UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 21 – Marzo de 2010

# Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 3-4
ISSN: 1815-0640

**Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática** es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*****.**

## Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García Gonzalez
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

## Diseño y maquetación

**Diseño web**: Daniel García Asensio
**Textos**: Vilma Giudice
**Logotipo de Unión**: Eudaldo Lorenzo
**webmaster**: Elda Beatriz Micheli

## Colabora

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 5-6
ISSN: 1815-0640

# Editorial

*"Investigar no resulta de conocer y aplicar técnicas de recolección de datos, sean cuestionarios o entrevistas. Por el contrario, presupone sobre todo uma actitud, voluntad de percibir, capacidad para interrogar, disponibilidad para ver las cosas de otro modo y para poner en duda aquello que parecía correcto"*

João Pedro da Ponte

Estimados colegas y amigos.

Un nuevo año nos convoca para aunar esfuerzos y creatividad en el trabajo conjunto de todos los que formamos parte de esta comunidad Iberoamericana .

En este número han presentado artículos, docentes e investigadores de varios países, lo que permite el análisis desde distintos contextos socioculturales con orientaciones diferentes sobre la enseñanza y el aprendizaje de temáticas comunes.

Para los distintos niveles educativos, se incluyen propuestas didácticas excelentes con apoyo de materiales concretos y recursos provenientes de la historia de matemática, el arte, la literatura y la informática. Seguramente serán probados y además enriquecidos con experiencias personales.

Los colaboradores de las Secciones fijas nos brindan, como siempre, interesantes sugerencias sobre resolución de problemas y aplicaciones de software específico.

Queremos agradecer el valioso apoyo económico que durante este año nos continúa otorgando la **Fundación Canaria: Carlos Salvador y Beatriz,** para que esta publicación pueda seguir difundiendo los avances en Educación Matemática

En esta oportunidad, felicitamos a **La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES,** por ser merecedora de la medalla de oro que le otorga la **Junta de Andalucía**, en reconocimiento por su labor en beneficio de la Enseñanza de la Matemática desde su creación. Fue recibida por su actual presidente Manuel Torralbo Rodríguez, en un acto celebrado en Sevilla.

Finalmente la carta enviada por Agustín Carrillo, futuro Secretario de FISEM nos llena de emoción por el entusiasmo y compromiso que trasmite en sus palabras y por las propuestas variadas que estamos seguras logrará. Es ciertamente un reto reemplazar a Luis Balbuena, pero estamos convencidas que tienes las condiciones necesarias y suficientes para continuar su obra. Con afecto te deseamos ÉXITO en tu nueva función!!

Un fuerte abrazo

**Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich**
**Directoras**

# Editorial

*"Investigar não resulta de se conhecer e aplicar umas tantas técnicas de recolha de dados, sejam questionários ou entrevistas, e de fazer uma análise estatística ou de conteúdo. Pelo contrário, pressupõe sobretudo uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo"*

João Pedro da Ponte

Estimados colegas e amigos.

Num novo ano convoca-nos para aunar esforços e criatividade no trabalho conjunto de todos os que fazemos parte desta comunidade Iberoamericana.

Neste número apresentaram artigos, docentes e pesquisadores de vários países, o que permite a análise desde diferentes contextos socioculturais com orientações diferentes sobre o ensino e a aprendizagem de temáticas comuns.

Para os diferentes níveis educativos, incluem-se propostas didácticas excelentes com apoio de materiais concretos e recursos provenientes da história de matemática, a arte, a literatura e a informática. Seguramente serão provados e enriquecidos com experiências pessoais.

Os colaboradores das Secções fixas brindam-nos, como sempre, interessantes sugestões sobre resolução de problemas e aplicações de software específico.

Queremos agradecer o valioso apoio económico que durante este ano nos continua outorgando a **Fundação Canaria: Carlos Salvador e Beatriz**, para que esta publicação possa seguir difundindo os avanços em Educação Matemática.

Nesta oportunidade, felicitamos à **Sociedade Andaluza de Educação Matemática THALES**, por ser merecedora da medalha de ouro que lhe outorga a **Junta de Andaluzia**, em reconhecimento por seu labor em benefício do Ensino da Matemática desde sua criação. Foi recebida por seu actual presidente Manuel Torralbo Rodríguez, num acto celebrado em Sevilla.

Finalmente a carta enviada por Agustín Carrillo, futuro Secretário de FISEM enche-nos de emoção pelo entusiasmo e compromisso que transmite em suas palavras e as propostas variadas que estamos seguras conseguirá. É certamente um repto substituir a Luis Balbuena, mas estamos convencidas que tens as condições necessárias e suficientes para continuar sua obra. Com afecto desejamos-te SUCESSO em tua nova função!!

Um forte abraço.

**Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich**
**Directoras**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 7-9
ISSN: 1815-0640

# Prosecretario = Un reto
# Sustituir al Secretario de la FISEM

**Agustín Carrillo de Albornoz Torres**

Antes de relatar los objetivos que en su día planteé a la Junta de Gobierno de la FISEM para que aprobaran mi nombramiento como prosecretario quisiera contar que he buscado el significado de esta palabra en el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española y no aparece.

Como además, en algunos casos hay dudas sobre si el nombre debe ser prosecretario, cosecretario o protosecretario, da igual, ningún término de los anteriores se encuentra en el diccionario.

La verdad es que el término puede dar igual, pero no la tarea asignada y sobre todo el reto que supone el nombramiento de prosecretario de la FISEM, nada más y nada menos que sustituir a Luis Balbuena Castellano, actual secretario de la FISEM.

Lo bueno del nombramiento es que hasta octubre de este año más que compartir tareas con Luis, podré aprender de su gestión durante todos estos años para intentar hacerlo lo mejor posible.

No resultará fácil afrontar este cambio, sobre todo considerando la personalidad de Luis y el trabajo que ha desarrollado durante todos estos años, desde la creación de la FISEM hasta su consolidación con la incorporación cada vez de más sociedades.

También, quiero destacar que cuento con alguna ventaja, como es que Luis como amigo me ayudará en todo lo que yo le demande y por tanto, esa es la tranquilidad que me queda y por supuesto, que espero contar con el apoyo de las distintas sociedades que componen la FISEM a las que agradezco su confianza al aprobar mi nombramiento para este novedoso cargo.

Mi propuesta de trabajo en este cargo y para cuando llegue el momento de asumir la secretaría, estará marcada por la continuidad de las actuaciones desarrolladas por Luis Balbuena.

Las líneas de actuación de este cargo y quizás también de toda la FISEM, están marcadas por las enormes distancias entre los países pertenecientes y los costes que supone cualquier actuación de tipo presencial, por lo que harán que Internet sea imprescindible en el desarrollo de las distintas tareas propuestas. La primera línea de actuación es evidente que será asumir las tareas asignadas al secretario de la FISEM y recogidas en su Estatuto en el artículo 21.

En cuanto a las tareas que en su día presenté a la Junta de Gobierno para desarrollar en caso de ser elegido como prosecretario se encuentran las siguientes:

## 1. Reconocimiento de la entidad jurídica de la FISEM.

Considero que esta debe ser una de las gestiones prioritarias en mi labor ya que sin una entidad jurídica reconocida no se podrá acceder a las distintas ayudas y subvenciones institucionales.

## 2. Actualización de la Web de la FISEM.

A partir del dominio adquirido para la FISEM se tendría que dotar de contenido la página Web, con información y materiales de interés para todas las sociedades y en especial para sus socios y socias.

En muchos casos y dado que cada vez se utiliza menos el correo postal, la Web y el correo electrónico constituyen las vías de comunicación de cada sociedad con sus asociados y por tanto, también debe serlo en la FISEM.

Para que una Web sea de interés y por tanto tenga numerosos accesos debe ser una Web dinámica, con información de utilidad y sobre todo actualizada, además de ofrecer otros servicios como enlaces de interés a otras Webs o con descarga de materiales, en nuestro caso educativos que sean de ayuda para la tarea diaria del profesorado y de los estudiantes.

Para ello, la Web debe contemplar, además del acceso a UNIÓN y del enlace a cada una de las sociedades federadas, las siguientes secciones:

- Eventos: información sobre cursos, congresos, jornadas, etc., organizadas por las distintas sociedades federadas y por otras entidades.
- Materiales propios: sección dedicada a compartir materiales y recursos didácticos elaborados por los asociados de las distintas sociedades federadas.
- Enlaces de interés: sección compuesta por una relación de enlaces a páginas de interés clasificadas por contenidos y por niveles educativos. En esta sección en cada momento aparecerá una Web recomendada por su interés y utilidad.
- Foro: dedicado al debate de temas de interés que se propondrán por las distintas sociedades.

### 3. Creación de listas de correo.

Internet será el soporte para el intercambio de información entre las distintas sociedades, por lo que toda la comunicación se realizará a través de correo electrónico.

Para facilitar la comunicación entre todas las sociedades se ha creado una lista de correo electrónico con todos los presidentes y presidentas de las distintas sociedades (o con las personas que en cada caso se designen).

Esta lista permitirá de manera fácil la comunicación entre todos a la hora de informar y también, a la hora de tomar decisiones que afecten al funcionamiento de la FISEM.

### 4. Plataforma de formación a distancia a través de Moodle.

Cada día es mayor la oferta y la demanda de formación a distancia, por lo que se crearía una plataforma de formación propia de la FISEM para compartir actividades de formación.

Esta plataforma se crearía a través de Moodle, se incluirán dos tipos de cursos:

a. Cursos abiertos ya impartidos en otras sociedades y cuyos materiales quedan abiertos para uso libre.
b. Curso de formación mediante inscripción: se realizaría una convocatoria de determinadas actividades de formación para todos los asociados de manera similar a las realizadas en otras sociedades de la FISEM.

### 5. Colaboración con UNIÓN.

La colaboración con UNIÓN se extenderá a cuantas peticiones realicen por parte de la dirección de la revista.

### 6. Colaboración con la organización del CIBEM.

Esta actividad es, sin duda, la más importante organizada por la FISEM, por lo que es necesario crear un protocolo de actuación para establecer normas de funcionamiento para proceder de manera común en cada una de las próximas convocatorias.

Y por supuesto, ofrezco mi trabajo y disponibilidad para cuantas tareas puedan demandarme por parte de las distintas sociedades federadas a las que espero no defraudar, sobre todo considerando el apoyo que han mostrado aceptando mi nombramiento como prosecretario.

**Agustín Carrillo de Albornoz Torres**
**IES Sierra Morena de Andújar (España)**
agustincarrillo@telefonica.net

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Marzo de 2010, Número 21, página 11
ISSN: 1815-0640

# João Pedro da Ponte

## Breve Reseña

É doutor em Educação Matemática pela Universidade da Georgia (EUA), sendo, presentemente, professor catedrático e Director do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Foi professor visitante em diversas universidades no Brasil, Espanha e Estados Unidos da América. Coordenou diversos projectos de investigação de Didáctica da Matemática, formação de professores e Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e dirigiu numerosas teses de mestrado e doutoramento.

A sua investigação actual é nas áreas do ensino da Álgebra e do conhecimento profissional, desenvolvimento profissional e formação dos professores.

Elaborou o relatório sobre a adequação da formação de professores ao processo de Bolonha que deu origem à legislação actual e coordenou a equipa que elaborou o novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Colabora com a APM desde a sua criação, sendo membro do GTI-Grupo de Trabalho de Investigação.

jponte@ie.ul.pt

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Marzo de 2010, Número 21, páginas 13-30
ISSN: 1815-0640
firma invitada

# Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem

**João Pedro da Ponte**

## Resumo

Investigar, ensinar e aprender são actividades que podem estar presentes, de forma articulada, no ensino-aprendizagem da Matemática e na actividade profissional do professor. Para isso, é necessário conceber tarefas que possam ser o ponto de partida para investigações e explorações matemáticas dos alunos e discutir o modo como podem ser trabalhadas na sala de aula. Recorrendo a exemplos de actividades realizadas por professores de Matemática portugueses, analiso a actividade de aprendizagem suscitada por tarefas deste tipo e discuto as respectivas potencialidades. Finalmente, refiro as condições respeitantes à cultura profissional dos professores que podem favorecer uma actividade de investigação sobre a sua própria profissional, com relevo para a colaboração e a dimensão associativa

## Abstract

Researching, teaching and learning are activities that may be present, in coordination, teaching and learning of mathematics in the work of the teacher. Therefore, it is necessary to design tasks that may be the starting point for mathematical investigations and explorations of the students and discuss how they can be worked in the classroom. Drawing on examples of activities carried out by Portuguese teachers of mathematics by examining the activity of learning raised by such tasks and discuss their potencial. Finally, I refer to conditions relating to the professional culture of teachers who can promote the research activity on their own training, with an emphasis on collaboration and associative dimension.

## Resumen

Investigar, enseñar y aprender son actividades que pueden estar presentes, de forma articulada, en la enseñanza-aprendizaje de matemática y en la actividad profesional del profesor. Para esto, es necesario concebir tareas que puedan ser un punto de partida para investigaciones matemáticas de los alumnos y discutir el modo en que pueden ser trabajadas en el aula. Tomando ejemplos de actividades realizadas por profesores de matemática portugueses, analizo actividades de aprendizaje a partir de tareas de este tipo y discuto las respectivas potencialidades. Por último, me refiero a las condiciones relativas a la cultura profesional de los profesores que pueden promover la actividad de investigación en su propia formación, con énfasis en la colaboración y la dimensión asociativa

Ensinar Matemática como um produto acabado, tem-se revelado problemático para sucessivas gerações de professores. Muitos alunos acham que a disciplina não faz qualquer sentido e que não vale a pena esforçarem-se para a aprender. Outros lutam para sobreviver, aprendendo a resolver diversos tipos de exercícios e desenvolvendo significados parciais que, muitas vezes, envolvem sérios equívocos. Por isso, há muito tempo que matemáticos e professores preocupados com este problema procuram encontrar outras formas de apresentar a Matemática aos alunos. Uma das ideias mais poderosas que fundamenta muitas dessas abordagens alternativas, é considerar a Matemática como uma actividade (Freudenthal, 1973), o que leva, naturalmente, a enfatizar a exploração e a investigação de situações.

## 1. Investigar como uma característica essencial da actividade matemática

Existem muitas perspectivas sobre a Matemática. A maioria dos dicionários apresenta-a como a "ciência da quantidade e forma" (Davis & Hersh, 1995). Para muitos matemáticos, ela é a "ciência da demonstração". Esta é a noção de que Bertrand Russell tinha em mente quando disse: "A Matemática é o assunto no qual nunca sabemos do que estamos a falar, nem se o que estamos a dizer é verdadeiro" (Kline, 1974, p. 462). Bourbaki, na abertura dos seus *Elementos*, coloca a mesma ideia de um modo mais directo: "Quem diz Matemática, diz demonstração". O movimento estruturalista da primeira metade do século XX promoveu a visão da Matemática como "ciência das estruturas", o que influenciou a profunda reforma educacional na década de 1960, a "Matemática moderna". Outro ponto de vista, ainda, afirma que a Matemática pode ser descrita como a "ciência dos padrões", tendo como objectivo descrever, classificar e explicar os padrões em números, dados, formas, organizações e relações (Steen, 1990).

Quando pensamos na Matemática, podemos concentrar-nos nos conceitos matemáticos e no corpo de conhecimento registado em artigos e livros – algo como existe na forma de produto acabado. Falamos, então, da Matemática como um edifício com muitos compartimentos e passagens ou como uma árvore com muitos ramos. Em alternativa, podemos concentrar-nos na actividade das pessoas que trabalham nesta ciência. Trata-se de uma perspectiva da Matemática muito mais dinâmica. É isso que George Pólya (1945) tem em mente, quando diz: "A Matemática tem duas faces, é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais [...] Matemática, no seu processo de criação, aparece como uma ciência experimental e indutiva" (p. vii). É isso, também, que é sustentado por Irme Lakatos (1978) quando afirma que a Matemática "não se desenvolve por meio de um crescimento monótono do número de teoremas estabelecidos, mas sim, sem dúvida, através do aperfeiçoamento crescente de especulações e conjecturas, pela crítica, pela lógica das provas e refutações" (p. 18).

Este artigo assume que a Matemática pode ser uma actividade interessante e envolvente não só para o matemático, mas também para o professor e o aluno. Singh (1998) refere que Andrew Wiles, famoso pela sua prova de um teorema que desafiou sucessivas gerações de matemáticos, recorda o papel do seu próprio professor do ensino secundário no seu envolvimento em explorações matemáticas:

> Desde que pela primeira vez encontrei o Último Teorema de Fermat, em criança, ele tem sido a minha maior paixão... Tive um professor que realizara investigações em Matemática e que me emprestou um livro sobre Teoria dos Números, que me deu algumas pistas sobre como começar a atacá-lo. Para começar, parti da hipótese

> de que Fermat não conhecia muito mais Matemática do que a que eu aprendera. (p. 93)

Outro matemático, Jacques Hadamard (1945), afirma que não há grande diferença na actividade matemática de um aluno e um matemático quando eles estão trabalhando em situações desafiadoras:

> Entre o trabalho do aluno que tenta resolver um problema de Geometria ou Álgebra e o trabalho de criação [de um matemático], pode dizer-se que há apenas uma diferença de grau, uma diferença de nível, tendo ambos os trabalhos uma natureza semelhante. (p. 104)

Investigar, em Matemática, inclui a formulação de questões, que frequentemente evoluem à medida que o trabalho avança. Investigar envolve, também, a produção, a análise e o refinamento de conjecturas sobre essas mesmas questões. E, finalmente, envolve a demonstração e a comunicação dos resultados. O ponto de partida para uma investigação pode ser um problema matemático ou uma situação não-matemática (tanto de outras ciências e da tecnologia, como da organização social ou da vida diária). Quando procuramos obter uma melhor percepção da situação, estamos a “explorá-la”. Mais tarde, quando a nossa pergunta é formulada de modo claro, dando unidade ao trabalho, podemos dizer que temos um “problema”. A realização de uma investigação matemática envolve processos conscientes e inconscientes, sensibilidade estética, conexões e analogias com problemas matemáticos e situações não matemáticas. Tal como referem Davis e Hersh (1995) e Burton (2001), é levada a cabo de formas diferentes por pessoas com estilos cognitivos mais analíticos, visuais ou conceptuais, mas, para todos eles, constitui uma actividade envolvente e gratificante.

Podemos dizer que a “grande investigação” é que se realiza nas universidades, empresas e laboratórios. No entanto, o facto dessa investigação existir, ser legítima e ser por vezes muito útil, não significa que não possa existir mais nenhuma investigação. Pelo contrário, ao lado da “grande investigação” podem e devem existir outras formas de indagação por parte de outros actores sociais. Na verdade, na sua essência, “investigar” consiste em procurar compreender algo de modo aprofundado, tentar encontrar soluções adequadas para os problemas com que nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos, que deve permear todo o trabalho da escola, tanto dos alunos como dos professores.

## 2. Alunos investigam Matemática na sala de aula

Vamos considerar alguns exemplos de alunos que trabalham como investigadores matemáticos.

***2.1. Regularidades numéricas.*** O primeiro exemplo vem de uma turma do 5.º ano (alunos de 10 anos de idade) conduzida pela professora Irene Segurado (ver Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998). A tarefa é a seguinte:

1. *Escreve em coluna os 20 primeiros múltiplos de 5.*
2. *Repara nos dígitos das unidades e das dezenas. Encontras algumas regularidades?*
3. *Investiga agora o que acontece com os múltiplos de 4 e 6.*

*4. Investiga para outros números.*

Esta tarefa foi apresentada no início de uma classe de 50-minutos. A professora tinha planeado a aula para ser realizada em trabalho em grupo, mas sentiu que os alunos, quando entraram, estavam muito agitados e decidiu trabalhar colectivamente com toda a turma. Pediu aos alunos para indicaram os múltiplos de 5 e escreveu-o no quadro. Os alunos começaram a procurar por regularidades:

Tatiana, levantando o braço, responde rapidamente: *O algarismo das unidades é sempre 0 ou 5, o que foi aceite pelos colegas, ecoando pela sala: é sempre 0; 5; 0; 5...*

Professora: *Mais?*

Octávio, com um ar feliz, indica: *O algarismo das dezenas repete-se: 0-0, 1-1, 2-2, 3-3...*

Carlos, agitado, intervém: *Descobri mais outra coisa... Posso ir ao quadro explicar? (...) No quadro, ligando os números com o giz, continuou: O 0 com o 5 dá 5, 0 com o 0 dá 0, 1 com o 5 dá 6, 1 com o 0 dá 1, 2 com o 5 dá 7, 2 com o 0 dá 2, 3 com o 5 dá 8, estão a perceber? Há uma sequência. Dá 5, salta um, dá 6, salta um, dá 7... Ou dá 0, salta um, dá 1, salta uma, dá 2... (Ponte et al., 1998, pp. 68-69)*

Vemos que os alunos foram capazes de identificar diferentes tipos de padrões. Assim, observaram padrões de repetição simples (como 0 5 0 5 ...) e padrões mais complexos, combinando crescimento linear e repetição (como 1 1 2 2 3 3 ...). Também identificaram padrões lineares como subsequências de padrões bastante complexos (0 5 1 6 2 7 3 8...).

Os alunos também analisaram padrões nos múltiplos de 4. Em seguida, voltaram-se para os múltiplos de 6, que foram colocados numa coluna ao lado dos múltiplos de 5 e 4:

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 5 | 4 | 6 |
| 10 | 8 | 12 |
| 15 | 12 | 18 |
| 20 | 16 | 24 |
| 25 | 20 | 30 |
| 30 | 24 | 36 |
| 35 | 28 | 42 |
| 40 | 32 | 48 |
| 45 | 36 | 54 |
| 50 | 40 | 60 |
| 55 | 44 | 66 |
| 60 | 48 | 72 |
| 65 | 52 | 78 |
| 70 | 56 | 84 |
| 75 | 60 | 90 |
| 80 | 64 | 96 |
| 85 | 68 | 102 |
| 90 | 72 | 108 |

As descobertas dos alunos foram chegando em catadupa, de tal forma que a professora sentiu dificuldade em registar e sistematizar suas contribuições:

*O algarismo das unidades é sempre 0, 6, 2, 8 e 4.*

*O algarismo das unidades é sempre um número par.*

*O algarismo das dezenas não se repete de 5 em 5.*

A professora procurou lidar com esse entusiasmo: *Calma! Vamos verificar se o que o que colega afirmou é verdade. Atenção! Olha! Olhem que interessante o que o colega descobriu!*

De repente, Sónia disse: *São os mesmos algarismos que para os múltiplos de 4*. Mesmo antes da professora ter percebido o alcance desta afirmação, Vânia continuou: *Estão é por outra ordem*. A professora percebeu que os alunos estavam a comparar os múltiplos de 4 e 6, e indicou-o à turma. Outros alunos continuaram:

*Começa na mesma por 0.*

*Os outros algarismos estão ao contrário.*

*Há múltiplos de 4 que também são múltiplos de 6.*

*Os múltiplos de 6, a partir do 12, são alternadamente também múltiplos de 4.*

Os alunos expressaram as suas generalizações em linguagem natural. Encontraram novamente padrões complexos de repetição (como 8 2 6 0 4 8 2 6 0 4 8...) e, mais interessante, foram capazes de comparar as características de diferentes sequências. Nesta actividade, desenvolveram o seu sentido do número, adquiriram uma melhor compreensão do comportamento dos múltiplos e fizeram muito cálculo mental.

Na sua reflexão, Irene Segurado indica que os alunos superaram todas as suas expectativas: "*Eu não tinha previsto a hipótese de comparar os múltiplos dos diferentes números, pois nunca os colocara em paralelo. Vivi por isso as suas descobertas com grande entusiasmo*" (p. 71). A professora também reflecte sobre as implicações de trabalhar com toda a turma, em comparação com o trabalho em pequenos grupos: "*O contributo de um dado aluno foi 'agarrado' por todos os seus colegas, conduzindo a um maior número de descobertas*" (p. 72). Poderia parecer que em temas curriculares do ensino básico, como a tabuada de multiplicação e os múltiplos e divisores, se podem fazer apenas exercícios de rotina. Este exemplo mostra que, pelo contrário, estes temas permitem a realização de muito trabalho exploratório e investigativo.

***2.2. Como é o aluno típico da minha classe?*** Um segundo exemplo vem de uma turma do 6.º ano (alunos de 11 anos), da professora Olívia Sousa (2002). A tarefa foi organizada como um estudo estatístico: "*Supõe que se quer comunicar, a um aluno de um país distante, ou mesmo, quem sabe, a um extraterrestre, como são os alunos da tua turma*".[1] Isto foi feito para que os alunos fizessem diversas medições sobre o seu corpo e recolhessem dados sobre as suas famílias, o que geralmente gera neles altos níveis de entusiasmo.

Seis blocos de 90 minutos foram utilizados para realizar esta tarefa, com os alunos trabalhando em pequenos grupos. A professora dividiu a tarefa em quatro grandes etapas: (i) preparação das questões de investigação, (ii) recolha de dados,

[1] A ideia original é de Batanero (2001).

(iii) análise dos dados, e (iv) comunicação dos resultados. Em cada etapa, foram fornecidas instruções escritas aos alunos. Por exemplo, para a etapa 2, as indicações foram:

*Discute com os teus colegas, sobre:*

*1. Escreve na forma de pergunta cada uma das características que vais investigar.*

*2. Que respostas pensas obter para as tuas perguntas?*

*3. De que modo (através de observação, medição ou inquérito) podes obter as respostas às tuas perguntas?*

*4. Prepara folhas de registo para os dados que vais recolher.*

As medidas estatísticas (média, mediana, moda) ainda não tinham sido ensinadas a esta turma. Neste estudo, uma decisão importante foi que os alunos deveriam trabalhar com base nos seus conhecimentos prévios destas noções, em vez de primeiro os ensinar formalmente e depois propor exercícios de aplicação dos conhecimentos ensinados. Assim, os alunos foram convidados a encontrar a moda (ou seja, "o valor mais frequente"), a mediana (o "valor" do meio), e a média (supondo que eles conheciam esta noção). Na verdade, os alunos não tiveram dificuldade em encontrar a moda. Para encontrarem a mediana levaram mais tempo, mas quando perceberam que poderia ordenar os valores, tornou-se relativamente fácil. Houve alguns problemas quando alguns se esqueceram de contar valores repetidos ou tomaram a mediana como a média dos valores extremos, mas a discussão na turma permitiu clarificar o conceito. E, quanto à média, os alunos já tinham uma forte noção intuitiva como algo a meio caminho entre dois valores:

*Inês: Então, pomos 1 e 35.*

*Alexandre: 1 e 40.*

*Prof. Como é que chegaste ao 1 e 35? (...)*

*Inês e Estelle: Foi estimativa!*

*Inês: Nem é como o do Mauro (1,20m), nem como a minha envergadura (1,50m), é no meio.*

*Estelle: É entre...*

*Inês: É entre os dois.*

*Estelle: Do Mauro e da Inês.*

Para encontrar a média de mais de dois números, os alunos, com a ajuda do professor, foram capazes de generalizar a noção intuitiva de média como a soma de dois números dividida por dois.

Na sua reflexão, Olívia Sousa considerou que a realização desta tarefa foi uma experiência de aprendizagem significativa, na qual os alunos trabalharam de forma integrada noções matemáticas de dois domínios, Estatística e Números e cálculo. Os números decimais obtidos a partir de medição de grandezas associadas ao corpo, deixaram de ser entidades abstractas, para passar a ser algo com significado. O trabalho com esses números – comparando, classificando e operando num contexto significativo – contribuiu para os alunos desenvolverem uma melhor compreensão a seu respeito. A professora considerou que o contacto com diferentes tipos de variáveis e diferentes maneiras de recolher, organizar e representar a informação significativa promoveu a compreensão dos alunos sobre a linguagem, os conceitos e os métodos estatísticos que foram muito além da simples memorização. Este exemplo mostra que uma investigação baseada na realidade dos alunos pode ser o ponto de partida para desenvolver a sua capacidade de investigação, para aprender novos conceitos de Matemática (neste caso, as noções estatísticas) e para praticar e consolidar os conhecimentos anteriormente aprendidos.

***2.3. Como fazer ampliações?*** O exemplo seguinte refere-se a uma experiência realizada com alunos do 8º ano (alunos com 13 e mais anos) pelo professor João Almiro (2005). A tarefa proposta é a seguinte:

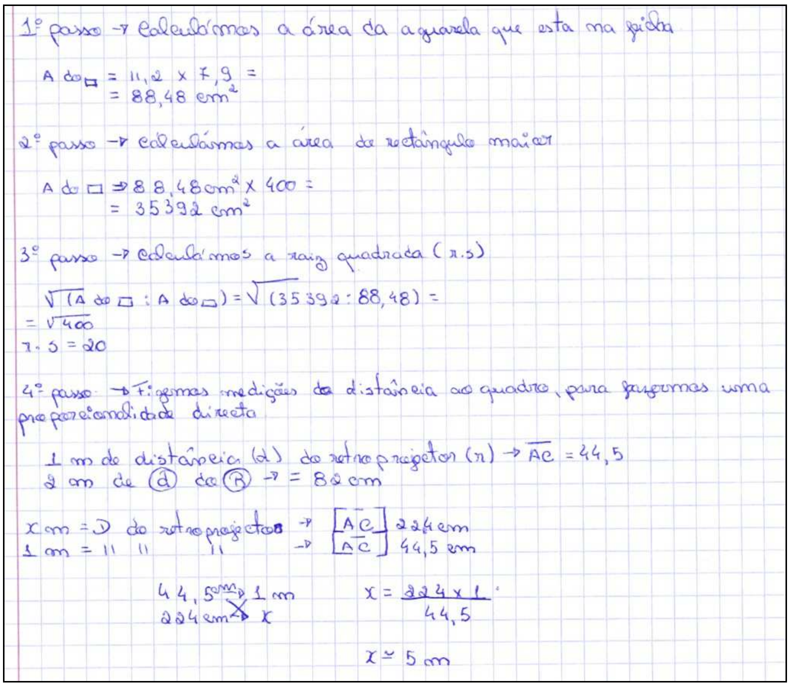
*A professora de Educação Visual quer fazer a ampliação para papel de cenário da aguarela que se encontra em baixo* (M. C. Escher, 1965)*, mas colocou a seguinte condição: a área da figura ampliada tem de ser 400 vezes maior do que a área desta. A professora vai fazer um acetato com a aguarela e projectá-lo, usando um retroprojector, no papel de cenário que irá pendurar numa parede. Mas tem um grande problema: A que distância é que deve colocar o retroprojector da parede? Como é que podemos ajudá-la? Elabora um relatório que inclua a descrição das tuas investigações, os cálculos que efectuaste, as tuas conjecturas e possíveis soluções para entregarmos à professora.*

Trata-se de um problema em que os alunos podiam usar estratégias de cunho exploratório. O interesse do professor era perceber o que é que os alunos eram capazes de fazer de modo autónomo. Preparou a sala com quatro retroprojectores, um para cada dois grupos, e distribuiu uma fita métrica e uma régua para cada grupo. A sala era um tanto apertada para os retroprojectores, mas conseguia-se trabalhar. Não deu instruções nenhumas, disse somente que tinha sido a professora de Educação Visual que lhe tinha pedido para colocar aquele problema. Claro que muitos dos alunos não acreditaram.

As reacções dos grupos foram diversas. Alguns ficaram completamente perdidos sem saber o que fazer, outros agarraram na tarefa e começaram a tentar definir uma estratégia. No questionário final um aluno referiu: "*Senti algumas dificuldades com os retroprojectores, pois no início não sabíamos por onde começar*". Contudo, o professor verificou com satisfação que todos os grupos perceberam que o rectângulo projectado teria que ter a largura e o comprimento 20 vezes maiores que o inicial, para que a área fosse 400 vezes maior. Os alunos já tinham resolvido vários problemas relacionados e foram capazes de mobilizar os seus conhecimentos.

A grande dificuldade dos alunos era perceber a que distância deviam colocar o retroprojector da parede para que o comprimento dos segmentos da figura aumentasse 20 vezes. Quase todos os grupos recortaram um rectângulo com as dimensões da aguarela da tarefa. Projectavam, mediam o que encontravam e depois viam quantas vezes é que o comprimento e a largura tinham aumentado. Rapidamente se aperceberam que não tinham espaço na sala para aumentar as dimensões 20 vezes, pelo que tinham que fazer cálculos para saber onde colocar o retroprojector.

O professor considerou espectacular o trabalho de um grupo. Os alunos perceberam que havia proporcionalidade directa entre a distância do retroprojector à parede e o número de vezes que as dimensões eram ampliadas e rapidamente resolveram o problema. Outros quatro grupos, ajudando-se muito uns aos outros, foram medindo e discutindo e quando um chegava a uma conclusão partilhava logo com os outros. A pouco e pouco foram avançando, por vezes com conjecturas interessantes que os outros grupos refutavam e provavam que não estavam certas. Seguindo os seus caminhos, foram chegando a soluções que o professor considerou aceitáveis. Um dos grupos que melhor trabalhou no decorrer desta aula entregou a seguinte resolução:


1º passo → Calculámos a área da aguarela que esta na ficha

A do □ = 11,2 × 7,9 =
= 88,48 cm²

2º passo → calculámos a área do rectângulo maior

A do □ ⇒ 88,48 cm² × 400 =
= 35392 cm²

3º passo → calculámos a raiz quadrada (r.s)

√(A do □ : A do □) = √(35392 : 88,48) =
= √400
r. s = 20

4º passo → Fizemos medições da distância ao quadro, para fazermos uma proporcionalidade directa

1 m de distância (d) do retroprojetor (r) → $\overline{AC}$ = 44,5
2 m de (d) do (R) → = 82 cm

x m = D do retroprojector → [$\overline{AC}$] 224 cm
1 m = " " " → [$\overline{AC}$] 44,5 cm

44,5 cm → 1 m
224 cm → x

$x = \frac{224 \times 1}{44,5}$

$x \simeq 5$ m

Os outros três grupos, sozinhos, não conseguiram avançar quase nada. Um deles apresentou imensas dificuldades, não fazendo nada sem uma ajuda constante. O professor ficou muito desiludido com estes grupos que, na sua perspectiva, "brincaram muito e produziram pouco".

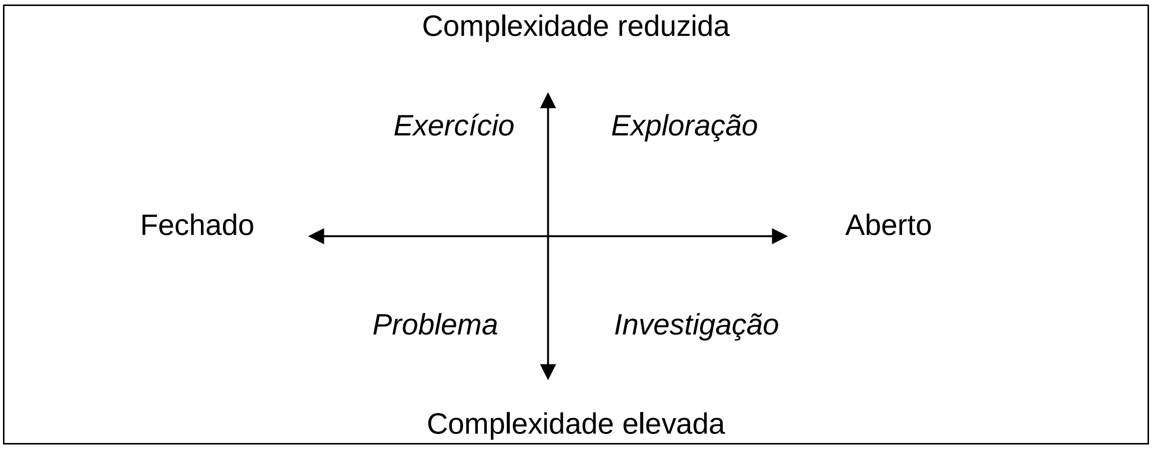
Alguns dos alunos (cerca de 1/5) não gostaram destas aulas. Um deles escreveu no questionário: "*Eu não gostei destas aulas, prefiro aulas normais a fazer* *exercícios, acho que aprendo muito mais nas aulas a fazer exercícios e a tirar dúvidas*". No entanto, a maioria dos alunos manifestou satisfação e reconheceu ter feito aprendizagens significativas. É o que nos diz este aluno:

> *Os problemas são um bocadinho mais complicados do que os das outras aulas, pelo menos o do retroprojector, em que tínhamos que pensar um bocado, desenvolver, tínhamos que pensar métodos diferentes, para conseguir o método ideal para ter o resultado certo. Tínhamos que descobrir o que era para fazer primeiro. Nos manuais, as perguntas estão directas, dizem logo o que temos que fazer.*

## 3. Diferentes tipos de tarefa para a aula de Matemática

O ensino-aprendizagem da Matemática assenta na actividade que os alunos levam a cabo na sala de aula e esta, por sua vez, depende muito das tarefas apresentadas pelo professor. O exercício é a tarefa mais comum na disciplina de Matemática[2] e tende a gerar um certo tipo de actividade. Outros tipos de tarefa, como os problemas e as investigações podem gerar outras tipos actividade, mais favorável à aprendizagem.

Podemos dizer que uma tarefa tem quatro dimensões fundamentais: o grau de complexidade, a estrutura, o contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. Conjugando as duas primeiras dimensões, obtemos quatro tipos básicos de tarefa:




Este esquema indica que os *exercícios* são tarefas de complexidade reduzida e estrutura fechada; os *problemas* são tarefas também fechadas e com elevada complexidade; as *investigações* têm um grau de complexidade elevado e uma estrutura aberta; e, finalmente, as *tarefas de exploração* são também abertas mas relativamente pouco complexas. Muitas vezes não se distingue entre tarefas de investigação e de exploração, chamando-se "investigações" a todas elas. Isso acontece porque é difícil saber à partida qual o grau de complexidade que uma

[2] Note-se que não é só em Matemática que se fazem exercícios. Eles existem em todas as disciplinas, das línguas à Educação Física, passando pelas ciências como a Física e a Química, e até nas artes como a Música, a Dança e o Teatro.

tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos. No entanto, a análise é mais clara se usarmos uma designação para as tarefas abertas menos complexas (explorações) e outra designação para as mais complexas (investigações) – isto, tendo por referência a capacidade usual dos alunos de cada nível etário.

Um *projecto*, no fundo, não é mais do que uma tarefa de investigação de um tipo particular, com um carácter relativamente prolongado. De facto, uma investigação chama-se muitas vezes “projecto de investigação” e pode demorar anos a concluir. Em contrapartida, certas investigações demoram um tempo relativamente curto, podendo realizar-se numa aula ou numa curta sequência de aulas. Tanto o projecto como a investigação comportam um carácter aberto – uma vez definida a ideia central, a concretização do objectivo requer ainda muito trabalho – e têm um grau de dificuldade considerável na procura da metodologia de trabalho, na superação das dificuldades, na organização e análise do material recolhido, em tirar conclusões, etc. O projecto, de resto, é um excelente exemplo de uma tarefa de longa duração enquanto se espera que as actividades de natureza estruturada, por via de regra, se resolvam num prazo relativamente curto. Deste modo, a dimensão tempo assume também um papel chave na caracterização das tarefas. No nosso caso, as tarefas propostas por Irene e Olívia assumiram o carácter de investigações, enquanto João apresentou aos seus alunos um problema.

A outra dimensão das tarefas diz respeito ao contexto referencial: a tarefa pode ser contextualizada numa *situação da realidade* ou formulada em termos *puramente matemáticos*. Skovsmose (2000) indica ainda um terceiro tipo de situações, a que chama de *“semi-realidade”*, que à primeira vista parecem reais mas que, na prática, são abstractas, pois nelas não se atende às propriedades dos objectos excepto aquelas que o contrato didáctico indica serem relevantes para a respectiva resolução. As tarefas formuladas em termos de realidade ou semi-realidade que aparecem no ensino da Matemática constituem exercícios, problemas, explorações e investigações, dependendo do seu grau de complexidade e da sua abertura.

Muitos trabalhos têm sido feitos em Portugal dando atenção ao processo de investigação em Matemática. Temos hoje já uma noção bastante clara das diversas fases de um processo típico de investigação, da formulação de questões até à produção, teste e refinamento de conjecturas, e daí às tentativas de prova e ao processo de divulgação de resultados (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003).

É de notar que as tarefas, embora sejam importantes, não determinam por si só o que acontece na sala de aula. Uma mesma tarefa pode dar origem a situações de aprendizagem muito diversas, dependendo do modo como é apresentada aos alunos, do modo como estes aceitam o desafio que lhes é proposto e, muito em especial, do modo como evolui a situação de trabalho na sala de aula. Trata-se de questões que vamos analisar de seguida.

## 4. A prática do professor na sala de aula

Tarefas exploratórias e investigativas adequadas criam oportunidades para o envolvimento dos alunos na Matemática. No entanto, a sua aprendizagem depende muito também de outros elementos da prática do professor, que se relacionam estreitamente com os papéis assumidos na sala de aula por todos os actores e a comunicação que se desenvolve.

***4.1. Papéis na sala de aula***. As tarefas são importantes, mas ainda mais importante é a maneira como elas são abordadas na sala de aula. Uma aula em que os alunos trabalham em explorações ou investigações tem, frequentemente três segmentos principais (Christiansen & Walther, 1986): (i) introdução, (ii) desenvolvimento do trabalho, e (iii) apresentação de resultados e discussão. Na introdução, o professor e os alunos "negoceiam" a tarefa a realizar – qual é a formulação da tarefa, como interpretá-la, e quais as formas de trabalho a prosseguir. De seguida, no desenvolvimento do trabalho, os alunos trabalham por si de modo autónomo, individualmente, em pares ou em pequenos grupos. Outras vezes, trabalham de modo colectivo, com classe, com a direcção do professor. E, finalmente, chega o momento da apresentação e discussão dos resultados, onde toda a classe compartilha as ideias geradas nos diferentes grupos e se institucionaliza o novo conhecimento matemático.

Os papéis de professores e alunos mudam consideravelmente nos três segmentos de uma aula com tarefas exploratórias e investigativas. No entanto, em cada segmento, os alunos têm voz e espera-se que tenham iniciativas. Eles têm a responsabilidade de usar argumentos lógicos para convencer os outros da veracidade de suas soluções, defendendo os seus pontos de vista, assumindo assim o estatuto de autoridade intelectual (Lampert, 1990). Isto é completamente diferente da aula em que o professor presta “esclarecimentos” e mostra exemplos, explica "como fazer" os diferentes tipos de exercícios, surgindo como a única autoridade na sala de aula, apoiado pelo manual escolar.

***4.2. Comunicação na sala de aula***. Em muitas aulas de Matemática, o professor domina o discurso, seja fornecendo explicações e exemplos ou colocando questões e dando um retorno imediato aos alunos. Essas aulas tendem a seguir a sequência IRF – o professor Inicia com uma pergunta, um aluno Responde e o professor fornece Feedback, fechando o ciclo, quer confirmando ou rejeitando a resposta dada. No entanto, existem outros padrões de discurso que podem ser seguidos na sala de aula. Na verdade, existem muitos tipos diferentes de perguntas que o professor pode usar (por exemplo, perguntas de focalização, de confirmação, e de inquirição – ver, por exemplo, Ponte e Serrazina, 2000), levando a padrões de comunicação muito diferentes (Wood, 1994).

Os alunos podem ser encorajados a compartilhar ideias com seus colegas, quer trabalhem individualmente, em pares, em grupos, ou como uma só classe. Os momentos de discussão na sala de aula são muito importantes pela possibilidade que abrem de negociação de significados (Bishop & Goffree, 1986). Em tais discussões, diferentes representações são contrastadas, as representações convencionais são analisados em detalhe, e é fixado o uso correcto da linguagem matemática. Este é também o momento em que as principais ideias relacionadas com a tarefa são clarificadas, formalizada e institucionalizadas como novo conhecimento, daí em diante aceite como tal na comunidade da sala de aula.

Durante o trabalho em grupo, a comunicação que ocorre entre os alunos pode variar fortemente. Por vezes, há uma verdadeira troca de ideias e argumentos. Noutros casos, apenas um ou dois alunos se envolvem activamente no trabalho e os demais limitam-se a observar ou acabam por se distrair. A forma como o professor interage com os alunos de um grupo é também de grande importância. Se não responde às perguntas dos alunos, estes podem perder sua motivação para continuar a trabalhar na tarefa. Se dá a resposta, ele anula a maior parte do benefício que a tarefa pode ter para aprendizagem dos alunos. Isto mostra como o professor tem que lidar permanentemente com muitos dilemas na condução da comunicação na sua sala de aula.

***4.3. Dois estilos de práticas pedagógicas***. A consideração de diferentes tipos de tarefas, papéis e padrões de comunicação fornece uma caracterização dos dois principais estilos de práticas de ensino de Matemática que encontramos hoje nas salas de aula em todo o mundo em diferentes níveis de ensino. Podemos chamá-los de ensino "directo" (Brooks & Suydam, 1993). e ensino para uma "aprendizagem exploratória" (Ponte, 2005).

| **Ensino directo** | **Aprendizagem exploratória** |
|---|---|
| Tarefas<br>▪ Tarefa padrão: Exercício;<br>▪ As situações são artificiais;<br>▪ Para cada problema existe uma estratégia e uma resposta certa. | Tarefas<br>▪ Variedade: Explorações, Investigações, Problemas, Projectos, Exercícios;<br>▪ As situações são realísticas;<br>▪ Com frequência, existem várias estratégias para lidar com um problema. |
| Papéis<br>▪ Os alunos recebem "explicações";<br>▪ O professor e o manual escolar são as únicas autoridades na sala de aula;<br>▪ O professor mostra "exemplos" para os alunos "aprenderem a fazer". | Papéis<br>▪ Os alunos recebem tarefas para descobrirem estratégias para as resolver;<br>▪ O professor pede ao aluno para explicar e justificar o seu raciocínio;<br>▪ O aluno é autoridade se usar raciocínio lógico para fundamentar as afirmações. |
| Comunicação<br>▪ O professor coloca questões e fornece feedback imediato (sequência I-R-F);<br>O aluno coloca "dúvidas". | Comunicação<br>▪ Os alunos são encorajados a discutir com os colegas (trabalhando em grupos ou pares);<br>▪ No fim de um trabalho significativo, fazem-se discussões com toda a turma;<br>Significados negociados na sala de aula. |

Evidentemente, a prática de sala de aula não depende apenas do professor. Também depende do aluno bem como de diversos factores externos. Algumas condições tornam muito difícil a um professor passar do ensino directo para a aprendizagem exploratória. Uma aula com a exploração e tarefas de investigação é muito mais complexa de gerir do que uma aula com base na exposição de conceitos e de realização de exercícios, já que é impossível prever todas as sugestões e questões que os alunos possam apresentar. Além disso, os alunos não sabem trabalhar a partir deste tipo de tarefa e é necessário que o professor os ajude a fazer essa aprendizagem. Não obstante as suas dificuldades e limitações, este trabalho é essencial para uma aula de Matemática que visa objectivos educacionais relacionados com compreensão e raciocínio dos alunos, modelação e a capacidade de resolução de problemas.

Uma tarefa poderosa pode criar um ambiente interessante. No entanto, para terem uma experiência de aprendizagem significativa em Matemática, os alunos precisam de trabalhar por um tempo prolongado num campo de problemas – pelo menos por várias aulas. Durante esta actividade, eles têm a oportunidade de compreender os aspectos não triviais dos novos conhecimentos, relacioná-los com o seu conhecimento anterior e desenvolver novas representações e estratégias. Isso acontece no quadro do trabalho com unidades de ensino, que (i) se podem apoiar numa perspectiva sobre a trajectória de aprendizagem dos alunos (Simon & Tzur, 2006) relativa a um determinado conceito e (ii) podem apoiar o desenvolvimento dos alunos nas diversas capacidades transversais da aprendizagem matemática, incluindo a capacidade de representar, raciocinar, estabelecer conexões, resolver problemas e comunicar. Witmann (1984) indica que a concepção de unidades de ensino poderosos, de modo coerente, é uma tarefa importante para os investigadores em educação matemática. Os professores fazem isso constantemente, usando seu conhecimento profissional (Ruthven & Goodchild, 2008), seleccionando e ajustando os recursos disponíveis, especialmente os manuais escolares.

O que é necessário a um professor para realizar trabalhos de cunho exploratório e investigativos na sua sala de aula? Uma análise dessa actividade e suas exigências contextuais sugere duas áreas principais – uma relação pessoal positiva com as explorações e investigações matemáticas e uma capacidade para usar tais tarefas na sua prática profissional. Estas não são competências que os professores desenvolvam espontaneamente um dia para o outro. Em seguida, analiso o que está envolvido na formação de professores para a realização de um ensino deste tipo.

## 5. Projectos de investigação sobre a sua própria prática

***5.1 Aprendizagens profissionais nas diversas experiências.*** Mostrei algumas situações que ocorreram na sala de aula durante a realização de tarefas que, por uma razão ou por outra, assumem um carácter exploratório ou de investigação. Estas situações desenvolveram-se a partir de tarefas diferenciadas – um problema e duas tarefas de exploração/investigação. Em todos os casos se registaram aprendizagens importantes por parte dos alunos. No entanto, em todos os casos houve também problemas com que os professores tiveram de lidar. Irene Segurado tinha previsto que a aula iria decorrer em trabalho de grupo e sentiu necessidade, no início, de mudar a forma de trabalho, para uma aula colectiva. Olívia Sousa teve problemas com a gestão do tempo, uma vez que a realização da investigação se prolongou mais que o previsto. Pelo seu lado, João Almiro gostou do trabalho de vários grupos, mas sentiu bastante frustração com o trabalho de outros. Além disso, indica que a maioria dos alunos gostou destas aulas e sentiu ter aprendido, mas reconhece que alguns alunos preferem aulas com exercícios, onde sentem aprender mais.

Ou seja, em todos os casos há importantes benefícios em termos de aprendizagens dos alunos, mas também há problemas que se vão colocando. Esses problemas têm a ver com aspectos referentes ao envolvimento dos alunos no trabalho (que, por vezes, é muito difícil de conseguir), com as suas capacidades e conhecimentos (frequentemente, abaixo do que seria de desejar), e também com a previsão tudo o que se pode passar numa aula deste tipo, de modo a tomar em cada momento a melhor decisão relativamente ao modo de prosseguir.

***5. 2. Investigar a sua própria prática*.** As experiências anteriores são exemplos de investigações feitas por professores sobre a sua própria prática. Por todo o mundo são cada vez mais os professores que investigam. Alguns fazem-no inseridos em programas de mestrado e doutoramento, outros no quadro de projectos que realizam nas suas escolas. No entanto, a investigação sobre a sua própria prática não diz apenas respeito a professores. É uma actividade que interessa igualmente a técnicos de orientação escolar e da administração educativa, psicólogos, formadores de professores e professores do ensino superior. Assistimos, em muitos países, ao desenvolvimento de um movimento cada vez mais alargado de profissionais da educação e de áreas como a saúde e o serviço social que investigam problemas relacionados com a sua própria prática.

Isso acontece porque estes profissionais defrontam-se na sua actividade com problemas de grande complexidade. Em vez de esperar por soluções vindas do exterior, eles procuram investigar directamente esses problemas. Tal investigação, para além de poder ajudar ao esclarecimento e resolução desses problemas, contribui igualmente para o desenvolvimento profissional dos participantes e para o aperfeiçoamento das respectivas organizações. Além disso, contribui para o desenvolvimento do conhecimento e da cultura profissional nesse campo de prática e, em certos casos, traz novos elementos para o conhecimento e a cultura geral da sociedade.

Irene, Olívia, João, os professores envolvidos nas experiências acima indicadas, desenvolveram-se profissionalmente. Para isso, foram importantes não só as investigações em si como o trabalho de divulgação das suas experiências, elaborando artigos, publicados em livros e revistas, o que permitiu um olhar mais aprofundado sobre as mesmas. Igualmente importante foi a apresentação oral das experiências em conferências e comunicações em encontros e congressos. Este trabalho constitui, sem dúvida, uma importante mais valia para a educação matemática, mostrando caminhos que pode seguir a mudança curricular e a renovação das práticas profissionais.

***5.3. O papel da colaboração*.** As experiências atrás referidas foram, todas elas, feitas no quadro de grupos colaborativos (Boavida & Ponte, 2002). Na verdade, a colaboração, permitindo conjugar os esforços de diversas pessoas, constitui uma estratégia de grande valor para enfrentar os problemas da prática profissional.

Várias pessoas a trabalhar em conjunto têm mais ideias, mais energia e mais força para derrubar obstáculos do que uma pessoa trabalhando sozinha e podem capitalizar na diversidade das competências individuais.

A colaboração pode ocorrer entre professores, ajudando a caracterizar os problemas com que eles se defrontam, definir estratégias de actuação, avaliar resultados da acção, criando um ambiente de trabalho conjunto positivo e estimulante. Quando um dos membros do grupo está num momento menos bom, recebe o apoio dos outros membros. Quando um membro está mais inspirado, contagia todo o grupo.

Pode existir igualmente colaboração entre actores educativos diversos, como educadores matemáticos, matemáticos, psicólogos, sociólogos, animadores culturais, encarregados de educação, etc. Um grupo mais diversificado tem maior dificuldade em funcionar, pois os participantes têm muitas vazes estatutos, valores e linguagens diferentes e estes nem sempre se conseguem harmonizar facilmente. No entanto, a diversidade pode ser profundamente enriquecedora. Um grupo heterogéneo tem uma capacidade de acção acrescida, dada a variedade de competências dos seus membros.

