiene a este evento, y la segunda con una medida subjetiva de la posibilidad de que tal evento ocurra. Restaría entonces el problema de como *calcular* (o estimar) una probabilidad. Inicialmente presentaremos algunas de las concepciones (o abordajes de estimación) referentes a probabilidades clásica (o Laplaciana), frecuentista (o experimental) y subjetivista, ya que necesitamos tener claridad en los conceptos de cada una de ellas y de sus conexiones para verificar la adecuación del razonamiento probabilístico de los alumnos en cada una de las situaciones que fueron presentadas. El abordaje clásico calcula la probabilidad como una razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, la frecuentista calcula (estima) como una frecuencia relativa en repeticiones, y la subjetiva estima una probabilidad por determinación arbitraria (aunque calibrada) del analista. Desarrollaremos más detalladamente estos abordajes a continuación.

Podemos decir que el primer intento más sustentado para la definición de la probabilidad con rigor matemático se debe a Laplace a través de la publicación de la obra "Teoríe analytique des probabilités", en 1812. Conocida como concepción clásica, la probabilidad es definida por este autor, como ya afirmamos, como la proporción entre el número de casos favorables en relación con el número total de casos posibles, siempre que todos los resultados sean admitidos como igualmente probables de suceder. Por Godino et al.:

> Los juegos de azar basados sobre dados, monedas, extracción de canicas en urnas, se enmarcan en esta perspectiva teórica por tratarse de fenómenos cuya variable es discreta y porque se supone que siempre es posible seleccionar, como espacio muestral, un conjunto de eventos elementales que garantizan equiprobabilidad (1996).

Otro modo de abordar la probabilidad es en una perspectiva frecuentista, es decir, a partir del cálculo de las frecuencias relativas de ocurrencias de eventos provenientes de experimentos repetidos. La teoría frecuencial, según Godino et al. (1996) fue defendida en 1919 por Richard von Mises a partir de la obra “Probability, Statistics and Truth”; a pesar de que, ya en 1888, John Venn defendía explícitamente el cálculo de probabilidad a través de las frecuencias relativas de los eventos ocurridos. La principal característica de este enfoque es que el valor matemático de la probabilidad emerge del proceso de experimentación.

A pesar de que en este abordaje no se aplica la obligatoriedad de simetría y equiprobabilidad a los experimentos aleatorios, sin embargo, es necesario que haya un número significativo de repeticiones de un experimento y que sus resultados muestren señales de estabilización (Gonçalves, 2004).

Podemos, también, interpretar la probabilidad de forma subjetiva, como expresión de la creencia o percepción personal, y no fundamentada en la frecuencia de ocurrencia. De acuerdo con Canavos la probabilidad subjetiva:

> Trata de medir la confianza que un individuo expresa sobre la veracidad de un fenómeno tomando en cuenta su propia experiencia o conocimiento sobre la situación de estudio. En este caso, diferentes personas pueden atribuir diferentes valores de probabilidad para un mismo evento (1984).

Truran (1994) afirma que “en un dado ‘honesto’ surge *solamente una probabilidad* simétrica, pero hay un número infinito de probabilidades Subjetivas e Experimentales”. En el salón de clases no es suficiente solo hablar de los diferentes tipos de probabilidad; necesitamos elaborar cuestiones como ‘al lanzar un dado 100 veces encontramos una probabilidad Experimental de obtener la cara seis y, ¿cuál es la probabilidad Subjetiva que atribuirías a la obtención de la cara seis y cuál es la razón para esta elección?’ El nivel de la pegunta propuesta genera una variedad de respuestas y, de acuerdo con este autor, tales variaciones fortalecerán las oportunidades educacionales valiosas en la comprensión de la interrelación entre las tres formas de la probabilidad, así como de la naturaleza del modelo matemático.

A nuestro modo de ver, de las tres definiciones de probabilidad, la Clásica exige al alumno una capacidad de pensamiento probabilístico más desarrollada que las otras dos. Pero la probabilidad experimental permite observar el fenómeno aleatorio y hacer predicciones sobre el comportamiento del fenómeno y, como ya referimos anteriormente, Batanero y Godino (2002) establecen esos puntos como orientaciones en el desarrollo del razonamiento probabilístico. Entonces trabajamos con los tres abordajes, adecuando cada uno de ellos a las necesidades de las actividades y bajo la idea de la metodología de Resolución de Problemas.

Resolución de Problemas

Investigaciones al respecto han colocado la metodología de Resolución de Problemas como una de las más recomendadas en la enseñanza de las Matemáticas. Pero al mismo tiempo esta metodología ha enfrentado cierta reticencia en aquellos casos en los que se enfrenta al estudiante con un problema que él encuentra como un planteamiento innegablemente matemático.

Este rechazo puede deberse a malas experiencias previas del alumno con la Matemática, a deformaciones culturales, entre otros factores. Pero se ha encontrado que una posible vía para evitarlo es plantear el problema dentro del contexto del juego. Esto lleva al estudiante a explorar sobre el juego para conocerlo, a establecer y probar sus estrategias y dedicar esfuerzo a encontrar la “solución” que le permita ganar en el juego.

Según Borin,

> La resolución de problemas debe ser la metodología elegida para el trabajo con juegos, por ser más adecuada para desarrollar una postura crítica ante cualquier situación que exija una respuesta. Así, cada hipótesis/estrategia formulada o cada jugada desencadena una serie de cuestionamientos como: ¿Es esa la única jugada posible? Si hubiera alternativas, ¿cuál escoger y por qué escoger esta o aquella? Terminado el problema o la jugada, ¿cuáles fueron los errores y por qué se cometieron? ¿Aún es posible resolver el problema o ganar en el juego, si se cambiaran los datos olas reglas? (1996, p.10).

En este sentido, se ha sugerido diseñar didácticas por medio de juegos, en el entendido de que, para que la metodología de Resolución de Problemas funcione, el juego en sí mismo o la sola intención de enfrentar a los estudiantes con una situación problemática no son suficientes. Debe tenerse una estrategia de enseñanza que permita aprovechar las características de la metodología y del juego para lograr que los alumnos puedan construir sus propios aprendizajes a partir del razonamiento.

Esto puede ser más claro a la luz de lo expuesto por Abrantes (1989) en su artículo “Um (bom) problema (nao) é só...”, en referencia a lo que es un problema. Este mismo autor establece lo que es una situación problemática y lo que en un principio no lo es. Con respecto a las primeras habla de que son situaciones en las que el contexto es problemático y al alumno se le estimula a “generar preguntas, hacer conjeturas y, eventualmente, probarlas”.

En referencia a las segundas, establece que no son realmente situaciones en las que se esté formulando un problema, pero en las que se pretende la exploración del contexto por parte del alumno. Por Abrantes:

> Explorar tiene aquí el sentido normal de la palabra: entrar en terreno desconocido, tomar datos, detectar diferencias, ser sensibles a las repeticiones y a las analogías, reconocer regularidades y patrones –o por ventura en un sentido aún más fuerte – investigar, tratar de encontrar, tratar de descubrir (1989).

Bajo estas ideas, la estrategia que presentamos implica precisamente que los estudiantes razonen, probabilísticamente, para tomar decisiones respecto a un juego, bajo un esquema de razonamiento inductivo.

Igualmente, el diseño didáctico se orientó dentro de la concepción pedagógica que se ha propuesto para "estrategia didáctica" en el Colegio de Ciencias y Humanidades:

> Una estrategia didáctica es una secuencia de acciones sistemáticas integradas a procedimientos y actividades dirigidas a facilitar los aprendizajes de los alumnos, especificados en el programa de una asignatura; para que el estudiante, de manera consciente y autónoma, tome decisiones que le permitan familiarizarse con la situación o problemática que se le presenta y recupere de su experiencia lo que conoce al respecto.
>
> En la estrategia, el profesor especifica cuáles son los propósitos, los aprendizajes y las actividades a desarrollar, delimita los tiempos en que se pretende realizar cada una de estas tareas y los recursos necesarios para llevarlas a cabo, la forma en que evaluará el trabajo realizado tanto por él como por el alumno.
>
> En su estructura la estrategia establece tres etapas: **planeación**, **ejecución** y **evaluación;** sin olvidar que todo este proceso no es algo predeterminado, sino flexible y dinámico.
>
> Finalmente, toda estrategia asume características específicas dependiendo del contexto educativo en que se sitúa y de la propuesta disciplinaria a la que se aplique, así como al estilo propio de cada profesor (Cazadero, 2006).

En el presente trabajo, con el planteamiento de esta metodología, fueron utilizadas tanto la manipulación con material concreto (simulación física) como la simulación computacional.

Material Concreto

Es importante resaltar que el uso de materiales concretos no puede ser indiscriminado y debe realizarse con plena conciencia de la estrategia y de la manera en la que los materiales pueden apoyar al logro del propósito educativo. Ningún material es válido por sí solo. Monteiro, citado por Ribeiro afirma:

> Algunos profesores creen que el simple hecho de utilizar el material concreto vuelve sus clases 'constructivistas' y que eso garantiza el aprendizaje. Muchas veces el estudiante, además de no entender el contenido trabajado, no comprende por qué el material está siendo utilizado (2005).

Además de eso, se debe tener cuidado para que la actividad esté en consonancia con la realidad de los alumnos, ya que si esto no fuera así, el mismo material puede convertirse en una traba pedagógica, un objeto tanto o más abstracto que el concepto que se pretende trabajar. En el caso de los dados, el objeto "dado", la noción de "dado" es muy cercana a la realidad del alumno. Pero en este trabajo introducimos una variante atractiva para los estudiantes: no solo les presentamos el tradicional dado de seis caras, sino también dados de 2, 4, 8, 10, 12, 20, 30 y 100 caras (Figura 1).

Fig. 1. Dados utilizados en la secuencia didáctica

En la manipulación de los dados el alumno utiliza en un principio solo los conceptos de probabilidad clásica, pero repitiendo el mismo proceso una cierta cantidad de veces, naturalmente comienza a transitar de la teoría hacia las nociones de la probabilidad experimental. Por ello, el uso de la simulación lúdica en el aprendizaje puede fomentar los siguientes cuestionamientos: ¿Estaremos siendo tendenciosos de alguna manera? ¿Los experimentos fueron realizados bajo condiciones idénticas? ¿Pueden ser considerados como independientes?

Sobre esos cuestionamientos Carvalho y Oliveira (2002) agregan que no es posible evaluar con precisión la probabilidad, porque el número de ensayos siempre es limitado, a pesar de que podemos contar con la Ley de los Grandes Números. Fischbein (1987), reforzando esa idea, afirma que "la experiencia humana es necesariamente limitada en tiempo, espacio y en el conjunto de posibilidades". El conocimiento científico que se adquiere a partir de las experiencias empíricas siempre es limitado, ya que las conclusiones necesitan ser más amplias que aquellas que obtenemos por observación. En este escenario se refuerza la idea de la necesidad de promover una interacción entre la experimentación real y la computacional.

Simulación Computacional

Los beneficios de utilizar la simulación computacional en contextos educativos son de sobra conocidos y pueden ampliarse si el alumno puede construir el modelo que quiere simular. A través del proceso de modelación, el alumno puede evaluar no solamente el modelo, sino también su propio conocimiento sobre el fenómeno en sí y observar con mejores bases teóricas el fenómeno de convergencia. Esto es, los alumnos aprenden construyendo su propio conocimiento y dándole sentido.

"La modelación es un proceso que es desencadenado por el alumno cuando le es solicitado el reconocimiento del modelo probabilista que mejor representa e interpreta la situación de la realidad que él quiere estudiar" (Coutinho, 2001).

Una ventaja estimulante en el uso de la computadora para el alumno, que ha sido sugerido en la literatura, es su capacidad de realzar la comprensión de conceptos abstractos o difíciles por medio de experiencias inductivas (Kersten, 1983; Dambolena 1986; Gordon y Gordon 1989; Shibli 1990, entre otros).

Actualmente contamos con diversos programas, desde hojas de cálculo hasta softwares más especializados en Probabilidad y Estadística que ejecutan procesos de simulación computacional. Pero la mayoría de ellos presentan un problema: fueron diseñados para "*hacer*" Estadística y no para "*enseñar*" Estadística. En particular, para este trabajo se utilizó el software Fathom (Key Enterprises, 2001), tanto por presentar ambas características, como por ser un programa ya adoptado por el CCH.

El programa tiene una estructura dinámica, muy simple y que facilita la interpretación de resultados, permitiendo que incluso alumnos que no hayan trabajado anteriormente con él, lo hicieran de manera satisfactoria y eficiente.

Un posible factor de una discusión mayor es que muchas escuelas no cuentan con ningún tipo de soporte computacional en el salón de clases para la realización de un procedimiento similar, pero no abordaremos ese problema aquí al no ser el objetivo de nuestro trabajo.

Secuencia Didáctica

Percibimos por medio de una evaluación investigativa y subjetiva que los alumnos del CCH con los que trabajamos (con edades entre los 16 y 18 años) llegaron a esta etapa (pre universitaria) de estudios con conocimientos de probabilidad casi inexistentes o incipientes, aunque con algunas nociones que pudimos rescatar para ayudar al desarrollo del razonamiento probabilístico más "formal".Es decir, ellos ya tenían por lo menos conocimiento de lo que podría ser una probabilidad grande o pequeña, y de lo que ello podría significar en una toma de decisiones.

Frente a este hecho, se la secuencia didáctica[1] propuesta en este trabajo fuera aplicada inmediatamente al inicio de la unidad de Probabilidad, probablemente correríamos el riesgo de "fracasar" pedagógicamente, de modo que los alumnos cursaron inicialmente una unidad programática de Probabilidad elemental de 26 horas.

Solamente después de esa fase es que se presentó la situación problema a los alumnos, que de acuerdo con el objetivo general, tuvo los siguientes objetivos específicos:

- Presentar la definiciones de las probabilidades: clásica, frecuencial y subjetiva, así como sus mecanismos de cálculos;
- Describir espacios muestrales;
- Identificar la regularidad estadística como propiedad de los fenómenos aleatorios;
- Auxiliar a la toma de decisiones basada en el razonamiento probabilístico.

[1] Los retos con los dados que presentamos fueron adaptados de un juego de rol.

Dividimos esta secuencia didáctica en actividades, nombradas como propuestas, y que describiremos y discutiremos simultáneamente, pero antes presentaremos una descripción general que las guió.

Descripción general

Como ya se dijo anteriormente, comenzamos la aplicación de las propuestas después de haberse trabajado los conocimientos elementales de probabilidad. Entonces, de un modo muy informal, hicimos la siguiente propuesta general a los alumnos: ¿Querrían irse ya y dar por terminado el curso ahora? Para eso podemos asignar las calificaciones del curso por medio de un juego de dados.

La idea era que se el alumno ganaba, se le daría la nota más alta y podría dejar el curso, pero si el profesor ganaba, el alumno estaría reprobado, y entonces de un modo o de otro, podría dar por terminado el curso. Comenzamos entonces a presentar una secuencia de cuatro propuestas de juego, siendo que en cada propuesta una tirada valdría cinco puntos y ganaría la partida quien completara primero 100 puntos. Esto es, buscamos presentar indirectamente a los alumnos que habría la necesidad de utilizar nociones de probabilidad experimental, ya que tendrían que repetir el proceso un mínimo de 20 veces para que alguna de las partes ganara y acabar así la partida.

Vale destacar que ese reto, obviamente, fue dado a los alumnos como una situación hipotética, ya que no consideramos pedagógicamente correcto que el profesor negocie las calificaciones con los alumnos de esa manera. Entonces encararon el desafío apenas como un juego y como una manera de involucrarlos en el asunto, sea por la forma en la que se colocó la situación, o por la posibilidad del juego y la apuesta en el salón de clases, o porque encontraron interesante aún siendo irreal el tener una posibilidad de finalizar el curso con un juego, sin tener que pasar por otra forma de evaluación.

A cada pareja de alumnos se le entregó un juego de copias con una serie de preguntas impresas referentes a los desafíos, así como las instrucciones para que, al final de la discusión con respecto a los juegos llevados a cabo con los dados, realizaran la simulación por medio de la computadora también por parejas.

En total se presentaron a los alumnos cuatro desafíos, los cuales se discutieron a medida que iban apareciendo.

Primera propuesta de juego

<u>Descripción</u>

Para el primer juego mostramos al grupo un dado de cuatro y otro de seis caras, y presentamos la siguiente propuesta:

Ustedes van a lanzar el dado de cuatro caras, y nosotros lanzaremos el dado de seis, los dos una sola vez; quien saque el número mayor gana la tirada.

<u>Comentario</u>

Los estudiantes encontraron algo extraño en la propuesta, entonces comenzaron a analizar el juego. Algunos pensaron inicialmente que el juego era honesto y se mostraron dispuestos a participar. Pero la mayoría pidió un poco de tiempo para pensar, pues aún no estaban convencidos de lo idóneo de las reglas. Finalmente un alumno indicó que nosotros teníamos ventaja, pues ellos solo podrían llegar como máximo a un resultado de cuatro, mientras que nosotros podríamos llegar hasta seis. Una vez que se alcanzó esta conclusión, pedimos a los alumnos que la redactaran en sus propias palabras y que la anotaran en las hojas que se les había entregado. Cerramos, entonces, esta fase acordando que de hecho el juego no era equitativo y lanzamos la segunda propuesta.

Segunda propuesta de juego

Descripción

Para el segundo juego, mantuvimos el dado de cuatro caras, utilizamos uno de ocho, y propusimos:

Ahora vamos a lanzar el dado de ocho caras una sola vez y ustedes continúan con el de cuatro caras, pero lo van a lanzar dos veces y sumar los resultados. Solo que ahora gana quien obtenga el número menor.

Comentario

Nuevamente, en un primer momento, un grupo aceptó el juego como equitativo, pero la experiencia de la primera propuesta los dejó más cautelosos y pensaron que podría ser una “trampa numérica” más, entonces la mayoría no accedió tan rápido a jugar. A este respecto, otro grupo comenzó a investigar de qué forma podrían estar siendo “engañados”, y para ello comenzaron a lanzar el dado de cuatro caras con la intención de verificar el comportamiento del juego para la obtención del valor menor. Y de nuevo, un alumno estableció que podríamos obtener un “uno” como valor menor, pero que ellos solo podrían sacar “dos” como resultado menor. Estuvimos de acuerdo de nuevo, así que pedimos a los estudiantes que también anotaran estas observaciones en las copias, con sus propias palabras, y presentamos la tercera propuesta.

Tercera propuesta de juego

Descripción

En el tercer juego tenemos ahora los dados de seis y doce caras, y una propuesta más:

Los otros dos juegos no fueron equitativos. Ahora vamos a hacerlo así, ustedes lanzan el dado de seis caras dos veces y suman los dos resultados; nosotros lanzamos una vez el dado de doce. Y quien saque primero un doce gana.

Comentario

En este punto, los alumnos no tenían ya la menor confianza en lo que decíamos, aunque con todo un mayor número de alumnos de los que se observaron en las otras dos propuestas consideraron el juego como equitativo y se mostraron dispuestos a apostar. Pero aún teníamos el grupo de los altamente desconfiados, entonces comenzamos a instigar el razonamiento de los alumnos haciendo algunas preguntas:

¿Están ustedes totalmente convencidos de que el juego es equitativo? ¿Cómo podrían saber si lo es? ¿Cuál sería la probabilidad de obtener suma de doce? ¿Y cuál sería la nuestra?

La mayoría inmediatamente respondió que tendríamos igual probabilidad y que sería de 1/12. Pero como en sus apuntes de la parte introductoria de probabilidad tenían el experimento de la suma de dos dados de seis caras, se dieron cuenta del error y reconsideraron que en realidad tendrían a penas una probabilidad de 1/36. De nueva cuenta les solicitamos escribir estas observaciones, y pasamos entonces a la última propuesta.

Cuarta propuesta de juego

Descripción

Iniciamos comentando que siempre tomamos el dado con mayor número de caras e que dejamos para los alumnos el de menos número de caras, y con eso ellos podrían estar teniendo la idea de que era ese el hecho que los dejaba siempre en desventaja en las partidas. Entonces entregamos al grupo uno de 20 caras, y nos quedamos con un dado de diez caras, y con la última propuesta:

Ustedes han jugado siempre con el dado de menos caras y nosotros con el dado de más caras. Ahora ustedes van a lanzar el dado de 20 caras una vez, y nosotros lanzaremos el dado de diez caras dos veces y sumaremos los resultados. Ganará quien saque un diez.

Comentario

El cambio de tener ahora el dado con "más lados" causó dudas en algunos acerca de si esta vez tenían la ventaja en la partida, pero tampoco creían más en nuestra disposición de presentarles un juego equitativo. Además, después de la experiencia con la propuesta anterior, la mayoría ya consideraba importante calcular las probabilidades que tendrían cada uno de los jugadores. Después de algunos minutos, muchos percibieron que teníamos la ventaja para obtener diez como resultado e inclusive describieron todas las posibles parejas, un total de nueve, para sacar la suma de diez.

Pero al momento de comparar los resultados, tuvieron dificultad para argumentar que 9/100 es mayor que 1/20, mostrando una deficiencia con el concepto de fracción. Entonces acabaron por apelar a un "falso intuitivo", al decir que nuestra probabilidad era mayor no tanto por la comparación de las fracciones, sino por la experiencia de las propuestas anteriores. Finalmente, con una pequeña intervención de nuestra parte, consiguieron establecer la comparación correcta y argumentar por que el juego no era equitativo. Una vez más, estas observaciones debieron ser redactadas por los estudiantes en sus copias. En seguida, abrimos una discusión con el grupo sobre los juegos presentados.

Discusión con el grupo

Iniciamos la discusión con la siguiente pregunta: *¿Ustedes consideran que no fuimos "honestos" con nuestras propuestas?*

La mayoría consideró que sí, por lo que tuvimos que reforzare dos características de los juegos: que los dados eran honestos y que no hicimos ningún tipo de trampa. Lo que ocurrió es que calculamos previamente todas las probabilidades y optamos siempre por la jugada que nos traería ventaja.

Hecho esto, les pedimos que respondieran a las preguntas de la cinco a la ocho, cuestionándoles en ellas acerca de la equidad del juego y de las probabilidades que ellos consideran que se tienen de ganar en una tirada de cada partida.

De esta forma se concluyó que calcular las probabilidades de algún fenómeno aleatorio puede ser de mucha utilidad en la toma de decisiones, no solo para un tema tan banal como un juego de dados, sino para otros mucho más importantes como algunas pruebas que se hacen en la industria o la salud, entre otros. Hicimos notar también que aunque inconcientemente, indirectamente, ellos tomaron una decisión durante las partidas, que sería de no jugar.

Realizamos entonces otra pregunta, la misma que aparece en la actividad impresa: *Si hubieran jugado, ¿podrían haber ganado alguna partida?*

Respondieron que sí, pero que consideraban las posibilidades muy remotas. Es decir, comenzaron a pensar en los conceptos de aleatoriedad y de experimentación.

Después, discutimos con los alumnos el por qué el desafío se hizo a varias tiradas y no a una sola, y que anotaran sus consideraciones en la pregunta diez.

Antes de pasar a la simulación con la computadora, les pedimos que indicaran que probabilidades consideraban que tendrían de ganar cada una de las cuatro partidas. Después, se discutió sobre la alternativa de revisar estas cantidades a partir de la repetición de muchos lanzamientos de acuerdo a las reglas establecidas, y la pertinencia de simulara estas repeticiones por medio de la computadora (preguntas once a catorce).

Los puntos quince a 37 de la actividad corresponden a las instrucciones de simulación requeridas por el paquete Fathom, que fue el que elegimos para que los estudiantes trabajaran esta parte, así como algunos cuestionamientos respecto a comparar las observaciones realizadas en la simulación con las respuestas que dieran en las preguntas iniciales (propuestas de probabilidades, honestidad del juego, pertinencia de arriesgarse a jugar). En los puntos referentes a las instrucciones para la simulación, colocamos imágenes que permitieran al estudiante manejar el paquete aún siendo que era la primera vez que trabajaban con él.

Finalmente entregamos al grupo los dados involucrados en los juegos anteriores, así como los de 2, 30 y 100 lados, y les pedimos que diseñaran un juego con características similares a los presentados, esto es, que aparentaran ser equitativos, sin serlo en realidad. Además, los alumnos deberían decir cuál sería la tirada para ganar y de qué manera jugarían para tener la ventaja. También les pedimos diseñar otro juego que no solo aparentara equidad, sino que además efectivamente la tuviera. Al final, se discutió de nuevo sobre el uso del cálculo de probabilidades como herramienta en la toma de decisiones; las observaciones al respecto fueron vaciadas por los alumnos en la última pregunta de la actividad.

Verificamos que la mayoría de los alumnos consiguió describir alguna propuesta de juego aceptable, aunque hayan sido apenas reproducciones de la segunda y la cuarta propuestas con modificaciones apenas en las parejas de dados involucrados. Por ejemplo, ellos lanzarían una vez un dado de 30 caras y su oponente tres veces uno de diez caras, usando la suma de los resultados, y ganando quien obtuviera treinta.

Algunos alumnos, aquellos más participativos en las clases, elaboraron juegos más complejos, del estilo de la tercera propuesta.

Pero en contraparte tuvimos alumnos, los de mayores dificultades de aprendizaje, que no consiguieron dar una propuesta de acuerdo a las especificaciones. Así, clasificamos las deficiencias observadas en el razonamiento probabilístico de estos alumnos en tres niveles:

1. No resolvió nada.

2. Presentó alguna propuesta, pero el juego no aparentaba equidad.
3. La propuesta era aceptable, pero no consiguió tener la ventaja.

Conclusiones y trabajos futuros

Percibimos una evolución de mejoría en el razonamiento probabilístico de los alumnos a cada propuesta de juego presentada, siendo que los mismos consiguieron verificar que era posible utilizar el concepto de probabilidad experimental, en el hecho de que siempre simulaban algunas jugadas para comprender el comportamiento teórico del juego. Además, incorporaron la probabilidad subjetiva en el análisis, una vez que desconfiaran del juego intentaban descubrir en dónde estaba sucediendo la "deshonestidad". Es decir, estas dos concepciones de probabilidad se mostraron útiles siempre como el punto de partida para entender la teoría.

Por otro lado, los alumnos percibieron que apenas la observación y la intuición no eran suficientes en la resolución de las propuestas, siendo necesario de hecho utilizar la teoría Clásica en la decisión final. Como ya se comentó anteriormente, la mayoría de los alumnos consiguió describir su propio juego, saliendo de aquel estado inicial de "inercia" del razonamiento probabilístico.

En la evolución de este proceso de aprendizaje, el uso de la simulación computacional de esos fenómenos mostró ser muy eficaz para promover la dialéctica entre el punto de vista frecuentista y el ponto de vista clásico de probabilidad.

Vislumbramos También con esa secuencia didáctica presentada que los alumnos al comprender bien el concepto de probabilidad podrán tener un mejor desempeño en estudios futuros de los conceptos de Inferencia Estadística. Es decir, un buen desarrollo del razonamiento probabilístico puede ayudar al alumno en la transición hacia el razonamiento estadístico, haciendo así la fusión de lo que se denomina Estocástica. Obviamente, sabemos que para verificar tales impresiones tendríamos que desarrollar un trabajo de formación estadística e investigación continua con ese mismo grupo de alumnos.

Para finalizar, tenemos como propuesta futura la aplicación de esta misma secuencia didáctica con alumnos de Enseñanza Media en Brasil, mas específicamente en la ciudad de Lavras, Minas Gerais. La idea sería hacer posibles comparaciones del razonamiento probabilístico de estos jóvenes, es decir, hacer una averiguación del nivel cognitivo en edades de 16 a 17 años, con posiblemente realidades de enseñanza diferentes.

Bibliografía

Abrantes, P. (1989): Um (bom) problema (não) é (só). *Educação e Matemática*, São Paulo, v. 8, 7-10.

Borin, J. (1996): Jogos e Resolução de Problemas: *Uma estratégia para as aulas de Matemática*. 2. ed. São Paulo. IME-USP.

Batanero; C. Godino, J. (2002): *Estocástica y su didáctica para maestros: Proyecto Edumat-Maestros* .Granada: Universidad de Granada.

Canavos, G. (1984) *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos*. México: McGraw-Hill.

Carvalho, D.; Oliveira, P. (2007): Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na Licenciatura em Matemática: clássica, frequentista, subjetiva e formal. *In: 25a. Reunião Anual da Anped,* 2002, Caxambú Anais eletrônicos. Rio de Janeiro. ANPED, 2002. Acesso en enero 2009, disponible en: http://www.anped.org.br/reunioes/25/excedentes25/dionelucchesicarvalhot19.rtf..

Cazadero et al. (2001): *Propuesta de noción de estrategia didáctica*. Universidad Nacional Autónoma de México, Colegio de Ciencias y Humanidades. México, 2006.

Coutinho, Cileda de Q e S. *Introduction aux Situations Aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II.* 2001. p.338. Thèse (Doctorat), Université Joseph Fourier. Grenoble.

Dambolena, I. G. (1986): Using Simulation in Statistics Courses. Terre Haute (IN), *Collegiate Microcomputer*, v. 4, 339-344.

Dias, A. L. (2004): *Projeto GESTAR:* ensino de probabilidade. Brasília: MEC.

Kersten (1983): Computer Simulations to Clarify Key Ideas of Statistics. *The Two-Year College Mathematics Journal***,** Washington, v.14, n. 5, 416-421.

Fathom (2001): Dynamic Statistics (TM) Software. KCP Technologies. William Finzer, Project Director, Programmer and designer. Software.

Fischbein, E. (1987): *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: D.Reidel Publishing Company.

Folks, J. L. (1981): *Ideas of Statistics*. New York: John Wiley and Sons.

Godino, J.; Batanero, C.; Cañizares, M.J. (1996): *Azar y Probabilidad*. España: Editorial Síntesis.

Gonçalves, M.C. (2004): *Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica.* 2004.150p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Gordon, F.S.; Gordon, S.P. (1989): Computer Graphics Simulations of Sampling Distributions. Terre Haute (IN), *Collegiate Microcomputer*, v. 7, p.185-189.

Hald, A (2003): *History of Probability and Statistics and their applications before 1750.* New York: John Wiley and Sons.

Lopes, C.E.; Meirelles, E. (2005): Estocástica nas séries iniciais. *In: XVIII Encontro Regional de Professores de Matemática*, 2005, Campinas. Campinas: UNICAMP.

Ribeiro, R. (2005): Material concreto: Um bom aliado nas aulas de Matemática. *Revista Nova Escola*, São Paulo, ed. 184, 40-43.

Stilger, S.M. (1986): *The history of Statistics*. Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press.

Shibli, M.A. (1990): A Two-Stage Exercise on the Binomial Distribution Using MINITAB. Terre Haute (IN), *Collegiate Microcomputer*, v. 8, n.1, 55-60.

Truran, J. (1994): What is the probability of...? *The Australian Mathematics Teacher*, v.50, n.3, 28-29.

Hugo Mael Hernández Trevethan. Profesor Asociado de Tiempo Completo en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), antigüedad de 15 años en esta institución, se ha desempeñado desarrollando los programas de estudio vigentes de Estadística y Probabilidad, libros y materiales didácticos, cursos y materiales en línea, y apoyando a la formación de profesores**.** **animal_estocastico@hotmail.com**.

Verônica Yumi Kataoka, Dra. en Estadística y Experimentación Agropecuaria por la Universidad Federal de Lavras, MG, Brasil. Profesora Doctora en el Programa de Pos Graduación en Educación Matemática de la Universidad Bandeirante de San Paulo (UNIBAN), Línea de investigación Enseñanza y Aprendizaje de La Matemática y sus Innovaciones, con énfasis en la Educación Estadística. **veronicayumi@terra.com.br**.

Marcelo Silva de Oliveira. Dr en Ingeniería (Ingeniería de Producción) por la Universidad de San Paulo. Profesor asociado de la Universidad Federal de Lavras. Tiene experiencia en el área de Probabilidad y Estadística, actuando principalmente en los siguientes temas: Geoestadística, Gestión de Calidad, Control Estadístico de Calidad, Fundamentos de Estadística y Enseñanza de la Estadística. **marcelo.oliveira@ufla.br**.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 83-102
ISSN: 1815-0640

MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

La comprensión de gráficas de porcentaje de variación en situaciones cotidianas

María C. Espinel; Alicia Bruno; Inés Plasencia

Resumen

Los porcentajes aparecen a diario en nuestra vida de muchas formas, una de ellas es para poner de manifiesto cambios que expresen aumento o disminución (crecimiento o decrecimiento) del valor de una variable, y con frecuencia ese cambio se muestra mediante un gráfico. El estudio que se presenta recoge en qué medida estudiantes universitarios comprenden y perciben la variación, expresada por porcentajes, en el uso cotidiano y cómo lo aprecian cuando se refleja sobre un gráfico con rectángulos. Los resultados del estudio sugieren que los estudiantes tienen una débil comprensión del uso del porcentaje como indicador de cambio, por lo que la formación matemática básica debería incidir en concepto.

Abstract

The percentages appear daily in our lives in many ways, one of them is to highlight changes expressing increase or decrease of the value from a variable, and often this change is shown by a chart. The study presented here reflects the extent to which students understand and perceive the change, expressed in percentages, in common usage and how they appreciate it when it is reflected on a graph of rectangles. The study results suggest that students have a weak understanding of this concept, and therefore the basic mathematical training should stress on the use of the percentage as a statistic indicator of change.

Resumo

Em muitos aspectos diários da nossa vida aparecem percentagens. Nomeadamente, para destacar as mudanças de uma variável que aumenta ou diminui. Muitas vezes esta mudança surge na forma de um gráfico. O estudo apresentado reflecte em que a medida estudantes universitários compreendam e percebem a variação, expressa em percentagens, numa situação de uso comum ou numa situação apresentada na forma de um gráfico de rectângulos. Os resultados do estudo sugerem que os estudantes têm uma fraca compreensão deste conceito pelo que a sua formação inicial em matemática deveria incidir mais sobre a utilização da percentagem como indicador de variação.

1.Introducción

Los cambios o variaciones que sufre el valor de una variable en el tiempo se acostumbra, en muchas ocasiones, a presentar utilizando porcentajes. Estos porcentajes aparecen en los medios de comunicación y están presentes en nuestra vida cotidiana. Tópicos como “el IPC ha subido respecto a…”, “el precio de la gasolina ha bajado un…”, “el paro ha subido respecto al mismo mes del año anterior en…”, etc., son frases que encontramos a diario en la prensa. Además, estas informaciones suelen venir acompañadas de una gráfica con dos rectángulos que permite visualizar y sintetizar la información. Nos preguntamos si los estudiantes interpretan correctamente dicha información gráfica, sabiendo que es frecuente en los medios de comunicación y que es útil para todas las personas en su vida cotidiana o profesional, por lo que debe formar parte de la cultura estadística de cualquier ciudadano.

Según Gal (2002, pp. 2-3), el término cultura estadística fundamentalmente, alude a las siguientes dos competencias:

a. Interpretar y evaluar de forma crítica la información estadística, los argumentos apoyados en datos, o fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación.
b. Discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones cuando sea relevante.

En la prensa, es frecuente, recurrir a un gráfico con dos rectangulos para mostrar la variación relativa en términos de porcentajes. En estadística, para la presentación y análisis de datos es fundamental la construcción y lectura de gráficas, y una referencia obligada, ya que muestra el estado de la cuestión sobre gráficos, se debe a Friel, Brigth y Curcio (2001), que consideran que comprender y saber usar gráficas es una parte clave en el desarrollo del pensamiento estadístico.

También el término *Quantitative Literacy* incluye el dominio de los porcentajes, ya que se considera que éstos han de formar parte de la cultura cuantitativa de todo ciudadano. Así, este término se entiende como una forma de habituar la mente, y requiere la interacción entre el profesor y el alumno para que estos últimos integren el conocimiento construido en el contexto social en que viven (Madison, 2006).

El estudio de los porcentajes ha sido objeto de distintas investigaciones (Schield, 2006), debido a las dificultades que manifiestan los alumnos para su uso correcto, muchas veces debidas a problemas lingüísticos. Se puede encontrar trabajos en los que se proponen pautas para mejorar y ampliar el tipo de problema sobre porcentaje que se plantee a los alumnos (Martinón, 1987).

Esta dificultad y preocupación por el tema se puede observar en el diseño de *applet*, como los que aparecen en la página:

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0249-04/apartado1.htm

En el proyecto *Descartes* del Ministerio de Educación en España, la enseñanza de los aumentos porcentuales e índices de variación se tratan en el bloque de algebra, en el tema de proporcionalidad, pero quizás de una forma demasiado formal para estudiantes de secundaria, a los que va dirigida la página:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Proporcionalidad_lbc/porcentajes.htm

En el bloque de números, la variación expresada en porcentajes no aparece, posiblemente, porque se considera que es una idea más propia de estadística, y sin embargo, en ésta se considera sólo los números índices. Un número índice es un indicador diseñado para describir los cambios de una variable en el tiempo, esto es, su evolución a lo largo de un determinado período. El porcentaje de variación es uno de los temas trasversales en la enseñanza y precisamente por eso, muchas veces no se enseña (Vegas, 2005). En los textos escolares de secundaria se proponen ejercicios para encontrar aumentos o disminuciones porcentuales, pero no suelen considerar el porcentaje de variación, con algunas excepciones (véase, por ejemplo, Nortes Checa, 1996).

La poca importancia explícita que se da a este concepto en el currículo de España, choca con la que se observa en el currículo de otros países. Así, por ejemplo, en América Latina se utiliza el término variación porcentual, como se recoge en la página:
http://www.ine.cl/canales/chile_estadistico/estadisticas_precios/ipc/metodologia/pdf/metodocalculo.pdf

En los Estándares Curriculares del año 2000 de la NCTM (Nacional Council of Teachers of Mathematics) en Estados Unidos aparece el concepto acompañado de una formula, y expresamente se indica que para calcular el porcentaje de variación se aplica:

$$\frac{(\text{Valor Final} - \text{Valor Inicial}) \times 100}{\text{Valor Inicial}}$$

Las variaciones que, con frecuencia, aparecen en la prensa son un buen motivo para introducir el concepto de variaciones absoluta y relativa, y su interpretación en términos de porcentajes, tal como aparece en algunas actividades de aula que se puede encontrar en el proyecto para la enseñanza de la estadística:
http://www.deie.mendoza.gov.ar/aem/material/word/Que%20sabemos%20sobre%20variaciones_%20Activ3.pdf

En el Informe PISA 2003 (MEC, 2005) aparece una actividad de uso de del concepto de variación como porcentajes. Así, en la actividad con título: "Cambio de los niveles de CO_2 ", se presentan tres preguntas que se refieren a la interpretación de un gráfico sobre la base de datos reales, acerca de los niveles de emisión de dióxido de carbono. En la primera pregunta, se pide a los estudiantes que expliquen el método para calcular un porcentaje de variación dado en un gráfico. La segunda pregunta requiere que los estudiantes razonen el significado de los porcentajes en dicho contexto. La tercera pregunta pide a los estudiantes que reflexionen sobre los posibles significados matemáticos de la palabra "aumento" en la actividad dada, y proporcionen una explicación verbal.

Las tres cuestiones fueron relativamente difíciles para los estudiantes evaluados en la prueba de PISA de 2003. (Ver página 29, del documento del ICME donde se comenta la dificultad de las preguntas:
http://www.icme-organisers.dk/tsg02/proceedingsTSG2.pdf

1.1. Antecedentes

Una de las gráficas más usuales en la prensa económica es la representación con dos rectángulos para mostrar el porcentaje de variación de una variable en dos fechas determinadas. Otros gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en la prensa son las series temporales, en los que también aparece el concepto de porcentaje de variación, o incluso el número índice. El estudio de los gráficos que aparecen en los medios, es una línea de trabajo fructífera y que siguen algunos investigadores en educación estadística (Monteiro y Ainley, 2007).

En Espinel (2007) se tomó el gráfico de la figura 1, para estudiar la comprensión del mismo por parte de estudiantes universitarios. Concretamente, se pidió a un grupo de estudiantes, futuros profesores de primaria que justificaran el 7% que aparece en dicho gráfico.

Se esperaba que los alumnos justificaran el resultado del 7%, realizando la operación: [(309,5 - 289,3) x 100]: 289,3= 6,98, y que por aproximación, dieran el 7%. Si bien, se encontró que la mayoría de los alumnos recurrían a una “regla de tres” y así conseguían la respuesta que no siempre era la justificación correcta. El ejercicio puso de manifiesto que los alumnos no saben cómo se calcula la variación de porcentaje. Sin embargo, quizás el no saber el cálculo apropiado no necesariamente implica no captar su significado en el sentido de aumento o disminución respeto a un año base. La “fijación” que muchos alumnos manifiestan con la “regla de tres”, y que ésta ejerce después de que la aprenden, es motivo de algunas investigaciones y se le ha etiquetado como “la ilusión de la linealidad” (Van Dooren, De Bock, Janssens y Verschaffel, 2008).

Figura 1

Nuestra investigación estudia en qué medida los estudiantes universitarios conocen y captan el uso de los porcentajes, cuando se utilizan para indicar la variación de crecimiento o decrecimiento, respecto a una cantidad origen, y en especial, la apreciación visual del porcentaje de variación.