***5.4. A investigação como elemento da cultura profissional***. A valorização de uma cultura de investigação entre os professores não depende apenas de uma actuação mais ou menos voluntarista no plano individual. Pressupõe, pelo contrário, um papel fundamental das instâncias colectivas onde os professores exercem a sua actividade profissional, com destaque para as escolas, os movimentos pedagógicos e as estruturas associativas. Neste caso, a experiência de Irene processou-se no quadro de um projecto de investigação, a de Olívia no âmbito dos seus estudos de mestrado, e a de João no quadro de um projecto associativo.

Um dos maiores obstáculos à afirmação de uma cultura de investigação nos professores é a oposição entre teoria e prática. Nesta oposição, a teoria é frequentemente apontada como algo fantasioso, inadequado para a interpretação da realidade, inútil ou até pernicioso. A prática, pelo seu lado, é vista como o campo onde tudo é natural e inevitável, onde todos os problemas encontram sempre justificação externa (sejam os alunos, os encarregados de educação, os explicadores, a falta de condições de trabalho ou a política do Ministério da Educação). Trata-se de uma concepção estranha de teoria e prática. Na verdade, teoria e prática são duas faces de uma mesma moeda. Coexistem sempre. Onde há uma teoria há uma prática e onde há uma prática há uma teoria. O que é preciso é questionar se a teoria serve ou não serve e se a prática é recomendável ou é problemática. Há muitas teorias que não servem, mas há outras que podem ter grande utilidade. Também há muitas práticas inadequadas, ao lado de outras exemplares. Pôr em diálogo, em cada situação, a teoria e a prática, é uma condição fundamental para a compreensão dos problemas e um passo essencial para a sua resolução. Isso consegue-se muito melhor no plano colectivo do que no plano individual, e aí está mais uma razão para sublinhar a importância do nível colectivo de actuação profissional do professor.

Na verdade, muitos passos têm ainda de ser dados para que se afirme uma verdadeira cultura de investigação no seio dos professores. Esta cultura não deve encarar-se como uma mera transposição do que se passa noutras comunidades académicas (como os matemáticos ou os educadores matemáticos) ou profissionais (como os médicos ou os engenheiros). Pelo contrário, deve equacionar-se no quadro da afirmação de uma nova profissionalidade docente.

## A concluir

Procurando defender a ideia que pode haver uma ligação estreita entre ensinar, aprender e investigar, apresentei diversas situações em que os alunos fizeram explorações e investigações matemáticas na sala de aula. Mostrei, também, que essas situações correspondem a experiências em que os professores investigaram a sua própria prática e sublinhei a importância da dimensão colaborativa. Indiquei, finalmente, o papel da dimensão institucional e associativa para o desenvolvimento de uma nova cultura profissional, onde a teoria e a prática surjam ligadas de modo mais estreito. A minha argumentação teve por base uma perspectiva alargada da noção de investigação, como uma actividade onde todos podem participar, em contraponto com uma perspectiva elitista e restritiva, que reserva esta actividade para os "investigadores profissionais".

No entanto, antes de concluir, parece-me ser necessário sublinhar que me parece importante evitar a banalização deste conceito. A investigação requer uma racionalidade muito diferente da simples opinião. Pressupõe, da parte de quem a realiza, um esforço de clareza nos conceitos, nos raciocínios e nos procedimentos. Exige reflexão, debate e crítica aprofundada pela comunidade dos pares. Isso requer, naturalmente, que as ideias sejam apresentadas de forma suficientemente detalhada e rigorosa para poderem ser compreendidas e debatidas. Requer uma racionalidade argumentativa mais sólida do que a simples justificação circunstancial e exige que se saiba qual o enquadramento teórico geral por onde essa racionalidade pode ser aferida.

Investigar não resulta de se conhecer e aplicar umas tantas técnicas de recolha de dados, sejam questionários ou entrevistas, e de fazer uma análise estatística ou de conteúdo. Pelo contrário, pressupõe sobretudo uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo. Ao investigarmos, sabemos que esse trabalho tem as suas potencialidades mas também tem os seus limites. É útil para atingir certos objectivos, mas não o será para outros. Nem tudo se pode aprender através da investigação. Mesmo tendo esses limites, trata de uma poderosa forma de construção do conhecimento tanto para o aluno como para o professor, que importa, por isso, promover no ensino da Matemática e na cultura profissional dos professores.

## Referências

Almiro, J. P. (2005). Materiais manipuláveis e tecnologias na aula de Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 275-316). Lisboa: APM.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: GEEUG, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
Bishop, A.; Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.
Boavida, A. M.; Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.
Brooks, K.; Suydam, M. (1993). Planning and organizing curriculum. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 232-244). Reston: NCTM.
Burton, L. (2001). Research mathematicians as learners – and what mathematics education can learn from them. *British Educational Research Journal, 27*(5), 589-599.
Christiansen, B.; Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.
Davis, P.; Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.
Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
Hadamard, J. (1945). *Psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press.
Kline, M. (1974). *Mathematics in Western culture* (ed. original de 1953). London: Oxford University Press.
Lakatos, I. (1978). *A lógica do descobrimento matemático: Provas e refutações*. Rio de Janeiro: Zahar.
Lampert, M. (1990). *When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching*. American Educational Research Journal, *27*(1), 29-63.
Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.
Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
Ponte, J. P., Brocardo, J.; Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H.; Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.
Ponte, J. P.; Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.
Ruthven, K.; Goodchild, S. (2008). Linking research with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 565-592). New York, NY: Routledge.
Simon, M. A.; Tzur, R. (2006). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 91-104.
Singh, S. (1998). *A solução do último teorema de Fermat*. Lisboa: Relógio d'Água.
Skovsmose, O. (2000). *Cenários para investigação*. Bolema*, 14*, 66-91.

Sousa, O. (2002). Investigações estatísticas no 6º ano. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). Lisboa: APM.

Steen, L. A. (1990). Pattern. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 1-10). Washington, DC: National Academy Press.

Wittmann, E. C. (1984). *Teaching units as the integrating core of mathematics education*. Educational Studies in Mathematics, 15, 25-36.

Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of the mathematics classroom. In S. Lerman (Ed.), *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (pp. 149-168). Dordrecht: Kluwer.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 31-36
ISSN: 1815-0640

# Patrones de solución de polinomios y reglas de conteo: Aplicación a un polinomio elevado a la cuarta

**David Gómez Sánchez, José Manuel Romo Orozco, Adoración Gómez Sánchez**.

## Resumen

Se presenta una propuesta de solución de un polinomio elevado a la cuarta potencia, con la forma de un producto notable, lo que facilita los cálculos del resultado, optimiza el tiempo y la exactitud; la técnica está basada en los patrones de solución de los polinomios elevados al cuadrado y al cubo, además de utilizar técnicas de conteo de permutaciones y combinaciones que permiten prever la cantidad de términos en el resultado, lo que da mayor confianza al estudiante.

## Abstract

We presented a solution proposed of a polynomial fourth degree, with polynomial identities, which facilitates the calculation of the result, optimizes the time and accuracy. The technique is based on standard solution of the polynomial second degree and third degree. Too we used permutations and combinations that can anticipate the number of terms, which gives more self assurance to the student.

## Resumo

Apresenta-se uma proposta de solução de um polinômio elevado à quarta potência, com a forma de um produto notável, o que facilita os cálculos do resultado, otimiza o tempo e a exatidão; a técnica está baseada nos padrões de solução dos polinômios elevados ao quadrado e ao cubo, além de utilizar técnicas de contagem de permutações e combinações que permitem prever a quantidade de términos no resultado, o que dá maior confiança ao estudante.

## Introducción

La población de 15 a 19 años que estudia en el nivel medio y superior tiene serias dificultades en el estudio del algebra, ya que para realizar operaciones que impliquen la multiplicación de polinomios, se requieren de concentración y cuidados minuciosos, pues al ser mayor el número de elementos que contiene el polinomio, las operaciones a realizar crecen de manera proporcional, lo que minimiza la precisión del resultado y maximiza el tiempo para obtener una solución correcta.

Esta propuesta implica una mejora en tiempo y precisión de la técnica derivada de los productos notables y del Triángulo de Pascal, además de introducir criterios como el conteo de términos en el resultado final. Trabajos previos, (Álgebra de Baldor en sus diferentes ediciones) muestran la ventaja de conocer y utilizar los productos notables para disminuir el tiempo de solución y aumentar la precisión en el resultado: conocemos que la multiplicación de dos binomios con un término en común da como resultado un trinomio cuadrado, la multiplicación de binomios conjugados da como resultado una diferencia de cuadrados, y para un binomio elevado al cuadrado el resultado es un trinomio cuadrado perfecto, solución que a su vez es un caso específico del triángulo de Pascal, el cual nos compete para proponer la técnica de mejora, así como la solución de un trinomio elevado al cubo y de un cuatrinomio elevado a la cuarta

## Patrones de solución de un polinomio elevado al cuadrado y conteo de términos del resultado

Para obtener el resultado se comienza con identificar los patrones de solución de un binomio elevado al cuadrado utilizando los productos notables. Los productos notables son operaciones simplificadas donde un polinomio se expresa en factores mientras que el producto de los factores se convierte en un polinomio. (Thomson, 1981). Si la solución de un binomio elevado al cuadrado es:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Analizando la respuesta se tiene que:

- En el resultado hay tantos términos al cuadrado como términos en el polinomio.
- Existe un doble producto de los términos que forman el binomio.

Si el binomio se resuelve con el Triángulo de Pascal y no con el producto notable, la respuesta es la misma pero se observa lo siguiente:

- Que la suma de los exponentes de los elementos que forman el resultado tiene el mismo grado que el polinomio a resolver, en este caso dos, y por ningún motivo el grado aumentará o disminuirá en cada uno de ellos.

Por lo anterior, el razonamiento lógico para obtener el resultado es el siguiente:

> El resultado de un polinomio de k términos elevado al cuadrado es el cuadrado de los términos que lo forman, más el doble producto de todas las combinaciones de dos términos que se puedan obtener sin repetir alguna.

Para saber cuántos términos forman el resultado, sólo basta con sumar el número de términos al cuadrado (mismo número de términos que forman el polinomio, k términos) con el número de términos formados por un doble producto que se puede calcular mediante una regla de combinaciones igual a:

$$\frac{k!}{2!\,(k-2)!}$$

En donde k es el número de términos del polinomio y el dos representa la cantidad de términos que se juntan para formar una combinación.

*Una combinación "es el número de modos de seleccionar X número de objetos de k objetos posibles, sin tomar en cuenta el orden de los objetos en la combinación" (Berenson, 1996).*

En el caso analizado, no existen combinaciones de tres o más términos ya que como se concluyó por el Triángulo de Pascal, no puede existir en el resultado final un término con mayor o menor grado que el polinomio mismo.

Ejemplo:

Resolver $(a+b+c+d+e+f)$

El número de términos que contendrá el resultado es el siguiente:

$$k + \frac{k!}{2!\,(k-2)!}$$

$$7 + \frac{7!}{2!\,(7-2)!}$$

$$7 + \frac{1x2x3x4x5x6x7}{1x2(1x2x3x4x5)}$$

$$7 + 21 = \mathbf{28\ t\acute{e}rminos}$$

Y la solución final es:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + 2af + 2ag + 2bc + 2bd + 2be + 2bf + 2bg + 2cd + 2ce + 2cf + 2cg + 2de + 2df + 2dg + 2ef + 2eg + 2fg$$

## Patrones de solución de un polinomio elevado al cubo y conteo de términos.

Para obtener el resultado, se parte de los patrones de solución de un trinomio elevado al cubo:

Si la solución de un trinomio al cubo es:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$$

Analizando el resultado se observa que:

- Hay tantos términos al cubo como términos en el polinomio.
- Existe un triple producto de cada dos términos que forman el trinomio, la primera posición corresponde al término que se eleva al cuadrado y la segunda al término lineal.
- Existe un séxtuplo producto de los tres términos que forman el trinomio.
- La suma de los exponentes de los elementos que forman el resultado tiene el mismo grado, en este caso tres, que el polinomio a resolver, y por ningún motivo el grado aumentará o disminuirá en cada uno de los términos del resultado.

El razonamiento lógico para obtener el resultado es el siguiente: El resultado de un polinomio de k términos elevado al cubo es: el cubo de los términos que forman el polinomio más el triple producto de todas las combinaciones (permutaciones) de dos términos que se puedan obtener tomando en cuenta el orden debido a que el primer término tiene una potencia dos y el segundo uno, más el séxtuplo producto de todas las combinaciones de tres términos que se puedan obtener sin repetirse.

*Una permutación "es cada uno de los diferentes arreglos que pueden hacerse de una parte de los elementos, o con todos los elementos, tomando en cuenta el orden de los elementos en la permutación"* (MarcadorDePosición1) (Ch., 1984)Para saber cuántos términos forman el resultado sólo basta con sumar el número de términos al cuadrado que son los mismos que forman el polinomio, k términos, más el número de términos formados por un triple producto, que se puede calcular con una regla de conteo para permutaciones:

$$\frac{k!}{(k-2)!}$$

Más los términos formados por el séxtuplo producto, que se calcula con la siguiente regla de conteo para combinaciones:

$$\frac{k!}{3!\,(k-3)!}$$

En las expresiones anterior k es el número de términos del polinomio, mientras que el tres y el dos representan la cantidad de términos que se juntan para formar una combinación.

No existen combinaciones de cuatro ó más términos, ya que como se concluyó al hacer el análisis en el Triángulo de Pascal no puede existir en el resultado final un término con mayor o menor grado que el polinomio mismo.

Ejemplo:

Resolver $(a+b+c+d+e)^3$

Los términos que forman el resultado son:

$$k+\frac{k!}{(k-2)!}+\frac{k!}{3!\,(k-3)!}$$

$$5+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{3!\,2!}$$

$$5+\frac{1x2x3x4x5}{1x2x3}+\frac{1x2x3x4x5}{(1x2x3)(1x2)}$$

$$5+20+10=\boldsymbol{35\ t\acute{e}rminos}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d+3a^2e+3b^2a+3b^2c+3b^2d+3b^2e\\+3c^2a+3c^2b+3c^2d+3c^2e+3d^2a+3d^2b+3d^2c+3d^2e+3e^2a+3e^2b\\+3e^2c+3e^2d+6abc+6abd+6abe+6adc+6aec+6ade+6bcd\\+6bce+6bed+6cde\end{aligned}$$

## Propuesta de una solución de un polinomio elevado a la cuarta

Como se ha analizado en los casos anteriores, la solución para un polinomio elevado al cuadrado está basada en los patrones de solución de un binomio al cuadrado y la solución para un polinomio elevado al cubo está basada en la de un trinomio a esa potencia, por lo que se deduce que el polinomio elevado a la cuarta se basa en el patrón de solución del cuatrinomio elevado a la cuarta, como se muestra a continuación.

La solución de $(a+b+c+d)^4$ es la siguiente: $((a+b+c+d)^2)^2$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2+2bc+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd)^2$$

$$\begin{aligned} a^4 &+ b^4 + c^4 + d^4 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4a^2d^2 + 4b^2c^2 + 4b^2d^2 + 4c^2d^2 + 2a^2b^2 \\ &+ 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 4a^3b + 4a^3c + 4a^3d + 4a^2bc + 4a^2bd + 4a^2cd + 2b^2c^2 \\ &+ 2b^2d^2 + 4ab^3 + 4ab^2c + 4ab^2d + 4b^3c + 4b^3d + 4b^2cd + 2c^2d^2 + 4abc^2 \\ &+ 4ac^3 + 4ac^2d + 4bc^3 + 4bc^2d + 4c^3d + 4abd^2 + 4acd^2 + 4ad^3 + 4bcd^2 \\ &+ 4bd^3 + 4cd^3 + 8a^2bc + 8a^2bd + 8ab^2c + 8ab^2d + 8abcd + 8a^2cd \\ &+ 8abc^2 + 8acdb + 8ac^2d + 8acbd + 8abd^2 + 8acd^2 + 8b^2cd + 8bc^2d \\ &+ 8bcd^2 \end{aligned}$$

Que simplificado queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a^4 &+ b^4 + c^4 + d^4 + 6a^2b^2 + 6a^2c^2 + 6a^2d^2 + 6b^2c^2 + 6b^2d^2 + 6c^2d^2 + 4a^3b + 4ab^3 \\ &+ 4a^3c + 4ac^3 + 4a^3d + 4ad^3 + 4b^3c + 4bc^3 + 4b^3d + 4bd^3 + 4c^3d \\ &+ 4cd^3 + 12a^2bc + 12a^2bd + 12a^2cd + 12ab^2c + 12ab^2d + 12b^2cd \\ &+ 12abc^2 + 12ac^2d + 12bc^2d + 12abd^2 + 12acd^2 + 12bcd^2 + 24abcd \end{aligned}$$

**La solución de un polinomio elevado a la cuarta es**: cada uno de los términos que lo forman elevado a la cuarta, más el cuádruple producto de las permutaciones de dos términos que se puedan hacer donde el primer término de la permutación tiene un exponente tres y el segundo uno, más el séxtuplo producto de las combinaciones de dos términos que se puedan obtener sin repetirse alguna y en donde cada término tiene un exponente dos, más el doceavo producto de las combinaciones de tres términos donde para cada combinación posible se eleva al cuadrado cada uno de los términos a la vez, más el vigésimo cuarto producto de las combinaciones de cuatro términos que puedan existir.

La cantidad de términos que se deben obtener en el resultado se calcula con las reglas de conteo para combinaciones y permutaciones, es decir:

$$k + \frac{k!}{(k-2)!} + \frac{k!}{2!\,(k-2)!} + 3\frac{k!}{3!\,(k-3)!} + \frac{k!}{4!\,(k-4)!}$$

En donde k es el número de términos del polinomio, el cuatro, el tres y el dos que están indicados en las operaciones factoriales representan la cantidad de términos que se juntan para formar una combinación y el tres del producto de la combinación es la cantidad de posibilidades diferentes en que el exponente cambiará para cada uno de los términos de la combinación. El cálculo de términos para el caso anterior de un cuatrinomio elevado a la cuarta es:

$$4 + \frac{4!}{(4-2)!} + \frac{4!}{2!\,(4-2)!} + 3\frac{4!}{3!\,(4-3)!} + \frac{4!}{4!\,(4-4)!}$$

$$4 + \frac{1x2x3x4}{1x2} + \frac{1x2x3x4}{1x2(1x2)} + 3\frac{1x2x3x4}{1x2x3(1)} + \frac{1x2x3x4}{1x2x3x4(1)}$$

$$4 + 12 + 6 + 3(4) + 1$$

$$4 + 12 + 6 + 12 + 1 = \mathbf{35}\ \boldsymbol{términos}$$

Que comprueba el patrón de conteo para definir la cantidad de términos en el resultado de un polinomio elevado a la cuarta potencia.

## Conclusiones

Después del análisis anterior se concluye que la solución de los polinomios elevados al cuadrado, al cubo y a la cuarta potencia toman la forma simple de un producto notable, como se muestra siendo el caso del polinomio elevado a la cuarta la propuesta de mejora.

La inclusión de las técnicas de conteo de permutaciones y combinaciones es factible de utilizarse para determinar de manera precisa la cantidad de términos que contendrá el resultado de un polinomio elevado al cuadrado, al cubo y a la cuarta potencia, lo que facilita la enseñanza y el aprendizaje de éstos.

## Bibliografía

Baldor, A. (2007). *Algebra*. Segunda edición, ed. Grupo editorial patria, 376-388.

Berenson, M. L. Levine, D. M. (1996). *Estadística básica en administración*. sexta edición, ed. Pearson/Prentice Hall, 230-231

Lehmann, Ch. H. (1984). *Algebra*. Decimonovena reimpresión, ed. Limusa, 287.

Thompsom, J. E. (1981). *Algebra*. Segunda edición, ed. Unión tipográfica editorial Hispano-Americana, 63.

**David Gómez Sánchez**. Nació en Cd. Fernández, San Luis Potosí, México el 4 de octubre de 1980, egresado de la carrera de Ingeniero Mecánico Electricista, de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP), y estudió la Maestría en Administración en la misma Universidad. Actualmente es Profesor Investigador de Tiempo Completo en la Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media de la UASLP. **david.gomez@uaslp.mx**

**José Manuel Romo Orozco**. Originario de Cd. de México (1966- ), Ingeniero civil por la Universidad la Salle y Máster en Medio Ambiente Urbano y Sostenibilidad Urbana por la Universidad Politécnica de Cataluña. Actualmente es Profesor Investigador de la Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media de la UASLP. **jmromo@uaslp.mx**

**Adoración Gómez Sánchez**. Nació en Cd. Fernández, San Luis Potosí, México el 6 de mayo de 1978, es Ingeniera Civil por la UASLP y Doctora Ingeniera de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad Politécnica de Madrid. Actualmente es docente en la carrera de Ingeniero Civil de la Unidad Académica Multidisciplinaria de la Unidad Zona Media, UASLP. **adoracion@uaslp.mx**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 37-58
ISSN: 1815-0640

# Matemáticas del más allá: el infinito

**Eugenio M. Fedriani Martel; Ángel F. Tenorio Villalón**

## Resumen

El infinito constituye una materia importante y fascinante. De hecho, a lo largo de la historia muchos grandes pensadores han sido seducidos por las intrincadas y paradójicas sutilezas del infinito. No obstante, debe tenerse en cuenta que no existe un único concepto de "infinito"; en su lugar, es el nombre de una idea que depende del contexto en el que se usa. Casi todos tienen una idea intuitiva de qué es el infinito, pero rara vez coincide con la de los demás.

## Abstract

Infinity is an important and fascinating subject. In fact, the paradoxical twists and turns of infinity have baffled many great thinkers throughout the history. However, there does not exist one single "infinity" concept, instead it is the name of a notion that depends on the context in which you are using it. Most people have sort of an intuitive idea of what infinite is, but seldom does one agree with others on this.

## Resumo

O infinito constitui uma matéria importante e fascinante. De fato, ao longo da historia muitos grandes pensadores foram seduzidos pelas intrincadas e paradoxais sutilezas do infinito. Não obstante, deve ter-se em conta que não existe um único conceito de "infinito", em seu lugar, é o nome de uma idéia que depende do contexto onde se usa. Quase todos têm uma idéia intuitiva do que é o infinito, mas rara vez coincide com a dos demais.

## Introducción

Nuestro cerebro es finito y está por tanto limitado, pero este hecho no permite concluir que todos los posibles pensamientos tengan que ser finitos. De hecho, no es muy difícil encontrar un pensamiento infinito; una posibilidad es el conjunto de los números naturales, N, que se representan a menudo como unos cuantos números consecutivos y unos puntos suspensivos que justifican parcialmente la inexpresabilidad de este pensamiento.

En nuestro entorno más cercano, sólo somos capaces de percibir cosas finitas. Sin embargo, la finitud de los objetos físicos que detectamos no implica la finitud de todos los objetos físicos. Profundizando en la posible infinitud de los objetos físicos, surge la pregunta de si nuestro universo es finito o no. Ante esa pregunta son varias las respuestas que han aparecido a lo largo de la historia. R. Rucker (1982) ha clasificado dichas respuestas en tres categorías: a) el universo es finito, por lo que puede describirse de manera finita (no es una teoría muy aceptada en la actualidad); b) el universo es infinito pero está determinado completamente por un conjunto finito de hechos, con lo que sólo necesitaríamos conocer los hechos y leyes claves que permitan describir el universo (esta teoría parece que entra en conflicto con el Teorema de Incompletitud de Gödel); y c) el universo no es descriptible completamente por un conjunto finito de hechos, por lo que este tendría una descripción infinita.

En las Matemáticas actuales, el concepto de infinito es fundamental y aparece, de una forma u otra, en todas sus ramas. Establecer matemáticamente este concepto ha sido una tarea ardua, aunque su uso fue completamente intuitivo hasta mediados del siglo XIX. A continuación veremos precisamente la evolución de este concepto desde sus inicios hasta el establecimiento de una teoría justificada. De hecho, en este artículo pretendemos realizar una aproximación a las diferentes visiones que se tienen y se han tenido del concepto de infinito. Tras esta breve introducción, se presentará un resumen de la historia del concepto que nos ocupa, procurando utilizar un lenguaje cercano, casi coloquial. Después comentaremos el papel del infinito en la sociedad actual y compararemos la percepción de esta tiene con el rigor matemático, que se presentará con más detalle en otra sección posterior. El artículo terminará con unas conclusiones sobre lo reflexionado a lo largo del mismo.

## 1. Evolución histórica del concepto matemático de infinito

Posiblemente debido a que todos los sistemas físicos conocidos son finitos, lo infinito no es algo obvio y no siempre ha estado a nuestra disposición. Civilizaciones antiguas, como la egipcia o la azteca, con sistemas de numeración no posicionales, nunca se plantearon cantidades superiores a ciertos valores, ya que ni siquiera disponían de símbolos que les permitiesen representar determinadas cantidades. Incluso en civilizaciones con sistemas de numeración posicionales, esta noción no se hizo patente de forma consciente (Guedj, 1996). Y eso que los sistemas posicionales buscan representar cualquier número con la menor cantidad posible de signos. Ejemplos de estos sistemas fueron el babilonio, el indoarábigo o el maya, en los que siempre se realizaron cálculos y mediciones inferiores a ciertos valores (Fedriani y Tenorio, 2004).

Pero el infinito subyacía implícitamente en estos sistemas posicionales y, en nuestra opinión, el modo en que se representan las cantidades resulta clave para producir una noción intuitiva del infinito. En concreto, el sistema de numeración decimal indoarábigo ya permitió utilizar en la Antigua India números del orden de $10^{421}$, según una antiquísima leyenda hindú (aunque no dispusieron de este concepto de infinitud hasta nuestra era)[1]. Guedj (1996) opina que la primera noción intuitiva del infinito se encuentra en la sucesión de los números naturales, según lo

[1] Véase Ribnikov (1960-1963).

cual un sistema posicional facilitaría la percepción del infinito. De hecho, la sucesión de los naturales se caracteriza por tener un primer elemento pero no un último. Nótese que, precisamente, en esa existencia de un número siguiente para cualquier número natural dado, reside posiblemente uno de los primeros acercamientos del ser humano al concepto de infinito matemático.

Es comúnmente aceptado que en la Grecia Clásica aparecieron las primeras "preocupaciones" explícitas sobre el infinito, a pesar de tener sistemas de numeración no posicionales. Como indica Boyer (1968), el concepto de *apeirón* (lo ilimitado) permaneció subyacente en el pensamiento griego durante siglos. Para Anaximandro (610-546 a.C.), el apeirón era la materia infinita, indeterminada, exenta de cualidad y que estaba en eterno movimiento. Posteriormente, los pitagóricos lo considerarían un principio carente de forma y límite, siendo su contrario todo lo existente. Creemos que la representación pitagórica de los números naturales mediante piedras o puntos en la arena debe considerarse una prueba de la percepción griega del infinito, ya que se permitía considerar siempre el número siguiente a uno dado. Además, Arquímedes (287-212 a.C.) describió un método para escribir números enormes empleando el limitado sistema de numeración alfabético no posicional griego, llegando a indicar el número de granos en el universo según el pensamiento filosófico de la época.

No obstante, la idea de infinito del mundo griego no se limitaba solo a los números naturales, sino también a las magnitudes (los números racionales, por ejemplo). Zenón de Elea (h. 490-h.430 a.C.) planteó varias paradojas sobre la imposibilidad del movimiento, basándose en las dificultades planteadas por el infinito y por lo que hoy se denominan infinitésimos. Estas paradojas llevaron a Aristóteles (384-322 a.C.) a distinguir entre el *infinito potencial* y el *infinito actual*, siendo solo posible, para Aristóteles, el primero. El infinito se convierte así en algo inalcanzable, que se desplaza a voluntad del filósofo. Por tanto, no eran posibles conjuntos infinitos ni que la mayoría de las magnitudes fuesen siquiera infinitas potencialmente, ya que excederían los límites del universo, según él. Esta percepción del infinito se mantendría vigente aproximadamente dos milenios.

Según Kline (1972), las paradojas de Zenón habían causado reticencia hacia el infinito, debido a la asociación bien-finito y mal-infinito de los pitagóricos. El propio Aristóteles (s.IV a.C., Libro III) afirmó que "ser infinito es más una privación que una perfección; es la ausencia de un límite", presentando lo infinito como imperfecto e inacabado y siendo por ello finitos los objetos en la naturaleza. Euclides (325-265 a.C.) también trató el infinito, aunque siempre evitando mencionarlo explícitamente, como en sus dos primeros postulados referentes a la infinitud de la recta y su complicado enunciado del postulado de las paralelas. Esto también se observa cuando enuncia la infinitud de los números primos: "los números primos son más que cualquier multitud asignada de números primos"[2].

Los griegos desde Euclides emplearon los conceptos de *infinitamente pequeño* e *infinitamente cercano* en el método de exhaución, para calcular áreas bajo una curva usando aproximaciones cuya diferencia fuese más pequeña que cualquier cantidad dada. No obstante, este método, ideado hacia el 430 a.C. por Antifonte

[2] Véase Euclides (h. 300 a.C.), Libro IX, Proposición 20.

(480-411 a.C.), según Aristóteles[3], y perfeccionado hacia el 250 d.C. por Arquímedes (s.III a.C.), era considerado excesivamente oscuro como para explicar la infinitud.

Aunque inicialmente pudiera resultar chocante, el número cero, introducido en la India en el siglo IX, fue clave para expresar el infinito (Fedriani, 2000). De hecho, la noción más cercana al infinito actual, usándose incluso como número, se debió a los matemáticos indios. Para Mahavira (800-870) y Bhaskara (1114-1185), una fracción con denominador cero permanecía inalterable por mucho que se le añadiese o se le restase, denominándola *cantidad infinita*. Esta cantidad infinita persistió en la matemática árabe medieval, que la exportó a Europa. Resulta curioso que entonces se permitiese dividir por cero y que la representación del infinito fuese $\frac{1}{0}$ (Kline, 1972).

En 1621, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) ideó la *geometría de los indivisibles* para calcular áreas y volúmenes. Como puede verse en Ribnikov (1960-1963), este método suponía que las figuras planas y los cuerpos sólidos se componían de una cantidad infinita de elementos de una dimensión menos. Así, los indivisibles de una figura plana eran segmentos paralelos (indivisibles de área), mientras que los de un cuerpo eran planos paralelos (indivisibles de volumen). El área y el volumen se calculaban sumando estos elementos infinitesimales. Pero los indivisibles no permitían medir longitudes de curvas porque sus indivisibles, los puntos, no tenían dimensiones. Además, el concepto de *indivisible* era para muchos inexplicable y carente de todo fundamento. Evidentemente, el estudio del infinito no se redujo sólo a calcular áreas y volúmenes. Los principales avances provinieron durante muchos años de consideraciones relacionadas con la cinemática. Galileo (1564-1642) estaba muy interesado en lo infinitamente pequeño para tratar, por ejemplo, el problema del movimiento uniformemente acelerado. Afirmaba que era tan sencillo dividir un segmento en un número infinito de partes como en un número finito. Sin embargo, al mismo tiempo tuvo dudas sobre la existencia del infinito, como cuando afirmó que “infinitos e indivisibles se escapan a nuestro entendimiento finito, unos por ser excesivamente grandes y otros por ser extremadamente pequeños”. Es más, Galileo (1638) probó que había tantos números naturales como cuadrados perfectos, pero al parecerle esto ilógico, concluyó que todas las cantidades infinitas debían ser iguales.

Volviendo a los planteamientos geométricos, conviene recordar que en el s.XVII se calculaban áreas encerradas por curvas (integrales definidas) como sumas infinitas de magnitudes infinitesimales. El procedimiento sistemático consistía en considerar rectángulos de ancho constante muy pequeño; la suma de las áreas de estos rectángulos aproximaría el área bajo la curva, para lo cual consideraban unos sumandos de resultado despreciable si el ancho era cada vez menor; es decir, si el número de rectángulos tendía a infinito, pero todo ello sin definir el concepto de límite. Con esto llegamos a los dos principales artífices de los procedimientos infinitesimales modernos: Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Wilhelm von Leibnitz (1646-1716):

[3] Véase Aristóteles (S.IV a.C.), Libro I, Parte 2.

Newton desarrolló su *teoría de fluxiones* (las velocidades instantáneas), consistente en considerar incrementos indefinidamente pequeños, tanto en la variable $x$ como en la variable $y$, de una función $y = f(x)$. Estos incrementos se correspondían con un intervalo infinitamente pequeño de tiempo. El cociente de dichos incrementos era la fluxión o derivada. En esencia, calculaba el límite del cociente de los incrementos cuando se van haciendo cada vez más pequeños. Para Newton, el área bajo una curva era el límite de la suma de los rectángulos aproximadores, pero este proceso lo usaba solo para comparar áreas bajo diferentes curvas.

Leibnitz, por su parte, trabajó directamente con los incrementos infinitamente pequeños en $x$ e $y$, los *diferenciales*, buscando la relación existente entre ellos. Los diferenciales (o diferencias infinitesimales) eran cantidades infinitamente pequeñas, es decir, distintas de cero y más pequeñas que cualquier cantidad finita. Sin embargo, el cociente de dos infinitesimales lo expresaba mediante cantidades definidas. La integral (área) la definía como suma infinita de rectángulos infinitesimales. Aunque lo intentó en repetidas ocasiones, no logró dar un fundamento a su concepto de diferencial.

Según la casi totalidad de los historiadores especializados, el primero en usar el símbolo $\infty$ fue John Wallis[4] (1616-1703) en 1656 y lo hizo para representar el infinito en límites, escribiendo $\frac{1}{\infty} = 0$. Además, intentó definir el infinitesimal como el recíproco de $\infty$. Se ha conjeturado en Wattenbach (1869) la posibilidad de que Wallis hubiese tomado el símbolo $\infty$ del símbolo para representar 1000 que se usó a finales del Imperio Romano.

La aparición del infinito posibilitó que se introdujeran en el s.XVII los conceptos elementales de la Geometría Proyectiva: el punto y la recta del infinito. Pintores y arquitectos, al pintar en un dibujo rectas paralelas, observaron que debían pintarlas encontrándose en un punto que no existía en realidad. Girard Desargues (1591-1661) resolvió este problema añadiendo en 1639 el punto del infinito como aquel en el que se cortan dichas rectas. Ese punto estaba en una recta fuera de nuestra visión (recta del infinito o línea del horizonte), que debía añadirse al plano euclídeo para representar en un dibujo plano ciertas propiedades interesantes (Desargues, 1639).

Como indica Boyer (1968), el infinito no se definió con precisión antes de 1872; se explicaba como una magnitud indefinidamente grande o como la propia colección de los números naturales. Además, se creía imposible un infinito actual en las Matemáticas, pues lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño se consideraban simples casos del infinito potencial aristotélico. Oponiéndose a la máxima aristotélica de que el todo es mayor que la parte, Richard Dedekind (1831-1916) definió en 1888 un *conjunto infinito* como aquel semejante a una parte propia suya. Además, definió *conjunto finito* como el no infinito, pasando a ser lo finito lo que se definía a partir de lo infinito. Además, Dedekind probó que, de existir, la clase de todos los conjuntos (el denominado Absoluto de Cantor) tenía que ser infinita. Todo este trabajo, publicado en Dedekind (1888), comenzó a fraguarse, según indica el propio Dedekind en el prólogo de su obra anteriormente citada, entre los

[4] Véase Wallis (1656).

años 1872 y 1888, tras la publicación de un trabajo sobre la infinitud que abordaba la construcción de los números irracionales a partir de conjuntos de infinitos números racionales (las llamadas cortaduras de Dedekind[5]). Durante el transcurso de este período es cuando se establece el intercambio de correspondencia entre Dedekind y Georg Cantor (1845-1918), el padre de la Teoría de Conjuntos y de los números transfinitos.

Debe tenerse en cuenta que, con anterioridad a la definición de Dedekind, se habían introducido sendas definiciones matemáticas de conjunto infinito por Georg Cantor (1878) y por Bernhard Bolzano[6] (1781-1848), de manera independiente. En ambos casos se define primero el conjunto finito como aquel cuyo número de elementos es un número natural, mientras que los conjuntos infinitos se obtienen como los que no son finitos. No obstante, no formuló una definición de conjunto infinito sino que indicó que los conjuntos finitos (que sí definía) verificaban que todo subconjunto propio tenía un potencia menor, mientras que un conjunto infinito tenía la misma potencia que algún subconjunto propio suyo, aunque no demostraba dicha afirmación. Para una definición formal y explícita por parte de Cantor de los conceptos de conjunto finito y de conjunto infinito (por contraposición) hay que esperar a 1883 (Cantor, 1883). Previamente, en 1882, había mantenido correspondencia con Dedekind sobre dichos conceptos, mandándole este último la definición de conjunto infinito y de conjunto finito que aparecería en su obra de 1888 (Dedekind, 1888).

Obviamente, tanto el enfoque de Bolzano como el de Cantor diferían de la visión de Dedekind y, aunque permitían la existencia del infinito actual aristotélico, este seguía obteniéndose como la negación de lo finito. Pese a la existencia de estas definiciones de conjunto infinito anteriores a la publicación del trabajo de Dedekind (la de Cantor en 1878 y la de Bolzano en 1851), él afirmaba en el prólogo de su segunda edición (1888) que "*ninguno de los mencionados escritores [Cantor y Bolzano] ha hecho el intento de elevar esta propiedad a definición del infinito y edificar sobre este fundamento de manera lógicamente estricta la ciencia de los números, y precisamente en eso consiste el contenido de mi esforzado trabajo, que yo había completado en todos los puntos fundamentales ya varios años antes de la aparición del manual de G. Cantor y en un tiempo en que la obra de Bolzano me era, incluso de nombre, completamente desconocida*".

Podría afirmarse que Cantor y Dedekind trabajaron simultáneamente e intercambiaron ideas y reflexiones para establecer la definición de conjunto infinito de que disponemos en la actualidad. Sin embargo, fue Cantor el que más profundizó en las propiedades de los conjuntos infinitos y quien introdujo los conceptos, demostraciones y resultados que le han valido para ser la pieza clave en la percepción actual del infinito matemático. Algunos de sus logros más relevantes los obtuvo incluso antes de disponer explícitamente de una definición del concepto de conjunto infinito. Más concretamente, fue él quien probó que los conjuntos infinitos no tenían todos el mismo "tamaño" y los jerarquizó, introduciendo el concepto de *cardinal* (originariamente *potencia*) de un conjunto. Este concepto lo estableció de manera análoga al de número de elementos de un conjunto finito. El conjunto infinito *más pequeño* era precisamente el de los números naturales, que denominó el *infinito*

[5] Véase Dedekind (1872).
[6] Véase Bolzano (1851).

*numerable*, $\omega$ ó $\aleph_0$ (lo discreto). Pero el conjunto de los números reales tenía una potencia mayor, siendo el primer ejemplo de *infinito no numerable* $\aleph_1$ (lo continuo)[7]. De este modo, Cantor introduce los ordinales transfinitos y el supremo de los ordinales: el infinito absoluto $\Omega$, que no es un ordinal sino algo que está más allá de todos los ordinales (Cantor, 1899).

Pese a que fue Cantor el que desarrolló una teoría para los números infinitamente grandes (ordinales transfinitos), no creía posible la creación de una teoría similar a la suya para los números infinitamente pequeños. Es más, ni siquiera le parecieron correctos algunos intentos de sus contemporáneos de usar su propia teoría de ordinales transfinitos para crear una teoría, llegando a escribir en una carta sobre esos intentos que buscaban "infectar las Matemáticas con el bacilo del cólera de los infinitesimales" (Cantor, 1893).

De opinión similar era Bertrand Russell (1872-1970), que llegó afirmar lo siguiente sobre el problema de crear una teoría para los infinitesimales: "La filosofía de lo infinitesimal, como acabamos de ver, es básicamente negativa. La gente creía en ella y hoy se ha dado cuenta de su error. La filosofía del infinito, por el contrario, es totalmente positiva" (Russell, 1901). Además, en este artículo argumentaba que el establecimiento de una teoría de los infinitesimales permitiría concluir que las paradojas de Zenón no eran tales paradojas, sino certezas que chocarían con nuestra intuición. El propio Russell (1903) llegó a dar una definición de magnitud infinitamente mayor o infinitamente menor que otra dada.

David Hilbert (1862-1943) también se preocupó por el estudio del infinito y es a él a quien se atribuye una curiosa situación ambientada en la problemática del infinito (Stewart, 1998). Se plantea la existencia de un hotel (denominado Gran Hotel Hilbert, por motivos obvios) que disponía de $\omega$ habitaciones. Una de las paradojas que planteaba el número de habitaciones de este hotel era que, incluso estando lleno, siempre podían introducirse nuevos huéspedes (aun cuando el número de nuevos huéspedes era infinito numerable). El límite de la capacidad de este hotel era $\aleph_1$. En las Figuras 1 y 2 representamos esquemáticamente la situación planteada por Hilbert.

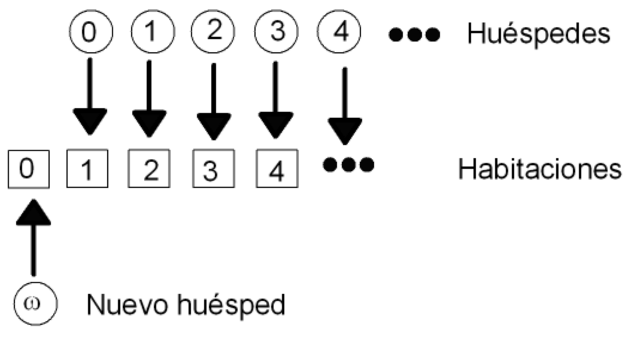



Figura 1: Un nuevo inquilino llega al Gran Hotel Hilbert.

[7] Véase Cantor (1874).

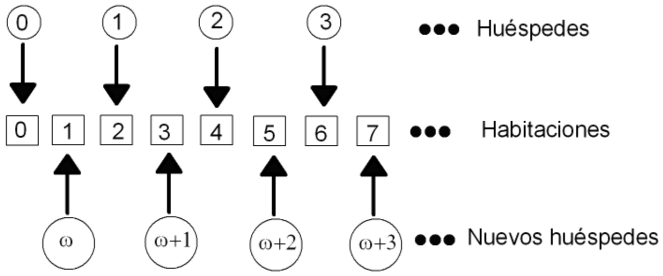
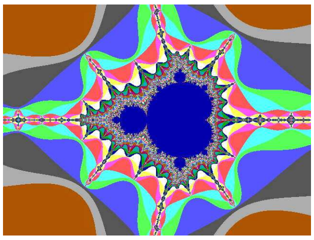



Figura 2: Llega una cantidad numerable de huéspedes.

A pesar de que el concepto de infinito parecía estar rigurosamente definido, siguió siendo causa de controversias y paradojas. Por ejemplo, en 1904 Helge von Koch (1870-1924) construyó una curva continua cerrada consistente en repetir indefinidamente el siguiente proceso: en un triángulo de lado 1, dividir cada lado en tres partes iguales y levantar un triángulo equilátero con cada parte central como base, siempre hacia el exterior del triángulo anterior y suprimiendo sus bases. Esta curva presenta la característica de que la longitud del arco entre dos puntos arbitrarios de la curva es infinita. Esto llevó a estudiar otras curvas que se obtenían con procedimientos análogos o verificando esa misma propiedad. Benoit Mandelbrot (n. 1924) las denominó *fractales* en 1975, estudiando sus propiedades en lo que se ha denominado *Geometría Fractal*[8].



Kurt Gödel[9] (1906-1978) probó en la década de 1930, como corolario de sus Teoremas de Incompletitud, que la consistencia de la Teoría de Conjuntos no podía probarse dentro del propio sistema. *Grosso modo*, en sus Teoremas de Incompletitud se demostraba que siempre existirían ciertos problemas sencillos que no se podrían resolver con una teoría axiomática. Además, la existencia de conjuntos infinitos no puede deducirse del resto de los axiomas de la Teoría de Conjuntos.

Como dijimos antes, durante el s.XX se buscaba una teoría para los infinitesimales similar a la existente para los números transfinitos. El problema de esta teoría sería formalizar lo infinitamente continuo desde el punto de vista de la ordenación del conjunto de números que se obtuviese. Felix Hausdorff (1868-1942) demostró la posibilidad de ordenar lo absolutamente continuo usando un superdiccionario que usaba solo dos letras[10]. Sin embargo, usando ese superdiccionario no podía definir ni una operación suma ni una operación producto. Fue J. H. Conway[11] (n. 1937) el que descubrió una clase absolutamente continua de

[8] Para más información, véase Mandelbrot (1975).
[9] Véase Gödel (1931).
[10] Véase Kuratowski y Mostowski (1968), pág. 336.
[11] Véase Conway (1976).

números en la que podían definirse ambas operaciones: los *números surreales*. Estos números nacen de una sucesión infinita de días, un día de creación para cada ordinal. Además, llegó a obtener una definición para el símbolo $\infty$ del infinito potencial: el espacio entre los números surreales infinitamente largos y los finitamente largos, lo cual podía expresarse en la siguiente fórmula $\infty = \sqrt[\Omega]{\omega}$. Esta expresión relaciona el infinito potencial ($\infty$), el infinito actual más sencillo ($\omega$) y el infinito absoluto ($\Omega$).

Sin embargo, para utilizar números infinitesimales no suele recurrirse al cuerpo de los números surreales, sino que se emplea una extensión más pequeña formada por los denominados *números hiperreales* o *números no estándar*, introducidos por Abraham Robinson[12] (1918-1974). En Lightstone (1972) se muestran los infinitesimales de manera sencilla y directa a partir de lo ya explicado por Robinson. Según su explicación, los infinitesimales consisten en suponer la existencia de números positivos más pequeños que cualquier número real positivo dado, añadiendo como postulados todos los enunciados que se saben ciertos para los números reales. Estos números permiten eliminar ciertos enunciados conocidos como de "tipo $\varepsilon$-$\delta$" (en límites y continuidad, por ejemplo), permitiendo expresar algunas ideas más intuitivamente. Para ello, lo que se hace es ampliar el cuerpo de los números reales con otros números que denomina *naturales infinitos* (no exactamente iguales a los transfinitos). No hay ningún número natural infinito más pequeño que los demás y entre dos naturales infinitos hay una cantidad "infinitamente grande" de números naturales infinitos. También se desarrollan estas ideas para el cuerpo real. Toda afirmación verdadera para los reales es cierta también para esta extensión, siempre que se reinterprete en su correspondiente sentido. Así, por ejemplo, los números infinitos poseen un inverso multiplicativo, que son precisamente los infinitesimales.

## 2. El concepto de infinito para la sociedad

Creemos conveniente hacer algunos comentarios a continuación sobre la percepción del infinito en la sociedad. Por eso, olvidaremos momentáneamente el trasfondo y formalismo matemáticos y nos centraremos en cómo se ha definido y define dicho concepto para los no-matemáticos. Comenzaremos, pues, con una aproximación semántica a partir de las acepciones de infinito que indica la XXII Edición del Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua. La primera y más habitual es *que no tiene ni puede tener fin ni término*; también puede significar *muy numeroso o enorme* y *excesivamente o muchísimo*. Obsérvese que estas últimas acepciones conllevan la posibilidad de usar la palabra *infinito* cuando estamos hablando de cantidades (finitas) muy grandes. También aparece una acepción que corresponde a tratar infinito como un *lugar impreciso en su lejanía y vaguedad* e, incluso, cuando se hace referencia a una cámara fotográfica, como *última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante*. Es más, en el propio DRAE aparecen dos acepciones del infinito correspondiente a las Matemáticas: la primera es *valor mayor que cualquier cantidad asignable* y la segunda *signo ($\infty$) con que se expresa ese valor*. En consecuencia, para alguien ajeno a las Matemáticas, el infinito matemático debe ser un valor (numérico) más grande que cualquier otro y que viene simbolizado por un *ocho tendido*. De este

[12] Véase Robinson (1969).

modo, se estaría fomentando que la sociedad pensase en la existencia de un único infinito (y no de varios niveles de infinito, tal y como se vio en la sección anterior) y que este podría manejarse del mismo modo que se maneja cualquier número natural.

Analizándola brevemente, esta definición del infinito matemático dada por la RAE seguiría manteniendo el infinito potencial aristotélico, un infinito que nunca se alcanza y cuyo significado se reduce a poder seguir avanzando y considerar algo cada vez más grande. De hecho, ya dijimos que este ha sido el concepto que en la Filosofía y las Matemáticas se ha considerado válido hasta el s.XIX, cuando Dedekind y Cantor establecieron la existencia de un infinito que "realmente existe" y que podría compararse con el infinito actual aristotélico. Desafortunadamente, en la sociedad rara vez se tiene una idea clara del infinito y en el mejor de los casos se piensa en una cantidad más grande que cualquier otra dada, o en un punto del espacio que nunca se alcanza por mucho que andemos. Es mucho más habitual encontrar opiniones irracionales, confusiones múltiples o, incluso, quien abusa del concepto para relacionarlo con lo trascendente o lo esotérico.

En el ámbito religioso no es inusual encontrar términos o conceptos que están relacionados con el concepto de infinito. Desde la antigüedad, el *ser supremo* o *dios primordial* de las diversos panteones religiosos ha sido dotado de cualidades que superaban, sin límites conocidos, las de los humanos. Por poner algunos ejemplos, el ser supremo en la mitología asiria se llamaba Assur y su nombre estaba formado por dos signos: *as* (dios) y *shar* (infinito). Igualmente, el ser supremo para los quechuas se llamaba Inti y entre sus cualidades se encontraba la omnipotencia y la misericordia infinita. Estas dos cualidades las compartía con la diosa quechua de la Tierra, Pachamama. También el dios principal del panteón persa estaba relacionado con el infinito, ya que Zurvan Akarana, que es como se llamaba, era el dios del infinito y del espacio. También la religión bribri de Costa Rica asociaba la omnipotencia y la omnipresencia a su gran espíritu primordial, Sibú.

En la actualidad, las religiones siguen incluyendo el concepto de infinito en sus discursos. Pongamos como ejemplos las tres religiones con más adeptos en el planeta: el cristianismo, el islam y el hinduísmo. En las tres aparece el concepto de infinito de una u otra manera para definir a su *ser supremo*:

El cristianismo, en todas sus variantes, adjudica a Dios cualidades que consisten en un salto al infinito de cualidades que poseemos los seres humanos. Así, Dios es *ilimitado*, *omnipresente*, *inalcanzable* o *infinitamente bueno* y *misericorde*.

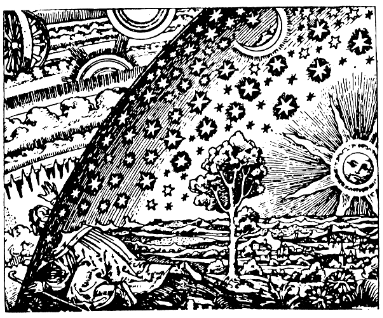
En el islam, Allah es el único ser supremo y es eterno, infinito, todopoderoso, misericordioso y comprensivo y su saber es ilimitado e intemporal, al igual que ocurre en la religión cristiana. Lo curioso es que el islam carece de una palabra para designar el concepto de infinito; el término *lâ nihâi*, que se utiliza con ese fin, es un neologismo que se introdujo para traducir los textos helénicos. Desde el punto de vista del islam, no tiene sentido hablar de una pluralidad de infinitos o de cosas que son infinitas: solo existe un infinito, que es precisamente Allah.

Para los hindúes, Brahman es el ser supremo e infinito, es la única esencia real y eterna. Para ellos, el universo es un ciclo eternamente repetido de creación, conservación y disolución, representado por la trinidad Brahma (creador), Vishnú (preservador) y Shiva (destructor), todos ellos aspectos del mismo Brahman.

En las tres religiones de las que acabamos de hablar se cree en la inmortalidad de las almas y en una *vida eterna*, que no tiene fin. En todas ellas se busca disfrutar de la presencia del ser supremo en el *paraíso*, lugar que recibe un nombre distinto según la religión de la que estemos hablando. Esa vida ya no tendrá fin y promete una felicidad infinita.

Pero no solo la religión ha sido fuente de discusiones sobre la noción de infinito. En la filosofía occidental ha sido muy habitual discutir sobre qué era el infinito o si este infinito existía realmente. Además, en Europa esta discusión siempre ha estado muy relacionada con la religión cristiana, ya que la materialización del concepto de infinito se tenía casi por equivalente a la existencia de Dios.

Ya hemos hablado del problema filosófico que creó el concepto de infinito en la civilización griega. Esta discusión dijimos que llevó a la diferenciación por Aristóteles entre el infinito potencial y el infinito actual, siendo solo posible para él el primero de los dos. La Iglesia Católica siempre defendió las tesis de Aristóteles acerca del infinito potencial y del infinito actual. Ejemplos de esta postura son las ideas de San Agustín de Hipona (354-430) y de Santo Tomás de Aquino (h.1225-1274). El primero afirmó que solo Dios y sus pensamientos eran infinitos[13], mientras que el segundo decía que, a pesar de que Dios era infinito, no podía crear cosas absolutamente infinitas[14].



El primer pensador postplatónico que adoptó la creencia en la infinitud de Dios fue Plotino. Este autor[15] afirmó que Dios estaba fuera de todo número y bajo ningún límite. De hecho, la existencia de un concepto de infinito fue usado habitualmente como argumento para la demostración de la existencia de Dios, ya que estas demostraciones se basaban en la imposibilidad de proceder infinitamente. Así se plantearon el argumento ontológico de San Anselmo de Canterbury[16] (1033-1109) o las cinco vías de Santo Tomás, aunque no siempre estaban de acuerdo los razonamientos, como ocurría por ejemplo con el rechazo del argumento ontológico por parte del propio Santo Tomás de Aquino.

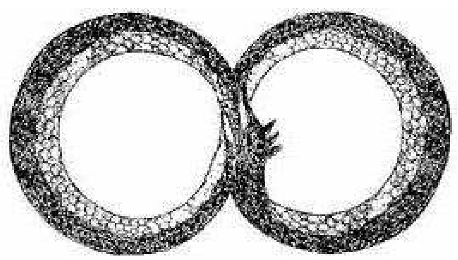
Pensadores posteriores también se preocupaban por el tema, mostrando su conformidad o disconformidad con este tipo de razonamientos. Por ejemplo, René

[13] Véase Agustín de Hipona (413-426), Libro XII, Enunciado 18.
[14] Véase Tomás de Aquino (1265-1272) Parte Primera, Pregunta 7, Artículos 2 a 4.
[15] Véase Plotino (h.250 a.C.), V Enéada, V Tratado, Parte 11.
[16] Véase Anselmo de Canterbury (1070-1078), Libro II.

Descartes (1595-1650) creía en una serie de ideas innatas en el ser humano, como podían ser las de infinito o perfección, y que solo podían surgir de un ser con dichas cualidades[17]. Estos razonamientos eran muy similares a los esgrimidos anteriormente por San Anselmo y San Agustín. De este modo, lo finito provenía de lo infinito (como vimos que también ocurriría en Matemáticas).

En el sentido contrario se encontraba Georg Wilhelm Friedrich Hegel[18] (1770-1831), que criticaba a la religión por hacer a Dios inaccesible y desligado de la realidad. Su pensamiento buscaba reconciliar todas las dimensiones de lo real, entre ellas la dicotomía clásica infinito-finito. Para él no tenía sentido esta dualidad, ya que un infinito que excluye de sí lo finito se convierte en algo con limitaciones, una parte de todo lo real, con lo que no podría ser infinito. Para evitar esta contradicción, Hegel introdujo el Absoluto (Dios), que es el concepto filosóficamente más elevado de todos. De este modo, tanto lo finito como lo infinito son dimensiones de ese Absoluto.

También ha habido numerosas utilizaciones del infinito por parte de los estudiosos de lo esotérico, unas más fundamentadas que otras. Se cree que el símbolo del infinito introducido por Wallis tuvo ya sus precedentes religiosos en algunas representaciones del Ouroboros griego. El Ouroboros se representaba como una serpiente que mordía su cola y su disposición era o bien circular o bien en forma de un ocho. Era un símbolo originado en el Antiguo Egipto (h. 1600 a.C.) y estaba asociado al Sol, puesto que representaba los viajes del disco solar (Neumann, 1949). En el gnosticismo (un grupo de corrientes filosófico-religiosas de la antigüedad que alcanzó su mayor difusión en los s.II y III), el Ouroboros pasó a representar el carácter infinitamente cíclico del mundo; se relacionaba con la naturaleza cíclica de las cosas que comienzan en cuanto concluyen y representaba el tiempo y la continuidad de la vida.



En el tarot, el símbolo del infinito se ha asociado desde el s.XVII a la carta del arcano mayor de El Mago. Además, esta carta tenía asociada tradicionalmente la letra Aleph, letra que Cantor utilizó para representar sus números transfinitos, ¿casualidad, coincidencia...? En la carta de El Mago en el Tarot de Marsella (de 1751) se observa un sombrero en forma de $\infty$ y cómo la postura de la figura del mago se asemeja a la letra Aleph. Es precisamente en este Tarot cuando aparece por primera vez el símbolo del infinito asociado a El Mago y en el que la disposición de la figura asemeja a la letra Aleph. Sin embargo, posiblemente la carta de El Mago está asociada a la letra hebrea Aleph por otros motivos[19].

[17] Véase Descartes (1641), Meditación I.
[18] Véase Hegel (1807 y 1812-1816).
[19] Véanse Filipas (2003) y Lévi (1854-1856).


En relación con la discusión sobre el infinito en las cosas creadas por Dios, siempre ha habido razonamientos discutidos e, incluso, censurados. En la Filosofía Europea surgieron pronto voces en desacuerdo con la doctrina eclesiástica de que solo Dios era infinito. El primer argumento clásico de no acotación del espacio fue esgrimido por Lucrecio[20] (h.95-55 a.C.): "Supongamos que el espacio está acotado y que alguien hace su camino a su límite más lejano y lanza un dardo volante. El dardo debe pasar el borde (luego no hay borde) o el dardo se para (algo más allá del borde lo para). En ambos casos el universo no tendría fin".

Otro de los pensadores que creían en la infinitud del espacio fue Giordano Bruno (1548-1600), el cual hizo una férrea defensa de sus ideas en Bruno (1584), las cuales defendió y enseñó por toda Europa hasta que la Inquisición lo quemó por herejía. Incluso en el s.XVIII, pensadores como Immanuel Kant (1724-1804) afirmaban que las cosas existen en el espacio cuando son percibidas por la mente. En consecuencia, los espacios infinitos no existirían, ya que no pueden ser percibidos por la mente tras reflexionar un período de tiempo finito (Kant, 1781).

En 1854, Riemann[21] (1826-1866) encontró un fallo al argumento esgrimido por Lucrecio: bastaría considerar que el universo es la superficie de una hiperesfera de $R^4$. Rucker (1982) afirma que de este modo y de otros semejantes sería posible construir una espacio tridimensional que fuese finito pero sin puntos en el borde. Además, según las hipótesis de Einstein (1920 y 1922), hay dos posibilidades sobre cómo podría ser nuestro universo: un universo hiperesférico (cerrado, no acotado, que se expande y luego se contrae a un único punto) o un espacio infinito que nunca deja de extenderse. Actualmente, es la primera posibilidad la más ampliamente aceptada por la comunidad científica.

En cuanto a la sociedad actual, hemos realizado un estudio simple sobre la aparición y uso de la noción de *infinito* (y sus derivados, palabras como *infinitud* o *infinitésimo*). Para ello, hemos analizado el contexto en que aparecen estos términos en los diferentes medios de comunicación; en concreto, consideramos televisión, radio, prensa e Internet (mayoritariamente foros y blogs, pero también cualquier otro tipo de páginas).

[20] Véase Lucrecio (50 a.C.).
[21] Véase Riemann (1868).

Los términos que se han considerado para la primera parte de este estudio han sido los siguientes: *infinito*, *infinitos*, *infinitud*, *infinidad* e *infinitamente*. La aparición de estos términos nos ha sugerido la definición de distintas categorías (no excluyentes), que indicamos a continuación: títulos o titulares que utilizan el infinito para llamar la atención; entidades en la que su nombre hace alusión al infinito; anuncios o descripciones de productos que emplean el infinito; esoterismo; religión; Matemáticas; Física; "infinito" como equivalente a "mucho"; canciones con alusión al infinito; libros con alusión al infinito en el título; y, finalmente, ocasiones en las que se hace un uso positivo de la noción de infinito y otras en las que se hace un uso despectivo.

Después de ponderar las apariciones por la frecuencia de los términos respecto al total de información, los porcentajes de aparición de los términos en cada una de las categorías pueden presentarse en forma de tabla:

| infin... | …ito | …itos | …ito/s | …itud | …idad | …itamente | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % del total | 62.2 | 7.7 | 69.9 | 1 | 13.6 | 15.5 | 100 |
| Titulares | 50.5 | 55.2 | 52.9 | 53.8 | 27.86 | 51.8 | 51.5 |
| Marcas | 6.4 | 3.4 | 4.4 | 0 | 2.1 | 7.2 | 6.2 |
| Anuncios | 13.8 | 4.3 | 8.9 | 0 | 32.5 | 10.8 | 22.6 |
| Esoterismo | 6.4 | 1.7 | 4 | 3.8 | 3.6 | 0.5 | 4.1 |
| Religión | 3.7 | 0.9 | 2.2 | 19.2 | 2.1 | 10.8 | 7.5 |
| Matemáticas | 9.2 | 19.8 | 14.7 | 19.2 | 3.6 | 9.2 | 13.5 |
| Física | 11.9 | 4.3 | 8 | 7.7 | 0.5 | 11.8 | 9.4 |
| $\infty$="Mucho" | 23.9 | 41.4 | 32.9 | 7.7 | 64.9 | 39 | 59.7 |
| Canciones | 10.1 | 8.6 | 9.3 | 0 | 4.1 | 1.5 | 6.9 |
| Títulos | 6.4 | 9.5 | 8 | 7.7 | 0.5 | 3.6 | 5.8 |
| Positivo | 31.2 | 44 | 37.8 | 46.2 | 66 | 61.9 | 74 |
| Negativo | 9.2 | 27.58 | 18.7 | 15.4 | 17.4 | 13.4 | 22.7 |

Cuadro 1: Porcentajes de aparición de cada término "infinito".

Repitiendo el estudio anterior para los términos *infinitésimo*, *infinitésimos*, *infinitesimal* e *infinitesimales*, se obtienen otras categorías: títulos o titulares que utilizan el infinito para llamar la atención; esoterismo; Matemáticas; Física; páginas de asignaturas universitarias; libros con alusión al infinito en el título.

| infinit... | ...itésimo | …itésimos | … itésimo/s | ...itesimal | …itesimales | ..itesimal/es | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % del total | 18.6 | 4.7 | 23.25 | 46.5 | 30.2 | 76.74 | 100 |
| Titulares | 5.6 | 0 | 4.2 | 0 | 30 | 12.8 | 8.6 |
| Esoterismo | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | 5.26 | 9.7 |
| Matemáticas | 83.3 | 100 | 87.5 | 73 | 20 | 68.4 | 74.1 |
| Física | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | 5.3 | 3.7 |
| Universidad | 22.2 | 33.3 | 25 | 56.8 | 10 | 48.9 | 35.8 |
| Títulos | 0 | 0 | 0 | 16.2 | 10 | 14 | 9.9 |

Cuadro 2: Porcentajes de aparición de cada término "infinitesimal".

El lector interesado puede comprobar el uso del concepto de infinito de una forma sencilla, por ejemplo, usando cualquier motor de búsqueda de los disponibles en Internet.

## 3. El infinito como concepto matemático

Una vez comentado el concepto de infinito que puede tener una persona ajena a las Matemáticas, pasamos a establecer diferentes formas de definirlo en las Matemáticas actuales. Como ya hemos indicado, son varias las posibles formas de aproximarse al infinito; aquí hablaremos de los números transfinitos, los diferenciales, los infinitésimos y los límites, además de la justificación de lo infinito también desde el punto de vista aritmético y operacional. Todos ellos son conceptos empleados en las Matemáticas actuales y que persiguen justificar lo infinito tanto en el sentido numérico como en el de las magnitudes.

Para definir los números transfinitos, se define primero lo que es un conjunto infinito y un *conjunto infinito* es aquel que tiene un subconjunto propio suyo que esté en correspondencia biunívoca con el total. Consecuentemente, por *conjunto finito* se entiende aquel que no es infinito. Para saber cuántos elementos tiene un conjunto, se define el *cardinal* como la clase de equivalencia de todos aquellos conjuntos que están en biyección entre sí[22]. El ejemplo más sencillo de conjunto infinito es el de los números naturales y se conoce como el *infinito numerable*, $\aleph_0$, o discreto. Pero hay al menos un segundo tipo de infinito, el *no numerable*, cuyo caso más conocido es el continuo o el cardinal del conjunto de los números reales, $\aleph_1$. En referencia a los diferentes cardinales o números transfinitos, sigue buscándose hoy día respuesta a si la hipótesis del continuo es cierta. Esta hipótesis afirma que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, es decir, que no hay un número transfinito entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$. De hecho, el problema del continuo de Cantor es indecidible sobre la base de nuestras teorías matemáticas. Por cierto, la hipótesis del continuo de Cantor se puede generalizar a esta otra hipótesis: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha$, siendo $\alpha$ un ordinal cualquiera.

Gödel (1940) probó que afirmar la hipótesis del continuo era consistente con los axiomas de la Teoría de Zermelo-Fraenkel. Pero Paul J. Cohen[23] (1934-2007) probó en 1963 que negar dicha hipótesis también era consistente con dicha teoría. De hecho, hoy día solo se puede responder afirmativamente a esta cuestión si se acepta el axioma de elección. El problema está en que no todos los matemáticos aceptan este axioma y, en consecuencia, los resultados que lo utilizan.

Sin salir del ámbito de la Lógica Matemática, podemos hacer referencia también al denominado *Axioma del Infinito* o *de Infinitud* de la Teoría de Zermelo-Fraenkel. Este axioma fue enunciado primeramente por Zermelo[24] (1871-1953) y asegura la existencia de conjuntos infinitos, más concretamente de conjuntos que pueden construirse por recursividad. Un enunciado del mismo es el que indicamos a continuación:

$$\exists\, a\ (\varnothing \in a \wedge \forall x\ (x \in a \rightarrow \{x\} \in a)).$$

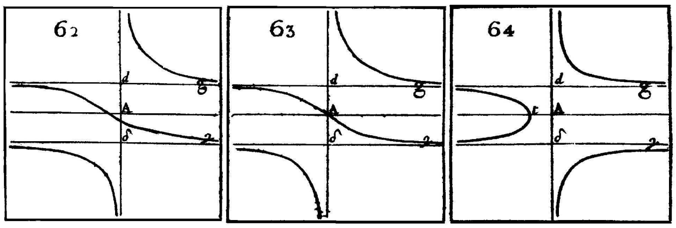
Este axioma se puede también interpretar como la justificación de la inducción matemática, ya que la construcción de los números naturales en la Teoría de Conjuntos se hace a partir del conjunto vacío $\varnothing$, aplicando este axioma. Así, $\varnothing$ es el 0, $\{\varnothing\}$ es el 1 y, dado un número natural $n$, su siguiente se define como $n \cup \{n\}$. En

[22] Véase Halmos (1960) para una explicación intuitiva con más detalles.
[23] Véase Cohen (1966).
[24] Véase Zermelo (1908).

consecuencia, en la inducción o recursividad matemática encontramos también la noción de infinito. De hecho, la inducción matemática se emplea cuando se quiere probar la veracidad de un postulado para un conjunto infinito numerable. De este modo, la inducción matemática es un procedimiento demostrativo que se basa esencialmente en el concepto de infinito. Para más información sobre el concepto de infinito y su relación con la Lógica Matemática y la Teoría de Conjuntos, además de algunos de los problemas a que ha dado lugar en dichas áreas, el lector puede consultar Jech (1991).

El otro concepto de las Matemáticas actuales que más claramente se relaciona con el infinito es el de *límite*. En su caso más simple, el concepto de límite permite hablar rigurosamente de las variaciones infinitamente pequeñas en la variable independiente de una función real de variable real y de cómo el resultado de esas variaciones se acerca "infinitamente" a un valor de la función, o se hace infinitamente grande o pequeño (lo que denotamos por *tender a* $+\infty$ o *a* $-\infty$, respectivamente). No obstante, en su desarrollo se tiene que recurrir a expresiones que no son intuitivas y que conllevan un considerable nivel de abstracción para el que las lee por primera vez. Pongamos como ejemplo la expresión que describe que una variación infinitamente pequeña en la variable independiente hace que la función se haga infinitamente grande, es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \{\forall M>0\ \exists\delta>0 \mid x\in \mathrm{Dom}(f)\wedge 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>M\}.$$



Estos no han sido los únicos conceptos matemáticos creados para justificar el infinito. Relacionado con el concepto de límite, y antes de su establecimiento riguroso, se empleó el concepto de *infinitésimo* y de *infinito en un punto*. Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se dice que $f$ es un *infinitésimo* en un punto $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ si $\lim_{x\to a} f(x)=0$. Anteriormente a establecer esta expresión formal de infinitésimo, se decía que un infinitésimo era una cantidad infinitamente pequeña. Según la definición que aquí mostramos, los infinitésimos no son cantidades, sino funciones reales. Se dice que dos funciones reales $f$ y $g$ son infinitésimos equivalentes en $a$ si las dos funciones se comportan de manera similar "infinitamente cerca" de ese punto. Evidentemente, el problema del concepto de infinitésimo es la inclusión del concepto "infinitamente cerca", cuestión que actualmente está solventada con el concepto de límite. Para ello se da la siguiente formulación rigurosa de dos infinitésimos equivalentes en un punto $a$: dos infinitésimos en $a$, $f$ y $g$, son infinitésimos equivalentes en $a$ cuando $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Al final, curiosamente, el infinitésimo, que se utilizaba para evitar el concepto de límite, ha necesitado de dicho concepto para su formalización.

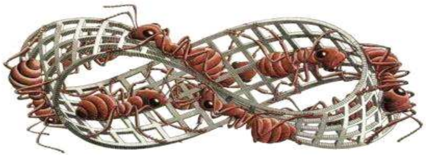
Análogamente a las definiciones de infinitésimo e infinitésimos equivalentes, se pueden introducir las nociones de infinito e infinitos equivalentes cuando se habla de funciones reales. Así, una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice que es un *infinito* en $a\in\mathbb{R}$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ (pudiendo incluirse $+\infty$ ó $-\infty$, según la notación empleada). De este modo, dos infinitos en $a$, $f$ y $g$, se dicen infinitos equivalentes en $a$ cuando $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

Hay dos conceptos más del Análisis Matemático importantes y que están directamente relacionados con el concepto de infinito. Nos referimos a los conceptos de infinitesimal y de diferencial. En Matemáticas, el adjetivo *infinitesimal* equivale a *infinitamente pequeño* o, en términos de límite, con límite 0. A la hora de obtener el concepto de derivada, se estudian incrementos infinitesimales, pero esos incrementos necesitan establecerse de forma rigurosa. Para ello se define el *diferencial* de una variable $x$ como un incremento infinitesimal de la variable.

Otro concepto que está muy relacionado con el infinito es el de *fractal*. Un fractal es a menudo un objeto que exhibe recursividad, o autosimilitud, a cualquier escala. Por autosimilitud queremos decir que podemos tomar una sección suya de modo que el resultado sea la misma figura pero a una escala más pequeña. Esa no es la única propiedad que suelen presentar los fractales; de hecho, un objeto es un fractal si y solo si su dimensión es fraccionaria. No obstante, hemos destacado las nociones de autosimilitud o autosemejanza y recursividad porque ya se ha visto que están intrínsecamente relacionadas con el infinito matemático.

Si enfocamos el estudio desde la Geometría y la Topología, podemos hablar del infinito de otras dos formas más. La primera consiste en el concepto del *infinito topológico*: si consideramos un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, siempre existe un punto en el exterior de una bola cerrada, por muy grande que se considere el radio de la bola. Pues bien, esa definición de infinitud se puede aplicar no solo a los espacios euclídeos, sino a cualquier espacio métrico, con lo que un espacio métrico será infinito (o no acotado) si no se puede recubrir por una cantidad finita de bolas cerradas.

Sin salir de la Topología, podemos hacer referencia a otras propiedades que sirven para clasificar a los espacios topológicos y en las cuales también reside la noción de infinito. Nos referimos, por ejemplo, a las condiciones de compacidad, de Lindelöf y de segundo numerable. El concepto de compacidad, por ejemplo, persigue rebajar cantidades infinitas a cantidades finitas. De hecho, es muy habitual verlo redactado de la siguiente manera: un conjunto es compacto si de cualquier recubrimiento por una infinidad de abiertos es posible extraer un subrecubrimiento formado por una cantidad finita de abiertos. Por su parte, la propiedad de Lindelöf puede verse como una forma de rebajar lo infinito a lo numerable. Suele ser usual la siguiente redacción de la propiedad de Lindelöf para un espacio topológico: de cualquier recubrimiento por abiertos del espacio puede obtenerse un subrecubrimiento numerable. La propiedad de segundo numerable es la que permite que ciertos espacios topológicos puedan construirse con una cantidad numerable de conjuntos. Más concretamente, se dice que un espacio es segundo numerable si existe una base numerable que genere la topología del espacio en cuestión.



Otro concepto geométrico cercano a nuestro análisis es el de los *objetos del infinito*. Ya comentamos cómo Desargues introducía en el plano los conceptos de punto del infinito y recta del infinito, para que dos rectas siempre se cortasen. Pues si disponemos de un espacio euclídeo $R^n$, siempre podemos construir el espacio proyectivo asociado, sin más que considerar un hiperplano (*n-1*)-dimensional que no estaba en el espacio euclídeo considerado y que se considera como el infinito. De este modo, por ejemplo, dos rectas paralelas se cortarán en un punto de ese hiperplano, dos planos paralelos lo harán en una recta de dicho hiperplano y cualesquiera dos objetos paralelos tendrán su intersección (que siempre es no vacía) en dicho hiperplano.

Haciendo una última referencia a la Geometría, la proyección estereográfica de una esfera de $R^3$ en el plano $R^2$ permite trabajar también el infinito del plano $R^2$ como un punto en dicha esfera. Esta proyección de una esfera en el plano se hace desde un polo de la esfera, que precisamente es al que se le puede asociar el infinito del plano. Eso se debe a que cuanto más cerca del polo están los puntos de la esfera, más alejados están entre sí los puntos correspondientes del plano (en el sentido de que los puntos van quedando en el exterior de una bola de $R^2$ de radio cada vez mayor).

## 4. Conclusiones

Incomprensible para unos y adorado por otros, el infinito se ha hecho presente de muy diferentes formas en cada cultura. Entre las aplicaciones matemáticas más conocidas que derivan de él están las demostraciones por inducción o el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes. En la sociedad, las referencias al infinito se relacionan más con la trascendencia o con intentos de conseguir notoriedad (como en los anuncios publicitarios).

En nuestra opinión, la forma de infinito más accesible para cualquier persona es la geométrica, ya que no resulta tan abstracta en dimensiones pequeñas. No obstante, es evidente que la comprensión del concepto matemático es más completa cuando se realiza un acercamiento desde diferentes puntos de vista (a ser posible, de modo simultáneo).

Probablemente, el de la asimilación del infinito siempre será un problema educativo de difícil tratamiento, pero que puede abordarse con buenos resultados desde el convencimiento de que la idea de infinitud evoluciona con el aprendizaje y que relaciona distintas materias, como la Historia, la Filosofía, la Religión, la Lengua, las Ciencias Naturales, la Informática y, por supuesto, la Matemática. A modo de curiosidad, en todas esas áreas del conocimiento, se constata que el concepto de infinito surge de la generalización de lo finito; pero, en el proceso de formalización, resulta que lo infinito es el origen de lo finito.

## Agradecimientos

Los autores quieren agradecer a los profesores Andrés Cordón Franco y Miguel Ángel Gutiérrez Naranjo sus valiosos comentarios sobre versiones previas de este trabajo.


## Bibliografía


Agustín de Hipona (413-426). *De civitate Dei*. Traducido al español en Agustín de Hipona (1982): *La Ciudad de Dios*. Biblioteca de Autores Cristianos.

Anselmo de Canterbury (1070-1078). *Proslogium*. Traducido al español en Anselmo de Canterbury (1952). *Obras Completas*. Biblioteca de Autores Cristianos.

Aristóteles (s.IV a.C.): *Physica*. Traducido al español en Aristóteles (1995): *Física*. Editorial Gredos.

Arquímedes (s.III a.C.). *De mensura circuli*. Traducido al español, bajo el título *Medida del círculo*, en Arquímedes-Eutoctio (2005): *Tratados I-Comentarios*. Editorial Gredos.

Bolzano, B. (1851). *Paradoxien des Unendlichen*. Leipzig. Traducido al español en B. Bolzano (1991). *Las paradojas del infinito*. Universidad Nacional de México.

Boyer, C.B. (1968). *A History of Mathematics*. John Wiley and Sons. Traducido al español en C.B. Boyer (1986): *Historia de la matemática*. Alianza Editorial.

Bruno, G. (1584). *De l'infinito universo et mondi*. Venecia. Traducido al español en G. Bruno (1998). *Del infinito: el universo y los mundos*. Alianza Editorial.

Cantor, G. (1874). *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen*. *J. Reine Angew. Math.* 77, pp. 258-262. Traducida al inglés en W.B. Ewald (1996). *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics.* Vol. 2. Oxford University Press.

Cantor, G. (1878): *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*. J. Reine Angew*. Math.* 84, pp. 242-258. Reimpreso en G. Cantor (1932): *Gesammelte Abhandlungen matematischen und philosophischen Inhalts*. Springer.

Cantor, G. (1883). *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Leipzig. Traducida al inglés en W.B. Ewald (1996): *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics.* vol. 2. Oxford University Press.

Cantor, G. (1893): *Carta a Giulio Vivanti de* 13 *de diciembre de* 1893. Traducida al inglés en J.W. Dauben (1979). *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Harvard University Press, p. 131.

Cantor, G. (1899): *Carta a Dedekind de* 28 *de julio de* 1899. Traducida al inglés en J. van Heijenoort (ed.) (1967): *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, 1871-1931. Harvard University Press, pp. 113-117.

Cohen, P.J. (1966): *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Benjamin.

Conway, J.H. (1976): *On Numbers and Games*. Academic Press.

Dedekind, R. (1872): *Stetigkeit und irrationale zahlen*. Vieweg & Sohn. Traducido al español, bajo el título *Continuidad y números irracionales*, en R. Dedeking (1998): *¿Qué son y para qué sirven los números*? y otros escritos sobre los fundamentos de la Matemática. Alianza Editorial.

Dedekind, R. (1888): *Was sind und was sollen die zahlen*?, Braunschweig. Traducido al español, bajo el título *¿Qué son y para qué sirven los números*?, en R. Dedeking (1998): *¿Qué son y para qué sirven los números*? y otros escritos sobre los fundamentos de la Matemática. Alianza Editorial.

Desargues, G. (1639): *Brouillon project d'une atteinte aux événements des recontres d'un cone avec un plan*. París. Traducido al inglés, bajo el título *Rough Draft on Conics*, en J.V. Field and J.J. Gray (eds.) (1987). *The Geometrical Work of Girard Desargues*. Springer.

Descartes, R. (1641). *Meditationes de Prima Philosophia*. Traducido al español en R. Descartes (2005): *Meditaciones filosóficas*. Alianza Editorial.

Einstein, A. (1920): *Relativity: The Special and General Theory*. Henry Holt. Traducido al español en A. Einstein (2005). *Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General*. Alianza Editorial.

Einstein, A. (1922): *The Meaning of Relativity*. Princeton University Press. Traducido al español en A. Einstein (1980): *El significado de la relatividad*. Espasa-Calpe.

Euclides (h. 300 a.C.): *Stoicheia*. Traducido al español en Euclides (1991-1996): *Elementos* (3 volúmenes). Editorial Gredos.

Fedriani, E.M. (2000): *Un año más, el Siglo se acaba*. Epsilon, Revista de la S.A.E.M. Thales 46-47, pp. 155-162.

Fedriani, E.M.; Tenorio, A. F. (2004): *Los sistemas de numeración maya, azteca e inca*. Lecturas Matemáticas 25, pp. 159-190.

Filipas, M. (2003). *A Lexicon Theory of Tarot Origin*. Association for Tarot Studies Newsletter Archive. Online Edition 4.

Galilei, G. (1638): *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nove scienze*. Louis Elsevier. Traducido al español en G. Galilei (2004): *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Editorial Losada.

Gödel, K. (1931): *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*. Monatshefte für Mathematik und Physik 38, pp. 173-198. Traducido al español, bajo el título *Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines*, en K. Gödel (2006): Obras completas. Alianza Editorial.

Gödel, K. (1940): *The consistency of the continuum hypothesis*. Princeton University Press. Traducido al español, bajo el título "*La consistencia de la hipótesis del continuo*", en K. Gödel (2006): Obras completas. Alianza Editorial.

Guedj, D. (1996): *L'empire des nombres*. Gallimard. Traducido al español en D. Guedj (1998): *El imperio de las cifras y de los números*. Ediciones B.

Halmos, P.R. (1960): *Naive Set Theory*. D. Van Nostrand. Traducido al español en P.R. Halmos (1965): *Teoría intuitiva de los conjuntos*. Compañía Editorial Continental.

Hegel, G.W. (1807): *Phänomenologie des Geistes*. Traducido al español en G.W.F. Hegel (2000): *Fenomenología del Espíritu*. Fondo de Cultura Económica.

Hegel, G.W. (1812-1816): *Wissenschaft der logik*. Traducido al español en G.W.F. Hegel (1993): *Ciencia de la Lógica*. Solar.

Jech, T. (1991): *The infinite*. *Jahrbuchder Kurt Gödel Gesellschaft*, Sociedad Kurt Gödel. Traducido al español en T. Jech (2005): *El infinito*. La Gaceta de la RSME 8:2, pp. 369-377.

Kant, I. (1781): *Kritik der reinen Vernunft*. Traducido al español en I. Kant (1978): *Crítica de la Razón Pura*. Alfaguara.

Kline, M. (1972): *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press. Traducido al español en M. Kline (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad.

Kuratowski, K.; Mostowski, A. (1968): *Set Theory*. North-Holland.

Lévi, E. (1854-1856): *Dogme et Rituel de la haute magie*. Gemer Bailli. Traducido al español en E. Lévi (2004): *Dogma y Ritual de Alta Magia*. Editorial Humanitas.

Lightstone, A.H. (1972): *Infinitesimals*. The American Mathematical Monthly 79:3, pp. 242-251.

Lucrecio (50 a.C.): *De Rerum Natura*. Traducido al español en Lucrecio (1987): *De Rerum Natura*. Editorial Planeta.

Mandelbrot, B.B. (1975): *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. Flammarion. Traducido al español en B.B. Mandelbrot (1987): *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión*. Tusquets Editores.

Neumann, E. (1949): *Urprungsgeschichtge des Bewußtseins*. Rascher Verlag. Traducido al inglés en E. Neumann (1995): *The Origins and History of Consciousness*. Princeton Univerity Press.

Plotino (h.250 a.C.): *Enneades*. Traducido al español en Plotino (1983-1998): *Enéadas* (3 volúmenes). Editorial Gredos.

Ribnikov, K. (1960-1963): *Istoriya Matematiki*. Moscow University Press. Traducido al español en K. Ribnikov (1987): *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir.

Riemann, B. (1868): *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13, pp. 133-152. Transcripción de su lectura de habilitación en 1854. Traducido al inglés, bajo el título *On the Hypotheses which lie at the Foundation of Geometry*, en D. E. Smith (ed.) (1929): “A Source Book in Mathematics”. McGraw-Hill, pp. 411-425.

Robinson, A. (1969): *The Metaphysics of the Calculus*. En J Hintikka (ed.) (1969): *The Philosophy of Mathematics*. London, Oxford Univ. Press, pp. 153-163.

Rucker, R. (1982): *Infinity and the Mind*. Birkhäuser. Reeditado en R. Rucker (2005): *Infinity and the Mind*. Princeton University Press.

Russell, B. (1901): *Recent work in the philosophy of Mathematics*. The International Monthly 4, p. 84. Traducido al español en B. Russell (1973): *Obras completas*, Tomo II. Aguilar.

Russell, B. (1903): *The Principles of Mathematics*. Cambridge University Press. Traducido al español en B. Russell (1977): *Los principios de la matemática*. Espasa-Calpe.

Stewart, I. (1998): *Hilbert's Hotel*. New Scientist 19, pp. 59-61.

Tomás de Aquino (1265-1272): *Summa Theologica*. Traducido al español en Tomás de Aquino (1954-1970): *Suma de Teología* (16 volúmenes). Biblioteca de Autores Cristianos.

Wallis, J. (1656): *Arithmetica Infinitorum*. Oxford. Traducido al inglés en J. Wallis (2004): *The arithmetic of infinitesimals*. Springer.

Wattenbach, W. (1869): *Anleitung zur lateinischen Paläographie*. S. Hirzel.

Zermelo, E. (1908): *Unterusuchungen Über die Grundlagen der Mengenlehre I. Matematische Annalen* 65, pp. 261-281. Traducido al inglés, bajo el título *Investigations in the foundations of set theory I*, en J. van Heijenoort (1967): From Hegel to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1871-1931”. Harvard University Press.

**Eugenio M. Fedriani Martel.** Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla (julio de 1996) y Doctor por esa misma universidad (junio de 2001). Actualmente es Profesor Titular de Universidad del Área de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa en la Universidad Pablo de Olavide y Director del Centro de Estudios para Extranjeros de dicha universidad. Sus publicaciones, tanto en revistas como en congresos, son referentes a la Teoría de Grafos, Álgebras de Lie y Didáctica de las Matemáticas.

**Ángel F. Tenorio Villalón.** Nacido el 7 de julio de 1977 en Sevilla. Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla (julio de 2000) y Doctor por esa misma universidad (diciembre de 2003). Actualmente es Profesor Ayudante Doctor en la Universidad Pablo de Olavide y Delegado Provincial de la S.A.E.M. THALES en Sevilla. Sus publicaciones, tanto en revistas como en congresos, son referentes a la Teoría de Lie, la Historia de las Matemáticas y la metodología ECTS en las universidades españolas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 59-67
ISSN: 1815-0640

# De la aritmética al álgebra. Experiencia de trabajo con estudiantes universitarios.

**Nora Ferreyra; Estela Rechimont; Carlos Parodi; Nora Castro**

## Resumen

En este artículo se relata una actividad llevada a cabo con estudiantes de la carrera Profesorado en Matemática, de la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). Se presentó un problema a dichos estudiantes, con la intención de analizar en su producción la exploración matemática que encierra su resolución, tratando de identificar distintas etapas y diferentes momentos en la evolución de las características algebraicas inherentes a la cuestión trabajada.

## Abstract

This article describes an activity carried out with students carrer in Mathematics Teaching; in the National University of La Pampa (Argentina). It presented a problem to these students, with the intention to análise the mathematical exploration production contained in his resolution, trying to identify different levels and different times in the evolution of algebraic characteristics inherent in the question worked.

## Resumo

Neste artigo se relata uma atividade levada a cabo com estudantes do curso de Professorado em Matemática, da Universidade Nacional de La Pampa (Argentina). Apresentou-se um problema a estes estudantes, com a intenção de analisar em sua produção a exploração matemática que encerra sua resolução, tratando de identificar diferentes etapas e diferentes momentos na evolução das características algébricas inerentes à questão trabalhada.

## Marco Teórico

En investigaciones realizadas en los últimos años, en España (Gascón, 2001; Bosch, 1994; Bolea, 2003), se ha caracterizado el álgebra escolar y se han definido algunos indicadores del grado de algebrización de una obra matemática.

### Álgebra escolar como Aritmética Generalizada

De acuerdo a algunas primeras observaciones y al resultado de diversas investigaciones al respecto, el modelo dominante del álgebra en las instituciones escolares, en general es el modelo de la aritmética generalizada.

Desde la perspectiva teórica de Gascón (1993) se identifica el "álgebra escolar" con un simbolismo algebraico que amplía y generaliza un lenguaje aritmético cuya mayor ventaja es haber sido muy utilizado y aplicado previamente en un dominio suficientemente amplio.

Las prácticas o actividades que se identifican como "algebraicas" son una prolongación o generalización de las prácticas aritméticas en cuanto a que generalizan técnicas de resolución e identifican el lenguaje algebraico como una generalización del lenguaje aritmético.

Las prácticas aritméticas se distinguen de las algebraicas (entendidas como generalización de la aritmética) en:

- **La resolución de problemas**

En una resolución aritmética se resuelve una sucesión de problemas simples, en los cuales cada resultado numérico es calculable e interpretable a partir del enunciado, sirve como dato de una etapa posterior y se puede describir con el lenguaje natural. En tanto que en una resolución algebraica no es posible una descomposición en pequeños problemas, cada etapa intermedia corresponde a la producción de una igualdad o relación algebraica.

- **Los resultados obtenidos**

En una práctica aritmética se obtiene una medida concreta en tanto que en una práctica algebraica puede ser una relación, entre dos magnitudes.

- **Los objetos con los que se trabaja**

En aritmética se trabaja con números en tanto que, en una práctica algebraica se manipulan símbolos que deben interpretarse de acuerdo al contexto en el que aparecen.

- **El significado de los signos y símbolos**

En aritmética los símbolos y signos tienen significado muy concreto y preciso, en tanto que en álgebra como aritmética generalizada pueden indicar no sólo acciones sino también relaciones, lo cual puede complicar su utilización e interpretación.

## Álgebra escolar como instrumento de Modelización

Con origen en el modelo clásico de análisis- síntesis, Gascón (1993) propone una reconstrucción de la génesis del álgebra escolar a partir de los problemas verbales y de la modelización matemática. Pone énfasis en la potencialidad para trabajar, resolver o fundamentar métodos de resolución, en clases de problemas. Desde este punto de vista, una actividad matemática algebrizada permitirá la manipulación global de la estructura de los problemas, unificando los tipos de técnicas y tecnologías utilizadas y produciendo nuevos problemas.

Siguiendo a Chevallard y Gascón, la modelización matemática, y en particular la modelización algebraica, se desarrolla en cuatro etapas fundamentales (Bolea, 2003):

- Problemática inicial, que comprende la situación problemática a analizar y las cuestiones o preguntas iniciales que nos formulamos al respecto.

- Construcción del modelo, consiste en identificar y definir las variables involucradas en el problema y las relaciones entre ellas.
- Trabajo del modelo, se basa en manipular las relaciones establecidas, buscar e interpretar nuevas relaciones en pos de responder alguna de las preguntas formuladas inicialmente.
- Producción de problemas nuevos, donde a partir de la modelización del sistema inicial, se simplifica la tarea de plantear nuevas cuestiones, investigar e interpretar nuevos problemas que amplían el conocimiento del sistema estudiado inicialmente.

Puesto que no es posible trazar una línea precisa entre una obra algebrizada y una prealgebraica, consideramos que el avanzar sobre las etapas propuestas nos puede dar un primer indicio del grado de algebrización de un sistema planteado.

## Experiencia

Sobre la hipótesis de la existencia de un proceso de desalgebrización en la escuela media en Argentina, y con el fin de estudiar la respuesta de estudiantes universitarios a una propuesta de modelización algebraica, se planteó la resolución de un problema sencillo a estudiantes de segundo año de la carrera Profesorado en Matemática y se analizó el trabajo de resolución del mismo y las sucesivas reformulaciones en el marco de un proceso de algebrización.

<u>Problema:</u>

*Hay cinco cajas con caramelos. Se quita* $\frac{1}{5}$ *de los caramelos de la primera caja y se agregan a la segunda. Luego se quita* $\frac{1}{5}$ *de los caramelos que hay ahora en la segunda caja y se agregan a la tercera. Más tarde, se quita* $\frac{1}{5}$ *de los caramelos que hay ahora en la tercera caja y se agregan a la cuarta. Finalmente, se quita* $\frac{1}{5}$ *de los caramelos que hay ahora en la cuarta caja y se agregan a la quinta. De esta manera todas las cajas terminan con 172 caramelos cada una. ¿Cuántos caramelos había inicialmente en cada caja?*

## Etapas identificadas en la modelización algebraica del problema

<u>Primera Etapa</u>

El problema admite una resolución aritmética, a través de una cadena de operaciones sencillas. Al ser propuesto a los estudiantes, la mayoría presenta un planteo algebraico del tipo:

*En la primera caja quedarán:* $c_1 - \frac{1}{5}c_1$

*En la segunda caja quedarán:* $\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right) - \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)$

*En la tercera caja quedarán:* $\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)\right) - \frac{1}{5}\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)\right)$

Decimos que este estilo de planteo es algebraico pues se producen igualdades que representan enunciados matemáticos y el resultado final obtenido consiste en un sistema de ecuaciones como el siguiente:

$$c_1 - \frac{1}{5}c_1 = 172$$

$$\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right) - \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right) = 172$$

$$\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)\right) - \frac{1}{5}\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)\right) = 172$$

................................

En general, los estudiantes resolvieron el problema a partir del sistema anterior, limitando su trabajo algebraico a esa producción, considerada, desde nuestro punto de vista, como una primera etapa de algebrización. Esta primera fase consistiría en el planteo de una expresión algebraica y su correspondiente resolución a través de un trabajo aritmético, sin mediar una búsqueda de expresiones algebraicas equivalentes u otro tipo de simplificaciones.

La resolución propuesta por otro grupo de alumnos fue completamente aritmética: "*los* $\frac{4}{5}$ *del contenido de la caja son* 172 *caramelos entonces calculo* $\frac{1}{5}$ *y se lo agrego para obtener el total*".

Con la intención de obtener una generalización y promover una evolución en la tarea de algebrización, se propone modificar el problema y tratar su posible solución si en lugar de mover $\frac{1}{5}$ de los caramelos de cada caja se tomara otra fracción.

La actividad se retoma en un plano puramente aritmético puesto que, al haber planteado las ecuaciones anteriores, ya se observó la posible resolución a través de una simple operación.

Los estudiantes plantean ejemplos, en particular, proponen el problema idéntico, reemplazando la fracción $\frac{1}{5}$ por $\frac{1}{4}$ y conjeturan, a continuación, acerca de distintas posibilidades para la fracción a considerar.

Observan entonces que no cualquier fracción permite plantear un problema resoluble, sin embargo no se avanza en la generalización para una fracción cualquiera $\frac{1}{n}$ puesto que implica un análisis más detallado de la relación entre dicha fracción y el término independiente, identificado en el problema como el número de caramelos que quedan finalmente en cada caja.

Al mantener este número, el 172 en el enunciado del problema, la relación "divide a" se ve encubierta por la operación división y algunos estudiantes no perciben la condición necesaria para la posible resolución.

<u>Segunda Etapa</u>

Con el fin de poder avanzar sobre la generalización, se propone reformular nuevamente el problema y analizar su posible solución si en lugar de terminar todas las cajas con un número específico de caramelos se indica una cierta cantidad $K$.

Este problema no puede abordarse directamente como una aplicación aritmética, requiere trabajo y simplificación de la expresión original para obtener información.

Surge así el análisis en torno a las condiciones que debe cumplir *K* para que las cantidades de caramelos existentes e intercambiadas en las cajas sean números enteros.

En la resolución de los estudiantes se observa una generalización de la técnica de resolución aritmética ya empleada y de las propiedades del número 172 expresado ahora como *K* en las distintas identidades.

Aparecen expresiones del tipo:

- *En la primera caja quedarán:* $c_1 - \frac{1}{5}c_1 = K \rightarrow c_1 = \frac{5K}{4}$
- *En la segunda caja quedarán:* $\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right) - \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right) = K$, entonces $\left(c_2 + \frac{K}{4}\right) - \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{K}{4}\right) = K$, es decir que $c_2 - \frac{1}{5}c_2 = K - \frac{1}{5}K \rightarrow c_2 = K$.
- *En la tercera caja quedarán:* $\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)\right) - \frac{1}{5}\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)\right) = K$,

  de donde: $\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(K + \frac{K}{4}\right)\right) - \frac{1}{5}\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(K + \frac{K}{4}\right)\right) = K$,

  luego: $\left(c_3 + \frac{K}{4}\right) - \frac{1}{5}\left(c_3 + \frac{K}{4}\right) = K \rightarrow c_3 = K$.

Siguiendo: $\left(c_4 + \frac{K}{4}\right) - \frac{1}{5}\left(c_4 + \frac{K}{4}\right) = K \rightarrow c_4 = K$ y $\left(c_5 + \frac{K}{4}\right) = K \rightarrow c_5 = \frac{3}{4}K$.

En este proceso, se observa una actividad algebraica más allá de la transformación aplicada y la utilización de símbolos y letras, dado que se conjetura sobre las condiciones de existencia de una solución entera para $c_i$ a partir de las características de $K$.

En un análisis previo, los estudiantes ya habían obtenido implícitamente la relación $\frac{172}{n-1}$ pero su lectura e interpretación presentaron una mayor dificultad que $\frac{K}{4}$. Consideramos que dicho obstáculo procede de la noción de división y su utilización en este contexto. La división por 4 tiene un sentido aritmético que puede relacionarse con *K* de manera diferente que la división de un número específico por un *n* cualquiera.

La operación división y el número racional adquieren otro sentido al considerar esa cierta cantidad *K*, puesto que ya no se trata de operar y obtener un resultado sino de analizar la relación y generalizar la condición de existencia de una solución entera.

En una práctica aritmética se trabaja con números concretos y no se estudian ni se interpretan las relaciones entre dos magnitudes. Al presentar a los estudiantes esta discusión y señalar las diferencias entre los problemas planteados y sus resultados, se está avanzando en un trabajo algebraico.

Es evidente que este tratamiento se desarrolla en un mayor nivel de algebrización, puesto que se plantea una expresión algebraica, pero además se analizan las propiedades y el instrumento de resolución en forma general.

Si bien se considera el mismo procedimiento aritmético que condujo a la solución del caso anterior, en esta fase, se lo analiza íntegramente, estudiando todas las posibilidades de existencia de una solución.

Los estudiantes se mostraron entusiasmados ante esta generalización y aceptaron interesados el desafío de hacer nuevos planteos, conjeturar y revisar sus conclusiones.

Tercera Etapa

Se retoma la idea anterior y se busca la condición específica para el trabajo con una fracción cualquiera $\frac{1}{n}$. Surge así la expresión: $c_1 = \frac{nK}{n-1}$, donde se advierte la presencia de dos parámetros, relacionados entre sí, que no representan las mismas magnitudes y que aparecen en el enunciado del problema.

El trabajo con el sistema de ecuaciones, a través del proceso de modificaciones sucesivas del problema, se tornó más complejo. Las expresiones planteadas ahora son:

*En la primera caja quedarán:* $c_1 - \frac{1}{n}c_1 = K \rightarrow c_1 = \frac{nK}{n-1}$

*En la segunda caja quedarán:* $\left(c_2 + \frac{1}{n}c_1\right) - \frac{1}{n}\left(c_2 + \frac{1}{n}c_1\right) = K$, entonces $\left(c_2 + \frac{K}{n-1}\right) - \frac{1}{n}\left(c_2 + \frac{K}{n-1}\right) = K$, es decir que $c_2 - \frac{1}{n}c_2 = K - \frac{1}{n}K \rightarrow c_2 = K$.

*Y así siguiendo.*

Cabe señalar que esta complejidad no implica gran diferencia en el nivel de algebrización puesto que sólo se trata de la manipulación de expresiones sin atribuir a las incógnitas o a las relaciones un nuevo significado.

Cuarta Etapa

Finalmente, para mejorar el modelo del problema desarrollado hasta el momento, formulamos la siguiente pregunta: ¿Podríamos pensar en una nueva modificación del problema con un mayor grado de generalidad?

Algunas de las respuestas proporcionadas son:

- "*Se podría pensar que el número de cajas fuera n*".
- "*Se podría pensar en otro número cualquiera de cajas que podríamos señalar con m*".

- "*Se podría pensar que se retiraran distintas fracciones de cada caja*".
- "*Se podría pensar que el número final fuera una fracción de K*".
- "*Se podría proporcionar el número total de caramelos*".

A través de estas respuestas de los estudiantes se observó una gran evolución en cuanto al trabajo algebraico, ya no se piensa en la resolución del problema con un número como resultado sino en la construcción de un conjunto de problemas que responden al mismo patrón de resolución y cuya determinación depende de los parámetros previamente fijados.

Como resultado de una de las preguntas formuladas surgió el siguiente problema:

1) Hay cinco cajas con caramelos. Se quita $\frac{1}{n_1}$ de los caramelos de la primera caja y se agregan a la segunda. Luego se quita $\frac{1}{n_2}$ de los caramelos que hay ahora en la segunda caja y se agregan a la tercera. Más tarde, se quita $\frac{1}{n_3}$ de los caramelos que hay ahora en la tercera caja y se agregan a la cuarta. Finalmente, se quita $\frac{1}{n_4}$ de los caramelos que hay ahora en la cuarta caja y se agregan a la quinta. Si todas las cajas terminan con una misma cantidad *K* de caramelos cada una. ¿Cuántos caramelos había inicialmente en cada caja?, ¿Qué características debe tener *K* ?.

Puesto que en el caso anterior se había observado la relación entre *K* y $n-1$, la primera conjetura que propusieron los estudiantes fue que *K* debía ser múltiplo de $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, $n_3 - 1$ y $n_4 - 1$.

Realizaron el trabajo siguiendo el mismo esquema que en los casos anteriores y basándose en el dato de pertenencia de las cantidades iniciales al conjunto de los números enteros concluyen que efectivamente *K* debe ser múltiplo de $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, $n_3 - 1$ y $n_4 - 1$.

Consideramos que este trabajo se realizó en una última etapa de este camino de algebrización a partir de un problema, completándose con la transferencia, es decir la aplicación del sistema modelizado y la interpretación del trabajo realizado y los resultados obtenidos en otras situaciones, a priori diferentes.

En este sentido, algunos planteos que surgieron del grupo son:

- *"Si se tratase de m cajas, debe verificarse la relación:* $c_1 + c_2 + \ldots + c_m = m \cdot K$*"*
- *"Así como se cambió una misma fracción por diferentes, podría cambiarse un mismo K por varios distintos y generalizar más"*

Algunos problemas presentados por el grupo son:

1) Hay cinco cajas con caramelos. Se quita $\frac{1}{8}$ de los caramelos de la primera caja y se agregan a la segunda. Luego se quita $\frac{1}{6}$ de los caramelos que hay ahora en la segunda caja y se agregan a la tercera. Más tarde, se quita $\frac{1}{4}$ de los caramelos que hay ahora en la tercera caja y se agregan a la cuarta. Finalmente, se quita $\frac{1}{2}$ de los caramelos que hay ahora en la cuarta caja y se agregan a la quinta. Si todas las cajas terminan con una misma cantidad 210 caramelos cada una. ¿Cuántos caramelos había inicialmente en cada caja?.

Los estudiantes anticiparon la respuesta aplicando directamente el resultado obtenido anteriormente.

2) Hay una cierta cantidad de cajas con caramelos. Se quita $\frac{1}{3}$ de los caramelos de la primera caja y se agregan a la segunda. Luego se quita $\frac{1}{3}$ de los caramelos que hay ahora en la segunda caja y se agregan a la tercera. Así siguiendo con todas las cajas hasta que se quita $\frac{1}{3}$ de los caramelos que hay ahora en la anteúltima caja y se agregan a la última. Si todas las cajas terminan con una misma cantidad de caramelos cada una y 1000 caramelos entre todas. ¿Cuántas cajas había?, ¿Cuántos caramelos había inicialmente en cada caja? Si el total de caramelos es $T$, ¿qué condiciones debe cumplir dicho $T$ ?

En este caso, los estudiantes utilizaron nuevamente el modelo obtenido con anterioridad, adaptando las variables a las condiciones indicadas en el problema y obteniendo nuevas relaciones que involucran al nuevo dato (total de caramelos).

## Consideraciones Finales

Los estudiantes, aún después de haber cursado las materias básicas de la carrera Profesorado en Matemática, en la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina), no han adquirido el hábito de formular conjeturas, generalizar enunciados, plantear problemas nuevos o investigar el alcance de la solución de un problema particular. Sin embargo, al estimular su actividad con preguntas en torno a una solución, responden con entusiasmo y logran buenas producciones.

El trabajo de generalización de problemas aritméticos favoreció la evolución hacia la utilización del álgebra como instrumento de modelización y, en definitiva, aumentó el grado de algebrización de algunas organizaciones matemáticas utilizadas por los estudiantes.

En este caso, se trabajó la divisibilidad de enteros aplicada a la resolución de un problema, en cuyo proceso se amplía y transforma el enunciado inicial y se estudian cuestiones referidas a la posibilidad de resolución, características de los parámetros, campo numérico de análisis, etc.

La reformulación de enunciados promovió la investigación por parte de los alumnos y la posible adquisición del hábito de conjeturar y desarrollar modelos generales para problemas y soluciones particulares.

## Bibliografía

Bolea Catalán, P. (2003), *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Bosch, M. (1994), *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Gascón, J. (1993), *Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis síntesis a la génesis del lenguaje algebraico*. Recherches en didactique des mathematiques, 13-3, pp. 295-332.

Gascón, J. (2001), *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 4-2, pp. 129-159.

**Nora Ferreyra.** Profesora de Matemática y Física y Licenciada en Matemática. Ha participado en numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, desde 1987. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos **noraf@exactas.unlpam.edu.ar**

**Estela Rechimont.** Profesora en Matemática y Física. Licenciada en Matemática y Magister en Didáctica de la Matemática. Ha dirigido numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa desde 1973. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos. **rechimont@exactas.unlpam.edu.ar**

**Carlos Parodi.** Ingeniero Electromecánico y Magister en Didáctica de la Matemática. Ha participado en numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa desde 1992. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos. **Parodic@ing.unlpam.edu.ar**

**Nora Castro.** Profesora en Matemática y Física. Ha participado en numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa desde 1979. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos. **nora@exactas.unlpam.edu.ar**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 69-85
ISSN: 1815-0640

# ¿Perderse en un laberinto? No con las matemáticas

**Isabel Hernández Fernández, Consuelo Mateos Contreras, Juan Núñez Valdés**

*"En el "*Jardín de senderos que se bifurcan*", Borges propone sin saberlo (no podría haberlo sabido) una solución a un problema de la física cuántica aún no resuelto."*
***A. Rojo (Universidad de Michigan)***

## Resumen

En este artículo se sugiere la posibilidad de introducir algunos temas de las Matemáticas de Secundaria o Bachillerato, como la Combinatoria o la Probabilidad, mediante la utilización de los laberintos. Para ello se define este concepto y se estudian sus principales tipos, comentándose también algunos aspectos básicos de la Teoría de Grafos que ayudan a entender mejor este concepto y que pueden ser aplicados en los diferentes métodos existentes de resolución de los mismos.