2. Metodología de la investigación

Para analizar el conocimiento del porcentaje de variación se diseñó una prueba en la que aparecen usos cotidianos de este concepto y gráficos tomados de la prensa.

Muestra: La población que responde a la prueba está formada por 94 estudiantes, pertenecientes a dos facultades, 65 alumnos de la Facultad de Educación del título de Maestro (especialista en Educación Musical y en Educación Infantil) (EDU); y 29 alumnos de la Facultad de Empresariales que cursan segundo de Administración y Dirección de Empresas (ADE). Se considera de interés para el estudio los dos grupos de alumnos, ya que los estudiantes de la Facultad de Educación tendrán en el futuro que enseñar el concepto de porcentaje y de los estudiantes de la Facultad de Empresariales se espera que dominen el concepto para el desarrollo de su vida profesional.

Prueba: La prueba consta de 6 preguntas cuyos enunciados corresponden a datos reales y gráficos tomados de la prensa, con los que se pretende conocer la percepción gráfica del porcentaje de variación que tienen los estudiantes. El cuestionario combina preguntas en las que el alumno debe seleccionar o emparejar la solución que considera correcta (elección múltiples), con otras en las que ha de operar o construir gráficos para encontrar la solución. La prueba que se administró a los alumnos se recoge en el ANEXO.

2.1. Resultados

A continuación se recoge cada una de las preguntas, acompañada de algunos comentarios que justifican su pertinencia. Mediante una tabla se muestran los resultados de las respuestas de los dos grupos de alumnos expresadas en porcentajes. En cada tabla se resalta la respuesta correcta. Se acompaña de un somero análisis de estos resultados, teniendo en cuenta las estrategias que utilizan los alumnos para dar su respuesta.

Cuestión 1:

> *1. Una chocolatina que antes costaba 100 pesetas, ahora vale 1 euro (166 pesetas). Hallar el porcentaje de aumento experimentado en el precio de la chocolatina.*

Esta pregunta presenta el cálculo de un porcentaje usual, lo realizan los alumnos como actividad escolar, y en este sentido se puede encontrar en los libros de texto de la enseñanza obligatoria. Y además, por las monedas a que alude el enunciado, tiene cierto interés cotidiano, ya que aun en la calle, muchas personas discuten lo que han subido los precios con el cambio de pesetas a euros.

Los resultados se recogen en la tabla 1 según las dos facultades. Se presentan los porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y respuestas en blanco.

Tabla 1: Respuestas de los estudiantes por facultades

Respuesta	EDU (N = 65)	ADE (N=29)
Correcta: 66%	**41,5%**	**69%**
Incorrecta	41,5%	31%
Blanco	17%	

Como se puede observar en la tabla 1, sólo un 41,5% de los estudiantes para profesores (EDU) responden correctamente, escribiendo que el aumento del precio de la chocolatina ha sido del 66%, el resto de los alumnos dan otros porcentajes, o no responden. En el grupo de estudiantes de ADE los resultados son manifiestamente mejor, ya que casi el 70% de ellos responde correctamente. Las respuestas incorrectas en ambas facultades corresponden a dar porcentajes de aumento muy diferentes, tales como: 60; 66; 60,2; 62,24; 0,6; 0,0066; 40; 39,7; 37; 35,7; 36; 1,66.

En relación con las estrategias que utilizan los estudiantes para hallar el porcentaje pedido, destaca el uso de la “regla de tres”. Así, de los 94 alumnos hay

52 que aplican una regla de tres para encontrar la respuesta, ya sea esta correcta o no (un 55,3% del total de los alumnos, un 58,5% de EDU y un 48,3% de ADE). Esto es, más de la mitad disponen como único recurso para averiguar la variación, el planteamiento y cálculo de una regla de tres. Se observa que recurren a ella, tanto los estudiantes para profesores como los de empresariales. A continuación se muestran tres casos ilustrativos de los procedimientos seguidos por los alumnos que apoyan su respuesta en el uso de esta regla.

Caso 1: Entre los estudiantes para profesores, que dan el resultado correcto (66%), aparece con frecuencia la pauta: 166-100 = 66 aumento

100 ___ 100%

66 ___ x x = 66%.

Caso 2: Entre los estudiantes de empresariales con respuesta correcta, señalamos la estrategia:

100 ptas. ___ 100%

166 ___ x x = 166%

Y luego, escriben: 166-100= 66% de aumento.

En esta forma de proceder está la idea de número índice, que los estudiantes de ADE probablemente sí conocen.

Caso 3: Como ejemplo de aplicar regla de tres con respuesta incorrecta, se tiene:

166 ___ 100%

66 ___ x x = 39,7%

En las tres siguientes preguntas del cuestionario, el estudiante sólo tiene que marcar la respuesta que considera correcta de las tres que se le proponen (elección múltiple).

Cuestión 2

2. A un agricultor le pagan las papas a 0,50 euros y la misma clase de papa se vende en el supermercado a 1,50 euros. Señalar qué incremento ha sufrido el precio de las papas desde el agricultor al supermercado.

a. □ Incremento del 150%
b. □ Incremento del 200%
c. □ Incremento del 300%

En esta cuestión 2, las tres opciones muestran un incremento superior a 100. Los números que aparecen en las opciones pueden jugar en contra, si no se domina el concepto de variación. Puede reflejarse una confusión en los usos de los porcentajes, entendidos como una aritmética de mitad (50%), doble (200%) o triple (150% o 300%).

En la tabla 2 se recoge el porcentaje de alumnos que eligen cada una de las tres opciones. Si bien, para el grupo de ADE los resultados son un poco mejores que para EDU, en ambos grupos de estudiantes se observa que la opción correcta b (200%) y la opción incorrecta c (300%), están equiparadas, en cuanto al número de alumnos que las eligen. El hecho de que 1,50 es tres veces 0,50 lleva a una interpretación errónea del incremento, esto es, confundir porcentaje con la idea de triple que sugieren los números. En este caso, además, sin prácticamente diferencia entre los alumnos de las dos facultades.

Tabla 2: Porcentaje de respuestas por facultad y opción

Respuesta	EDU (N = 65)	ADE (N=29)
a. 150%	15,4 %	10,3 %
b. 200%	**40 %**	**48,3 %**
c. 300%	44,6 %	41,4 %

A pesar de que es una pregunta en la que sólo deben señalar la opción que consideran correcta, hay 14 estudiantes de EDU que muestran sus cálculos con una regla de tres, que a la mayoría les lleva a elegir una solución incorrecta. Entre los de ADE sólo aparece en las producciones de dos alumnos. A continuación, se recogen tres casos para ilustrar las estrategias.

Caso 1. Eligen la solución 300%, debido al siguiente planteamiento:

0,50 ___ 100
1,50 ___ x   x= 300%

Caso 2. Algún estudiante aporta la solución 150% con la regla de tres:

1 ___ 100%
1,50 ___ x

Caso 3. Basan la respuesta correcta, 200%, por el resultado de la regla de tres:

0,5 ___ 100
1,50 ___ x   x= 300 – 100 = 200%

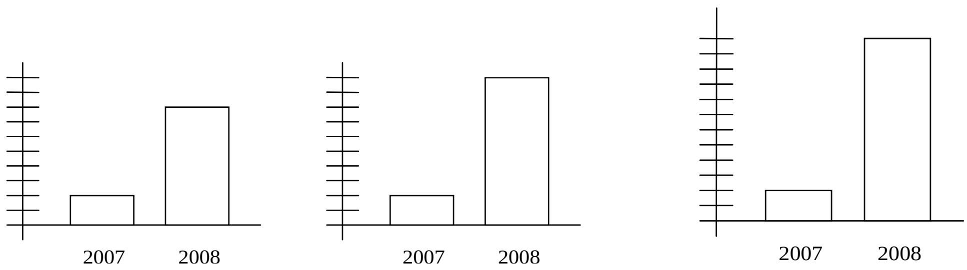
En este caso, en la respuesta se aprecia una incorrecta escritura matemática, puesto que x es 300.

Cuestión 3:

La siguiente pregunta se dedica a la apreciación gráfica del incremento de variación del precio de un producto.

3. El precio de la harina creció del año 2007 al 2008 un 300%.
De los siguientes tres gráficos de rectángulos, marcar el que refleja un crecimiento del 300%.

Gráfico a.   Gráfico b.   Gráfico c.



Se trata de saber si hay una apreciación del concepto de porcentaje mostrado de forma visual o gráfica. Se muestran tres opciones de aumento, y el estudiante ha de discriminar entre las tres, si bien se aporta una escala que facilita la elección.

Los porcentajes de elección en esta pregunta se recogen en la tabla 3.

Tabla 3: Porcentaje de respuestas por facultad y opción

Respuesta	EDU (N=65)	ADE (N=29)
Gráfico a.	**63, 1 %**	**75, 9 %**
Gráfico b.	24, 6 %	-
Gráfico c.	1,5 %	24,1%
Ninguno	3,1 %	-
Blanco	7,7 %	-

En esta pregunta los resultados de los estudiantes de ADE, un 76% de éxito, son mejores que los de EDU. Además, hay un comportamiento muy diferente para los alumnos de las dos facultades, que eligen erróneamente su respuesta. Así para ADE todos se inclinan por la opción c, aumento del 300%, sin embargo, entre los de EDU predomina la opción b. Dado que no hacen cálculos pensamos que la elección se hace considerando que una barra grande es la lógica para un aumento del 300%.

Este tipo de gráfico se encuentra a diario en la prensa escrita y aunque los resultados muestran un éxito relativo, es preocupante, ya que debería ser parte de la cultura numérica de todo ciudadano, el saber apreciar y leer gráficos de este tipo de forma correcta.

Cuestión 4

Para la siguiente pregunta del cuestionario, se emplearon los datos vigentes en las fechas que se pasó la prueba. Se trata de un dato llamativo, pues el precio del gasóleo, más barato en la Comunicad Canaria, subió casi a equipararse al de la gasolina.

4. El precio del gasóleo ha pasado de 0,792 euros a 0,975 en tres años. Esto supone un incremento del…:

□ *a. 8%* □ *b. 23%* □ *c. 81%*

Esta pregunta 4 es análoga a la pregunta 1, en el sentido de que es un aumento inferior a 100%, aunque ahora el estudiante sólo ha de señalar una de las tres opciones. Si bien el hecho de aparecer números decimales menores que 1, puede ser una dificultad. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 4: Porcentaje de respuestas según opción y facultad

Respuesta	EDU (N = 65)	ADE (N= 29)
a. 8%	18,5 %	3,4 %
b. 23%	**67,7%**	**82,8%**
c. 81%	7,7%	13,8%
Blanco	6,1%	-

Los porcentajes de elección muestran que esta pregunta la responden correctamente la mayoría de los estudiantes, especialmente los de ADE.

De los alumnos que eligen la opción a del 8%, no hay ninguno que refleje los cálculos realizados, suponemos que sencillamente consideran que al ser números menores que la unidad, el resultado debe ser un incremento pequeño. Además, la diferencia entre los números 0,975 y 0,792 que aparecen en el enunciado es 0,183, lo que podría llevar a los estudiantes, que no dominen el concepto, a elegir la opción a, por ser un número pequeño.

También algún alumno puede quedar confundido con la opción c, ya que 0,975-0,792=0,183, y 183-100=83 está próximo a 81.

A continuación, se muestra lo apuntado por algunos alumnos que señalaron las otras opciones y dónde se ve que, de nuevo, la regla de tres es el recurso básico para resolver este tipo de problemas.

Caso 1. De los alumnos que responden correctamente (23%):

0,975 – 0,792 = 0,183, y luego regla de tres

100 ___ 0,792

x ___ 0,183 x = 23 %

Caso 2. Los que marcan 81% se debe a que realizan:

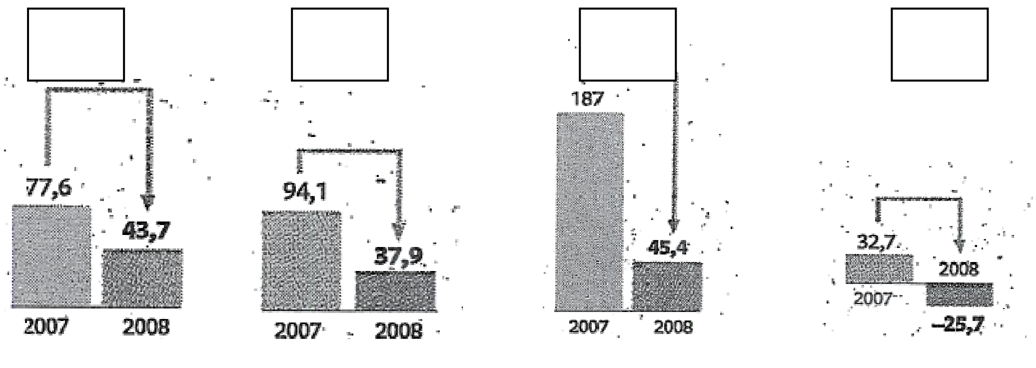
100 ___ 0,975

x ___ 0,792 x = 81,23 %

Cuestión 5

En la siguiente pregunta se utilizan gráficos tomados de la prensa y se trata de emparejar los porcentajes de variación que corresponden a cada gráfico, en los que las variaciones son negativas y una de ellas supera el 100%.

5. *Los gráficos reflejan en millones de euros las ventas de diferentes inmobiliarias en los años 2007 y 2008.*
Escribir en los recuadros cuál de los siguientes porcentajes se corresponde con el gráfico: -178,6% ; -75,7% ; -59,7% y -43,7%.



A B C D

La asignación esperada a colocar en cada recuadro es:

A	B	C	D
- 43,7 %	- 59,7 %	- 75,7 %	- 178,6 %

En la siguiente tabla se recogen los porcentajes de éxito de cada gráfico:

Tabla 5: Porcentaje de emparejamientos correctos según facultades

Solución	EDU (N=65)	ADE (N =29)
A: - 43,7%	63,5%	62%
B: - 59,7%	54%	52%
C: - 75,7%	25,4%	41,4%
D: - 178, 6 %	30%	41,4%

En esta pregunta, la mayoría de los alumnos emparejan correctamente las dos primeras gráficas cuyos porcentajes eran menores en valor absoluto, y mayor confusión les produjeron los gráficos C y D. En estos casos, muchos alumnos consideran que la mayor distancia, gráfica C, debe emparejarse con el porcentaje mayor, en valor absoluto. Y la confusión es más pronunciada para los futuros profesores, EDU, que para los alumnos de ADE. A una gran mayoría de los estudiantes les cuesta asociar una distancia pequeña, como la que aparece en la última gráfica, con un porcentaje superior a 100 en valor absoluto.

Cuestión 6:

La última pregunta del cuestionario utiliza datos de la vida cotidiana para pedir a los alumnos que elijan el porcentaje de incremento que consideran se ha producido en la situación planteada. Para ello deben elegir entre tres porcentajes dados.

A continuación, se les pide un gráfico con rectángulos para dicha situación.

6. En el año 2001, el litro de leche costaba 0.60 euros y en la actualidad cuesta 1,20 euros.

i. Señala el incremento que ha experimentado el precio de la leche:
a. □ 100% *b. □ 60%* *c. □ 50%.*

ii. Construye un gráfico de rectángulos que refleje el incremento experimentado.

La primera parte de esta pregunta es análoga a las preguntas 1 y 4. Se espera confirmar la posible confusión con doble y mitad que puedan tener algunos alumnos.

Por otro lado, *a priori* se espera que sea más fácil que la pregunta 2, que mostraba un incremento mayor que 100. Los resultados de la primera parte de la pregunta se recogen en la siguiente tabla:

Tabla 6: Porcentaje de respuestas en cada opción por facultad

Respuesta	EDU (N = 65)	ADE (N= 29)
a. 100%	**47,7 %**	**75,9 %**
b. 60%	9,2%	10,3%
c. 50%	40%	13,8%
Blanco	3,1%	-

En esta pregunta, los resultados son claramente mejores en los estudiantes de ADE. Los estudiantes para profesores, EDU, son los que más confunden el 50% con la mitad del precio de la leche, lo que lleva a un 40% de estos estudiantes a marcar la opción c.

En la segunda parte de la pregunta 6ii, se quiere observar la capacidad de los alumnos para construir un gráfico que recoja el incremento. Los resultados se muestran en la tabla 7.

Tabla 7: Porcentaje de respuestas en cada opción por facultad a la pregunta 6ii

Pregunta 6,ii	EDU (N = 65)	ADE (N=29)
Gráfico	52,3%	79,3%

Los datos muestran que prácticamente el 80% de los alumnos de ADE trazan un gráfico correcto de acuerdo con su opción en el apartado 6i.

Hay que observar cómo muchos de los alumnos que han respondido incorrectamente a la primera parte de la pregunta, pues han elegido la opción c (50%), luego construyen un gráfico teóricamente correcto, ya que el segundo rectángulo es el doble que el primero, es decir, que para ellos un aumento del 50% es duplicar el tamaño del gráfico. Así que esta pregunta (6 ii) tiene un falso éxito, ya que no refleja si realmente comprenden el porcentaje de variación, más bien, al contrario, refleja la confusión de que un 50% de variación se dibuja con un gráfico de doble altura.

3. Análisis de los resultados de la prueba

Los resultados anteriores muestran un primer análisis de la información, principalmente en cuanto a porcentajes de las respuestas elegida por los alumnos. A continuación se recurre a otras técnicas estadísticas que expliquen en mayor medida el comportamiento de los alumnos ante las preguntas consideradas.

Para ello, el cuestionario con 6 preguntas se ha desglosado en 10 ítems, como se muestra en la tabla 7. De forma que todas las preguntas se corresponden con un ítem, menos la pregunta 5 que pasa a tener 4 ítems, uno por cada gráfico, y la pregunta 6 que tiene dos ítems, uno por cada apartado.

3.1. Resultados según porcentajes de éxitos de los ítems

En la siguiente tabla se muestra un resumen del número de respuestas correctas y porcentaje de éxito de cada uno de los ítems para el total de los 94 alumnos que han participado en la experiencia.

Tabla 8: Todos los ítems con porcentaje de éxito

Clave	Euro	Papa	Harina	Gas	A	B	C	D	Leche	Gráf.
Pregunta	1	2	3	4	5	5	5	5	6	6
Ítem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº correctas	47	40	63	69	60	51	30	33	53	60
Éxito	50%	43%	67%	73%	64%	54%	32%	35%	56%	64%

La observación conjunta de todas las preguntas muestra un éxito relativo en relación a la idea y percepción gráfica de variación que tienen los estudiantes universitarios que han participado en este estudio. Es preocupante un éxito tan insuficiente, teniendo en cuenta que además la prueba se ha diseñado utilizando enunciados con datos reales y gráficos de la prensa, algo que en principio se pensó que podría facilitar la elección de las respuestas correctas.

Dado que el cuestionario tiene algunos ítems muy parecidos, parece oportuno realizar una comparación de los resultados, para observar en qué medida la confusión o error está arraigado en algunos alumnos. El mejor resultado en cuanto a porcentaje de respuestas correctas corresponde a la pregunta 4, un 73% de éxito, cuando el incremento que interviene es menor que 100. Sin embargo, en la pregunta 1, en la que la variación es un 66%, también menor que 100, el éxito es menor, ya que sólo responden correctamente la mitad de los estudiantes. Entendemos que el hecho de darle opciones múltiples para dar la respuesta facilita el éxito en la respuesta.

La pregunta 2, que muestra uno de los resultados más pobres, aporta información cuando se compara con la pregunta 6. Ocurre que de los 41 alumnos, de un total de 94, que en la pregunta 2, marcaron la respuesta incorrecta c (incremento de 300%),luego en la pregunta 6 reflejaron el siguiente comportamiento: 23 alumnos eligieron la correcta, opción a; 3 eligieron b, y 15 alumnos marcaron la respuesta c. De lo que se deduce que hay errores que persisten y que los alumnos cambian de estrategia sin tener un comportamiento eficaz, lo que muestra cierta confusión en el concepto.

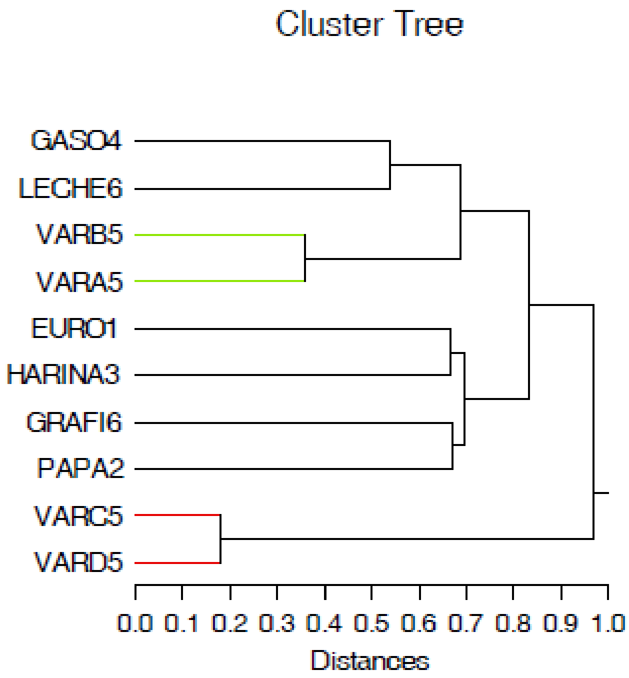
De los resultados obtenidos, en relación a la percepción del porcentaje de variación en el uso cotidiano y mediante un gráfico de dos rectángulos paralelos, preguntas 3 y 5, se deduce que el gráfico induce a respuestas erróneas o que hay un conocimiento que no es el correcto en muchos estudiantes.

3.2. Análisis de similitud de los ítems según respuestas

Para estudiar a los alumnos por similitud entre sus elecciones en las preguntas se recurren a técnicas multivariante. Se trata de observar la relación o correlación entre el comportamiento de los alumnos en los diez ítems en que se han codificado las seis preguntas. En qué medida de proximidad se encuentran cuando a cada alumno se le ha asignado una ristra de diez ceros y unos según su respuesta sea correcta (1) incorrecta o blanco (0).

Se realiza un estudio sobre el comportamiento homogéneo que tienen los alumnos en los 10 ítems mediante un análisis por conglomerados. Para identificar los grupos homogéneos de casos se utiliza la distancia euclidea y se utiliza como agrupamiento el método de Ward, esto es, minimizando la varianza dentro de cada grupo, se obtiene grupos homogéneos y tamaños similares. El resultado para los 94 estudiantes se muestra en la figura 2, con un diagrama de similaridad de las respuestas de los estudiantes en la prueba.

Figura 2: Dendograma con las similaridad de los ítems según las respuestas



Para el análisis del dendograma de la figura 2 se consideran tres grupos de preguntas:

Un primer grupo (G1) formado por cuatro ítems: la pregunta 4 (GAS4) y el primer ítem de pregunta 6 (LECHE6) y los dos ítems más difíciles de la pregunta 5 (VARB5 y VARA5).

Un segundo grupo (G2) también de cuatro ítems que procede de primero agrupar la pregunta 1 (EURO1) con la 3 (HARINA3) y el segundo apartado de la pregunta 6 (GRAFI6) con la pregunta 2 (PAPA2).

El tercer grupo (G3) lo forman sólo los dos ítems de la pregunta 5 (VARC5 y VARD5) que presentaron la mayor confusión para los estudiantes, y que en la figura muestran la mayor disimilaridad con respecto al resto de los ítems.

Este análisis confirma la semejanza de algunas preguntas, por el resultado de cómo algunos alumnos mantienen sus respuestas correctas o no, y que ya se había señalado, observando sólo los porcentajes de éxito, al final del apartado 1. Es el caso, por ejemplo, de las preguntas 4 y 6.

3.3. Resultados mediante el modelo de Rasch

El procedimiento más acudido para resumir los datos que aportan los ítems es calcular el porcentaje de respuestas correcta. Este tipo de análisis es el primero que se ha recogido en el apartado de metodología de este trabajo, sin embargo, para mostrar los resultados de una forma más razonable sería deseable conocer el nivel de dificultad de los distintos ítems. Desde el punto de vista matemático, la probabilidad de que un estudiante conteste correctamente a un ítem depende de la diferencia entre el nivel del estudiante y el nivel del ítem a través de un modelo logístico de un parámetro, según propone el matemático danés George Rasch en 1960 para el caso de ítems dicotómicos.

La formulación más conocida del modelo de Rasch se deriva de la predicción de la probabilidad de una respuesta al ítem (resolverlo correctamente, estar de acuerdo, etc.) a partir de la diferencia en el atributo entre el nivel de la persona (θ_v) y el nivel del ítem ($ß_i$).

$$P_i(\theta_v) = \frac{\exp(\theta_v - \beta_i)}{1 + \exp(\theta_v - \beta_i)}$$

El modelo de Rasch, siendo una función probabilística, aporta un continuo relativo en el que se localizan la dificultad de ítems y la capacidad del estudiante. En este continuo, la dificultad de un ítem resulta de la comparación con los demás. Para ello, se centra la dificultad de los ítems en cero y se crea una escala relativa para comparar los ítems y las puntuaciones de los estudiantes. Este escalamiento común de estudiantes e ítems es una de las mayores ventajas de modelo ya que aporta una gran riqueza diagnóstica.

Para realizar el análisis de los datos, en este estudio, se ha recurrido al modelo citado por medio del programa informático Winsteps (www.winsteps.com). El análisis descriptivo de los datos, cuando las preguntas se convierten en diez ítems que se corrigen como bien o mal, da una calificación para los 94 estudiantes que oscila entre 0 y 10 puntos.

Los resultados, que se muestran en la tabla 8, para el total de 94 alumnos, dan que la calificación media es 5,4 y desviación típica 2,6. Siendo la calificación media más baja para los estudiante de educación (EDU), sólo un 5, que para los de empresariales (ADE), que es de 6,3, pero esos últimos tienen una mayor dispersión.

Tabla 8: Puntuación

Estudiantes	Media Aritmética	Desviación Típica
Total (N = 94)	5,4	2,6
EDU (N = 65)	5	2,4
ADE (N = 29)	6,3	2,8

El resultado del programa informático Winsteps (Linacre, 2007) proporciona que la fiabilidad de las preguntas es 0,89 y ofrece el mapa conjunto de personas e ítems que se recoge en la figura 3.

Figura 3. Mapa de medición conjunta de estudiantes e ítems
(m: EDU, a: ADE)

```
                                       <more>|<rare>
 3                         a  a  a  a  m  m  +
                                             |
                                            T|
                                             |
         a  a  a  a  a  a  a  m  m  m  m  m  |
                                             |
                                             |
                                             |
 2                                           +
                                             |
                           m  m  m  m  m  m  |T
                                             |
                                            S|  5 C -75,7%
                                             |
                                             |  5 D -178,6%
                                             |
 1                      a  m  m  m  m  m  m  +
                                             |S
                                             |  2  Papa
                                             |
            a  a  a  a  a  a  m  m  m  m  m  |
                                             |
                                             |  1  Euro
                                            M|
 0 a  a  a  a  m  m  m  m  m  m  m  m  m  m  +M 5 B  -59,7%
                                             |
                                             |  6 A  Leche
         a  m  m  m  m  m  m  m  m  m  m  m  |
                                             |  5 A  -43,7%      6 B Gráfico
                                             |
                                             |S 3  Harina
                                             |
-1          a  a  m  m  m  m  m  m  m  m  m  +
                                             |
                                             |  4  Gasóleo
                                            S|
                                             |
                                             |
                  a  a  m  m  m  m  m  m  m  |T
                                             |
-2                                           +
                                             |
                                             |
                                             |
                           a  a  m  m  m  m  |
                                             |
                                            T|
                                             |
-3                                           +
                                       <less>|<frequ>
```

En la representación del continuo lineal característico de la metodología de Rasch, en el caso del estudio considerado, hay un rango de variación entre ± 3 *logit*. A la derecha de la línea están localizados los diez ítems y a la izquierda los 94 estudiantes.

El mapa permite observar que, en relación a los ítems, se tiene cómo el ítem más fácil (-1,5 *logit*), el de la pregunta 4, relacionado con el incremento del precio del gasóleo, y los más difíciles (+1,5 *logit*), son dos de los ítems de la pregunta 5 (C y D). Las preguntas 5 A, y 6 B se solapan, es decir, se localizan en un mismo nivel de dificultad.

A la izquierda de la figura 2 se muestra la localización de los alumnos de EDU (codificados con la letra m), y los de ADE (codificados con la letra a). Hay 17 estudiantes de ADE de los 29, que están en el mapa por encima de la media. Entre los 18 alumnos competentes, hay 11 de ADE y 7 de EDU, y en el nivel más bajo se localizan 15 alumnos, 4 de ADE y 11 de EDU. Los estudiantes de ADE están colocados en mejor posición en su mayoría que los de EDU. En este caso, la prueba resulto muy fácil para 18 alumnos y muy difícil para los 15 alumnos localizados en el extremo inferior del mapa.

4. Conclusiones

En un estudio previo al que se muestra en este trabajo, se pidió a estudiantes para profesores que indicaran cómo se calculaba un porcentaje correspondiente a la variación que aparecía en prensa (Espinel, 2007). Debían explicar y escribir todas las operaciones para encontrar dicho porcentaje de variación y cómo obtenían los datos para calcularlo. La mayoría de los estudiantes procedió por ensayo y error, mediante una regla de tres, cambiando los términos hasta que consiguieron un resultado que se aproximara al dado. Este tipo de acción tan deficiente fue el que nos animó a investigar qué está detrás de estos procedimientos tan deficientes, y por ello se preparó la prueba que aquí se ha presentado y analizado.

De los resultados del estudio, con estudiantes futuros profesores y de empresariales, llama la atención la alta frecuencia con la que recurren a una regla de tres para encontrar el porcentaje pedido. Y parece que la comprensión del concepto es mejor cuando se apoya en una gráfica. Les resulta más fácil cuando el porcentaje de variación que interviene es menor que cien. La combinación de las dos variables, porcentajes mayores que cien y negativos, son las preguntas que muestran una mayor dificultad.

Para un análisis conjunto de alumnos e ítems se recurre al modelo de Rasch (Linacre, 2007), y en el caso de esta prueba permite al investigador visualizar el ranking según nivel de dificultad de los ítems y su poca dispersión (±1,5 *logit*), que contrasta con la distribución de los estudiantes que presenta una mayor dispersión (±3 *logit*), debido a que hay unos pocos alumnos que dominan totalmente el concepto y una mayoría considerable que parece que lo desconocen y resuelven por intuición.

Las dificultades que presentan algunos conceptos estadísticos son objeto de varias investigaciones. El conocimiento deficiente de la recta numérica (Bruno y Espinel, 2005; Arteaga, Contreras y Gonzato, 2009) y de algunos gráficos estadísticos (Espinel, Bruno y Plasencia, 2008; Bruno y Espinel, 2009) ha quedado constatado en profesores de primaria en formación.

Pensamos que el concepto de variación y el procedimiento para calcularlo está deficientemente desarrollado en el currículo. Así que las personas llegan a desarrollar una idea completamente equivocada. Para avanzar se propone una modificación del conocimiento que puede incentivarse desde un racionalismo crítico e incluso desde la intuición. La permanencia en el tiempo de una concepción errónea perjudica y lleva a producir un error porque se ha fijado un conocimiento que en algún ámbito resultó eficaz. Este concepto de variación deficientemente desarrollado es muy grave en los dos colectivos de alumnos analizados. En los estudiantes de administración de empresas (ADE) porque este va a ser de uso cotidiano. Y en los futuros profesores (EDU) porque demuestran una débil comprensión de los porcentajes que puede transmitirse a una generación. Consideramos que el concepto considerado ha de formar parte de una alfabetización cuantitativa de todo ciudadano.

Trabajo realizado en el marco del Proyecto de Investigación SEJ2006-10290 (Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, Programa del Plan Nacional de I+D+I).

Bibliografía

Alsina, C. (2009): La dramatización de los números. *SUMA*, 60, 61-62.

Arteaga, P., Contreras, J. M., & Gonzato, M. (2009): Elaboración de gráficos estadísticos y sintido numérico en profesore de pimaria en Formación. *Actas XIV JAEM* (Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matematicas), Girona.

Bruno, A., & Espinel, M. C. (2005): Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática VII*, 57-85.

Bruno, A., & Espinel, M. C. (2009): Construction and evaluation of histograms teacher training. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 1, 1-21.

Espinel, M. C. (2007): Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Actas XI SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), 99-119. L*a Laguna. Tenerife. España.

Espinel, M. C., Bruno, A., & Plasencia, I. (2008): Statistical graphs in the training of teachers. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (2008). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A.

Rossman (2008). *Joint ICMI/IASE* Monterrey: ICMI and IASE. Disponible en: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publicatons

Gal, I. (2002): Adult´s statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70, 1, 1-25.

Madison, B. L. (2006): Pedagogical Challenges of Quantitative Literacy. American Statistical Association, Section on Statistical Education, Proceedings of the Joint Statistical Meeting, pp. 2323-2328. Alexandria V.A. Disponible en: http://www.statlit.org/pdf/2006MadisonASA.pdf

Martinón, A. (1987): Nota sobre la enseñanza de los porcentajes en primero de BUP. *Números*. Revista de la Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas, 2, 5, 59-63.

Monteiro, C., & Ainley, J. (2007): Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 2(3), 188-207. Disponible en: www.iejme/

Niss, M. (2003): Quantitative Literacy and Mathematical Competencies. Disponible en: http://www.maa.org/ql/pgs215_220.pdf

Nortes Checa, A. (1996): *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Madrid, Santillana.

Linacre, J. M. (2007): *Realiability and Separations. A User´s Guide to Winsteps/ Ministep Rasch – Model Computer Programs* Chicago: Winsteps. Disponible en: www.winsteps.com

MEC (2005): *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas.* Inecse. Madrid.

Schield, M. (2000): Statistical literacy: Difficulties in Describing and Comparing Rates and Percentages. *Statistical Literacy ASA JSM 2000.* Disponible en: http://web.augsburg.edu/~schield/MiloPapers/2000ASA.pdf

Schield, M. (2006): Statistical literacy survey results: Reading graphs and tables of rates percentages. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Disponible en: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D, & Verschaffel, L. (2008): The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 3, 311-342.

Vegas, M. I. (2005): Matemáticas y educación en valores. *SUMA*, 50, 37-45. Disponible en: www.revistasuma.es/index.php

María Candelaria Espinel, mespinel@ull.es; Alicia Bruno, abruno@ull.es; Inés Plasencia, incruz@ull.es. Profesoras Titulares de Didáctica de la Matemática en la Universidad de La Laguna.

ANEXO:

Nombre:…………………………………………………………………………………...

1. Una chocolatina que antes costaba 100 pesetas, ahora vale 1 euro (166 pesetas). Hallar el porcentaje de aumento experimentado en el precio de la chocolatina.
2. A un agricultor le pagan las papas a 0,50 euros y la misma clase de papa se vende en el supermercado a 1,50 euros. Señala qué incremento ha sufrido el precio de las papas, desde lo que le pagan al agricultor al precio del supermercado.
   a. Incremento del 150%
   b. Incremento del 200%
   c. Incremento del 300%
3. El precio de la harina creció del año 2007 al año 2008 un 300%. De los siguientes tres gráficos de rectángulos, marcar el que refleja este crecimiento del 300%.

Gráfico a.

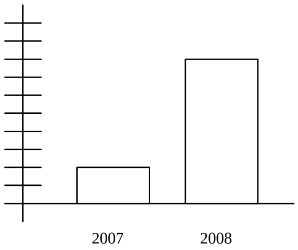


Gráfico b.

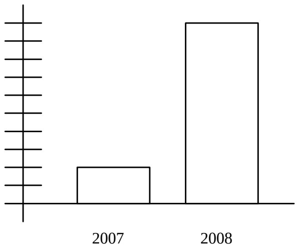
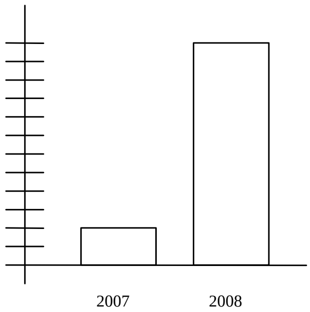
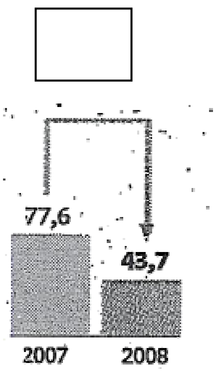
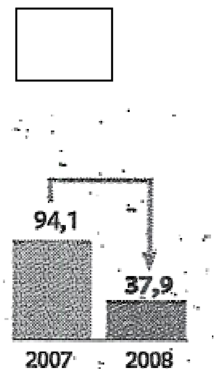


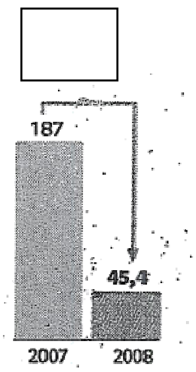
Gráfico c.

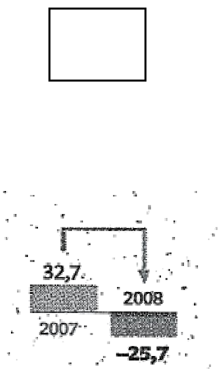


4. Los gráficos reflejan en millones de euros las ventas de diferentes inmobiliarias en los años 2007 y 2008.
   Escribir en los recuadros cuál de los siguientes porcentajes se corresponde con el gráfico: -178,6% ; -75,7% ; -59,7% y -43,7%









5. En el año 2001, el litro de leche costaba 0.60 euros y en la actualidad cuesta 1,20 euros.

   i. Señala el incremento que ha experimentado el precio de la leche:

   a. 100% b. 60% c. 50%

   ii. Construye un gráfico de rectángulos que refleje el incremento experimentado.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 103-115
ISSN: 1815-0640

Estudo da Produção Escrita de Estudantes do Ensino Médio em uma Questão Não Rotineira de Matemática

Edilaine Regina dos Santos, Regina Luzia Corio de Buriasco

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo apresentar o resultado de uma investigação sobre a produção escrita de estudantes do Ensino Médio (15 a 17 anos) em uma questão discursiva não-rotineira de matemática com o propósito de compreender como lidam com questões desse tipo em situação de avaliação, que interpretação que fazem do enunciado da questão; que estratégias utilizam para resolvê-la. Dentre outros, foi possível identificar as estratégias adotadas e que alguns estudantes relacionaram o contexto em que a questão é apresentada com outro contexto ou com outras informações.

Abstract

The general aim of this investigation is to study how High School students deal with non-routine discursive Math questions in an assessment situation. In this analysis, we focused the student's interpretation of the question directions, the strategies they use to solve it. Taking into consideration the similarities found in the students' resolutions, they were grouped according to the strategies adopted. It was possible to verify the strategies used and that some students related the context in which the question was presented to other context or information.

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo presentar el resultado de una investigación sobre la producción escrita de estudiantes de Enseñanza Media (15 a 17 años) en una cuestión discursiva no rutinaria de matemática con el propósito de comprender como relacionan cuestiones de ese tipo en situación de evaluación, que interpretación hacen del enunciado; que estrategias utilizan para resolverla. Fue posible identificar las estrategias adoptadas y cómo algunos estudiantes relacionaron el contexto en que la cuestión es presentada con otro contexto o con otras informaciones.

1. Introducción

Comumente no cotidiano escolar, mas não somente nele, são veiculadas informações a respeito do desempenho dos estudantes na disciplina de Matemática, e, na maioria das vezes, tais informações dizem respeito ao baixo desempenho dos estudantes e ao fato de que quase nada sabem dos conteúdos trabalhados em sala de aula.

No entanto, resultados de algumas investigações, tais como as realizadas pelo GEPEMA[1], têm revelado que, sob a luz da avaliação como prática de investigação em que a análise da produção escrita se mostra como uma alternativa promissora para conhecer como estudantes lidam com questões abertas de matemática (Viola dos Santos, 2007), é considerável a quantidade de estudantes que mostra saber procedimentos freqüentemente trabalhados em sala de aula.

Se por meio da análise da produção escrita de estudantes (Buriasco, 1999; Nagy-Silva, 2005; Perego, 2006; Negrão de Lima, 2006. Alves, 2006; Dalto, 2007; Viola dos Santos, 2007), em algumas questões rotineiras de matemática, ou seja, questões freqüentemente trabalhadas em sala de aula e encontradas em livros didáticos foi possível inferir[2] algo do que os estudantes mostraram saber de conteúdos da matemática escolar[3], o que é possível inferir a respeito do que os estudantes sabem da matemática escolar ao resolver questões não rotineiras? Como esses estudantes lidam com questões desse tipo?

Este artigo apresenta parte do resultado de uma investigação (Santos, 2008) sobre a produção escrita de estudantes do Ensino Médio em questões discursivas não rotineiras de matemática, realizada com o propósito de obter resposta a essas questões e, assim, compreender como lidam com questões desse tipo apresentadas em situação de avaliação.

A avaliação como prática de investigação e a análise da produção escrita

A avaliação é freqüentemente um tema de discussão no cenário educacional. Embora haja certo consenso de que é elemento importante do processo de ensino e de aprendizagem, ela ainda tem sido entendida como um momento obrigatório realizado, tradicionalmente, no final de cada bimestre e utilizada apenas para verificar o que os estudantes não aprenderam do conteúdo dado em sala, para classificá-los em bons ou maus estudantes e, por meio de notas enfatizadas como se fossem o aspecto mais importante da avaliação e "operadas como se nada tivessem a ver com a aprendizagem" (Luckesi, 2002, p.23), determinar aqueles que continuarão os estudos.

Desse modo, parece que a preocupação, nessa perspectiva de avaliação que focaliza somente o produto final, reside apenas na aprovação ou reprovação do estudante e não na obtenção de informações que possam subsidiar as tomadas de decisões necessárias nos processos de ensino e aprendizagem.

Praticar uma avaliação com vistas a contribuir de fato com professores e estudantes, para subsidiar as tomadas de decisões tanto no processo de ensino quanto no de aprendizagem, de modo a possibilitar que o professor possa rever sua ação, suas escolhas didáticas e os estudantes, suas estratégias de estudo, implica em assumir a avaliação como prática de investigação (Esteban, 2000; Buriasco, 2004). Prática com a qual se busca recolher informações e interpretá-las, compreender os modos de pensar dos estudantes, os caminhos utilizados por eles

[1] O GEPEMA - Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação está constituído dentro do Departamento de Matemática da UEL e dele fazem parte professores que ensinam matemática na Educação Básica e no Ensino Superior, alunos da Licenciatura em Matemática, alunos do curso de Especialização em Educação Matemática e alunos do programa de Mestrado e Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
[2] Ressaltando que tais inferências foram realizadas a partir da análise de algumas questões envolvendo algum conteúdo, e, em um determinado momento histórico, com um determinado grupo de estudantes.
[3] Matemática escolar está sendo entendida aqui como a matemática ensinada na escola.

na busca de uma solução para determinado problema, suas dificuldades; de modo que, ao tomar consciência do ocorrido nestes processos, se possa refletir e, posteriormente, executar intervenções (Sacristán, 1998).

Numa avaliação assim praticada, enfatiza-se o caminho percorrido pelo estudante e não simplesmente um resultado obtido por ele; indaga-se o que ele fez com o propósito de se obter informações a respeito do que ele sabe e não apenas do que lhe falta, do que não sabe. Além disto, reconhece-se e valoriza-se a diversidade de caminhos percorridos na construção de soluções para os problemas, abre-se espaço para as diferenças entre os estudantes e para as muitas interpretações de uma mesma situação. Esta é a perspectiva de avaliação adotada neste trabalho.

Em aulas de matemática, a avaliação tomada como prática de investigação possibilita investigar, analisar e discutir como os estudantes lidam com determinado problema, ou seja, como interpretam seu enunciado, que estratégias e procedimentos[4] utilizam para resolvê-lo, como expressam matematicamente suas idéias. O caminho utilizado para buscar conhecer como os estudantes lidam com questões discursivas e não rotineiras de matemática, neste trabalho, foi a análise da sua produção escrita.

Toda produção escrita dos estudantes, seja ela obtida por meio de trabalhos, provas ou qualquer outro instrumento que possibilite o registro de suas idéias, é importante, pois, ao analisar e interpretar a produção escrita dos estudantes na resolução de um problema, o professor pode perceber que, por meio dessa resolução, seja ela considerada totalmente correta, parcialmente correta ou, incorreta, é possível obter informações sobre o que eles sabem do conteúdo envolvido, ter pistas do que podem vir a saber futuramente, além de também ter pistas de como ele, o professor, pode auxiliá-los em suas aprendizagens. Além disto, o professor pode identificar possíveis dificuldades dos estudantes, analisar os erros encontrados, obter indícios das causas dos erros para, a partir dessas informações, de conversas com eles, planejar novas ações de modo que estas possam contribuir com a aprendizagem dos envolvidos.

Resultados de algumas investigações (Nunes, Carraher, Schliemann, 1995; Cooper e Harries, 2003; Kastberg et all, 2005) têm revelado que os estudantes interagem com o contexto em que um problema é apresentado de maneiras muito diferentes e, por vezes, inesperadas pelo professor. Nesse sentido, este, por meio da análise da produção escrita, pode também investigar se o estudante, durante a resolução de um problema, foi influenciado pelo contexto desse problema ou ainda se estabeleceu relações desse contexto com suas experiências tanto da escola como fora dela para dar sentido ao problema e, assim, solucioná-lo.

Muitas informações podem ser obtidas a partir de uma análise interpretativa da produção escrita dos estudantes. Contudo é preciso considerar que, mediante essa análise, as informações obtidas sobre a aprendizagem dos estudantes devem ser

[4] Neste trabalho, a estratégia é entendida como o modo pelo qual se aborda um problema. Considerando, por exemplo, que um problema foi resolvido por meio de um sistema de equações do primeiro grau, esta seria a estratégia escolhida, ou seja, a utilização de um sistema de equações de primeiro grau, (o modo como se aborda o problema). Já o procedimento é entendido como o modo pelo qual se desenvolve a estratégia escolhida. No exemplo considerado em que um problema foi resolvido por meio de um sistema de equações do primeiro grau (estratégia utilizada para abordar o problema) o procedimento adotado poderia ser resolver o sistema pelo método da substituição (o modo como se desenvolveu a estratégia).

vistas apenas como uma amostra possível, tanto das informações quanto da aprendizagem destes. Desse modo, não se pode afirmar que um estudante não sabe determinado conteúdo pelo fato de não se ter obtido uma informação sobre ele em sua produção escrita. Somente pode-se dizer algo a respeito do que o estudante fez, e não do que deixou de fazer.

Outra ressalva a ser feita é a de que quando não for possível entender o que o estudante quis expressar em sua produção escrita ou fazer uma interpretação dessa produção, um diálogo com ele durante o trabalho em sala de aula pode ser muito útil, como bem salienta Perrot (1998). Observando-o durante o seu trabalho e conversando com ele, esclarecimentos podem ser obtidos e dúvidas podem ser sanadas. Por isso, é importante que a sala de aula seja um espaço de diálogo entre professor e estudante, no qual este possa expressar suas idéias, justificar suas estratégias; um espaço não somente de socialização entre pessoas diferentes, mas um espaço de 'construção' de conhecimento.

Sobre a investigação

Na investigação que gerou este artigo, para estudar a produção escrita de estudantes do Ensino Médio[5] em questões discursivas e não rotineiras de Matemática, utilizou-se uma prova contendo 14 questões que foram retiradas de aferição do PISA[6], por serem já validadas. Essa prova foi resolvida por todos os estudantes que cursavam o Ensino Médio em uma escola pública de Londrina[7], quando da investigação que, no momento da aplicação da prova, estavam com idade entre 15 anos e três meses e 16 anos e dois meses, que é a mesma idade alvo do PISA. Desses 22 estudantes, 10 estavam na 1ª. série e 12 na 2ª. série do Ensino Médio.

Com a produção escrita dos estudantes em mãos, o estudo foi desenvolvido em três fases. Na primeira fase, organizou-se o material e fez-se uma descrição detalhada do que foi encontrado em cada questão. Na segunda, a partir da descrição feita de cada questão, realizou-se uma operação de agrupar a produção escrita em razão de aspectos comuns no que diz respeito às estratégias utilizadas pelos estudantes. Essa operação de classificação foi realizada com o objetivo de se ter uma representação simplificada dos dados. Após a fase de classificação da produção escrita em agrupamentos, partiu-se para a última fase: a da inferência e interpretação. No caso desta investigação, procurou-se inferir a respeito de como os estudantes lidam com questões discursivas e não rotineiras e se estabelecem relações do contexto em que a questão é apresentada com outros contextos. Com o intuito de obter explicações nas resoluções em que não foi possível entender o que os estudantes fizeram, foram realizadas entrevistas semi-estruturadas.

Descrição e análise da produção escrita encontrada

Neste artigo abordaremos apenas os resultados da investigação oriundos dessa questão:

[5] Estudantes de15 a 17 anos.
[6] Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes. Este programa propõe aos estudantes problemas que vão além dos que são usualmente apresentados em sala de aula e encontrados nos livros didáticos. Isto é, problemas considerados não rotineiros. Para mais informações ver http://www.oecd.org/department/0,3355,en_2649_35845621_1_1_1_1_1,00.html .
[7] Cidade localizada no estado do Paraná, região sul do Brasil.

> Na escola de Marli, o professor de ciências aplica provas que valem 100 pontos. Marli obteve uma média de 60 pontos nas primeiras quatro provas de ciências. Na quinta prova, ela conseguiu 80 pontos.
> Qual a média da Marli em ciências após as cinco provas?

Quadro 1. Questão *Provas de Ciências*

Segundo a classificação presente nos documentos do PISA (OECD, 2004), esta questão envolve o cálculo da média aritmética, está relacionada com as atividades dos estudantes na escola, denominada como uma situação Educacional, e vinculada à área de conteúdo que envolve o estudo de fenômenos e relações probabilísticas e estatísticas. Quanto à correção, que foi realizada com base no manual de correção do PISA[8], receberam crédito completo (código 2) os itens resolvidos corretamente, crédito parcial (código 1) os itens com resolução parcialmente correta, nenhum crédito (código 0) os que foram resolvidos incorretamente e, também, nenhum crédito (código 9) os itens deixados em branco ou contendo frases como, por exemplo, "não sei" ou "não deu tempo".

Receberam crédito completo (código 2) as resoluções em que os estudantes adicionaram corretamente a média das quatro primeiras provas quatro vezes à nota da última prova e, em seguida, dividiram corretamente esse resultado por cinco ($60+60+60+60+80=320$ e $320 \div 5 = 64$). Também receberam crédito completo as resoluções em que escreveram uma expressão da média aritmética das quatro primeiras notas que é 60 para determinar o total de pontos das quatro primeiras notas ($\frac{a+b+c+d}{4}=60$, $a+b+c+d=60\times 4=240$), adicionaram corretamente o total obtido com a nota da última prova $(320+80=320)$, e, em seguida, dividiram corretamente esse resultado por cinco $(320\div 5=64)$. Já as resoluções tais como as que os estudantes adicionaram corretamente a média das quatro primeiras provas quatro vezes à nota da última prova e, em seguida, dividiram incorretamente esse resultado por cinco foi atribuído crédito parcial (código 1). Não receberam crédito algum (código 0) as resoluções em que, por exemplo, os estudantes apenas efetuaram a adição 60+60+60+60+80. As informações sobre o desempenho dos estudantes podem ser observadas na tabela a seguir.

Tabela 1: Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos estudantes por série na questão *PROVA DE CIÊNCIAS*

Série	Créditos Atribuídos								Total da amostra	
	Crédito Completo		Crédito Parcial		Nenhum Crédito					
	código 2		código 1		código 0		código 9			
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
1ª E. M.	3	30,00	0	0,00	7	70,00	0	0,00	10	45,45
2ª E. M.	4	33,33	0	0,00	8	66,67	0	0,00	12	54,55
Total da amostrar	7	31,82	0	0,00	15	68,18	0	0,00	22	100,00

8 Para mais informações ver http://www.inep.gov.br/download/internacional/pisa/liberados/07/Mat.pdf

A tabela mostra o rendimento, mas tendo apenas o resultado final, é praticamente impossível fazer inferências sobre o modo de os estudantes lidarem com a questão. O resultado final pode fornecer ao professor indícios de que algo não está bem nos processos de ensino e aprendizagem, mas apenas isso pouco contribui com esses processos. Por conta disso, a análise da produção escrita pode ser tomada como ferramenta útil para o trabalho pedagógico do professor, uma vez que permite fazer essas inferências.

Com as 22 provas, foram formados 10 grupos, conforme mostra o Quadro 1. Esses agrupamentos foram construídos independentemente dos créditos atribuídos à questão e da série.

Grupo	Estratégia	Provas
1	Efetua a adição 60+60+60+60+80. Responde com o resultado obtido na adição 60+60+60+60+80.	E011A, E142A, E212A
2	Efetua a multiplicação 60x4 e a adição 240+80, sendo 240 o resultado obtido na multiplicação 60x4. Responde com o resultado obtido na adição 240+80.	E041A, E091A, E132A
3	Efetua a adição 120+120 e a adição 240+80. Responde com o resultado obtido na adição 240+80.	E172A
4	Efetua a multiplicação 60x4, a adição 240+80, sendo 240 o resultado obtido na multiplicação 60x4, e a divisão 320:2. Responde com o resultado obtido na divisão $320 \div 2$.	E081A
5	Efetua a adição 60+60+60+60+80 e a divisão $320 \div 5$. Responde com o resultado obtido na divisão $320 \div 5$.	E061A, E182A, E202A
6	Efetua a multiplicação 60x4, a adição 240+80, sendo 240 o resultado obtido na multiplicação 60x4, e a divisão $320 \div 5$. Responde com o resultado obtido na divisão $320 \div 5$.	E071A, E101A, E192A, E222A
7	Efetua a adição 60+80. Responde com o resultado obtido na adição 60+80.	E021A
8	Efetua a adição 100+60 e a divisão $160 \div 5$. Responde com o resultado obtido na divisão $160 \div 5$.	E031A
9	Apenas responde.	E051A, E152A, E162A, E112A
10	Efetua a adição 80+60, a divisão $140 \div 2$ e a divisão $140 \div 5$. Não responde.	E122A

Quadro 2. Grupos construídos a partir das resoluções dos estudantes na questão *Prova de Ciências*.

Nos **Grupos 1, 2 e 3**, os estudantes utilizam estratégias diferentes para solucionar o problema, no entanto chegam ao mesmo resultado, ou seja, concluem que a Média de Marli após as cinco provas é de 320 pontos.

Os estudantes E011A, E142A, E212A adicionam corretamente a média das quatro primeiras provas quatro vezes à nota da última prova e apresentam o resultado dessa adição como resposta.

A multiplicação da média obtida por Marli (personagem do enunciado da questão) nas primeiras quatro provas de ciências pela quantidade de provas e a adição desse resultado à quinta nota foram realizadas corretamente pelos estudantes E041A, E091A, E132A.

O estudante E172A efetua corretamente as adições 120+120 e 240+80. É possível que esse estudante tenha efetuado mentalmente a adição 60+60, mas não há registro dessa operação.

Acredita-se, mediante a análise da produção escrita desses estudantes, que eles interpretaram que Marli obteve 60 pontos em cada uma das quatro primeiras provas e, ainda, que para obter a média de Marli após as cinco provas bastava efetuar a adição das notas obtidas nas cinco provas. Em entrevistas com alguns desses estudantes (E142A, E041A e E132A), além de essas hipóteses serem confirmadas, constatou-se que, durante o bimestre, os professores aplicam uma prova que vale 40 pontos e trabalhos que valem 60 pontos, sendo a média do bimestre constituída pela soma desses pontos. Já a média final, que deve ser no mínimo de 240 pontos para que o estudante seja aprovado, é constituída pela adição das quatro médias bimestrais. Desse modo, para resolver o problema, esses estudantes podem ter relacionado o contexto do problema com o contexto da escola em que estudam, ou seja, podem ter relacionado a situação em que o problema é proposto com o modo pelo qual é efetuada a média deles nas disciplinas ao final de um ano letivo.

No **Grupo 4**, o estudante E081A resolve o problema multiplicando, corretamente, a média de Marli nas quatro primeiras provas por quatro, adicionando corretamente esse resultado à nota obtida por ela na quinta prova e dividindo corretamente o resultado obtido por dois. Inicialmente acreditou-se que esse estudante havia dividido o resultado de 240+80 por 2, pois poderia ter interpretado que a média seria igual ao total de pontos obtidos dividido pela quantidade de notas diferentes. Ao ser entrevistado, revelou que havia dividido 320 por dois, pois acreditava que toda nota deveria ser dividida por dois e porque, além disso, 320 ultrapassava o valor de 100 pontos que é mencionado no enunciado da questão. Pode ser que o estudante acredite que toda nota deva ser dividida por dois devido ao fato de seus professores utilizarem, para compor a média da disciplina em um bimestre, notas provenientes de dois instrumentos avaliativos: trabalhos e provas.

Três provas pertencem ao **Grupo 5:** E061A, E182A, E202A. Nelas, os estudantes resolvem corretamente a questão efetuando a adição 60+60+60+60+80 e a divisão $320 \div 5$, ou seja, efetuam a adição de todas as notas obtidas por Marli e dividem o resultado dessa adição pela quantidade de provas realizadas.

Em sua prova, o estudante 202A ainda justifica a resposta: "*A média de Marli é 64, porque eu somei as 5 notas e dividi pelas 5 provas*[9]".

[9] A produção escrita dos estudantes foi reproduzida tal como foi encontrada em cada questão da prova.

Nas quatro provas (E071A, E101A, E192A, E222A) que constituem o **Grupo 6**, os estudantes multiplicam corretamente a média de Marli nas quatro primeiras provas por 4, ou seja, efetuam a multiplicação 60x4. Em seguida, adicionam corretamente a esse resultado à nota obtida por Marli na quinta prova. Respondem corretamente o problema utilizando o resultado obtido na divisão de 320 por 5, realizada corretamente.

Por meio da produção escrita tanto, dos estudantes do **Grupo 5** como do **Grupo 6**, pode-se inferir que eles interpretaram que Marli obteve 60 pontos em cada uma das quatro primeiras provas. Supõe-se que esses estudantes privilegiaram o conhecimento matemático de média aritmética para resolver essa questão, ou seja, supõe-se que uma possível conexão entre o contexto do problema e o contexto da escola não interferiu no modo de lidarem com o problema.

No **Grupo 7**, que é composto por apenas uma prova (E021A), o estudante efetua corretamente a adição 60+80 e responde que a média de Marli é de 140 pontos. Provavelmente esse estudante interpretou que a soma das notas das quatro primeiras prova de Marli foi de 60 pontos e que, para obter a média de Marli após as cinco provas, ele precisaria adicionar a essa soma a nota da quinta prova. Além disso, inicia a divisão de 140 por 50, escrevendo 70 como quociente, e a multiplicação de 50 por 70. Em nenhuma dessas operações o estudante concluiu os cálculos. Pode ser que, após ter efetuado a adição 60+80, ele entendeu que para obter a média tivesse que dividir essa soma por cinco, contudo escreveu 50 ao invés de 5. Ao iniciar a multiplicação de 50 por 70, ele pode ter percebido que o resultado dessa multiplicação seria maior que 140, e por isso pode ter respondido o problema utilizando apenas o resultado da adição de 80+60. Ele também realiza outros cálculos, mas não os utiliza para solucionar o problema. Ele efetua corretamente a divisão de 80 por 5 e, corretamente, a multiplicação de 16 por 5, que é a prova real da divisão de 80 por 5. A partir desses procedimentos supõe-se que o estudante interpretou, em um primeiro momento, que o problema solicitava que fosse encontrada a média de Marli após a quinta prova.

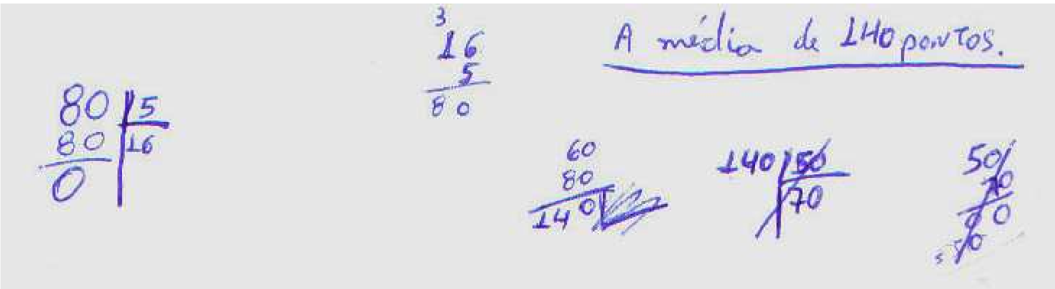


Figura 1. Resolução presente na prova E021A.

Em relação à prova E031A, pertencente ao **Grupo 8**, o estudante efetua corretamente as seguintes operações: 100+60, $160 \div 5$, 100+80=180 e 100-80=20. Contudo ele utiliza apenas 100+60 e $160 \div 5$ para solucionar o problema, já que sua resposta provém da divisão de 160 por 5. Em relação à produção escrita desse estudante, o que mais suscitou curiosidade foi saber por que efetuou as adições 100+60 e 100+80 e a subtração 100-80. Se para a sua resposta ele considerou o resultado obtido na adição 100+60, por que não considerou o resultado obtido em

100-80? Em relação ao procedimento 160:5, foi suposto que o estudante dividiu o resultado obtido em 100+60 por cinco, pois a pergunta menciona cinco provas.

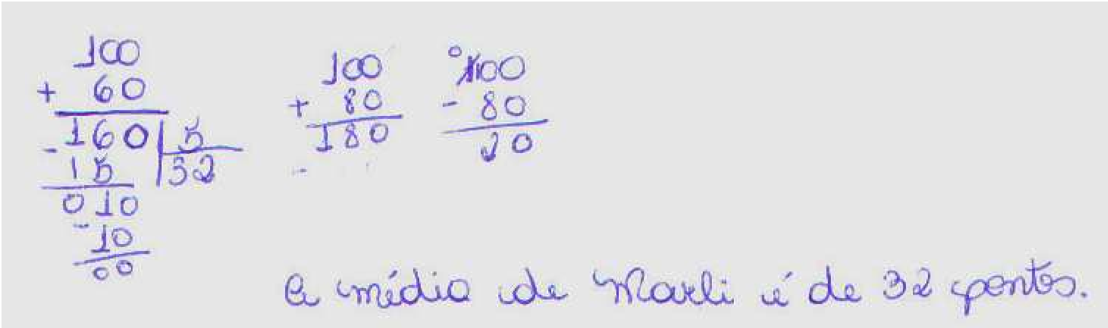


Figura 2. Resolução presente na prova E031A.

Ao ser questionado sobre sua resolução, na entrevista, esse estudante explicou que efetuou a adição 100+60, pois assim encontraria o total de pontos que Marli havia obtido. Para ele, Marli já havia obtido 100 pontos, e somando as notas das quatro provas ela havia conseguido mais 60 pontos. Em seguida, dividiu o resultado obtido por cinco, pois ela havia realizado 5 provas. Em relação à adição 100+80 e à subtração 100-80, o estudante revelou que não considerou o resultado de 100+80 já que, se considerasse, a média seria alta, e se considerasse 100-80, a média seria muito baixa. Constatou-se, nesse caso também, que o estudante relacionou o contexto do problema com o contexto da escola. Como a média mínima bimestral nessa escola é de 60 pontos, para ele 100+80=180 seria muito alto em um bimestre, e 100-80=20 seria muito baixo. Como esse estudante considerou que 100+80 ou 100-80 estaria errado, ele respondeu 32 pontos porque era um cálculo que já havia efetuado.

No **Grupo 9**, formado por 4 provas (E051A, E152A, E162A, E112A), os estudantes apenas responderam à questão, ou seja, deram uma resposta, mas não realizaram, por escrito, cálculo algum. O estudante E051A responde que a média de Marli foi de 240 pontos e que "*ela conseguiu passar direto sem o conselho*". Pela colocação do estudante em relação ao 'passar direto sem o conselho', acredita-se que ele também tenha relacionado o contexto do problema com o contexto da escola. Possivelmente ele interpretou que Marli obteve 60 pontos nas quatro primeiras e que se adicionasse essas notas ela ficaria com 240 pontos que é o mínimo, ao final de um ano letivo, que um estudante na escola de E051A precisa ter para ser promovido para a série seguinte.

E112A responde que a média de Marli foi de 80 pontos, pois, segundo ele, a "*maior nota prevalece*". Pode ser que ele tenha relacionado o contexto do problema com alguma situação que viveu em algum momento, ou seja, pode ter relacionado o contexto do problema com o fato de alguma vez algum professor ter considerado que a média final dos estudantes na disciplina seria a maior nota obtida por ele nas provas. No questionário avaliativo, que foi elaborado com a finalidade de obter dos estudantes suas impressões sobre a prova, este estudante apontou essa questão como sendo a mais fácil. Segundo ele, era a mais fácil "*porque era só ver qual era a nota mais alta, essa era a média*".

A resposta dada pelo estudante E152A foi 70 pontos e 80 pontos a do estudante E162A. Em relação a essas provas, não é possível inferir o que esses estudantes interpretaram do enunciado da questão e em relação aos procedimentos por eles utilizados.

No **Grupo 10**, o estudante E122A não responde a questão apesar de ter efetuado alguns cálculos. Esse estudante efetua corretamente a adição 80+60 e, incorretamente, a divisão de 140 por cinco, sendo 140 o resultado obtido da adição de 80+60. Contudo esses procedimentos foram invalidados pelo estudante. Então, efetua corretamente a adição 80+60 e a divisão de 140 por 2. O que se pode inferir desses procedimentos é que ele provavelmente considerou que Marli obteve 60 pontos após as quatro provas, e que pode ter interpretado que a média seria obtida dividindo o total de pontos obtidos pela quantidade de notas diferentes. Acredita-se também que esse estudante possa ter considerado que, apresentado os algoritmos das operações realizadas, ele estaria respondendo à questão.

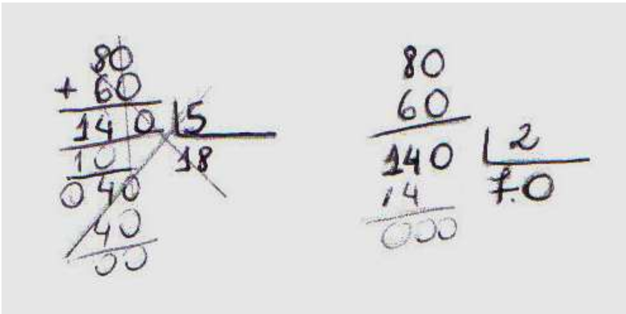


Figura 3. Resolução presente na prova E122A.

Algumas considerações

Tendo em vista a análise realizada e o que foi possível ver em cada produção, fez-se um inventário a respeito do que os estudantes mostram saber de matemática ao resolver essa questão. Identificou-se que 95,45% dos estudantes sabem resolver uma ou mais operações aritméticas envolvendo números naturais e que 31,82% sabem calcular média aritmética. Um aspecto importante a ser ressaltado, a partir desse inventário é que não se pode afirmar que um estudante não sabe determinado conteúdo matemático pelo fato de não se ter obtido informação sobre ele em sua produção escrita. Somente pode-se dizer algo a respeito do que ele fez e não do que deixou de fazer. Outra consideração a ser feita é que, mesmo quando uma resolução não é considerada correta, é possível identificar algo do que os estudantes sabem a respeito do conteúdo envolvido.

Nos casos em que os estudantes não apresentaram resposta, não foi possível fazer inferências a respeito das estratégias adotadas uma vez que a resposta é aspecto importante para a identificação da estratégia adotada pelo estudante. Talvez, nesses casos, tenham acreditado que, apresentando apenas os algoritmos das operações, estariam respondendo à questão, o que é muito comum nas aulas de matemática. Dar, de forma explícita, a resposta às tarefas propostas é um procedimento ainda muito pouco valorizado, no entanto é importante que durante as aulas os estudantes sejam incentivados a, além de registrarem suas idéias, apresentarem respostas às questões, pois é mediante estas que o professor poderá identificar as estratégias adotadas, fazer inferências em relação a elas e planejar ações de modo a auxiliá-los.

Análise referente à questão *Provas de Ciências* apontou que foram feitas sete (7) interpretações diferentes do enunciado da questão, o que, conseqüentemente, ocasionou estratégias de resolução também diferentes. Dentre estas, verificou-se que, em pelo menos quatro (4), os estudantes relacionaram o contexto em que a questão é apresentada com o modo pelo qual são efetuadas suas próprias médias nas disciplinas ao final de um ano letivo. Desse modo, para eles, efetuar a adição de todas as notas obtidas por Marli e apresentar 320 como sendo a média obtida por ela após as provas era plausível.

Aliando as entrevistas à análise da produção escrita, foi possível constatar ainda que, em algumas dessas resoluções diferentes das consideradas corretas, os estudantes relacionaram o contexto em que a questão é apresentada com outros contextos, outras informações. Esse é um aspecto que não é muito levado em consideração durante as aulas. É possível que o professor amplie sua compreensão quanto ao que os estudantes estão pensando e ao modo como lidam com problemas se passar a considerar que esse tipo de relação é possível, e, frente a isto, investigar, buscando identificar que relação foi feita.

Daí a importância de se assumir uma postura investigativa durante a avaliação, pois, desse modo, o professor pode questionar-se a respeito de qual matemática seus estudantes estão aprendendo, que entendimento estão tendo do que está sendo trabalhado em sala de aula, que dificuldades estão encontrando, e assim buscar alternativas para contribuir com o processo de ensino e de aprendizagem. Isso porque, nesse exemplo, mesmo o conteúdo – médias – tendo sido apresentado nas aulas, os alunos não fizeram diferença entre o conceito aritmético de média e o conceito particular utilizado pela escola no cálculo dela. Com isso, o contexto particular em que a palavra 'média' foi utilizado sobrepôs-se ao conceito matemático ensinado.

É importante destacar, novamente, que ao defender a idéia da análise da produção escrita como um importante componente do trabalho pedagógico e da avaliação como prática de investigação, acredita-se que se pode contribuir para uma prática escolar menos excludente, que não silencia pessoas. E é acreditando nisso que se espera que este trabalhado possa servir de incentivo e contribuir com o trabalho do professor em sala de aula.

Bibliografía

Alves, R. M. F. (2006). *Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões de matemática*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR.

Buriasco, R. L. C. de. (1999). *Avaliação em Matemática: um estudo das respostas de alunos e professores*. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação). Universidade Estadual Paulista – UNESP, Marília – SP.

Buriasco, R. L. C. de. (2004) "Análise da Produção Escrita: a busca do conhecimento escondido". En: Romanowski, J. P. et al (orgs.). *Conhecimento Local e Conhecimento Universal: a aula e os campos do conhecimento*. p. 243-251. Champagnat, Curitiba.

Cooper, B.; Harries, T.(2003). “Children’s use of realistic considerations in problem solving: some English evidence”. *Journal of Mathematical Behavior*, v.22,451-465.

Dalto, J. O. (2007). *A Produção Escrita em Matemática: análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002*. Dissertação (Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR.

Esteban, M. T.(2000). “Avaliar: ato tecido pelas imprecisões do cotidiano”. In: *23ª Reunião Anual da ANPEd*. Caxambu. Disponível em: <http:www.anped.org.br/reuniões/23/textos/0611t.PDF> Acesso: 08/01/07.

Kastberg et all.(2005). “Context matters in assessing students’ mathematical power”. *For the Learning of Mathematics* v 25 n. 2, 10-15.

Luckesi, C. C. (2002) *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. Cortez**,** São Paulo.

Nagy-Silva, M. C. (2005). *Do observável para o oculto: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª. série em questões de matemática*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina – PR.

Negrão de Lima, R. C.(2006). *Avaliação em Matemática: análise da produção escrita de alunos da 4ª. série do Ensino Fundamental em questões discursivas*. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR.

Nunes, T.; Carraher, D. W.; Schilemann, A. D.(1995) *Na vida dez, na escola zero*. Cortez, São Paulo.

OECD.(2004). *Learning for Tomorrow’s World - First Results from PISA 2003*. Paris. Disponível em: < http://www.pisa.oecd.org>. Acesso: 23/04/07.

Perego, F. (2006) *O que a Produção Escrita Pode Revelar? Uma análise de questões de matemática.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina – PR.

Perrot, G. (1998). “A leitura da produção dos alunos”. *PRÓ-MAT Informa*, n.1, 49-57.

Sacristán, J. G. (1998). “A avaliação no ensino. En: Sacristán, J. G; Pérez Gomes, A. I. *Compreender e transformar o ensino*, 295-351. Artmed, Porto Alegre.

Santos, E. R. dos. (2008). *Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em questões discursivas não rotineiras de matemática.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina – PR.

Viola dos Santos, J. R.(2007*). O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua Produção escrita em matemática*. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina – PR.

Edilaine Regina dos Santos. Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina - UEL (PR – Brasil). Atua como professora na Educação Básica. edilaine.santos@yahoo.com.br

Regina Luzia Corio de Buriasco - Doutora em Educação, professora associada do Departamento de Matemática, e docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL. Coordenadora do GEPEMA - Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação.: reginaburiasco@hasner.com.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 117-134
ISSN: 1815-0640

Estudio del Cuadrilátero de Saccheri como Pretexto para la Construcción de un Sistema Axiomático Local

**Óscar Molina; Carmen Samper; Patricia Perry;
Leonor Camargo; Armando Echeverry.**

Resumen

Este artículo tiene dos objetivos: describir un enfoque metodológico para la enseñanza de la geometría que propicia la participación de los estudiantes y mostrar que, en el ámbito de los primeros cursos de nivel universitario, dicho enfoque permite gestionar el acercamiento al conocimiento matemático y el uso de las ideas que producen los estudiantes para construir, como comunidad, parte de un sistema axiomático para la geometría plana euclidiana. Para apoyar la afirmación anterior se describen los procesos realizados por dos grupos de estudiantes, que conducen a la construcción de dos sistemas axiomáticos locales diferentes, cuyo núcleo es la relación de rectas paralelas.

Abstract

This article has two purposes: describe a methodological approach for teaching geometry that propitiates student participation, and show that, in the first university level courses, the methodology favors an approximation to mathematical knowledge and the use of student produced ideas to construct, as a community, part of an axiomatic system for Euclidean plane geometry. To support the previous statement, we describe the processes followed by two groups of preservice teachers that led to the construction of two slightly different local axiomatic systems whose nucleus is parallel lines.

Resumo

Este artigo tem dois objetivos: descrever uma abordagem metodológica para o ensino de geometria que estimula a participação dos alunos e mostrar que, no domínio dos primeiros cursos de nível universitário, esta abordagem permite gerenciar o conhecimento matemático eo uso de idéias produzidas por alunos para construir, como uma comunidade, um sistema axiomático para a geometria plana euclidiana. Para apoiar a afirmação prévia se descreve os processos realizadas por dois grupos de estudantes, levando à construção de dois sistemas axiomático locales diferentes, cujo núcleo é a relação de linhas paralelas

1.Introducción

En este artículo queremos ilustrar el efecto de un enfoque metodológico en el proceso de construcción de un sistema axiomático[1] local de la geometría plana euclidiana, relativo al paralelismo, en el marco de la resolución de un problema relacionado con el cuadrilátero de Saccheri. Este enfoque (Samper,

[1] Entendemos por sistema axiomático, relativo a un determinado tema, un conjunto conformado por términos no definidos, enunciados (i.e., postulados, definiciones y teoremas) a través de los cuales se hace hacen afirmaciones sobre los objetos involucrados en el tema, y las relaciones lógicas entre ellos. Por sistema axiomático local entendemos un sistema axiomático referido a un núcleo conceptual, en particular, vinculado con el cuerpo teórico ya construido.

Perry, Camargo, Molina y Echeverry, en evaluación) es el común denominador de la innovación curricular que se ha venido consolidando desde 2004 en los primeros tres cursos de la línea de geometría en el programa de la Licenciatura en matemáticas que ofrecemos en la Universidad Pedagógica Nacional (Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2007). Es resultado de nuestras reflexiones asociadas a las investigaciones que nuestro grupo ha desarrollado en torno al aprendizaje y la enseñanza de la geometría.

Específicamente, queremos mostrar que es posible adoptar, en el ámbito de los primeros cursos de nivel universitario, un enfoque metodológico en el que la participación de los estudiantes es fundamental en la construcción de un sistema axiomático. Para ello, comparamos aspectos de la implementación del enfoque en dos grupos de estudiantes de un curso de geometría plana que estaban a cargo de profesores diferentes, que nos ayudan a sostener que aun cuando ambos grupos estudian las mismas temáticas, cubren el mismo cuerpo de conocimientos y tienen la misma meta de avanzar en el aprendizaje de la demostración, los sistemas axiomáticos construidos difieren, precisamente como consecuencia de la participación de los estudiantes. Este hecho pone de presente la posibilidad de gestionar, por parte del profesor, el acercamiento a los estudiantes a conocimientos matemáticos desarrollados por la comunidad científica, y la utilización efectiva de las ideas producidas por ellos como miembros de una comunidad de discurso matemático (Ben-Zvi y Sfard, 2007) en un proceso de construcción social de un sistema axiomático.

Después de dar una descripción general del enfoque metodológico que proponemos y del curso mismo, nos centramos en aspectos de la implementación de dicho enfoque describiendo la ruta que se siguió para la construcción de los sistemas axiomáticos específicos originados en el marco de la solución de problema ya mencionado.

2. Descripción general de nuestro enfoque metodológico

Desde el momento mismo en que se inicia el desarrollo de un tema, se involucra a los estudiantes en la resolución de problemas[2] de índole geométrica como medio para lograr que sean ellos quienes descubran, conjeturen y produzcan inicialmente justificaciones informales, todo con el objetivo de que puedan participar activamente en la introducción de nuevos enunciados en el sistema axiomático construido hasta el momento.

Creemos que en un ambiente como el esbozado antes, los estudiantes alcanzan un cierto grado de familiaridad[3] con los objetos geométricos sobre los que versarán los enunciados que harán parte del sistema axiomático que se está construyendo. Cabe mencionar que los estudiantes trabajan en forma individual o en grupos pequeños, apoyados en el uso de la geometría dinámica. Incide en la ganancia de esta familiaridad la posibilidad de modelar una situación en un

[2] Por problema entendemos aquí una tarea para la cual los estudiantes no tienen un patrón de solución; además, en el proceso de solución de la tarea se requiere poner en juego una dosis de creatividad. Por lo regular, la tarea siempre incluye la solicitud de una justificación. (Se encuentran detalles sobre los diferentes tipos de tareas propuestas en el curso en Perry, Camargo, Samper, Molina y Echeverry, 2009).

3 Al iniciar el desarrollo de un contenido, los estudiantes tienen la familiaridad básica requerida para poder comenzar a abordar la pregunta o el problema; sin embargo, la mayoría de resultados geométricos cuyos enunciados llegan a ser parte del sistema axiomático que se construye en el curso son desconocidos para los estudiantes y cuando no lo son del todo, la rigurosidad con la que se enuncian los constituye en enunciados nuevos para ellos.

entorno en el cual están inmersos ciertos conocimientos geométricos; en consecuencia, las relaciones que los estudiantes descubren en la exploración de dicha situación se pueden modelar matemáticamente, esto es, debe existir teoría matemática que las explique (Mariotti, 1997).

Después de la resolución del problema se pide a los estudiantes presentar sus producciones —que por lo general son diversas— ante la comunidad de la clase con el fin de revisarlas y concretarlas en enunciados e ideas que se convierten en material de trabajo de la comunidad para formar el sistema axiomático. En una conversación instruccional —entendida como un discurso en la clase que permite la construcción conjunta de significado entre profesor y estudiantes y que sigue un modelo de conversación, realizada en lengua natural, en la que los miembros más experimentados de una cultura, instruyen a los menos experimentados, a través del diálogo (Tharp y Gallimore, 1988, citados en Forman, 1996)— se llevan a cabo acciones tales como responder preguntas que ayudan a ganar familiaridad y comprensión de los objetos geométricos involucrados, aceptar o rechazar las conjeturas formuladas, presentar contraejemplos cuando se rechaza una conjetura, comparar enunciados de conjeturas para determinar si se refieren o no al mismo hecho geométrico, revisar la formulación misma de las conjeturas y establecer la definición de un término que servirá de núcleo para el sistema axiomático local.

El papel del profesor como conductor de este tipo de intercambio es fundamental sin que esto signifique que los estudiantes no jueguen un papel activo y muy importante. Por ejemplo, en lo que tiene que ver con la presentación de las conjeturas a las que llegan los estudiantes, por lo general, es el profesor quien decide el orden en que se presenten para su revisión; detrás de esta decisión hay razones didácticas que buscan, por una parte, no quitarle sentido a la presentación y revisión de las diferentes conjeturas (e.g., hacer un análisis de tal forma que se estudien, gradualmente, desde las conjeturas menos elaboradas hasta las más completas, o tener en cuenta la inclusión teórica entre las conjeturas propuestas) y, por otra parte, aprovechar la revisión de las diferentes producciones para cubrir una amplia gama de consideraciones.

Teniendo ya elementos para comenzar la construcción del sistema axiomático local, ésta se va llevando a cabo a través de acciones tales como identificar qué elementos teóricos se requieren para establecer una determinada definición y en caso de que éstos no hagan parte del sistema axiomático con el que se cuenta, introducirlos; si hubiera varios enunciados para demostrar, decidir en qué secuencia se intentará hacer sus demostraciones y producirlas; identificar enunciados (postulados y teoremas) que deberían hacer parte del sistema para poder completar una demostración.

La construcción del sistema axiomático está fundamentada, en realidad, en dos prácticas matemáticas: demostrar y definir (Perry, Samper, Camargo, Molina y Echeverry, 2009), las cuales tienen lugar a través de conversación instruccional y de conversación matemática. Entendemos esta última como un diálogo, sobre algún tema matemático, en el que los estudiantes comunican sus ideas, presentan sus propuestas, hacen comentarios ya sea dirigiéndose al profesor o entre ellos de manera directa. En este tipo de conversación, el profesor es un miembro más de la comunidad y, en ese sentido, su papel es diferente al que tiene en la conversación instruccional; la responsabilidad de culminar exitosamente la tarea recae sobre la comunidad en general.