## Abstract

In this paper, the possibility of introducing some topics of Mathematics in the Secondary level, like Combinatorics or Probability, by using the concept of labyrinth (or maze), is proposed. To do this, labyrinths are defined and their main types are shown. Some basic aspects of Graph Theory are studied to be used as a tool in the solving of a labyrinth.

## Resumo

Neste artigo sugere-se a possibilidade de introduzir alguns temas das Matemáticas de Secundário ou Bacharelado, como a Combinatória ou a Probabilidade, mediante a utilização dos labirintos. Para isto se define este conceito e se estudam seus principais tipos, comentando-se também alguns aspectos básicos da Teoria de Grafos que ajudam a entender melhor este conceito e que podem ser aplicados nos diferentes métodos existentes de resolução dos mesmos

## Introducción

El objetivo principal de este artículo es el de presentar el concepto de *laberinto* como herramienta a utilizar por el profesor de Matemáticas de Secundaria o Bachillerato en la introducción de determinados temas del currículo, como por ejemplo la Combinatoria o la Probabilidad (en España los alumnos de Secundaria tienen de 12 a 15 años, y los de Bachillerato, de 16 a 18).

Por definición, un *laberinto* no es más que una estructura formada por calles y encrucijadas, normalmente compleja, que intenta conseguir la confusión en quien en ella se adentra. El nombre de laberinto proviene del latín "*labyrinthus*" y del griego "*labýrinzos*". Sin embargo, la idea de laberinto que todo el mundo tiene difiere en parte con la definición original del mismo. Así, un laberinto, en el sentido clásico, llamado también laberinto *univiario*, es aquél en el que solo existe un único recorrido posible. En este tipo de laberintos no hay, por tanto, bifurcaciones y, podemos alcanzar sin pérdida el centro o final del laberinto desde su única entrada, recorriendo todo el espacio del mismo y, a través de una sola vía.

Sin embargo, cuando normalmente se piensa en un laberinto, siempre aparecen en nuestra cabeza caminos difíciles con bifurcaciones o vías cerradas que complican la llegada a la meta. Estos otros tipos de laberintos menos antiguos son los denominados *mazes o laberintos de caminos alternativos*. En ellos la elección de un camino u otro puede guiarnos hasta la salida o simplemente obligarnos a vagar por el mismo sin rumbo alguno. Es probable que si se indaga un poco en el tema, pueda descubrirse cómo en muchas ocasiones ambos términos son confundidos e incluso uno de los dos tipos anteriores suele ser normalmente incluido dentro del otro.

Nuestra intención entonces en este artículo es la de analizar los laberintos de mazes desde un punto de vista matemático para buscar posibles formas de resolución, enumerando los métodos que se conocen hasta el momento para alcanzar el final de estas misteriosas encrucijadas. Todo ello con el propósito, como ya se ha comentado, de facilitarle al profesor de Matemáticas de Secundaria o Bachillerato una herramienta para poder introducir determinados temas de la asignatura, como la Combinatoria o la Probabilidad, por ejemplo.

Para ello, se ha considerado conveniente estructurar el artículo como sigue: en la primera sección se comenta el origen de los laberintos y su simbología, dedicándose la segunda a recordar algunas leyendas y curiosidades sobre los mismos. En la tercera sección se muestran los diferentes tipos de laberintos existentes. La cuarta sección está dedicada a recordar algunos conceptos básicos de la Teoría de Grafos, fácilmente asumibles por los alumnos de los niveles anteriormente señalados (a pesar de que esta materia no se encuentra en su currículum), que consideramos necesarios para una adecuada comprensión de los métodos de resolución de los laberintos, que se exponen en la siguiente sección, la quinta, y que constituyen la parte esencial del artículo.

En la sección 6 se analiza la dificultad de salida de un laberinto, como paso previo a considerar los métodos de creación de un laberinto, que se muestran en la sección séptima. La última sección se dedica finalmente a comentar algunas aplicaciones de la utilización de los laberintos al estudio de la probabilidad.

## 1. El origen de los laberintos. Su simbología y usos.

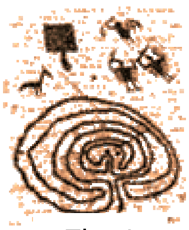


Fig. 1

Casi todas las personas han resuelto alguna vez algún laberinto como distracción o lo han podido observar en obras de arte, pinturas,… pero ¿sabemos realmente por qué surgieron? ¿Cuál fue el motivo por el que se empezaron a utilizar? O mejor, ¿conocemos todos los usos y simbolismos que han tenido desde la antigüedad? A continuación, veremos algunos ejemplos de estos significados.

El primer atisbo de laberinto apareció muy temprano. Data de la Edad de Bronce y pueden encontrarse algunos tallados en rocas en Pontevedra, así como también en Val Camonica, en Italia. En ocasiones, presenta un par de ojos dibujados en el centro como si de una cara se tratase.

Son muchos los laberintos hallados en cantos rodados y algunos en tumbas, pero los estudios que se conocen afirman que es difícil datarlos con exactitud.

Los laberintos, con sus caminos tortuosos, han simbolizado en muchas ocasiones, un reto que nos lleve hasta una meta. De ahí, que tuviesen un significado espiritual en muchas culturas. Así, para los cristianos, el laberinto mostraba el duro camino hasta Dios (véase el situado en el centro de la siguiente figura). Otros han sido usados en ceremonias, rituales y danzas, o para atrapar los malos espíritus. Se cree que en las enrevesadas calles de los laberintos deambulaban las almas de las personas fallecidas luchando por escaparse.

Algunos de ellos construidos en el campo servían para que los jóvenes compitieran entre ellos por alcanzar el centro, donde se hallaba una hermosa muchacha que los aceptaría. De estos laberintos construidos en la vegetación algunos de los más destacables se encuentran en Inglaterra.

Fig. 2: ejemplos de laberintos

En algunos pueblos y ciudades de la costa, como ocurre en Escandinavia, los pescadores recorrían los laberintos antes de salir a la mar para conseguir vientos favorables que garantizaran una buena pesca: pensaban que los malos vientos quedaban atrapados en el tortuoso interior del laberinto. Incluso, podemos encontrar referencias de cómo los pastores de Finlandia caminaban a través de los laberintos para protegerse de los malos espíritus, que los perseguían hasta el interior del mismo, pero que después eran incapaces de encontrar el camino de regreso al exterior.

Algunos laberintos han sido también hallados en la llanura de Nazca en Perú, en Brasil e incluso en México. Existen escritos sobre cómo los indios Hopi usaban los laberintos, a los que llamaban Tápu'at. Utilizaban dos versiones de ellos diferentes. En diferentes textos y en la propia red, pueden encontrarse bocetos de estos laberintos, como los que se muestran a continuación.

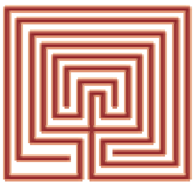


Fig. 3: laberinto del "Padre sol"

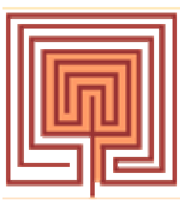


Fig. 4: laberinto del "Madre tierra"

Se cuenta que el de la izquierda del lector simboliza al "Padre Sol" encargado de dar vida, y sus caminos representan la senda que se ha de seguir. En él podemos observar cuatro finales de líneas que encarnan los 4 puntos cardinales. Por su parte, el de la derecha representa a la "Madre Tierra" y son dos laberintos uno dentro del otro. Simboliza a la madre con su hijo en el interior del útero y en sus brazos tras el nacimiento.

## 2. Algunas leyendas y curiosidades sobre los laberintos

El significado místico y, en ocasiones de misterio de los laberintos, ha dado lugar a la aparición de una serie de leyendas en torno a ellos. Indicamos a continuación algunas de ellas, así como también algunas curiosidades que pueden encontrarse sobre estas extrañas figuras:

Según una leyenda, en Knossos, ciudad de Creta en la que se encuentra el palacio del rey Minos, había un laberinto (el denominado *Laberinto de Creta*), que albergaba al legendario Minotauro [1]. De acuerdo con la Mitología, el Minotauro era un monstruo mitad humano mitad toro, hijo de Pasifae, esposa del rey Minos, que lo había tenido con un toro enviado por el dios Poseidón. A petición de Minos, el inventor Dédalo construyó este laberinto para encerrar al Minotauro. Más tarde, la enemistad de Dédalo con el rey haría que el segundo encerrase al primero en su propio laberinto, junto con su hijo Ícaro, aunque ambos consiguieron salir de él construyendo unas alas de cera y plumas. Más tarde, Teseo, hijo del rey Egeo, entró en el laberinto para matar al Minotauro, consiguiendo salir de él gracias a la ayuda de Ariadna, hija de Minos, quién le dio a Teseo un hilo (el conocido como *hilo de Ariadna*) con el que no perderse dentro del laberinto.

Otro de los laberintos de leyenda es el *Laberinto de Rosamunda,* uno de los más destacados que podemos encontrar en la arquitectura de Inglaterra [2]. La leyenda narra que fue construido por el Rey Enrique II para esconder a su amante, llamada Rosamunda la Bella. Leonor de Aquitania, la mujer del Rey fue capaz de encontrar a Rosamunda en el centro del laberinto, usando la misma técnica del hilo de Ariadna, obligándola después a tomarse un veneno. Con el tiempo, son muchos los escritores que han utilizado esta leyenda como inspiración y muchos los escritos que pueden encontrarse al respecto.

El laberinto de setos más importante de los Estados Unidos fue construido por los harmonistas (miembros de una secta protestante alemana que se trasladaron a Harmony, Indiana, a principios del siglo XIX). Lo construyeron para intentar simbolizar “el serpentear de la serpiente del pecado” y la dificultad que presenta continuar en el camino de la verdad, el camino de la fe verdadera.

Ciñéndonos a nuestro país, tenemos modelos de laberintos construidos en determinados jardines, como por ejemplo en los dos siguientes lugares:

- **El Parque del laberinto de Horta** en Barcelona: es un jardín histórico en el distrito de Horta-Guinardó de Barcelona, el más antiguo que se conserva en la ciudad. Ubicado en la antigua finca de la familia Desvalls, cerca de la sierra de Collserola, el parque incluye un jardín neoclásico del siglo XVIII y un jardín romántico del siglo XIX. En las siguientes imágenes podemos ver un plano del laberinto y una foto del jardín.

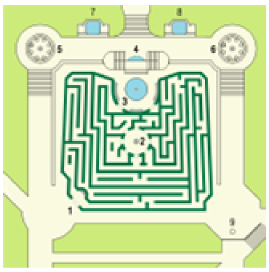


Fig. 5: imágenes del parque del laberinto de Horta

- **El Laberinto del Jardín "El Capricho"** en Madrid: este jardín es una de las joyas de los parques Madrileños, ubicado en las afueras de la ciudad. Su fundadora fue la duquesa de Osuna y es un buen ejemplo de jardín romántico español. En las siguientes imágenes podemos ver diferentes fotos del mismo.

Fig. 6: imágenes del parque del laberinto del Jardín "El Capricho"

Para terminar esta sección, y como curiosidades, mostramos a continuación algunos ejemplos de la utilización de los laberintos que se da hoy en día en algunas disciplinas, por ejemplo, en el campo de la psicología o en el diseño de ordenadores.

En el terreno de la psicología, los laberintos se han usado para estudiar el comportamiento de aprendizaje de los seres humanos y de los animales. Por ejemplo, a un gusano se le puede enseñar a recorrer el laberinto de un tenedor o a una hormiga a superar laberintos de hasta diez puntos de elección.

En cuanto al diseño de los ordenadores, los robots que manejan laberintos están programados para construir máquinas que aprovechan su experiencia. Uno de los más antiguos es Teseo, un robot creado por Claude E. Shannon para resolver laberintos, que se encuentra en el Instituto Tecnológico de Massachussets. Este robot recorre el laberinto sistemáticamente, de forma que cuando llega a un cruce para el que el ser humano tendría que escoger al azar, el robot elige el pasillo más cercano a un lado. Cuando el robot encuentra el camino, lo memoriza y es capaz de volverlo a recorrer sin errores (véase [3] para mayor información)

Veamos a continuación, algo más detalladamente, en la siguiente sección, qué tipos de laberintos son los actualmente conocidos e investigados.

## 3. Tipos de Laberintos

Mostramos a continuación una de las clasificaciones existentes sobre los laberintos. Esta clasificación atiende a la forma y estructura con la que los laberintos fueron construidos, mencionándose además algunos nombres de laberintos, que por sus peculiaridades, pueden considerarse como variantes en esta clasificación.

Esta clasificación es la siguiente:

- **Laberinto cretense**: Se trata de un laberinto del tipo univiario, normalmente en forma de ovoide y con una estructura muy sencilla, cuyo nombre proviene de la famosa leyenda del laberinto del Minotauro de Creta, ya comentada.

  El dibujo del supuesto laberinto podemos encontrarlo en algunas monedas de Cnosos del siglo III a.C., como la que se muestra en la figura:

Fig. 7: laberinto del cretense o también llamado de tipo 7 o clásico

- **Laberinto romano**: Es también un laberinto univiario. En sus orígenes tenía una forma cuadrada que se dividía en cuatro cuadrantes en torno al centro y final del laberinto. Con el tiempo, evolucionaría hasta otro formado por círculos, pero con una estructura similar a la original, en las que las distintas formas enmarcaban el centro.

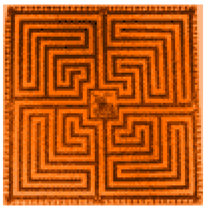


Fig. 8

Los romanos usaron y adaptaron el símbolo del laberinto, apareciendo en túnicas, aceras y multitud de pavimentos, pero éstos eran demasiado pequeños para ser recorridos a pie y sólo eran usados para ejercicios contemplativos.

- **Laberinto barroco**: Su estructura es mucho más compleja que la de los anteriores. Se trata de un laberinto de tipo maze, con caminos sin salidas y en el que sólo un camino pueda dar con el final o centro del laberinto.
- **Laberinto manierista (o de Mannerist)**: Tiene estructura de árbol con bifurcaciones en forma de Y. Además, todos los caminos conducen a un punto, salvo uno, que conduce a la salida.
- **Laberinto rizoma**: Es el que presenta infinitas ramificaciones. Es más, todas las calles pueden estar conectadas entre sí porque cada calle puede conectarse con cualquier otra y no tiene centro ni periferia.
- **Laberinto Hampton Court**: Este peculiar laberinto fue pensado para el palacio de Justicia de Hampton de Guillermo de Orange. Es un laberinto construido con setos (modelo de laberinto al que haremos referencia más tarde) y sin lugar a dudas, uno de los laberintos construidos con setos más importantes que pueden encontrarse en Inglaterra.

Fig. 9

- **Laberinto de Stolp**: Este laberinto univiario, construido en césped, lleva el nombre de una ciudad polaca. En ella, el gremio de zapateros lo recorría cada tres años en una celebración, danzando por el interior y por el exterior del mismo.

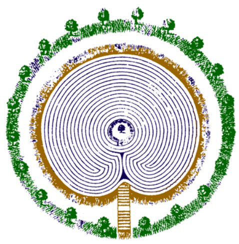


Fig. 10

- **Laberintos medievales**: Con un diseño complejo, estos laberintos presentan también un modelo univiario y eran usados en los suelos de las catedrales. En la Edad Media los laberintos constituían un símbolo de la fe cristiana mostrando el camino hacia la eterna salvación.

Muchos de ellos podemos encontrarlos en pavimentos como los que se muestran a continuación:

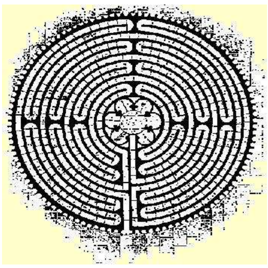
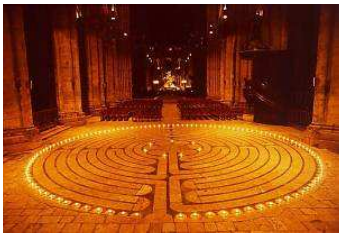



Fig. 11

- **Laberinto de Boughton Green**: Este laberinto es característico por su interior, en el que se ha sustituido el centro por una espectacular espiral. Fue construido en Inglaterra, en concreto en Northamptonshire, donde se celebraba un mercado anual en el que los lugareños recorrían el laberinto. Aunque actualmente ya no existe, un boceto del mismo es el que se observa en la figura.

Fig. 12

- **Laberinto de Altjessnitz**: Se trata de un laberinto de setos construido en Altjessnitz, Alemania. Su tamaño, de unos 50 metros, lo convierte en el más grande de Alemania. En el centro tiene una zona elevada desde la que se puede ver todo el laberinto y posee unos 200 recorridos diferentes para llegar al centro.

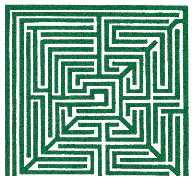


Fig. 13

- **Laberinto ruso o ciudad de Troya**: Con este nombre se designa a los laberintos ingleses y galos hechos en césped. Eran llamados de esta manera probablemente por el denominado Juego de Troya, una danza romana en honor del Eneas el troyano, antepasado del emperador Augusto. El que se muestra en la figura se encuentra tallado en una piedra en Visby, Suecia.

Fig. 14

- **Laberinto de St.Quentin y Amiens**: Estos dos laberintos presentan unas características muy similares. Ambos podemos encontrarlos en el pavimento de catedrales y simbolizan ese carácter espiritual de los caminos tortuosos.




Fig. 15: imágenes de la catedral de Chartres

- **Laberintos modernos**: En este tipo de laberintos todos los caminos están conectados y no poseen ciclos cerrados en su interior. Es un claro ejemplo de maze. Como ejemplo de uno de ellos, un jardín construido en 1913 en el interior del Alcázar de Sevilla.

Fig. 16

## 4. Algunos aspectos básicos de la Teoría de Grafos

En este punto se presenta un tema con el objeto de exponer los diferentes conceptos que se necesitan para resolver los laberintos matemáticamente, es decir, para encontrar métodos que permitan hallar sus salidas. Para ello, recordamos algunos conceptos básicos de la Teoría de Grafos.

Esta teoría nace en un lugar y una fecha muy determinados: la resolución del P*roblema de los puentes de Köningsberg*, en el año 1736, por el matemático suizo Leonhard Euler. Ha sido y es aplicada a diferentes campos, tanto científicos como sociales. Así, actualmente, se aplica al estudio de estructuras de datos, técnicas de clasificación, teoría de la codificación, inteligencia artificial, teoría de juegos y estrategias y problemas de optimización, por citar solo algunos ejemplos. Nosotros vamos a aplicarla en este trabajo a la resolución de los laberintos (para una visión más general y completa de esta teoría, así como de los conceptos que a continuación se relacionan, el lector puede consultar Gross, 2004).

- **Grafo:** un grafo G es un par ordenado G = (V, E), donde V es un conjunto de vértices o nodos (puntos), y E es un conjunto de líneas o aristas, que relacionan estos nodos.

- **Subgrafo de un grafo:** si G = (V, E) es un grafo, entonces G1 = (V1, E1) se dice subgrafo de G si V1 es un subconjunto de V, distinto del conjunto vacío y E1 es un subconjunto de E, donde cada arista de E1.

- **Grafo dirigido:** Un grafo dirigido o digrafo es un grafo G = (V,E) en el que $V \neq \phi$ y $E \subseteq \{(a,b) \in V \times V : a \neq b\}$ es un conjunto de pares ordenados de elementos de V.

En un digrafo, dada una arista (a, b), a es su nodo inicial y b su nodo final. Es decir, cada arista tiene definido un sentido. En este tipo de grafo se pueden definir dos conceptos:

- **Grado de entrada de un vértice:** es el número de aristas que llegan a dicho vértice.

- **Grado de salida de un vértice:** es el número de aristas que salen de dicho vértice.

Otros conceptos básicos de esta teoría son los siguientes:

- **Camino en un grafo:** es una sucesión finita y alternada de vértices y aristas de dicho grafo. Los extremos del camino son el vértice inicial y el vértice final. Si éstos coinciden, diremos que el camino es cerrado.
- **Grafo conexo:** es un grafo en el que dados dos vértices cualesquiera, siempre existe al menos un camino que los une.
- **Ciclo:** es un camino cerrado de un grafo donde los únicos vértices repetidos son el primero y el último.
- **Camino euleriano:** es un camino o circuito del grafo que contiene todas las aristas, apareciendo cada una de éstas exactamente una vez. Un grafo que admite dicho circuito se denomina grafo euleriano.
- **Árbol:** es todo grafo conexo y sin ciclos.
- **Grafos equivalentes:** dos grafos se dicen equivalentes si pueden obtenerse uno del otro por medio de transformaciones en las aristas, del tipo de estirarlas o hacerlas más pequeñas, pero nunca cortarlas o unirlas.

## 5. Métodos de resolución de laberintos

En esta sección vamos a tratar de resolver los diferentes problemas que se pueden plantear en un laberinto, por medio de la aplicación de la Teoría de Grafos.

Por un lado, dado un laberinto, podemos entrar en él o bien partir de un punto concreto de su interior y tener que buscar la salida. En este caso, no tendremos que recorrer el laberinto completo, sino buscar un camino que nos lleve a la salida. Por otro lado, se nos puede pedir que encontremos un tesoro escondido en el laberinto, y que una vez encontrado, salgamos del mismo. Para este último tipo de problemas, tendremos que recorrer el laberinto entero para poder encontrar el tesoro y hallar después un camino hacia la salida. Todos estos problemas pueden ser resueltos de una manera sistemática, como a continuación se verá, utilizando las Matemáticas, y en concreto, la Teoría de Grafos.

Para ello, dado un laberinto, lo primero que debe hacerse es construir el *grafo asociado* a él, identificando cada pasillo del laberinto con una arista del grafo y sus cruces o encrucijadas con los vértices. Después, utilizando el grafo, resolveremos los problemas que se nos pueden presentar con un laberinto, es decir, en el primer caso, encontrar un camino desde el vértice en el que nos encontremos hasta el vértice salida; y en el segundo caso, encontrar un camino que recorra todos los vértices y aristas del grafo, es decir un camino euleriano.

Entonces, una vez construido el grafo correspondiente a un laberinto dado, vamos a ver los diferentes métodos que tenemos para recorrerlo de forma sistemática, bien para recorrer el laberinto completo, bien para hallar sólo la salida.

### Primer método

Un primer método para recorrer un laberinto es desplazarse por sus pasillos eligiendo siempre el lado derecho o izquierdo. Es decir, siempre que lleguemos a una encrucijada o cruce optaremos por continuar por el camino de la derecha, si hemos escogido ceñirnos al lado de la derecha, o continuaremos por el camino de la izquierda, si hemos escogido ceñirnos a este lado. Este proceso lo haremos en todo el recorrido del laberinto, teniendo en cuenta, que una vez elegido un lado, siempre tendremos que escoger ese mismo. Utilizando este método, lograremos salir del laberinto, bien por donde hemos entrado o bien por una salida nueva.

Sin embargo, si lo que deseamos es recorrer el laberinto por completo, este método será adecuado o no, dependiendo del tipo de laberinto del que se trate. Veamos, si el laberinto que tenemos lleva a un grafo que no tenga ciclos, es decir, que se trate de un árbol, el laberinto se puede recorrer entero utilizando este método. Sin embargo, si el grafo tiene un ciclo, el laberinto no tiene por qué ser recorrido entero con este método, aunque lo que sí encontraremos será una salida.

Apliquemos esto al siguiente ejemplo:

Una vez dado este laberinto, lo primero que tenemos que hacer es construir el grafo asociado.

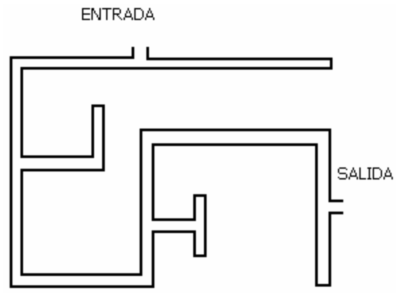



Fig. 17: ejemplo de laberinto

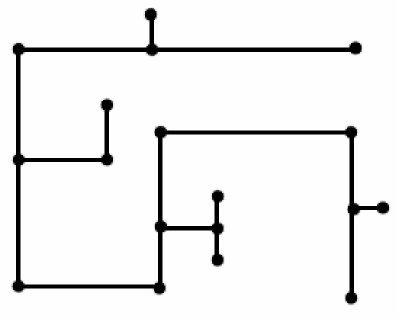


Fig. 18

Este es el grafo asociado al laberinto. Como podemos ver, este grafo tiene ciclos, es decir, no es un árbol. Por tanto, podemos aplicar el método de ceñirnos a un lateral, pero para hallar la salida, no para recorrer el laberinto por completo.

En el siguiente gráfico, se muestra cómo hemos de recorrer el laberinto, mediante este método:

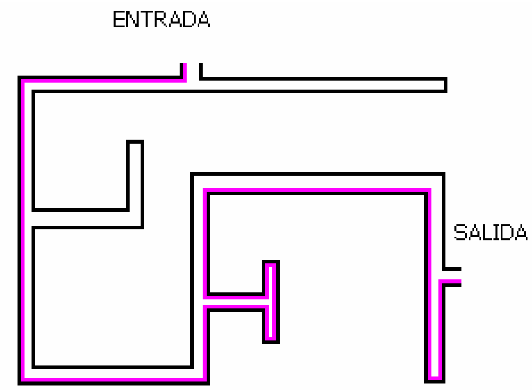



Fig. 19: Resolución del laberinto con el primer método

## Segundo método

El siguiente método fue descrito por el matemático francés Gaston Tarry en 1895 [5] y sirve para explorar el laberinto por completo. Hay que tener en cuenta que para su aplicación, consideraremos que cada pasillo comienza y acaba en un cruce y que un cruce es un punto donde se encuentran más de un pasillo. Así, con este método recorreremos cada pasillo del laberinto dos veces, una vez en cada sentido.

Interpretando lo anterior en el grafo asociado a un laberinto, esto significa que si tenemos una arista formada por los vértices u y v, recorreremos la arista de u a v y también de v a u. Con esta consideración, podemos asignar al laberinto un grafo dirigido o digrafo formado por el procedimiento explicado al principio de esta sección salvo que ahora cada arista aparecerá dos veces, una en cada sentido.

Veamos entonces que de esta forma siempre se puede recorrer todo el laberinto. Recordamos que como ya se ha comentado antes, recorrer el laberinto por completo significa encontrar un camino euleriano en su digrafo asociado.

Para ello, apliquemos el siguiente resultado, válido para digrafos: *la condición necesaria y suficiente para que un digrafo posea un circuito euleriano es que sea conexo y que todo vértice posea el mismo grado de entrada que de salida.* Entonces, como todos los vértices de los digrafos asociados al laberinto poseen un número par de aristas incidentes en ellos, la mitad de entrada y la otra mitad de salida, siempre se cumple la condición del teorema y por lo tanto existe el camino euleriano, es decir, traduciendo el resultado a laberintos, cualquier laberinto se puede recorrer por completo.

Veamos a continuación el método dado por G. Terry y su justificación. Por el planteamiento hecho, cuando terminemos de recorrer todos los cruces del pasillo, salvo el de partida, tendremos que haber atravesado un número par de pasadizos, una vez cada uno en cada sentido, de tal forma que hemos recorrido cada arista en ambos sentidos; aplicando esto a cada cruce, una vez que llegamos a uno de ellos, el número de aristas recorridas hacia dentro excede en una unidad al número de las recorridas hacia fuera. Si, en estas condiciones hay un único pasillo que ha sido recorrido una vez, éste es por el que hemos encontrado por primera vez dicho cruce, ya que el resto o han sido recorridos en ambos sentidos o permanecen inexplorados.

Por tanto, deberíamos volver por dicho pasillo si todos hubieran sido ya explorados. Aplicando estas condiciones, veamos las tres reglas que forman este método:

- ✓ Cada vez que entremos en un pasillo dejaremos dos marcas en la entrada del mismo.
- ✓ Cada vez que salgamos de un pasillo, al llegar a un cruce dejaremos una marca si dicho cruce ya ha sido visitado o una marca señalada de forma diferente si es la primera vez que hemos llegado a él.
- ✓ Para salir de un cruce, escogeremos los pasillos que estén inexplorados o que sólo se hayan explorado en un sentido, escogiendo como último recurso el pasillo por el que llegamos al cruce por primera vez.

De esta forma recorreremos el laberinto por completo, saliendo de él habiendo hecho tres marcas en cada extremo de cada pasillo, lo que demuestra que recorremos cada pasillo dos veces, una en cada sentido.

Aplicando estas reglas, se pueden efectuar diferentes exploraciones de un mismo laberinto, ya que una vez llegado a un cruce tenemos tres alternativas: explorar un nuevo pasillo, coger uno que ya haya sido explorado en un sentido o volver por el que hemos llegado.

Veamos esta aplicación con un ejemplo:

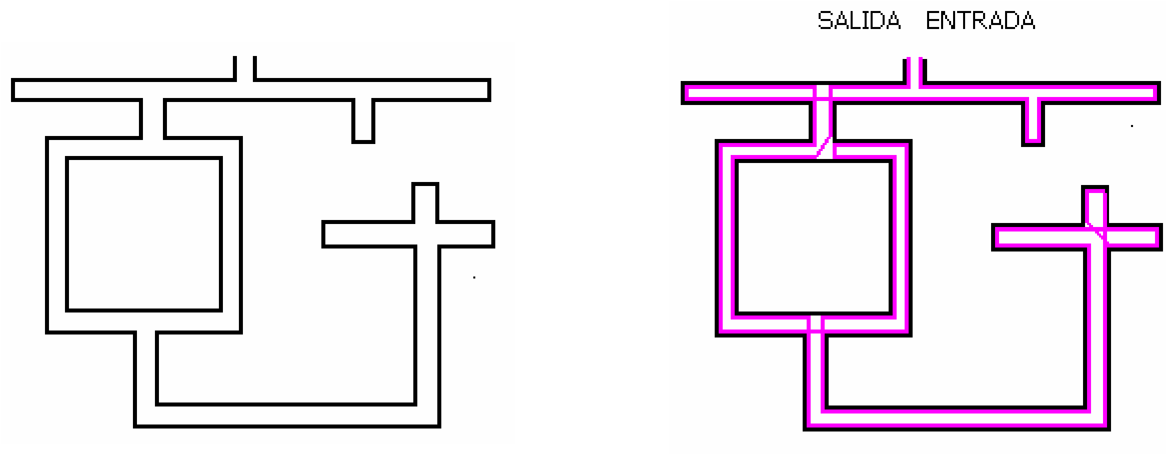



Fig. 20: laberinto y su resolución

## Tercer método

Este método fue inventado por el ingeniero francés Trémeaux, en la misma época que el anterior, y redactado por el matemático E. Lucas en el primer tomo de sus Récréations Mathématiques [5].

La base de este método es la misma que la del anterior, es decir partimos de un digrafo y hay que recorrer todas las aristas. Lo único que cambian son las reglas:

- ✓ Desde el punto de partida, se toma el camino que queramos. Si se llega a un punto sin salida, se retrocede por el pasillo ya recorrido. Si se llega a un cruce, se toma otro camino cualquiera, no explorado.
- ✓ Si se llega a un cruce ya explorado, pero por una nueva vía, se retrocede por el pasillo al que se ha llegado a ese cruce hasta recorrerlo de nuevo al completo, pero en el sentido contrario.
- ✓ Si se llega a un cruce ya explorado y por un pasillo ya recorrido en ambos sentidos, se elige en primer lugar, un pasillo nuevo, y si no se pudiese, se escoge un pasillo ya explorado en un sentido.

Veamos este método aplicándolo al mismo laberinto que el método anterior:

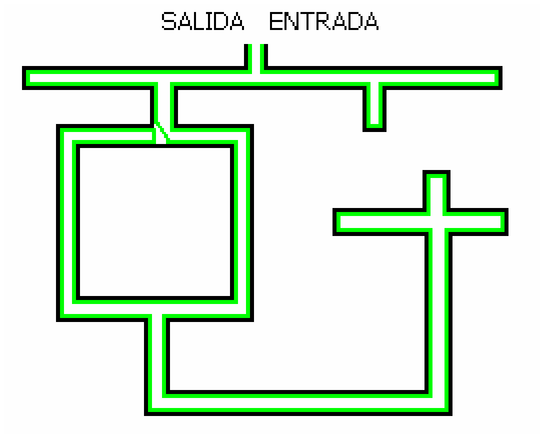



Fig. 21: resolución del laberinto
anterior por el tercer método

### Cuarto método

Este método sirve para explorar el laberinto por completo, aunque se recorren la mayoría de los pasillos más de una vez, siendo además bastante largo de aplicar. Fue diseñado por el matemático americano Oysten Ore. Se basa en el conocimiento en todo el laberinto de la *distancia* entre donde uno se encuentra y el punto de partida, dada por el número de pasillos que hay entre los dos puntos.

Para empezar, se marca el punto de partida con un 0 y se exploran todos los pasillos que parten del origen y llegan al primer cruce, es decir, todos los que están a distancia 1. Después, se vuelve hacia atrás, marcando los cruces con un 1 y señalando el principio y final de los pasillos por los que ya se ha pasado, añadiendo una cruz cuando el pasillo no tenga salida.

En la siguiente etapa, se exploran todos los pasillos que se inician en los cruces 1 hasta llegar a los cruces 2 realizando el mismo proceso que el anterior. Se vuelve hacia atrás y se realiza el mismo proceso, explorando todos los niveles hasta recorrer el laberinto por completo (teniendo en cuenta que lo estamos recorriendo por niveles, es decir midiendo la distancia al punto de partida, que consiste en contar los pasillos que los unen).

Como puede observarse, este método es fácil de aplicar, pero resulta bastante largo, ya que se recorren los mismos pasillos bastantes veces.

Seguidamente, una vez ya descritos los diferentes métodos de resolución de un laberinto, vamos a explicar cómo puede definirse el concepto de *dificultad* de un laberinto para salir de él.

## 6. Dificultad de un laberinto

En esta sección se trata de definir una medida que mida *la dificultad de salir de un laberinto*, aunque no sea por el camino más corto, es decir, la dificultad de encontrar un camino que nos lleve a la salida, sea éste cual sea.

Para ello, veamos primero qué condiciones debe de cumplir esta medida.

- C1: La dificultad de un laberinto es un número real mayor o igual que cero.
- C2: La dificultad del laberinto trivial es cero, entendiendo como laberinto trivial aquél que está formado por la entrada, la salida y el pasillo que los une.
- C3: Si los grafos asociados a dos laberintos son dos grafos equivalentes, entonces tienen la misma dificultad (en Teoría de Grafos, esta condición significa que la dificultad es un invariante topológico).
- C4: Si el grafo asociado a un laberinto A se obtiene agregando vértices a lo largo de una de las aristas del grafo asociado a un laberinto B, entonces los laberintos A y B tienen la misma dificultad.
- C5: Sean A y B dos laberintos. La dificultad de A+B, entendiendo la suma de laberintos como el laberinto que se obtiene fusionando la salida del laberinto A con la entrada del B, es mayor o igual que la suma de la dificultad de A más la dificultad de B.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que la dificultad de un laberinto no es un concepto objetivo, ya que depende de la persona que intente resolverlo, de sus conocimientos y capacidades. Por tanto si se desea plantear una medida consistente, se deben establecer además unas reglas, relacionadas con las capacidades y habilidades del jugador. Éstas son las siguientes:

- R1 (Regla de no retroceso): Cuando se llega a un cruce, no se retrocederá por el pasillo por el que se acaba de llegar, a menos que esto sea inevitable.
- R2 (Regla del subgrafo): Si se ha recorrido completamente un subgrafo del grafo asociado a un laberinto sin encontrar la salida, entonces ya no se volverá a entrar en ese subgrafo.
- R3 (Regla de no repetición): Si se llega a un cruce ya visitado, se escoge un pasillo que no haya sido recorrido antes, si es posible. Si no, se aplican las reglas anteriores. Por último, si no hay ninguna regla que determine el pasillo a escoger, se elige al azar.

También hay que tener en cuenta que sólo se puede ver el sitio donde uno se encuentra, es decir, no se puede ver el final del pasillo donde uno se encuentra, hasta salir de él y llegar a un cruce.

Estas reglas anteriores pueden ampliarse sabiendo que unas no deben oponerse a las otras y también, que si se permitiera ver más allá, si encontramos la salida debemos dirigirnos a ella por el camino más corto.

Señalar entonces, por último, que la medida de dificultad de un laberinto dependerá del conjunto de reglas que se defina, es decir, que se está definiendo una medida de dificultad relativa a un conjunto de reglas dadas. Teniendo en cuenta esto último, se deben imponer tres condiciones más:

- C1: Las reglas se enuncian en función del conocimiento de la persona que resuelve el laberinto.
- C2: Existe al menos un camino en el laberinto que nos lleva a la salida y que cumple todas las reglas.
- C3: Sean S y R dos conjuntos de reglas. Si R está contenido en S, entonces la dificultad relativa a R es mayor o igual que la relativa a S.

En nuestro caso, supondremos que nuestro conjunto de reglas está constituido por las siguientes: regla de no retroceso, regla del subgrafo, regla de no repetición y que además sólo podremos ver el sitio en el que nos encontramos. Definamos entonces la medida:

Cuando se recorre un laberinto, hay cruces en los que se debe elegir el pasillo por el que continuar al azar. Por tanto, cada recorrido de un laberinto tiene una cantidad de decisiones al azar. Además, por tener que elegir al azar entre unas cuantas opciones, cada recorrido tiene una probabilidad de ocurrir asociada. Proponemos entonces como medida el número esperado de decisiones, es decir, para cada recorrido posible se calcula el producto de la probabilidad de ese recorrido por la cantidad de decisiones tomadas para realizarlo y se suman todos los valores obtenidos. Esta sería la medida de la dificultad de un laberinto.

Puede comprobarse que esta medida así definida cumple todas las condiciones propuestas. Veamos algunas de ellas:

1. La medida es mayor o igual que cero ya que sumamos términos positivos, al ser el número de decisiones y la probabilidad de que suceda números mayores o iguales que cero y por tanto su producto es mayor o igual que cero.
2. El laberinto trivial tiene medida cero, ya que hay un único recorrido. Por ello, la probabilidad es 1 y se toman 0 decisiones.
3. La medida es un invariante (topológico), ya que da igual que los pasillos cambien de longitud o forma, puesto que ello no implica más decisiones ni varía la probabilidad, dado que una vez entramos en un pasillo, tenemos que recorrerlo por completo, sea como sea, hasta llegar al siguiente cruce, que es donde podemos escoger.
4. Añadir nodos no cambia la medida, puesto que no tenemos que elegir porque las opciones son las mismas. En este caso el nodo añadido no representa un cruce, luego no cambia la medida por cómo está definida ésta.

Finalmente, podríamos seguir aplicando esta definición de medida a las diferentes condiciones impuestas, para comprobar que está bien definida.

## 7. Creación de laberintos

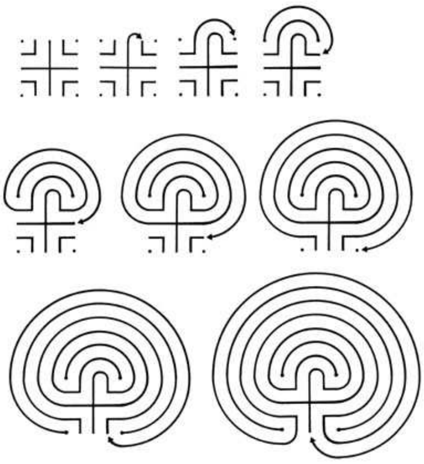


Fig. 22, ejemplo construcción

Dos son básicamente las formas de crear laberintos:

F1: Añadir paredes. Consiste en comenzar con un espacio vacío o rodeado de una pared e ir añadiendo bloques. Un ejemplo de esto son los laberintos de setos.

F2: Perforar caminos. Se parte de un espacio con un bloque sólido y se van perforando caminos.

No obstante, es posible, lógicamente, crear laberintos combinando ambas técnicas. Mostramos a continuación un ejemplo de creación de un laberinto, viendo cómo se forman algunos pasos intermedios. El resto de la construcción es análogo.

## 8. Posible aplicación de los laberintos como herramienta en la introducción de algunos temas de Secundaria y/o Bachillerato

Como ya se ha comentado en la Introducción, los autores pensamos que el concepto de laberinto puede ser utilizado como herramienta por el profesor de Matemáticas de Secundaria y/o Bachillerato para introducir todos aquellos temas del currículo de su asignatura que estén relacionados de una forma más o menos directa con la Matemática Discreta, como pueden ser los dedicados a Combinatoria o Probabilidad, fundamentalmente.

La forma de utilizar esta herramienta ya sí es verdad que puede ser totalmente subjetiva, dependiendo lógicamente de la mayor o menor profundidad con la que se desee emplear, del nivel de comprensión de los alumnos, del tiempo del que se pueda disponer para ello, etc.

En cualquier caso, pensamos que una pequeña introducción de lo que se entiende por laberinto, de sus diferentes tipos y de la manera de resolverlos sería especialmente bienvenida por los alumnos y ayudaría a aumentar su motivación para el tratamiento particular de los temas antes citados, en sus aspectos discretos, como pudieran ser, por ejemplo en Combinatoria, el tipo de grupos que se deseen formar, asimilando esta cuestión con el número de bifurcaciones posibles en una etapa del laberinto, la importancia del hecho de que los elementos que formen esos grupos estén ordenados o no, que puede ser reflejada en la opción de elegir un sentido del recorrido del laberinto, la posibilidad de repetición de elementos en cada grupo, idealizada por el poder pasar o no varias veces por un mismo camino, etc.

También, para conseguir una mayor motivación del alumno a la hora de afrontar las explicaciones del profesor, pensamos que la descripción y referencias históricas comentadas sobre los laberintos pueden bastar para llevar adelante este planteamiento.

Además de las aplicaciones mencionadas anteriormente, veamos una última que relaciona los laberintos con la probabilidad a través del análisis de los diferentes caminos existentes en él.

Supongamos que nos encontramos resolviendo un laberinto y llegamos a una encrucijada en la que se nos plantean tres posibles caminos, como puede observarse en la figura.

La probabilidad de elección de uno de esos caminos es, evidentemente, 1/3.

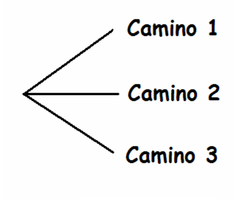


Fig. 22

Si seguimos resolviendo el laberinto nos encontraremos ante nuevas elecciones de caminos, de tal modo que el esquema en forma de árbol se irá complicando, apareciendo por ejemplo, una figura como la que se muestra de la izquierda.

La probabilidad del camino que nos conduce a la salida será entonces $P[salida] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$.

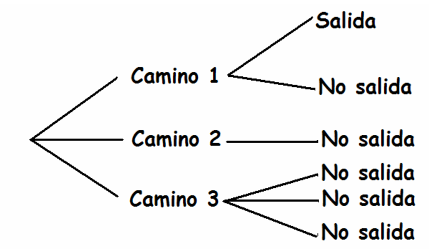


Fig. 23

Pero este sencillo razonamiento puede llevarse a cabo a través de laberintos concretos como puede ser el de Hampton Court. A este laberinto se le han realizado algunas modificaciones, en este caso, para convertirlo en un laberinto barroco (en el que sólo una de las vías nos conduce a la salida).

Las siguientes figuras muestran el laberinto y el camino de resolución.


Fig. 24, laberinto de Hampton Court modificado

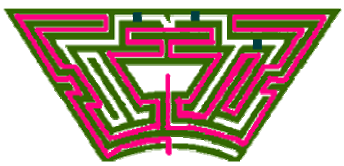


Fig. 25, caminos del laberinto anterior

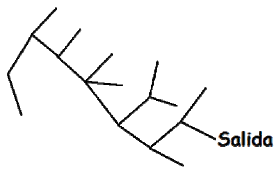


Fig. 26, diferentes caminos del laberinto

Traduciendo las distintas encrucijadas en ramas de nuestro árbol, de la misma manera que hemos hecho anteriormente, y analizando el camino a la salida, puede observarse que la probabilidad es $P[salida] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Este mismo razonamiento puede utilizarse con otros laberintos más complicados o llamativos, basta para ello tener en cuenta sólo dos condiciones:

- ✓ Los caminos que nos conducen a la salida no pueden estar conectados entre sí, para no complicar en exceso la resolución.
- ✓ Una vez elegida una vía, no habrá posibilidad de retroceder.

## Referencias

Gross, J. L.; Yellen, J. (2004): *Handbook of the Graph Theory*. CRC Press.

[1] http://www.labyrinthos.net/ (sobre clasificación de los laberintos).

[2] http://www.ehu.es/francoiradi/LABERINTOS/labe_02.htm (sobre el laberinto de Rosamunda).

[3] http://es.wikipedia.org/wiki/Claude_Elwood_Shannon (sobre robots que manejan laberintos).

[4] http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Tarry.html (sobre la vida y obra del matemático Gaston Tarry).

[5] http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Lucas (sobre la vida y obra del matemático E. Lucas).

**Isabel Hernández Fernández**, nacida en Huelva el 18 de Enero de 1985, es licenciada en Matemáticas por la Universidad de Sevilla (2003-2008). Investiga en Teoría de Lie, habiendo publicado algunos artículos al respecto, así como también tiene varias publicaciones en Matemáticas Recreativas y Divulgativas, en las que está muy interesada. **isa_hdez_fdez@hotmail.com**

**Consuelo Mateos Contreras**, nacida en Cádiz el 16 de Enero de 1985, es licenciada en Matemáticas por la Universidad de Sevilla (2003-2008). Investiga en Teoría de Lie, habiendo publicado algunos artículos al respecto, así como también tiene varias publicaciones en Matemáticas Recreativas y Divulgativas, en las que está muy interesada. **conmatcon@gmail.es**

**Juan Núñez Valdés**, nacido en Sevilla en 1952, es Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla, en la que trabaja actualmente como Profesor Titular del Dpto. de Geometría y Topología, con sede en la Facultad de Matemáticas. Su principal línea de investigación son los grupos y álgebras de Lie, habiendo publicado varios artículos sobre los mismos en diferentes revistas de impacto. Pertenece como vocal a la Junta Directiva de la Delegación Provincial de Sevilla de la S.A.E.M. THALES, siendo autor de varias publicaciones sobre Matemáticas Recreativas y Divulgativas, así como también sobre Historia de las Matemáticas. **jnvaldes@us.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 87-101
ISSN: 1815-0640

# Formação de professores:
# trabalhando com gráficos e tabelas na educação infantil

**Gilda Lisbôa Guimarães**

## Resumo

Este artigo relata uma experiência que buscou auxiliar professoras da Educação Infantil de escolas públicas a trabalharem com representações em gráficos e tabelas. Os resultados mostraram a possibilidade de um trabalho com representações gráficas com crianças pequenas e a possibilidade de professores se apropriarem de conhecimentos a partir de uma reflexão sobre suas aulas, buscando associar os saberes sobre o objeto de estudo, os saberes a serem ensinados e os saberes sobre as estratégias de ensinamento

## Abstract

This paper describes an experiment that aimed to help Kindergarten teachers of state schools on how to work with representations of graphs and tables. The results bring evidence that these types of representations can be taught to young children and that teachers can better understand the topic by reflecting on lessons given. Thus, it is necessary that teachers reflect on didactical strategies, associating knowledge with the subject being studied, knowledge of what to teach and how to teach.

## Resumen

Este artículo relata una experiencia que buscó ayudar a las profesoras de la Educación Infantil de escuelas públicas a trabajar con representaciones en gráficos y tablas. Los resultados mostraron la posibilidad de trabajar con representaciones gráficas con niños pequeños y la posibilidad de que los profesores se apropien de conocimientos a partir de una reflexión sobre sus aulas, buscando asociar los saberes sobre el objeto de estudio, los saberes a ser enseñados y los saberes sobre las estrategias de enseñanza.

## Concepção de formação de professores

Buscando trabalhar tanto para a construção de uma cultura profissional quanto para uma cultura organizacional da escola, esse trabalho investiga estratégias de ensino-aprendizagem que podem ser desenvolvidas em salas de aula, para que, de fato, tenhamos uma melhora na qualidade da aprendizagem. Considerando a escola como uma instituição social dotada de especificidades na qual os usos escolares do conhecimento devem ser articulados com os seus usos sociais gerais (extra-escolares), esse estudo reflete com professoras diferentes estratégias didáticas, buscando associar os saberes sobre o objeto de estudo, os saberes a serem ensinados e os saberes sobre as estratégias de ensinamento.

Partindo do pressuposto que o aluno que aprende, não aprende sempre da mesma forma, independentemente do conhecimento com o qual ele seja confrontado, o professor precisa considerar diferentes possibilidades de ensino em função do conhecimento sobre o qual está trabalhando A aprendizagem sofre influências importantes em função do conceito que se tenta aprender.

A opção desse estudo por trabalhar com representações em gráficos e/ou tabelas se deve ao fato desse conteúdo estar sendo bastante valorizado nos dias atuais devido a sua importância social e estar sendo pouco abordado na Educação Infantil.

Para que o professor da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental possa realmente exercer o seu papel de mediador na construção do conhecimento matemático é necessário que o mesmo seja devidamente preparado. Para tal, é primordial que sua formação inicial e continuada reflita sobre o processo ensino aprendizagem referente à Educação Estatística.

Entretanto, diante da recente inclusão da necessidade de se trabalhar com estatística nos currículos brasileiros, muitos professores não tiveram em sua vida escolar e profissional uma aprendizagem sistematizada sobre esse assunto e, portanto, encontram dificuldades em trabalhar com essa temática. No Brasil, infelizmente, a maioria dos professores ainda trabalha em sala de aula com a turma de alunos durante todas as suas horas de contrato de trabalho, impossibilitando o estudo em seu horário de trabalho e exigindo que o mesmo busque algumas brechas de tempo para fazê-lo, como durante a locomoção da casa para o trabalho. Muitos cursos de formação inicial de professores também ainda não propiciam a aprendizagem referente à Educação Estatística. Além disso, o material disponível a formação continuada é bastante precário.

Guimarães, Cavalcanti e Marques (2007) realizaram um estado da arte sobre artigos referentes à Educação Estatística relacionados à Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental no período de 2001 a 2006 no Brasil. Para tal, foram analisados 20 Anais de Congressos Científicos na área de Educação e Educação Matemática e todos os volumes de 48 periódicos científicos de Educação e/ou de Educação Matemática classificados pelo governo brasileiro como importantes (Qualis A e B da CAPES). As autoras afirmam que foram encontrados 51 artigos nos Anais e 7 (sete) artigos nos periódicos científicos que versavam sobre Educação Estatística para esses níveis de ensino, entretanto, nenhum deles referia-se especificamente a educação infantil.

Acrescido a essa ausência de textos que subsidiem a formação de professores, os livros didáticos também não vêm contribuindo de forma significativa. Guimarães, Marques, Cavalcanti e Gitirana (2007) ao analisarem as 17 coleções didáticas de matemática destinadas às séries iniciais do Ensino Fundamental e aprovadas pelo Programa Nacional de Avaliação do Livro Didático – PNLD de 2004 constataram que apesar das coleções apresentarem orientações metodológicas específicas ao trabalho com Educação Estatística, a maioria delas é bastante superficial deixando sob a responsabilidade e capacidade do professor a organização das proposições didáticas. Além disso, as coleções exploram de forma muito tímida várias habilidades importantes de serem desenvolvidas como a coleta e representação de dados em situações-problema reais, a categorização dos dados, a definição de descritores e a elaboração de escalas.

Em muitos casos, a dificuldade dos alunos advém de formas limitadas das proposições didáticas comumente utilizadas pelos professores em sala de aula. Estudos como os de Guimarães e Wanderley (1994), Pessoa e Falcão (1999) ou Oliveira, Pessoa e Borba (1999) mostram que em algumas situações os erros dos professores e de seus alunos não se diferenciam muito. Essa conclusão evidencia que professores apresentam dificuldades de compreensão de conceitos que se prontificam a ensinar. Dessa forma, nesse estudo, um dos objetivos foi proporcionar as professoras uma aprendizagem sobre representações de dados associados a didáticas pertinentes ao ensino da mesma na educação infantil.

Por outro lado, um argumento muito utilizado para explicar a dificuldades dos alunos em relação à matemática é de que a mesma é muito abstrata e, portanto, difícil de ser compreendida. Diante desse argumento é importante nos perguntarmos se ela é de fato mais abstrata do que, por exemplo, a linguagem?

Tomemos como exemplo a escrita da palavra *CASA* e do numeral *21*. Escrever “casa” é uma situação concreta? Qual a similaridade entre a palavra e o objeto? Só pode ser escrita assim? Em inglês para esse mesmo objeto é usada a palavra “house”. Será que um os ingleses ou os brasileiros estão equivocados ou as duas formas são corretas considerando a Língua da cada um? E o numeral 21, qual sua relação com a quantidade que expressa? Só pode ser escrito assim? Em algarismo romano escreve-se XXI. Será que uma das formas está equivocada ou as duas são corretas? Como podemos observar, parece que nos dois sistemas de escritas o que temos são convenções socialmente definidas e não correspondências concretas. Assim, podemos argumentar que nesse caso a matemática é tão concreta ou tão abstrata quanto a linguagem.