En el curso no se sigue un texto, ni los textos son fuente de consulta de los enunciados que se organizan; sin embargo, el profesor gestiona los contenidos de la clase de tal manera que los elementos que conforman el sistema axiomático global construido, en lo posible, son los mismos que componen el sistema propuesto en el libro Geometría Moderna de E. Moise y F. Downs. Ahora bien, como mecanismo para recopilar lo que se realiza en cada clase y conformar un cuerpo teórico común y sin errores, se asigna en cada clase dos estudiantes que deben tomar apuntes sobre las definiciones, postulados y teoremas (junto con sus demostraciones) que en ella se abordan y enviárselos por correo electrónico al profesor. Él hace la revisión de éstos y se lo envía a los demás miembros de la clase.

Como se vislumbra en la descripción anterior, en nuestro enfoque metodológico tenemos como fundamento que la actividad demostrativa (Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2007) es una situación social: queremos que los estudiantes se involucren en la demostración de las conjeturas que hicieron sus pares o ellos mismos, lo cual implica un acto social tanto de aceptación de conjeturas como de construcción en comunidad, de su demostración; es importante que los estudiantes tengan una experiencia de aprendizaje como participación, y que se sientan comprometidos en la construcción de conocimiento.

En este sentido, cabe resaltar el papel importante de las normas que rigen tanto la participación de los estudiantes en la actividad matemática desarrollada (es necesario escuchar a los compañeros, se debe respetar el uso de la palabra, toda contribución es importante, la participación es esencial para generar ideas útiles aunque sean erróneas) como la validación del conocimiento matemático que circula en la clase (dar el por qué de toda afirmación que se haga, usar en las demostraciones sólo aquellas afirmaciones que se han validado dentro del sistema). En un contexto de tal naturaleza, tanto el profesor como los estudiantes contribuyen a la constitución interactiva de situaciones que invitan a demostrar y se enfrentan a ellas como eventos de carácter social e individual (Goos, 2004; Graven, 2004; Martin y McCrone, 2005; Mariotti, 2000).

3. Características de los dos grupos

El enfoque metodológico descrito se implementó en dos grupos de un curso de geometría plana de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas. El curso es el segundo de la línea de geometría y está ubicado en el segundo semestre del programa. Cada grupo estuvo a cargo de un profesor diferente; sin embargo, ambos profesores tienen experiencia en orientar el curso bajo dicho enfoque metodológico, pues lo han implementado en varias ocasiones.

Los temas incluidos oficialmente en el programa del curso son los usuales: relaciones entre puntos, rectas, planos, ángulos, propiedades de triángulos, cuadriláteros, circunferencias, y relaciones de congruencia y de semejanza. Pero debido al enfoque metodológico que se utiliza, usualmente no se alcanza a cubrir lo correspondiente a los temas de circunferencia y de semejanza de triángulos; en este caso, tal como lo menciona de Villiers (1986), el tiempo didáctico transcurre mucho más lentamente que si se les presentara a los estudiantes el sistema axiomático ya hecho y ellos sólo tuvieran que obtener algunas deducciones lógicas.

Uno de los grupos estaba conformado por 30 estudiantes y el otro por 34. Conviene señalar que los dos grupos de estudiantes tenían antecedentes académicos similares en lo que se refiere al manejo de un software de geometría dinámica (Cabri), a la familiaridad con el enfoque metodológico, y al contenido geométrico mismo; en particular, en ambos grupos se conocían ciertas características de un sistema axiomático (el significado de definición, postulado y teorema, y sus funciones en procesos deductivos). En particular, para abordar el problema que se les propuso, ellos contaban con toda la teoría relacionada con congruencia de triángulos, desigualdades en triángulos, perpendicularidad de rectas en un plano y las relaciones entre puntos, rectas y planos.

4. Recuento de algunos aspectos de la implementación del enfoque metodológico y presentación de los sistemas axiomáticos locales

En esta sección exponemos el enunciado del problema planteado a los estudiantes, que dio lugar al proceso de construcción de los sistemas axiomáticos locales que presentamos. Precisamos la intención específica que nos movió a plantearlo, algunas previsiones con respecto al contenido geométrico que saldría a relucir, algunos detalles relativos a la implementación del enfoque en lo que tiene que ver con la gestión de dicho contenido y la participación de los estudiantes, y finalmente, mostramos a través de un esquema el sistema axiomático local construido por la comunidad de la clase en cada grupo, cuyos elementos surgieron previamente o en el momento, para dar solución al problema.

4.1. El problema propuesto

El problema que se propone para incentivar las ideas que darán lugar al sistema axiomático local cuyo núcleo será el paralelismo de rectas está basado en el cuadrilátero de Saccheri, un cuadrilátero con dos ángulos consecutivos rectos y dos lados opuestos congruentes cada uno con un extremo en el vértice de uno de los ángulos rectos. Siendo una figura geométrica que visualmente parece ser un rectángulo y que, a partir de la exploración con geometría dinámica, se comprueba que tiene todas las propiedades de un rectángulo, querer demostrar que las tres propiedades que se le exigen al cuadrilátero teóricamente validan esa idea impulsa a los alumnos a emprender el camino para ello. Como sólo es posible hacerlo aceptando como postulado del sistema axiomático aquel que afirma la existencia de una única recta paralela a una dada por un punto externo a ella (V Postulado de Euclides), el problema propuesto ofrece el escenario perfecto para introducir dos elementos al sistema: el concepto de rectas paralelas y dicho postulado. Nuestra expectativa no difiere mucho de lo que experimentó Saccheri (1667 - 1733) cuando estudió ese cuadrilátero con la intención de llegar a una contradicción que permitiera deducir, por reducción al absurdo, el V Postulado de los postulados restantes

(Boyer, sf). Al aceptar como verdaderas las primeras veintiocho proposiciones expuestas en *Elementos* de Euclides, las cuales no requieren del V postulado, la configuración propuesta para el cuadrilátero es construible. Saccheri logra demostrar que los otros dos ángulos del cuadrilátero son congruentes pero no rectos. Él plantea tres hipótesis: son rectos, son obtusos o son agudos y las estudia con el fin de descartar las últimas dos. Saccheri no logra su objetivo, pero a cambio establece varias propiedades geométricas relacionadas con dichas hipótesis. No es nuestro fin estudiar lo que hizo Saccheri sino usar la situación para la intención anteriormente expuesta.

El enunciado del problema difiere un poco para ambos grupos (en adelante Grupo A y Grupo B), sin que ello ocasione un efecto profundo en el sistema axiomático local que se construye.

Problema para el Grupo A. Construya un $\square ABCD$ [4] con las siguientes características: $\angle A$ y $\angle B$[5] rectos y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ [6]. ¿Qué puede demostrar acerca de $\angle C$ y $\angle D$?

Problema para el Grupo B. Dado un $\square ABCD$ tal que $\angle A$ y $\angle B$ son rectos y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. ¿Qué propiedad especial tiene el $\square ABCD$? Establezca una conjetura y demuéstrela.

Aunque en el enunciado para al Grupo B no se solicita construir una representación de la situación, los estudiantes saben que para poder determinar propiedades del cuadrilátero es necesario poder realizar una exploración empírica en un entorno de geometría dinámica que les permitirá, gracias al arrastre, generalizar lo que descubren. Así mismo, aun cuando no se explicita en el enunciado para el Grupo A que deben establecer una conjetura, hace parte del contrato didáctico de la clase hacerlo cada vez que se propone una situación como ésta. Además, es aceptable que los estudiantes propongan conjeturas que provean más información que aquella que da la respuesta a la pregunta que se les plantea.

La forma como se enuncian los problemas que se proponen en el curso tiene como objetivo propiciar que los estudiantes se involucren en una actividad demostrativa que vaya desde la exploración de la situación problema, pase por la formulación de una conjetura y concluya con la demostración de un hecho geométrico que subyace en la situación.

La finalidad de muchos de los problemas es generar la necesidad de extender el sistema axiomático que se ha venido conformando a lo largo del curso para poder expresar lo que los estudiantes descubren y a la vez justificar su validez; es decir, a partir de las propuestas que ellos dan como solución al problema (las cuales se enuncian en calidad de conjetura) se pueden introducir nuevas definiciones, postulados y teoremas que conformarán un sistema

[4] $\square ABCD$ indica cuadrilátero cuyos vértices son *ABCD*.
[5] $\angle A$ indica ángulo con vértice *A*. $\angle ABC$ indica ángulo conformado por los rayos *BA* y *BC*. Eventualemente, utilizaremos $\angle$ seguido de un número (e.g. $\angle 1$) para indicar un ángulo en el cual no se explictan sus vértices, pero para el cual hay una representación gráfica que lo ayuda a identificar.
[6] $\overline{AD}$ indica segmento cuyos extremos son los puntos *A* y *D*.

axiomático local en torno a un objeto o relación geométrica. En el caso que aquí nos ocupa, el núcleo del sistema axiomático local es la relación de *paralelismo entre rectas.*

4.2. Las conjeturas formuladas y el proceso de su demostración

Al comenzar a abordar el problema, estudiantes de ambos grupos piden introducir la definición de *cuadrilátero* para tener claridad de lo que trata el problema, así que en primera instancia se precisa tal definición. A pesar de que los enunciados de los problemas difieren, los estudiantes de ambos grupos coinciden en tres de las conjeturas formuladas (Conjeturas 1, 2 y 3), pero los del Grupo A, formulan una más; todas ellas, son producto de la modelación y la exploración de la situación en geometría dinámica. Las siguientes son las conjeturas formuladas:

Conjetura 1. Si en un □*ABCD*, $\angle A$ y $\angle B$ son rectos y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ entonces $\angle C \cong \angle D$.

Conjetura 2. Si en un □*ABCD*, $\angle A$ y $\angle B$ son rectos y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ entonces $\angle C$ y $\angle D$ son rectos.

Conjetura 3. Si en un □*ABCD*, $\angle A$ y $\angle B$ son rectos y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ entonces □*ABCD* es un rectángulo.

Conjetura 4. Si en un □*ABCD*, $\angle A$ y $\angle B$ son rectos y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ entonces $\angle C$ y $\angle D$ son rectos, $\overline{BA} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DB}$.

En el Grupo A, los estudiantes proponen un enunciado relativo a características del cuadrilátero, que son consecuencia necesaria de las condiciones de la situación (lados congruentes, diagonales congruentes y ángulos rectos, Conjetura 4). El hecho de que en este grupo los estudiantes propongan las Conjeturas 3 y 4, ilustra lo dicho anteriormente en relación con la posibilidad que tienen los estudiantes de proponer conjeturas que provean más información que aquella que corresponde a la respuesta de la pregunta. La Conjetura 4 muestra el grado de exploración que realizan los estudiantes, evidencia del efecto del enfoque metodológico.

Además, al explorar la situación en geometría dinámica resulta evidente la Conjetura 3; cabe entonces preguntarse por qué tal conjetura no fue reportada por todos los estudiantes de los dos grupos. Una razón probable es que aunque tenían, por su experiencia del curso anterior, la noción de rectángulo como cuadrilátero con cuatro ángulos rectos, el sistema axiomático con el que contaban no incluía la definición de rectángulo y, en consecuencia, su conjetura no podía hacer referencia a éste, pero sí a propiedades del cuadrilátero que son consecuencia necesaria de las condiciones impuestas por la situación.

Desde el punto de vista matemático, las conjeturas que se deberían demostrar inicialmente son la 2 o la 3, pues éstas contienen teóricamente a la Conjetura 1 (el hecho de garantizar que $\angle C$ y $\angle D$ son rectos o que □*ABCD* es un rectángulo implica necesariamente la congruencia de los $\angle C$ y $\angle D$). No obstante, la gestión del contenido realizada por los profesores difiere gracias a la decisión tomada con respecto a cuál sería la primera conjetura que se demostraría.

En el Grupo B se aborda primero la demostración de la Conjetura 1, decisión que toma el profesor en atención a que un grupo de estudiantes afirmaba tener lista la demostración. En el Grupo A, ante la insinuación de una pareja de estudiantes que afirma haber demostrado la Conjetura 2, el profesor decide comenzar por ella, aunque sabe de antemano que dicha conjetura no se puede demostrar sin introducir nuevos elementos al sistema axiomático. Con tal acción pretende propiciar una discusión, cuando el grupo se percate del error en la demostración, en la que puedan surgir otras ideas que ayuden a enriquecer el sistema axiomático local en construcción. La propuesta de demostración presentada por los estudiantes, aunque no concluye exitosamente, sí demuestra la Conjetura 1.

Como resultado de las dinámicas descritas antes, la Conjetura 1 resulta ser la primera en demostrarse en ambos grupos. Las demostraciones respectivas tienen, en esencia, los mismos pasos, y no se requiere la inclusión de nuevos elementos al sistema axiomático existente hasta el momento. Sin embargo, estudiantes de ambos grupos destacan que la demostración contiene la justificación del enunciado *las diagonales del cuadrilátero son congruentes*, que para el caso del Grupo A, es parte del consecuente de la Conjetura 4.

Una vez demostrada la Conjetura 1, cada grupo toma un rumbo diferente en su intento por demostrar la Conjetura 2. Bien sea por la gestión del profesor, en términos de orientar la discusión a partir de preguntas para generar ideas útiles en la demostración (caso del Grupo A), o bien, por las ideas clave que expresan los estudiantes para iniciar la demostración (caso del Grupo B), los dos grupos se involucran en la tarea usando hechos geométricos diferentes o los mismos en momentos distintos del proceso, circunstancia que lleva a la construcción de dos sistemas axiomáticos locales diferentes relativos a la relación de paralelismo.

4.2.1. El caso del Grupo A

Como se describió antes, el intento de un estudiante por demostrar la Conjetura 2 no tiene los réditos esperados por él. A pesar de varios intentos, los estudiantes no saben cómo seguir la demostración, lo que lleva a que el profesor les plantee una pregunta orientadora: “¿qué otras características del cuadrilátero se evidencian?”. Los estudiantes mencionan el paralelismo de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, hecho que da pie para una discusión en torno a la noción de *rectas paralelas,* y la inclusión de la respectiva definición en el sistema axiomático. Además, al indagar sobre por qué dichos segmentos son paralelos, se introduce y demuestra el *Teorema perpendiculares – paralelas*[7] usando el método indirecto de demostración y el *Teorema del triángulo rectángulo*. En este punto, el profesor cuestiona cómo garantizar la existencia de una recta paralela a una recta dada *m* por un punto externo *A*. Los estudiantes proponen una demostración usando el *Teorema perpendiculares – paralelas*, ya demostrado. Como consecuencia de esta dinámica, se introduce al sistema el *Teorema de la existencia de una recta paralela*.

[7] Todos los enunciados que hacen parte del sistema axiomático se encuentran en el Apéndice.

Se analiza de nuevo el problema del cuadrilátero de Saccheri con el objetivo de ver si los teoremas introducidos permiten demostrar que $\angle C$ y $\angle D$ son rectos, encontrando que la inclusión de tales elementos teóricos no modificaba la posibilidad de hacer la demostración deseada. Entonces el profesor, con el propósito de proveer más herramientas para la demostración, hace un paréntesis dejando de lado la Conjetura 2 y propone investigar la situación *dos rectas y una recta secante a ellas* (Figura 1). A partir de ello se define *recta secante*.

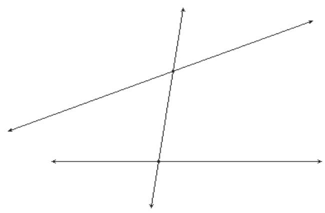


Figura 1

Los estudiantes, quizá producto de su experiencia en el curso anterior, identifican *ángulos alternos internos* y *correspondientes*. Por esta vía, sus definiciones se introducen en el sistema axiomático. Además, los estudiantes proponen las siguientes conjeturas:

Conjetura 5. Si dos rectas son paralelas y están cortadas por una secante, entonces los ángulos alternos internos son congruentes, y los ángulos correspondientes son congruentes.

Conjetura 6. Si los ángulos alternos internos entre dos rectas cortadas por una trasversal son congruentes entonces las dos rectas son paralelas.

Los intentos por demostrar la Conjetura 5 son infructuosos. El profesor sugiere entonces emprender la validación de la Conjetura 6. Así, establecen el *Teorema AIP* mediante el método de prueba indirecta sugerido por un estudiante cuando supone que las rectas *m* y *n* no son paralelas y usa el *Teorema del ángulo externo* y el *Teorema de los ángulos opuestos por el vértice* para llegar a contradecir la congruencia de $\angle 2$ y $\angle 1$ (Figura 2).

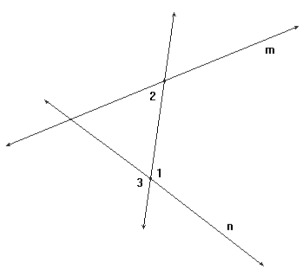


Figura 2

Después reinician la búsqueda de la vía para validar la Conjetura 5. El profesor introduce el *Postulado de la unicidad de las rectas paralelas* y examinan si es útil para la demostración en cuestión. De nuevo, los estudiantes proponen hacer una demostración por contradicción suponiendo que aunque las rectas sean paralelas los ángulos alternos internos no son congruentes. A partir de la suposición de que los ángulos alternos internos, $\angle ABC$ y $\angle 2$, no son congruentes y usando el *Postulado construcción de ángulos*, deciden construir otra recta, por *B*. Ésta resulta ser paralela a *n* debido al teorema AIP (Figura 3). El postulado anteriormente introducido permite mostrar el hecho contradictorio que surge y así concluir la demostración de la Conjetura 5, y por ende introducirla al sistema como el *Teorema PAI*.

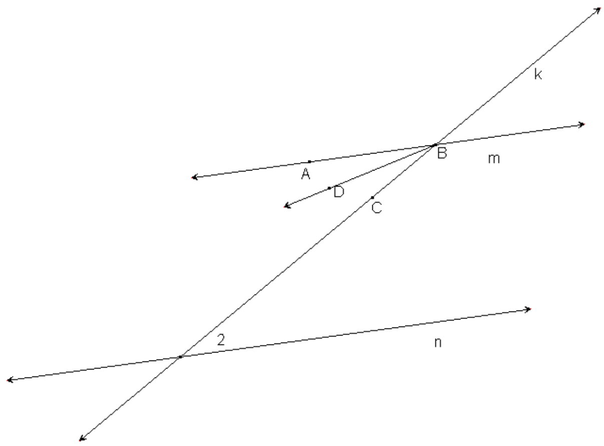


Figura 3

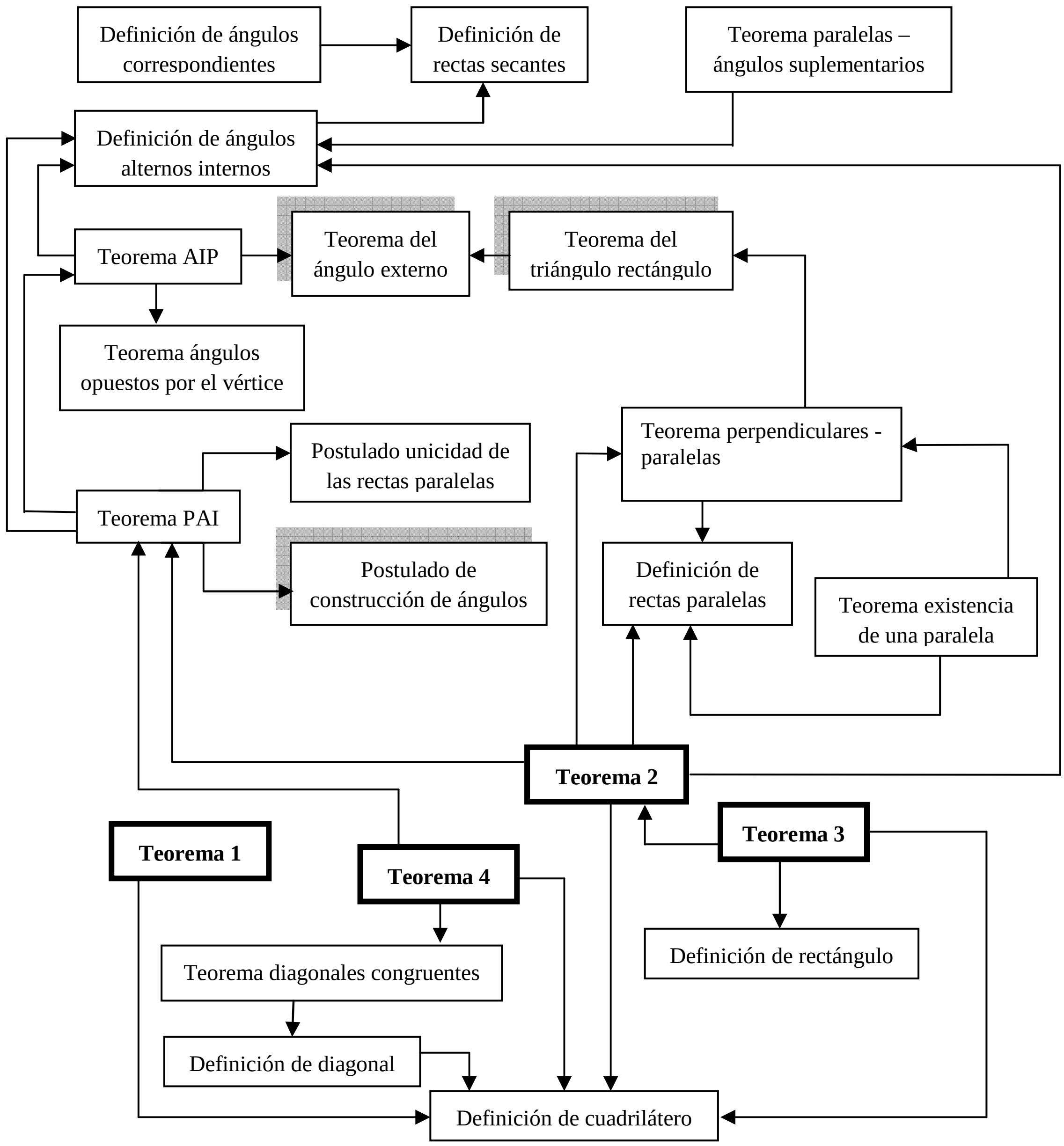
Retoman la Conjetura 2 y el proceso de su validación finaliza cuando un estudiante usa el *Teorema PAI* para demostrar que $\angle C$ y $\angle D$ son rectos. Esa demostración también permite concluir la validez de la Conjetura 4. Garantizado este hecho e institucionalizada, por parte del profesor, la definición de *rectángulo* con base en la noción que los estudiantes tenían de dicho objeto, la Conjetura 3 también fue demostrada por ellos.

Como el *Teorema paralelas – ángulos suplementarios* no surgió durante el proceso, el profesor solicita su demostración en una evaluación parcial, con el objetivo de completar el sistema axiomático. Así, se conforma un sistema axiomático local cuyo núcleo es la *relación de paralelismo* pero que no incluye teoremas sobre las relaciones entre ángulos correspondientes y rectas paralelas.

El Esquema 1 representa el sistema axiomático construido en el proceso que acabamos de recontar. Mediante flechas que vinculan parejas de elementos teóricos indicamos que para definir, postular o demostrar un elemento (origen de la flecha) se requiere el segundo (al cual apunta la flecha).

Se señalan con una sombra las cajas correspondientes a los elementos que hacían ya parte del sistema, fruto de un trabajo previo, posiblemente relacionado con otra axiomatización; los otros elementos surgieron como necesidades teóricas en el curso de la actividad y se introdujeron para poder atender dichas necesidades.

Como las conjeturas fueron demostradas, en el esquema se denotan, respectivamente, como Teoremas 1, 2, 3 y 4.

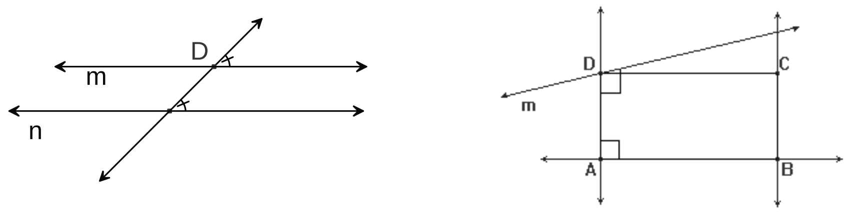


Esquema 1. Sistema axiomático local construido en el Grupo A

4.2.2. El caso del Grupo B

Como mencionamos anteriormente, el camino seguido por el Grupo B en su intento por demostrar que $\angle C$ y $\angle D$, del cuadrilátero de Saccheri, son rectos, es diferente al del grupo A. Uno de los estudiantes, apoyado en su exploración en geometría dinámica, menciona el uso de *rectas paralelas*; su propuesta consiste en construir la recta *m* tal que el punto *D* pertenezca a la recta *m* y ésta sea paralela a la recta determinada por los puntos *A* y *B*. A la vez, hace explícita su noción de rectas paralelas como “aquellas en las que los puntos de una de éstas equidistan de la otra”. A pesar de que el profesor reconoce que esta noción puede tomarse como definición de rectas paralelas, decide indagar qué noción de éstas tienen los demás estudiantes. Entre los aportes de los estudiantes, surge como propuesta *dos rectas coplanares que no se intersecan*.

El profesor toma la decisión de adoptar esta última como la definición, con base en el plan de desarrollo de la teoría que tenía configurado. El profesor acepta la propuesta mencionada en relación con la construcción de la recta paralela. La clase adopta dicha idea y usan los pasos de la demostración de la Conjetura 1 como pasos iniciales para el proceso de demostración de la Conjetura 2. Para construir la recta *m* paralela a $\overleftrightarrow{AB}$[8] con $D \in m$, los estudiantes plantean dos alternativas que, a la postre, complementan el sistema axiomático en construcción. Una alternativa consiste en construir ángulos correspondientes congruentes (idea que surge de la construcción con regla y compás que los estudiantes conocen desde el curso anterior) y la otra radica en construir una recta *m* perpendicular a $\overleftrightarrow{AD}$ por *D* (Figura 4).



Alternativa 1 Alternativa 2

Figura 4

En el orden mencionado se estudian ambas alternativas. Para la primera, se hace necesario hacer un paréntesis en la demostración de la conjetura y estudiar la situación generalizada para validar teóricamente la construcción práctica que los estudiantes conocían (dada una recta *n* cualquiera y un punto *D* que no pertenece a ella, construir una recta *m* paralela a *n* con $D \in m$). La validación permite introducir la definición de *recta secante a dos rectas*, y con ella, la definición de *ángulos correspondientes*. Además propicia la inclusión del *Teorema ángulos correspondientes – paralelas* que posteriormente permite validar la construcción. Luego se discute la segunda alternativa que está ligada al cuadrilátero de Saccheri; ésta lleva a incluir en el sistema el *Teorema perpendiculares-paralelas*. Ambos teoremas fueron demostrados indirectamente y para ello se usó el *Teorema del ángulo externo*, proceso que fue similar al desarrollado por el Grupo A para demostrar la Conjetura 5. Después del estudio de ambas alternativas el profesor destaca que con ellas se ha demostrado el *Teorema de la existencia de una recta paralela*. A diferencia de lo que sucedió en el Grupo A, en donde es el profesor quien genera la discusión que lleva a establecer el teorema anterior, en el Grupo B son los estudiantes quienes inician el proceso que lleva a que el teorema se incluya en el sistema axiomático correspondiente. El profesor impulsa ese proceso al insistir en la necesidad de garantizar, desde la teoría, cada una de las construcciones propuestas. En el marco del problema del cuadrilátero de Saccheri, las dos propuestas confluyen en la segunda alternativa, y a partir de ella, los estudiantes continúan el proceso para demostrar la Conjetura 2. El problema ahora es garantizar que la recta *m* interseca a la $\overleftrightarrow{BC}$ en un punto *C'*. La discusión lleva a que algunos estudiantes sugieran ideas que conducen al *Teorema paralelas–secante* y al *Teorema*

[8] $\overleftrightarrow{AB}$ indica una recta que contiene los puntos *A* y *B*.

paralelas–semiplanos, teoremas que no surgen en el Grupo A*.* Una vez resuelto tal problema, los estudiantes explicitan su convencimiento de que $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ tienen la misma longitud (Figura 5). Garantizar desde la teoría este hecho requiere establecer el *Teorema paralelas – equidistancia*, recordando por ello la definición de *distancia de un punto a una recta*. En el intento de demostrar ese teorema, se introduce la definición de *ángulos alternos interno*s y la necesidad de contar con el *Teorema PAI*. Con la colaboración de toda la comunidad, se hace un esbozo de lo que sería la demostración de dicho teorema y en ese proceso surgen también las ideas para demostrar el *Teorema AIP.*

En pro de agilizar el proceso de la demostración de la Conjetura 2, el profesor introduce el *Postulado de la unicidad de la recta paralela* y propone, como tarea extraclase, la realización de la demostración detallada de dichos teoremas y la del *Teorema paralelas – ángulos correspondientes*. Esta tarea se analiza en la siguiente clase, cuando ya se han demostrado las Conjeturas 2 y 3. De los seis teoremas aquí nombrados sólo el *Teorema PAI* y el *Teorema AIP* forman parte del sistema axiomático establecido en el Grupo A.

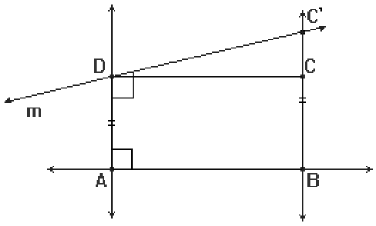
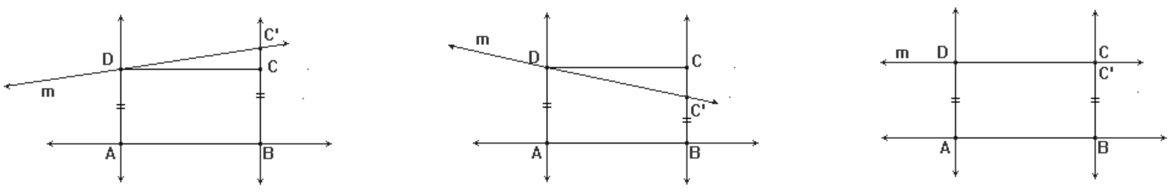


Figura 5

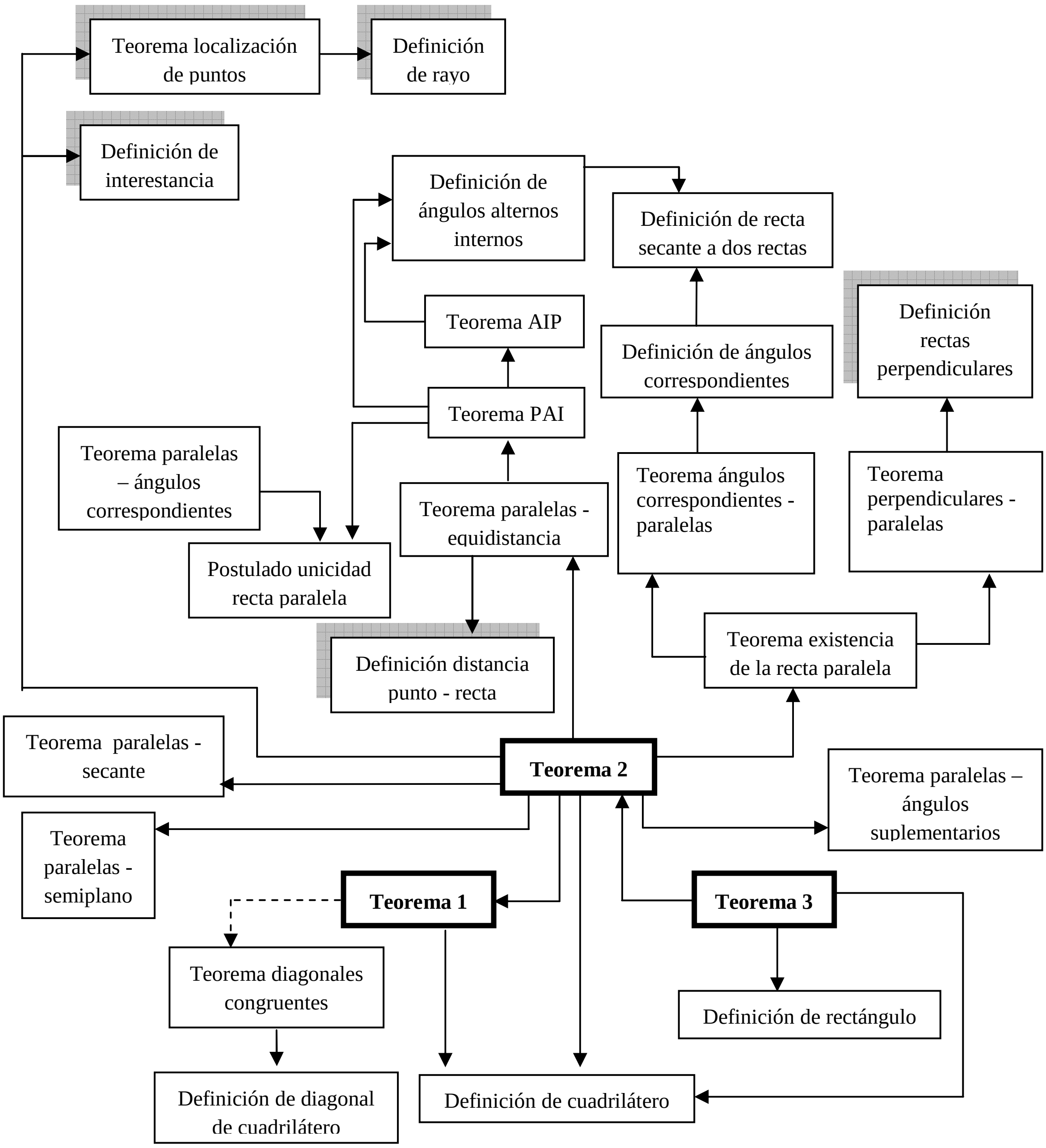
Aceptando como válido el *Teorema paralelas–equidistancia*, a partir de la relación de transitividad, se justifica que el $\overline{BC}$ y $\overline{BC'}$ tienen la misma medida de longitud. Esto conduce a tratar de determinar si C y C' son el mismo punto. Para ello, se mencionan los tres casos posibles de interestancia: (i) *C* está entre *C' y B,* o (ii) *C'* está entre *C* y *B*, o (iii) {*C*} = {*C'*} (Figura 6). De nuevo surgen dos alternativas para analizar la situación: algunos estudiantes usan la *definición de interestancia* para descartar los dos primeros casos; otros optan por demostrar directamente el tercer caso utilizando la *definición de rayo* y el *Teorema de la localización de puntos*. Al demostrar que *C* y *C*' son el mismo punto, se deduce que la recta determinada por *D* y *C* es paralela a la determinada por *A* y *B*. A partir de la inclusión del *Teorema paralelas – ángulos suplementarios*, se concluye que $\angle A$ y $\angle D$ son suplementarios y por ello que el $\angle D$ es recto. Con ello concluye la demostración de la Conjetura 2 pues se tiene que $\angle C$ y $\angle D$ son congruentes.



C está entre *C'* y *B* | *C'* está entre *C* y *B* | {*C*} = {*C'*}

Figura 6

La Conjetura 3 se demuestra una vez institucionalizada, por parte del profesor, la definición de *rectángulo* basada en la noción que los estudiantes tenían de dicho objeto. El proceso en torno a la situación del cuadrilátero de Saccheri culmina con una conversación matemática en la que los estudiantes presentan la solución a la tarea extraclase ya mencionada. Dado que la demostración de la Conjetura 2 depende de la validez del *Teorema paralelas – equidistancia* y éste de la validez del *Teorema PAI*, en tal intercambio los estudiantes destacan la necesidad de contar con el *Postulado de la unicidad de la recta paralela* para demostrar no sólo estos dos teoremas sino también el *Teorema paralelas – ángulos correspondientes*. En el siguiente esquema se muestra cuál fue el sistema axiomático local construido en el Grupo B.



Esquema 2. Sistema axiomático local construido en el Grupo B

5. Algunos comentarios finales

Como se evidencia en el recuento que acabamos de concluir del proceso de construcción del sistema axiomático local realizado por cada grupo, con el que ilustramos el enfoque metodológico implementado en las clases de geometría, los sistemas axiomáticos difieren en cuanto a la estructura de las relaciones deductivas que se establecen entre los enunciados que componen el sistema pues éstos se introducen en momentos diferentes y por razones distintas. Sin embargo, ambos sistemas axiomáticos tienen elementos comunes como el *Postulado de la unicidad de la paralela*, las definiciones de cuadrilátero y rectángulo y los teoremas básicos asociados a la relación de paralelismo. En ese sentido, el contenido en juego es en esencia igual al de un curso que siga otra metodología, pero la experiencia de los estudiantes como partícipes de la producción de conocimiento matemático es notoriamente diferente. No obstante la diversidad entre los estudiantes, las propuestas que surgen, los profesores, los esquemas de los sistemas axiomáticos generados muestran que aun cuando ellos difieren, en ambos grupos se estudiaron las mismas temáticas y se presentó el mismo cuerpo de conocimientos: se partió del mismo lugar, se llegó al mismo lugar, pero los caminos fueron distintos. Son varios los factores que llevan a que el efecto de la implementación del enfoque metodológico, difiera en los grupos, pero en este artículo queremos resaltar dos de ellos. En primer lugar, son las ideas de los estudiantes las que orientan el rumbo del proceso de construcción de las demostraciones de las conjeturas. En el Grupo B, fue un estudiante quien proveyó la idea básica que inició el proceso a partir del problema del cuadrilátero de Saccheri y todos los elementos del sistema axiomático surgen como consecuencia de querer construir una recta paralela por un vértice del cuadrilátero. En el Grupo A, además del análisis de dicha situación, fue necesario que el profesor propusiera dos problemas más para impulsar el proceso. Los elementos del sistema axiomático surgen del reconocimiento de que el cuadrilátero de Saccheri tiene dos lados paralelos y la demostración de la Conjetura 2 se basa en el teorema PAI y la congruencia de triángulos. Pero en ambos grupos, son las propuestas de los estudiantes tanto en sus respuestas a los problemas propuestos y a los obstáculos que iban surgiendo en el proceso de demostrar la conjetura como para las demostraciones de los teoremas, que llevan a la configuración del sistema axiomático.

En segundo lugar, queremos resaltar que aunque hay una oportunidad real para la participación de los estudiantes en la construcción del contenido que se estudia en el curso, eso no implica que el profesor tenga un papel secundario o que su presencia en el aula sea opaca. El profesor juega un papel irremplazable. Él gestiona las propuestas de los estudiantes; controla el uso correcto de los elementos del sistema, en caso de que los estudiantes no lo hagan; institucionaliza el conocimiento; y ayuda a desatascar el proceso en caso de que los estudiantes no encuentren cómo hacerlo. En resumidas, el profesor es el director de una orquesta en donde cada integrante aporta sus conocimientos para que él los armonice, dando las entradas a dichos conocimientos en los momentos oportunos, dinamizando el proceso y logrando cohesionar al grupo para producir una gran obra: la construcción del sistema axiomático local. Tan importante es el papel del profesor, que su gestión es otro factor que influye en la diversidad del efecto de la implementación del enfoque propuesto.

Bibliografía

Ben-Zvi, D. y Sfard, A. (2007). Ariadna's thread, Daedalus' wings, and the learner's autonomy. *Education and Didactics*, 1(3), 123-141.

Boyer, C. (sf). *A history of mathematics.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

de Villiers, M. (1986). The role of axiomatisation in mathematics and mathematics teaching. Stellenbosch: RUMEUS, University of Stellenbosch. mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proof.pdfForman (consulta en diciembre 2008), A. (1996).

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35, 4, 258-291.

Graven, M. (2004). Investigating mathematics teacher learning within an in-service community of practice: The centrality of confidence. *Educational Studies in Mathematics*, 57(2), 177-211.

Mariotti, M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25-53.

Martin, T., McCrone, S., Bower, M. y Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 95-124.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A., Molina, O. (2007). *Innovación en la enseñanza de la innovación en un curso de geometría para formación inicial de profesores*. Memorias XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Molina, O. y Echeverry, A. (2009). Assigning mathematics tasks versus providing pre-fabricated mathematics in order to support learning to prove. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: *Proof and proving in mathematics education*. (vol. 2, pp. 124-129). Tapiei, Taiwan: National Taiwan Normal University.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Molina, O. y Echeverry, A. (2009). Learning to prove: enculturation or…? En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education. (vol. 2, pp. 130-135). Tapiei, Taiwan: National Taiwan Normal University.

Óscar Molina. Profesor de Planta de la Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. ojmolina@pedagogica.edu.co

Carmen Samper. Profesora Titular de la Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. csamper@pedagogica.edu.co

Patricia Perry. Asesora Externa del grupo de investigación A.E.G. pperryc@yahoo.com.mx

Leonor Camargo. Profesora de Planta de la Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. lcamargo@pedagogica.edu.co

Armando Echeverry. Profesor Ocasional de la Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. aecheverry@pedagogica.edu.co

Apéndice

A continuación se presenta una lista de los elementos teóricos del sistema axiomático local construido a través de la propuesta que aquí se reporta.

Postulados

Unicidad de la recta paralela	Dada una recta *l* y una recta *m* paralela a la recta *l* por un punto $P \notin l$, entonces *m* es única.
Construcción de ángulos	Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista de alguno de los semiplanos *H* en un plano β. Para cada número *r* entre 0 y 180, hay exactamente un $\overrightarrow{AP}$ con *P* en *H*, tal que $m\angle PAB = r$.

Definiciones

Cuadrilátero	Dados cuatro puntos coplanares donde cada trío de puntos no son colineales, un cuadrilátero es la unión de los segmentos tales que: Sus extremos son parejas de dichos puntos. Cada punto dado es extremo de exactamente dos segmentos. Si dos segmentos se intersecan lo hacen sólo en sus extremos. Tales segmentos se denominan lados del cuadrilátero y los puntos vértices del mismo.
Diagonal de un cuadrilátero	Dado un cuadrilátero los segmentos cuyos extremos son los vértices no consecutivos se denominan *diagonales* del cuadrilátero.
Rectas paralelas	Dos rectas son *paralelas* si están en el mismo plano y no tienen puntos en común.
Recta secante	Dadas dos rectas coplanares, una *secante* es una recta que interseca a las dos rectas dadas, y los puntos de intersección correspondientes son diferentes.
Ángulos alternos internos	Dadas dos rectas *m* y *n*, y una recta s tal que $s \cap n = \{Q\}$ y $s \cap m = \{P\}$, $m, n, s \subset \alpha$, α, un plano, entonces el $\angle TPQ$ y $\angle RQP$ son *alternos internos* si: T y R pertenecen a *m* y *n*, respectivamente T y R están en semiplanos diferentes de α, determinados por la recta s
Ángulos correspondientes	Dadas dos rectas y una secante, dos ángulos son *ángulos correspondientes* si no son adyacentes, cada uno tiene un lado sobre la trasversal siendo uno de ellos subconjunto del otro y los otros dos lados de los ángulos, excluyendo el vértice, están en el mismo semiplano determinado por la trasversal.
Rectángulo	Un cuadrilátero es *rectángulo* si tiene cuatro ángulos rectos.
Distancia de un punto a una recta	Sea *m* una recta y P un punto externo a ella. La *distancia* de P a *m* es la medida de la longitud del segmento perpendicular a *m*, con un extremo en P y el otro en *m*.
Interestancia	B está *entre* A y C si 1) A, B, y C son puntos distintos de una misma recta y 2) AB + BC = AC.
Rayo	Sean A y B dos puntos de una recta L. El rayo $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de puntos que es la unión de $\overline{AB}$ y el conjunto de puntos C para los cuales es cierto que B está entre A y C.

Teoremas

Perpendiculares – paralelas	Dos rectas en un plano son paralelas si ambas son perpendiculares a la misma recta.
Triángulo rectángulo	Un triángulo rectángulo no tiene dos ángulos rectos.
Existencia de una recta paralela	Dada una recta *l*, y un punto *P* que no pertenece a *l*, entonces existe una recta *m* paralela a *l* tal que *P* pertenece a *m*.
AIP	Dadas las rectas *l* y *m*, *s* una secante a ellas y los ángulos alternos internos congruentes entonces *l* // *m*.
PAI	Dadas las rectas *l* y *m*, tales que *l* // *m* y *s* una secante a ellas entonces los ángulos alternos internos son congruentes.
Ángulo externo	Un ángulo externo de un triángulo tiene medida mayor que la de cualquier ángulo interno no contiguo.
Ángulos opuestos por el vértice	Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
Paralelas – ángulos suplementarios	Si dos rectas paralelas son intersecadas por una secante, los ángulos internos no alternos son suplementarios.
Ángulos correspondientes – paralelas	Se dan dos rectas intersecadas por una secante. Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.
Paralelas – secante	En un plano, dadas dos rectas paralelas *k* y *m* y una recta *n* que interseca a *k*, la *n* interseca a *m*.
Paralelas – ángulos correspondientes	Dadas las rectas *l* y *m*, tales que *l* // *m* y *s* una secante a ellas entonces los ángulos correspondientes son congruentes.
Paralelas - semiplanos	Dadas dos rectas paralelas *l* y *m* y un punto $P \in m$. Entonces todo punto de *m* está en el mismo semiplano determinado por *l* en que está P.
Paralelas – equidistancia	Dadas dos rectas paralelas *l* y *m*. Todos los punto de la recta *l* equidistan de *m*.
Localización de puntos	Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo y sea *x* un número positivo. Entonces existe exactamente un punto P de $\overrightarrow{AB}$ tal que AP = *x*.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 135-144
ISSN: 1815-0640

Aspectos visuais e conceituais envolvidos na interpretação de gráficos

Liliane M. T. L. de Carvalho; Carlos Eduardo F. Monteiro;Tânia M. M. Campos

Resumo

A interpretação de gráficos constitui-se como um processo de resolução de problemas em variados contextos nos quais o leitor precisa se engajar com os dados apresentados, mobilizando aspectos visuais e conceituais. Neste artigo, discutimos a importância dos gráficos enquanto sistemas simbólicos que subsidiam a representação de problemas. Aspectos importantes referem-se a fatores pontuais e globais dos gráficos que estão relacionados respectivamente a determinados processos cognitivos. Os aspectos conceituais e visuais vinculados aos dados revelam que a construção de significados não é um processo de apreensão direta da informação, mas requer de quem interpreta uma atividade interativa com o gráfico.

Abstract

The interpretation of graphs is a process of solving problems that can occur in different contexts in which people interact with the data presented, mobilising conceptual and visual aspects. In this paper, we analyse the importance of graphs as symbolic systems that subsidize the representation of problems. Important aspects are related to the particular and global factors of graphs that are associated with different cognitive processes. The visual presentation of graphs is emphasised as a basic factor in the interpretations that the students undertake. However, conceptual factors considered in the interpretation of graphs suggest that the construction of meaning is not a process of direct apprehension of information. This process requires a interactive activity from who interprets the data presented on a graph.

Resumen

La interpretación de gráficos es un proceso de resolución de problemas que puede ocurrir en diferentes contextos, en aquellos en que las personas interactúan con los datos presentados, movilizando aspectos conceptuales y visuales. Los gráficos son sistemas simbólicos que subsidian la representación de los problemas. La interpretación de los gráficos son factores particulares y globales que se asocian con diferentes procesos cognitivos. La presentación visual de los gráficos se destaca como un factor básico en las interpretaciones de los mismos. Sin embargo, los factores conceptuales considerados en las interpretaciones sugieren que la construcción de sentido no es un proceso de captación directa de la información, ya que requiere de una actividad interactiva de la que interpreta los datos.

1. Introdução

Neste artigo, discutimos a interpretação de gráficos como um processo de resolução de problemas o qual se relaciona aos aspectos visuais e conceituais e que pode ocorrer em variados contextos. Com base numa revisão da literatura, incluindo estudos desenvolvidos pelos autores, enfatizamos diferentes aspectos envolvidos na interpretação de gráficos: a forma de apresentação dos dados; as maneiras de proposição do problema a partir de questões específicas; os diferentes tipos de informação e experiências prévias daqueles que interpretam.

Nossa perspectiva é de que as pessoas quando se engajam na resolução de problemas a partir de gráficos, podem apresentar ações baseadas em conhecimentos formais de matemática como também em intuições sobre os aspectos visuais e/ou representacionais das informações apresentadas no gráfico. Por exemplo, quando alguém interpreta um gráfico apresentado em uma revista ou jornal, pode utilizar estratégias que envolvem noções matemáticas relacionadas com medidas, proporção e formas. Todavia, esse leitor precisará mobilizar seus conhecimentos e experiências prévias vinculados aos dados apresentados no gráfico para construir significados do que está interpretando. Usamos o termo mobilização para enfatizar que o leitor engajado na interpretação não ‘transfere’ ou ‘aplica’ diretamente seus conhecimentos e experiências prévias. Inclusive porque acreditamos que essa mobilização acontece concomitantemente com a emergência de diferentes e/ou novos significados (MONTEIRO, 2005). Nesse sentido, interpretar um gráfico demanda muito mais do que apreender diretamente informações, na medida em que o leitor precisa estabelecer interações entre os aspectos visuais e conceituais da situação (CARVALHO, 2008).

Além disso, existem diferentes contextos de uso dos gráficos, os quais podem influenciar a construção de significados por aqueles que interpretam os dados (MONTEIRO; AINLEY, 2004). Por exemplo, leitores engajados na interpretação de um gráfico numa situação de leitura de um jornal, no contexto de uma aula de matemática ou na interpretação de dados de uma pesquisa científica, serão requeridos a utilizar diferentes abordagens de interpretação em cada um desses contextos (GAL, 2002).

Neste artigo, discutimos inicialmente as potencialidades dos gráficos num processo de resolução de problemas, argumentando uma concepção de gráficos como representação simbólica da informação. Aborda-se, na sequência, o efeito da aparência dos gráficos. Em seguida, discutem-se como as experiências prévias das pessoas com os aspectos relativos à informação podem contribuir para a complexidade do processo de interpretação de gráficos, que não se resume a apenas “ler dados”.

2. Pontencialidades dos gráficos num processo de resolução de problemas

Nunes (2004) classifica os sistemas de signos que representam informações quantitativas em representações análogas e simbólicas. Sua classificação tem como base as propriedades matemáticas dos dados disponibilizados nas representações.

Representações análogas enfatizam as unidades da informação, requerendo a manipulação ativa por parte do estudante para classificar os dados. Esse tipo de representação pode ser figurativa, numérica ou ainda ser apresentada por meio de palavras.

Representações simbólicas são convenções que requerem a aprendizagem de regras e procedimentos de leitura. A interpretação exige do leitor uma coordenação das informações e construção de inferências. Um aspecto fundamental nas representações simbólicas é que elas condensam as informações matemáticas básicas, tornando-as implícitas no problema. Além disso, as representações simbólicas requerem um aprendizado dos procedimentos de leitura para que os aspectos da informação sejam compreendidos de forma global. Este é o caso de gráficos e tabelas que são classificados por Nunes (2004) como representações simbólicas da informação.

Nunes levanta a hipótese de que os aspectos simbólicos da informação, representados por meio de gráficos ou tabelas, possibilitam a aprendizagem de conceitos multiplicativos. Essa hipótese foi testada nos estudos de Carvalho (2008) num experimento com estudantes ingleses que estavam no nível de ensino correspondente, em termos de idade, ao 8º ano no Brasil. Participaram do experimento 127 estudantes, 65 meninos (51,2%) e 62 meninas (48,8%), com idades entre 12,7 a 13,8 anos e com uma média de idade de 13,4 anos e 0,30 de desvio-padrão.

Os alunos do estudo foram solicitados a julgar relações hipotéticas entre diferentes variáveis, como por exemplo, a relação entre cor dos olhos e cabelos. Os mesmos problemas, num total de 6, foram representados sob a forma figurativa (cartões representando casos isolados), gráficos de barras empilhadas e tabelas de dupla entrada. Os estudantes foram distribuídos aleatoriamente para trabalhar com uma dessas três formas de representação. A Figura 1 apresenta um exemplo dos problemas utilizados no estudo.

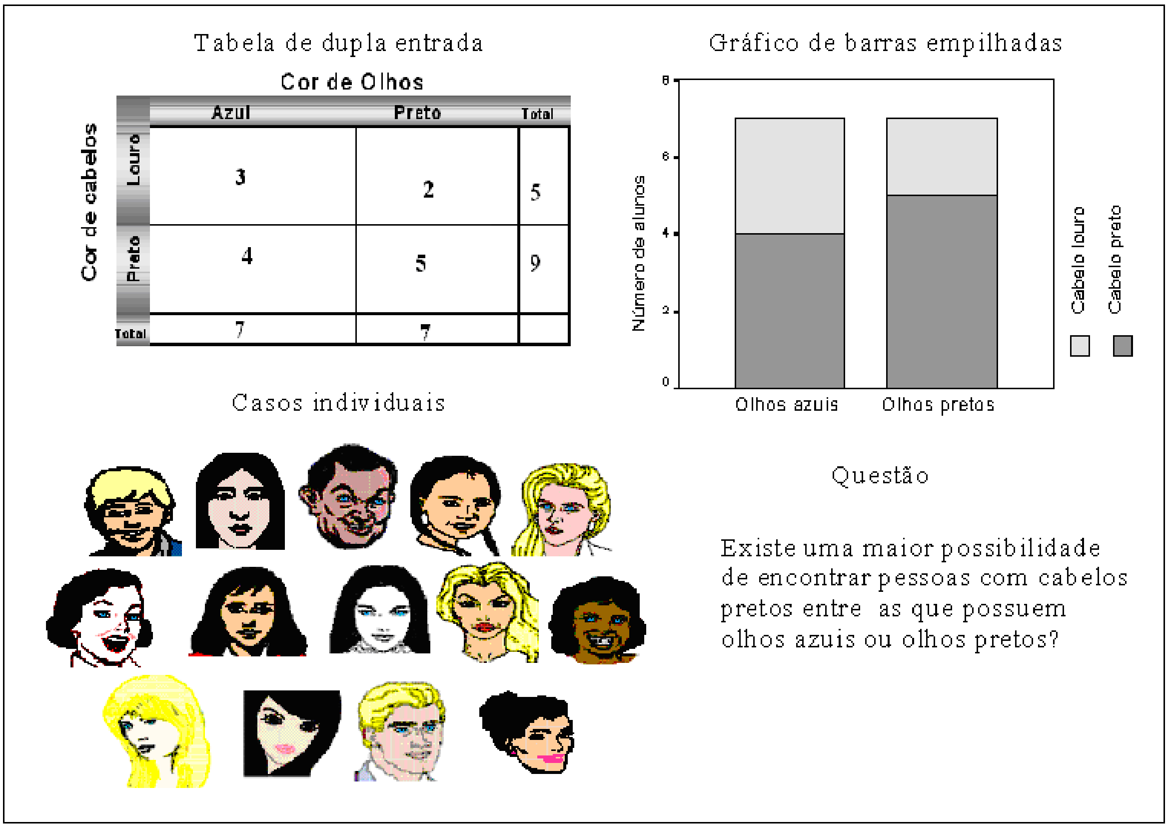


Figura 1. Exemplo de problema utilizado nos estudos de Carvalho (2008)

Para o trabalho com os casos isolados, os estudantes receberam um caderno de respostas e um envelope de cores diferentes com cartões misturados dentro deles. Eles foram instruídos a resolver os problemas, manipulando os cartões que apresentavam as informações. Os cartões foram produzidos para realçar os atributos das variáveis (por exemplo, a cor dos olhos e dos cabelos), podendo ser quantificados pela frequência com a qual apareciam na distribuição.

Uma análise de variância (ANOVA) de uma entrada conduzida sobre a média de acertos para todos os problemas indicou haver diferença significativa entre as formas de representação ($F(2, 124)= 5,10$; $p= 0,007$). O teste de comparações múltiplas de Sheffé revelou diferenças significativas ($p< 0,05$) entre casos e tabelas e casos e gráficos, indicando que os estudantes que trabalharam com tabelas ou gráficos apresentaram um melhor resultado do que os estudantes que trabalharam com os casos isolados. Não foram observadas diferenças significativas entre as médias de acertos para os estudantes que trabalharam com tabelas e gráficos.

Esses resultados confirmam a hipótese de que os aspectos simbólicos da informação potencializaram ações dos participantes para o estabelecimento de relações entre variáveis. Nesse sentido, os casos isolados não beneficiaram a coordenação das ações pelos estudantes.

As discussões de Nunes (2004) e Carvalho (2008) fundamentam uma perspectiva de que os gráficos são sistemas simbólicos de tratamento da informação que podem potencializar ações mais efetivas nos processos de resolução de problemas multiplicativos.

3. A influência da aparência dos gráficos

O uso frequente de gráficos para apresentar informações é baseado no pressuposto de que eles podem cobrir uma gama de dados, valendo por mil palavras no dizer cotidiano. De acordo com Larkin e Simon (1987), os gráficos constituem meio eficiente de apresentar os dados porque eles tornam explícita a informação deixada implícita em textos escritos. Essa preferência por gráficos no lugar de textos seria fundamentada pelo fato de que os aspectos visuais dos gráficos constituiriam representações figurativas das situações do mundo real. As variáveis do problema e suas relações são retratadas visualmente no gráfico pela projeção dos eixos.

Mevarech e Stern (1997) realizaram uma série de experimentos com dois grupos de participantes: crianças com uma média de idade de 12 anos e estudantes universitários. Os autores investigaram como os participantes interpretavam gráficos de linhas que apresentavam semelhanças em sua forma. Os gráficos usados nesse referido estudo, retratavam duas inclinações positivas com um ponto de intersecção entre elas. Nas tarefas dessa pesquisa os gráficos foram apresentados aos participantes em duas condições: numa delas os eixos eram nomeados com as variáveis do problema, e em outra condição as variáveis eram indicadas pelas letras x e y.

Os resultados obtidos em dois dos experimentos realizados sugeriram que as tarefas nas quais as variáveis eram denominadas de x e y eram mais facilmente resolvidas e ativavam com maior frequência o uso de conhecimentos matemáticos pelos participantes do que as tarefas nas quais as variáveis eram nomeadas e estavam mais explicitamente relacionadas a situações da vida cotidiana. Os experimentos evidenciaram que pequenas mudanças na aparência dos gráficos, como é o caso da nomeação ou não das variáveis, podem causar considerável diferença na forma como as pessoas raciocinam sobre os problemas.

Mevarech e Stern (1997) parecem enfatizar uma perspectiva restrita sobre representação a qual estaria vinculada apenas a conhecimentos formais de matemática. Além disso, a abordagem dos autores enfatiza muito o gráfico em si como determinante das interpretações do leitor.

Entretanto, os gráficos não são representações análogas que explicitam as propriedades conceituais da informação, eles constituem-se em representações simbólicas. Janvier (1981) analisa a importância das pessoas compreenderem os aspectos simbólicos na interpretação de gráficos a partir de um estudo realizado com 20 estudantes de 11 a 15 anos. Os estudantes eram solicitados a interpretarem gráficos representando diferentes situações problema. Numa delas, esse autor apresentava um gráfico que retratava como a velocidade de um carro de corrida varia num circuito automobilístico de 3 km. O gráfico proposto na tarefa referia-se à velocidade do carro durante a sua segunda volta no circuito. As variáveis do gráfico eram velocidade e distância desde o ponto de partida. Cada curva no circuito significava uma desaceleração e uma aceleração do carro. A aceleração, portanto, constitui a terceira variável do problema. Esse conceito, no entanto, encontrava-se implícito no gráfico; logo, os estudantes precisariam reconstruí-lo mediante as suas interpretações.

Os estudantes eram solicitados a dizer, a partir da interpretação do gráfico, quantas curvas existiam ao longo da via em que o carro era conduzido. Janvier observou que os estudantes encontraram algumas dificuldades para estabelecer uma resposta simbólica para o problema. Embora o circuito apresentasse três curvas, 40% dos estudantes erraram ao responder; alguns responderam que o circuito tinha nove curvas, enquanto outros referiram que tinham seis ou oito. De acordo com Janvier (1981), os estudantes confundiram a representação gráfica com o desenho do circuito. No lugar de interpretarem globalmente o gráfico, em termos simbólicos, os estudantes basearam as suas respostas em partes da informação.

É possível identificar na análise dada por Janvier, elementos mostrando que os alunos realizaram uma leitura análoga do gráfico, considerando apenas a sua aparência, em vez de uma leitura simbólica que envolvesse interações entre aspectos visuais e conceituais.

4. Interpretação de gráficos não significa apenas “ler os dados”

A interpretação de gráficos foi conceituada por muito tempo como uma atividade direta de recepção de dados. Consequentemente, falhas e erros de interpretação poderiam ser explicados como falta de compreensão ou conhecimento da correta maneira de ler um gráfico. Todavia, essa perspectiva tradicional sobre a interpretação de gráficos foi gradualmente sendo revisada.

Uma importante contribuição para a compreensão do processo de interpretação de gráficos foi oferecida por Curcio (1987) que enfatizou que gráficos poderiam ser vistos como um tipo de texto. De acordo com Curcio, o efeito do conhecimento anterior relacionado a componentes estruturais dos gráficos (tópico apresentado, conteúdo matemático e forma gráfica) influenciariam as habilidades dos leitores em compreender as relações matemáticas. Curcio classificou três tipos de leituras de gráficos: leitura dos dados, leitura entre os dados e leitura além dos dados. Esse terceiro tipo de leitura seria particularmente importante porque envolveria extrapolação dos dados apresentados no gráfico, o que auxiliaria os estudantes a desenvolverem suas interpretações baseadas em seus conhecimentos e experiências prévias.

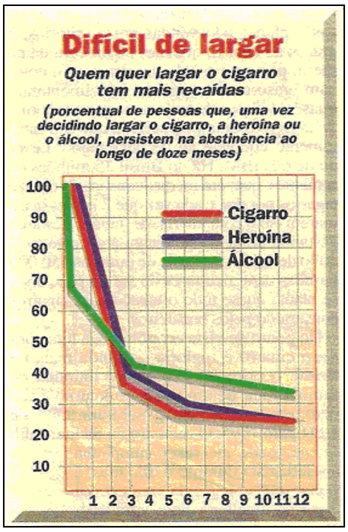
A abordagem de Curcio realça apenas os aspectos técnicos das interpretações de gráficos e investiga tipos de gráficos tradicionalmente usados nas escolas, os quais têm proposições pedagógicas limitadas em termos de comunicação de dados. Curcio não considera aspectos do contexto relacionado à interpretação daqueles gráficos. Por exemplo, os três diferentes tipos de leitura poderiam ser desenvolvidos durante a interpretação de um gráfico tecnicamente acurado, mas que apresentasse dados não realistas ou incoerentes com acontecimentos sociais.

Evans (2000) observa que leitores quando interpretam gráficos podem exibir sentimentos prazerosos e/ou de dor que estariam vinculados com experiências prévias de vida. Gal (2002) sugere que pessoas podem estar engajadas em diferentes processos de interpretação de gráficos dependendo do contexto no qual cada pessoa está envolvida. Gal exemplifica dois tipos de contextos de interpretação de gráficos: ‘investigativo’ e ‘leitura’. Nos contextos investigativos (como foi sugerido por Wild e Pfannkuch, 1999) pessoas agem como ‘produtores de dados’ e usualmente têm que interpretar seus próprios dados e relatar seus próprios resultados (ex. como acontece com pesquisadores de diversas áreas). Os contextos de leitura estão relacionados com situações do dia-a-dia nas quais pessoas vêem e interpretam gráficos (ex. assistindo televisão, lendo jornais, observando propagandas enquanto fazem compras ou visitando páginas da Internet). Mesmo que Gal tenha diferenciado cada contexto, este autor enfatiza que eles não são homogeneamente definidos porque as pessoas podem desenvolver diferentes tipos de participação num mesmo contexto. Por exemplo, pessoas engajadas em contextos de leitura podem ser agentes, comunicadores, escritores, leitores, ouvintes, ou expectadores, exercendo papéis tanto ativos como passivos. Gal (2002) também argumenta que a mesma pessoa poderia ser um leitor e/ou um produtor dependendo de seu engajamento em particular contexto.

Nos contextos escolares (MONTEIRO; AINLEY, 2004), em geral, os tipos de interpretação que professores propõem são relativamente limitados, focalizando mais os conhecimentos técnicos, com pouca atenção ao contexto social para o qual as informações estariam relacionadas.

A utilização de gráficos da mídia impressa pode ser uma estratégia para relacionar os usos do gráfico em contextos escolares e em situações fora da escola. Por exemplo, Watson (1997) sugere que esta inovação pode motivar os alunos a aprender aspectos do Tratamento de Informações. Todavia, a importação dos gráficos da mídia para dentro da sala de aula implica em processos de descontextualização e recontextualização que requer uma abordagem pedagógica cuidadosa. Isso porque as atividades de Tratamento de Informação que ocorrem na escola não são apenas as continuações de situações de resolução de problemas que acontecem fora da sala de aula, uma vez que cada um desses contextos possui objetivo e proposições diferentes (AINLEY, 2000; EVANS, 2000).

Por exemplo, Lima (1998) observou que é difícil formular significados com base em gráficos de linhas apresentados no contexto da mídia impressa, mesmo por designers experientes. Lima utilizou um gráfico (ver Figura 2 acima) selecionado de uma revista brasileira de grande tiragem e circulação nacional, onde era usado como parte de uma reportagem intitulada o segredo do cigarro turbinado. O texto da matéria discute sobre os componentes químicos adicionados ao cigarro e que vêm causando maior dependência entre os fumantes.



Fonte: VEJA (29/5/1996)

Figura 2. Gráfico de linhas no contexto da mídia impressa

O gráfico apresenta uma relação decrescente entre o tempo e a porcentagem de pessoas que persistem na abstinência quanto ao uso do álcool, cigarro ou heroína. De uma maneira geral, pode-se inferir que se cerca de 30% das pessoas decidiram parar de beber por um período de 12 meses, 70% voltaram a usar o álcool.

Os dados apresentados no gráfico utilizado na pesquisa são de uma pesquisa conduzida pelo Instituto Nacional do Câncer, órgão vinculado ao Governo Federal Brasileiro. A interpretação desse gráfico ensejou algumas dificuldades entre os participantes. A maior dificuldade consistiu na formulação de significados para a inclinação das linhas que nesse caso representam uma inclinação negativa. Embora as linhas tenham sido coloridas e nomeadas para salientar os dados que representam – cigarro (linha vermelha), heroína (linha azul) e álcool (linha verde) – o seu significado é ambíguo.

Na abordagem inicial a esse gráfico, um designer experiente fez alguns comentários sobre as dificuldades de leitura, chegando inclusive a propor um novo desenho no qual transformava a inclinação negativa em positiva. Abordagens dessa natureza foram acompanhadas de um elevado nível de mobilização pelo designer dos aspectos conceituais e visuais do gráfico, incluindo ações de transformações da relação decrescente para uma crescente, conforme pode ser visto no episódio destacado na Figura 3 apresentada em seguida.

Pesquisadora - Bom você coloca da dificuldade de leitura desse gráfico. Nesse sentido, de que outra forma esses dados poderiam ser apresentados graficamente para poderem ficar mais claros?
Designer - Olhe, eu gosto muito... eu prefiro, eu acho que tem uma forma que você trabalha assim com gráfico para essa situação [representação no papel] Bom, vamos ver se eu consigo chegar a alguma coisa ... se a gente fizesse essa escala diferente aqui ficaria os 100 ... Eu acho que assim tá muito melhor a leitura. No primeiro mês 80% né, até quase 70% vai ... Eu acho que assim tá muito mais compreensível você ter uma informação desse tipo porque você tá muito mais habituado a conviver, porque tem aquela coisa da percepção e aí você vai fazer um enquadre, um modelo. Eu acho esse gráfico problemático e um pouquinho pobre também por falta de informação.

[Representação no papel]

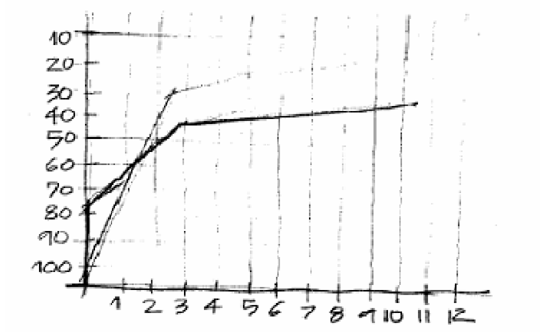


Figura 3. Ilustração da dificuldade de leitura do gráfico de linhas usado no contexto da mídia

O fato de o gráfico apresentar uma relação decrescente provoca reação no designer, pois rompe com o sentido de leitura direta que lhe é mais familiar. A representação no papel não consistiu de mera aplicação de conhecimentos formais, não se adequando inclusive às convenções matemáticas quanto ao uso da escala e coordenadas. Convencionalmente, a escala do eixo vertical (eixo y) nos gráficos é ascendente. A representação realizada pelo designer esteve voltada para explicitar o conflito que ele vivenciou na elaboração de significados para esse gráfico.

Esse episódio revela que a construção de significados não é um processo de apreensão direta da informação. As circunstâncias de uso dos gráficos podem torná-los artefatos mais ou menos ambíguos para o leitor. Dessa maneira, a interpretação de gráficos deveria ser considerada como uma atividade complexa que envolve vários elementos e processos, configurando-se, portanto, como um problema a resolver.

5. Considerações finais

Ao longo de nossa discussão neste artigo tentamos enfatizar que a interpretação de gráficos constitui-se num processo de resolução de problemas. A forma de apresentação dos dados; as maneiras de proposição do problema a partir de questões específicas; os diferentes tipos de informação e experiências prévias daqueles que interpretam são aspectos a serem considerados.

A pessoa que interpreta um gráfico está desenvolvendo um processo dinâmico na medida em que precisa estabelecer interações entre os aspectos visuais e conceituais mobilizando tanto os conhecimentos e experiências, quanto construindo novos significados no âmbito da situação de interpretação.

Na nossa discussão dos estudos e experimentos dos diversos autores, podemos também concluir que o processo de interpretação de gráficos não é espontâneo, mas depende de uma organização do ensino. Nesse sentido, o gráfico não pode ser visto como um "facilitador" da leitura e interpretação de dados apenas pela sua mera exposição às pessoas. Um indicativo de que o gráfico precisa ser trabalhado de maneira intencional no âmbito pedagógico, são as dificuldades dos estudantes para desenvolverem o raciocínio matemático relacionado aos fatores globais, que requerem o estabelecimento de relações entre variáveis.

Bibliografia

Ainley, J. (2000). Transparency in graphs and graphing tasks: an iterative design process. Journal of Mathematical Behavior, 19, 365-84.

Carvalho. L. M. T. L. (2008). O papel dos artefatos na construção de significados matemáticos por estudantes do Ensino Fundamental, Tese de Doutorado não publicada, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.

Curcio, F. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. Journal for Research in Mathematics Education, 18(5), p. 382-393.

Evans, J. (2000). Adult's Mathematical Thinking and Emotions: A Study of Numerate Practices. London: Routledge.

Gal, I. (2002). Adult statistical literacy: meanings, components, responsibilities. International Statistical Review, v. 70(1), p.1-25.

Janvier, C. (1981). Use of situations in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 12, p. 113-122.

Larkin, J. H.; SIMON, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth 10,000 words. Cognitive Science, 11, p. 65-99.

Nunes, T. (2004). Teaching mathematics to deaf children. London: Whurr. Mevarech, Z.; Stern, E. (1997). Interaction between knowledge and contexts on understanding abstract mathematical concepts. Journal of Experimental Child Psychology, 65, p. 68-95.

Monteiro, C. E. F. (2005). Investigating critical sense in the interpretation of media graphs, Institute of Education. Tese de Doutorado. The University of Warwick, Inglaterra.

Monteiro, C. & Ainley, J. (2004). Exploring the complexity of the interpretation of media graphs, in O. McNamara & R. Barwell (eds.), Research in Mathematics Education: Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics, BSRLM, London, 6, 115-128.

Watson, J. (1997). Assessing statistical literacy through the use of media surveys. In: Gal, I. e Garfield, J. (eds.), The Assessment Challenge in Statistics Education, IOS and Press International Statistical Institute: Amsterdam, p. 107-121.

Wild, C., e Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 67(3), p. 223-65.

Liliane Maria Teixeira Lima de Carvalho é Psicóloga com Mestrado em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco e Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Ceará. É Professora e Vice-Coordenadora da Coordenação Setorial de Extensão do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, onde desenvolve pesquisas, orienta alunos de graduação e de pós-graduação e participa de processos de formação continuada de professores sobre aspectos relativos ao ensino e aprendizagem da Matemática **lmtlcarvalho@gmail.com**

Carlos Eduardo Ferreira Monteiro é Psicólogo com Mestrado em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco e PhD em Educação pela University of Warwick. É Coordenador da Setorial de Extensão e professor da Graduação e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC - do Centro de Educação da UFPE. Desenvolve pesquisas, orienta alunos de graduação e de pós-graduação e participa de processos de formação continuada de professores sobre aspectos relativos ao ensino e aprendizagem da Matemática **cefmonteiro@gmail.com**

Tânia Maria de Mendonça Campos é Matemática com Doutorado em Matemática pela Universidade de Ciências de Languedoc (Montpellier - FR) em 1979. Tem Pós-doc em Matemática pela Universidade de Londres em 1991 e em Educação Matemática na Universidade de Oxford em 2007. Atualmente é Coordenadora do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirantes de São Paulo; assessora ad-hoc do CNPq, CAPES e FAPESP e avaliadora institucional do INEP. Tem experiência na coordenação de grandes projetos de formação continuada de professores de matemática financiado pelo PNUD/ SEE-SP. **taniammcampos@hotmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 145-151
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

El hacer matemático en el aula.

Rosa Martínez; María Victoria Pistonesi

1. Introducción

La matemática se ha configurado a lo largo de la historia ante la necesidad de resolver problemas de distinta naturaleza. La actividad involucrada en la resolución de problemas da lugar a la producción de conocimientos por parte de quién lo resuelve. Buscar un procedimiento que lo resuelva lleva a recuperar conocimientos, a desechar los que no resultan prósperos para lograr una estrategia, a cometer errores, a revisar el camino andado, retomar otra vía, … todas tareas vinculadas al quehacer matemático. En esta oportunidad presentamos un problema con la intención de involucrar a los estudiantes- de la escuela media- en una verdadera actividad de producción de conocimiento. Propiciar un ambiente que aliente a los alumnos a ensayar y producir diferentes soluciones conlleva a que el docente pueda organizar una clase en la que se discuta sobre la validez, precisión, claridad, generalidad, alcance, etc., de lo que se produce.

La actividad que proponemos en esta ocasión favorece la necesidad de buscar una fórmula cuadrática que modelice la situación. La riqueza de este tipo de actividades está en la posible diversidad de producciones de los alumnos. Las distintas escrituras que aparezcan en el aula permiten trabajar sobre la noción de equivalencia de distintas expresiones sobre las transformaciones algebraicas y sobre la idea de variación y dependencia.

2. Actividad propuesta" Los manzanos"

"Un productor tiene una hectárea plantada con 40 manzanos; cada uno de ellos produce 500 manzanas al año, desea conocer cuál será la evolución de su producción si decide aumentar la cantidad de plantas en esa parcela. Para ello encarga el estudio a un ingeniero agrónomo. El profesional concluye que por cada planta que se incorpore, la producción de cada manzano disminuirá en 5 unidades dado que los nutrientes del suelo tienen un potencial limitado.
a) *¿Es posible que la producción se anule en algún momento*?
b) *¿Cuántas plantas se deberán agregar para obtener la máxima producción*?"

Para plantear una expresión matemática que facilite estudiar las relaciones entre las magnitudes en juego se propicia un análisis de la variación y dependencia entre las magnitudes involucradas.

Para estudiar si "la producción se anula o no" es necesario vincular la producción de cada una de las plantas con la producción total. Es decir, vincular la disminución de la producción por planta en función de la cantidad de plantas que se agregan, luego obtener la producción total. Esta tarea requiere, necesariamente, un fuerte trabajo en reconocer la variación y dependencia entre las magnitudes involucradas. Se deben estudiar regularidades numéricas y traducirlas en un lenguaje simbólico ya que los números en juego dificultan otro tipo de procedimiento posible. Es importante destacar que la fórmula aparece como una necesidad para resolver, pues en ningún momento se pide su hallazgo.

En particular este problema podría dar lugar a la resignificación de la ecuación de la función cuadrática, en este caso las coordenadas del vértice y el concepto de raíz o ceros de la función. En un principio los alumnos podrían plantear una tabla para estudiar la variación entre la cantidad de plantas y su producción por planta, que se corresponde con un modelo lineal.

Para resolver el ítem a), podrían encontrar para qué valor, la función se hace 0. Para el ítem b), es necesario estudiar la variación de la producción en función de la cantidad de plantas. Los números elegidos no favorecen hacer cálculos apoyados en una tabla, por lo que se hace necesario plantear la fórmula de una ecuación cuadrática y encontrar el vértice de la parábola:

- Llamando *n* al número de de plantas y *P* a la producción obtenida, se obtendría:

$$P(n)= 5n^2 – 700n$$

- O bien, llamando *x* al números de plantas que se agregan y *P* a la producción obtenida, quedaría:

$$P(x): 5(x-30)^2 – 22500$$

Dependiendo de cómo se definan las variables independientes habrá que interpretar los resultados, es decir:

- En el primer procedimiento, el vértice de la parábola es (70;22 500). 70 responde directamente a la pregunta del problema, es decir, la máxima producción se obtiene con 70 plantas.
- En el segundo, el vértice de la parábola es (30;22 500). Es necesario interpretar que 30 es la cantidad de plantas que conviene agregar para obtener la máxima producción.

El docente podría intervenir, en un principio, para interpretar adecuadamente el enunciado. También podría sugerir que organicen la información en tablas como así efectuar puestas en común parciales, con el fin de explicitar los avances que se van obteniendo y hacer explícitas las variaciones y dependencia en el contexto del problema.

Lo interesante en este caso, es que a través del estudio de las magnitudes en juego se da sentido a funciones compuestas. Surge en una primera instancia una relación lineal cuando se interpreta la dependencia entre variables; luego, a partir de dicha relación aparece, la relación cuadrática.

Es decir, a partir de indagar la vinculación entre cantidad de plantas y producción de manzanas, cuestión que podría realizarse a través de armar una tabla, como ya lo dijimos, surge alguna de las siguientes expresiones:

$$(700 - 5n) \quad \text{o} \quad (40 - n).$$

Luego para relacionar la cantidad plantas con la producción total surge:

$$n \,.\, (700 - 5n) \qquad \text{o} \qquad (40 - n)(500 - 5n)$$

quedando:

$$700n - 5n^2 \qquad o \qquad 20000 + 300n - 5n^2$$

3. Procedimientos de los alumnos[1] de 5º año

A continuación mostramos distintos procedimientos utilizados por alumnos en el transcurso de una clase.

3.1. Procedimiento A

Los alumnos analizaron la relación que hay entre el aumento de la cantidad de plantas y la disminución de la producción por planta, pensando en la relación numérica.

Pudieron encontrar cuál era la máxima producción, pero este método no les sirvió para encontrar cuándo la producción se anula. Tomaron como producción nula el hecho de que no hubiesen plantas, perdiendo de este modo de vista el contexto del problema y quedándose solamente con lo numérico. No utilizaron una fórmula para poder responder sobre la máxima producción, nuevamente, sólo tuvieron en cuenta la relación numérica entre las variables. Para pensar que la producción se anule consideraron que uno de los factores sea cero, se presenta el trabajo de un alumno a continuación:.

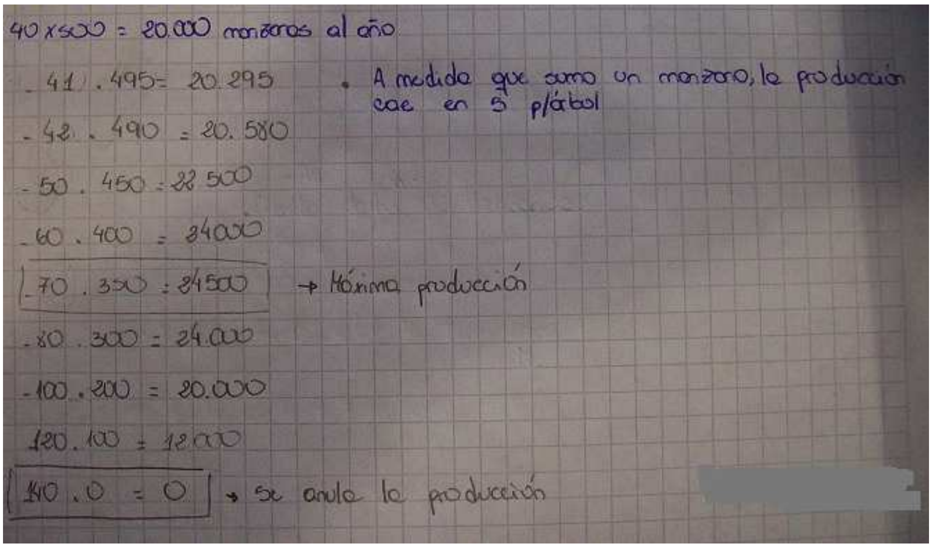


Figura 1: Procedimiento A

[1] Este problema fue implementado con alumnos de 5º año de una escuela secundaria de la ciudad de Gral Roca, cuya gestión estuvo a cargo de la Prof. M. Victoria Pistonesi y Prof. Susana Fantini

Aún cuando estos alumnos hicieron un tratamiento aritmético, el registro deja ver, por la disposición y organización del procedimiento, que ellos otorgan un status genérico a las expresiones numéricas. Es decir, expresan los cálculos intermedios, dejan indicados las cuentas realizadas (cuándo se trata de cálculos simples), esto nos indicaría que el tratamiento que ellos hacen, se asemejaría al que se le puede dar a una expresión general.

En la puesta en común con todos los grupos, estos alumnos lograron asociar rápidamente su trabajo con la fórmula.