Em função dessa argumentação de que a matemática é muito abstrata, uma outra afirmação foi muito difundida: “*Para que os alunos aprendam matemática é preciso trabalhar com materiais concretos*”. Entretanto, vários estudos evidenciam que a mera presença de manipulativos não garante a aquisição da compreensão conceitual. Gravemeijer (1994), por exemplo, afirma que não basta apresentar os materiais manipulativos como um modelo já estruturado sem qualquer contexto para as crianças, pois os alunos nem sempre percebem a relação entre as atividades concretas e a formalização matemática. É preciso que os professores saibam explicitar quais as relações entre os procedimentos utilizados com material concreto e a formalização matemática que pode ser estabelecida.

Sowell (1989) realizou uma revisão de 60 estudos que incluem crianças da pré-escola ao ensino médio para determinar a efetividade do uso de manipulativos no ensino de matemática, considerando o desempenho, a retenção e transferência do conhecimento e a atitude dos alunos em relação à matemática e conclui que o desempenho dos alunos com o uso de manipulativos está relacionado à experiência do professor com esses materiais.

Como observa Moyer (2001) professores usam manipulativos como um recurso para tornar a aula divertida, sem, contudo conectá-los ao conteúdo explorado no ensino regular. Esse autor argumenta também que a manipulação ativa dos materiais permite que crianças desenvolvam um repertório de imagens que podem ser utilizadas na manipulação mental dos conceitos quando inseridas em práticas significativas e utilizadas como ferramentas pelos alunos e professores.

Por outro lado, Selva (1998) levanta um importante aspecto nessa discussão quando mostra o uso de manipulativos como fator limitante na seleção de estratégias a serem utilizadas na resolução de problemas. A autora analisando crianças de alfabetização, primeira e segunda séries na resolução de problemas de divisão, observou que as crianças que trabalharam com material manipulativos em todas as séries apresentavam estratégias mais simples de representação direta dos dados em situações problema, enquanto que crianças que trabalharam com papel e lápis ou sem qualquer objeto apresentavam estratégias mais flexíveis, tal como adição repetida e fatos memorizados.

Guimarães, Roazzi e Gitirana (2002) também observaram que o tipo de representação influência na compreensão dos conceitos pelos alunos. Nesse estudo os autores observaram que dados organizados em gráficos de barras dificultaram a compreensão de alunos de 3ª série na compreensão de problemas de estrutura aditiva envolvendo combinação e facilitaram nos problemas que envolviam comparação. Assim, os conceitos foram compreendidos de formas diferente pelos alunos em função das representações. Parece que cada representação salienta ou esconde uma propriedade. Dessa forma, se faz necessário um trabalho com múltiplas representações e a partir de diferentes tipos de organização entre os alunos.

Apesar dos esforços que vem sendo implementados no sentido de subsidiar o trabalho dos professores em sala de aula, observa-se, ainda, que as atividades propostas, em geral, são repetitivas e descontextualizadas. Nesse sentido, esse estudo investigou um processo de formação de professoras da Educação Infantil em escolas públicas trabalhando com representações em gráficos e tabelas. Buscava-se, mais especificamente, propor atividades que pudessem levar professoras da Educação Infantil a compreenderem essas representações e a construírem um repertório variado de atividades, promovendo um ensino da matemática de forma significativa, o qual envolvia os alunos de forma consistente e autônoma na resolução de situações problemas.

O estudo foi desenvolvido com duas professoras efetivas da rede pública de Educação Infantil, formadas em Pedagogia pela Universidade Federal de Pernambuco/Brasil, as quais lecionavam em diferentes escolas públicas da região metropolitana do Recife. Essas professoras foram convidadas e aceitaram voluntariamente a participar de um processo de formação continuada envolvendo representações gráficas.

## Como seu deu o processo de formação?

Como afirmam Sadovsky et al (1998), a maioria dos textos didáticos apresentam esboços de propostas deixando a cargo do professor sua concretização. Essas autoras afirmam a importância de se apresentar propostas que encarem o problema do funcionamento na sala de aula, ressaltando que além dos objetivos do conjunto de atividades se deve explicitar as condições do trabalho, a organização da sala, os procedimentos dos alunos, possíveis erros e pertinências, algumas formas de intervenção docente que possam ser substantivas no desenvolvimento na sala de aula. Esse esforço de explicitação orienta o docente para conhecer os elementos que vão lhe permitir levar a direção do processo de ensino.

Nesse sentido, foi entregue a cada professora um roteiro de quatro aulas envolvendo representações gráficas, os quais deveriam nortear o trabalho desenvolvido por elas em suas respectivas turmas. Foi solicitado também que elas elaborassem uma 5ª aula a qual deveria versar sobre a mesma temática, para que pudéssemos refletir conjuntamente sobre intervenções na sala de aula. Ao final de cada aula era realizada uma entrevista com a professora buscando discutir os objetivos da mesma e as possíveis dificuldades e aprendizagens encontradas por elas e pelos alunos.

Finalmente foi realizado um encontro com todas as professoras das duas escolas que as professoras atuavam com o intuito de divulgar os recursos elaborados e compartilhar com os demais profissionais as reflexões realizadas e os resultados obtidos.

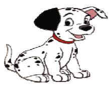
## Como foram as aulas?

A primeira aula tinha o objetivo de sugerir as professoras uma atividade de construção de um gráfico de barras a partir de uma representação concreta. Nessa atividade o descritor já estava definido (animal), os elementos ou barras também (cachorro, gato, passarinho e peixe) além da escala (uma caixa de fósforo para cada aluno). Os alunos vivenciariam um processo de coleta de dados, sistematização, representação em gráfico de barras e análise dos dados. Foi entregue a professora o material necessário ao desenvolvimento da mesma e o seguinte roteiro:

**Atividade 1: Pesquisa de opinião, construção de um gráfico de barras com posterior interpretação, institucionalização dessa forma de representar.**

1. Colocar uma mesa no centro da sala e informar aos alunos que irão fazer uma pesquisa sobre o bicho que eles mais gostam.

2. Colar na beirada dessa mesa as etiquetas com os nomes e as figuras dos animais:

cachorro  gato  passari  peixe 

3. Cada aluno (um por um) escolhe seu bicho preferido colocando uma caixinha de fósforo (vazia para ninguém se queimar) encima do nome do seu bicho preferido.

4. A professora pergunta oralmente para os alunos:
- Qual é o bicho preferido dessa turma?
- Quem teve menos votos?
- Qual a diferença na quantidade de votos entre x e y? E entre x e z.

5. A professora constrói junto com os alunos esse gráfico no quadro considerando: o título, os eixos e os dados coletados.

Em ambas as turmas os alunos participaram animados da aula. Uma das professoras ao final da mesma diz:

> “Na questão de construir com a caixinha de fósforo eu percebi que eles foram naturalmente. Perceberam a diferença de quantidade de um ponto para o outro (...) eu percebi que com essa atividade da caixinha de fósforo eles se sentiram mais perto do gráfico, viram melhor os dados do gráfico” (Professora A)

> “os alunos aprenderam a organização de um gráfico e até a imaginar a questão de contar os pontos. A questão das caixinhas de fósforo facilitou eles a perceberem quem tinha mais e quem tinha menos” e “eu aprendi que tenho que estudar mais um pouquinho (rs). Eu aprendi que gráfico é uma coisa legal de trabalhar e que eu nunca trabalhei, porque você acaba deixando passar por conta do dia a dia e não trabalha porque até subestima os meninos. E mesmo porque você não sabe muito bem como conduzir uma aula sobre gráfico...” (Professora B)

Souza, Barbosa e Guimarães (2004) trabalhando com crianças do ensino fundamental, observaram que os alunos que tinham inicialmente dificuldades em responder questões que implicavam uma análise variacional, após uma pequena intervenção que constou de uma construção de um gráfico com caixas de fósforo (semelhante à atividade 1 descrita acima) passaram a compreender como um gráfico pode expressar variação. Tais dados indicam a possibilidade de alunos das séries iniciais do ensino fundamental compreenderem variação em gráficos de barra.

A segunda aula tinha novamente como objetivo levar os alunos a vivenciarem um processo de coleta, sistematização de informações e registros em tabelas e gráficos com posterior interpretação. Entretanto, dessa vez, a atividade proposta envolvia o registro inicial em uma tabela tendo como base de contagem grupos de cinco, o que poderia proporcionar a construção de uma escala de 5 em 5. Por outro lado, dessa vez, a professora constrói a estrutura de um gráfico de barras refletindo sobre os símbolos dessa representação, mas solicita que os alunos, agora sem ela, realizem o preenchimento do mesmo a partir dos dados expressos na tabela. Nessa proposição tinha-se, também, como objetivo propor uma forma de correção das respostas que não passasse pela correção coletiva realizada pela professora, uma vez que esse tipo de correção muitas vezes atende a um pequeno número de alunos da sala.

### Atividade 2: Pesquisa de opinião, construção de tabela, elaboração do gráfico sistematizando a representação, interpretação, reflexão em duplas sobre essa representação

1. A professora distribuirá para seus alunos fichinhas de votação (secreta):

**QUAL O MELHOR DESENHO ANIMADO?**


SUPER PODERORAS ☐


BOB ESPONJA ☐


HAMTARO ☐

2. Os alunos colocarão seus votos em uma sacolinha
3. Professora e alunos fazem a contagem dos votos representado-os na tabela com traçinhos. (como marca o jogo de bilhar):

| **QUAL O MELHOR DESENHO ANIMADO?** | |
|---|---|
| Desenho | Quantidade de votos |
|  Super poderosas | |
|  Bob Esponja | |
|  Hamtaro | |
| **Total de votos** | |

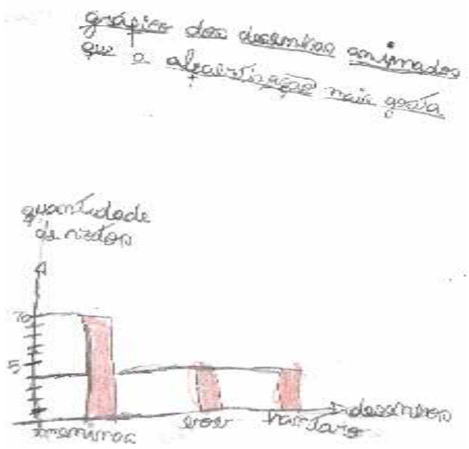
4. A professora construirá com os alunos a representação dos resultados da tabela em um gráfico:
   - Refletir com os alunos sobre o título do gráfico (mostrar a importância de explicitar sobre o que são os dados)
   - Colocar os dois eixos de um gráfico de barras e discutir a que se referem, nomeando os eixos. (quantidade de votos / desenhos da TV)
   - Colocar os valores dos eixos (nome dos desenhos que estavam sendo eleitos e escala para quantidade de cinco em cinco: 5, 10, 15)
   - Cada aluno recebe uma folha de papel para copiar o que está no quadro e em seguida colocar as barras correspondentes.
   - Entrega o papelzinho de resposta e solicita que os alunos individualmente respondam as seguintes questões: (cada criança responde sem deixar o outro ver, fazer um clima de segredo)

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |

1) Quantas pessoas foram pesquisadas?
2) Qual o desenho mais votado?
3) Quantos votos recebeu o desenho menos votado?
4) Quantos votos têm entre o mais e o menos votado?
5) Algum desenhou recebeu o mesmo número de votos? Quais?

5. A professora organiza os alunos em duplas e solicita que os mesmos troquem os papeis com as respostas para que cada um corrija a atividade do outro sem apagar as respostas do colega.

6. Depois os alunos juntam-se nas duplas para mostrar e refletir sobre as correções e chegarem a uma única resposta.




Esse aluno consegue reproduzir todos os elementos necessários a representação.

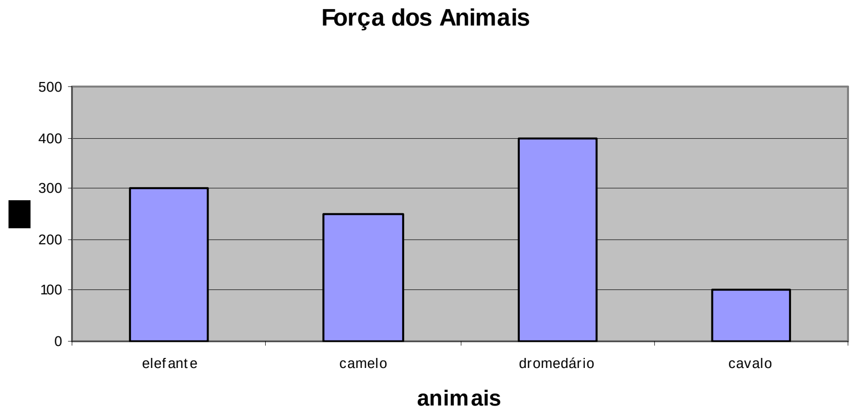

Esse aluno percebe que a representação tem dois eixos, barras, numerais, mas não consegue compreender a relação entre elas.

Como podemos ver nos exemplos acima, os alunos apesar de terem vivenciado o mesmo processo demonstram compreensões diferentes sobre esse tipo de representação. Esses exemplos nos mostram como a cópia pode ser uma forma de avaliarmos a aprendizagem dos alunos e que os alunos compreendem diferente uma mesma atividade.

Partindo da possibilidade de crianças compreenderem variações expressas em gráficos de barras, foi proposta a 3ª atividade. O objetivo da mesma foi analisar se os alunos conseguiam interpretar questões que envolvessem tanto análise pontual como variacional. Foi objetivo também, registrar em uma tabela as respostas dos alunos para provocar uma discussão entre eles sobre as mesmas, além de mostrar simultaneamente a função de uma tabela como sistematizadora de informações.

### Atividade 3: Trabalhando com representações gráficas

1. Organizar os alunos em grupo
2. Entregar um gráfico para cada grupo




Fonte: Silva e Fontinha (1996). Os seres vivos. IBEP, São Paulo

3. Entregar um bloquinho para cada grupo (7 pedacinhos de papel grampeados)
4. Solicitar que escrevam o nome de todos os elementos do grupo na 1ª folha
5. Fazer as questões oralmente e os alunos respondem marcando no bloquinho
6. Fazer uma tabela no quadro para marcar as respostas dadas pelos grupos. Depois de anotar todas as respostas dos grupos para a questão "a" discutir. Repetir para as outras questões.

| | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 3 | Grupo 4 |
|---|---|---|---|---|
| Questão a | | | | |
| Questão b | | | | |
| Questão c | | | | |
| Questão d | | | | |
| Questão e | | | | |
| Questão f | | | | |

a) O dromedário consegue puxar quantos kilos?
b) O elefante consegue puxar quantos kilos?
c) O elefante consegue puxar quantos kilos a mais que o cavalo?
d) O cavalo puxa quantos kilos a menos que o dromedário?
e) Quantos cavalos são necessários para puxar a mesma quantidade de kilos de 1 elefante?
f) Quantos kilos o camelo consegue carregar?

No primeiro extrato de fala abaixo podemos ver que a professora ao perceber que estava trabalhando com um conteúdo que não dominava muito bem, foi em busca de mais subsídios para poder conduzir suas aulas da melhor forma possível. Esse tipo de atitude é a desejada por nós, uma vez que a professora não se limita a trabalhar só o que ela acha que sabe, ao contrário, estuda o que acha que não sabe, para poder propor melhorar seus encaminhamentos. Propostas didáticas, livros didáticos, artigos científicos e etc. podem suscitar formas de trabalho, porém, todos eles dependem do conhecimento conceitual e didático de cada professor. No segundo extrato, a professora também se prontifica a superar seus limites quando, mesmo não acreditando na viabilidade da atividade para seus alunos, decide conduzir a atividade e perceber que a mesma era pertinente.

> "*Eu tive que... de uma certa forma, até pesquisar uns livros sobre gráficos. Eu encontrei só em dois livros mais atuais e aprendi como cada detalhe pode fazer a diferença*". (Professora A)"*Mas uma vez a atividade superou porque eu pensava: "Eita, vai ser difícil". Realmente, é difícil conduzir porque é uma atividade diferente(...) eu aprendi a olhar as atividades de um modo diferente, não logo dizer que está difícil, mas de esperar que aconteça da melhor forma possível (...). Então pra mim foi uma construção de mesmo acreditar no potencial do aluno. Agente trabalha com aluno pequeno e diz "Não, porque eles não conseguem". Mas eu vi que tá com dificuldade mas eles conseguem alcançar na medida do possível deles*". (Professora B)

A quarta aula buscou refletir que um gráfico não precisa ser apenas para mostrar um resultado. Pratt (1994; 1995) argumenta que as crianças muitas vezes consideram o gráfico como um desenho e, em muitas ocasiões, ele acredita que as crianças escolhem o gráfico pelo valor do desenho e não pela possibilidade do instrumento. Em geral, as crianças usam gráficos para mostrar os resultados finais de um experimento o que ele denomina de "gráficos passivos". O autor acredita que é preciso que os alunos vejam os gráficos também como um instrumento o que ele denomina de "gráfico ativo", ou seja, como parte interativa de um experimento.

Buscando criar uma situação na qual o gráfico não era a representação final de uma situação, foi proposta uma situação de jogo na qual o gráfico era uma forma de registrar a pontuação. Nessa situação os alunos interpretavam o gráfico durante a sua construção até o final do jogo.

### Atividade 4: Trabalhando com representações gráficas

1. Organizar os alunos em 6 grupos.
2. Entregar para os alunos canetinhas de cores diferentes
3. Colocar a tabela no quadro:

| COR | PONTO |
|---|---|
| Azul | 1 |
| Verde | 3 |

4. Cada grupo recebe um jogo de Pimbol (produzido com sucata) e uma folha de papel quadriculado.
5. Fazer uma legenda mostrando a cor de cada aluno.
6. Cada criança joga o Pimbol 3 vezes e vai marcando a quantidade de pontos que conseguiu na folha quadriculada Depois de duas ou mais rodadas (depende da motivação) parabenizar o vencedor.

7. Cada grupo conta pelo gráfico a quantidade de bolinhas que conseguiu colocar e depois a professora oralmente vê qual foi o grupo que conseguiu mais pontos.

Abaixo apresentamos o gráfico produzido por um dos grupos. Nessa situação não fazia sentido colocar os nomes dos alunos, pois eles sabiam a correspondência aluno/cor; não precisava de título, nomes dos eixos e etc., pois a função do gráfico era subsidiar a comparação dos pontos obtidos até o final do jogo, o que de fato ocorreu. Infelizmente não temos como mostrara a seqüência de sua construção, mas o depoimento da professora nos ajuda a mostrar a importância da atividade:

> "(...) *era o jogo deles, o ponto deles e eu percebi que isso foi marcante. Eram eles que estavam em jogo e eles tiveram muito mais interesse*." (Professora A)

> "*Até marcar os pontinhos antes de eu dizer que era um em cima do outro eles já estavam marcando um em cima do outro. Raramente um ou dois alunos iam marcar do lado e eles diziam "Não, em cima", mas aí na outra rodada já era automático. Se deixasse rolar sozinhos eles... um vigiava o outro*". (Professora B)

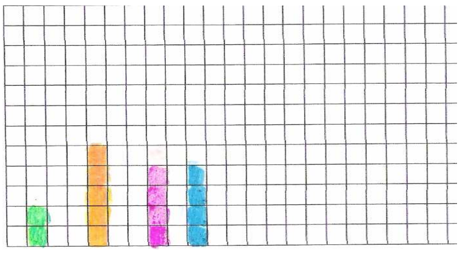


Gráfico produzido por um grupo

## Refletindo sobre as aulas

A proposta de trabalho de formação continuada buscou levar as professoras a refletir sobre a sua prática e discutir conjuntamente sobre as ações desenvolvidas dentro da escola. As professoras contatadas se prontificaram a desenvolver as aulas demonstrando-se bastante interessadas em investir no processo de formação, pois acreditavam que o mesmo poderia ajudá-las a superar suas dificuldades e a planejar melhor suas aulas.

No início do processo foram entregues para cada professora as instruções de como deveriam conduzir cada uma das quatro aulas e informado que o material necessário à execução das mesmas seria fornecido por nós. As professoras leram as instruções e antes do início de cada aula tiravam algumas dúvidas, geralmente, referentes ao material que iriam utilizar. Ao final de cada aula, com o objetivo de investigarmos a compreensão das mesmas sobre os conceitos que estavam trabalhando, além de levantar as dificuldades delas e dos alunos, realizávamos uma entrevista.

A partir das análises dos relatórios de aula e das entrevistas realizadas com as professoras ao final de cada aula, pudemos analisar o processo a partir de três pontos:

1) A compreensão das professoras relativa às instruções de encaminhamento da aula.

Buscando contribuir com o processo ensino-aprendizagem dessas professoras sugerimos as propostas de aulas apresentadas. Observamos que as duas professoras não apresentaram dificuldades em conduzir as aulas a partir das orientações dadas. Dessa forma, ressaltamos como Sadovsky et al (1998) a importância e a viabilidade desse tipo de material para os professores. Essas professoras puderam, a partir das proposições de encaminhamentos das aulas, se apropriarem tanto de conteúdos como de didáticas novas.

> "*Eu achei que no começo não ia dar muito certo, mas depois que agente começa a trabalhar vê que existe maneiras diferentes de introduzir o gráfico na aula. Quando eu tava fazendo essa aula eu lembrei a questão da seqüência numérica porque agente acaba se bitolando em algumas tarefas de fazer eles aprenderem os numerais, de fazer eles... a própria seqüência que é importante deles saberem e aí você vê que em gráficos agente pode trabalhar isso. Você não tem que ficar fazendo aqueles exercícios de complete a seqüência porque ali ele já esta vendo uma seqüência que tem uma finalidade. Então, dentro do gráfico você ainda acaba trabalhando muita coisa e não percebe, só percebe quando agente coloca em prática e vai percebendo o que eles vão aprendendo*". (Professora A)

> "*Foi muito bom porque eu me surpreendi. Eu pensei que ia ser muito mais difícil. Até porque agente imagina gráfico como uma coisa muito estranha, como eu não estudei gráfico, eu não me lembro.* (...) *É algo que eu vou no meu próximo ano colocar de cara porque gráfico é um assunto que você pode trabalhar no decorrer do ano. Com certeza será conteúdo no próximo ano, independente da série que eu esteja*." (professora B)

Observamos também que as professoras, a cada aula, iam perdendo o receio em trabalhar com as representações gráficas e cada vez exploravam mais os recursos que possuíam para fazer seus alunos entenderem o assunto abordado. As professoras no começo não acreditavam que iria dar certo um trabalho envolvendo representações gráficas para crianças de Educação Infantil, já que as consideravam muito pequenas para entender o desenvolvimento desse assunto. Mas com o passar do tempo começaram a avaliar a experiência positivamente e reconheceram que trabalhar com representações gráficas não é difícil e que elas abrangem uma série de outros assuntos que podem ser trabalhados em uma única aula.

As turmas de alfabetização tinham experiências diferentes: uma já havia trabalhado algumas atividades sistematizadas com representações gráficas e a outra não. Entretanto, as atividades propostas atenderam tanto para a turma que já havia trabalhado com gráfico quanto para a que nunca tinha abordado esse assunto. Assim, pode-se afirmar que é possível propor atividades relacionadas à Educação Estatística para alunos de educação infantil.

2) A compreensão das professoras relativas à apropriação do conteúdo

Como podemos ver no depoimento das professoras, elas a princípio não acreditavam que fosse possível trabalhar com seus alunos com atividades relacionadas a representações em gráfico. Entretanto, seus alunos conseguiram resolver as situações propostas e elas, então, começaram a sistematizar conhecimentos referentes a este tipo de representação. As professoras percebem que no decorrer das atividades os alunos estavam aprendendo a diferenciar os elementos do gráfico, a localizar as informações existentes nele e a interpretá-lo, não deixando também de participar ativamente da sua construção.

> "*Eu acho que eles aprenderam a aproveitar o visual do gráfico para saber a resposta, os elementos que compõem o gráfico e aprender a localizar mesmo as informações e comparar os dois eixos do gráfico*" (professora 1)

> "*Eu vi que eles já conseguem ver que tem que ter um título para eles identificarem, que tem uma linha vertical e outra horizontal onde estão os dados do gráfico, onde fica os dados nominais. Eu percebi que eles conseguem já perceber como agente registra, de subir até o número*". (professora 2)

> "*Aprenderam a quantificar um pouco mais e aprenderam até a questão da relação... eu me surpreendi quando eles entenderam a relação das barrinhas*." (professora 2)

Observamos que elas ao desenvolverem com seus alunos as atividades estavam também se apropriando de conteúdos que não tinham domínio e, por vezes, desconhecimento. Acreditamos que temos aqui um exemplo de "formar-se formando" uma vez que as mesmas foram se apropriando das representações gráficas e da evolução da aprendizagem sobre esse conceito conjuntamente com seus alunos.

> "*O gráfico não é um bicho de sete cabeças. Porque muitas professoras não trabalham gráficos na Educação infantil. Muitas não trabalham sequer no ensino fundamental, até a 4ª série. As vezes por não dominarem o conteúdo, as vezes por acharem muito difícil para o aluno. E aí com essas atividades agente percebe que é possível trabalhar de uma forma mais concreta e fácil. É uma construção que tem que ter paciência, que é algo possível*". (Professora 2)

3) <u>A compreensão das professoras relativas às formas didáticas diferentes</u>

As professoras ressaltaram a pertinência das propostas didáticas, incluindo o trabalho em grupo, o qual vem sendo cada vez mais valorizado na educação por provocar uma maior interação entre os alunos e, dessa forma, exigindo um compartilhar de diferentes procedimentos e argumentos na resolução de situações problemas.

> "*Eu acho que o trabalho em grupo ajudou e não dificultou. Eu até pensei que iria ser mais difícil, mas acho que foi proveitoso e os grupos renderam mais*." (Professora 1)

> "*Aprendi que brincando também dá pra trabalhar muita coisa de gráfico, conteúdo mesmo. Porque eu ficava pensando: poxa... um joguinho? Como é? Vai dar mesmo para construir alguma coisa? Trabalhar algum conceito?*

> *Mas você viu que dá porque é uma coisa bem concreta e deu o gráfico como resultado*." (Professora 2)
>
> "*Eles queriam interferir no resultado. O resultado da pesquisa não satisfez a alguns alunos e eles queriam interferir ... Eu tenho muito medo que eles pensem que todo o dado de um gráfico advém do nada, foi uma pessoa que colocou e é aquilo. Eu queria mostrar a realidade de algo*."(Professora 1)

A partir desses resultados pudemos perceber que a nossa proposta de trabalho possibilitou às professoras uma maior reflexão sobre o uso de diferentes recursos didáticos no trabalho com conteúdo matemático em sala de aula, trazendo desta forma, mudanças positivas para a formação das professoras participantes e para o desenvolvimento cognitivo de seus alunos em relação à matemática. Na aula que pedimos que elas elaborassem, a quinta aula, observamos que as mesmas apresentaram domínio e pertinência dos conteúdos trabalhados, além de optarem por boas estratégias didáticas o que demonstra que elas refletiram sobre o conteúdo e sobre a didática a partir das atividades desenvolvidas em suas salas e que essa reflexão possibilita uma melhoria nas aulas quanto à diversidade de situações didáticas.

Após o desenvolvimento das cinco aulas e das sistematizações e análise realizadas por nós, voltamos às escolas para apresentarmos para todas as professoras e diretoras das escolas o que havíamos desenvolvido e os resultados alcançados. Esse momento foi muito importante também para as professoras que participaram do nosso projeto, pois as mesmas puderam socializar com as colegas o que haviam realizado, as angústias e satisfações e, finalmente, compartilhar com todas da escola como poderiam continuar desenvolvendo atividades relacionadas ao que havia sido investigado.

## Bibliografía

Gravemeijer, K.P.E. (1994): *Development realistic mathematic education.* Utrecht CD B Press.

Guimarães, G, e Wanderley, I. (1994): Concepções de fração entre alunos e professores do primeiro grau. *II Congresso Ibero-americano de Educação Matemática – II CIBEM,* Blumenau, Santa Catarina.

Guimarães, G, Gitirana, V, Cavalcanti, M, Marques, M. (2007): *Livros Didáticos de Matemática nas Séries Iniciais: Análise das Atividades sobre Gráficos e Tabelas.* Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. – ENEM.

Guimarães, G. (2002): *Interpretando e Construindo Gráficos de Barras.* Psicologia Cognitiva, Recife, Tese de doutorado, UFPE.

Guimarães, G., Marques, M., Cavalcanti, M. e Gitirana, V. (2007): *Estado da arte em tratamento da informação: em congressos e periódicos científicos nacionais.* Trabalho submetido.

Moyer, P.S. (2001): *Are we having fun yet? How teachers using manipulatives to teach mathematics*. Educational Studies in Mathematics, vol 47, nº 2, pp.175-197.

Oliveira, I., Pessoa, C. e Borba, R. (1999): *A construção do significado de problemas de divisão.* XXII Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste - EPEN, Salvador.

Pessoa, C. S. E Falcão, J.T.R. (1999). *Estruturas aditivas: conhecimentos do aluno e do professor.* XXII Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste - EPEN, Salvador.

Pratt, D. *Active graphing in computer-rich environment*. (1994): In Proceeding 18nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 57-64. Lisbôa, Portugal.

Pratt, D. (1995): *Passive and active graphing: a study of two learning sequences*. In Proceeding 19nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (2), pp 210-217. Recife, Brasil.

Sadovsky, P., Parra, C., Itzcovich e Broitman (1998): Matemática – *Documento de trabajo no 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo. Actualizacion Curricular* – Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Selva, A C.V. (1998): *Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In Schiliemann*, A e Carraher, D. (org) *A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa*. São Paulo, Papirus.

Souza, D., Barbosa, R. e Guimarães, G. (2004): *Uma proposta de seqüências didáticas sobre interpretação de gráficos em turmas de 3ª série*. Trabalho de Conclusão de Curso em Pedagogia da UFPE.

Sowell, E.J. (1989): *Effects of manipulative material in mathematics instruction*. Journal of Research in Mathematics Education, vol.20, no 5, pp. 498-505.

**Gilda Lisbôa Guimarães** É Pedagoga com Mestrado e Doutorado em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco - Brasil. É professora e coordenadora do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco. Desenvolve pesquisas, orienta alunos e desenvolve processos de formação continuada referentes ao ensino aprendizagem de alunos e professores dos anos iniciais de escolarização, relacionados à Educação Matemática **gilda@ufpe.br**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 103-112
ISSN: 1815-0640

# Desarrollo de un blog en la docencia de la asignatura Topología

**Rafael López Camino**

## Resumen

Se describe cómo se puede usar un blog para complementar la docencia de la asignatura "Topología I" de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada. En la enseñanza universitaria son habituales las páginas webs de asignaturas, utilizadas generalmente como almacén de contenidos. En contraste con ellas, un blog permite una relación más dinámica y directa entre profesor y alumno, fomentando la acción tutora.

## Abstract

In this work we describe the use of a blog as teaching support in the "Topología I" course in the Degree in Mathematics by the University of Granada. In university education, web pages of courses are usually used as a store of contents. In contrast, a blog allows a more dynamic and direct relation between the teacher and the student, encouraging a tutorial action.

## Resumo

Descreve-se como se pode usar um blog para complementar a docência da disciplina "Topologia I" da Licenciatura de Matemática da Universidade de Granada. No ensino universitário são habituais as páginas webs de disciplinas, utilizadas geralmente como armazém de conteúdos. Em contraste com elas, um blog permite uma relação mais dinâmica e direta entre professor e aluno fomentando a ação tutora

## Introducción

La enseñanza actual en la Licenciatura de Matemáticas se ve afectada por el uso de internet. Aunque la metodología sigue siendo clásica, en el sentido de que las "clases magistrales" son básicas en la docencia de muchas asignaturas, tanto el profesor como el alumno usan cada vez más Internet para la adquisición de información complementaria.

Hay que añadir que en el nuevo marco del Espacio Europeo de Educación Superior, la enseñanza universitaria va a sufrir profundos cambios no sólo a nivel curricular en las titulaciones universitarias, sino también en las formas de relación entre profesor y alumno. En esta necesidad de renovación metodológica, el número de experiencias piloto de implantación del sistema de créditos europeos (ECTS) en titulaciones de las universidades españolas, va creciendo día a día. En el aspecto didáctico, y como señalan C. Steegmann, M.A. Huertas, A.A. Juan, M. Prat [5] "las TIC ofrecen nuevas formas de comunicación, colaboración y participación en procesos formativos".

Por ello no es difícil ver que muchos profesores posean una página web personal donde proporciona información de la asignatura (temario, bibliografía, sistemas de evaluación) así como material para el alumno en forma de apuntes, relaciones de ejercicios, etc. El autor del presente trabajo ha sido uno más en participar en el uso de las nuevas tecnologías, http://www.ugr.es/local/rcamino.

Sin embargo la página web proporciona una relación estática entre profesor y alumno ya que, en general, no permite la discusión de problemas o la resolución de una duda (a no ser por medio de un correo electrónico). Muestra de ello es que el contenido de las páginas webs de las asignaturas apenas cambia de un curso a otro. La existencia de entornos on-line (Moodle, WebCT) para el aprendizaje a distancia por parte del alumno apenas se ha implantado en las universidades españolas y su presencia es testimonial en el panorama nacional.

Podemos concluir que los recursos de Internet en la docencia de la Licenciatura de Matemáticas, se han utilizado como almacén de información, sin prestar atención en la relación profesor-alumno. Sin restarle importancia al uso de las páginas webs como apoyo a la docencia, hemos pensado en el uso de bitácoras, o blogs, para dinamizar la relación entre profesor y alumno.

El blog, con un estilo directo y cercano, puede resultar atractivo para el alumno, ya que el aspecto es la interactividad al actualizarse constantemente y permitir a los visitantes del mismo reaccionar a las entradas que va realizando el administrador del mismo.

En la educación superior universitaria española, los blogs han sido escasamente usados (véase J. Ruiz, F. Expósito [3]). La experiencia que se describe en el presente trabajo ha sido desarrollada en el curso académico 2008/09, donde se ha creado un blog de la asignatura “Topología I” y cuya dirección es http://topologia-i.blogspot.com.

La realización del blog constituye un “Proyecto de Innovación Docente” de la Universidad de Granada, con el número 08-18 y titulado 'Desarrollo de una bitácora para la enseñanza y aprendizaje de la “Topología I”.

## Consideraciones generales sobre qué es un blog

Por blog (o bitácora) de una asignatura, queremos referirnos a un sitio en Internet actualizado periódicamente, que recoge cronológicamente el desarrollo docente de la misma, especialmente de las clases presenciales. Para ello, el profesor publica en el blog un texto, no muy extenso, sobre un asunto que él ha elaborado y seleccionado, y que se denomina *entrada* (en inglés se usa la palabra *post*). El formato del blog dispone de un sistema que permite a las personas que lean dicha entrada editar un texto acerca de la misma, llamado *comentario*, y que también se publica en el blog justo a continuación de la entrada a la que se refiere. De esta forma, una entrada puede dar lugar a un número indeterminado de comentarios. Hay que observar que, a diferencia de lo que sucede en un foro en Internet, el tema que se plantea en la entrada es iniciado y elegido por el administrador del blog, y los lectores establecen un diálogo y discusión alrededor de la temática seleccionada.

Un blog se convierte por tanto en una forma de diario publicado en Internet, que se conforma por entradas editadas regularmente en el tiempo y junto a cada una de ellas, un conjunto de comentarios realizados por los lectores. Aunque en principio las entradas en el blog las realiza el profesor, en nuestro proyecto se pretende que los alumnos colaboren en la elaboración de nuevas, como efectivamente está sucediendo. Por último, tanto el profesor como los alumnos participan en el blog haciendo comentarios de las diferentes entradas.

El blog no trata de explicar de nuevo los contenidos didácticos de la asignatura, tampoco de repetir lo que se ha explicado ese día, sino que se centra en un asunto concreto relacionado con lo tratado en el aula. Las entradas del blog también permiten ampliar información de la asignatura, o complementarla con nuevos contenidos.

Además de la función descrita anteriormente, también se aprovecha el blog como sitio web para alojar material docente, ya que el recurso lo permite. Ejemplo de ello es que el blog de “Topología I” contiene la siguiente información docente: guía didáctica de la asignatura (temario, bibliografía, métodos de evaluación), material docente teórico (apuntes), relaciones de ejercicios, exámenes de cursos anteriores, etc.

## Contexto de la asignatura

La asignatura “Topología I” es una asignatura troncal de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Granada, con una carga de 12 créditos, distribuidos en 8 teóricos y 4 prácticos. Se imparte en el segundo curso, existiendo dos grupos. El blog se está desarrollando en el curso académico 2008/09 para uno de estos grupos, el cual posee 30 alumnos.

La Topología es la parte de las Matemáticas que estudia las propiedades invariantes por deformaciones continuas del espacio. Los contenidos de Topología aparecen en cursos posteriores y a lo largo de las diferentes áreas de la Licenciatura. La asignatura “Topología I” ofrece al alumno el primer contacto directo y profundo con esta parte de las Matemáticas y se presenta como una sucesión de nociones abstractas, basadas muchas de ellas en la teoría de conjuntos. Existe una carga importante de conocimientos teóricos. Las prácticas (ejercicios) son importantes para la compresión de los contenidos teóricos. Se puede decir, por tanto, que no es una asignatura fácil para el alumno, por la propia naturaleza de abstracción que conlleva.

Por otro lado los contenidos de la asignatura no se prestan al uso de un software más visual, como sí ocurre en otras asignaturas del área de Geometría, Análisis o Álgebra. En todas éstas, programas como Cabri o Mathematica, son software preparados para el desarrollo de gráficos, cálculo simbólico o computación numérica.

## Motivaciones y objetivos

Ya hemos comentado anteriormente algunas razones para el desarrollo de un blog. Nuestra motivación básica es cambiar la forma de generar y presentar algunos de los contenidos docentes de la asignatura en Internet.

Las páginas webs de la asignatura se construyen a partir de material creado por el profesor, en el que el alumno sólo tiene que tomar aquella parte que le interesa. En contraste, en un blog una parte de la información es suministrada por el profesor, pero los alumnos de la asignatura (y usuarios en general del blog), pueden generar el resto de contenidos. Además la cantidad de los mismos que se puede aportar no está limitada, ya que depende directamente del interés de los visitantes del blog.

Como consecuencia, y ventajas a destacar para el desarrollo de un blog, los alumnos se pueden sentir partícipes de los contenidos del mismo, incluso, y dependiendo de la configuración del diseño del blog, en la creación y edición de las propias entradas del blog.

Entre los objetivos del blog, destacamos tres:

1. Realizar una acción tutora directa sobre el alumno, a través de consultas en el blog, que pueda ser de interés también para el resto de sus compañeros. De esta forma, el blog se usa como un método innovador de tutoría en el sentido de que una acción individual de un alumno puede ser compartida por el resto de los usuarios del blog.
2. Para el alumno, tener un seguimiento del desarrollo de la asignatura día a día ya que las entradas que se hacen en el blog están relacionadas con los contenidos del tema explicado en el mismo día, o en fechas muy próximas a las de la publicación de la entrada.
3. El blog permite a los alumnos que no han podido asistir a una clase saber e informarse de cómo se va realizando el desarrollo de la asignatura, de forma que el alumno pueda conocer qué parte del temario se ha explicado, y qué parte no.

Merece la pena detenerse en este último objetivo. Un problema frecuente y que apenas se presta interés en la enseñaza universitaria, es informar a los alumnos que faltan a clase sobre el desarrollo de la asignatura. Estas situaciones son de un interés especial por parte del profesor, ya que si dichos alumnos no se "enganchan" de nuevo a la asignatura, es muy probable que arrastren deficiencias en el aprendizaje para el resto de contenidos. Este problema es más destacable en las enseñanzas de Ciencias, y Matemáticas en particular, donde los conocimientos teóricos tienen una relativa importancia, pero las técnicas asociadas ocupan un papel fundamental, que no pueden ser aprendidas por un mero ejercicio memorístico.

## Descripción técnica del blog y metodología

Una de las ventajas que ofrece un blog a nivel de necesidades informáticas, es que la creación del mismo y su mantenimiento no necesita de elevados conocimientos para administrarlo: realizar entradas, editarlas, moderar los comentarios, etc. Sin embargo, en el desarrollo del blog que nos ocupa, se ha ido apreciando problemas técnicos que se han tenido que resolver. También se ha querido sacar el mayor partido al blog, aprovechando todos los recursos que dispone Internet.

El primer problema que se presentó era dónde se iba a alojar el blog ya que existen numerosas plataformas en la red donde hacerlo (Blogger, bitácoras.com, Wordpress, etc). Por una simple cuestión gratuidad y de confianza en Google, la elección fue usar el servidor Blogger que ofrece el mismo. Sin embargo, al paso del tiempo, hemos descubierto que la elección fue acertada, especialmente porque Google proporciona servicios que no fueron pensados inicialmente. El más claro es el de llevar una estadística de las visitas en el blog, que se realiza a través de Google Analytics.

También surgió desde el principio el problema de cómo editar los símbolos matemáticos en el blog, ya que en general, los editores de texto usuales no están preparados para ello, como por ejemplo, el propio sistema Blogger. No cabe duda que el editor LaTeX es el más apropiado. Se resolvió esta dificultad añadiendo plugins adecuados en la configuración html del blog.

La apariencia del blog de “Topología I” es la típica en este tipo de formato. Existe una cabecera con el nombre del mismo. Debajo de ella, se encuentran las últimas entradas (cuatro en nuestro diseño) editadas por el profesor en orden cronológico. Cada una de ellas lleva un título y la fecha de publicación. Posee un enlace a los comentarios. La entrada publicada en el blog es clasificada por una o más palabras claves, de acuerdo con el asunto central tratado en la misma. Una forma para ello es relacionarlo con los conceptos del propio temario, lo que permite un acceso fácil para su consulta.

En la columna de la derecha del blog aparece información de la asignatura (en forma de “gadgets”) que se pueden clasificar en cuatro bloques:

1. Presentación de la asignatura, información del profesor, etc.
2. Material docente: apuntes, ejercicios, exámenes, etc. También existen encuestas de opinión sobre los exámenes realizados a lo largo del curso.
3. Enlaces exteriores: páginas webs de otros profesores, temas concretos de topología, curiosidades, vídeos.
4. Información sobre el blog: seguidores, listas de otros blogs, archivo de entradas, número de visitas, suscripciones, etc.

Un aspecto importante en un blog se refiere a los contenidos y temáticas de las entradas, ya que esto determina la especificidad del blog. Nosotros nos hemos decantado, en su mayor número, por asuntos que traten de forma breve un concepto, un ejemplo o un problema que se ha realizado en el aula en el mismo día, analizar el desarrollo de la clase, o comentar aspectos que no se profundizaron lo suficiente. También se ha tratado otros asuntos, aparte de los meramente docentes. Destacamos curiosidades matemáticas, sistemas de evaluación, formas de estudio de la asignatura, etc. Por ejemplo, una entrada sobre cómo debería pesar las notas de cada uno de los exámenes parciales en la calificación global del alumno, abrió un encendido debate en el blog entre los propios estudiantes de la asignatura.

La resolución de una duda planteada por un alumno en el blog es leída por el resto de los participantes. Esto provoca a otros alumnos que tuvieran la misma pregunta, u otra parecida, reacciones ante una consulta propuesta por un tercero. Éstas son añadidas al blog, enriqueciendo la discusión formulada inicialmente. La participación del profesor mediante un comentario como los demás usuarios del blog, no se realiza inmediatamente después de cada entrada, sino después de cierto debate producido por los propios lectores del blog. Cuando el profesor interviene es para aclarar conceptos o moderar las ideas. Otras veces, y debido al contenido de los comentarios, el profesor no realiza ninguna labor de moderación.

En el blog no hay que registrarse, lo que permite que el blog no sea cerrado sólo al grupo de la asignatura, sino que cualquier persona interesada en la Topología pueda participar. Por la propia naturaleza de un blog, éste se actualiza casi a diario. Nuestro propósito es que después de haber impartido una clase presencial, se realice un post en el blog.

A grandes rasgos, la labor del profesor en el blog se puede resumir de la siguiente manera:

1. Elaborar las entradas del blog.
2. Actuar como moderador en los comentarios y discusiones que se vierten en cada entrada.
3. Elaborar el material docente complementario (‘apuntes’).
4. Llevar un registro de las participaciones de cada uno de los alumnos para su posterior evaluación.
5. Mejorar los detalles técnicos del blog.

El trabajo del profesor para el mantenimiento del blog es alto. Esto se debe por un lado a que hay que elaborar cada una de las entradas y por otro, porque existe una labor de moderación en el mismo. Ésta última se realiza en cualquier momento, ya que los comentarios en el blog son a menudo dudas o preguntas sobre la entrada correspondiente, y por tanto, con una necesidad de respuesta relativamente rápida. A esto hay que añadir el tiempo dedicado a las mejoras técnicas del blog. Como consecuencia, la creación de un blog supone un esfuerzo que consiste primordialmente en que la actividad en el mismo debe ser continua en el tiempo, por la propia naturaleza del formato.

## Innovación en metodologías de evaluación de conocimientos y competencias

Entre las competencias que adquieren el alumno en este proyecto, destacamos las siguientes:

1. Incentivar el trabajo autónomo al tener que decidir si quiere o no participar en el blog (a través de un comentario o una entrada), así cómo en los contenidos de su propia participación. Pensamos que para los alumnos el hecho de compartir con el resto de los compañeros sus preguntas, dudas y comentarios, mejora su autoestima para el estudio de la asignatura.
2. Desarrollar la capacidad de comunicar el trabajo que se realiza en clase o en casa. Esto se ve reflejado en las expresiones que usa en los comentarios aportados por el alumno en el blog. En Matemáticas, la precisión y rigor en el lenguaje matemático es fundamental para el alumno en los razonamientos y en la realización de ejercicios.
3. Fomentar las habilidades de crítica ya que parte de los comentarios son reacciones a otros realizados por el profesor u otro compañero.
4. Incentivar el trabajo diario, al tener que visitar el blog, provocando un esfuerzo añadido en el aprendizaje de la asignatura.

Los indicadores a tener en cuenta para seguir y evaluar las competencias adquiridas por el alumno están siendo el número y el tipo de participaciones en el blog. La vitalidad y éxito de un blog se refleja en el número de comentarios vertidos en las entradas. El blog permite al profesor evaluar al alumno de los conocimientos adquiridos en las clases presenciales de una manera indirecta: a través de la participación en el blog, con los comentarios que realice, opiniones, etc. Simplemente por el hecho de "ver qué hay de nuevo en el blog", se manifiesta un interés del alumno por la asignatura.

Para incentivar la implicación de los estudiantes en el desarrollo y seguimiento del blog, el profesor contabiliza las participaciones de los alumnos, que se tiene en cuenta en la evaluación global de la asignatura. Para llevar a cabo esta evaluación, es necesario que los alumnos, a la hora de realizar un comentario, se identifiquen claramente, y usen seudónimos o anónimos. Para las entradas, necesariamente se deben identificar, ya que el profesor es el administrador del blog, y los alumnos no pueden directamente editar entradas.

En el blog existen dos tipos de interacciones con el mismo. El primero sucede cuando el alumno desarrolla y edita una entrada; el segundo, si realiza un comentario en el blog a algunas de las entradas publicadas. En el primer caso, la valoración por parte del profesor es mayor que si fuera un comentario, ya que requiere más esfuerzo y creatividad.

El grado de participación del alumno en el blog es, en parte, reflejo del interés del mismo en la asignatura. Esto se ha visto corroborado ya que podemos afirmar que aquellos alumnos que se han involucrado más en el blog han tenido mejor aprovechamiento de las clases presenciales y, finalmente un rendimiento académico satisfactorio en el curso. Esto confirma que la novedad del uso de las TIC "[…] aumenta la motivación del alumno […] al tiempo que mejora sus resultados" [1]. Aunque aquí podemos afirmar que también son los alumnos con mayor interés en la asignatura lo que más han participado en el blog. Respecto de aquellos alumnos con menor o escasa preocupación por la asignatura, su interacción con el nuevo formato es menor. A esto hay que añadirle que la falta de conocimientos de la asignatura les impide redactar y editar algún comentario en el blog con un mínimo de contenido matemático.

La realización de una acción tutora a través de un blog constituye en sí una práctica innovadora. A esto hay que añadir la innovación que supone tanto al profesor como al alumno que los comentarios y opiniones pueden ser leídos por un tercero, en principio, ajeno inicialmente a la discusión planteada.

## Estadísticas del blog: primeras conclusiones

El número de entradas publicadas en el blog en el curso 2008/2009 ha sido 139, lo que supone una media de 15-16 al mes. Este número de entradas ha sido menor al inicialmente previsto, debido principalmente a dos razones. La primera al número de clases por semana, que es de cuatro, lo que suma no más de 20 días lectivos por mes. Por otro lado, a los periodos vacacionales que existen en un curso académico, que hace reducir el trabajo, ya que, por ejemplo, no existen clases presenciales. En resumen, en periodos no lectivos no resulta fácil para el profesor la redacción de una entrada sobre la asignatura y que a la vez refleje inmediatez en cuanto a su temática.

La participación por parte del alumno en forma de comentarios puede decirse que no es muy alta, aunque sí el número de visitas. Por otro lado, en la elaboración de entradas al blog, es decir, en la preparación de un texto con una temática elegida por el alumno que sirva como entrada, y sea el inicio de posibles comentarios, los alumnos han realizado 17, lo que supone algo más del 12% sobre el total. En este proyecto, la redacción de entradas por parte del alumno se contabilizaba con una mayor calificación en comparación con un comentario en el blog, debido al mayor trabajo y esfuerzo necesario.

Para llevar una estadística sobre las visitas realizadas en el blog, Google dispone de la herramienta Google Analytics para realizar un estudio estadístico al respecto. Después de una fase inicial de dos meses en la realización plena del blog, éste empezó a funcionar de manera estable en el mes de diciembre de 2008. También se instaló un “contador de visitas” al blog, que sólo contabiliza dicho número, pero no detalla más características de las mismas. En el presente trabajo, y en orden a mostrar de qué forma es posible analizar las visitas en el blog, hemos concretado el periodo del curso académico 2008/2009, hasta el mes de junio. De un examen del informe estadístico del blog, se obtienen las siguientes conclusiones:

1. El número de visitas según Google Analytics ha sido de 2273, con una media de 37’42 visitas día. El otro contador del blog suma un total de 15700. Sabemos que ambos contadores funcionan correctamente, pero el primero no contabiliza visitas que se producen por procesos de “página adelante” y “páginas atrás” o “actualización de página”.
2. El tiempo de media de permanencia es 2 minutos y 13 segundos. Esto se correspondería con el tiempo necesario para leer la entrada del día correspondiente.
3. El promedio de páginas vistas en cada visita es 1’91. Este número se corresponde, grosso modo, a ver la entrada nueva del día.
4. Por ubicación de los visitantes, se obtiene que el 54,65 % proceden de España. Otra parte importante, el 40,77 %, procede de Iberoamérica. Esto indica que el seguimiento del blog no se restringe a España.
5. De los procedentes de España, aproximadamente el 48 % son lectores con origen en Granada y provincias limítrofes, dato que se correspondería con los alumnos de la asignatura. Sin embargo, existe un alto porcentaje de seguidores del resto del país que no estarían relacionados con la Universidad de Granada.
6. El porcentaje de visitantes nuevos es del 60%, lo que muestra el interés por el blog. Esta parte de personas se corresponden con estudiantes de Topología de otras ciudades y países.

## Productos y recursos generados. Conclusiones

A lo largo del desarrollo del proyecto, se han realizado tres evaluaciones acerca del grado de satisfacción del mismo. Ha sido de forma trimestral, por escrito, y fuera de los cauces del propio blog. De las mismas, se han obtenido dos conclusiones. La primera es que la experiencia del blog resulta positiva para el alumno. Este percepción puede venir determinada por el hecho de que el blog es una novedad en sus clases rutinarias, lo cual, siempre trae adhesiones positivas. Además, en el caso concreto del grupo de alumnos de segundo curso de la Licenciatura de Matemáticas, el proyecto de blog ha supuesto el primer caso que han tenido de una experiencia docente de tipo Web 2.0 en su licenciatura.

La segunda es que el alumno aspira a que los contenidos de las entradas del blog sean simplemente la realización de ejercicios resueltos. Es evidente que ésta no es la función de un blog, pero esta confusión puede venir dada porque algunas de las entradas se han dedicado a aclarar un concepto, o explicar con más detalle algún ejercicio que se ha hecho en clase. Como hemos indicado previamente, este blog es un diario de una asignatura concreta, Topología I, pero no es blog, ni un portal acerca de la Topología, como una rama más de las Matemáticas.

El proyecto que hemos iniciado con el blog de "Topología I" no quiere quedarse en una mera experiencia del uso de Internet en la docencia universitaria, sino se quiere generar valor añadido tanto al alumno como a la asignatura.

El primero a destacar para el alumno ha sido el conocimiento, a un nivel básico, del programa LaTeX. Un problema que surgió con el blog es que los alumnos no sabían usar el editor de textos LaTeX. Con el fin de evitar esto, se ha realizado un cursillo breve de iniciación a este procesador de textos, con un éxito claro, ya que más de la mitad de los alumnos acudieron a las clases. Esto ha permitido al alumno poder escribir textos con lenguaje matemático para confeccionar no sólo los comentarios y entradas en el blog, sino sus propios apuntes y ejercicios.

Entre los productos que se han generado al acabar el curso académico 2008/09, y relacionados con el proyecto del blog, destacan:

1. Recopilación de todas las entradas en formato CD. Constituye así una especie de resumen cronológico (no de contenidos) del desarrollo de la asignatura. También se ha incorporado al CD toda la información básica de la asignatura (temario, programa), así como apuntes, exámenes y demás contenidos en formato pdf.
2. Realización de un glosario de los conceptos que han aparecido de la asignatura. Este glosario se ha incorporado al blog y ha sido elaborado por tres alumnos de la asignatura que se prestaron a ello.
3. Realización de una evaluación de la experiencia tanto por parte de los alumnos como del profesor, elaborando unas conclusiones. Ya que la creación del blog ha sido en el marco de un proyecto de innovación docente de la Universidad de Granada, esta evaluación, con su correspondiente informe ha sido entregado a la Unidad de Innovación Docente de la Universidad, como aportación de la experiencia docente del blog a la comunidad universitaria.

Finalmente, como comentario final, creemos que la experiencia de este proyecto, tanto para los alumnos, como para el profesor, ha sido positiva, esencialmente porque el blog ha sido un instrumento docente nuevo que se añade a los que ya se poseía (clases de pizarra, tutorías, páginas webs, etc). Es evidente que no ha supuesto una 'sustitución' de conocidas técnicas, ni ha sido la panacea en la que el alumno y el profesor han resuelto todos sus problemas. Sin embargo, ha establecido un nuevo formato de comunicación entre el profesor y el alumno, de forma más colaboradora, aprendiendo uno del otro, y desarrollando contenidos que fueran útiles para el resto de compañeros.

Este intercambio de tareas y relaciones establecidas a través del blog ha proporcionado y añadido valor al uso de Internet, y en nuestro caso, a las nuevas formas de expresión Web 2.0, que desde el ámbito universitario se observan habitualmente con recelo, y más en una licenciatura, como la de Matemáticas, donde (como no puede ser de otra manera) los contenidos docentes permanecen constantes a lo largo de mucho tiempo. Es de destacar que importantes universidades como Stanford o Harvard, proporcionan ya a sus miembros la posibilidad de desarrollar blogs para que "muestren las ideas y actividades" que realizan sus alumnos, profesores, departamentos, etc. [4]

Por último queremos destacar que los contenidos del blog, realizados tanto por los alumnos como por el profesor, han servido para aportar una nueva dimensión a la labor realizada a lo largo del curso, ya que el blog, como bitácora del mismo, se muestra en la red a toda aquella persona que quiera visitarlo. Por tanto, el grupo colectivo formado por alumnos y profesor ha dejado una "memoria", una "huella" [2], en Internet sobre la experiencia realizada y que puede ser útil para otras personas interesadas en los contenidos de la asignatura.

## Bibliografía

Carrasco, A., Gracia, E., de la Iglesia, C. (2005). *Las TIC en la construcción del espacio europeo de educación superior. Dos experiencias docentes en teoría económica*. Revista Iberoaméricana de Educación.

Gewerc, A.,(2005). *El uso de weblogs en la docencia universitaria*, Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa, 4, 9-24.

Ruiz, J., Expósito, F. (2006). *El uso didáctico del blog o bitácora: la experiencia del glosario de Psicología Social Aplicada*. I Jornadas sobre Experiencias Piloto de implantación del Crédito Europeo en las Universidades andaluzas. http://www2.uca.es/orgobierno/rector/jornadas/documentos/041.pdf

Stanford Blog Directory, http://blog.stanford.edu/

Steegmann, C., Huertas, M.A., Juan, A.A., Prat, M. (2008). *E-learning de las asignaturas del ámbito matemático-estadístico en las universidades española: oportunidades, retos, estado actual y tendencias*, *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC)*. Vol. 5, n.º 2. UOC. http://www.uoc.edu/rusc/5/2/dt/esp/steegmann_huertas_juan_prat.pdf

Unidad de Innovación Docente, Universidad de Granada. http://innovaciondocente.ugr.es/

**Rafael López Camino:** Profesor Titular de la Universidad de Granada, en el Departamento de Geometría y Topología. Investigador en el área de Geometría Diferencial, con más de 50 publicaciones en revistas internacionales, más de una veintena de conferencias en congresos y autor de libros de Topología. Actualmente coordina el proyecto de divulgación "Matemáticas y Sociedad en la UGR".
e-mail: **rcamino@ugr.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 113-125
ISSN: 1815-0640

# El papel de la escuela y el docente en el contexto de los cambios devenidos de la praxis del binomio matemática-cotidianidad

**Milagros Elena Rodríguez**

## Resumen

La escuela debe reivindicar el valor de la matemática. A través del método hermenéutico-dialéctico y una revisión documental, se propone dilucidar el papel de la escuela y del docente en el contexto de los cambios devenidos de la praxis del binomio matemática-cotidianidad. En una pedagogía crítica, integradora el aprendizaje es un proceso dialéctico, inacabado, mediado por la cotidianidad del individuo. Debe emerger un docente que cuestione las experiencias represivas, para generar respuestas liberadoras.

## Abstract

The school must vindicate the value of the mathematical one. Through hermenéutico-dialectic method and a documentary revision, sets out to explain the paper of the school and the educational one in the context of the changes happened of praxis of the mathematical-cotidianidad binomial. In one pedagogía critical, integrating the learning is a dialectic, unfinished, half-full process by the cotidianidad of the individual. An educational one must emerge that questions the repressive experiences, to generate answers liberating.

## Resumo

A escola deve reivindicar o valor da matemática. Através do método hermenêutico-dialético e uma revisão documental, propõe-se dilucidar o papel da escola e do docente no contexto das mudanças devindas da práxis do binômio matemática-cotidianidade**.** Numa pedagogia crítica, integradora a aprendizagem é um processo dialético, inacabado, mediado pela cotidianidade do individuo. Deve emergir um docente que questione as experiências repressivas, para gerar repostas liberadoras.

## 1. Introducción

El educador tiene una significación preponderante en la vida del ser humano; la docencia no consiste es trasladar conocimientos, sino en estimular en el educando la motivación, el interés por aprender, por formarse, crear un vínculo afectivo con sus semejantes, desarrollar el individuo desde sus intereses, afectividades, potencialidades y entender que no existe la enseñanza colectiva; en el sentido de que todos son diferentes y envueltos en la complejidad de un gran sistema denominado planeta tierra. La función del docente es la de formar personas reflexivas de su mundo de lo que son capaces de hacer a favor de este y de la liberación de la opresión de una educación castradora de las condiciones de ser humano inteligente, sensible. Son muchos autores que respaldan estas ideas, como por ejemplo Savater (1997).

Más aún, la enseñanza exitosa es aquella que propicia que el educando se forje la necesidad de aprender y que encuentre en el profesor un guía para llegar al conocimiento y un espacio de encuentro, de reciprocidad, discusión y confrontación de pensamientos. Freire (1972) señala, que el estudiante pasivo, la educación *bancaria*, el cúmulo de datos sin sentido son aún características de la educación de estos tiempos.

Desde luego, el proceso de enseñanza-aprendizaje es multidimensional y es así como Moran (1995) refiere que la docencia debe ser un espacio atravesado con factores e intenciones en el que educadores y discentes aprendan su manera de construir conocimiento, es decir saber reflexionar, investigar y pensar su realidad. Es por ello, que la enseñanza debe ser un proceso creativo a través del cual los sujetos se eduquen e interactúen con un objeto de conocimiento, develando su propia capacidad de construcción y progreso.

En tal sentido, se plantea una pedagogía más allá de praxis decadente de la modernidad. Hay muchas postura de cómo debe ser la actuación del docente, al respecto Pérez (2001, 145) afirma que

> "*la pedagogía y el docente deben responder a las exigencias del tiempo actual y el calor del debate hace propicio que en la escuela y su proyección social, se replantee una práctica basada en un saber contra hegemónico que exprese, desde la intimidad de los sujetos, la posibilidad del mundo de la libertad*"

No son menos ciertos, los planteamientos de Giroux (1997) sobre la función de los profesores como intelectuales, hacia donde debe girar su praxis y su crítica. La educación y la cultura son los defensores de los paradigmas que se manejan en la sociedad. La pedagogía actual debe asumir la tarea integral de transformar al individuo y de poner en la educación el eje de desarrollo de este. Es menester entonces, una nueva manera de enseñar a aprehender; y formar a un ser humano responsable de lo que decide construir como su realidad.

En particular, las prácticas mecanicistas de la praxis de la matemática en la escuela han traído consecuencias nefastas, que alejan al estudiante de la ciencia lógica. En el mecanicismo, se ha creado una relación educativa sujeto-objeto que aleja al ser de la belleza, estética, utilidad de esta ciencia. Esta dependencia es monológica, donde no se asciende al interior del objeto (el estudiante); y la función del sujeto es de control, el de la típica postura positivista, materialista, donde no existe una relación de iguales ni moralidad.

Es por ello, que en el devenir del tiempo, ha predominado la enseñanza repetitiva, castradora del pensamiento crítico, donde los protagonistas del acto de enseñanza- aprendizaje no se regresan a la crítica de sus acciones, y es menester otro tipo de pedagogía; que respete las subjetividades, las diferencias, los estilos de aprendizaje; apegada al mundo experiencial de los educandos y su contexto. Así lo considera Martínez (2006, 148): "*el profesor de matemática raramente reconoce su deficiente didáctica, más bien, racionaliza el hecho achacando su fracaso a los estudiantes porque "son malos para la matemática"."*

En tal sentido, la enseñanza actual de la matemática presenta problemas apegados, entre otras, a la forma como realiza su praxis. Al respecto Infante (1999) afirma que el profesor de matemáticas no entiende porqué el estudiante no comprende, y esto se debe a dos concepciones: la forma mecánica de impartir la ciencia donde los contenidos son dados como procedimientos, aunado a la concepción estereotipada de que el conocimiento didáctico matemático sólo está circunscrito al conocimiento estrictamente científico académico. De esta manera, la didáctica de las matemáticas y los métodos empleados en su enseñanza están deformados.

En particular, las ideas sobre este tipo de educación de Freire (1996) y Mora (2005), entre otros, han ayudado a la formación de lo que se denomina la educación matemática critica, donde se establece una relación dialéctica entre educador y educando, mediados por la reflexión critica y una conciencia de sus propias realidades y transformaciones. Es así, como la enseñanza de la matemática no debe ser una actividad neutra ya que sus contenidos responden a ciertos intereses: ideológicos, económicos, culturales que deben se puestos en el escenario.

En esta investigación, a través del método hermenéutico-dialéctico, y una revisión documental, se propone dilucidar el papel de la escuela y del docente en el contexto de los cambios devenidos de la praxis del binomio matemática-cotidianidad. Entendiéndose, a lo largo de este escrito a la escuela, según Giroux (1992), toda institución educativa, que interrelaciona con el Sistema General de Educación. Esta institución tiene la función de proporcionar conocimientos, desarrollar habilidades y actitudes que preparen al discente para asumir las tareas de la participación social, proveer una educación con equidad. Savater (1997, 18) reafirma estas ideas al afirmar que *“educar es creer en la perfectibilidad humana, en la capacidad innata de aprender y en el deseo de saber qué la anima, (…) en que los hombres podemos mejorarnos unos a otros mediante el conocimiento”*.

Es de importancia capital de acuerdo a la cita anterior, la transcendencia de educarse, en el sentido de que con ésta el ser humano logra extraer de si sus mejores cualidades. Las instituciones educativas tienen gran responsabilidad al respecto. En efecto, Bourdieu (2002, 98) afirma que la escuela es *“una instancia de reproducción de las relaciones sociales de dominación y, por lo tanto, de las formas de conciencia y representación ideológica que le dan legitimidad”*. Y es que la escuela no debe ceñirse a un recinto como tal, deberá estar integrada a la comunidad en donde se vincule la educación sistemática y se creen conciencias de preparación intelectual a cada uno de los ciudadanos.

En lo que sigue, se mostrará la relación entre la matemática y la cotidianidad, existente desde el origen de esta ciencia, por la necesidad de sobrevivencia del hombre y el desarrollo de la humanidad. En el contexto cotidiano del ser humano esta inmersa la matemática, aún cuando en muchos casos este no tenga conciencia de ello. Posiblemente explorando estas experiencias en los educandos y mostrándoles que de alguna manera ellos usan la ciencia lógica y la necesitan, se pueda mejorar notablemente su predisposición hacia ella.

## 2. El binomio matemática-cotidianidad

La cotidianidad, sus mitos, sueños, sentimientos; la mayoría de las veces ha sido olvidada en la modernidad. Los teóricos de las corrientes positivistas, funcionalistas, estructuralistas entre otras la han obviado, desvalorizándola, porque los conocimientos locales no se han considerado como válidos, por no tener un carácter científico. El paradigma mecanicista se ha olvidado de la vida, y la experiencia; no ha puesto su mirada en la cotidianidad. Sin embargo, autores como Heidegger (1980), Durkheim (1990), Bourdieu (2002), entre otros, han intentado acercarse al estudio de lo cotidiano y conciliar la ciencia con la vida.

Después de los años sesenta, se pude decir que se realizaron diversos estudios sobre la vida cotidiana, muchos teóricos como Heller (1977), Goffman (1981), Berger y Luckmann (1989), tienen numerosos trabajos sobre esta categoría filosófica; en particular la fenomenología presenta la cotidianidad como válida hasta que no se demuestre lo contrario.

La cotidianidad es de suma importancia en la formación humanista, porque regresa al individuo a sus intereses, a su realidad. No es posible una pedagogía centrada en el ser humano que no tome en cuenta la cotidianidad. En tal sentido, afirma Heller (1977, 96) que *"en las formas de vida cotidiana es donde se realiza el hombre entero (…) es decir por el ambiente en el cual el hombre nace y en el que ha "aprendido" a moverse".* Y es que el hombre es racional e irracional al mismo tiempo, siente padece sus errores y se corrige en la cotidianidad de su vida; de tal manera que es imposible no tomar en cuenta esta categoría en su educación.

En lo que sigue se tocará los orígenes de la matemática, a fin de hacer ver que justamente esta comienza desde la cotidianidad del ser humano, como cuestión de supervivencia al comienzo de la historia. Las matemáticas, como se ha vendido afirmando, surgen desde la aparición del hombre en la tierra como sujeto pensante.

En sus inicios los hombres primitivos tenían la necesidad de alimentarse. Sea para contabilizar o hacer diferencias en la repartición, la matemática entonces entraba a jugar un papel importante en su vida cotidiana. En general afirma Pliego (s/f, 5) que *"los primeros pensadores del mundo antiguo trataban primordialmente, de comprender el origen de los diversos fenómenos naturales, buscaron con ahínco el elemento inicial o materia primaria que diera origen a toda la variedad de objetos del mundo"*. Es así como surge la matemática unida a la explicación de los hechos reales, como una necesidad.

Los datos históricos consideran a Mesopotamia, Babilonia y Egipto como las culturas con mayores conocimientos de los números. El desarrollo de los pueblos se encuentra indefectiblemente unido al estudio de las matemáticas. Las cuales aparecen inicialmente con la Aritmética, floreciendo mas tarde el Algebra y luego la Geometría. Los griegos fueron eminentes en todas las ramas del saber, en efecto afirma Russell (1988, 10) *"la gran hazaña intelectual de los griegos fue la geometría, (…) el genio griego fue deductivo más que inductivo, y domino por ello la matemática"*.

Más aún, los seguidores de Pitágoras, creían firmemente que a todo hecho real se le podía asignar un número, de hecho Pliego (s/f, 7) afirma que "*los pitagóricos sostenían que el fundamento de los fenómenos de la naturaleza no era un principio material, sino el número. Conocer el mundo significaba, según los pitagóricos, conocer los números que lo rigen*." Que hecho tan resaltante la unidad, todos son uno unidos en un único universo, de quien se alimenta no solo en el mundo como afirma Freire, sino con el mundo.

Se nota, que en situaciones de la vida real en las cuales las personas se sienten implicadas, se observa que estas utilizan las matemáticas. En estas realidades el problema y la solución se generan si la persona está implicada cognitiva, emocional y socialmente. Estos fenómenos ponen de manifiesto que los conocimientos se construyen usándolos en contextos reales. En la vida diaria, los problemas son concretos y sólo se pueden resolver si las personas los consideran como problemas a resolver. En efecto, como afirma D'Amore y Fandiño (2001, 60)

> "*Si existe una matemática en una cotidianidad externa al mundo de la escuela* (*y todos sabemos obviamente que existe*)*, esta concierne en un cierto sentido más a los profesores que no a los estudiantes. Si queremos ocuparnos de verdad de los estudiantes y de su aprendizaje, debemos admitir que, en la realidad de los hechos, el binomio matemática-cotidianidad para los estudiantes se focaliza en la escuela*."

Estas palabras, evidencian que el binomio matemática- cotidianidad existe ineludiblemente desde la creación de las matemáticas, pero que esta realidad no es evidenciada en las escuelas, priorizando la abstracción en primer lugar antes que tal relación. Apremia la necesidad de consustanciarla con la vida y hacerlo visible en las escuelas, ya que el ser humano sólo es capaz de construir el mundo donde se integra y desarrolla su cotidianidad.

En cuanto a la cotidianidad, Heller (1977, 24) afirma que "*en la vida cotidiana el hombre se objetiva de diversas formas. El hombre formando su mundo (su ambiente inmediato), se forma también asimismo*", estas palabras reafirman en hecho de que en el educar del ser, también trascienden su experiencia, sus intereses y motivaciones, que desde luego repercutirán de manera positiva al tomarlas en consideración, en su justo valor, en la educación matemática.

Mas aún, la cotidianidad es una categoría de la educación, es un principio del aprendizaje que marca el quehacer del hogar, es el respeto por la persona, su singularidad, su historia, su comunidad, diversidad, crianza; respetando la interrelación entre todos los seres, la esperanza y el amor marcan el contexto de la educación, en todos estos valores de vida es menester también incluir la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, haciendo que ésta forme parte de la formación integral del individuo.

## 3. La docencia de la matemática insertada en el entramado cotidiano del individuo

Gran parte del conocimiento cotidiano se aprende directamente a partir del entorno, y los conceptos que se emplean no son muy abstractos. El problema particular de las matemáticas, pero también su virtud, estriba en su gran abstracción y generalidad, lograda por generaciones sucesivas de individuos inteligentes, cada uno de los cuales ha abstraído o generalizado, desde conceptos de generaciones anteriores. Pero la forma como se ha venido enseñando la ciencia, alejada de los problemas comunes de los estudiantes, entre otras acciones ha separado al discente de tan valiosa ciencia.

Desde luego, es necesario que el amor, y la fe en el educando deben ser puestas por el docente en las aulas de clase hacia sus educandos, en efecto en

Maturana (2002, 16) se expresa que "*el amor es la emoción que constituye la vida social, y es en esta que existe como seres humanos y en donde nuestra calidad humana se conserva sistémicamente".* Solo así, se puede reconstruir un individuo éticamente inteligente, que perfecciones sus virtudes y minimice sus debilidades.

Para esto, es de entender que la matemática en la escuela debe ser ofrecida como un saber útil, pertinente, deseable, conveniente, provechoso, importante, necesario y adecuado para dar respuestas a los problemas actuales, cercanos e interesantes que confrontan los estudiantes, en su cotidianidad. Debe hacerse una oferta posible, que haga creíble la afirmación de que la matemática ciertamente puede ayudar al individuo a lograr una mayor comprensión de la realidad y constituye una herramienta útil en situaciones problemáticas de la vida cotidiana.

Una opción es aquella que desarrolla los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática a partir del planteamiento de problemas relevantes para los alumnos, los cuales son analizados detalladamente con el fin de explicitar los conocimientos matemáticos que se necesitan para su comprensión, interpretación y resolución, luego de lo cual son abordados asumiendo nuevas formas de hacer matemáticas, que superen los presupuestos, métodos y modelos curriculares e instruccionales basados en el paradigma tradicional.

En síntesis, de lo que se trata es de desarrollar un proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática basado en el esfuerzo por resolver problemas matemáticamente, identificados, planteados y construidos a partir de situaciones del contexto significativo de los estudiantes y que sean propiciatorios de acercamientos globales y multidisciplinarios que atiendan a la complejidad de la situación problematizada. Una expectativa como la anteriormente esbozada le plantea retos al profesor de matemática y éste podrá afrontarlos sólo si renueva sus ideas acerca de lo que significa aprender esta ciencia, desarrolla una nueva cultura matemática escolar, asume ésta, no como un fin en si mismo, sino como un medio para el desarrollo de la ciudadanía.

## 4. Visión de la escuela y del docente en la nueva praxis de la matemática

La labor docente supone una interacción cognoscitiva entre las fuentes del nuevo conocimiento y quienes deberían difundirlos, así como la de los docentes frente a los estudiantes. La complejidad del proceso enseñanza- aprendizaje de matemáticas ha sido reducida a sólo apreciar el trabajo del docente, cuando las actividades de investigación y extensión deben estar integradas entre si con la docencia, y no dedicarse a repetir clases expositivas donde el discente es solo un receptor pasivo y no interviene en la construcción de sus conocimientos, menos aún sus problemas de sus realidades.

Una docencia actualizada en los nuevos tiempos construye los conocimientos sobre la interpretación, comprensión, explicación de los procesos y fenómenos de la realidad; las interpretaciones no son únicas y tienen correspondencia con el tiempo y espacio en que se formulan. Lo que el docente debe fomentar según Savater (1997, 137) "*en sus alumnos no es la disposición a establecer irrevocablemente lo que han elegido pensar (…), sino la capacidad de participar fructíferamente en una controversia razonada, aunque ello hiera algunos de sus dogmas personales o familiares*".

Por otro lado, el conocimiento que aporta la escuela a través de la matemática debe pensarse en relación con la necesidad que tiene el estudiante de comprender, criticar y transformar la realidad y con ello desarrollarse a si mismo. La educación matemática se concibe como el proceso en el cual el individuo va desarrollando sus capacidades para interactuar con su medio ambiente, y el docente debe provocar situaciones o problemas pertinentes de la vida cotidiana para que el estudiante a través del dialogo salga de la rutina del pensamiento automático y se eleve a la criticidad y complejidad de la realidad en la que vive.

Es por ello, que la docencia debe proporcionar instrumentos intelectuales: estructura, estrategias, métodos que facilitan el desarrollo del aprendizaje a través de la práctica en el contexto de la interacción social. El papel del docente de matemáticas es promover el desarrollo del pensamiento en cuanto a adaptación, coherencia, claridad e intersubjetividad. De esta manera el estudiante debe ser educado en un clima afectivo y critico; un clima de tolerancia y cuidado donde el educador que también se educa e interviene en dicha formación.

Es así, que la educación puede pensarse como socialización, como espacio de construcción de conocimientos o un espacio de desarrollo humano. En este último proceso se debe enmarcar la enseñanza de las matemáticas, esto es su construcción de una perspectiva humanista: para el desarrollo integral.

El desarrollo integral del ser humano esta profundamente relacionada con la palabra Kosmos, término intraducible usado y promovido por Pitágoras en su enseñanza que se refiere a un mundo con un orden comprensible y bello, en el ser humano es la interconexión y armonía entre las partes y el sentido de vida; se trata de articular la totalidad, comprensión, y conciencia del hombre. Es lo racional o irracional y la no imposición de únicos estilos de aprendizaje que encierran y reducen al individuo sin tomar en cuenta su diferencias e intereses. La integrabilidad se refiere a la vida, a las subjetividades e intersubjetividades, a las motivaciones y significaciones de la vida, es un ethos educativo más rico.

Es preciso entonces, desde la función integradora de la educación, reconocer que cuando se construye el conocimiento de la matemática existe la posición del sujeto capaz de incorporar su propio conocimiento de la vida cotidiana y del contexto en que se inserta. Esta realidad compleja debe hacer emerger un nuevo docente que deviene de la praxis de la matemática en la vida cotidiana. Es menester tener en cuenta que el individuo usa esta ciencia lógica fuera de la escuela en su vida diaria. No ha de olvidarse que la matemática, al igual que la música, el deporte y otras actividades, son procesos culturales.

Desde luego, afortunadamente, están emergiendo nuevas posturas y debates, encauzados a deconstruir el proceso de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas. La acogida de cualquier opción, no cabe duda alguna, debe incluir toda una complejidad que envuelve la praxis pedagógica, a través de la identificación de problemas relevantes para los estudiantes; los cuales analizados en su sistematicidad se deben resolver, utilizando la comprensión lógica, la sensibilidad, afectividad y vida del individuo.

Esta praxis debe superar los presupuestos los métodos y modelos curriculares e instruccionales basados en el paradigma tradicional de la modernidad. Al respecto Martínez (2006,149) arguye que *"los matemáticos deberán desarrollar una matemática esencialmente relacional y gestálticas, más acorde y en sintonía con el nuevo paradigma científico."*

Esta nueva forma de enseñar y de aprender, estriba en que la educación del ser humano debe ser necesariamente una construcción verdaderamente humana, una autoconstrucción. La actitud activa del estudiante debe estar presente en su formación, siendo él mismo, a través de sus acciones, quien se debe construir como persona, y el sujeto-docente debe intervenir como un elemento facilitador del proceso. Sin temor a equívocos, se sostiene que la educación debe dejar de ser instrumentalista. Tiene entonces mucho sentido el pensar en la ciencia al servicio del ser humano y no en contra de este.

En particular, para enfrentar los desafíos de la preparación de nuevos matemáticos y docentes, la universidad debe propiciar el espacio de lo que significa producir conocimientos de matemáticas, no solo los meramente abstractos sino los que convergen en la integración de un conjunto de saberes en la cotidianidad de los individuos.

De esta manera, la universidad debe definir prioridades y acompañar críticamente las nuevas realidades que están emergiendo. En particular, esta propuesta de docencia de las matemáticas que se viene haciendo en la investigación intenta ayudar a los educandos a cuestionar y desafiar las prácticas mecanicistas y creencias que se venía generando en la tradicional clases de matemáticas, en una palabra en estas nuevas prácticas el estudiante es actor protagónico que sale de la opresión y alcanza una conciencia critica.

Más aun, es el propio educador quien guía a los estudiantes a cuestionar las teorías y las practicas consideradas como represivas, reanimando a generar respuestas liberadoras. El estudiante comenzara entonces a ver la necesidad de renovación y liberación de la naturaleza opresiva de la práctica mecanicista que ha venido padeciendo.

Esta didáctica crítica de la matemática es una propuesta que no trata de cambiar una modalidad técnica por otra, sino que plantea analizar críticamente la práctica docente y la dinámica de la escuela. De esta manera el papel de la escuela y el docente de matemática estriban en crear las condiciones de trabajo que permita desarrollar en el educando aptitudes y la inteligencia lógica-matemática que posee.

Todo lo anterior, es posible en una pedagogía crítica, integradora y liberadora de opresión tanto de la matemática, educando y educador, donde el aprendizaje es un proceso dialéctico inacabado mediado por la cotidianidad y realidad del que aprende. Desde luego de aquí se deriva la educación critica de las matemáticas que según Mora (2005, 148) *"busca un equilibrio entre las matemáticas significativas, su humanización y su realización exitosa a través de procesos de aprendizaje y enseñanza dialécticas".*

Es así, como la pedagogía de la matemática no solo tendrá conciencia de conservación de la cultura matemática, sino de la transformación y cambio de su utilidad en la cotidianidad y en todos los quehaceres del individuo en la sociedad. Esto indica que el nivel académico desde esa perspectiva humanista es sistemático y critico. Se trata de adquirir una visión clara y dinamismo de la mente humana, de los hemisferios cerebrales; del área racional y la afectiva que haga minimizar de la vida de los seres humanos la predisposición y rechazo de las matemáticas.

Es que muchos docentes de matemáticas han hecho de esta ciencia incomprensible por usar y propender el uso de solo el hemisferio izquierdo, un buen docente debe tratar de hacer imagínale lo que expresa racionalmente intentando relacionarla con la cotidianidad del estudiante. Hoy por hoy, la neurociencia muestra las relaciones e interdependencia entre el sistema límbico, emotivo y el cognitivo.

Más aún, un docente que facilita el aprendizaje con gran preparación y afectividad por su trabajo y la matemática influirá positivamente sobre los estudiantes que están acostumbrados a vivir en tensión, con baja autoestima y desconfianza de sí mismo, con miedo y creencias de incapacidad intelectual. Son muchos los psicólogos humanistas que defienden esta educación centrado en el ser humano. Entre ellos, Maslow (1975), Rogers (1980). Se trata de integrar las destrezas intelectuales con los aprendizajes que reclaman posibilidades y potencialidades que el ser humano posee. Se convierte así el educador de matemáticas, según Maslow (1975) en una persona que ayuda a descubrir la naturaleza intrínseca dentro de sí, y es que según Fromm (1968) el buen maestro, solo con su presencia debe ejercer un efecto saludable en el educando.

En el mismo orden de ideas, la educación matemática y su enfoque humanista en la escuela debe asignar entonces la tarea de formar un hombre con posibilidades y potencialidades a través de la práctica social de sus conocimientos. Para esto es menester destacar la necesidad de cambiar conceptos, actitudes, teorías y aún la visión individualista del mundo producto de la imposición del paradigma mecanicista. Se debe aceptar una realidad completamente nueva tomando conciencia de que la matemática debe participar en condiciones diferentes en el desarrollo mundial a través de la aplicación de un verdadero humanismo científico.

Es hora entonces, de dejar a tras la doble cultura de ciencias de la naturaleza y ciencias humanas. Se ha desconocido con frecuencia que las ciencias forman parte de la cultura, la educación matemática ha sido prisionera de una distinción cuyo efecto se vuelve un inconveniente en la reflexión sobre el ser humano, se han olvidado de las palabras de Savater (1997, 132) cuando expresa que *“no hay humanidades sin respeto por lo racional, sin fundamentación racional a través de la controversia de lo que debe ser respetado y preferido”*, y es que sólo desde la razón se hace pensable lo intuitivo, la imaginación, lo psicoafectivo y la dimensión religiosa del hombre y es por ello que la oposición entre lo racional y lo humanístico no existe.

Por otro lado, la escuela debe reindicar el valor de la matemática, en la vida del hombre y en la sociedad, no se puede poner en duda el valor pedagógico de la ciencia, desde Platón, Aristóteles, Hipias y los Pitagóricos. Se debe utilizar, en consecuencia la educación matemática para fomentar el conocimiento de la persona y su capacitación para la vida útil y responsable frente a si mismo y frente a la sociedad. No debe olvidarse que para servirse de este potencia según Jaeger (1957,

12) *"la geometría euclidiana y la lógica aristotélica son, sin duda, fundamentos permanentes del espíritu humano, válidos también para nuestros días y no es posible prescindir de ellos"*.

En esta cita el autor anterior entiende por lógica la ciencia formal que estudia los procesos del pensamiento humano, partiendo de la base de que la cultura actual tiene en Grecia una de sus fuentes, la lógica sistematizada por Aristóteles es actualmente uno de los ingredientes centrales de la actual sociedad del conocimiento; es así como la pedagogía de la matemática consiste en la reflexión y sistematización de los procesos mentales que tienen lugar a partir de las relaciones humanas.

## 5. Reflexiones finales

La docencia actual, como se ha venido aseverando en los últimos años del siglo pasado se ha convertido en una actividad mecánica, improvisada y fría, a pesar de los avances de la investigación educativa en los últimos años. El profesor no práctica una docencia que además de informar forme, afirma Morán (2003), en muchos de los casos.

Es así como, la educación en Venezuela no ha logrado deshacerse del viejo ropaje de las inercias institucionales escolásticas, afirma Sánchez (1990), es que el profesor asume el papel protagónico y los estudiantes escuchan y asuman, desapareciendo el diálogo en el acto de enseñar y aprender, el docente ignora o pretende ignorar el conocimiento previo del estudiante y en vez de estimular, termina por aminorar su potencial y energías creativas.

Se señala, en esa vertiente, que los problemas que se presentan en esta enseñanza de la matemática son de diversa naturaleza: rechazo o predisposición a su estudio, bajo rendimiento, deserción de las carreras, desatención de importantes aspectos conceptuales para dedicarse al mecanicismo de los procedimientos. Desde luego, al usar los métodos tradicionales de cortes formalistas, rigurosos y abstractos, se margina o excluye el desarrollo del pensamiento sistémico y complejo, la logicidad y las aplicaciones están descontextualizadas de la realidad.

Al respecto, Álvarez (2000, 4) afirma que: *"hay un predominio de la memorización y la repetición como estrategia de estudio, y el docente mayoritariamente utiliza el monólogo, el dictado y los símbolos en el dictado de sus clases"*. Las consecuencias de esta praxis tradicionalista son tales como: el rechazo, el abandono de estudios, y el rezago de sus potencialidades, y que con los métodos de enseñanza tradicional no se desarrolla el pensamiento crítico.

En vista de tales realidades, la acogida de cualquier opción para alcanzar el desarrollo del pensamiento critico a través las matemáticas. No cabe duda alguna, debe incluir procesos, a través de la identificación de problemas relevantes para los estudiantes, los cuales se deben analizar en su sistematicidad utilizando la comprensión. Esta praxis debe superar los presupuestos métodos y modelos curriculares e instruccionales basados en el paradigma tradicional de la modernidad.

La matemática en las aulas de clases debe ser vista como un gran sistema en constante remodelación para adoptarlo a los cambios y requerimientos de la sociedad, esta estructura debe contribuir a formar un ciudadano integral. Más aún la enseñanza de la ciencia en cuestión debe orientarse en atención al ritmo de aprendizaje propio de cada estudiante.

Es por ello que, la docencia exitosa es aquella que propicia que el estudiante se forje la necesidad de aprender y encontrar en el profesor un guía, un acompañante para llegar al conocimiento. En la medida que esto se respete se estará creando un clima positivo hacia la matemática, el desarrollo personal de actitudes habilidades y capacidades de aprehensión.

Como todos saben, la docencia es una de las actividades mas antiguas del mundo que ayuda al desarrollo integral del ser humano, anclada al comienzo en la Grecia antigua, en filósofos matemáticos, como tales de Mileto, Sócrates, Pitágoras entre otros; y es preocupante que muchos siglos después que esta actividad se pierda porque posiblemente no se tenga una formación académica adecuada para el ejercicio cabal de la profesión, Moran (2003, 18) en tal sentido afirma que:

> "*La transformación académica de toda institución de educación superior pasa necesariamente por una docencia renovada y por un docente innovador, formado en una doble perspectiva: la disciplinaria y la pedagógica-didáctica. De ahí que en estos tiempos se requiere ejercer una docencia transformadora, profesional, creativa; enseñar para el cambio, para lo nuevo, incluso para lo desconocido*".

En tal sentido, la pedagogía crítica intenta modificar las instituciones educativas para recuperar los principios psicopedagógicos de la contemporaneidad, la matemática con el uso de la cotidianidad debe propiciar acciones profundamente educadoras que van desde la toma de decisiones hacia la participación masiva de los miembros del proceso enseñanza-aprendizaje hasta la adquisición de conocimientos, desarrollo de aptitudes y capacidades para la vida.

Para ello, debe emerger la figura del docente que enseña y este preparado para el cambio; se trata de un matemático-docente-investigador que enseñe lo que investiga y que haga de su práctica docente objeto de estudio; aquel que según Sánchez (1990) enseña lo que práctica y transmite criterios y procedimientos para superar su propia práctica profesional.

Es por ello, que urge esta superación en las aulas de clases, y que según Zubiría (1985,109) está llena de *"improvisación, burocratización, deshumanizada, naturaleza informativa mas que formativa"*. Cuestión desprovista de razón alguna en vista de que, la docencia es un proceso creativo a través del cual los sujetos del proceso de enseñanza-aprendizaje interactúan con objetos de conocimientos, develando así su propia lógica de construcción y al hacerlo ambos se transforman. Como afirma Moran (1995) que la docencia es una tarea compleja y trascendente, cuyo desempeño cabal exige una actividad profesional en el más estricto de los sentidos.

Mas aún, la docencia no puede ser una tarea magistral, como ha venido ocurriendo pretendiendo simplificar el saber para que los estudiantes asimilen y más aún que sean aceptados sin reflexión, ni pensamiento critico. No es posible seguir considerando estudiantes como receptores en los que hay que realizar "*un deposito*", en palabras de Freire (1972), estos seres humanos son sujetos, que tienen proyectos de vida, o lo necesitan.

Se propende así, que la docencia promueva los procesos de crecimiento del educando en el marco de la cultura matemática a la cual pertenece, la de su vida cotidiana, que permita su desarrollo integral. Nada de estas ideas son posibles sin una preparación del profesor; tanto teórica como metodología en la educación matemática, esta ciencia debe estar anclada a su didáctica, el saber matemático debe convertirse en un saber pedagógico; es decir adaptando a la pedagogía.

De esta manera, la educación matemática del presente y del futuro puede y debe participar en la formación educativa de un ciudadano epistémico, con conciencia moral plena. En definitiva, de un ser más humano y menos mecánico, y por que no si la matemática es emoción, misticismo, sensibilidad, arte. Así, esta ciencia lógica tendería a ese principio de la pedagogía: su concepción humanista.

Por otro lado, el docente de matemáticas debe aplicar la transdiciplinariedad de dicha ciencia en la complejidad educativa con la finalidad de crear conocimientos-caminos esto es puntos de encuentros de saberes de la práctica educativa. Todo esto es posible a través de un encuentro entre los principios éticos y pedagógicos, en cada uno de los actos cotidianos; esto es capacitar el ser humano para la vida cotidiana en su quehacer permanente y una formación continua, que reforma el pensamiento y lo transforma en acciones profundamente humanas por el otro y con el otro.

Para ello, el docente de la matemática debe estar en actualización permanente y una conciencia moral de que ser educador es una responsabilidad digna de revisarse dejando la matemática en alto en el corazón de los educandos, que les permita su formación integral, con un pensamiento critico que lo diferencia de aquel ser pasivo.

En suma, no cabe duda que el nuevo docente de matemáticas no solo debe poseer dominio de los conocimientos de esta ciencia, sino categorías como la semiótica, la pedagogía, la psicología, la didáctica, la filosofía e historia de la matemática, la sociología, entre otras. Que puestas todas en escena motiven al discente al estudio de las matemáticas, a través de la aplicación y utilidad de ella en problemas significativos de su vida cotidiana. La escuela entonces debe ser el escenario propicio para tal preparación y el ejercicio de una nueva docencia de esta ciencia lógica que tanto se requiere en estos tiempos.

## Bibliografía

Álvarez, Y. (2000). ¡*Auxilio*! ¡*No puedo con la matemática*! Revista Iberoamericana de Educación Matemática Equisangulo, 2 (1), 1-6.

Berger, P. y Luckmann, T. (1989). *La construcción social de la realidad*. Buenos Aires: Amorrortu.

Bourdieu, J. (2002). *Capital cultural, escuela y espacio social*. México: Siglo XXI.

Durkheim E. (1990). *Educación y sociología*. Península: Barcelona.

D´Amore B. y Fandiño M. (2001*). Matemática de la cotidianidad*. Revista Paradigma XXII (1), 59-72.

Freire, P. (1972). *La educación como práctica de la libertad*. México: Siglo XXI.
Freire, P. (1996). *Política y Educación*. México: Siglo XXI.
Fromm, E. (1968). *Humanismo Socialista*. Barcelona: Paidos.
Giroux H. (1992). *Teoría y resistencia en educación*. México: Siglo XXI.
Giroux, H. (1997). *Los profesores como intelectuales*. Barcelona: Paidós.
Goffman, E. (1981). *La presentación de la persona en la vida cotidiana*. Buenos Aires: Amorrortu.
Jaeger, W. (1957). *Paideia. Los ideales de la cultura griega*. México: Fondo Cultura Económica.
Heller, A. (1977). *Sociología de la vida cotidiana*. Barcelona: Magisterio Español.
Heidegger, M. (1980). *El Ser y el Tiempo*. Madrid, Fondo de Cultura Económica.
Infante, P. 1999. *¿Como Diseñar Experiencias de Aprendizaje con un Enfoque Constructivista*? Enseñanza de la matemáticas, 8(2), 33-38.
Maturana, H. (2002). *Emociones y lenguaje en educación y política*. Santiago de Chile: Dolmen Ediciones.
Maslow, A. (1975). *Motivación y personalidad*. Barcelona: Sagitario.
Martínez, M. (2006). *La Nueva Ciencia*. México: Trillas.
Mora, D. (2005). *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemáticas*. La Paz, Bolivia, Campo Iris.
Moran, P. (1995). *La docencia como actividad profesional*. México: Gernika.
Moran, P. (2003). *El reto pedagógico de vincular la docencia y la investigación en el espacio del aula*. Revista Contaduría y Administración 211, 17-30.
Pérez, E. (2001). *La pedagogía*: *¿Más allá de la modernidad*? Revista Saber 13 (2), 9-13.
Rogers, R. (1980). *El poder de la persona*. México: El manual Moderno.
Pliego, H. (s/f). *La filosofía y las ciencias. Historia del pensamiento*. Disponible en http://cantuta.iespana.es/paginas/6filosofia/pdf/filosofia007.pdf, consultado en noviembre 2008.
Russell, B. (1988). *El panorama de la ciencia*. Santiago de Chile: Ercilla S. A.
Sánchez, R. (1990). *La vinculación investigación docencia. Una tarea en proceso de construcción*. Revista de la Educación Superior 74, 5-50.
Savater, (1997). *El valor de educar*. Barcelona: Ariel, Norma.
Zubiria, R. (1985). *Docencia y creatividad*. Revista Docencia, 13, 105-113.

**Milagros Elena Rodríguez**, es Profesora Agregada dedicación exclusiva, adscripta al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oriente, en Cumaná, República Bolivariana de Venezuela. Licenciada en Matemáticas y Magister Scientiaurum en Matemáticas. Cursa estudios del Doctorado en Innovaciones Educativas. Su tesis doctoral se refiere a los elementos epistemológicos de la triada Matemática-Cotidianidad-Pedagogía Integral, alrededor de la relación ciencia-vida. **melenamate@hotmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 127-132
ISSN: 1815-0640

# Propuesta metodológica para el desarrollo de la asignatura matemática numérica en carreras de perfil informático

**Lida González Álvarez; Marister Lopetegui Canel;**
**Juan Miguel Valdés Placeres; Oscar Antonio González Chong**

## Resumen

Este trabajo es el resultado de una experiencia aplicada en la Universidad de Pinar del Río, Cuba, en el desarrollo de la asignatura matemática numérica en la carrera de ingeniería informática en un ambiente de programación sobre asistentes matemáticos y con soporte en la plataforma académica Moodle, se centró la atención en aumentar la creatividad de los estudiantes, trabajar en un ambiente colaborativo y que cada estudiante estableciera su ritmo personalizado de aprendizaje.

## Abstract

This work is the result of an experience applied in the University of Pinar del Rio, Cuba, in the development of the mathematical numerical subject in the career of computer engineering in an environment of programming on mathematical assistants and with support in the academic platform Moodle, the attention centred on increasing the creativity of the students, on being employed at an environment colaborativo and that every student was establishing his personalized pace of learning.

## Resumo

Este trabalho é o resultado de uma experiência aplicada na Universidade de Pinar Del Rio, Cuba, no desenvolvimento da disciplina matemática numérica no curso de engenharia informática num ambiente de programação sobre aplicativos matemáticos e com suporte na plataforma acadêmica Moodle, onde se centrou a atenção em aumentar a criatividade dos estudantes, trabalhar num ambiente colaborativo e que cada estudante estabelecera seu ritmo personalizado de aprendizagem

## Introducción

La aplicación de las tecnologías de la información y las comunicaciones en los procesos de enseñanza – aprendizaje de las asignaturas de matemáticas en las universidades se ha potenciado en el uso creciente de asistentes matemáticos y plataformas académicas, por otro parte la educación matemática influenciada por las tendencias generales de la pedagogía actual, que centra su atención en lograr una enseñanza más activa , significativa, problémica , personalizada, con contenidos ajustados a las necesidades profesionales y estimulando el aprender a aprender en los estudiantes, está buscando caminos que garanticen estos objetivos. En particular el último aspecto es de suma importancia para profesionales del campo de la informática, pues es la ciencia que con mayor velocidad cambia y crece el volumen de información y el autoaprendizaje se convierte en una habilidad terminal para estas carreras.

Por eso en este trabajo tomando en cuenta esas tendencias se expone una propuesta metodológica para impartir la asignatura de matemática numérica que conjuga los siguientes aspectos:

- Desarrollo de la creatividad de los estudiantes en un ambiente de programación dentro de un asistente matemático.
- Trabajo colaborativo entre profesores y estudiantes y entre estudiantes en el trabajo en grupos dentro de la plataforma académica, en actividades lectivas regulares y extra-clases.
- Logro de un ritmo de aprendizaje personalizado para cada estudiante a través de la autoprogramación de los recursos y actividades de la plataforma académica.

Esta propuesta fue utilizada en una primera aproximación durante el desarrollo de la asignatura en la carrera de ingeniería informática de la universidad de Pinar del Río, Cuba en la modalidad presencial durante el 2007-2008, la misma lógicamente es posible utilizarla con adaptaciones a modalidades semipresenciales y a distancia.
Este trabajo es una continuación de las experiencias de J.M. Valdés.

## 1. Asignatura Matemática Numérica

En este tipo de carrera generalmente se abordan temas introductorios de la teoría de errores y modelación matemática, y centra su atención en el estudio de los métodos numéricos para resolver modelos matemáticos diferentes (expresados, básicamente en forma de ecuaciones, sistemas de ecuaciones, ecuaciones diferenciales, integrales, funciones) buscando soluciones aproximadas con errores minimizados, donde se trabaja por supuesto el tratamiento computacional de los métodos.

## 2. Ambiente de programación dentro de un asistente matemático

Una habilidad básica en este tipo de estudiantes es la de programar, la cual es importante en esta asignatura , pues los métodos numéricos no son para aplicarlos manualmente, ni siquiera con una calculadora, el otro extremo de esta visión es programarlos completamente, eso conllevaría un nivel de programación elevado, el cual no han alcanzado en general estos estudiantes en el segundo año de la carrera , que es donde generalmente se imparte la asignatura, por eso un punto medio es la programación dentro de un asistente matemático, donde podemos usar diferentes equivalentes como son el Mathematica, Maple , MatLab, Sage, etc, en los cuales están disponibles muchas herramientas por ejemplo cálculos simbólicos como la integración indefinida, la derivación , graficadores, etc. que llevarían mucho nivel de programación si tuvieran que implementarlos en algún lenguaje y por tanto el nivel de algoritmización exigido seria menor.
Otra habilidad importante en un programador es la relacionada con la búsqueda de algoritmos cuya complejidad temporal y espacial sea lo menor posible y que sus cálculos científicos gocen de una alta precisión , y es dentro del ambiente de programación en el asistente matemático donde tendremos también estas

condiciones propicias ,pues los mismos tienen programas para resolver la mayoría de los modelos matemáticos con que la asignatura trabaja y el estudiante podría concentrarse más en el desarrollo de algoritmos de métodos numéricos y su programación atendiendo a su menor costo espacial y temporal , mejor precisión de sus soluciones y a su comparación con los equivalentes contemplados en el asistente matemático en cuanto a precisión y tiempo de ejecución.

## 3. Trabajo en un ambiente colaborativo

Una de las formas organizativas básicas de la asignatura es el desarrollo de proyectos integradores en equipos, desde el mismo comienzo, empezando con equipos de 4 a 5 estudiantes por proyecto, pasando por un proyecto intermedio de 2 alumnos y terminando con un proyecto individual. En el desarrollo de esos proyectos un medio fundamental lo jugará la plataforma académica , donde serán colocados diversos recursos y actividades de preparación individual y en equipo para el desarrollo del proyecto. En la experiencia desarrollada en nuestra Universidad fue utilizada la plataforma Moodle.

Para el desarrollo de los proyectos se recomienda la creación de actividades wikis en la plataforma, para la discusión y evaluación de los mismos se pueden conjugar seminarios presenciales con actividades del tipo talleres en la plataforma académica , usando autoevaluación, co evaluación y evaluación para determinar las calificaciones finales de los estudiantes.

En este ambiente de desarrollo de proyectos los profesores se convierten en facilitadores del conocimiento y dejan de ser el centro cada vez más en el transcurso de los proyectos cediéndoselo a los jefes de equipos.

## 4. Aprendizaje Personalizado

Los recursos y actividades que los profesores coloquen en la plataforma serán decisivos en este propósito, los mismos deben reunir las siguientes características:

- En el llamado tema 0 de la asignatura se recomiendan recursos orientadores generales tales como:
    - Esquema didáctico de la asignatura
    - Presentación de la asignatura
    - Presentación de los profesores
    - Programa de la asignatura
    - Plan calendario de la asignatura
    - Glosario de términos básicos
    - Calendario de efemérides de la matemática numérica
    - Guía Didáctica
    - Libro Básico
- Una unidad didáctica dedicada al asistente matemático con los elementos siguientes:
    - Presentación del asistente matemático
    - Laboratorios generales para familiarizarse con el asistente matemático
    - Laboratorios para estudiar la programación dentro del asistente matemático

- Por cada unidad didáctica se recomiendan recursos generales orientadores como:
  - Esquema didáctico de la unidad
  - Presentación de la unidad
- Los recursos de cada unidad deben contemplar:
  - Materiales multimediales que ilustren conceptos matemáticos principales en la matemática numérica como convergencia de sucesiones, cotas de errores ,que a su vez permitan la interactividad con el estudiante para descubrir lo novedoso de los conceptos y métodos numéricos detallados en los tres niveles gráfico , numérico y analítico para la consolidación con diferentes grados de complejidad.
  - Simulaciones gráficas y numéricas de métodos numéricos para la etapa de familiarización.
  - Artículos seleccionados que sirvan de apoyo a los estudiantes para resolver las actividades interactivas.
  - Medios interactivos para la etapa de familiarización ( pueden ser páginas o actividades de laboratorio en el asistente matemático).
  - Presentaciones .ppt y .pps elaborados como material de apoyo a la docencia presencial.
  - Ejemplos resueltos que sirvan de prototipos.
  - Ejemplos de aplicaciones desarrolladas.
  - Laboratorios para estudiar los comandos y opciones del asistente matemático para aplicar los métodos numéricos de la unidad.
- Las actividades de cada unidad didáctica
  - Cuestionarios diversos que permitan a los estudiantes verificar en múltiples intentos la marcha de su nivel de familiarización del conocimiento, es decir el reconocimiento de métodos y sus condiciones para que funcionen , diferencias entre métodos.
  - Ejercicios interactivos con autocorrección.
  - Preguntas preparatorias para las clases prácticas presenciales.
  - Actividades tipo tareas para que el estudiante verfique su nivel reproductivo del conocimiento, por ejemplo reproducir algoritmos de métodos a casos triviales, que también serían preparatorios para clases prácticas.
  - Laboratorios para la experimentación con los métodos numéricos por ejemplo sus niveles de errores , convergencia del método.
  - Colocar foros de discusión sobre problemáticas de la unidad sería interesante.
  - Actividades tipo tareas para que el estudiante verifique la marcha de su nivel productivo del conocimiento, por ejemplo aplicación de métodos numéricos en condiciones no tan triviales.
  - Exámenes autoevaluables para que el estudiante verifique si está cumpliendo los objetivos de la asignatura.
  - Talleres y grupos para actividades wiki, donde el trabajo en equipo es fundamental y se necesitará para el desarrollo de los proyectos el nivel creativo del conocimiento, pues el estudiante tendrá que aplicar métodos numéricos en condiciones nuevas y de colaboración para desarrollar las actividades del proyecto al que está asociado.

- Encuestas para recoger las opiniones de los estudiantes sobre su aprendizaje con los recursos y actividades preparadas por los profesores que permitirán corregir situaciones y/o mejorar en un futuro las mismas, pueden ser al término de unidades didácticas.
- Encuesta final sobre los resultados de la asignatura para el futuro perfeccionamiento de la misma.

Importantísimo en la plataforma es que los profesores ejerzan su papel de control sobre la marcha del aprendizaje de los estudiantes a través de las vías de comunicación y controles que ofrece la plataforma: chat , email, mural, portafolios, evaluaciones, estadísticas, foros, etc, para poder asignar a sus estudiantes según sus dificultades ,recursos y actividades para superarlas. En la modalidad presencial el control de la participación de los estudiantes en actividades en aulas es fundamental.

## 5.Proyectos Integradores

En esta propuesta metodológica las actividades conclusivas son los proyectos, donde se desarrolla la etapa de aplicaciones de los conocimientos de la asignatura ,para los cuales establecimos los siguientes principios:

a. En la plataforma se coloca un prototipo de proyecto, para la orientación de los equipos.
b. Para cada proyecto se facilita documentación colocada en la plataforma.
c. Cada proyecto contempla cinco aspectos a desarrollar:
    - Fundamentación matemática de un método numérico.
    - Encontrar problemas que puedan resolverse con el método.
    - Resolver los problemas en el asistente a modo de usuario avanzado (usando los comandos del asistente).
    - Programar el método dentro del asistente.
    - Comparar su programa y el del asistente en cuanto a precisión y tiempo de ejecución.
d. La defensa de los proyectos en presentaciones en seminarios presenciales algunos y otros en talleres en laboratorios sobre la plataforma académica.
e. La evaluación de los proyectos será triple, pues los estudiantes se autoevaluarán, y por supuesto los profesores evaluarán también, se pondera la evaluación del profesor a un mayor peso.

## 6. Conclusiones

Consideramos que esta propuesta metodológica demostró su valía en la experiencia aplicada en la universidad de Pinar del Río, cuando los resultados docentes fueron excelentes al concluir todos los estudiantes la asignatura con buenos resultados , algunos trabajos de conclusión tuvieron una calidad que ameritaron su presentación en jornadas de trabajo científico estudiantil, se vio a los estudiantes motivados y trabajando sistemáticamente, la colaboración fue un factor fundamental para que los rezagados avanzaran de forma más rápida.