3.2. Procedimiento B:

El desarrollo realizado por este grupo pone de manifiesto un trabajo con la relación numérica entre las variables, luego lograron desprenderse de las mismas y hallar una expresión matemática. Ellos plantearon la fórmula resolvente, pero en un principio no lograron interpretar los resultados en términos del problema. Finalmente, una intervención docente en la que se trató de que vinculen los valores calculados y el contexto del problema, hizo posible que los alumnos pudieran concluir de manera correcta.

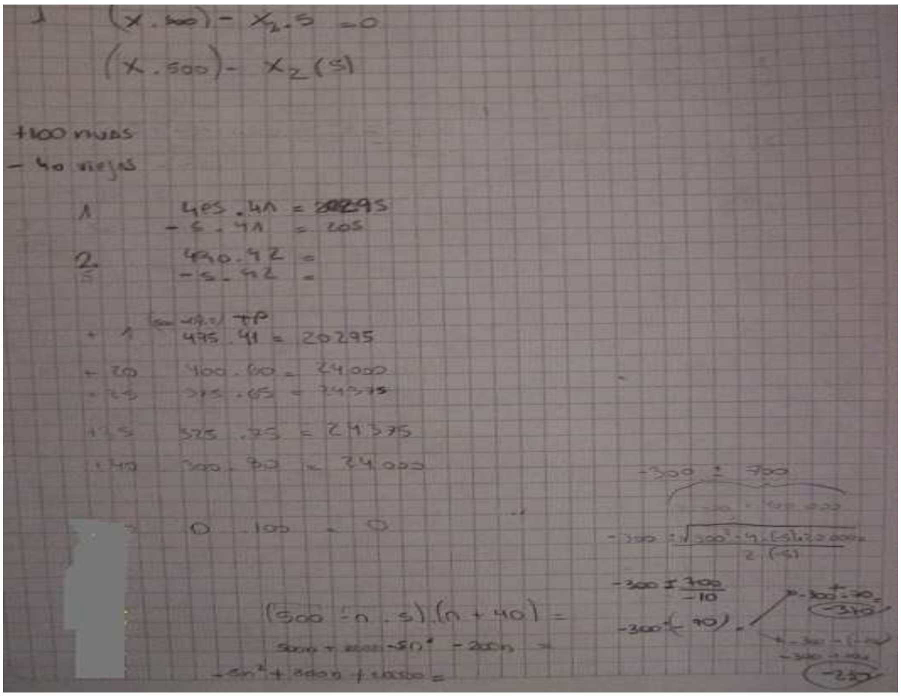


Figura 2: Procedimiento B

3.3. Procedimiento C

Este grupo de alumnos lograron encontrar directamente una fórmula que relaciona las variables en cuestión. Pueden interpretar la misma en el contexto del problema. Cabe aclarar que para hallar la máxima producción y la nulidad prueban con valores sin involucrar el vértice ni las raíces de la función cuadrática.

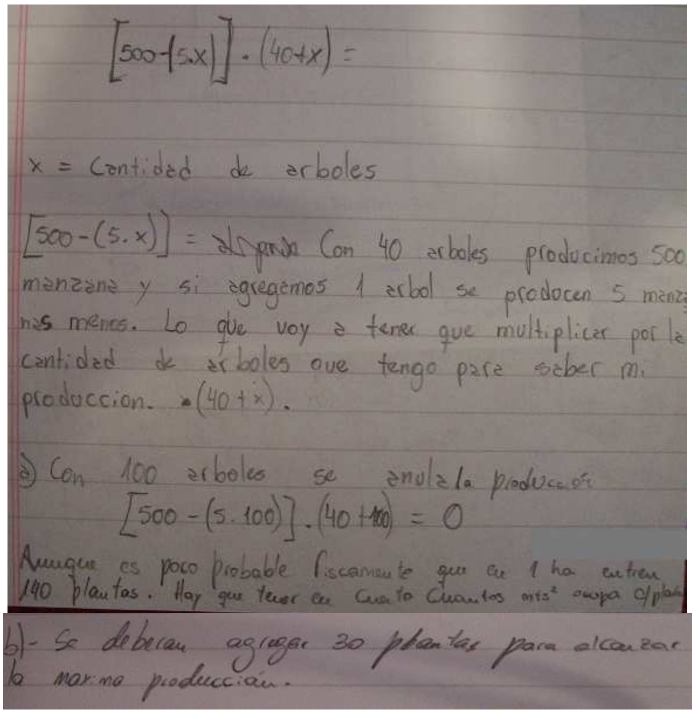


Figura 3: Procedimiento C

3.4. Procedimiento D

Este grupo parte de una gráfica de la situación para pensar en una función que se adecue a ella, teniendo en cuenta los distintos tipos de funciones analizadas en clase anteriores. Paralelamente a ello buscan una fórmula, en las distintas formas de escribir la misma y logran identificar que se trata de una función cuadrática cuando la expresan en forma polinómica. Según se pudo observar, una vez lograda la expresión de la ecuación recién colocan la palabra función.

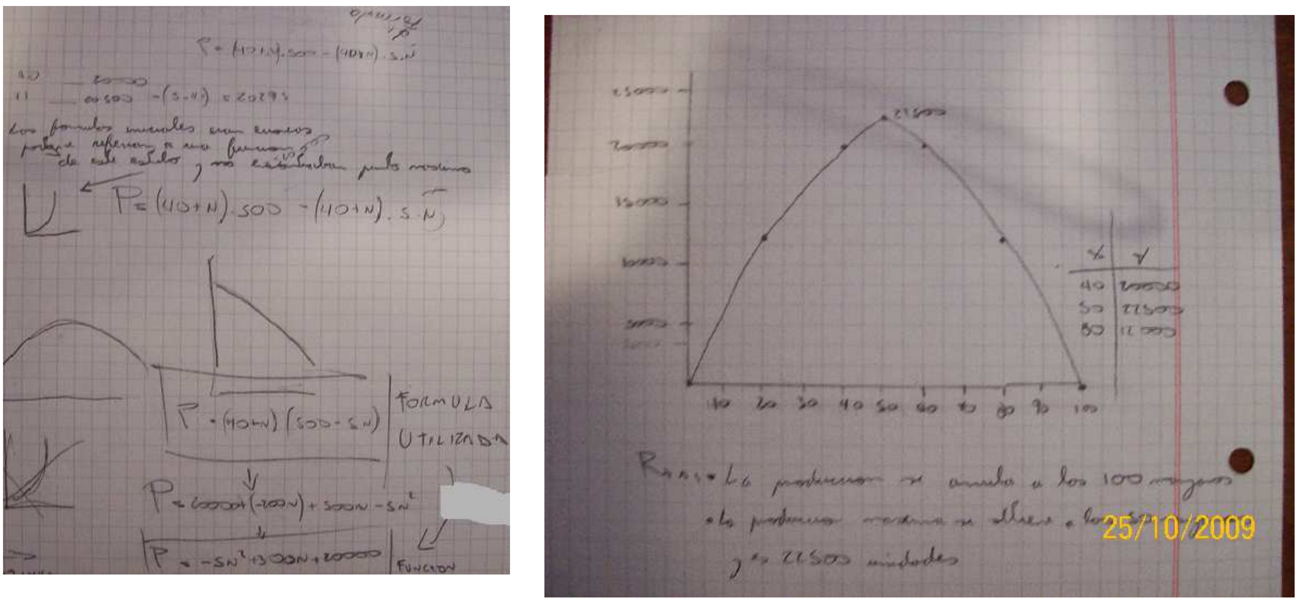


Figura 4: Procedimiento D

Se puede observar que hasta que no hallaron la relación entre gráfica y expresión polinómica, consideraban a la expresión como una fórmula.

Calcularon los elementos relevantes: vértice y raíces para responder a las preguntas. No relacionaron ambas representaciones, gráfica y analítica, para poder establecer una respuesta sólo se quedan con la gráfica hasta la puesta en común y recién con la intervención docente advierten que la respuesta es incorrecta porque se equivocaron en el gráfico de la función.

3.5. Procedimiento E

Este procedimiento muestra que los alumnos se dan cuenta que el problema involucra una función a partir de considerar la relación entre dos magnitudes. Siempre asocian el problema a un modelo lineal. En un primer momento lo piensan en forma creciente, luego en forma decreciente pero se olvidan del contexto y toman valores negativos para las manzanas. Dejan de lado los procedimientos anteriores, consideran que 20.000 manzanas sería la máxima producción y concluyen que agregando 4000 manzanos la producción se anula, lo que es totalmente imposible teniendo en cuenta que en una hectárea no puede haber 4.040 manzanos. En este caso perdieron de vista el contexto del problema. Fue necesario intervenir volviendo al problema, analizar los valores obtenidos de modo de evaluar la razonabilidad de los mismos.

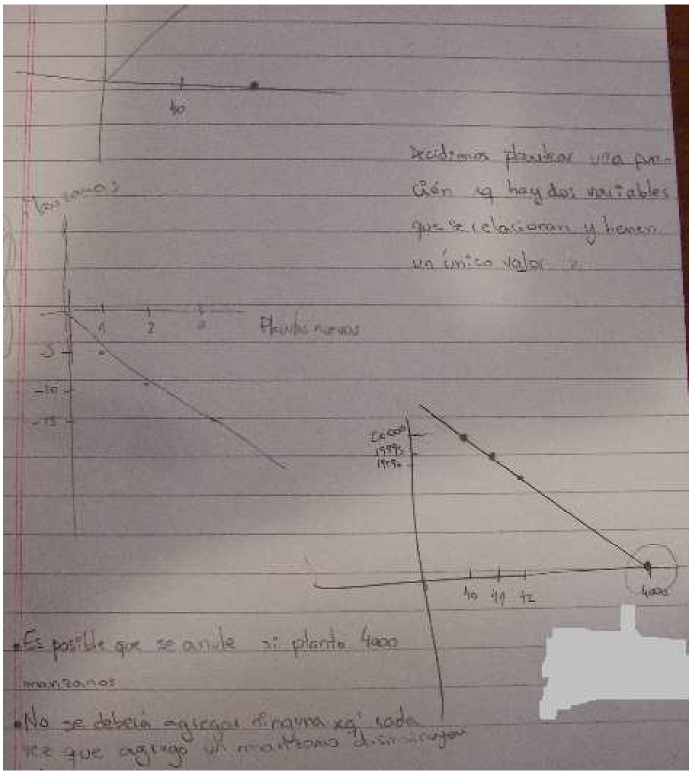


Figura 5: Procedimiento E

4. A modo de cierre

Todos los alumnos expusieron sus procedimientos en el pizarrón. Se analizaron y se descartaron los erróneos. A partir de la diversidad de expresiones obtenidas y atendiendo al sentido de esta secuencia de problemas, el docente propone las siguientes cuestiones a toda la clase:

- ¿Las expresiones son equivalentes, cómo podríamos verificarlo? ¿por qué las respuestas son diferentes?
- ¿Por qué les surgió la necesidad de graficar? ¿qué se puede interpretar del gráfico?
- Los alumnos que plantearon una fórmula desde un principio, ¿qué tuvieron en cuenta?

Bibliografía

Camuyrano, M.; Net, G.; Aragón, M. (2000). *Matemática I, Modelos Matemáticos para interpretar la realidad*. Ed. Estrada Polimodal.

Segal, S.; Giuliani, D. (2008) *Modelización Matemática en el aula*. Editorial Libros del Zorzal, Bs. As.

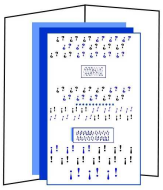
Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra.* Editorial Libros del Zorzal, Bs. As.

Tassara, A.; Porras, M.; Martínez, R. Pistonesi, V. y otros (2010). *Crónicas de las escuelas medias del Alto valle de Río Negro y Neuquén.* Facultad de Ciencias de la Educación. UNCo. (en prensa).

Rosa Martínez. Magíster en Educación en Ciencias, Orientación Matemática. Universidad Nacional del Comahue (U.N.Co.). Docente de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación. U.N.Co. Argentina. **rfmartin@uncoma.edu.a**

María Victoria Pistonesi. Profesora de Matemática, Universidad Nacional del Comahue. Docente de Didáctica de la Matemática en el Instituto de Formación Docente de Gral. Roca, y en el Colegio Domingo Savio, Gral. Roca, Río Negro, Argentina. **mariayaldo@hotmail.com**.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA



Diciembre de 2010, Número 24, páginas 153-160
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

Geometría, medias y aplicaciones

Problema

Cuando falleció Alberto, dejó para su hijo Carlos un terreno de forma rectangular y para sus hijas Paula y Amelia dos terrenos cuadrados. El de Paula tiene el mismo perímetro que el terreno de Carlos, y el de Amelia tiene la misma área que el terreno de Carlos. ¿Cuál de los terrenos cuadrados es más grande?

Este problema contextualizado, lo podemos enunciar en términos "puramente geométricos" de la siguiente manera:

> *Dado un rectángulo, siempre es posible determinar dos cuadrados: uno cuyo perímetro es igual al perímetro del rectángulo dado, y otro cuya área es igual al área del rectángulo dado. ¿Cuál de los dos cuadrados tiene sus lados de mayor longitud?*

Además:

> *¿Pueden, ambos cuadrados, tener sus lados de la misma longitud?*

Empecemos a analizar el problema, considerando un caso particular y "números pequeños":

- Supongamos que el rectángulo dado tiene 7 cm de largo y 5 cm de ancho.
- Entonces su perímetro es 24 cm y en consecuencia el cuadrado de igual perímetro tiene sus lados de longitud 6 cm.
- Por otra parte, su área es 35 cm^2 y en consecuencia el cuadrado de igual área tiene sus lados de longitud $\sqrt{35}$ cm.
- Es claro que el cuadrado de igual perímetro que el rectángulo dado, tiene sus lados de mayor longitud que el cuadrado de igual área que el rectángulo dado, pues $\sqrt{35} < 6$.

¿Cómo será en general?

Para simplificar la exposición omitiremos mencionar las unidades.

- Supongamos que el rectángulo dado tiene largo *a* y ancho *b*.
- Entonces su perímetro es $2.a + 2.b$ y en consecuencia el cuadrado de igual perímetro tiene sus lados de longitud $\frac{2a+2b}{4}$; o sea $\frac{a+b}{2}$.
- Por otra parte, su área es $a.b$ y en consecuencia el cuadrado de igual área tiene sus lados de longitud $\sqrt{ab}$.
- Ahora ya no es obvio que el cuadrado de igual perímetro que el rectángulo dado es más grande que el cuadrado de igual área que el rectángulo dado. Al considerar otros casos particulares, se puede verificar que se sigue cumpliendo la desigualdad observada en el caso particular que vimos, lo cual nos lleva a conjeturar que siempre debe cumplirse que:

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}. \qquad (\alpha)$$

Para demostrar esta conjetura, observamos que con los números reales positivos *a* y *b* podemos hacer algunas operaciones algebraicas para obtener expresiones equivalentes a la de la conjetura, sin que se altere el sentido de la desigualdad. Así, tenemos:

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab < \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow 4\,ab < (a+b)^2 \Leftrightarrow 2\,ab < a^2+b^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 < a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 < (a-b)^2$$

Como hemos llegado, por equivalencias, a una expresión verdadera para $a \neq b$, concluimos que la conjetura (α) es correcta y que la desigualdad se cumple siempre y cuando $a \neq b$; o, dicho de otra forma, que para todo par de números positivos *a* y *b*, siempre se cumple que:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \qquad (\beta)$$

y que la igualdad se cumple si y solo si *a = b.*

Con este resultado, volvemos al problema original y concluimos que dado un rectángulo cualquiera de lados *a* y *b*, el cuadrado de igual perímetro que tal rectángulo, tiene sus lados de longitud mayor o igual que el cuadrado de igual área que dicho rectángulo. La igualdad se cumple únicamente en el caso que $a = b$; es decir, cuando el rectángulo dado es un cuadrado.

Así, considerando los terrenos heredados por Carlos, Paula y Amelia, el terreno cuadrado de Paula es más grande que el terreno cuadrado de Amelia, salvo que el terreno rectangular de Carlos sea también un terreno cuadrado, en cuyo caso los tres terrenos serán cuadrados del mismo tamaño.

Una ilustración gráfica

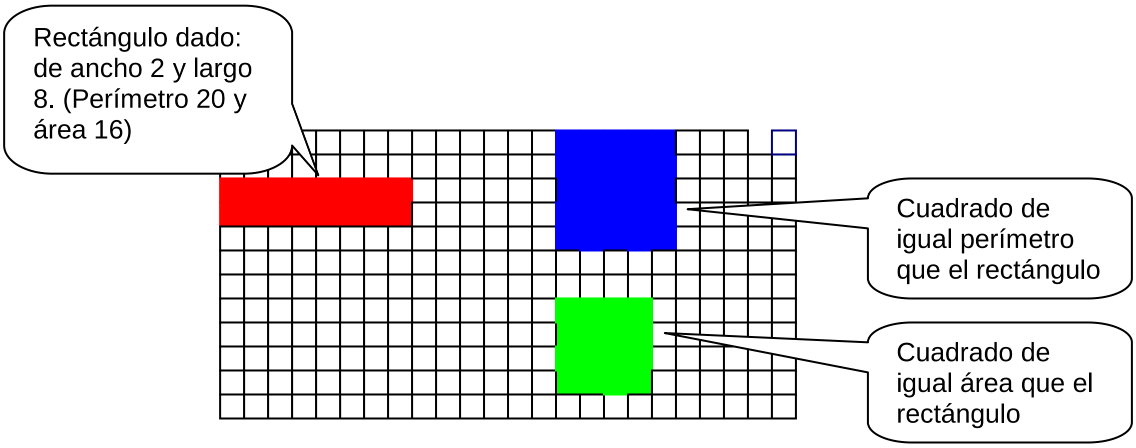


Figura 1

Una "*demostración visual*" de la desigualdad obtenida

Evidentemente, hay diferencia entre una ilustración y una demostración. Una ilustración presenta un caso particular, mientras que una demostración considera el caso general. No siempre es posible tener una "demostración visual" de proposiciones matemáticas y hay controversias en torno a las llamadas "demostraciones visuales"; sin embargo, considero interesante mostrar la Figura 2[1], que al observarla con detalle nos dice claramente que se cumple la desigualdad:

$$4\,ab \leq (a+b)^2\,, \qquad (\gamma)$$

que es equivalente a la desigualdad (β).

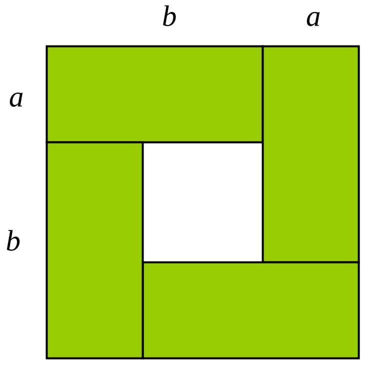


Figura 2

En la figura, los cuatro rectángulos son congruentes entre sí, de lados a y b. Es evidente que el área de la región de color verde, formada por los cuatro rectángulos, es menor que el área de la región cuadrada cuyos lados miden $a+b$; es decir:

$$4\,ab < (a+b)^2$$

[1] Vogel, D. (2010). Maximal, minimal, optimal… *Mathematik lehren*, 159, p. 9

Ciertamente, el cuadrado del centro, con lados de longitud $b-a$, se reducirá a un punto únicamente en el caso que $a=b$, y entonces serán iguales ambos miembros de la desigualdad anterior. Así vemos claramente la validez de la desigualdad (γ).

Una demostración geométrica

Usando dos teoremas acerca de triángulos rectángulos, obtenemos la desigualdad (β), con la ventaja de ser exactamente la desigualdad que da respuesta al problema inicialmente planteado, sobre la comparación de los tamaños de los cuadrados de igual perímetro y de igual área que un rectángulo dado.

Teorema 1: En todo triángulo rectángulo, la altura respecto a la hipotenusa es media geométrica entre los segmentos en que esta altura divide a la hipotenusa.

Teorema 2: En todo triángulo rectángulo, el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices del triángulo.

En la figura 3, tenemos un triángulo rectángulo ABC, recto en C. D es el punto medio de la hipotenusa, AE y EB son los segmentos en que divide a la hipotenusa la altura trazada desde C y *a* y *b* son las longitudes correspondientes de tales segmentos.

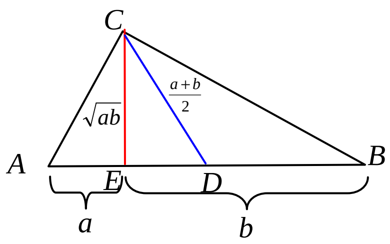


Figura 3

Por aplicación del teorema 1, afirmamos que para la altura considerada, que podemos llamar *h*, se cumple que

$$\frac{a}{h}=\frac{h}{b}$$

De esta igualdad obtenemos que $h=\sqrt{ab}$ es la longitud del segmento CE, como se muestra en la figura 3 (en rojo).

Por aplicación del teorema 2, la longitud del segmento que une C con D (la mediana respecto a la hipotenusa, mostrada de color azul) es $\frac{a+b}{2}$, y se ve claramente que $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$. Evidentemente, la igualdad se cumplirá únicamente si *a* = *b;* pues en tal caso el triángulo ABC es isósceles y coinciden la altura con la mediana respecto a la hipotenusa.

Media aritmética y media geométrica

Recordemos que la media aritmética de dos números *a* y *b* es la semisuma de ellos y que la media geométrica de los mismos es la raíz cuadrada de su producto; así, la desigualdad (β) expresa que

La media geométrica de dos números positivos cualesquiera a y b es menor o igual que su media aritmética. La igualdad se cumple sólo en el caso que a = b.

Una primera pregunta que surge ante esta propiedad es *¿la desigualdad se cumple con n números positivos cualesquiera?* Considerando tres números, por ejemplo 2, 4 y 8, verificamos que se cumple la desigualdad, pues:

$$\sqrt[3]{2\times 4\times 8} \le \frac{2+4+8}{3}.$$

Si la desigualdad se cumple para tres números positivos cualesquiera, podemos aplicarla para resolver un problema similar al originalmente planteado, ahora en la geometría tridimensional:

> *Dado un paralelepípedo rectangular, siempre es posible determinar dos cubos: uno cuya suma de las longitudes de sus aristas sea igual a la suma de las longitudes de las aristas del paralelepípedo dado, y otro cuyo volumen sea igual al volumen del paralelepípedo dado. ¿Cuál de los dos cubos tiene sus lados de mayor longitud? ¿Pueden, ambos cubos, tener sus lados de la misma longitud?*

Tratando de ver lo general en lo particular, consideremos que el paralelepípedo rectangular dado tiene aristas de longitudes (en cm) 2, 4 y 8. Así, la suma de las longitudes de sus 12 aristas es 4.(2 + 4 + 8); o sea 56 y en consecuencia el cubo cuya suma de longitudes de sus aristas es 56, tiene cada una de sus aristas de longitud $\frac{56}{12}$; o sea $\frac{14}{3}$, que es $\frac{2+4+8}{3}$ (aproximadamente 4,67).

Por otra parte, el volumen del paralelepípedo dado (en cm^3) es 2 x 4 x 8; o sea 64 y en consecuencia el cubo de volumen 64 tiene sus aristas de longitud $\sqrt[3]{64} = 4$. Vemos así que las aristas de este cubo son de menor longitud que las aristas del cubo anterior.

Para afirmar que siempre el cubo de igual volumen al del paralelepípedo rectangular dado tiene sus aristas de longitud menor que la del cubo cuya suma de las longitudes de sus aristas es igual a la suma de las longitudes de las aristas del paralelepípedo, debemos demostrar que para tres números positivos cualesquiera, su media geométrica es menor o igual que su media aritmética.

Como el lector podrá imaginar, esta desigualdad se cumple para *n* números positivos cualesquiera. Así:

> Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son *n* números reales positivos ($n \ge 2$), entonces:
>
> $$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$
>
> y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Es un teorema muy importante, conocido como *Teorema de Cauchy de las medias,* que apareció en el año 1821 en su Cours d'Analyse[2]. Sus aplicaciones son diversas, en particular a algunos problemas de optimización, con la ventaja de facilitar sus soluciones sin recurrir al cálculo diferencial ni hacer uso del algoritmo de completar

[2] Esta información, y su demostración, están en Dörrie, H (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications

cuadrados, muchas veces desagradable para los alumnos. Un ejemplo muy sencillo lo tenemos en el siguiente problema:

> *¿Cuál es el máximo producto que se puede obtener con tres números positivos cuya suma es 48?*

Considerando *a, b* y *c* tales números, ya sabemos que su media geométrica es menor o igual que su media aritmética; es decir:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}, \qquad (\delta)$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si $a = b = c$. Otra manera de leer esta desigualdad es que *el máximo valor obtenible de la media geométrica de tres números positivos, es su media aritmética*, y como en el problema dado, la suma de los números es conocida, ya es claro que el máximo valor de $\sqrt[3]{abc}$ es $\frac{48}{3} = 16$ y en consecuencia el máximo valor del producto es $16^3 = 4096$. Más aún, como la igualdad se cumple si y sólo si $a = b = c$, queda claro que para que la suma sea 48, cada número debe ser igual a 16.

Como otra manera de leer la desigualdad (δ) es que *el mínimo valor obtenible de la media aritmética de tres números positivos es su media geométrica*, podemos resolver fácilmente el siguiente problema:

> *¿Cuál es la mínima suma que se puede obtener con tres números positivos cuyo producto es 512?*

Teniendo en cuenta, otra vez, que la igualdad se cumple únicamente si $a = b = c$, el lector puede llegar a la conclusión que la mínima suma obtenible es 24, que ocurre cuando los tres números son iguales a 8.

Media aritmética y media geométrica en estadística

Ciertamente, más allá de la relación tan valiosa que hay entre las medias geométrica y aritmética, es importante tener claridad sobre el uso de de estas "*medidas de tendencia central*" como suele llamarse en estadística a estos y otros representantes de un conjunto finito de datos. Por ejemplo:

> *Si Pedro en el 2007 tuvo un sueldo mensual de 2000 soles; en el 2008 tuvo un aumento del 10%; en el 2009 tuvo un segundo aumento del 15%; y en el 2010 tuvo un ascenso, que significó un nuevo aumento del 50%, ¿cuál fue su sueldo promedio en los años 2008, 2009 y 2010? y ¿cuál fue el aumento porcentual promedio que tuvo Pedro en estos tres últimos años?*

Para responder a las preguntas, observemos:

Sueldo en el 2007	2000
Sueldo en el 2008	2000 x 1,10 = 2200
Sueldo en el 2009	2200 x 1,15 = 2530
Sueldo en el 2010	2530 x 1,50 = 3795

Es claro que para obtener el sueldo promedio de Pedro en los años pedidos, basta sumar sus sueldos y dividir la suma entre 3; es decir, hallar la media aritmética de los sueldos correspondientes a los tres años:

$$\frac{2200+2530+3795}{3}=\frac{8525}{3}\approx 2841{,}66$$

Si Pedro hubiera ganado este sueldo en los años 2008, 2009 y 2010, el monto total recibido sería el mismo que el recibido según la información dada en el problema. En efecto, podemos verificar que

$$2200\times 12+2530\times 12+3795\times 12=102300$$

y

2841,66 x 36 = 102299,76

Los 24 centésimos de diferencia se deben a que la media aritmética no es exactamente 2841,66. Si usamos el cociente indicado, obtenemos exactamente 102300:

$$\frac{8525}{3}\times 36=8525\times 12=102300$$

Para responder a la segunda pregunta (¿cuál fue el aumento porcentual promedio que tuvo Pedro en estos tres últimos años?), recordamos que en el 2008 el aumento fue del 10%, en el 2009 del 15% y en el 2010 del 50%. La media aritmética de estos tres porcentajes es 25%. ¿Esta media cumple el papel de representar a los porcentajes de aumento recibidos por Pedro, en el sentido que si cada año hubiera recibido el 25% de aumento, su sueldo en el 2010 sería de 3795 soles? Veamos:

2000 x 1,25 x 1,25 x 1,25 = 3906,25

Obtenemos una cantidad que es 111,25 unidades mayor que el sueldo del 2010 correspondiente a la información dada en el problema (3795). Esto nos dice que la media aritmética **no** es la representante adecuada de los porcentajes de aumento. En cambio, si hallamos la media geométrica de 1,10 , 1,15 y 1,50, tenemos

$$\sqrt[3]{1{,}10\times 1{,}15\times 1{,}50}\approx 1{,}238$$

Lo cual nos indica un porcentaje promedio de 23,8% anual; es decir, si Pedro hubiera recibido el 23,8% de aumento cada año, en el 2010 tendría como sueldo

2000 x 1,238 x 1,238 x 1,238 = 3794,826544 ,

que podemos redondear a 3794,83 y vemos que difiere solo en 17 centésimos del sueldo en el 2010, según la información dada en el problema. La pequeña diferencia es consecuencia de haber hecho también un redondeo al obtener la raíz cúbica.

Así, en este caso, la media geométrica nos permite obtener un buen representante de los datos porcentuales considerados en el problema. Notemos que – como se ve claramente en la tabla de arriba – estos datos son factores de productos en el problema, y finalmente de un producto que es el sueldo del último año (2000 x 1,10 x 1,15 x 1,50 = 3795). En casos como éste, se aplica la media geométrica.

Algunos comentarios

1. Lo expuesto nos permite ver lo importante que son las conexiones entre los diversos conceptos de la matemática y las potencialidades didácticas que se generan al hacerse evidentes estas interrelaciones. Vemos así, que están interrelacionados conceptos de la geometría, de la aritmética, de la estadística y de la optimización y que facilitan el desarrollo de la visualización; de la intuición; de la capacidad de generalizar, viendo lo general en lo particular; y del tránsito entre registros verbales, algebraicos y geométricos.
2. Es interesante proponer a estudiantes de cuarto o quinto año de secundaria, a estudiantes universitarios y en cursos de capacitación a profesores de secundaria, secuencias de actividades que los lleven a resolver el problema de “demostrar visualmente” la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética de dos números positivos. Yo lo he experimentado con estudiantes universitarios, y llegaron a situaciones como la mostrada en la figura 2. Un reto mayor es el caso tridimensional, para la desigualdad considerando. tres números positivos.
3. Tenemos una muestra más de problemas matemáticos de optimización que son aplicables en la educación básica y que pueden ser resueltos sin recurrir al cálculo diferencial ni a algoritmos tediosos, sino a la interpretación cuidadosa de desigualdades, que además tienen referentes geométricos.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 161-175
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Imágenes fractales con GeoGebra

Fabián Vitabar

Resumen

La Geometría Dinámica nos ofrece la posibilidad de visualizar casi instantáneamente los gráficos generados por expresiones matemáticas. Esto permite generar imágenes muy agradables y coloridas (como los fractales), cuya creación implica un desafío que obliga al "artista" a poner en juego los conocimientos matemáticos necesarios para lograr un fin. En este artículo veremos cómo generar estas imágenes al nivel de la enseñanza media, usando GeoGebra. Además del conocimiento matemático (geometría analítica, álgebra lineal, análisis real y complejo) buscaremos generar situaciones problemáticas motivadoras, que facilitan el otorgamiento de sentido a los contenidos, a la vez que incentiven la autonomía del alumno en la construcción del conocimiento matemático.

Abstract

The Dynamic Geometry can show us -almost instantly- the graph associated to a mathematical expression. We can generate beautiful and colourful images (as fractals), leading the "artist" to use his mathematical knowledge to create its. In this paper we'll see how to create these images at high school, using GeoGebra. In addition to mathematical knowledge (analytic geometry, linear algebra, real and complex analysis) we'll try to propose good problematic situations, giving sense to contents and promoting the student's autonomy in his knowledege construction.

Resumo

A geometria dinâmica possibilita-nos visualizar quase instantaneamente os gráficos gerados por expressões matemáticas. Isto permite gerar imagens muito agradáveis e coloridas (fractais, por exemplo), cuja criação implica em um desafio que obriga o "artista" a lançar mão dos conhecimentos matemáticos necessários para atingir um determinado objetivo. Neste artigo veremos como gerar estas imagens ao nível do ensino médio usando o software GeoGebra. Além do conhecimento matemático (geometria analítica, álgebra linear, análise real e complexa), procuraremos propor situações problemáticas motivadoras, tornando significativa a aprendizagem dos conteúdos matemáticos e incentivando a autonomia do aluno na construção do seu conhecimento matemático.

1.Introducción

Uno de los desafíos que ha debido enfrentar la Didáctica de la Matemática, ha sido el de contribuir a que las prácticas de enseñanza permitan a los alumnos otorgarle sentido a los objetos matemáticos. Esto implica (entre otras cosas) que los estudiantes sean capaces de relacionar los entes abstractos con problemas concretos (y cuanto más cotidianos, mejor) para los cuales el nuevo conocimiento significa un aporte sustancial.

Los procesos que ha sufrido la Matemática como tal, especialmente en lo referido a su enseñanza sobre mediados del Siglo XX, han provocado en nuestro sistema educativo formal[1] una despersonalización hasta "violenta" de estos saberes, y estas tradiciones nos han empujado a que nos parezca obvio que cuanto más abstracta, pura y desarraigada sea la manipulación de los objetos matemáticos, de mayor "calidad" será su aprendizaje.

Basta remontarnos en el tiempo para aceptar que muchos de los componentes que han hecho de la Matemática (y en especial, de la Geometría) una disciplina *hermosa* se vinculan con su aplicación en el arte y en la arquitectura. Los estudios de las proporciones (en especial, la *Divina Proporción*), las regularidades, las simetrías, los patrones, han sido motivo de deslumbramiento para muchas generaciones: y el interés en lograr dominar esta explicación oculta tras tanta belleza, ha motivado al estudio profundo de muchos conceptos matemáticos.

¿Quién no se ha maravillado frente a una figura con varios ejes de simetría? ¿O un bonito polígono estrellado? ¿Y una envolvente de rectas?

Por otra parte, la misma enseñanza de la Matemática se ha topado desde hace unos años con un conjunto de posibilidades originales, en el marco de los procesos de incorporación de TIC a las actividades de aula. En particular, la Geometría Dinámica ha implicado un cambio de características hasta revolucionarias para la Didáctica de la Matemática.

Sin detenernos en estas bondades, nos interesará en este artículo mostrar algunas de las posibilidades que ofrece la Geometría Dinámica (en especial, el software GeoGebra[2]) para generar imágenes estéticamente agradables como los **fractales**, en una suerte de combinación del arte digital con la Gometría Dinámica, haciendo también énfasis en las oportunidades de aprendizaje de la matemática que esto conlleva. Si bien veremos que los contenidos matemáticos asociados nos abren las puertas para profundizar en campos de conocimiento más desafiantes, nos restringiremos a la aplicación de los contenidos que son abordados en los programas de enseñanza secundaria.

2. Las imágenes fractales

Recuerdo cuando, hace varios años, conocí esas imágenes "generadas informáticamente" que resultaban tan hermosas, con diseños que se repetían a variadas escalas. Habiéndome informado que se trataba de *fractales*, y que estaban cercanamente relacionadas con la matemática, quise profundizar un poco más. Pero las explicaciones más accesibles que encontré hacían referencia a

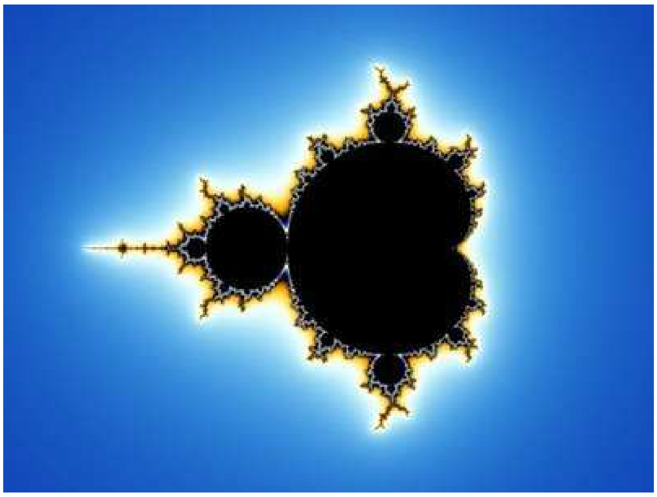


Ilustración 1. Conjunto de Mandelbrot

1 Se toma cono referencia en este artículo el sistema educativo formal de Uruguay.
2 http://www.geogebra.org

algunos conjuntos más “sencillos” (y no por eso menos interesantes), pero que no se parecían a los diseños tan bonitos que esperaba; estos últimos aparecían junto con conceptos matemáticos bastante más engorrosos, que ofrecidos a un inexperto (como yo) lograban empañar un poco la belleza de las imágenes.

Intentaremos entonces mostrar un posible camino que nos permita llegar a la creación de estas imágenes, recurriendo al conocimiento matemático necesario para provocarlas, pero preocupados más bien por su aprovechamiento *ad hoc*, y no tanto en su profundización.

En el caso de los alumnos de enseñanza media, esta actividad puede ser útil para ver aplicaciones de algunos contenidos curriculares; y los estudiantes más avanzados podrán profundizar mucho más en estos mismos conceptos.

Además de ir enunciando los contenidos matemáticos vinculados, iremos viendo a la par cómo trabajar con ellos en GeoGebra.

2.1. ¿Qué es un fractal?

El término *fractal* fue acuñado por el matemático polaco Benoît Mandelbrot, y hace referencia a la idea de “partido” o “fracturado”. Si entramos en formalidades, Mandelbrot definió un fractal como *“un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica”.*

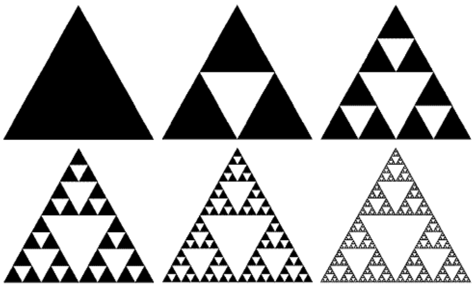


Ilustración 2. Triángulo de Sierpinski

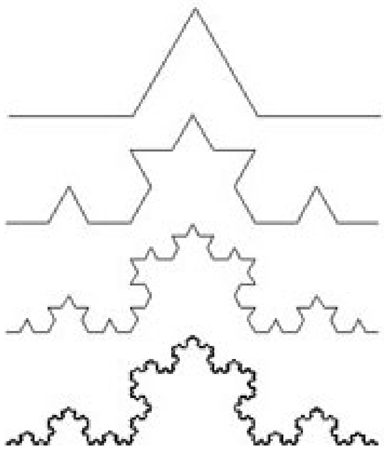


Ilustración 2. Curva de Koch

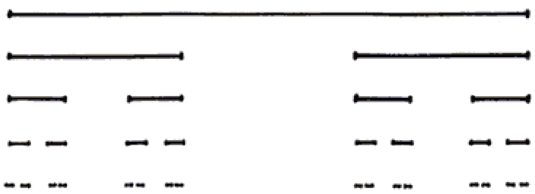


Ilustración 3. Conjunto de Cantor

Nos hemos propuesto no marearnos con estos conceptos avanzados, pero esta idea es suficiente para pensar en figuras que, por ejemplo, tienen área finita y perímetro infinito (¡!). Quizás algunos conjuntos ya clásicos pueda resultar familiares, y que podrían servir de ejemplos bastante sencillos para estas características (como el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, o la curva de Koch).

2.2. ¿Qué es una imagen fractal?

Los ejemplos anteriores pueden confrontarse con la definición de fractal, y ver que la cumplen efectivamente, sólo recurriendo a las cualidades geométricas con las cuales fueron construidos. Pero hay otros conjuntos fractales que se definen de una manera un poco más elaborada, y no es tan intuitivo verificar que efectivamente lo son; justamente, algunos de estos son los que pueden generar esas imágenes tan coloridas. Indaguemos un poco más.

Podemos pensar el plano cartesiano, como el conjunto de los afijos de los números complejos. De ese modo, cada punto será para nosotros un número... lo interesante de la generación de estas imágenes será decidir de qué color pintar cada punto del plano para obtener lo que deseamos. Hacia allí vamos.

Consideremos una función f que a cada punto del plano complejo, le asigne otro. Si aplicamos reiteradamente esta función, iremos obteniendo un número complejo al cabo de cada iteración. Supongamos que seguimos iterando, infinitamente... ¿a qué tenderá nuestra sucesión? Básicamente, podrían suceder tres cosas:

- Que los puntos se vayan “acercando” a cierto punto especial
- Que los puntos se alejen exageradamente del origen de coordenadas
- O que tengan algún comportamiento extraño, yendo y viniendo, que no se ajuste a ninguna de las dos categorías anteriores.

Justamente, eligiendo una función f adecuada, podremos decir que el conjunto de los números complejos tales que esta sucesión converge (a algún punto del plano complejo), será un fractal.

Aún tendremos que ver cómo usar este criterio para decidir el color de cada punto, pero veremos que esto estará asociado a cuál es el punto al que la sucesión se acerca (si es que esto sucede), y qué tan rápidamente lo hace.

3. El aporte de la informática

Naturalmente, pensemos que si para cada punto del plano tenemos que iterar una función una cierta cantidad de veces (aún no sabemos cúantas), y de acuerdo a ese comportamiento pintar (¡sólo ese punto!) de un determinado color, para después seguir con otro... el trabajo parece muy arduo.