No todo fue perfecto y en futuras aproximaciones de la propuesta se puede trabajar en mejorar la calidad y cantidad de actividades y recursos , para ello será importante tomar en cuenta las habilidades y conceptos que mayor dificultad mostraron los estudiantes.

## Bibliografía

Álvarez, M. B., Guerra, A.H., Lau, R.F. (2007): *Matemática Numérica* (2da ed. Vol.II). Editora Félix Varela,Habana.

Álvarez, M. B., Guerra, A.H., Lau, R.F. (2007): *Matemática Numérica* (2da ed. Vol. I). Editora Felix Varela ,Habana.

Banos, J. S. (2007): MOODLE Versión 1.8. Manual de Consulta para el Profesorado [Electronic Version]. http://educa.madrid.org, consultada 20-03-08.

Carbonell, M., Seoane, J.I. (2008): *Cálculo con soporte interactivo en Moodle.* Pearson Educación,Madrid.

Carmo, J. (1999): Introdução a programação no Mathematica, Lisboa.

Santos, A.R., Bianchini, W. (2002). Aprendendo Cálculo com Maple, Cálculo de Uma Variável.,LTC Editora. Río de Janeiro.

Valdés, J. M., González, O.A. ( aceptado revista Unión 2009) Enseñanza de la matemática I en ambientes de programación. Una propuesta para el desarrollo de habilidades matemáticas especificas en los estudiantes de la carrera de Informática de la Universidad de Pinar del Río.

**Lida González Álvarez.** (1979) es Licenciada en Ciencia de la Computación desde el año 2003, desde esa fecha se desempeña como profesora del departamento de programación de la Universidad de las Ciencias Informáticas, Habana. **lida@uci.cu**

**Marister Lopetegui Canel** (1969) es Licenciada en Educación Matemática desde el año 1991. En el 2007 alcanza el Titulo Académico de Master en Nuevas Tecnologías para la Educación. Se desempeña como profesora del departamento de contabilidad de la Universidad de Pinar del Río. **marister@eco.upr.edu.cu**

**Juan Miguel Valdés Placeres** (1971) es Licenciado en Educación Matemática desde el año 1994. desde esa fecha se desempeña como profesor del departamento de matemática de la Universidad de Pinar del Rio. En el 2007 alcanza el Titulo Academico de Master en Nuevas Tecnologias para la Educación. **jmiguel@mat.upr.edu.cu**

**Oscar Antonio González Chong** (1954) es Licenciado en Matemática desde el año 1979, Doctor en ciencias matemáticas desde el año 1989. Se desempeña como profesor del departamento de matemática de la Universidad de Pinar del Río **oscar@mat.upr.edu.cu**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 133-157
ISSN: 1815-0640

# A construção do conceito de seqüências na perspectiva lógico-histórica.

**Ailton Barcelos Da Costa**

## Resumo

Nesta pesquisa estudamos a História da Matemática enquanto metodologia de ensino, para desenvolvermos o ensino de seqüências e progressões para alunos da Universidade Federal de São Carlos, através de mini-curso de 30 horas, de onde analisamos as percepções destes enquanto vivenciavam atividades de ensino na perspectiva lógico-histórica. Esperava-se uma melhor percepção da aprendizagem dos alunos através desta metodologia.

## Abstract

This research studied the History of Mathematics as a methodology of teaching, to develop the teaching of sequences and progressions for students of the University of San Carlos, through mini-course in 30 hours, where we analyze the perceptions of these activities, as experienced in teaching logical-historical perspective. It was hoped a better understanding of students learning through this method.

## Resumen

En esta investigación estudiamos la Historia de la Matemática en cuanto a la metodologia de enseñanza, para enseñar secuencias y progresiones a alumnos de la Universidad Federal de San Carlos, a través de un mini-curso de 30 horas, analizamos las percepciones de ellos mientras se llevaban a cabo actividades de enseñanza desde la perspectiva lógico-histórica. Se esperaba una mejor percepción del aprendizaje de los alumnos a través de esta metodologia.

## 1. Introducão ao problema

Percebemos, através da experiência em estágios, que o ensino tradicional está associado ao ensino memorístico, onde o aluno apenas copia o que está na lousa, não participando do processo de pensar sobre os conceitos matemáticos, tendo eles dificuldades no aprender os conceitos matemáticos, principalmente àqueles relacionados ao pensamento algébrico.

Dessa forma, concordamos com Sousa (2004), que diz que:

> *Entendemos que a História da Matemática passa a ser Metodologia de Ensino para aquele que ensina, a partir do momento em que este, compreende o seu próprio movimento do pensamento ao relacionar teoria e prática, ou seja, tem domínio do seu processo lógico-histórico.*

> *O movimento ao qual estamos nos referindo não nasce espontaneamente, uma vez que é intencional.*

Já Gomes (2005), diz que é preciso ter consciência de que fazer e perceber historiográfico do ensino de matemática não se dissocia do contexto sócio-cultural de sua época. De certa forma, em Miguel & Miorim (2004, p. 48), citado por GOMES (2005), "*a Matemática pode ser desenvolvida pelo estudante mediante a resolução de problemas históricos, a apreciação e a análise das soluções apresentadas pelos nossos antepassados*", passou a se difundir a partir do 5° Congresso Internacional de Educação Matemática.

Sendo assim, o educador matemático, ao fazer a análise sobre o papel da História da Matemática no ensino, tem condições de verificar onde e como esses resultados foram produzidos.

Dessa forma, ao assumirmos o lógico-histórico enquanto forma de pensamento, necessariamente, assim como os estudos que se fundamentam na perspectiva da Educação Conceitual (Lanner de Moura, 2002), consideramos a flexibilidade, a relatividade, a interdependência, a fluência, o processo e o movimento do próprio pensamento que ocorre na totalidade do pensamento.

Então, conhecer a história do desenvolvimento da matemática nos permite conhecer seu objeto, bem como "*compreender o lugar dessa ciência na atividade produtiva e social dos homens*" (Ríbnikov, 1987, pg. 12).

Dessa forma, defendemos a idéia de que, sem essas conexões pode não ocorrer apropriação de conceitos científicos de forma automática.

Aqui, a função da História da Matemática no ensino, de acordo com Sousa (2004, pág. 101), a partir do lógico-histórico "*assume o papel do elo de ligação entre a causalidade dos fatos e a possibilidade de criação de novas definibilidades que permitam compreender a realidade estudada*".

Já em relação aos autores lidos durante o mini-curso, começamos por Caraça (1998), que trata dos conceitos de fluência e interdependência, servindo de suporte para o estudo de movimentos no Egito Antigo.

Ainda em relação ao Egito Antigo, encontramos em Miranda, Reis e Jacobsen (2005) e também em Barasuol (2006), a história da matemática no Egito Antigo, onde vimos como se deu o desenvolvimento matemático e pudemos aplicar os conceitos de Caraça (1998) e servir de aporte para o estudo de movimentos, além de entender a origem dos problemas do Papiro de Rhind, que foram usados como exercícios.

A seguir entramos na Mesopotâmia, onda falamos sobre história geral e da matemática daquela civilização. Notamos que a matemática se desenvolveu através de atividades práticas e dos rudimentos da astronomia, mesmo não tendo movimentos regulares como no Egito.

Após um breve estudo dos gregos, passamos aos povos asiáticos, como China, Índia e Mundo Árabe. Começamos nosso estudo por um panorama da historia geral destes povos, visto em Eves (2004), para só depois estudarmos um pouco sobre o desenvolvimento da matemática destas civilizações, em Eves (2004) e Ribnikov (1987). Nestes povos, o que se destacou foi seu incrível desenvolvimento, onde pudemos constatar o surgimento de matemáticas só redescobertas pelos europeus, quase dois mil anos após, impressionando muito os alunos.

O texto seguinte foi sobre a matemática na idade média, de Ohse (2005). Aqui estudamos Fibonacci e suas contribuições, e a matemática da idade média até o inicio da Renascença. Assim, pegamos logo em seguida o advento da matemática moderna. Iniciamos esta etapa com outro texto de Eves (2004), sobre o contexto histórico deste período, para dar uma breve mostra da matemática e da vida de Napier. Neste período vemos um pouco da relação entre progressão aritmética e geométrica, que deu origem à primeira contribuição sobre logaritmos, de Stifel, e a ligação com os logaritmos de Napier.

Por fim, encerramos o curso estudando as principais contribuições de Gauss, através de um texto de Boyer (1996).

a) ENSINO DA PA E PG.

No Ensino Médio (entre 15 e 17 anos) é dada a ênfase no uso de fórmulas memorizadas, que raramente são deduzidas. Também não há conexão com a realidade e com raras aplicações, normalmente a juros. O que vemos é a ênfase na memorização, e não no desenvolvimento do conceito. Já a história é pouquíssima usada, e quando é fica no uso como mera curiosidade, e não como fator motivador para o ensino.

## 2. Metodologia

### 2.1. Metodologia da Pesquisa

Quanto à metodologia da pesquisa, de acordo com BORBA (2004), a pesquisa qualitativa vem ganhando vulto na Educação Matemática, e com isso, vem trazendo novas abordagens dentro das atividades de ensino, que só vem a enriquecer o trabalho do pesquisador. Nesse intuito, é que Benedetti (2003), citado por Borba (2004, pg. 10), em seu trabalho vem discutir diversos detalhes, em nível de procedimentos para realização de um experimento de ensino (ou atividade de ensino), e expressa uma série de passos que têm sido utilizados em na análise de vídeos:

1. Assistir aos vídeos durante os experimentos de ensino, observando os alunos e o meu desempenho como pesquisador;
2. Encerrados os EE [experimentos de ensino], desenvolver a transcrição;
3. Construção de cenas, a partir das transcrições e dos vídeos; são divisões pequenas, variáveis em duração, e não possuem considerações teóricas;
4. Construção de episódios, interligando algumas cenas e descartando outras;
5. Estudo intensivo dos episódios, articulando suas cenas a temas constantes na revisão de literatura e no referencial teórico (Benedetti, 2003, p. 79).

Dessa forma, concordamos com Borba (2004), que, não somente como analisar ou desenvolver um experimento de ensino, mas também suas limitações e as possibilidades devem ser analisadas. Por um lado, os alunos que participam desta modalidade de pesquisa estão fora da sala de aula, fora do contexto da avaliação que cerca a sala de aula usual. Por outro lado, ainda de acordo com Borba

(2004), é possível que o pesquisador valorize a voz do estudante de forma especial, trazendo-o para a pesquisa, tentando construir modelos que validem a Matemática do aluno (em contraposição a testes ou mesmos análises qualitativas que enfocam o erro).

Por isso tudo, concordamos com Bogdan e Biklen (1994), pois para eles *a busca pelos significados que as pessoas dão as coisas e a sua vida, é o foco de atenção especial do pesquisador.*

Já quando nos referimos às aulas em si, usamos a metodologia de investigação. Então, de acordo com Ponte et all (1998),

*Estaremos perante uma investigação quando não são imediatamente acessíveis ao aluno, nem o processo de resolução nem a solução ou soluções da questão, constituindo uma actividade motivadora e desafiadora para o aluno. As investigações matemáticas caracterizam-se, igualmente, pelo estímulo que fornecem ao aluno para este justificar e provar as suas afirmações, explicitando matematicamente as suas argumentações perante os seus colegas e o professor.*

Assim, de acordo com Ponte et all (1998), o professor tem um papel fundamental na planificação e condução de atividades de investigação na sala de aula.

### 2.2. Metodologia de Sala de Aula

O encaminhamento proposto na pesquisa na sala de aula é a investigação histórica, como procedimento de ensino, que por sua vez deve ser orientada ou regida pela idéia de que o conhecimento da evolução de um conceito matemático possibilita ao aluno, a sua compreensão. Ao pesquisador, oportuniza a formação de uma visão dinâmica e processual da Matemática e estabelecer uma identidade entre processos de produção e aprendizagem de seus conhecimentos, deixando de reduzir as questões metodológicas do ensino a uma simples reprodução mecânica.

Assim, de acordo com Sousa (2004), professores e estudantes devem partir do princípio de que aprender um conceito matemático envolve apropriação de significações que são produzidas durante o desenvolvimento histórico da humanidade.

### 2.3. Etapas do Projeto

Inicialmente, pretendíamos desenvolver, atividades de ensino que focavam a construção dos conceitos de seqüências e progressões a partir do lógico-histórico da seqüência de Fibonacci e suas propriedades, para alunos da rede pública de ensino de São Carlos/SP que estavam cursando o segundo ano do Ensino Médio (16 anos), mas não foi possível, devido às restrições das escolas, bem como ao prévio comprometimento das mesmas com outras atividades. Dessa forma, desenvolvemos as atividades de ensino dos conceitos supracitados para alunos do primeiro ano do curso de matemática da Universidade Federal de São Carlos (com estudantes a partir de 18 anos), durante o primeiro semestre de 2008, através, no período de 02/04/08 a 11/06/08, com duração de 30 horas, para 7 alunos de graduação dos cursos de Matemática, Fisica e Ciências Sociais do mini-curso “Seqüências e Progressões no Contexto Lógico-Histórico”.

As atividades de ensino que foram agrupadas em uma apostila, que envolviam os seguintes nexos conceituais: fluência; interdependência; movimentos regulares; a seqüência de Fibonacci e suas propriedades, bem como a leitura de textos teóricos dos seguintes autores: Caraça (1998); Costa (2003); Eves (1997); Morgado, Ribnikov (1987); Sousa (2004).

Ressalta-se que os dados foram analisados com base na bibliografia consultada, e em especial em Sousa (2004), que serve de base para estudar o lógico-histórico, bem como movimentos e fluência dentro da álgebra. Neste ponto também usamos Caraça (1998).

### 2.4. Transcrição do Vídeo

Durante o mini-curso, todas as aulas foram filmadas e feitas com ajuda de um bolsista de extensão, e tiveram a duração total de 33 horas, gravados em 12 mídias tipo DVD-R.

Foram escolhidos os episódios de ensino referente à primeira atividade por conter um rico material para estudo, como diálogos, inclusive citações de autores de Ciências Sociais por um aluno.

Assim, depois da transcrição dos episódios de ensino, passou-se a análise do material, uma vez que estes foram organizados de acordo com o surgimento de cada um.

Para ser analisado o material foi organizado considerando as quatro categorias abaixo:

(i). Formação do conceito e movimento: Nesta categoria as atividades estudadas consideravam num primeiro o movimento da cheias do rio Nilo, objetivando a compreensão do conceito de fluência, e no outro momento a análise dos problemas sobre movimentos sobre regulares no Papiro de Rhind.

(ii). Conceito de movimento em algumas civilizações (Mesopotâmia, China, Índia): Num primeiro momento foi trabalhado um problema envolvendo progressões, da civilização Mesopotâmica, e em outro, foram trabalhados problemas relativos a progressões das civilizações da Índia e china.

(iii). Estudando Fibonacci, sistematizando conceitos de seqüências e progressões: Num primeiro momento foi proposto o problema dos coelhos, que deu origem à seqüência, e após foram trabalhados problemas relativos às aplicações da seqüência de Fibonacci.

(iv). Origem das operações da PG e PA: Foram trabalhadas as operações com progressões, a partir de logaritmos de Gauss.

## 3. Resultados e discussão.

### 3.1. Formação do conceito e movimento

A primeira etapa foi desenvolver atividades de ensino, para posteriormente serem aplicadas no mini-curso. Aqui, citamos Sousa (2007, p. 4), que diz:

> "*A atividade de ensino como expressão da unidade teoria e prática deverá compor harmoniosamente conteúdos, objetivos e métodos, por sua vez, dimensionados pelas interações que deverão desencadear entre os três elementos fundamentais do ensino: o objeto do*

> *conhecimento, o professor e o aluno. Em última instância, a rede que conecta todos esses elementos e tece a coerência entre eles é alimentada pela visão de homem, de mundo, de sociedade e de conhecimento que o futuro professor tem construído".*

Seguindo esta forma norteadora, foram desenvolvidas duas atividades de ensino denominadas: "Sequências e Progressões no contexto lógico-histórico", e "Analise dos problemas sobre movimento regulares que constam no Papiro de Rhind". Segue duas atividades selecionadas.

**Episódio 1**: Descobrindo Movimentos

Na parte um, Descobrindo Movimentos, tínhamos o objetivo de explorar tais conceitos. Aqui citamos Sousa (2004, pg. 52), que diz que:

> *Entender o lógico-histórico da vida significa entender a relação existente entre a mutabilidade e a imutabilidade das coisas; a relatividade existente entre o pensamento humano e a realidade da vida, bem como compreender que tanto o lógico como o histórico da vida está inserido na lei universal, que é o movimento.*

Dessa forma, o objetivo era que o aluno fizesse relações entre o pensamento e a realidade, dentro de um contexto histórico. Assim, ao tentarmos explorar o conceito de forma intuitiva, a maioria apelou para o conceito físico, e só um aluno mostrou a definição física intuitiva e a definição nas ciências sociais, que segue abaixo:

Ailton:
- *Vocês querem discutir esse texto* (LIMA, 2004, pg. 2), *aqui* (Parte 1, (iii)) ?
- *Na verdade eu já comentei, já falei a idéia.*
- *Vocês querem discutir alguma coisa* (sobre o texto de (LIMA, 2004, pg. 2)?

Sidnei:
- *Então, essa idéia de progressão ai tá ligada à repetição*?

Ailton:
- *Repetição*!! *O padrão de repetição começa a surgir* (no texto) *aqui...*

Sidnei:
- *É interessante que na vida também se repete... sol... noite... o movimento de perna, braça, o som... a vibração cai na repetição...*
- *Várias coisas do nosso cotidiano tende a ter coisas repetitivas.*
- *Então, nas progressões, eu não sabia que tinha esse significado.*
- *Achava que eram só as equações*...
- (0:48:35)

Ailton:
- *A gente ta acostumado a ver PA e PG no ensino médio como fórmulas decoradas, de forma pronta e acabada. Na verdade tem muito mais que isso.*
- *Pra nestas fórmulas, nestes resultados, foram milênios de desenvolvimento histórico em matemática.*
- *Não foi assim do dia para a noite, que sem mais nem menos ta tudo pronto.*
- *Bem, vamos pensar... Quanto tempo temos até a colheita...*
- *Planta, vem seca...*
- *Planta, vem enchente... todo ano.*

- *Os aspectos que vão observar, as estrelas, para achar esse padrão, esse calendário solar...*
- *Então, temos 365 dias até a enchente, de padrão regular, no calendário, de forma regular.*
- *Quando falo regular, que se repete....*
- *Quer entrar? Pode entrar* (Edipo)...

Sidnei:
- *Pode responder essa pergunta*?

Ailton:
- *Pode*.

**Análise do episódio 1**

Neste episódio, vimos que os alunos atingiram o objetivo com ajuda do pesquisador, pois conseguiram fazer, de acordo com Sousa (2004, pg. 52), "*relações entre a mutabilidade e a imutabilidade das coisas*".

Neste episódio, o principal objetivo era de que os alunos estabelecem relações entre os aspectos históricos das seqüências e progressões e os nexos conceituais, que foi mostrado por meio dos diálogos acima, onde os alunos identificam os movimentos e a fluência, em um texto de (Lima, 2004, pg. 2). Assim, de acordo com SOUSA (2004), entendemos que os alunos compreenderam o significado de movimento regular e sua relação com o imutável.

Atividade 2: Fluencia e Movimentos.

O objetivo desta atividade era discutir o conceito de fluência, a partir do texto de Caraça (1998), e o aluno fazer relação com a realidade, tanto atual como histórica, do Egito Antigo.

O texto de Caraça (1998) foi lido e considerado difícil de entendimento. Neste ponto notamos a dificuldade em interpretação de texto por parte dos alunos do curso de Matemática.

Assim, foi solicitado a cada aluno que começasse a ler um trecho do texto. Ao final de alguns parágrafos ou de um tópico, era solicitado que outro lesse em seqüência, de modo aleatório para a escolha do próximo aluno a ler, evitando conversas paralelas.

A seguir, foi solicitado que os alunos comentassem o que entenderam do texto.

**Episódio**

Segue trecho do vídeo, transcrito abaixo:

Ailton:
- *Então, vamos discutir o texto do Caraça. Vê o que vocês acharam... difícil... fácil*...

Dimas:
- *Difícil*...

Juscelino:
- *Achei curioso o que ele faz com as ciências exatas, o mesmo o Conte faz com as ciências humanas. Não tem como definir uma ciência como, por exemplo, as definições da crítica clássica*...

Edipo:
- *O conceito de fluência, principalmente, tem a idéia que você não tem conhecimento absoluto, pois você tem que recortar, ter um recorte, um isolado...*

Juscelino:
- *Em algumas ciências não tem como você fazer esse trabalho de isolado.*
- *Na Estatística você não tem como trabalhar com o todo, mas com amostras, pois inviável sem amostras, pelo tempo, pelos recursos... até recursos humanos.*
- *No Rio de Janeiro, em alguns morros, não tem como entrar...*

Edipo:
- *Também fica inviável com relação às variáveis.*
- *Tem gente que dificuldade a linguagem...*
- *Às vezes não tem funcionário para fazer a função...*
- *E como o funcionário vai fazer a analise da própria vida? Ele vai fazer analise do que está fora, e da vida dele... Então, ele se inclui no todo*.

Juscelino:
- *Acho interessante partir desse aspecto que tudo muda, até demais...*
- *Essa preocupação que ele coloca em relação às ciências naturais, é uma preocupação que muitas pessoas que não tem essa noção de ciência que ele tem, coloca para se contrapor em relação a nós das ciências humanas, um debate que é feito a respeito de ciência. As pessoas dizem com arrogância, é o que alguns dizem, filósofos, homens de ciência.*
- *Alguns dizem: Olha, vocês das ciências humanas não fazem ciência, pois vocês.. toda vez que vai fazer a escolha do objeto de estudo, vocês estão sendo parciais. Mas essa parcialidade existe?*
- *Como na química, por exemplo, você quer estudar metanol. Existem verbas para estudar metanol.*
- *Não existem verbas para você estudar o que existe a respeito da corrida nuclear... na guerra fria. Quero trabalhar com mísseis.. pode ser que você consiga...*
- *Não Existem condições para você trabalhar com energia nuclear hoje, do que na década de 50, 60 no auge da guerra fria...*
- *Agora, se você falar... que uma fonte de energia alternativa, no caso o metanol.*
- *Então, o fato de existir uma disposição da sociedade, de existir verbas, de existir disposição para aquilo.*
- *O seu estudo já é direcionado... Não existe neutralidade!*
- *Nem o sabonete é neutro...*
- *É interessante isso, que ele coloca... Essa humildade de dizer...*
- *Estou me baseando na opinião dos pré-socráticos*...
- *Olha, ele diz: O homem passou no rio, e nem o rio que ele passou é o mesmo...*
- *Nem o homem é o mesmo... Se a gente fosse o mesmo, não haveria envelhecimento, não haveria morte, que é o fim de vários ciclos vividos*.

Edipo:
- *Você falou no aspecto orgânico... Tem o aspecto da experiência. Antes dele passar pelo rio, ele não tinha a experiência de passar pelo rio, então ele adquiriu experiência.*
- *Sartre cita alguma coisa, que ele não tem como ser o mesmo*...

<u>Juscelino</u>:

- *Agora, o trabalho de Popper, considera muito a relação do aspecto de lei e tendência.*
- *Por exemplo, no caso da matemática, das ciências exatas elas têm que determinar leis para reprodução. Se você não puder reproduzir o experimento, se você não reproduzir aquilo que você está estudando, você não pode determinar leis. Se você não determina leis, então fica difícil você dizer que é ciência, nos moldes das ciências exatas*.

**Análise do episódio**

É importante notar que alguns alunos se destacam dos demais na habilidade natural de discutir algo mais amplo, abrangendo a filosofia e fazendo diversas inter-relações.

Aqui notamos que alunos dos cursos de Ciências Sociais tiveram maiores facilidades nas discussões dos textos, enquanto que os de Matemática e Física tiveram maior dificuldade.

Assim, é destaque nas falas dos alunos o conceito de movimento, que a primeira vista parece tão óbvio, mas com a ajuda das atividades conseguiram percebe-lo, principalmente quando é referido ao rio, e chegam à conclusão que tudo está em movimento.

<u>Atividade</u>: Formação do conceito de seqüências

O conceito de seqüências começou a ser discutido, a partir do tema foi Egito Antigo. Exploramos a formação do conceito de seqüências, devido à variação da cheia do Rio Nilo, e também a problemas no Papiro de Ahmes (ou Rhind) e também problemas do tratado chinês *Manual Aritmético do Mestre Sol*, do século III.

Segue abaixo a atividade completa:

**Egito Antigo e formação do conceito**

(i) Escreva em cinco linhas o que você sabe sobre o Egito Antigo.

(ii) Você sabe alguma coisa sobre a Matemática do Egito Antigo? Escreva o que souber.

(iii) Leitura de texto:

- A matemática da pré-história ao antigo Egito, por Fabiana Fagundes Barasuol, UNIrevista Vol. 1, n°2, abril 2006.
- A história da matemática no Egito Antigo, por Clenilson Dos Reis, Henrique S. Miranda e Simone Jacobsen, POLO UNIVERSITARIO – UFES, 2005.

**Canção Infantil: Uma Soma**

Provavelmente a cantiga abaixo tem origem no Egito Antigo, no denominado Papiro de Rhind ou Ahmes.

Uma antiga canção infantil dizia:

"*Ia eu para St. Ives,*

*Conheci um homem com 7 esposas,*
*Cada esposa tinha 7 sacos,*
*Cada saco tem 7 gatos,*
*cada gato tem 7 gatinhos.*
*Gatinhos, gatos, sacos, esposas,*
*Quantos iam para St. Ives*?"

Obs.: St. Ives é uma pequena cidade inglesa perto de Cambridge que deve o seu nome a Santo Ivo, bispo persa que morreu na localidade por volta de 600.

**A primeira versão do problema:**

O problema 79 do Papiro de Rhind (Egipto, século XVI a. C.), aparece da seguinte forma:

Pode-se inventar um problema à volta dos dados fornecidos no papiro, foi o que fez, o matemático norueguês, *Oystein Ore*, "traduzindo-o" da seguinte forma:

*Um homem tinha sete casas,*
*Cada casa tinha sete gatos,*
*Para cada gato havia sete ratos,*
*Para cada gato havia sete espigas de trigo,*
*E cada espiga tinha sete medidas de grão.*
*Quantas coisas ele possuía,*
*Casas, gatos, ratos espigas e medidas de grão*?

Supõe-se que Ahmes se referia a um problema, possivelmente já conhecido, em que cada casa há 7 gatos, cada gato comeu 7 ratos, cada rato comeu 7 espigas de trigo, cada espiga produziu 7 heqat de trigo e se pretende saber a soma de todos as coisas enumeradas. Note a familiaridade com a canção infantil citada anteriormente.

**Responda:**

a) Crie uma melodia para a cantiga acima, e cante-a em grupo.
b) Será que se trata realmente de uma soma, quando se é perguntado quantos iam a St. Ives? Por quê?
c) Qual o caminho para se chegar a uma resposta? Descreva os passos que você faria.
d) Dê a soma total.
e) No tratado chinês Manual aritmético do mestre sol, do século III, aparece o seguinte problema, semelhante ao anterior:

*Vemos 9 aterros;*
*cada aterro têm 9 árvores,*
*cada árvore têm 9 ramos,*
*cada ramo têm 9 ninhos,*
*cada ninho têm 9 pássaros,*
*cada pássaro têm 9 filhotes,*
*cada filhote têm 9 penas,*
*cada pena têm 9 cores.*
*Quantos há de cada*?

Resolva o problema acima.

**Frações dos olhos do deus Hórus**

No Papiro de Rhind também aparece uma progressão geométrica muito interessante formada pelas frações ½, ¼, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64 do Hekat, (unidade comum do volume usada para medir quantidade de grãos). Os termos dessa seqüência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus.

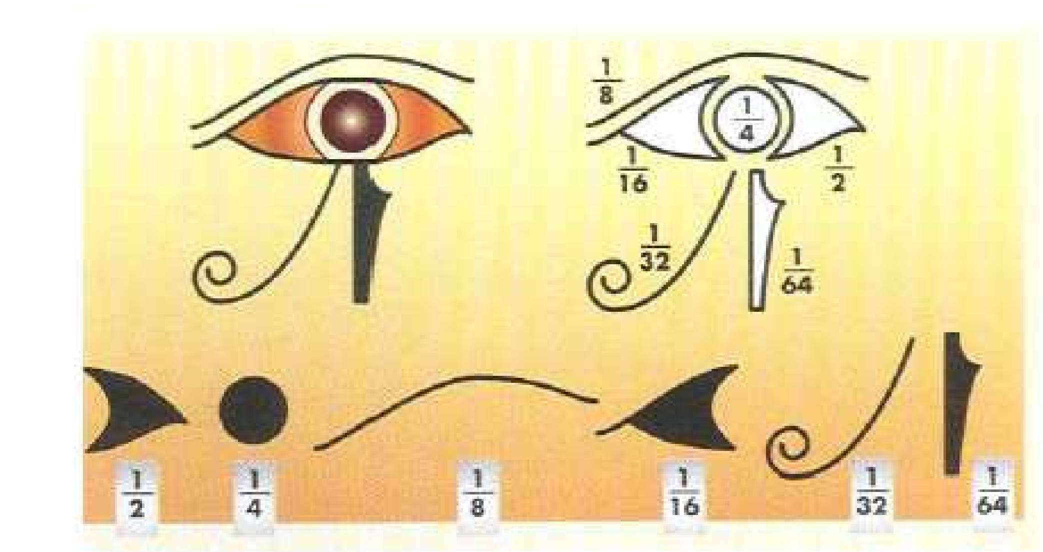



FIGURA 1: Frações dos olhos do deus Hórus.

**Perguntas:**

(i) Qual a soma desta seqüência? Justifique.

(ii) Qual a fórmula da seqüência para n termos? Explique como você a desenvolveu.

<u>EPISÓDIO:</u>

<u>Ailton</u>:
- *Será que se trata realmente de uma soma, quando se é perguntado quantos iam a St. Ives? Por quê?*

<u>Édipo</u>:
- *É mais que uma soma, envolve multiplicação, mas na verdade a multiplicação tem origem na soma*.

<u>Ed Carlos</u>:
- *É isso mesmo, a multiplicação é uma soma de fatores comuns*.

<u>Édipo</u>:
- *Se trata somente de uma soma?*
- *É que não, mas para simplificar as contas usamos multiplicação*.

<u>Ailton</u>:
- *Agora os dois sociólogos façam a letra e).*
- *Entendeu o conceito*?

<u>Ed Carlos</u>:
- *Sim, e não tem nada de diferente*.

**Análise do episódio**

Durante o encontro, um aluno disse o seguinte: *"O problema de Ahmes, como o do manual aritmético do sol são iguais, só que um usa base 7 e o outro base 9"*.

Aqui o aluno se refere à base quando trata da razão de um progressão.

Também notamos que os alunos entenderam o raciocínio, quando eles discutem a melhor maneira de resolver o problema. Os alunos mostram isso através da propriedade da multiplicação, que se reduz a uma soma.

Vemos que ele já tem a idéia de generalização mais amadurecida que os demais alunos, visto que foi o único a apontar tal fato, ou seja, segundo SOUSA (2004, p. 68), sabemos que "*a possibilidade de generalização da álgebra vai ocorrer quando houver um conhecimento profundo do conceito de variável, de forma que o movimento do pensamento do indivíduo o torne autônomo. Para tanto, o estudo do conceito mais geral de variável deve considerar a palavra, a figura, o numeral e a letra".*

## 3.2. Conceito de movimento nas diversas civilizações (China, Índia, Mesopotâmia).

Atividade: **Mesopotâmia**

A atividade três referia-se à Mesopotâmia, uma vez que tal civilização foi a primeira a apresentar seqüências e progressões de forma não-aplicada, de forma mais teórica. Aqui é apresentada igualdade de soma de progressões geométricas, cujos conceitos só foram desenvolvidos na Europa mais de 2.000 anos depois. A atividade tinha como objetivo o reconhecimento de soma de progressões.

Ao pedir para cada aluno escrever o que sabia previamente sobre a civilização, apenas um conhecia aspectos ligados à matemática, enquanto que as demais tinham conhecimento dos seguintes fatos:

Juscelino:
- *Que eu me lembre, é mais relacionado à astronomia*.

Ed Carlos:
- *A civilização Mesopotâmica é bem depois da Egípcia*.

Édipo:
- *Não*!!!
- *A primeira civilização mesopotâmica foi a sumérica, e desenvolveram a escrita.*
- *É bem antes da egípcia, quase mil anos antes*...

Ed Carlos:
- *Me refiro aos Baiblônicos, que foi a última civilização mesopotâmica*.

Édipo:
- *Não...*
- *A última civilização mesopotâmica foram os Caudeus*.

A atividade três, sobre a Mesopotâmia solicitava que os estudantes apresentassem soluções de como resolver um problema da Tábua de Louvre, que data de 300 a. C. e mostra problemas de problemas sobre seqüências e progressões do povo babilônico.

**Episodio:**

Na Mesopotâmia vimos um exemplo de matemática abstrata, ou seja, segundo Mora e Gonçalves (2000), abstrato significa separar. Assim, podemos entender matemática abstrata com aquela que é separada da realidade, do cotidiano.

Somente um aluno expressou de inicio como resolver a atividade, que segue na íntegra:

*(i). A Tábua de Louvre*

*Os babilônicos também utilizavam seqüências. Foram encontrados 2 problemas interessantes sobre seqüência numa tábua de Louvre, datando por volta de 300 a.C. Um deles afirma que:*

$$1^0 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots 2^8 + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$$

*Perguntas:*

*Qual a diferença entre este problema da Tábua de Louvre e os do Egito Antigo, como do Papiro de Rhind?*

*Qual a sua idéia para mostrar que essa igualdade é verdadeira?*

Ailton:
- *Édipo, você disse que já tinha pensado nele*?

Édipo:
- *Eu pensei, mas não passei para o papel.*
- *Agora tem que pensar em dobro*...

Ailton:
- *Aqui é importante observar o contraste entre o Egito, que era mais prático, e a Mesopotâmia, que era mais abstrato.*
- *A Mesopotâmia é a única civilização que tem registro de Matemática abstrata*.

Édipo:
- *To pensando em números binários.*
- *Temos*: $1^0 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots 2^8 + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$
- *Temos*: $2^9 = 1000000000 - 1$
- *Ai substitui no segundo termo e cancela com o primeiro.*
- *Por exemplo*: $2^n = 2^0 +$ n *dígitos*

Juscelino:
- *Fica fácil ver o que ele fazendo*.

Édipo:
- *É porque eu estou vendo números binários em teoria dos números* (disciplina do curso de matemática), *e quando vi o numero é um, que é dois elevado a zero, eu lembrei...*
- *Eu não decoro, eu tento aprender o raciocínio, pois tem gente que decora.*
- *Se daqui a um ano eu voltar a ver isso* (o problema), *eu sei*...
- *O importante é o raciocínio*.

Ailton:
- *Agora tem outra pergunta: Você expressaria a igualdade de outra forma*? *Qual*?

Édipo:
- *Eu fiz.*
- *Dá para representar na forma binária*:

1 + 10 + 100 + 1000 + ... + 100000000 = 100000000 + 100000000 – 1

- *Resposta: Sim, através da representação binária. Após a soma e a subtração na base binária, chega-se ao mesmo resultado*.

**Análise do Episódio**

O aluno fez uma resolução usando matemática de nível superior, que era usar sistema binário.

Concordamos com SOUSA (2004, p.78), quando diz que:

> *"Entendemos que a história dos conceitos matemáticos, só tem sentido, na sala de aula, quando professores e estudantes compreenderem o movimento das abstrações do pensamento que compuseram as formalizações que estudamos".*

Nesse episódio de ensino, vemos na resolução do aluno a evidência da compreensão do movimento das abstrações do pensamento, onde consegue expressar a soma de progressões na forma binária, indo além do pedido, ou seja, evidencia-se este fato abaixo:

Édipo:

- *Dá para representar na forma binária:*

  *1 + 10 + 100 + 1000 + ... + 100000000 = 100000000 + 100000000 – 1*
- *Resposta: Sim, através da representação binária. Após a soma e a subtração na base binária, chega-se ao mesmo resultado.*

Entretanto, vemos que os demais alunos tiveram grande dificuldade na questão, pois durante a resolução não se manifestaram sobre maneiras alternativas de ensino.

Atividade: **China Antiga**

Esta atividade tinha por objetivo mostrar o desenvolvimento da matemática na China Antiga, em especial relativo a seqüências e progressões.

O aluno era convidado a participar da seguinte forma:

*(i). Escreva o que você saber sobre a China Antiga, de 2.000 anos a.C. até 600 a.C., em algumas linhas.*

*(ii). E sobre o desenvolvimento da matemática neste período, você sabe alguma coisa? Escreva o que souber.*

*(iii). Vamos ler alguns pequenos textos sobre a China Antiga e sobre os impérios asiáticos:*

Segue texto completo de “História da Matemática na China”, por SÓ MATEMÁTICA, em anexo.

*(iv). Problema da Tecedeira*

Sabemos que na China Antiga, a matemática era voltada para a solução de problemas do cotidiano, e uma obra onde se encontram muitos problemas é o chamado **Chiu Chang Suan Shu** (Os nove capítulos da arte matemática), o livro contém 246 problemas distribuídos por 9 capítulos.

Entre estes, encontramos o seguinte problema*:*

> "*Uma tecedeira, melhorando a técnica de dia para dia, dobra todos os dias a quantidade produzida no dia anterior. Em cinco dias produz 5 chi (ou 23 metros) de tecido*."

*Pergunta*:

a) Quanto que é produzido em um ano?
*b)* Agora considere que em no primeiro ano a tecedeira dobra a quantidade produzida, não em relação ao dia anterior, mas em relação ao mês anterior. No segundo ano, triplica em relação ao mês anterior. No terceiro quadriplica, em relação ao mês anterior. Ao final de 3 anos, quanto é produzido?

**Episódio**

Aqui, em comum acordo com os alunos, fomos direto à atividade (iii), na leitura dos textos, devido à dificuldade em expor a história da China Antiga, já que poucos têm algum conhecimento prévio sobre o assunto, e também pelos cursos de história do ensino médio não tratarem sobre o assunto.

A primeira discussão se deu após a leitura de RIBNIKOV (1987, PG. 31), que segue em anexo, cujo texto descreve o método Fan-Chen, o que equivale ao método Gauss–Jordan, feito na China muito tempo antes dos Europeus, e segundo o aluno Édipo, descoberto só no século XIX, ou seja, 1.300 anos antes.

**Análise do episódio**:

Segue abaixo trecho transcrito de tal discussão:

Dimas:

- *Se isso* (método Fan-Chen), *foi feito 1.300 anos antes do equivalente ao método de Gauss-Jordan, por que adotamos a matemática da Europa*?

Ailton:

- *Porque a cultura nossa ciência é de ciência européia*.

Sidnei:

- *Parece que tem um domínio da Igreja ai, e tal*...

Ailton:

- *Juscelino, você que estudou bem a história, da parte da antropologia. O que é, é o domínio da Igreja que impede o acesso ao conhecimento fora da Europa*?

Juscelino:

- *A Igreja priorizou, por exemplo, a filosofia dos livros de Aristóteles, e dispensou aqueles que ela achava um ameaça para a cultura Cristã e priorizou aqueles que ela achava que eram interessantes.*
- *Assim, todos os cientistas que ela achava inovadores eram perseguidos, como Galileu*...

Ailton:

- *Aqui, temos um grande problema cultural, de ciência só européia. A idade média foi o fim da ciência do mundo, mas só naquele pedacinho do mundo, pois no resto estava fervilhando de ciência.*
- *Aqui nos Incas, Astecas, Maias, tinham muitas aplicações práticas*.

Juscelino:

- *Eles tinham aplicações práticas da matemática que imitavam os Gregos, e até construindo pirâmides*...

Sidnei:

- *O que estava no discurso da Igreja Católica que fez com que essa parte do mundo não enxergasse o que tava do lado. O que tinha naquele discurso? O que eles falavam*?

Ailton:

- *Juscelino, não é ameaça à doutrina Cristã*?

Juscelino:

- *É a* (ameaça) *toda a civilização. É aquilo que você falou (Ailton), os Árabes eram os infiéis, bárbaros, bastardos*...

Édipo:

- *Tem uma história assim: a cultura da idade média veio com as civilizações germânicas e pagãs, que não tinham esse espírito cientifico como tinha antes...*
- *Quando o Império Romano foi destruído, esse espírito cientifico foi destruído e deu margem ao misticismo.*
- *A Igreja Católica era a única instituição forte que esquematizou um estilo de viver. No final da idade média ela impôs tal fé e tinha poder sobre a grande massa da população.*

Juscelino:

- Era ela que comandava o sistema educacional. Ela não ocupava somente da parte religiosa, pois os funcionários da Igreja recebiam o salário do Estado, e até não tinha separação entre Igreja e Estado, até à Revolução Francesa.

Édipo:

- *Esse discurso cerceava a ciência*.

Aqui as discussões giraram em torno dos avanços da matemática chinesa, que só pode ser igualada em alguns itens cerca de 1500 a 2000 anos após, pelos europeus, segunda a fala de um aluno: "*Pelo que pude ver, a matemática da Europa só conseguiu chegar ao mesmo patamar da China Antiga, quase dois mil anos depois*." Assim, esta fala representa sua interpretação a cerca do desenvolvimento matemático de Ribnikov (1987). Mais especificamente, tal tópico refere-se à equações lineares e sistemas de equações lineares, visto em geral no final do segundo ano do Ensino Médio.

Já em relação às seqüências e progressões, um avanço da matemática chinesa foi a fórmula geral para soma de progressões, do século XI, e pode ser visto pelos alunos no final do 1º ano do Ensino Médio.

**Episódio 1**:

Ailton:

- Na aula passada foi exibido o episódio "NÚMERO DE OURO", da série 'ARTE & MATEMÁTICA', do professor Luiz Barco. Assim, ficou a pergunta:

  *Qual a relação entre a proporção áurea e a pintura? Vale o mesmo para a arquitetura*? *Por quê*?

- *Alguém pensou na questão*?

Juscelino:

- *O vídeo mostra essa associação entre o proporcional e a beleza.*
- *Agora, para correlacionar com o assunto de seqüências, que a gente estava vendo na aula anterior, dá para perceber no caso das colunas, na forma de homens, que pela distancia existe uma razão de seqüências, uma PA. Já no caso da concha* (nautilus), *a proporção é aumentada*.

Édipo:

- *Aí é Fibonacci*.

Juscelino:

- *Como também no caso dos galhos da árvore*.

Édipo:

- *No nautilus, formamos retângulos de lados 3, 5, 7, 13, o que vai levar ao número de ouro*.

Sidnei:

- *Por que isso é belo*?

Ailton:

- *Porque é proporcional.*
- *As artes elegeram o numero de ouro, o proporcional, como beleza*.

Édipo:

- *Esse padrão foi buscado na natureza*.

### 3.3. Estudando Fibonacci, sistematizando conceitos de seqüências e progressões

Num primeiro momento foi proposto o problema dos coelhos, que deu origem à seqüência. Aqui o objeto era que o aluno trabalhasse com o problema que deu origem à seqüência de Fibonacci, onde ele deveria interpretá-lo e resolvê-lo, de modo a redescobrir tal seqüência.

Atividade 1: *Problema dos pares de coelhos*

*Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano? Um homem tem um par de coelhos em um ambiente inteiramente fechado. Desejamos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados deste par em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre à produção de um par e um par começa a produzir coelhos quando completa dois meses de vida.*

Assim, sabemos que o par adulto produz um par novo a cada 30 dias, no início do segundo mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par de adultos e outro de coelhos jovens, assim no início do mês 1 existirão 2 pares: 1 par adulto + 1 par recém nascido.

No início do terceiro mês o par adulto haverá produzido novamente mais um par enquanto que o par jovem terá completado 1 mês de vida e ainda não estará apto a produzir, assim no início do terceiro mês existirão três pares de coelhos, sendo: 1 par adulto + 1 par com 1 mês de idade + 1 par recém nascido.

Perguntas:

*(1) Ache a cada mês os números dos pares de coelhos produzidos, formando uma seqüência de 12 termos.*

*(2) Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano?*

*(3) É possível achar uma regra para esta seqüência? Se for possível, encontre esta fórmula.*

**Episodio 2:**

Ailton:

- Agora vamos para o item dois, que na verdade já foi feito, mostrado no vídeo. Vou colocar a seqüência de Fibonacci para discutirmos.

Édipo:

- Temos: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \in N$, $n \geq 2$.

**Analise do episódio:**

Novamente neste episódio o vídeo tem fator preponderante, uma vez que ele já traz a seqüência de Fibonacci e a fórmula.

Percebemos que no caso em questão a exibição do vídeo antes da tarefa prejudicou o trabalho dos alunos, uma vez que grande parte do trabalho e discussões já tinham sido feitas, empobrecendo a aula.

Analisamos que a solução do problema seria a exibição do mesmo após as discussões e resoluções dos exercícios, complementando-os.

### 3.4. Origem das operações da PG e PA.

Foram trabalhadas as operações com progressões, a partir de logaritmos, com o objetivo de alunos fazerem relações entre progressões aritméticas e geométricas, e chegarem à primeira idéia de logaritmo, feita de Stifel em 1.544.

**Atividade 1: Sequências e logarítmos**

*(i). Leitura de textos:*

- *Puritanos e Lobos do Mar, por Eves.*
- *A Alvorada da Matemática Moderna, por Eves.*

*(ii) No inicio do século XVII, Jonh Napier publicou um trabalho onde deu ao mundo a os logaritmos, porém antes dele, Stifel, em 1.544 deu uma idéia que foi a precursora dos logaritmos.*

*Assim, responda:*

*a) Dada a progressão geométrica e aritmética abaixo:*

$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots$ uma P.G.

-3, -2, -1, 0, 1, 2,3, ... uma P.A.

*Como podemos fazer a relação entre estas duas progressões?*

b) *Napier, em 1.614, deu os termos:*

*$B, B^2, B^3, B^4, ..., B^n, ...$* uma P.G.

*$1, 2, 3, 4, ..., m, ..., n, ...$* uma P.A.

*O produto $B^m . B^n = B^{m+n}$ de dois termos da PG, de acordo do IVES (1997), está associada à soma m+n dos termos correspondentes da segunda progressão. De que forma?*

*Será exibido o episódio "MÚSICA DAS ESFERAS", da série 'ARTE & MATEMÁTICA', com duração de 24 MINUTOS.*

*Após, responda:*

*- Qual a importância da música na criação dos logaritmos?*

Episódio:

Ailton:

- *Vamos direto para o dois.*
- *Alguém, já fez? Quer falar algo*?

Sergio:

- *O expoente da PG, que tem base dois, é uma PA.*
- *Essa é a relação existente*.

Ailton:

- *Como isso pode ter dado idéia ao surgimento do logaritmo*?

Sergio:

- *Então temos um logaritmo na base dois: $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$, que é o expoente da PG, que é a PA*.

Ailton:

- Então, *Qual a importância da música na criação dos logaritmos?*

Sidnei:

- *É a escala, que está relacionada com os logaritmos*.

**Análise do episódio**:

Os objetivos da atividade foram cumpridos, pois os alunos conseguiram fazer correlação entre progressões aritméticas e geométricas, reconstruindo a primeira idéia de logaritmos, de Stifel.

Aqui o vídeo foi importante ao mostrar aplicações de seqüências e logaritmos na música clássica, bem como seu desenvolvimento histórico.

Atividade 2**: Gauss**

(i) Leitura de texto:

a) Tempo de Gauss e Cauchy, por Boyer.

*Gauss deu sinais de ser um gênio antes dos três anos de idade. Nesta idade aprendeu a ler e a fazer cálculos aritméticos mentalmente.*

*Aos dez anos de idade, durante uma aula de matemática seu professor pediu para que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100. Em poucos* *minutos Gauss apresentou o resultado correto. Até então, ninguém era capaz desse feito.*

*Assim, responda:*

*(1) Qual o raciocínio que Gauss usou para chegar a este resultado?*

*(2) A partir desse raciocínio é possível deduzir uma fórmula? Qual? Deduza a fórmula, se for possível, passo a passo.*

**Episódio:**

Ailton:

- *Gauss colocou a soma de 1 até 100, e somando os extremos viu que dava 101. Explique esse raciocínio*.

Édipo:

- *Ele somou* 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, *ou seja*, n + 1, (n –1) + 1, (n –2) + 3.
- *Daí sai a fórmula*.

**Análise do episódio**

Os alunos conseguiram recriar o raciocínio de Gauss para a soma de uma progressão aritmética.

É importante notar que tal exercício é visto no final do primeiro ano do Ensino Médio, de uma forma geral. Assim, foi apenas uma revisão para a maioria.

## 4. Conclusões

Podemos dizer que tivemos sucesso em nossos objetivos, que era uma melhor percepção dos conceitos de fluência e movimento, onde observamos ao longo do mini-curso uma percepção mais aguçada de tais conceitos.

Por exemplo, foi lido um texto de Caraça (1998) relativo ao conceito de movimento e fluência. Assim, ao aplicar atividades para análise de tais conceitos de um trecho de um texto, e nas aulas subseqüentes, notamos uma melhor percepção desses.

Notamos em especial no mini-curso a formação de subgrupos de alunos, de ciências exatas, ciências humanas e outro formado por um calouro de Matemática.

Nesse sentido, notamos uma dificuldade maior em estruturar as idéias relativas à parte histórica e filosófica do primeiro grupo em relação aos demais. Por exemplo, o grupo de alunos de ciências humanas demonstrou maior argüição nos argumentos, chegando a citar autores de ciências sociais. Ou seja:

Ailton:

- *Então, vamos discutir o texto do Caraça. Vê o que vocês acharam... difícil... fácil*...

Dimas:

- *Difícil*...

Juscelino:

- *Achei curioso o que ele faz com as ciências exatas, o mesmo o Conte faz com as ciências humanas. Não tem como definir uma ciência como, por exemplo, as definições da crítica clássica*...

Edipo:

- *O conceito de fluência, principalmente, tem a idéia que você não tem conhecimento absoluto, pois você tem que recortar, ter um recorte, um isolado...*

Juscelino:

- *Em algumas ciências não tem como você fazer esse trabalho de isolado.*
- *Na Estatística você não tem como trabalhar com o todo, mas com amostras, pois inviável sem amostras, pelo tempo, pelos recursos... até recursos humanos.*
- *No Rio de Janeiro, em alguns morros, não tem como entrar...*

Edipo:

- *Também fica inviável com relação às variáveis.*
- *Tem gente que dificuldade a linguagem...*
- *Às vezes não tem funcionário para fazer a função...*
- *E como o funcionário vai fazer a analise da própria vida? Ele vai fazer analise do que está fora, e da vida dele... Então, ele se inclui no todo.*

Juscelino:

- *Acho interessante partir desse aspecto que tudo muda, até demais...*
- *Essa preocupação que ele coloca em relação às ciências naturais, é uma preocupação que muitas pessoas que não tem essa noção de ciência que ele tem, coloca para se contrapor em relação a nós das ciências humanas, um debate que é feito a respeito de ciência. As pessoas dizem com arrogância, é o que alguns dizem, filósofos, homens de ciência.*
- *Alguns dizem: Olha, vocês das ciências humanas não fazem ciência, pois vocês.. toda vez que vai fazer a escolha do objeto de estudo, vocês estão sendo parciais. Mas essa parcialidade existe?*
- *Como na química, por exemplo, você quer estudar metanol. Existem verbas para estudar metanol.*
- *Não existem verbas para você estudar o que existe a respeito da corrida nuclear... na guerra fria. Quero trabalhar com mísseis.. pode ser que você consiga...*
- *Não Existem condições para você trabalhar com energia nuclear hoje, do que na década de 50, 60 no auge da guerra fria...*
- *Agora, se você falar... que uma fonte de energia alternativa, no caso o metanol.*
- *Então, o fato de existir uma disposição da sociedade, de existir verbas, de existir disposição para aquilo.*
- *O seu estudo já é direcionado... Não existe neutralidade!*
- *Nem o sabonete é neutro...*
- *É interessante isso, que ele coloca... Essa humildade de dizer...*
- *Estou me baseando na opinião dos pré-socráticos...*
- *Olha, ele diz: O homem passou no rio, e nem o rio que ele passou é o mesmo...*
- *Nem o homem é o mesmo... Se a gente fosse o mesmo, não haveria envelhecimento, não haveria morte, que é o fim de vários ciclos vividos.*

Edipo:

- *Você falou no aspecto orgânico... Tem o aspecto da experiência. Antes dele passar pelo rio, ele não tinha a experiência de passar pelo rio, então ele adquiriu experiência.*
- *Sartre cita alguma coisa, que ele não tem como ser o mesmo...*

Juscelino:

- *Agora, o trabalho de Popper, considera muito a relação do aspecto de lei e tendência.*
- *Por exemplo, no caso da matemática, das ciências exatas elas têm que determinar leis para reprodução. Se você não puder reproduzir o experimento, se você não reproduzir aquilo que você está estudando, você não pode determinar leis. Se você não determina leis, então fica difícil você dizer que é ciência, nos moldes das ciências exatas.*

O segundo grupo teve maior dificuldade em estruturar os conceitos algébricos, onde eles citavam alguns argumentos de matemática superior para resolução de alguns problemas.