Aquí se vuelve sustancial al aporte de las TIC, ya que nos permite realizar tareas que serían inviables de otro modo, y gracias a las cuales podemos pretender usar conocimientos matemáticos más avanzados. No se trata simplemente de hacer lo mismo que hacíamos antes pero con la computadora, ni tampoco implica hacer más sencilla una tarea habitual: implica lograr algunas cosas que hasta entonces eran impensadas.

3.1. ¿Por qué GeoGebra?

Hay muchos programas informáticos que son capaces de generar estas imágenes, pero hay algunas características de GeoGebra que lo hacen especial.

Primero, que se trata de un software libre y llevado adelante por una comunidad de técnicos y educadores en matemática pensado especialmente para el ámbito del aula. No está concebido ni para el ingeniero, ni para el matemático: está concebido para el alumno que aprende matemática.

Segundo, que nos ofrece la posibilidad de visualizar simultáneamente un mismo objeto en varios registros de representación. En nuestro caso, será esencial poder asociar un punto del plano, al número complejo correspondiente. A esto se suma la potencialidad gráfica del programa.

Tercero, que nos ofrece una planilla de cálculo integrada en la que será muy práctico realizar las iteraciones de la función generatriz del fractal.

Obviamente, también encontraremos algunas limitaciones, que tendremos que subsanar de la mejor manera. Una de ellas puede ser que el algoritmo que utilizaremos para crear las imágenes será quizás demasiado exigente para el programa (o el equipo en el que funcione). O también, que tendremos que crear hábilmente algunas herramientas específicas para que el software realice lo que necesitamos. Intentaremos plantearlas aquí de la manera más sencilla posible.

3.2. Algunas herramientas indispensables

Una cuestión crucial es la posibilidad de colorear cada punto de acuerdo a un criterio bien definido. Veremos cuál será ese criterio, pero ejemplificaremos cómo opera GeoGebra para pintar un punto de un cierto color.

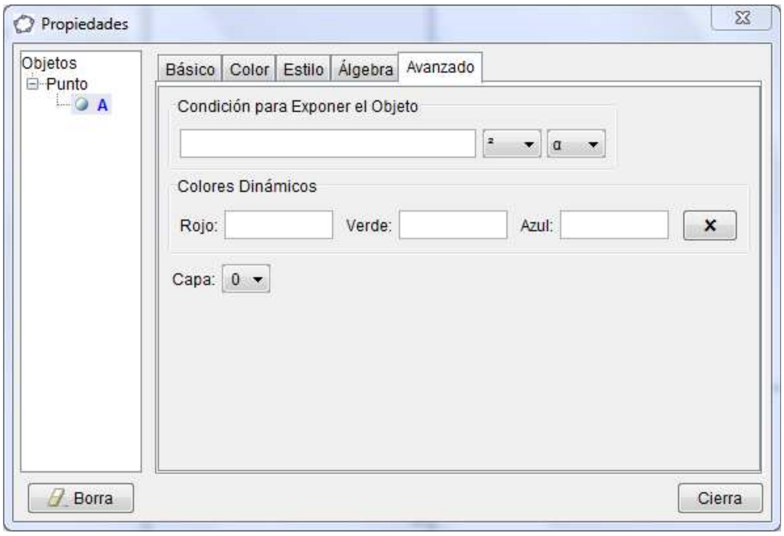


Ilustración 3. Cuadro de propiedades de un objeto

GeoGebra cuenta con la propiedad de *color dinámico*. Esto es, que cualquier objeto puede recibir un color dado por sus componentes en los colores básicos Rojo, Verde y Azul. De ese modo, si asignamos a un punto el 0% en sus tres componentes, se verá negro. Si asignamos el 100% en las tres, se verá blanco. Y de allí en adelante podemos generar una inmensa gama de colores.

Para definir el color de un punto, basta seleccionar el punto con el botón derecho del ratón, elegir la opción *Propiedades* y luego la pestaña *Avanzado*. Allí se verán los cuadros correspondientes para las tres componentes de color.

GeoGebra reconocerá los valores entre 0 y 1 como el porcentaje que asignará de cada color (el 1 corresponde al 100%). Si se ingresa un número que no pertenezca a ese intervalo, GeoGebra lo convertirá usando una función interna, que en principio no nos va a interesar demasiado, ya que tendremos la precaución de usar siempre números del intervalo [0,1]. De todos modos, para los más curiosos, la función utilizada por GeoGebra es:

$$f : \mathrm{C} \rightarrow [0,1] \,/\, f(x) = (-1)^{[x]} \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

siendo [x] la función parte entera de x.

Pero la mayor potencia de esta herramienta está en que las componentes de cada color pueden ser variables, y depender de algún objeto ya creado. En particular, pueden depender de la posición del mismo punto. Por ejemplo, el siguiente dibujo se ha obtenido asignando al punto P las siguientes componentes de color:

Rojo(P)=sin(x(P)); Verde(P)=cos(y(P)); Azul(P)=0.7[3]

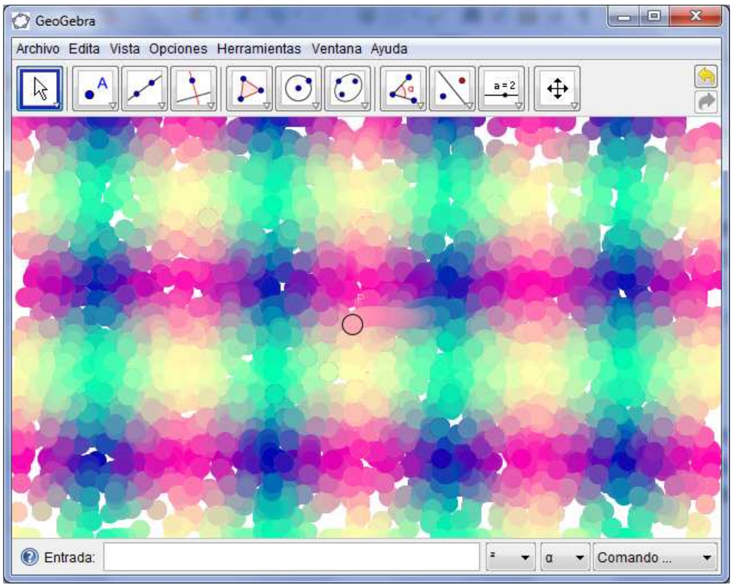


Ilustración 4. Ejemplo de aplicación del color dinámico

Habiendo activado el rastro del punto (con un clic derecho sobre él), hemos logrado que al moverlo fuera dejando en la pantalla una estela de colores según cada posición. También hemos considerado un tamaño bastante grande para el punto, de modo que se aprecie bien el efecto deseado.

Otra función de GeoGebra que nos será de utilidad, es la *Vista hoja de cálculo*, que puede activarse desde el menú *Vista.*

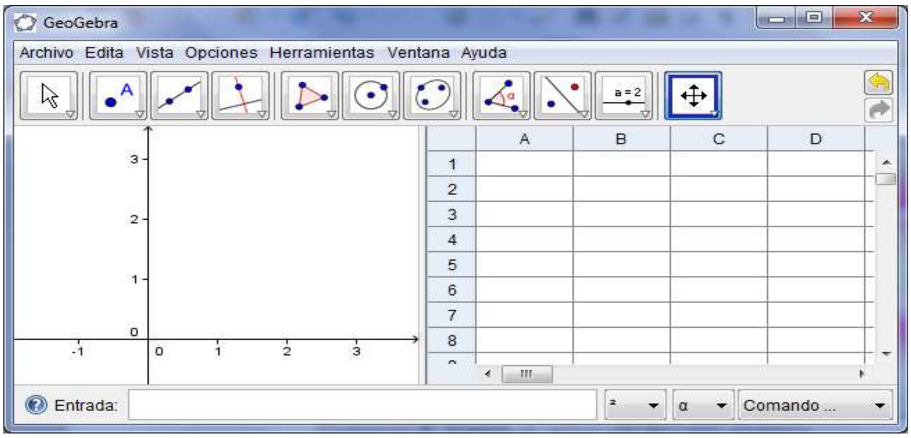


Ilustración 5. Vista hoja de cálculo

3 Nótese que la función x() devuelve la abscisa de un punto, mientras que y() devuelve su ordenada.

Allí veremos una planilla de cálculo como otras que quizás conozcamos, donde cada celda está identificada con un nombre (por ejemplo, B3). En cualquiera de esas celdas podemos escribir un comando, una función, un número, un objeto geométrico, y GeoGebra lo identificará con el nombre de la celda. De ese modo, si en la celda B3 escribimos **(-2, 6)** GeoGebra creará un punto llamado B3 de coordenadas (-2, 6), que también representará simultáneamente en las vistas algebraica y gráfica.

A propósito, si deseáramos que GeoGebra considerara ese punto como el número complejo asociado, bastará indicárselo haciendo clic con el botón derecho sobre el punto (o su celda), y luego *Propiedades*, eligiendo la pestaña *Álgebra* seleccionaremos *Número complejo*.

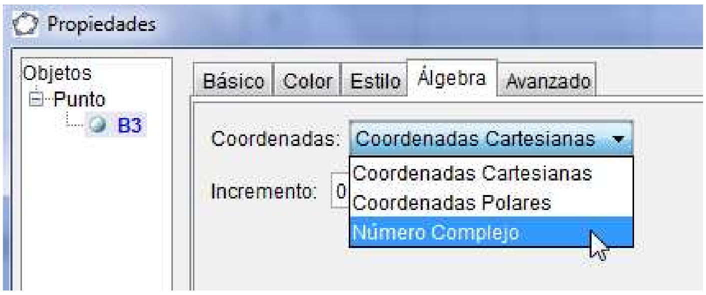


Ilustración 6. Propiedades algebraicas de un objeto

A partir de entonces, en la celda correspondiente veremos la notación binómica del complejo, en lugar de la cartesiana.

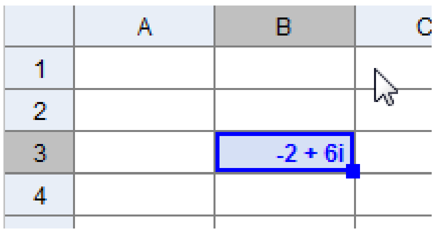


Ilustración 7. Vista de la hoja de cálculo

En la misma hoja de cálculo podemos realizar operaciones con números complejos, e ingresando las fórmulas correspondientes (refiriéndonos a los números por la celda que ocupan), veremos los resultados en las celdas. Si nos interesa conocer la fórmula que dio origen al número visible, basta posar unos segundos el puntero sobre la celda y se mostrará la fórmula. En el siguiente ejemplo, hemos agregado el complejo **3 – i** en la celda B2 y lo hemos sumado al complejo B3, colocando en la celda B4 la expresión **= B2 + B3**

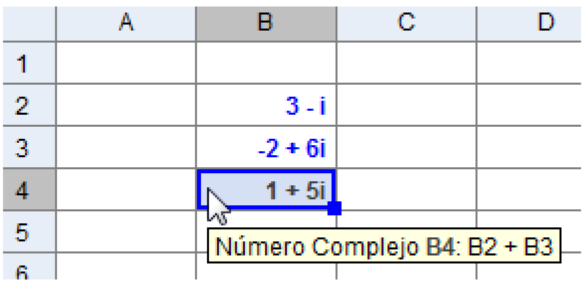


Ilustración 8. Operaciones con complejos

4. Comencemos a dibujar

Ya estamos en condiciones de iniciar nuestro dibujo de una imagen fractal. Comenzaremos eligiendo una función adecuada y sencilla, para que los cálculos internos que deba realizar el programa no sean demasiado exigentes. Luego veremos el criterio de asignación de color a cada punto, utilizando la función elegida.

4.1. El fractal de Newton

Puede haber muchísima variedad en la función que uno elija para generar una imagen fractal, pero las que se agrupan bajo el título de fractales de Newton son bastante sencillas. Responden a una expresión de la forma:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}$$

Aquí *p* es una función polinómica compleja, y se cumple la curiosidad de que los puntos atractores (aquellos candidatos a ser puntos de convergencia de la sucesión que se obtiene al iterar muchas veces la función, sobre un punto determinado), son precisamente las raíces de *p*.

Pongamos por ejemplo que utilizamos el polinomio $p(z)=z^3-1$. Tendremos pues tres raíces complejas, candidatas a ser atractores de cada punto del plano. De modo que implícitamente estamos considerando algunas regiones: los complejos que, luego de varias iteraciones, convergan hacia la primera raíz, pertenecerán a la primera región. Análogamente con la segunda y tercera raíces.

Y si identificáramos cada región con un color, estaríamos casi estableciendo un criterio para pintar todos los puntos del plano... Por ahí seguiremos, pero con calma.

4.2. ¿De qué color pintamos cada punto?

Lo importante es ver cómo va quedando armado el procedimiento. Dado un punto, iteraremos varias veces (ya decidiremos cuántas) la función sobre él. Atendiendo a la imagen obtenida luego de las iteraciones, observaremos a cuál punto atractor se ha acercado, y en función de esa distancia lo pintaremos.

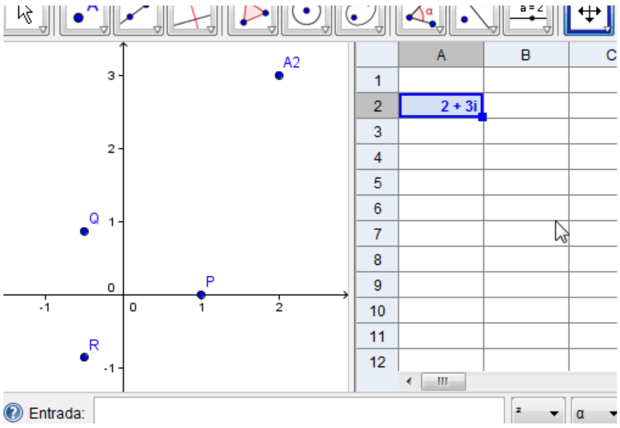
Veamos cómo hacerlo en GeoGebra.

Consideremos un número complejo A2 variable (asociado, inevitablemente, a la celda A2). Por ejemplo, escribamos A2=2+3i.

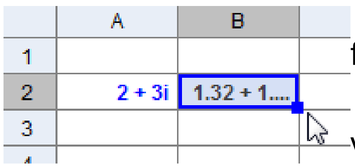
Necesitaremos también definir los tres puntos atractores, que al ser las raíces del polinomio ya mencionado, coinciden con las tres raíces cúbicas de la unidad. Los llamaremos P, Q y R, y para hacerlo más sencillo los introduciremos utilizando la notación polar, como sigue:

P=(1;0)
Q=(1; 2 pi/3)
R=(1; 4 pi/3)

Por el momento, nuestra pantalla tiene el siguiente aspecto:



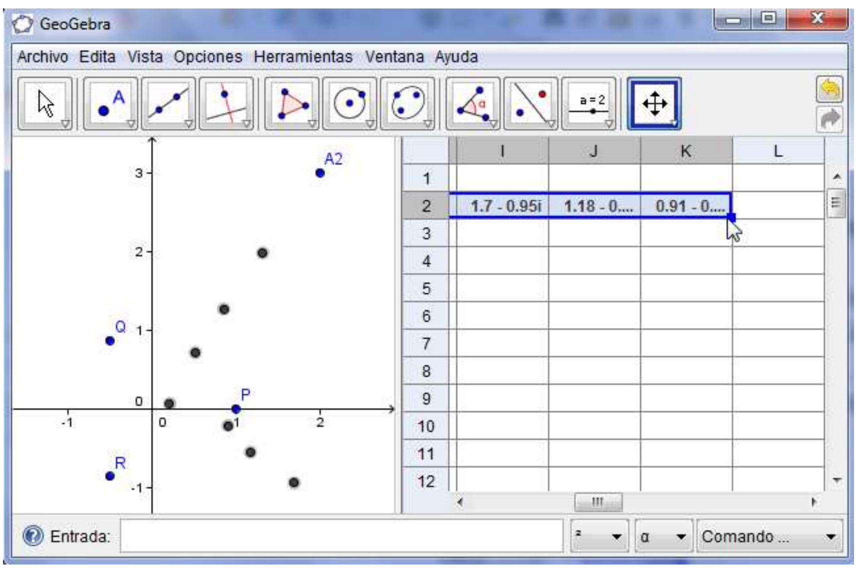
Ahora debemos iterar la función sobre el punto A2, para analizar su comportamiento. Aprovecharemos la hoja de cálculo, e iremos calculando las sucesivas iteraciones en la fila 2, hasta alcanzar un número que nos preestablezcamos (10, por ejemplo).



En la celda B2 ingresaremos la expresión de la función: **=A2–(A2^3–1)/(3 A2^2)**.

Para continuar iterando la función no es necesario volver a escribirla, basta copiar la fórmula hacia las celdas de la derecha, para que GeoGebra actualice las variables en la fórmula. Para ello, seleccionando la celda B2, arrastramos desde el pequeño cuadrado azul que se ve en el extremo inferior derecho de la celda, hasta alcanza la columna K.

Habrán aparecido también todos los puntos resultantes de cada iteración representados en la vista gráfica. Si movemos el punto A2, veremos moverse toda la lista de puntos, y también podremos apreciar cómo se acercan a uno u otro atractor dependiendo de la posición de A2.

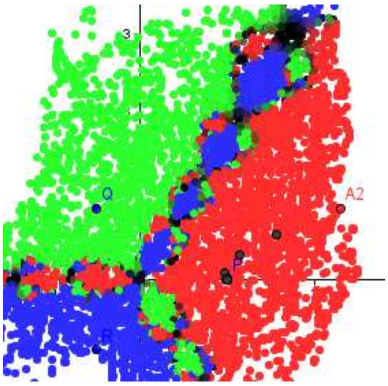


Las imágenes fractales más “profesionales” tienen en cuenta varias cosas para asignar el color de cada punto: no sólo a qué atractor corresponden, sino también la velocidad de convergencia (es decir, cuántas iteraciones son necesarias para que se acerquen al atractor menos de una distancia estipulada).

En nuestro trabajo no nos detendremos en la velocidad de convergencia, simplemente asignaremos el color en función de la cercanía a cada atractor luego de varias iteraciones. Nos ayudará el hecho de haber elegido un polinomio con tres raíces (tres atractores, P, Q y R), ya que asignaremos un color a cada uno. Para que sea evidente a qué región pertenece el punto (A2, en nuestro ejemplo), buscaremos asignar el color dinámico de tal manera que cuanto más cercano esté el punto (K2, en nuestro ejemplo) de un atractor, la intensidad de la componente de color correspondiente sea mayor; y si está alejado, que la componente se vaya anulando.

Fijemos ideas pensando que al atractor P asociaremos el color rojo. Estamos necesitando una función que, según la posición del punto K2 sea cercana a P, ofrezca una imagen cercana a 1; mientras que cuanto más se aleje de P, será más cercana a 0. Aprovechando algunas herramientas del análisis real, elegiremos la función dada por **Rojo(A2) =** $\mathbf{e^{-dist(P,K2)}}$, que en la sintaxis de GeoGebra quedará expresada como **exp(-Distancia[P,K2])**. Obsérvese que esta función cumple con las pretensiones planteadas.

Con esta idea, podemos completar los cuadros del color dinámico de A2 de esta manera: Rojo = $e^{-dist(P,K2)}$, Verde = $e^{-dist(Q,K2)}$, Azul = $e^{-dist(R,K2)}$. De nuevo, si activamos el trazo del punto A2 y lo agitamos pacientemente por la pantalla, veremos la imagen fractal ir apareciendo tímidamente.



Bueno... podemos decir que ¡hemos creado una imagen fractal! Aunque, a decir verdad, está un poco desprolija. ¿Habrá una manera más sencilla de colorear cada punto?

4.3. Ahorrando trabajo

Después de la técnica que hemos desarrollado, es lógico pensar que sería conveniente contar con algún método que pudiera hacer este trabajo automáticamente, y mejor aún si hubiera varios puntos “pintando” la pantalla en forma simultánea. Veremos cómo aprovechar las herramientas de GeoGebra para alcanzar estos dos objetivos.

Para ello, definiremos un conjunto de puntos, creados con la misma idea y propiedades con que hemos creado a A2, pero todos con la misma abscisa (dependiente de un parámetro *a* que luego haremos variar), y muy próximos uno de otro... nos quedará una especia de hilera “vertical” de puntos.

Tendremos un par de precauciones previas. Dejaremos a la vista sólo el punto A2, y ocultaremos el resto para evitar confusiones. Asimismo, reduciremos el tamaño de A2 al mínimo, para que la imagen final sea de una buena resolución.

Ahora sí, definamos el parámetro *a* que será la abscisa de nuestra hilera de puntos. Lo definimos como un deslizador en el intervalo [-3, 3] (esto puede variarse a gusto, de acuerdo con el tamaño de la imagen que quiera lograrase), con un incremento del 0.02 y una velocidad de 0.2.

Aprovechando *a*, definimos en la celda A1 el punto (a, 3). Basta mover el deslizador para constatar que el nuevo punto A1 se mueve en simultáneo. Este punto A1 será un extremo de nuestra hilera: a partir de él, y hacia abajo, iremos colocando los nuevos puntos. El primero en agregarse será A2, que lo redefinimos escribiendo A2=A1+(0,-0.03), lo cual puede interpretarse como una suma de complejos. Obsérvese que esta forma de definir A2 lo hace depender de *a* indirectamente, y al mover el deslizador, se desplaza A2.

Toda la fila 2 de la hoja de cálculo tiene la información necesaria para que el punto A2 funcione correctamente, y además, éste se ha ubicado "un poquito más abajo" del punto A1. Si copiamos la fila 2 en las filas subsiguientes, obtendremos los puntos que necesitamos uno debajo del otro, y se heredarán las propiedades definidas. Seleccionando el rango desde A2 hasta K2, y tomando desde el cuadro azul del extremo inferior derecho, extendamos la selección hasta la línea 200 (puede ser más o menos, según se desee).

Ya está casi listo. Si movemos el deslizador *a*, irá apareciendo el fractal; pero si activamos la animación automática del deslizador (con clic derecho sobre él), la imagen se irá formando lentamente.

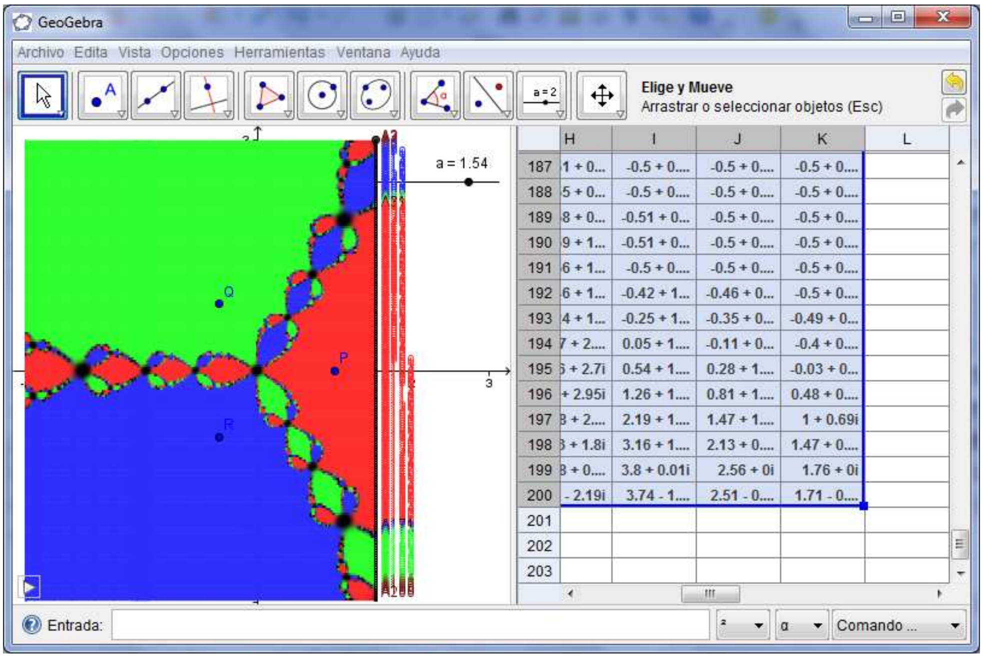
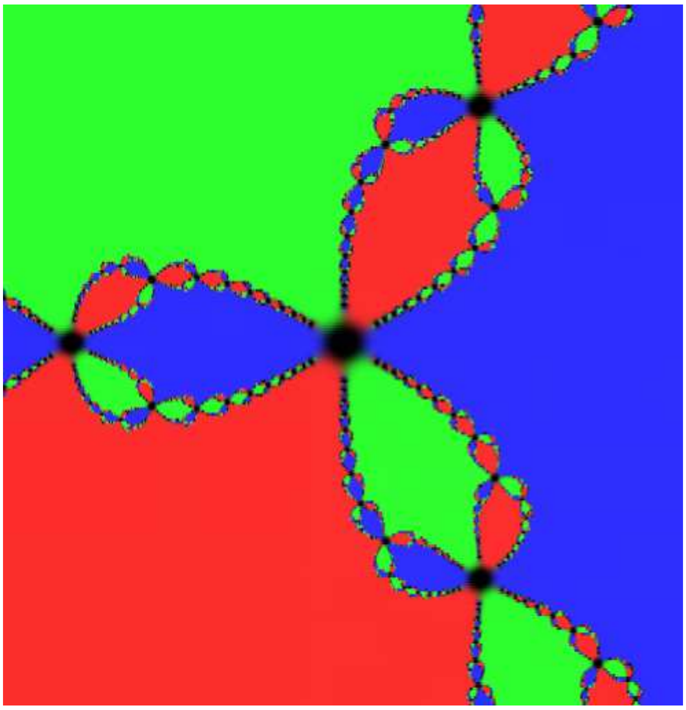


Ilustración 9. "Barrido" de la imagen fractal

Los pequeños coeficientes utilizados se pueden modificar, y eso hará variar la calidad y el tamaño de la imagen resultante, como veremos en breve.

GeoGebra nos permite exportar la vista gráfica en un archivo JPG, de modo que luego es sencillo compartir las imágenes generadas:



4.4. Algunas variantes

Ahora que hemos logrado un archivo en GeoGebra capaz de dibujar una imagen fractal, es el momento de guardarlo, para comenzar a “jugar” con él y así obtener muchísimas nuevas imágenes.

Para ello deberemos ir variando algunos de los parámetros componentes.

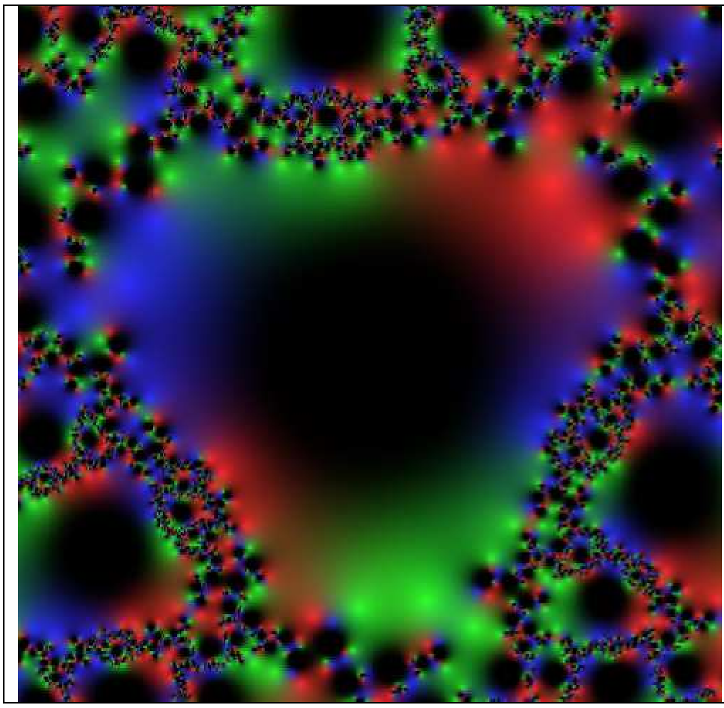
Podemos cambiar el polinomio inicial, ofreciendo nuevos puntos atractores (aunque se simplifica bastante la tarea si se consideran polinomios de tercer grado, de modo que haya sólo tres atractores, uno por color).

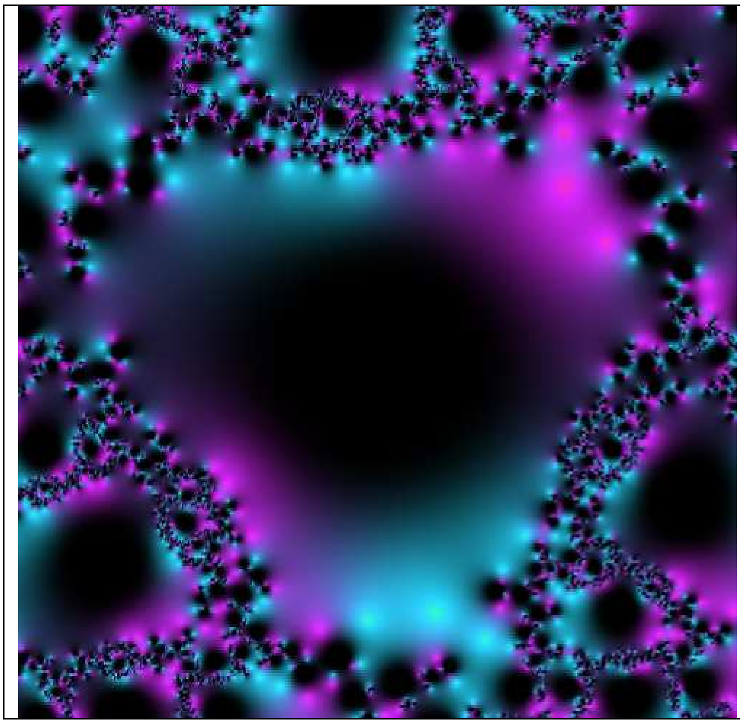
También podemos alterar el polinomio inicial multiplicando el segundo término de la función generadora por un coeficiente (complejo); esos pequeños retoques pueden provocar grandes variaciones en las imágenes.

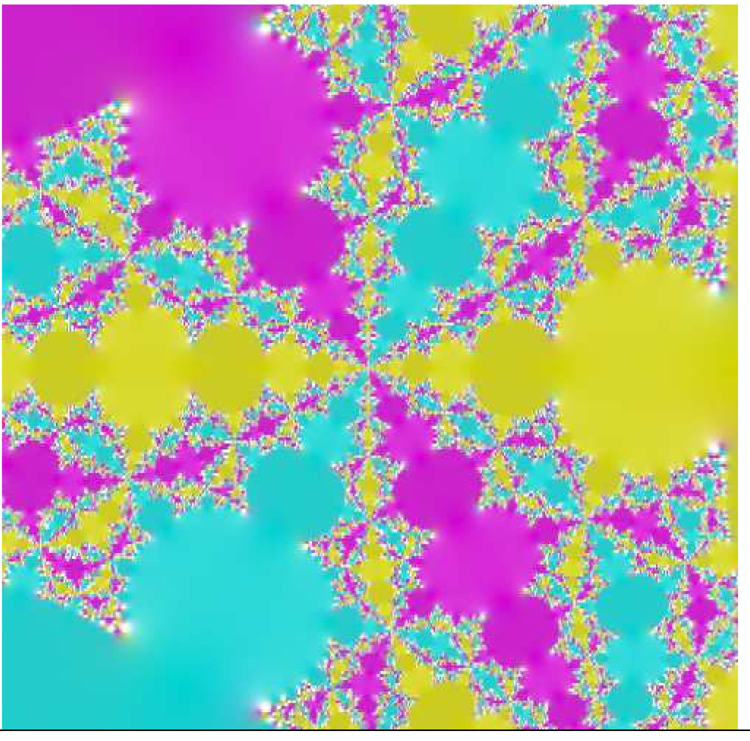
Otro ajuste puede estar en el criterio de asignación de color, abriendo aquí la posibilidad a lo que sea que la imaginación permita concebir. Si se logra idear una función que asigne las componentes de color teniendo en cuenta el tema de los atractores, podemos lograr imágenes muy llamativas.

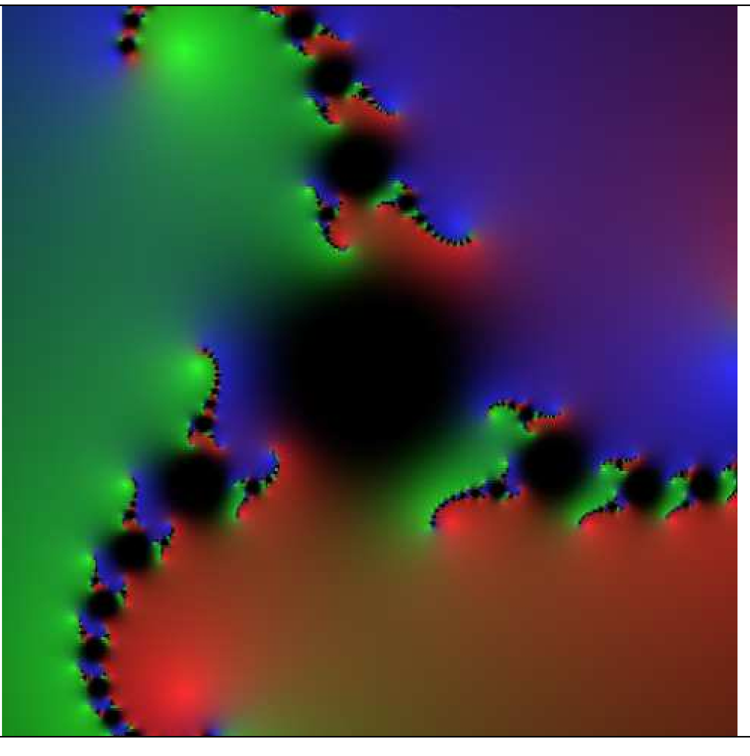
Y para quien se sienta aún más desafiado, podrá seguir buscando nuevas informaciones acerca de los fractales, e intentar utilizar esas funciones probando sus gráficos.

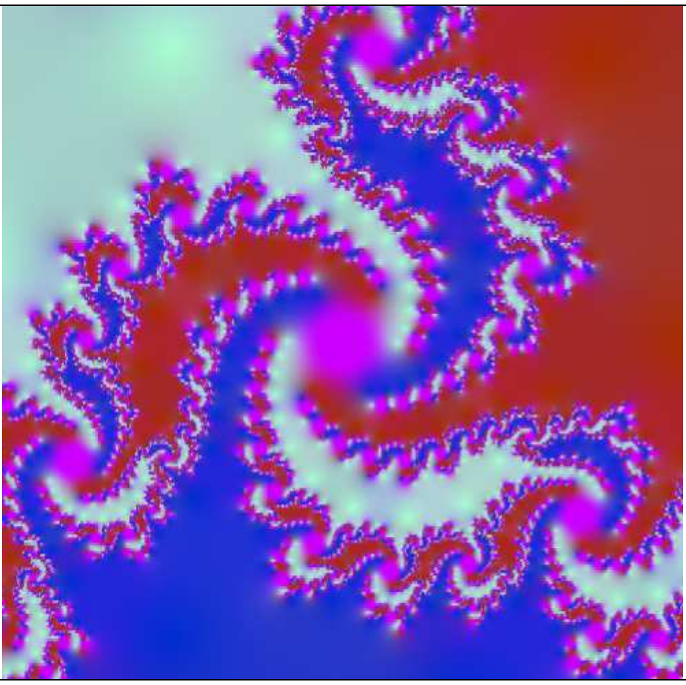
Estas imágenes se han creado todas con pequeñas variaciones de las que acabamos de mencionar, sin cambiar el polinomio inicial (sólo se ha mulitplicado por un coeficiente, o variado la asignación de colores).

	$z_{n+1} = z_n - (1+2i)\dfrac{z_n^{\ 3} - 1}{3z_n^{\ 2}}$

	$z_{n+1} = z_n - (1+2i)\dfrac{z_n^{\ 3} - 1}{3z_n^{\ 2}}$

	$z_{n+1} = z_n - 2\dfrac{z_n^{\ 3} - 1}{3z_n^{\ 2}}$

	$z_{n+1} = z_n - \dfrac{i}{2} \cdot \dfrac{z_n^{\ 3} - 1}{3z_n^{\ 2}}$



$$z_{n+1} = z_n - (1+i)\frac{z_n^{\ 3} - 1}{3z_n^{\ 2}}$$

5. Comentarios finales

Quizás pueda resultar interesante hacer el ejercicio de analizar qué conceptos matemáticos ha sido preciso poner en juego a lo largo de este proceso de creación de imágenes fractales.

Para quienes resulten ya conocidos, puede ser ésta una oportunidad para verlos en acción, y aprovechando el conocimiento de las propiedades asociadas podrán innovar creativamente, provocando nuevas imágenes.

Para los estudiantes que no estén habituados a estos conceptos, se habrán acercado por primera vez a ellos conociéndoles en una faceta agradable y motivadora, y sin dudas será más fácil en el futuro abordarlos desde ángulos más áridos.

En definitiva, se trata de la combinación cuidadosa de varias herramientas que están a disposición de nuestros estudiantes; quedan pendientes las posibles discusiones didácticas que puedan provocarse a partir de la implementación de este tipo de actividades.

Bibliografía

Mandelbrot, B. (1997): *La geometría fractal de la naturaleza.* Tusquets editores, Barcelona.

Geogebra. Web oficial (www.geogebra.org), consultado en setiembre de 2010.

Instituto GeoGebra de Cantabria (www.geogebra.es), consultado en septiembre de 2010.

Fabián Vitabar. Egresado del Instituto de Profesores Artigas (Montevideo, Uruguay), actualmente docente en cursos de enseñanza media y de Formación de Profesores. Dedicado especialmente al estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática mediados por TIC. fvitabar@gmail.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 177-182
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar

MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

La estadística oficial en el aula

Antonia R. Gil Armas

Resumen

La enseñanza de la estadística se puede abordar desde múltiples perspectivas distintas a la realización de ejercicios de resolución corta; se puede abordar, por ejemplo, desde la información presente en los medios informativos, desde los datos recopilados por los propios alumnos, o bien, desde la información estadística oficial, entre otras opciones. Esta última es la elegida en la actividad de aula que se presenta en este artículo y que se desarrolla con alumnos de 15 a 16 años. Esta fue la primera actividad que realicé aplicando a la enseñanza de la Estadística la metodología de “trabajo basado en proyectos” y, aunque la he seguido aplicando desde entonces, esta es, en mi opinión, un buen ejemplo.

Abstract

Teaching of statistics can be approached from many perspectives different to solve short exercises. But also can be approached from the information in the media, data compiled by the students themselves, or from official statistical information, among other options. This last option has been chosen to carry out the classroom activity which is developed by 15 to 16 years old students, described in this article. That was the first activity I carried out applying to the teaching of statistics methodology of "project-based learning" (“trabajo basado en proyectos”), and although I continued to apply since then, this is, in my opinion, a good example.

Resumo

O ensino da estatística pode-se abordar desde múltiplas perspectivas diferentes à realização de exercícios de resolução curta; pode-se abordar, por exemplo, desde a informação presente aos meios informativos, desde os dados recopilados pelos próprios alunos, ou bem, desde a informação estatística oficial, entre outras opções. Esta última é a eleita na actividade de aula que se apresenta neste artigo e que se desenvolve com alunos de 15 a 16 anos. Esta foi a primeira actividade que realizei aplicando ao ensino da Estatística a metodología de “trabalho baseado em projectos” e, ainda que segui-a aplicando desde então, esta é, em minha opinião, um bom exemplo.

1. Introducción

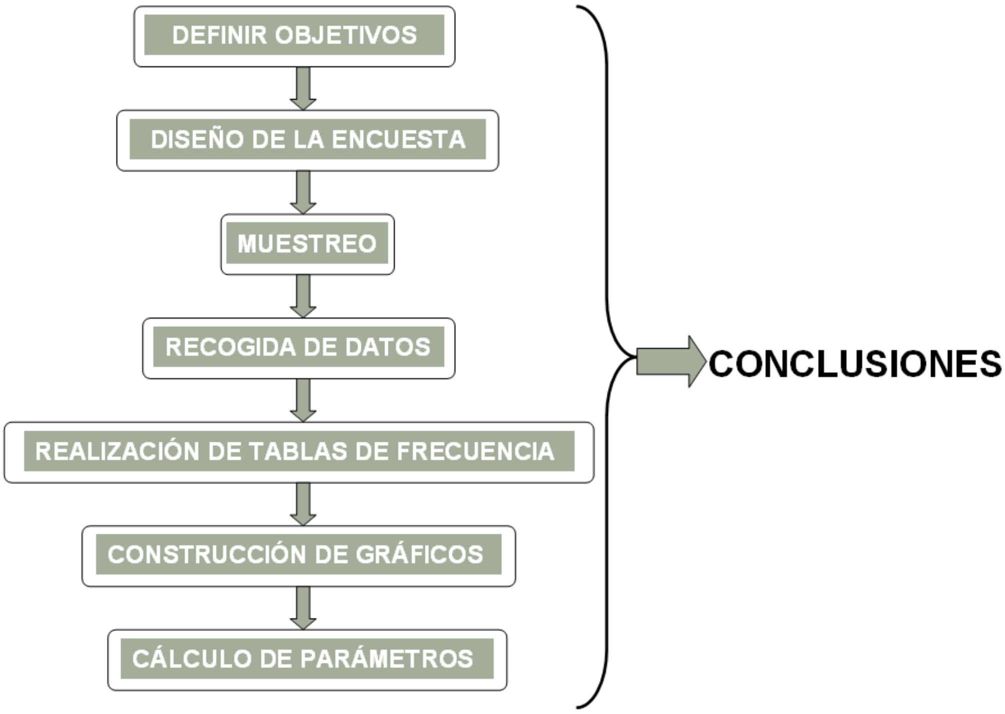
Las estadísticas oficiales constituyen un elemento básico de información de una sociedad democrática ya que éstas proporcionan datos acerca de la situación económica, demográfica y social de un país que todo futuro ciudadano debería conocer, o al menos, conocer la existencia de estos datos y qué organismos son los encargados de ofrecerlos.

Además de dar a conocer la existencia de estos organismos como un medio para tener una información estadística fidedigna, constituyen una fuente de datos susceptibles de ser trabajados por nuestro alumnado. Estos datos tendrán más significado que basarnos en datos ficticios.

El uso de la información procedente de estadísticas oficiales puede tener, desde mi punto de vista, dos aplicaciones:

- Utilizar las bases de datos reales sobre los que trabajar los procedimientos estadísticos, y, que, por su temática, puedan ser del interés de los alumnos.
- Utilizar los resultados obtenidos por estos organismos y compararlos con los obtenidos por nuestros alumnos mediante su propia producción, a través de encuestas u otras forma de recogida.

La primera opción tiene la ventaja de usar datos de interés sobre los que realizar los cálculos estadísticos necesarios; la segunda, tiene la ventaja de que los alumnos y alumnas van a producir sus propios datos y los van a comparar con unos ya existentes, añadiendo a la realización del cálculo estadístico, la capacidad de investigar y de conformar el razonamiento crítico basado en la objetividad de los datos. Esta última opción fue la que escogieron mis alumnos tras consultar la web del organismo oficial de estadística local, el ISTAC (Instituto Canario de Estadística) y la que se llevó a cabo mediante el desarrollo de un proyecto estadístico en todas sus fases:



2. El proyecto

La metodología empleada en esta actividad, como ya indiqué, es la "trabajo basado en la realización de proyectos". En esta forma de trabajo en el aula, el papel del profesor es el de director del proyecto, es decir, el profesor indica el camino a seguir pero son los alumnos y las alumnas los que deben llevarlo a cabo. Los proyectos les introducen en la investigación, les permiten elegir un tema de su interés sobre el que definir los objetivos, elegir los instrumentos de la recogida de los datos para dar respuesta a los objetivos planteados, así como seleccionar la muestra, recoger los datos, codificar, construir las tablas y analizar e interpretar los datos.

2.1. Elección del tema

El inicio del trabajo debe ser definir lo que se va a hacer. Se informa al alumnado del trabajo que se va a desarrollar y que deben elegir el tema. Para esta elección deben consultar los distintos bloques de información estadística que ofrece el organismo oficial de estadística de nuestro ámbito geográfico del que les paso la forma de conocer a través de su web: http://www.gobiernodecanarias.org/istac.

De entre los temas disponibles, seleccionaron por consenso y tras debatir las distintas propuestas, la estadística "**La cesta de la compra**". Esta operación estadística es de elaboración propia de este organismo; ofrece información sobre el precio de la compra de una cesta básica de productos de un hogar en las distintas islas de nuestro archipiélago (son siete islas de variadas características), indicando el precio y, por supuesto, cuál es la isla donde la cesta de la compra es más cara y cuál tiene la más barata entre otras informaciones.

¿Tiene nuestro municipio la cesta más cara o más barata respecto a la de toda Canarias? Ese era el mayor interés de los alumnos y por eso se convirtió en uno de los objetivos planteados en el proyecto.

2.2. Definir objetivos

Una vez seleccionado el tema, el siguiente paso consistió en establecer los objetivos que marcarán el trabajo del resto del proyecto, incluidas las conclusiones.

Los objetivos planteados fueron:

- Comparar la cesta de la compra de nuestro municipio (Firgas) con el de Gran Canaria (isla) y con el de toda Canarias (archipiélago).
- Comparar los precios de los diferentes establecimientos ubicados en el municipio.

2.3. Diseño de la encuesta.

Esta fase, como es sabido, es importante pues se deben plantear las preguntas adecuadas para recoger los datos que nos ofrecerán la información que buscamos y cubrir así los objetivos planteados. En su desarrollo el alumnado se va a familiarizar con los conceptos de variable, tipos de variable y valores de una variable.

En el ejemplo concreto que nos ocupa, los alumnos intentaron emular la operación estadística oficial y consultaron los aspectos metodológicos publicados en la página web del ISTAC. Buscaron qué productos se deberían elegir para preguntar su precio; observaron que los productos que intervenían en el análisis de la cesta de la compra se dividían en 10 grupos pero no se indicaban los productos que se debían escoger. Así que seleccionaron los productos y las marcas más utilizados por sus familias. El procedimiento, aunque mejorable, es suficiente para poder continuar con el proyecto.

2.4. Muestreo o censo.

A continuación debían decidir si se extraían los precios de los 50 productos seleccionados en todos los establecimientos o sólo en algunos de ellos. Dado que el municipio es pequeño y solo cuenta con siete establecimientos, decidieron obtener los datos de todos ellos.

3. Recogida y análisis de datos

La planificación y división del trabajo de campo es un apartado fundamental que deben ser supervisado por el profesor, que todos los alumnos participen y que además tengan una carga de trabajo y de responsabilidad similares.

En la planificación se deben establecer las unidades de medida en la recogida de la información y la sustitución de un producto por otro que se considere equivalente. Se deben prevenir determinadas situaciones que pueden dar lugar a falta de respuesta u omisión, es decir, dar instrucciones para optimizar la recogida de datos.

El alumnado dividido en grupos de dos o tres, recogerá los datos en un plazo determinado; en nuestro caso se fijó en una semana, pues consideramos que era suficiente teniendo en cuenta la forma de recogida de los datos y el perfil del proyecto.

En esta fase los alumnos aprenderán el significado de la ausencia de un dato y cómo tratarlo, y tomarán decisiones sobre si se puede sustituir un producto por otro equivalente o no.

3.1. Vaciado de datos

Una vez obtenidos los precios debemos construir las tablas adecuadas para analizarlos.

Es de uso común en las aulas, realizar ejercicios de recuento de datos, de cálculo de parámetros, etc, con lápiz y papel, y a lo sumo, ayudarse con una calculadora. Esta forma de proceder puede ser útil para ejercicios de repetición con pocos datos, pero el trabajo estadístico real utiliza la tecnología adecuada para poder manejar gran cantidad de datos y no cometer errores en los cálculos.

En nuestro caso es evidente que se hace imprescindible el uso de las tecnologías de la información, bien de una hoja de cálculo o el uso de otros programas específicos de estadística. Nosotros usamos la hoja de cálculo; en ella los diferentes grupos grabaron los datos en una hoja cuyas columnas se usaron para los precios de los productos, separados por bloques, obtenidos en cada una de las tiendas del municipio.

La estructura es similar a la siguiente, más resumida.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Tienda 5	Tienda 6	Tienda 7
2	Pan							
3	Cereales							
4	Jamón							
5	Salami							
6	Carne							
7	Atún envasado							
8	Sardina envasadas							
9	Leche							
10	Yogur							
11	Huevos							
12	Queso							
13	Aceite de oliva							
14	Aceite de girasol							
15	Pera							
16	Manzana							
17	Garbanzos							
18	Lechuga							
19								

En esta fase los alumnos pudieron comprobar que, a pesar de las indicaciones previas para evitarlo, se cometieron errores en la toma de datos y éstos debían ser eliminados con lo que, de los 357 datos previstos inicialmente (51 productos x 7 tiendas), fueron válidos solamente 277.

Respecto a la dinámica de grupo, todos aprendimos la necesidad de nombrar a un alumno responsable de la base de datos, tras comprobar que algunos datos no se grabaron bien, o que al grabar borraban los de los compañeros. Así, para evitar estos conflictos, el alumno nombrado fue el encargado de unificar en una sóla hoja de cálculo los datos de sus compañeros y poder continuar con el proyecto.

3.2. Análisis de los datos

Normalmente, cuando disponemos de una colección de datos, calculamos los parámetros de centralización y dispersión y eso fue lo que hicieron: calcularon cuál era el precio medio de una cesta de la compra en nuestro municipio, cuál era la variación del precio según la tienda donde realizaban la compra. Compararon además los productos por bloques, buscando si había más o menos diferencia de precios en algún bloque.

Pero aún con este conjunto de medidas estadísticas no podían responder a los objetivos inicialmente planteados al inicio del proyecto: comparar la cesta de la compra con la del resto de la comunidad autónoma. Para poder realizar la comparación se necesita un índice ya calculado por el organismo oficial y cuya fórmula no es pública.

Les facilité la información de que el índice de referencia era 100 y que, una posible opción, era pasar las cantidades a porcentajes. Pero además se les planteó la duda de que en su casa no gastan la misma cantidad de cada producto de los encuestados. Así, por ejemplo, decían que compraban 1 pan diario pero 1 lata de aceite de 5 litros al mes, por tanto, una tarea inicial consistió en establecer una ponderación a cada producto. Esta ponderación se fijó dándole a cada producto el número estimado por ellos de la cantidad de dicho producto que era necesario comprar al mes y por persona expresado en porcentajes. Lo más importante de este paso es que se dieron cuenta que, para hacer una correcta estimación, deberían llevar a cabo una encuesta previa de consumo de las familias respecto a la cantidad y los productos que consumían y que consideren necesarios en su cesta de la compra. Finalmente, para calcular el índice una vez ponderados todos los productos, calcularon la media aritmética de los resultados de cada tienda obteniendo una índice con el que poder comparar su cesta de la compra y ubicar su resultado dentro de la estadística oficial.

4. Conclusiones de la experiencia

Este primer proyecto llevado a cabo con alumnado de 15 a 16 años, marcó mi posterior labor docente, pues, aunque pareciera que estamos entrenando estadísticos aficionados, la realidad es totalmente opuesta. Cada una de las fases, como se puede comprobar por la descripción, estuvo marcada por momentos en los que hubo que afrontar dificultades, aprender de errores, valorar el trabajo del grupo y, por supuesto, de los profesionales. Tuvieron que superar también dificultades de cálculo pues hasta llegaron a construir su propia fórmula y no emplear una que ya les daba la profesora.

Pero además de las competencias estrictamente matemáticas, hubo que superar y resolver algunas situaciones de conflicto en el grupo porque, por ejemplo, si un compañero no realizara su tarea en el tiempo establecido, dejaba al resto sin poder continuar, o la falta de atención en la recogida de datos, etc., Por tanto se desarrollaron otras competencias en todos estos momentos de aprendizaje.

Les animo a realizar alguna actividad similar. Basta con elegir un tema de los disponibles en la web en la que se muestren las estadísticas oficiales del país o la localidad.

Antonia R. Gil Armas. Profesora de Matemáticas de Enseñanza Secundaria. Firgas. Las Palmas, Canarias, España. agilarm@telefonica.net

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 183-184
ISSN: 1815-0640

MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

Estadística en acción.

Qué es y para qué sirve la estadística a través de casos prácticos basados en proyectos final de carreras.

Editado por Pere Grima Cintas.

Monografías FME. 2008.

Facultat de Matemàtiques i Estadística.

Universitat Politècnica de Catalunya.

ISBN 9788476532249

Es un libro muy interesante y útil a la hora de enseñar estadística, en el mismo se presentan dieciséis casos trabajados en proyectos de final de carrera, los que dan una visión general de aplicaciones de estadística. Las carreras corresponden a las titulaciones de estadística en la Facultad de Matemáticas y Estadística de la UPC, Diplomatura, Licenciatura y Máster.

Es importante destacar que en la presentación, el editor, que tuvimos el honor que sea la firma invitada de este número, menciona que se procuró que el lenguaje utilizado sea lo menos técnico posible, con el fin de que pueda llegar a la mayoría posible de lectores.

El libro se encuentra dividido en seis capítulos, en cada uno de ellos se agrupan los casos de estadística tratados de acuerdo a la temática que conllevan, a continuación se mencionan los mismos y los casos que conforman cada uno de ellos, con la finalidad de mostrar distintas aplicaciones, siempre teniendo en cuenta cuál será la más acertada para el grupo de estudiantes, atendiendo a las edades y a los intereses de ellos.

- **Estudio de la literatura, la música y la pintura.**

  - Análisis estadístico del estilo literario. Discusión sobre la autoría de *Tirant lo Blanc*.

  - Análisis estadístico de datos musicales: Estudio interpretativo de la obra "Träumerei".

  - Aplicación de técnicas estadísticas al estudio del arte pictórico de los siglos XV al XIX.

- **Conocimiento y protección del medio ambiente**

  - Influencia de las condiciones climáticas en el crecimiento del pino silvestre en Cataluña.

  - Buscando productos más limpios y eficaces para luchar contra las plagas de los árboles frutales.

- **Estudios de mercado.**

  - El diseño emocional: cómo crear productos que sean atractivos (y un ejemplo sobre zumos de frutas)

  - Formación de precios en el mercado eléctrico: mejores estrategias para compradores y vendedores.

  - Estudio de mercado para definir las características de una nueva variedad de galletas de chocolate.

- **Mejora de calidad.**

  - Reducción del número de defectos en el proceso de fabricación de un componente de automóvil.

- **Nuevos medicamentos y mejora del sistema sanitario.**

  - Análisis de la eficacia de un nuevo fármaco contra el SIDA

  - Comportamiento de la demanda de urgencias hospitalarias y factores metereológicos asociados.

  - Análisis de la mortalidad por tumores malignos de mama y de estómago en Cataluña.

  - Expectativas de complicaciones postoperatorias en función de caracterísitcias del paciente

- **Prensa y televisión.**

  - Análisis de patrones y tendencias en las votaciones del festival de Eurovisión.

  - La estadística en la prensa. Estudio crítico.

  - Previsión de la duración de las etapas de la Vuelta Ciclista a España.

Ahora el desafío le queda a los lectores, que seguramente lo emplearán en sus futuras prácticas docentes, pues el mostrar las aplicaciones de estadística es fundamental.

Equipo editorial.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 185-187
ISSN: 1815-0640

M@temátic@s en l@ red

MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

Grupo de Investigación sobre Educación Estadística. Universidad de Granada

En esta reseña los invitamos a conocer, si es que aún no lo conocen, el portal de la Universidad de Granada sobre Educación Estadística, que coordina la Dra. Carmen Batanero, la dirección del mismo es: www.ugr.es/~batanero. A continuación se muestra su presentación:

Como se puede ver en la parte central de la imagen anterior, esta página es llevada adelante por un grupo de destacados docentes, reconocidos a nivel mundial, que realizan investigaciones sobre la educación estadística, además de la coordinadora son miembros de este grupo: Pedro Arteaga, Gustavo Cañadas, Belén

Cobo, J. Miguel Contreras, Carmen Díaz, Juan D. Godino, Assumpta Estrada, Juan Jesús Ortiz, Rafael Roa, Luis Serrano y Miguel R. Wilhelmii. También cuentan con colaboradores, los que se mencionan a continuación: Hugo Alvarado, Margherita Gonzato, Silvia Mayén, Nordin Mohamed, Eusebio Olivo, Cuauhtémoc Pérez, J. Diego Rodríguez, Blanca Ruiz y Osmar Vera.

En la parte izquierda encontramos la barra principal de la página, de los links de la misma daremos una breve y sucinta explicación:

- **Inicio**

Es la página de presentación, desde ella se puede acceder a varios Links directos, uno de ellos nos lleva a la Universidad de Granada, otro al departamento de Didáctica de la Matemática de dicha universidad y también a un sitio denominado estadísticasgratis.com, que es un contador de estadística gratis, que además permite analizar en detalle las estadísticas de tu página web.

También se encuentra en la parte inferior derecha un recuadro en el que se puede leer Líneas de Investigación, haciendo click en él se hace referencia a la conformación del grupo, se puede leer textualmente: "*Desde el año 1991 se viene trabajando dentro de un Grupo de Investigación reconocido y financiado por la Junta de Andalucía con el nombre Teoría y métodos de investigación en Educación Matemática, que cambió en el año 2000 al de Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística*", además en esta sección se encuentran los principales temas de investigación abordados, los contenidos matemáticos analizados y las Tesis Doctorales elaborados en el seno del grupo, como así también los Proyectos Financiados Nacionales y Europeos.

- **Publicaciones en el servidor**

En este apartado se puede leer textualmente:

"*A lo largo de los últimos años hemos trabajado en los diferentes aspectos que configuran la didáctica de la probabilidad y la estadística (concepciones y razonamientos de los alumnos; análisis epistemológico, materiales y recursos para el aula). También hemos realizado algunos trabajos teóricos, metodológicos y relacionados con la formación de profesores. Hemos seleccionado, de entre estos trabajos, aquellos que pensamos podrían tener mayor interés para compartirlas con otros profesores e investigadores. Desde esta página se puede acceder a la lista de publicaciones disponibles en el servidor que pueden ser utilizadas o distribuidas a otras personas, siempre que se cite la fuente*".

A partir de este link se tiene acceso a publicaciones sobre Didáctica de la Probabilidad y sobre Didáctica de la Estadística, libros, trabajos de tesis doctorales y proyectos realizados por los miembros y colaboradores del grupo de investigación.

Cabe destacar la importancia que tiene el hecho de acceder a este material en forma gratuita, ya sea para enriquecer las prácticas de los docentes como para conocer los últimos resultados referidos a la investigación de la educación estadística en los distintos niveles educativos.

- **Teoría de la educación matemática**

La siguiente es la estructura de este enlace:

Se pueden encontrar, como lo muestra la imagen capturada, referencia a la Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática, al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática y los fundamentos teóricos correspondientes.

También se encuentra en este link información sobre la Formación de Profesores y el Curso de Doctorado dependiente del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, siendo el Profesor del mismo el Dr. Juan Godino.

- **Enlaces**

Existen enlaces directos a centros, asociaciones, journals, futuros congresos y a los ya realizados que cuenten con actas en Internet referidos a estadística.

También desde este link se puede acceder de forma directa a distintas páginas de Internet que cuentan con tutoriales, artículos, distintos recursos y contenidos estadísticos de varios países.

- **English**

Se encuentran en este link distintos libros y publicaciones de los integrantes del grupo de investigación en inglés.

- **Novedades**

Se encuentran los trabajos del grupo que fueron recientemente incorporados al servidor.

Llegando al final de esta reseña, dejamos abierto al lector la posibilidad de visitar la página para así experimentar por si mismo las diferentes secciones mencionadas que son actualizadas de manera continua, con la certeza que su visita será muy grata y también muy útil.

Equipo Editor.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 189-197
ISSN: 1815-0640

Información

Las escuelas de Paraguay o una realidad espléndida

- **Con la asistencia de 250 niños y niñas, padres y madres, dos ministros…**
- **Emoción por todo lo alto: un proyecto cumplido**

Fue, en palabras del presidente de la Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz*, la *tercera victoria después de la gran derrota*. Efectivamente, en un acto cargado de emoción, ilusión y esperanza en un futuro mejor, las escuelas de Paraguay, en su capital Asunción, quedaron inauguradas en la brillante mañana del 10 de septiembre de 2010.

Un momento para la pequeña historia de la Fundación y que rebasó todos los vaticinios no solo por la gran cantidad de niños y niñas, en un número superior a los 250, sino por la asistencia de padres, madres, dos ministros del Gobierno de la República (el de Educación y Cultura y la de la Niñez y de la Adolescencia), el representante de la embajada de España y co-director de la Oficina Técnica de Cooperación Antonio Gómez Iruela, el representante del municipio, el director y profesores, el presidente de la Fundación, Salvador Pérez, y su esposa Aurora, que se sufragaron los gastos del viaje de forma personal y privada y el vicepresidente, Luis Balbuena, que se aprovechó su traslado a Paraguay para asistir a una sesión presencial del Curso *Ñandutí* de formación del profesorado de Matemáticas en Secundaria y la participación posterior en un Congreso sobre Educación celebrado en Buenos Aires. Se contó, además, con una gran cantidad de un público atento, expectante e ilusionado ante el camino nuevo que se abre para el futuro.

Aula

El asentamiento de Cerro Poty se halla ubicado en la zona de Bañado Sur de Asunción desde hace 12 años, colindante con el Cerro Lambaré y a poca distancia de la ribera del río Paraguay y del vertedero de residuos de la capital. La comunidad es la de la Escuela Indígena Nº 5934 de la parcialidad Mbyá y Avá guaraní y cuenta con instalaciones precarias de agua y luz y a 700 metros de la Avenida Perón, con una entrada con pésimo camino de tierra que se arregla, en la actualidad, con una capa de cemento. Toda la zona es baja y se inunda en días de lluvia y en épocas de crecida del río Paraguay.

La fundación aportó 12.300 euros

Las escuelas fueron construidas con las aportaciones de la Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz* y en un hecho más del trabajo realizado en su corta vida (constituida el 24 de febrero de 2006) y que, partiendo de la tragedia (la muerte, en accidente de tráfico, de los dos únicos hijos de los profesores canarios Salvador Pérez y Aurora Estévez, de 27 y 25 años), lleva un amplio camino de solidaridad y de ayuda a los demás con una innumerable relación de colaboraciones en América y en las islas.

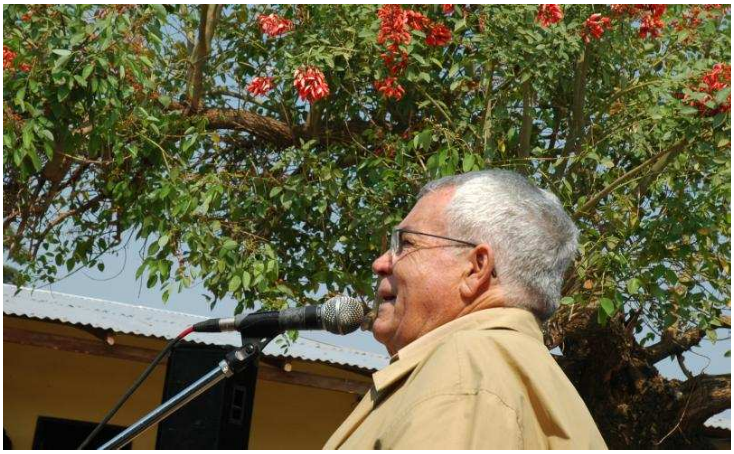
El presupuesto fue de 12.300 euros (cerca de 83 millones de guaraníes) aportados por la Fundación y que contó, igualmente, con fondos del Colegio Público *Princesa Tejina* del municipio de La Laguna, en Canarias, y que a través de su directora, Isabel Teresa Gómez Gutiérrez, ha contado con la colaboración del profesorado, alumnado y padres para trabajar en la organización de actos en busca de conseguir dinero para la construcción de los servicios higiénicos. Además en el acto fueron entregados 400 euros en material escolar nuevo llevados al país en las maletas de Salvador, Aurora y Luis.

Alumna

Las nuevas escuelas no solo han servido para dar respuesta a una gran necesidad educativa, sino que el Ministerio ha arreglado, pintado y adecentado las escuelas antiguas al tiempo que ha mejorado la vía de acceso al lugar, ubicado en las afueras de Asunción, y donde dos mundos parecen darse la mano pero no tocarse. A los moradores de ese lugar les llegó el buen regalo de unas excelentes instalaciones, con mucha luz, escaleras de acceso, comedor y cocina, galerías de circulación y servicios higiénicos, además del confort térmico de las aulas utilizando madera como aislamiento térmico.

Fue un día de fiesta, con banderas y gran ambiente y que comenzó con la llegada de los dos ministros del Gobierno. En primer lugar se cantó el himno nacional al tiempo que se izaba la bandera. Un momento de enorme respeto. Comenzó hablando el director del colegio, Mario F. González Casco, que en palabras sencillas mostró su agradecimiento y recalcó la importancia de la asistencia a clase. Una alumna leyó unas palabras de bienvenida lo mismo que el cacique de la comunidad indígena, Silverio.

El vicepresidente de la Fundación y hombre clave en el éxito logrado, agradeció el apoyo recibido por tantas personas e instituciones y leyó un escrito enviado por la directora del Colegio *Princesa Tejina* de La Laguna. A continuación el presidente de la Fundación, Salvador Pérez, tuvo una vibrante intervención – muy en su estilo, como dijo posteriormente Luis Balbuena- donde dejando a un lado los tres folios que llevaba escritos dijo que esta "es la tercera victoria después de *la gran derrota* pues las otras fueron la edición de los tres libros póstumos de su hijo Carlos Salvador y la presentación de la Fundación". Y añadió: "A pesar de la vida en contra, aquí estamos. Es la vida al revés pero, así y todo, no nos hemos encerrado en la concha de la soledad, en el caparazón de un casi justificado egoísmo, sino que sacando fuerzas de flaqueza hemos salido cara a cara contra la vida, poniendo cuerpo y alma, a trabajar codo con codo con los demás para hacer mejores a los otros y crear así un mundo más justo y más solidario.



Salvador Pérez, Presidente de la Fundación

¿De dónde nos viene esa fuerza que tantos dicen admirar? Viene del recuerdo de nuestros hijos, Carlos Salvador y Beatriz, que nos siguen dando fuerzas para hacer lo imposible: vivir. No queremos comernos ningún mundo pero tampoco ser flor de un día. Hacer lo poco que podamos. Y lo vamos consiguiendo con ayuda de mucha gente solidaria porque sumar es mejor que restar, multiplicar mejor que dividir y aceptar mejor que negar. El lema de nuestra Fundación, con el apoyo de sus socios, es *contigo la utopía es posible: sumar para multiplicar*". Y no faltaron los reconocimientos a los dos ministros paraguayos, a la OEI (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura) en la persona de su director en Paraguay, Luis Scasso, al municipio y especialmente al vicepresidente de la Fundación, Luis Balbuena, por su generosa actividad, por su capacidad de ilusionar y por su sentido altruista de la vida. Y terminó con dos frases: una, de Carlos Salvador, en uno de sus libros donde escribe “Hoy es mi día más importante” y otra de Fernando Pessoa y lema en la existencia de Salvador y que dice: “Pon todo lo que eres en lo mínimo que hagas”.

Palabras de la OEI y de dos ministros

Al terminar el ministro le pidió a Salvador que repitiera la frase para apuntarla. Seguidamente el director de la OEI en Paraguay, Luis María Scasso, agradeció a todo el equipo el trabajo realizado y se congratuló del éxito conseguido a pesar de dificultades con la titularidad de los terrenos.

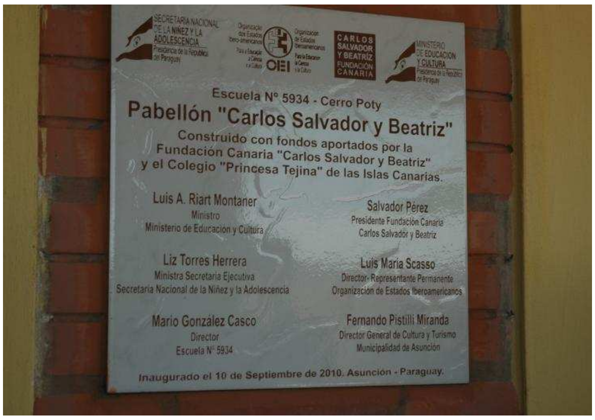
La ministra de la Niñez y de la Adolescencia, Liz Cristina Torres Herrera, habló en guaraní y con traducción al español, del impacto positivo que significa proyectos de esta categoría al satisfacer un programa nuevo en las escuelas y el crear un sentimiento de unidad y compromiso en la comunidad.

Cerraron el acto las palabras del ministro de Educación y Cultura, Luis Alberto Riart, que agradeció el gran apoyo de la Fundación y la OEI y precisó que habrá titularidad pública del MEC en los terrenos que ahora son del municipio. Indicó que se tiene el proyecto de ir a la enseñanza media en el futuro.

Se entregaron placas de reconocimiento al ingeniero, Miguel Otazú, coordinador de Infraestructuras del ministerio de Educación y Cultura y a Fernando Pistilli Miranda, Director General de Cultura y Turismo de la ciudad de Asunción que hizo entrega a Salvador Pérez, como presidente de la Fundación, del pergamino donde era nombrado *Visitante Ilustre* de la capital paraguaya.

Celebración

La emoción se desbordó cuando se desataron las cintas que permitían el paso a las aulas y se descubrió la placa que da nombre a las instalaciones: *Pabellón Carlos Salvador y Beatriz*. Tanto Salvador como Aurora no pudieron contenerse trasmitiendo su estado de emoción a los presentes en un acto de afirmación de una entidad canaria con paso firme en su futuro pues hay que señalar que ya llevan más de 50 ayudas de material escolar a centros de cuatro países (Perú, Bolivia, Paraguay y Argentina), mil euros para comprar frazadas en el reciente invierno argentino de la provincia de Tucumán, ayudas a una asociación de canarios en Cuba, publicación de libros y revistas, premios y otras continuas actividades.



Hay mucha más información en la página web:

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

¡¡Aquí les esperamos!!

As escolas de Paraguai ou uma realidade espléndida

- **Com a assistência de 250 meninos e meninas, pais e mães, dois ministros …**
- **Emoção por todo o alto: um projecto cumprido**

Foi, em palavras do presidente da Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz, a terceira vitória após a grande derrota. Efectivamente, num acto carregado de emoção, ilusão e esperança num futuro melhor, as escolas de Paraguai, em sua capital Assunção, ficaram inauguradas na brilhante manhã do 10 de setembro de 2010.

Um momento para a pequena história da Fundação e que rebasó todos os vaticinios não só pela grande quantidade de meninos e meninas, num número superior aos 250, senão pela assistência de pais, mães, dois ministros do Governo da República (o de Educação e Cultura e a da Niñez e da Adolescencia), o representante da embaixada de Espanha e co-director do Escritório Técnico de Cooperação Antonio Gómez Iruela, o representante do município, o director e professores, o presidente da Fundação, Salvador Pérez, e sua esposa Aurora, que se sufragaron os gastos da viagem de forma pessoal e privada e o vice-presidente, Luis Balbuena, que se aproveitou seu translado a Paraguai para assistir a uma sessão presencial do Curso *Ñandutí* de formação do profesorado de Matemáticas em Secundária e a participação posterior num Congresso sobre Educação celebrado em Buenos Aires. Contou-se, ademais, com uma grande quantidade de um público atento, expectante e ilusionado ante o caminho novo que se abre para o futuro.

Aula

O assentamento de Cerro Poty acha-se localizado na zona de Bañado Sur de Assunção desde faz 12 anos, colindante com o Cerro Lambaré e a pouca distância da ribera do rio Paraguai e do vertedero de residuos da capital. A comunidade é a da Escola Indígena Nº 5934 da parcialidad Mbyá e Avá guaraní e conta com instalações precárias de água e luz e a 700 metros da Avenida Perón, com uma entrada com péssimo caminho de terra que se arranja, na actualidade, com uma capa de cemento. Toda a zona é baixa e se inunda em dias de chuva e em épocas de crescida do rio Paraguai.

A fundação contribuiu 12.300 euros

As escolas foram construídas com as contribuições da Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz e num facto mais do trabalho realizado em sua curta vida (constituída o 24 de fevereiro de 2006) e que, partindo da tragédia (a morte, em acidente de tráfico, dos dois únicos filhos dos professores canarios Salvador Pérez e Aurora Estévez, de 27 e 25 anos), leva um amplo caminho de solidariedade e de ajuda aos demais com uma inumerável relação de colaborações em América e nas ilhas.

O orçamento foi de 12.300 euros (cerca de 83 milhões de guaraníes) contribuídos pela Fundação e que contou, igualmente, com fundos do Colégio Público Princesa Tejina do município da Laguna, em Canárias, e que através de sua directora, Isabel Teresa Gómez Gutiérrez, contou com a colaboração do profesorado, alumnado e pais para trabalhar na organização de actos em procura de conseguir dinheiro para a construção dos serviços higiénicos. Ademais no acto foram entregados 400 euros em material escolar novo levados ao país nas malas de Salvador, Aurora y Luis.

Aluna

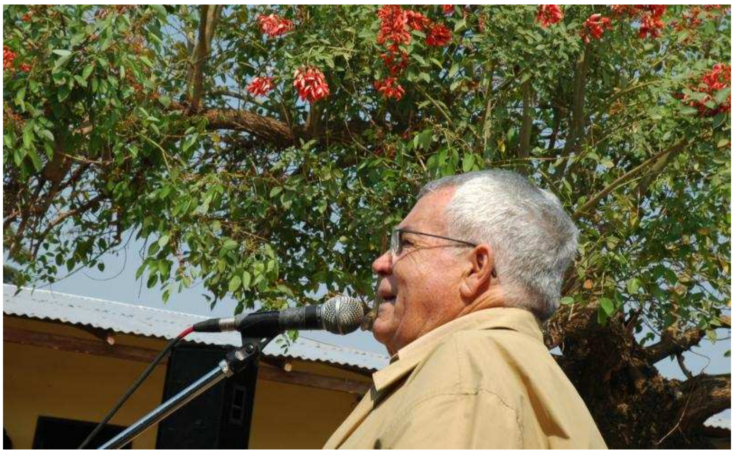
As novas escolas não só serviram para dar resposta a uma grande necessidade educativa, senão que o Ministério arranjou, pintado e adecentado as escolas antigas ao mesmo tempo em que melhorou a via de acesso ao lugar, localizado nas afueras de Assunção, e onde dois mundos parecem se dar a mão mas não se tocar. Aos moradores desse lugar chegou-lhes o bom presente de umas excelentes instalações, com muita luz, escadas de acesso, comedor e cocina, galerías de circulação e serviços higiénicos, além do confort térmico das aulas utilizando madeira como isolamento térmico.

Foi um dia de festa, com bandeiras e grande ambiente e que começou com a chegada dos dois ministros do Governo. Em primeiro lugar cantou-se o hino nacional ao mesmo tempo em que se izaba a bandeira. Um momento de enorme respeito. Começou falando o director do colégio, Mario F. González Capacete, que em palavras singelas mostrou sua agradecimiento e recalcó a importância da assistência a classe. Uma aluna leu umas palavras de bem-vinda o mesmo que o cacique da comunidade indígena, Silverio.

O vice-presidente da Fundação e homem finque no sucesso conseguido, agradeceu o apoio recebido por tantas pessoas e instituições e leu um escrito enviado pela directora do Colégio Princesa Tejina da Laguna. A seguir o presidente da Fundação, Salvador Pérez, teve uma vibrante intervenção – muito em seu estilo, como disse posteriormente Luis Balbuena- onde deixando a um lado os três folios que levava escritos disse que esta “é a terceira vitória após a grande derrota pois as outras foram a edição dos três livros póstumos de seu filho Carlos Salvador e a apresentação da Fundação”. E acrescentou: “Apesar da vida na contramão, aqui estamos.

É a vida ao revés mas, assim e tudo, não nos encerrámos na concha da solidão, no caparazón de um quase justificado egoísmo, senão que sacando forças de fraqueza saímos cara a cara contra a vida, pondo corpo e alma, a trabalhar lado a lado com os demais para fazer melhores aos outros e criar assim um mundo mais justo e mais solidario.

¿De onde nos vem essa força que tantos dizem admirar? Vem da lembrança de nossos filhos, Carlos Salvador e Beatriz, que nos seguem dando forças para fazer o impossível: viver. Não queremos nos comer nenhum mundo mas também não ser flor de um dia. Fazer o pouco que possamos.



Salvador Pérez, Presidente da Fundação

E vamo-lo conseguindo com ajuda de muita gente solidaria porque somar é melhor que restar, multiplicar melhor que dividir e aceitar melhor que negar. O lema de nossa Fundação, com o apoio de seus sócios, é contigo a utopia é possível: somar para multiplicar". E não faltaram os reconhecimentos aos dois ministros paraguaios, à OEI (Organização de Estados Iberoamericanos para a Educação, a Ciência e a Cultura) na pessoa de seu director em Paraguai, Luis Scasso, ao município e especialmente ao vice-presidente da Fundação, Luis Balbuena, por sua generosa actividade, por sua capacidade de ilusionar e por seu sentido altruísta da vida. E terminou com duas frases: uma, de Carlos Salvador, num de seus livros onde escreve "Hoje é meu dia mais importante" e outra de Fernando Pessoa e lema na existência de Salvador e que diz: "Põe todo o que és no mínimo que faças".

Palavras da OEI e de dois ministros

Ao terminar o ministro pediu-lhe a Salvador que repetisse a frase para a apontar. Seguidamente o director da OEI em Paraguai, Luis María Scasso, agradeceu a toda a equipa o trabalho realizado e se congratuló do sucesso conseguido apesar de dificuldades com a titularidad dos terrenos.

A ministra da Niñez e da Adolescencia, Liz Cristina Torres Herrera, falou em guaraní e com tradução ao espanhol, do impacto positivo que significa projectos desta categoria ao satisfazer um programa novo nas escolas e o criar um sentimento de unidade e compromisso na comunidade.

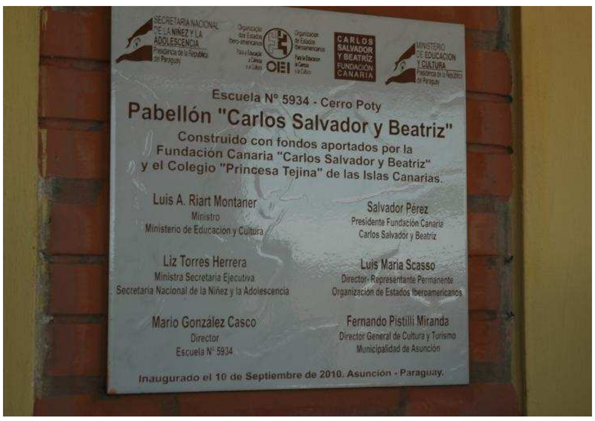
Fecharam o acto as palavras do ministro de Educação e Cultura, Luis Alberto Riart, que agradeceu o grande apoio da Fundação e a OEI e precisou que terá titularidad pública do MEC nos terrenos que agora são do município. Indicou que se tem o projecto de ir ao ensino médio no futuro.

Entregaram-se placas de reconhecimento ao engenheiro, Miguel Otazú, coordenador de Infra-estruturas do ministério de Educação e Cultura e a Fernando

Pistilli Miranda, Director Geral de Cultura e Turismo da cidade de Assunção que fez entrega a Salvador Pérez, como presidente da Fundação, do pergamino onde era nomeado *Visitante Ilustre da capital paraguaia*.

Celebração

A emoção se desbordó quando se desataram as fitas que permitiam o passo às aulas e se descobriu a placa que dá nome às instalações: Pavilhão Carlos Salvador e Beatriz. Tanto Salvador como Aurora não puderam se conter transmitindo seu estado de emoção aos presentes num acto de afirmação de uma entidade canaria com passo firme em seu futuro pois há que assinalar que já levam mais de 50 ajudas de material escolar a centros de quatro países (Peru, Bolívia, Paraguai e Argentina), mil euros para comprar frazadas no recente inverno argentino da província de Tucumán, ajudas a uma associação de canarios em Cuba, publicação de livros e revistas, prêmios e outras contínuas actividades.



Há muita mais informação na página site:

www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

¡¡ Aqui esperamos-lhes!!

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 199-200
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2011

II Evento Internacional la Matemática, la Informática y la Física en el siglo XXI FIMAT XXI

Lugar: Holguín. Cuba.
Organizan: Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la Luz y Caballero" y la Sociedad Cubana de Matemática y Computación
Fecha: 15 al 17 de junio de 2011.
Información: **fimat@ucp.ho.rimed.cu**

XIII CIAEM: XIII Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática
Lugar: Recife. Brasil
Convoca: Comité Interamericano de Educación Matemática.
Fecha: 26 al 29 de junio de 2011
Información: **http://www.ce.ufpe.br/ciaem2011**

15 JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.
Convoca: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática.
Lugar: Gijón. España.
Fecha: 3 al 6 de julio de 2011.
Información: **http://www.15jaem.org**

XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Convoca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Organiza: Universidad Castilla la Mancha.
Lugar: Ciudad Real Castilla la Mancha, España.
Fecha: 7 al 11 de octubre de 2011
Información: **www.seiem.es**

Conferencia de GeoGebra-Latin America 2010. Brasil

Lugar: San Pablo. Brasil
Fecha: 12 al 15 de noviembre de 2011.
Información: **http://www.geogebra.org/cms/en/events**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, página 201-202
ISSN: 1815-0640

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org con copia a revistaunion@gmail.com. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.

2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 20 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “Arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.

3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…

4. El artículo deberá comenzar con un **resumen(español) o resumo(portugués) y abstract (inglés)**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas.

5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.

6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos personales** en esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas
   - Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Editorial Alianza, Madrid. España.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires. Argentina.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). *La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria*. Educación Matemática 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). *Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma*. Revista de didáctica de las matemáticas 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991).Research on mathematical proof. En: Tall, D. (ed.), Advanced Mathematical Thinking, 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

García Cruz, J. (2008*). Génesis histórica y enseñanza de las matemáticas*. UNIÓN Nº14 [en línea]. Recuperado el 20 de marzo de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=320

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 6 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com