Já o terceiro grupo manteve regularidade na estruturação das idéias históricas e filosóficas, e nas algébricas, mantendo bons diálogos com o grupo dos alunos das ciências humanas.

Este aluno, em especial demonstrou facilidade nos argumentos matemáticos, destacando-se no raciocínio mental ágil, ou seja, por exemplo, resolvendo o problema (iv) da parte 3, mentalmente, usando conceitos da teoria dos números, vista no primeiro período letivo do curso de matemática. Ou seja:

*(ii). A Tábua de Louvre*

Os babilônicos também utilizavam seqüências. Foram encontrados 2 problemas interessantes sobre seqüência numa tábua de Louvre, datando por volta de 300 a.C. Um deles afirma que:

$$1^0 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots 2^8 + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$$

Perguntas:

Qual a diferença entre este problema da Tábua de Louvre e os do Egito Antigo, como do Papiro de Rhind?

Qual a sua idéia para mostrar que essa igualdade é verdadeira?

Ailton:

- *Édipo, você disse que já tinha pensado nele?*

Édipo:

- *Eu pensei, mas não passei para o papel.*
- *Agora tem que pensar em dobro...*

Ailton:

- *Aqui é importante observar o contraste entre o Egito, que era mais prático, e a Mesopotâmia, que era mais abstrato.*
- *A Mesopotâmia é a única civilização que tem registro de Matemática abstrata.*

Édipo:

- *To pensando em números binários.*
- *Temos: $1^0 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... 2^8 + 2^9 = 2^9 + 2^9 – 1$*
- *Temos:*
- *$2^9$= 1000000000 – 1*
- *Ai substitui no segundo termo e cancela com o primeiro.*
- *Por exemplo: $2^n = 2^0$+ n dígitos*

Juscelino:

- *Fica fácil ver o que ele fazendo.*

Édipo:

- *É porque eu estou vendo números binários em teoria dos números (disciplina do curso de matemática), e quando vi o numero é um, que é dois elevado a zero, eu lembrei...*
- *Eu não decoro, eu tento aprender o raciocínio, pois tem gente que decora.*
- *Se daqui a um ano eu voltar a ver isso (o problema), eu sei...*
- *O importante é o raciocínio.*

Ailton:

- *Agora tem outra pergunta: Você expressaria a igualdade de outra forma? Qual?*

Édipo:

- *Eu fiz.*
- *Dá para representar na forma binária:*

  *1 + 10 + 100 + 1000 + ... + 100000000 = 100000000 + 100000000 – 1*
- *Resposta: Sim, através da representação binária. Após a soma e a subtração na base binária, chega-se ao mesmo resultado.*

Assim, concluímos que os objetivos foram atingidos de forma parcial, ao conseguirmos uma maior desenvoltura do raciocínio algébrico, bem como dos conceitos lógico-históricos.

## Referências bibliográficas

Barasuol; F. (2006). *A Matemática da Pré-História ao Egito Antigo*. UNIrevsita, 21. Retrieved May, 2, 2008. http://www.unirevista.unisinos.br/_pdf/UNIrev_Barasuol.pdf.

Benedetti, F. (2003). *Funções, Software Gráfico e Coletivos Pensantes*. Unpublished Master's degree dissertation. UNESP, Rio Claro, Brazil.

Bicudo, M. (1999). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas*. São Paulo: UNESP.

Bogdan, R. C; Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Borba, M. (2004). *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. In: 27ª Reunião Anual da Anped. Caxambu.

Boyer, C. B. (1996). *História da Matemática*. (E. E. Gomide, trans.). São Paulo: Edgard Blücher. (Original work published in 1974).

Bucchi, P. (1992). *Matemática*. São Paulo: Editora Moderna.

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Porto: Gradiva.

Costa, A. B. (2003). *Um Passeio Pela História da Matemática: De Fibonacci a Jordan*. Unpublished Monograph. UFSCar, São Carlos, Brazil.

Eves, H. (2004). *Introdução à História da Matemática*. (H. H. Domingues, trans.) Campinas: Editora UNICAMP. (Original work published in 1997).

Ferreira, E. (2005). *Quando a atividade de ensino dá ao conceito matemático a qualidade de educar*. Unpublished Master's degree dissertation. UNICAMP, Campinas, Brazil.

Freire, M. L. (2005). *História da Matemática na Mesopotâmia*. Retrieved May, 6, 2008. From: http://www.unirevista.unisinos.br/_pdf/UNIrev_Barasuol.pdf.

Gomes, E. B. (2005). *A História da Matemática como Metodologia de Ensino: Perspectivas Epistemológicas e Evolução de Conceito*. Master's degree dissertation. UFPA: Belém, Brazil.

Hazzan, S.; Iezzi, G. (1985). *Fundamentos de Matemática Elementar*. Vol. 4. São Paulo: Atual Editora.

Lanner de Moura, A. R. (1995) *A medida e a criança pré-escolar*. Unpublished doctoral dissertation, Campinas State University at Campinas, Brazil.

Lanner de Moura, A. R.; Sousa, M. C. (2002). *O lógico-histórico: uma perspectiva didática da álgebra na formação de professores*. In: XI Endipe.

Lima, V. S.; et all. (2004). *Progressões Aritméticas e Geométricas: História, Conceitos e Aplicações*. In: Revista Intellectus. Retrieved October, 10, 2008. From:http://www.unopec.com.br/revistaintellectus/_Arquivos/Jan_Jul_04/PDF/Artigo_Valeria.pdf.

Lorenzato, S. (2006). *Para Aprender Matemática*. Campinas: Ed. Autores Associados.

Miguel, A.; Miorim, M. A. (2004). *História na Educação Matemática – Propostas e desafios.* Belo Horizonte: Autêntica.

Miranda, H. S.; Reis, C.; Jacobsen, S. *A História da Matemática no Egito*. Retrieved April, 4, 2008. From: http://mtuliop.googlepages.com/Egito.pdf.

Morgado, A. C.; Wagner, E.; Zani, S. C. (1993). *Progressões e Matemática Financeira*. Rio de Janeiro: SBM.

Mora, J. F.; Gonçalves, M. S. (2000). *Dicionário de Filosofia*: São Paulo: Edições Loyola.

Moura, M. O. (2000). *O Educador Matemático na coletividade de formação: uma experiência com a escola pública*. Unpublished Free Teaching Thesis. USP, São Paulo, Brazil.

Neto, H. M. (2007). *Uma Análise da História da Matemática Presente nos Livros Paradidáticos.* Unpublished Master's degree dissertation. UNESP, Rio Claro, Brazil.

Ohse, M. L. (2007). *História da Matemática: A Matemática Medieval no Continente Europeu*. Educação Matemática em Revista, 22.

Pereira, M.; Saraiva, M. J. (2005). *Tarefas de investigação no ensino e aprendizagem das sucessões.* Revista Quadrante: Vol. XIV, 2.

Ponte, J. P.; Segurado, M. I.; Oliveira, H. M. (1998). *Tarefas de Investigacao Matematica: Historias da Sala de Aula.* VI Encontro de Investigação em Educação Matemática. Portalegre: SPCE-SEM.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. Moscú: Editorial Mir.

Silveira, A. P. (2007). *Estudo de percepções de crianças do primeiro ciclo do ensino fundamental sobre o conceito de número*. Presidente Prudente: UNESP, 2007. Iniciação Científica.

Soares, K. M. (2004). *História da Matemática na Formação de Professores do Ensino Fundamental*. (1ª a 4ª série). Unpublished Master's degree dissertation. UDESC, Florianópolis, Brazil.

Sousa, M. C. (2004). *O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: Um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental*. Unpublished doctoral dissertation, Campinas State University at Campinas, Brazil.

Sousa, M. C. (2007). *Atividade de ensino*: *Expressão da unidade Teórica e prática na formação de professores.* Unpublished project leader of Scientific Initiation, São Carlos: UFSCar, Brazil.

**Ailton Barcelos Da Costa**: Estudante de Licenciatura em Matemática – UFSCar Ministrou um curso de extensão universitária de 30 horas, em 2008, com o título “O CONCEITO DE SEQÜÊNCIAS E PROGRESSÕES NA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICA”, e apresentados painéis em congressos sob mesmo título em três congressos, e outro sob título “A ESCOLA COMO MEIO DE CONSERVAÇÃO SOCIAL” em outro congresso em 2009**.**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 159-163
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

# Haciendo matemática

**Patricia Detzel; Rosa Martínez**

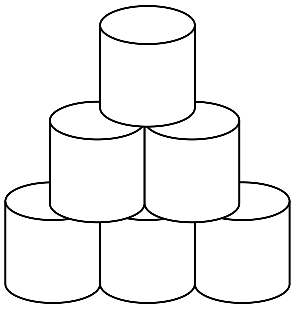
Cuando pensamos la enseñanza de la matemática intentamos - y todos acordamos- propiciar una actividad en el aula que posibilite, a partir de la reflexión y del trabajo matemático, la producción de conocimientos por parte de los alumnos.

También sabemos que, esta tarea no resulta sencilla para los docentes responsables de la organización de la enseñanza en clases dentro de una institución. Nuestra intención aquí, es realizar un aporte en este sentido. Expondremos un ejemplo de problema planteado en una clase de matemática y las producciones de los alumnos que pretenden poner de manifiesto dicho trabajo.

El problema elegido favorece la búsqueda de un procedimiento de resolución, por parte de los alumnos, para el cual se debe encontrar características que se repiten, usar letras para producir fórmulas para contar colecciones, etc.

## Problema: "Las latas"

En un supermercado se quieren acomodar las latas de duraznos como muestra la figura:



a) ¿Cuántas latas serán necesarias para armar una torre de 5 pisos?
b) ¿Cuántas serán necesarias para una torre de 15 pisos?
c) ¿Y de 100 pisos?
d) ¿Se podrán disponer de esta manera 28 latas sin que sobre ninguna?
e) ¿Y 100 latas?
f) ¿Se podría anticipar si con 1000 latas se podría construir una torre de las mismas características?

Como se puede observar el planteo del problema es tal que permite, que los alumnos puedan hacerse una representación de la situación y percibir la viabilidad de una solución. En el dibujo se encuentra la regularidad de la disposición de las latas, es decir, se puede ver que en cada piso se tiene una lata menos.

Para resolver el ítem a) es probable que los alumnos realicen un dibujo y cuenten la cantidad de latas. En el caso del ítem b) un procedimiento posible sería asociar la distribución de las latas por piso a la suma: $15+14+13+.......+2+1$. Para esto, los alumnos deben advertir que la cantidad de latas de la base coincide con la cantidad de pisos de la torre.

Estos procedimientos resultarán costosos para el ítem c), pues el asunto ahora será, cómo calcular la suma de los 100 primeros números naturales o buscar un nuevo procedimiento de conteo, a partir de una nueva exploración y búsqueda de regularidades. Y así, como dice Sadosvky, (2005), *"la insuficiencia de algunas herramientas (en este caso, la enumeración) plantea la necesidad de inventar nuevas técnicas y nuevos modos de representar más potentes o más ajustados; al hacerlo pueden surgir nuevas relaciones y se puede acceder a perspectivas más generales*".

En el ítem d), los alumnos podrían llegar al resultado por tanteo, es decir se comienza sumando naturales consecutivos $1+2+3+.........$ hasta que el resultado sea 28, esto es: $1+2+3+4+......+7=28$. Pero este procedimiento, nuevamente, no es eficaz para los incisos e) y f), la intención es aquí crear la necesidad de encontrar un modo conveniente para expresar la relación entre el número de latas y el número de pisos.

Dicho problema fue propuesto a alumnos de 4º año, a continuación presentamos algunos de los procedimientos[1] realizados en esa experiencia.

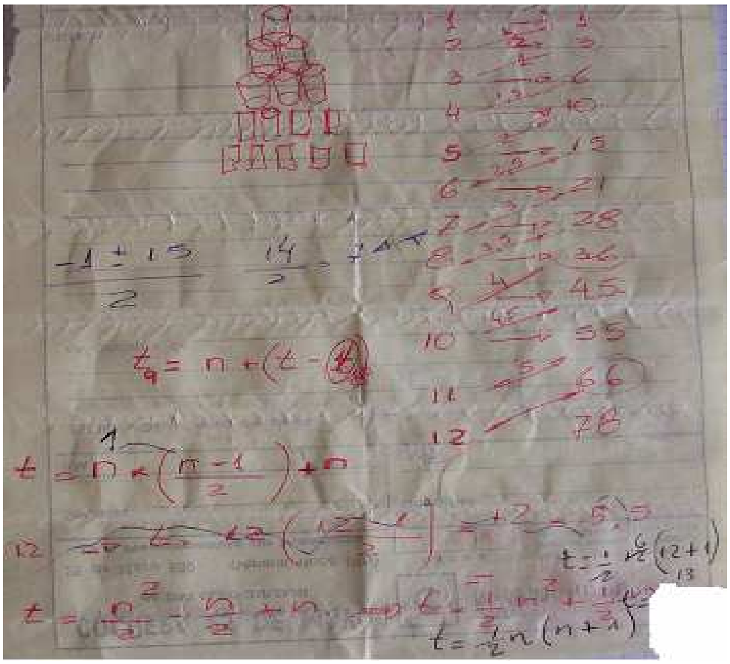
Para resolver los incisos a), b), c) y d), un grupo, produce la fórmula:

$$t = n.\frac{n-1}{2} + n.$$

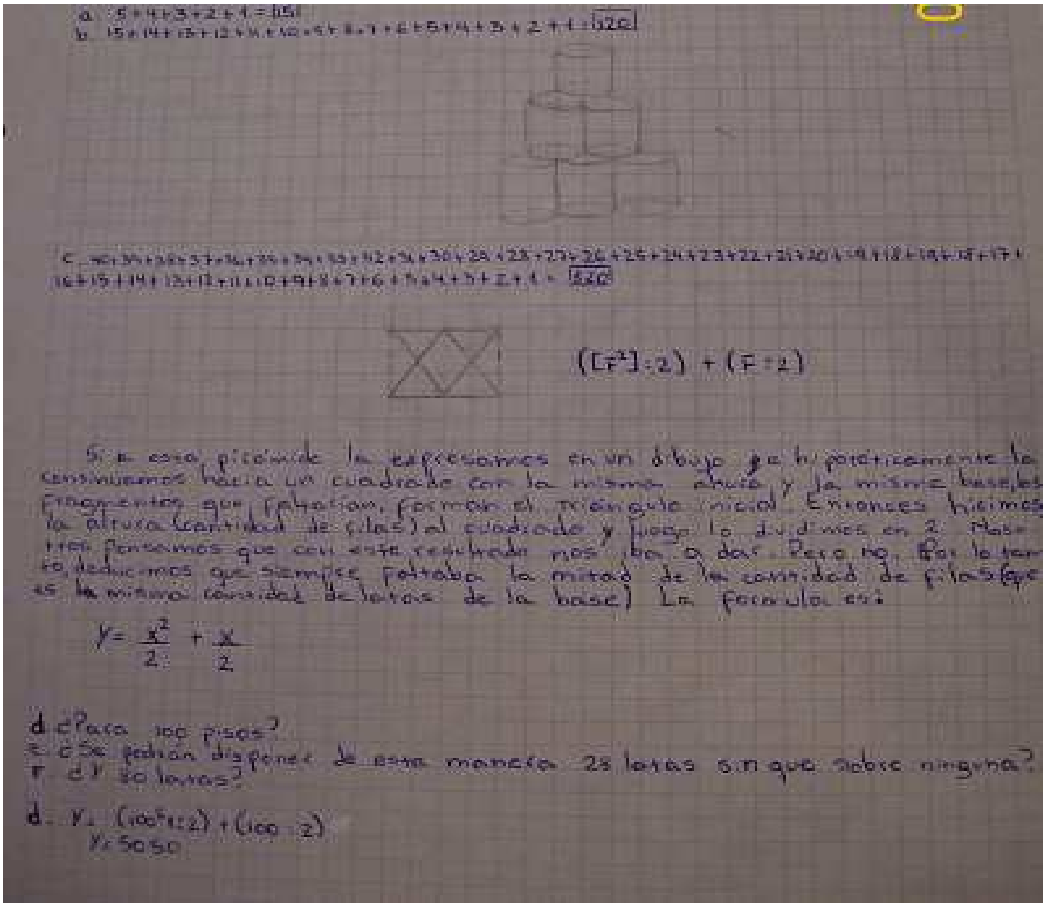
Ellos organizan la información en orden sucesivo desde 1 hasta 12, en una tabla en la que exploran los resultados y establecen relaciones numéricas en las que hacen intervenir el caso precedente. Es decir, la primera relación que establecen es la cantidad de latas de un piso *n* es igual a la cantidad de latas para un piso menos, más el número de piso: $t_n = t_{n-1} + n$ , para el caso de 9 pisos sería $45 = 36 + 9$.

En esta expresión es necesario conocer el resultado anterior $t_{n-1}$, luego logran expresar $t_{n-1}$ en función de *n* como $t_{n-1} = n\frac{(n-1)}{2}$. Se presenta, a continuación, el trabajo de uno de los alumnos:

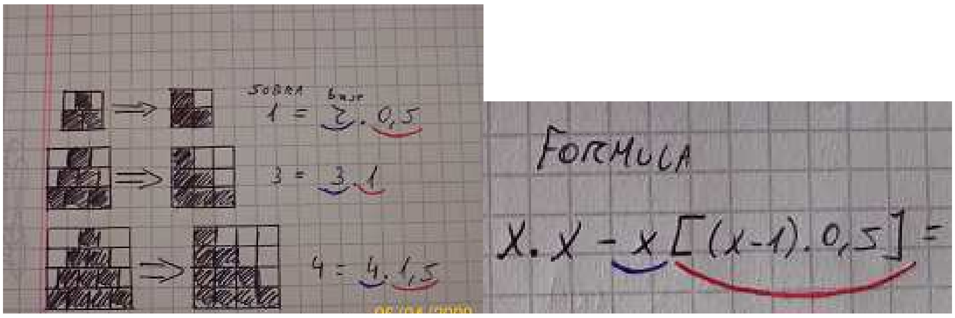
[1] Extraído de cap. 4 Matemática, propuesta 2 en *Crónicas de las escuelas medias del Alto Valle*, 2010, UNCo. (en prensa).



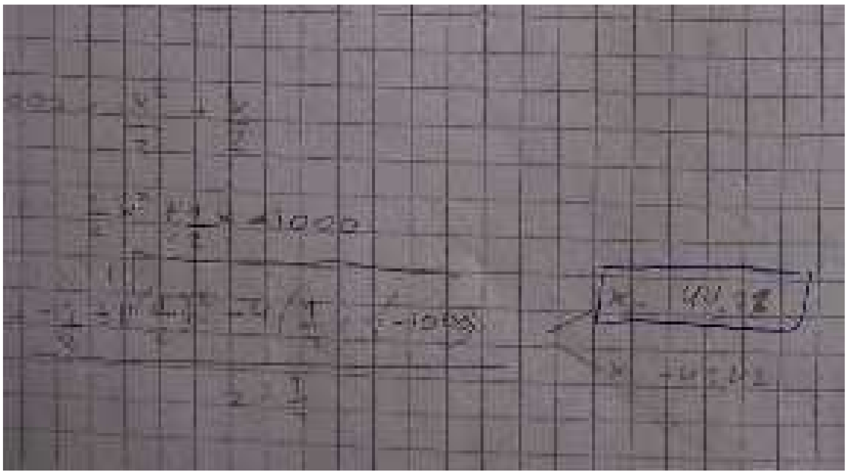
Otro grupo produjo la siguiente fórmula: $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$ En este caso relacionan la disposición de las latas con un triángulo y el cálculo de la cantidad de lata es asociado con el cálculo de área, se puede observar el trabajo que realizaron:



En el siguiente caso, los alumnos para encontrar la fórmula, en primer lugar estudian gráficamente la relación entre la torre de latas y un cuadrado. Luego reorganizan la información del dibujo de modo tal que se hace más evidente observar la cantidad de latas de la torres y las que "sobran" para formar un cuadrado. Finalmente buscan relaciones numéricas para expresar "lo que sobra" usando como dato la base, es decir, exploran cómo expresar la cantidad de latas que sobran en función de la cantidad de latas de la base.

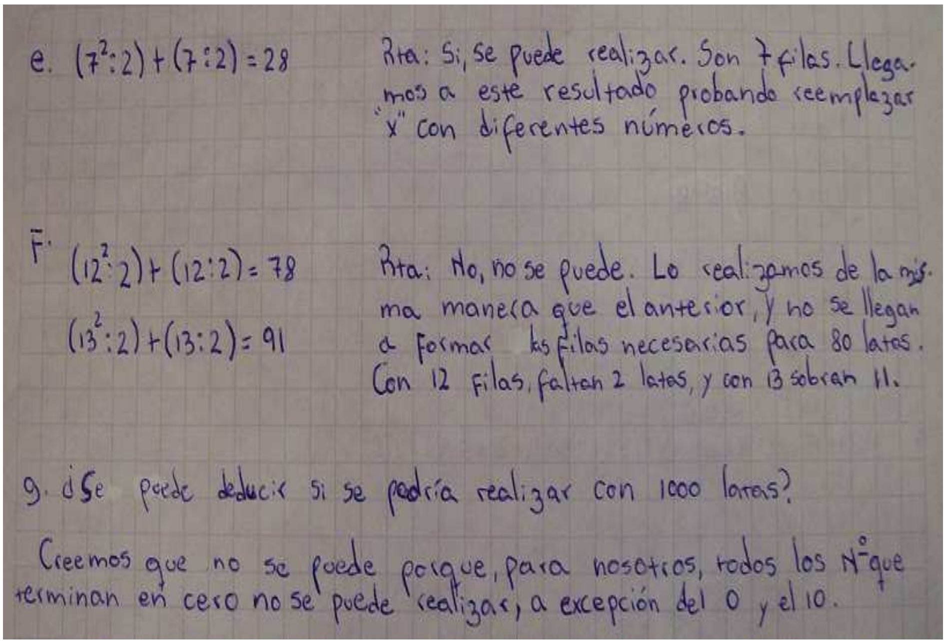



Para resolver los incisos e) y f) algunos alumnos utilizaron procedimientos que corresponden a la resolución de una ecuación cuadrática, tema que había sido tratado anteriormente. No perciben que el resultado debe ser un número natural.



Otro grupo, busca valores para verificar la fórmula, es decir, prueban diferentes números usando la expresión para obtener como resultado 28.

Nos interesa destacar que cuando los números son grandes, dejan el cálculo por tanteo para involucrarse en la búsqueda de una explicación. En este caso, los argumentos dados van más allá del caso particular de 1000 latas, pues en su afirmación consideran "todos los números que terminan en cero", elaboran una ley, una conjetura matemática.



e. $(7^2:2)+(7:2)=28$

Rta: Si, se puede realizar. Son 7 filas. Llegamos a este resultado probando reemplazar "x" con diferentes números.

F. $(12^2:2)+(12:2)=78$

$(13^2:2)+(13:2)=91$

Rta: No, no se puede. Lo realizamos de la misma manera que el anterior, y no se llegan a formar las filas necesarias para 80 latas. Con 12 filas, faltan 2 latas, y con 13 sobran 11.

g. ¿Se puede deducir si se podría realizar con 1000 latas?

Creemos que no se puede porque, para nosotros, todos los N° que terminan en cero no se puede realizar, a excepción del 0 y el 10.

## A modo de cierre

Lograr un espacio en las clases de matemáticas en el que los alumnos se vinculen con situaciones desde un lugar de productores de conocimientos, brinda la posibilidad de ubicarlos en un trabajo matemático más interesante que la mera aplicación de técnicas. Intentamos mostrar que es posible hacer "vivir" la matemática en el aula.

## Bibliografía

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra.* Editorial libros del Zorzal, Bs. As.

Sadosvky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy*, editorial libros del Zorzal, Bs. As.

Tassara, A.; Porras, M.; Martínez, R. (2010). Crónicas de las escuelas medias del Alto valle de Río Negro y Neuquén. Facultad de Ciencias de la Educación. UNCo. (en prensa).

**Patricia Detzel.** Magíster en Educación en Ciencias, Orientación Matemática, Universidad Nacional del Comahue. Docente del Área Álgebra del Dpto. de Matemática, Facultad de Economía y Administración. U.N.Co. Argentina. pdetzel@gmail.com

**Rosa Martínez.** Magíster en Educación en Ciencias, Orientación Matemática. Universidad Nacional del Comahue. Docente de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación. U.N.Co. Argentina. rfmartin@uncoma.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 165-172
ISSN: 1815-0640

# El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

## *De lo particular a lo general, usando grafos*

### Problema

*En una reunión hay $n$ personas. Algunas de ellas se conocen entre sí (relación simétrica) y otras no. Se sabe que cada persona conoce solamente a otras tres personas en la reunión. Determinar los valores posibles del número natural $n$.*

---

Este fue uno de los problemas presentados en un taller sobre resolución de problemas, para profesores de secundaria, en el marco del *V Coloquio Internacional de Enseñanza de las Matemáticas*, organizado por el IREM – Perú y la Maestría en Enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, que tuvo lugar en febrero de este año en Lima. El taller fue preparado y desarrollado por Jorge Tipe, John Cuya y Sergio Vera, tres estudiantes universitarios, ex olímpicos y ganadores de medallas en olimpiadas matemáticas nacionales e internacionales. La coordinación general y la adecuación de los problemas en cuestiones de dificultad graduada para ser trabajadas individualmente y en grupo, estuvo a mi cargo.

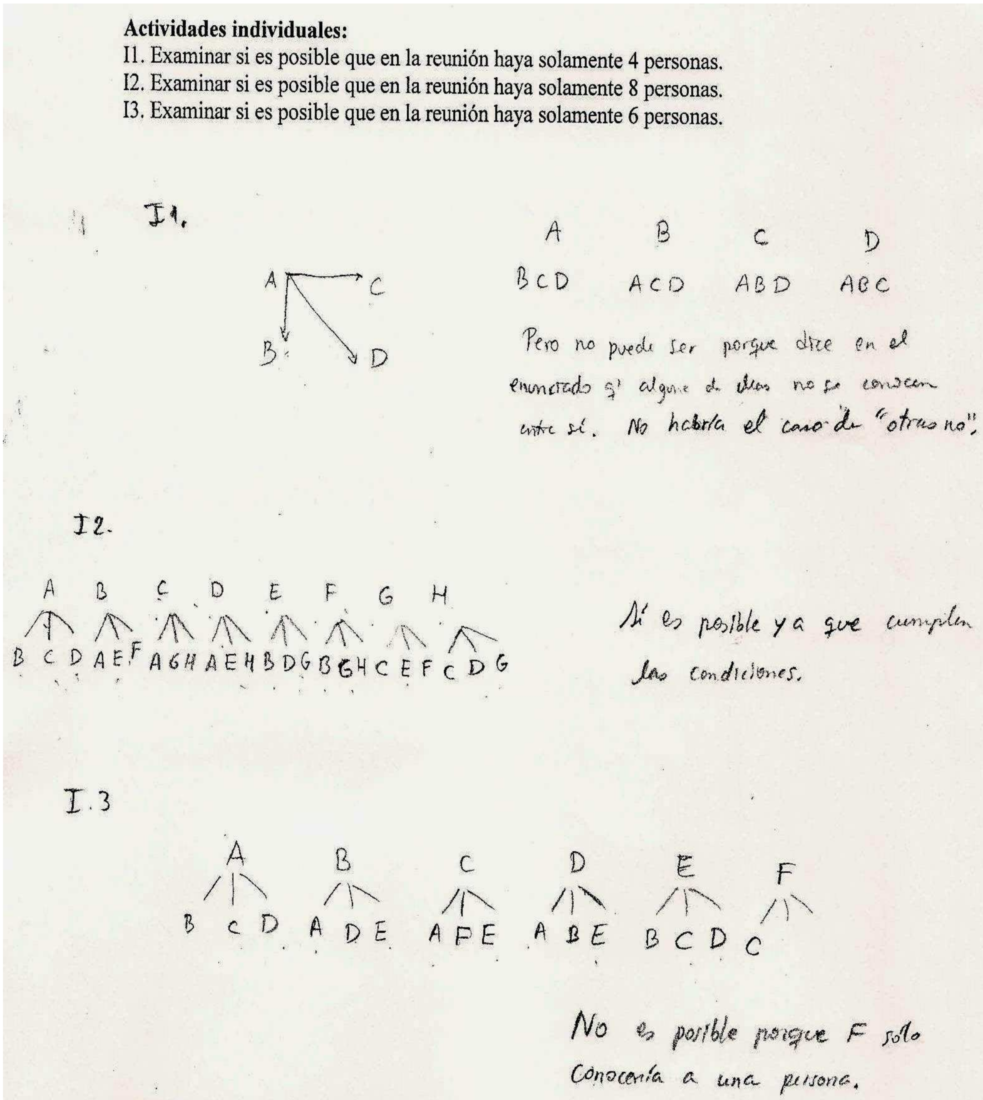
Este problema lo trajo Jorge Tipe a la discusión en el grupo. Ciertamente, la dificultad principal del problema es el nivel general que se pide examinar. Para llegar a tal nivel, resulta esencial – didáctica y matemáticamente – examinar casos particulares y, mejor aún si son escogidos de tal modo que vayan dando luces para llegar a una conclusión de carácter general. Con estos criterios, y considerando que es muy importante un trabajo individual que brinde elementos para un trabajo grupal, el problema fue presentado de la siguiente manera:

**Situación**: **Conocidos y desconocidos**
En una reunión hay cierto número de personas; algunas de ellas se conocen entre sí (relación simétrica) y otras no. Se sabe que cada persona conoce solamente a otras tres personas.

**Actividades individuales:**
I1. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 4 personas.
I2. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 8 personas.
I3. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 6 personas.

## Algunos comentarios a las soluciones individuales de los participantes

1. Alrededor de un 70% de los participantes, recurrió a esquemas usando puntos que representaban personas y líneas que unían estos puntos cuando asumían que representaban a personas que se conocían; es decir, esquemas que en verdad eran *grafos.* El resto usó otro tipo de esquemas, que no los ayudó mucho a tener una visión clara de la situación en cada caso. Cabe aclarar que en ningún momento se mencionó la palabra grafo. A continuación muestro la solución de un participante (lo llamo Participante 1), de este segundo grupo:



**Actividades individuales:**
I1. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 4 personas.
I2. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 8 personas.
I3. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 6 personas.

I1.

Pero no puede ser porque dice en el enunciado q' alguno de ellos no se conocen entre sí. No habría el caso de "otros no".

I2.

Sí es posible ya que cumplen las condiciones.

I.3

No es posible porque F sólo conocería a una persona.

**Fig. 1:** Solución de la actividad I1, del Participante 1

Y a continuación muestro la solución de un participante, al que llamo "Participante 2", el que resuelve usando esquemas de grafos:

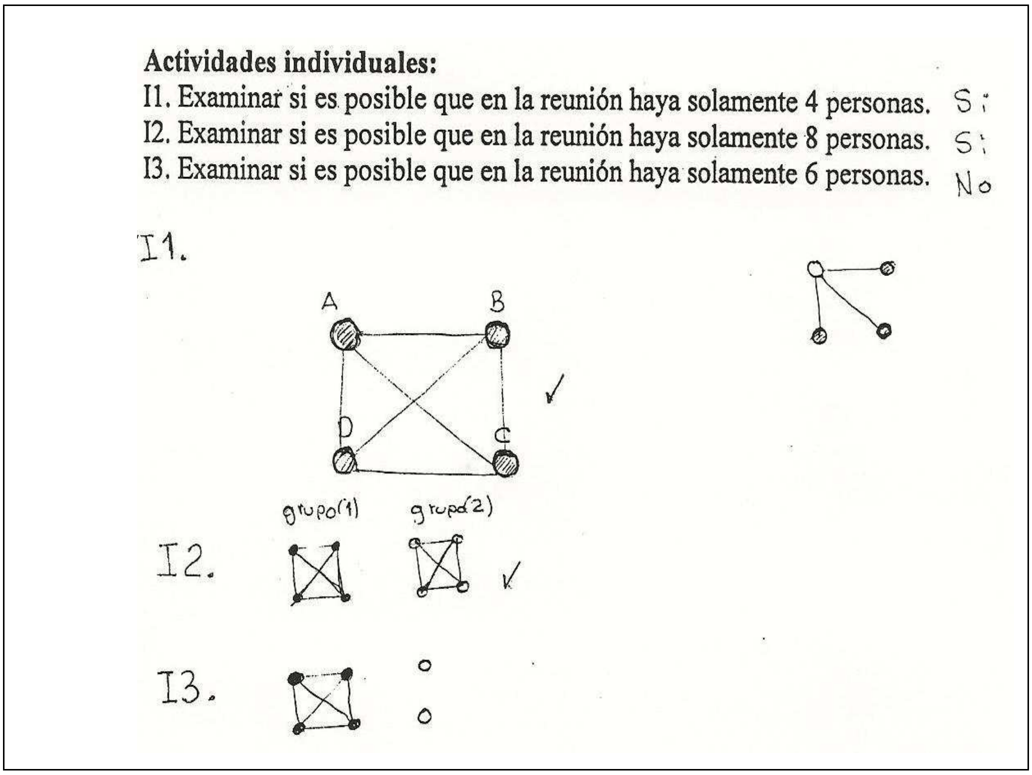



**Fig. 2** Solución de la actividad I1, del Participante 2

2. Para la actividad I1, el Participante 1 advierte que no es posible que en la reunión haya solamente 4 personas, pues no podría cumplirse que algunas de ellas no se conocen entre sí. El Participante 2 usa lo que podríamos llamar un grafo completo de 4 vértices, pero no advierte que por ser solo 4 personas, al cumplirse que cada persona conoce a otras tres, ya todos se conocen entre sí y así se incumple una de las características de la situación.
3. Para la actividad I2, el Participante 1 concluye que es posible que en la reunión haya solamente 8 personas – lo cual es cierto – pero esta conclusión no es coherente con lo que muestra en el esquema que usa, pues se puede ver que está considerando que H se conoce con C, D, F y G; y también que G se conoce con C, E, F y H. Esto se ve claramente al traducir el esquema del Participante1 a un esquema de grafo, como el siguiente:

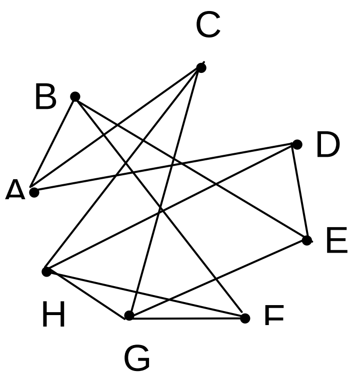



**Fig. 3** Traducción a un grafo, de la solución de I2, del Participante 1.

Es fácil ver que en los vértices H y G hay 4 aristas, lo cual dice que estas personas se conocen con más de otras 3 personas en la reunión.

El Participante 2 afirma que es posible que haya 8 personas en la reunión. Muestra 8 puntos en dos grupos de 4 y en cada uno de estos muestra que cada integrante conoce a otros tres.

Como entre los grupos no hay conexión[1], queda claro que se está cumpliendo también la condición de que haya personas que no se conocen entre sí.

Otra manera interesante de ilustrar esta situación es con los 8 vértices y 12 aristas de un cubo.

4. Para la actividad I3, el Participante 1 sigue usando su esquema y concluye, erradamente, que no es posible que en la reunión haya 6 personas. Hay coherencia entre lo que representa y lo que afirma, pero el error está en hacer una afirmación general a partir de un solo caso particular.

   Notar que para responder afirmativamente sí es suficiente mostrar un caso, porque se está examinando una posibilidad. Afirmar la imposibilidad significa que en ningún caso es posible. La imposibilidad matemática no puede concluirse solo por mostrar uno o muchos casos de imposibilidad. Tiene que demostrarse.

   El Participante 2 afirma que no es posible que en la reunión haya 6 personas, pero no hace una demostración. Muestra un grafo de 6 vértices en el cual no se cumple la condición de que cada persona conozca exactamente a otras tres, pero el error de fondo es el mismo que el del Participante 1.

   Lo cierto es que sí es posible que en la reunión haya 6 personas, como se muestra en el siguiente grafo:

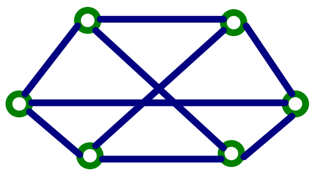


**Fig. 4** Es posible que en la reunión haya 6 personas

   Podemos observar que cada vértice está asociado a tres aristas y que hay parejas de vértices que no están relacionados entre sí, con lo cual se evidencia que se cumplen las dos características de la situación.

   Ciertamente, hay otros grafos de 6 vértices que también ilustran esta posibilidad. Una idea interesante es considerar los 6 vértices y las 9 aristas de un prisma triangular recto.

Para orientar las actividades hacia la solución del problema presentado, propusimos actividades grupales de dificultad graduada, en las que pudieran usar las experiencias tenidas en las actividades individuales:

[1] En el lenguaje de la teoría de grafos, diríamos que tenemos un grafo no conexo, de ocho vértices.

**Actividades grupales:**

G1. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 40 personas.

G2. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 2010 personas.

G3. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 5 personas.

G4. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 2011 personas.

G5. Enunciar y demostrar un teorema a partir de la situación planteada y de los problemas anteriormente resueltos.

## Algunos comentarios a las soluciones grupales de los participantes

1. Los grupos en los que estuvieron participantes que resolvieron la actividad I2 haciendo un grafo no conexo de 8 vértices (como lo hizo el Participante 2), encontraron una manera fácil de examinar la actividad G1 considerando un grafo no conexo de 40 vértices, con 10 grupos de 4 y concluir que sí es posible que en la reunión haya 40 personas.
2. Para la actividad G2, tuvieron más facilidad para responder afirmativamente quienes trabajaron la actividad G1 como se ha descrito antes, y también trabajaron la actividad I3 mostrando un grafo de 6 vértices y respondiendo afirmativamente.

   Observando que

   $$2010 = 502 \times 4 + 2 = 501\times4 + 6,$$

   concluyeron que es posible representar la situación con 501 bloques de 4 y un bloque de 6.

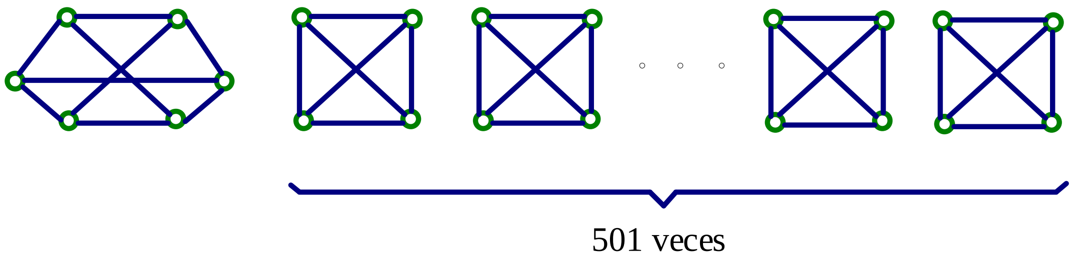
   
   

   **Fig. 5** Es posible que en la reunión haya 2010 personas

   También hubo grupos que propusieron 201 bloques de 10 personas, siendo cada bloque formado por un grafo completo de 4 vértices y un grafo de 6 vértices, como uno de los que se usó para sustentar que sí es posible que en la reunión haya 6 personas (Actividad I3).
3. La actividad G3 nuevamente lleva a reflexionar en “el imposible personal” y “el imposible matemático”; o, dicho de otra manera, la diferencia entre el “yo no puedo” y el “no se puede”. Casi todos los grupos afirmaban que no puede existir 5 personas en la reunión y que se cumplan las dos características de la situación, pero ninguno hizo una demostración de tal imposibilidad. Su afirmación era consecuencia de la imposibilidad de los integrantes del grupo de mostrar un caso en el que se evidencien las dos características. Es interesante el paso a la demostración de la imposibilidad para $n$ = 5, pues

requiere hacer un "análisis general en un caso específico"; es decir, demostrar que es lógicamente imposible que se cumplan las dos características de la situación, cuando se tienen 5 personas en la reunión. Es un atractivo ejercicio para el lector.

4. La actividad G4 también llevó a respuestas de imposibilidad de que pudiera haber 2011 personas en la reunión, basadas en una generalización – que podríamos llamar intuitiva – de la imposibilidad de que haya 5 personas en la reunión.
5. La actividad G5 fue parcialmente cumplida, pues algunos grupos llegaron a formular "teoremas" como
   a. "En la reunión puede haber un número de personas que sea múltiplo de 4"
   b. "En la reunión puede haber un número par de personas"
   c. "En la reunión no puede haber un número impar de personas"

   Es claro que el haber trabajado casos particulares los llevó a conjeturas que las consideraron ciertas y por eso las propusieron como teoremas. Fueron muy pocos grupos los que ensayaron una demostración adecuada.

## Generalización

A continuación resumo una ingeniosa demostración de Jorge Tipe, de la imposibilidad de que el número $n$ de personas en la reunión sea impar.

*Demostración*

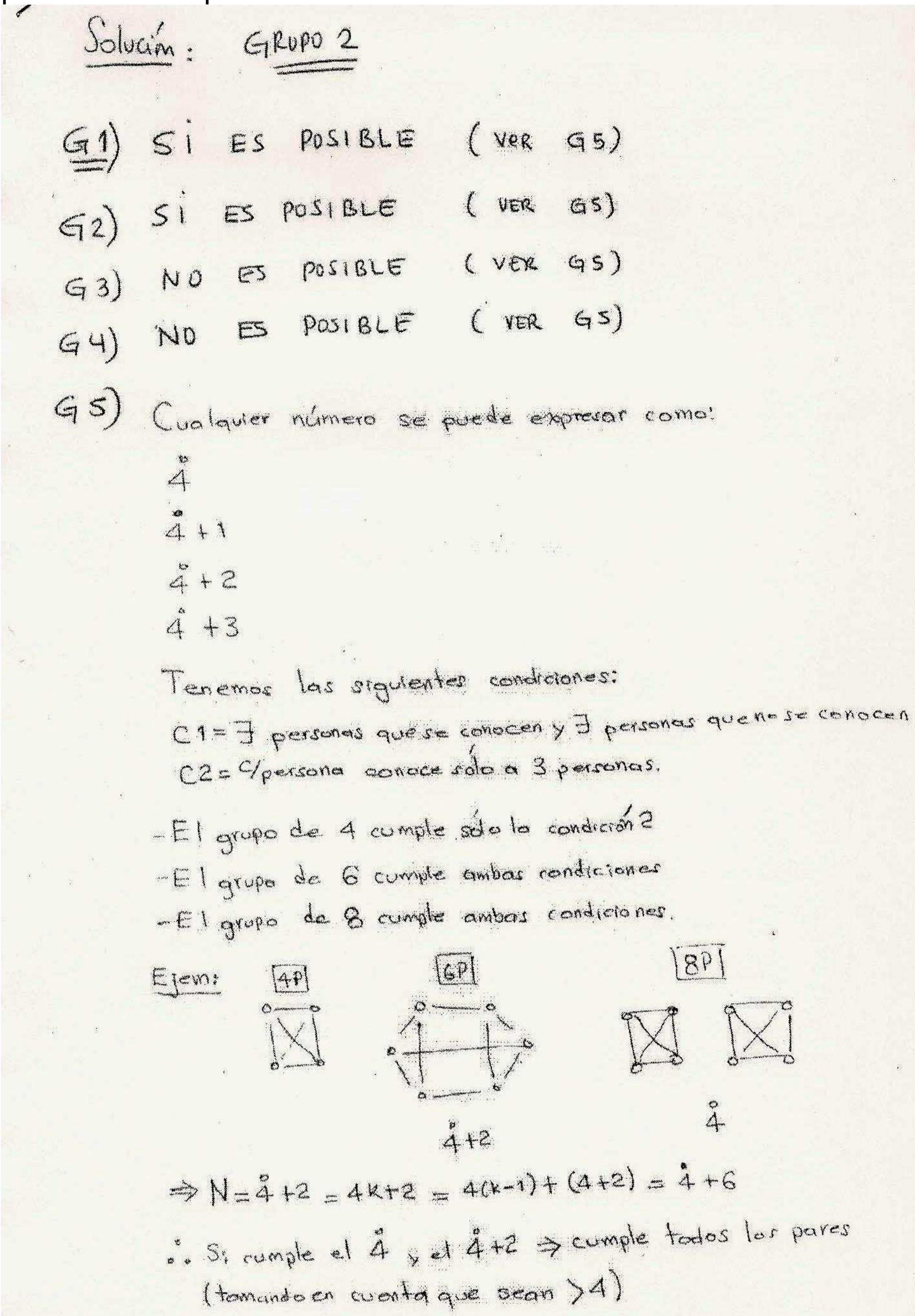
Supongamos que sea posible que en la reunión haya un número impar de personas. Una persona, llamémosla Julia, que no pertenece al conjunto que está en la reunión, escoge dos personas de la reunión; si ellas se conocen, le da un caramelo a cada una; y si no se conocen, no les da caramelo alguno y escoge otra pareja. Hace lo mismo con todas las parejas que se pueden formar con las $n$ personas en la reunión[2]. Cuando Julia termina de encontrarse con todas las parejas – sin repetición – habiendo repartido caramelos en la forma descrita, es claro que **ha repartido un número par de caramelos**, pues en su encuentro con cada pareja reparte 0 ó 2 caramelos. Por otro lado, al final cada persona de la reunión recibió 3 caramelos, pues según la condición establecida, cada una conoce solamente a 3 personas; en consecuencia, la cantidad total de caramelos recibidos es $3n$, y como $n$ es impar, **la cantidad total de caramelos es impar**, lo cual es una contradicción.
En particular, para $n = 5$, tenemos una demostración de la imposibilidad de que en la reunión haya 5 personas, y análogamente para $n = 2011$■

Con esta demostración, y considerando que todo número natural se puede escribir de una de las siguientes formas: como múltiplo de 4; como múltiplo de 4, más 1; como múltiplo de 4, más 2; ó como múltiplo de 4, más 3, (Clases de resto, módulo 4), ya tenemos el análisis para todo valor de $n$, pues los múltiplos de 4 y múltiplos de 4, más 2 son pares y los otros dos casos son de números impares. Los casos de números pares mayores que 4 se resuelven con casos similares al de $n = 8$ (bloques

2 En total, hay $\binom{n}{2}$ parejas diferentes en la reunión.

de 4 no conectados entre sí) o con casos similares al de $n$ = 10 (bloques de 4 y uno de 6, no conectados entre sí).

A continuación transcribo parte de la solución del Grupo 2, que hace este análisis para los casos pares.



Solución: GRUPO 2

G1) SI ES POSIBLE (VER G5)

G2) SI ES POSIBLE (VER G5)

G3) NO ES POSIBLE (VER G5)

G4) NO ES POSIBLE (VER G5)

G5) Cualquier número se puede expresar como:

$\overset{\circ}{4}$

$\overset{\circ}{4}+1$

$\overset{\circ}{4}+2$

$\overset{\circ}{4}+3$

Tenemos las siguientes condiciones:

C1 = ∃ personas que se conocen y ∃ personas que no se conocen

C2 = C/persona conoce sólo a 3 personas.

- El grupo de 4 cumple sólo la condición 2
- El grupo de 6 cumple ambas condiciones
- El grupo de 8 cumple ambas condiciones.

Ejem: 4P 6P 8P

$\overset{\circ}{4}+2$ $\overset{\circ}{4}$

$\Rightarrow N = \overset{\circ}{4}+2 = 4k+2 = 4(k-1)+(4+2) = \overset{\circ}{4}+6$

$\therefore$ Si cumple el $\overset{\circ}{4}$ y el $\overset{\circ}{4}+2$ $\Rightarrow$ cumple todos los pares (tomando en cuenta que sean $>4$)

**Fig. 6** Parte de la solución del Grupo 2

## Comentarios finales

1. El problema lleva de manera natural a usar elementos de teoría de grafos y todo lo descrito puede tomarse como referencia para diseñar una situación didáctica, en el marco de la teoría de situaciones didácticas y de la ingeniería didáctica, para introducir los grafos en los niveles educativos básicos.

2. Como se ha podido observar, se presentan ocasiones interesantes de relacionar lo particular con lo general; esto es, de obtener luces en el análisis de casos particulares para conjeturar generalizaciones y demostrar. Es particularmente ilustrativo examinar los casos $n = 8$ y $n = 40$ y advertir que ambos son posibles con grafos en bloques de 4, no conectados entre sí. Resulta natural la generalización a todo $n$ múltiplo de 4, pero el caso $n = 2010$ lleva a pensar en los números pares que no son múltiplos de 4, siendo $n = 6$ y $n = 10$ los más sencillos. Así, un análisis algebraico (todo número par es múltiplo de 4 ó es múltiplo de 4, más 2; y a partir de 10 esto último es preferible expresarlo como múltiplo de 4, más 6) conduce a la generalización para todos los valores pares de $n$, mayores que 4, usando las estructuras básicas dadas con grafos adecuados para $n = 8$ y para $n = 10$ (Fig. 5 y Fig. 6)

   Por otra parte, para llegar a una conclusión en los casos en que $n$ es impar, es también ilustrativo examinar casos particulares, pero la demostración general no aparece sugerida por los casos particulares, como cuando $n$ es par. Es importante examinar el caso $n = 5$; conjeturar que es imposible; demostrar que es imposible para este caso específico; conjeturar que es imposible para todo $n$ impar; y finalmente, demostrar que es imposible para todo $n$ impar.

   Con el marco teórico que da el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática se pueden usar las experiencias descritas y las reflexiones expuestas para hacer investigaciones tanto a nivel de estudiantes como de profesores. Para este propósito, recomiendo de manera particular leer el siguiente artículo: Font, V. and Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA


Marzo de 2010, Número 21, páginas 173-185
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

# Material educativo digital como recurso didáctico para el aprendizaje del Cálculo Integral y Vectorial

**Viviana A. Costa, Rossana M. Di Domenicantonio, María Cristina Vacchino**

## Resumen

Presentamos un material didáctico digital propuesto para un curso de Cálculo Integral y Vectorial en una y varias variables en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. El material en formato de CD dispone de una breve introducción al Maple, con comandos básicos para el desarrollo de los contenidos de la asignatura, talleres didácticos y actividades de ejercitación, que guían al alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje a partir de la visualización

## Abstract

A digital media is presented which facilitates the teaching of Integral and Vector Calculus (single- and multi-variable) at the College of Engineering of the National University of La Plata. The material, in CD format, provides a brief introduction to Maple, including the basic commands needed to cover the subject content, educational workshops and exercises, each of which guide the student in the process of learning through visualization.

## Resumo

Apresentamos um material didáctico digital proposto para um curso de Cálculo Integral e Vectorial numa e várias variables na Faculdade de Engenharia da Universidade Nacional da La Plata. O material em formato de CD dispõe de uma breve introdução ao Maple, com comandos básicos para o desenvolvimento dos conteúdos da matéria, oficinas didácticas e actividades de ejercitación, que guiam ao aluno no processo de ensino e aprendizagem a partir da visualización.

## Introducción

La práctica habitual de desarrollar el proceso de enseñanza usando como recursos casi exclusivos la tiza y el pizarrón, se está abandonando de manera progresiva. Los avances de la ciencia y la tecnología han puesto a disposición del docente una serie de medios y/o objetos que pueden servir de elementos mediadores para el desarrollo de su actividad cotidiana. Una de las tendencias actuales consiste en la incorporación, cada vez más frecuente, de nuevas tecnologías en la enseñanza que permiten otros modos de aprendizaje. Las nuevas tecnologías permiten introducir imágenes, animaciones y sonidos que provocan generalmente, en los alumnos, un acercamiento a los nuevos temas a estudiar y una motivación de los mismos.

En este contexto, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, un grupo de profesores preocupados por el mejoramiento de la enseñanza en las materias básicas del Área Matemática realizan distintas actividades con el objeto de mejorar el rendimiento académico de los alumnos. En esta facultad, la metodología de enseñanza en las materias básicas de Matemática considera al alumno como constructor de su propio conocimiento y no mero receptor y al docente como guía del aprendizaje. Las clases son participativas, en aulas con computadoras y libros para uso de los alumnos. Este marco es propicio para la implementación de nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje.

Presentamos el material educativo desarrollado e implementado en la cátedra de “Matemática B”, curso de Cálculo Integral y Vectorial en una y varias variables, para alumnos de primer año de las todas las carreras de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI UNLP).

La materia es semestral. Los alumnos se distribuyen según su especialidad en varias comisiones. Cada grupo está a cargo de un Profesor, un Jefe de Trabajos Prácticos y Ayudantes, los que trabajan en forma conjunta en el aula. Los alumnos, como guía para el estudio de la asignatura, disponen de un material teórico-práctico impreso desarrollado por el Profesor Titular de la cátedra[1]. Este material aborda todos los contenidos de la asignatura teniendo en cuenta que no solo importa el conocimiento sino la forma en que éste se presenta y promueve en el alumno la conexión de los nuevos conocimientos con los previos. Para el desarrollo de los contenidos y ejercitación, se proponen actividades adicionales y auto-evaluaciones que le permiten al estudiante reforzar conceptos difíciles de asimilar. Las actividades inducen al alumno a vincular conceptos matemáticos y físicos como también el uso de un software matemático para la implementación de las aplicaciones informáticas. El material impreso constituye un eje central en el desarrollo de las clases teórico-prácticas.

A partir de las aplicaciones en Maple del material impreso, surge la necesidad de implementar un material educativo en formato de CD-ROM que acompañe a las Guías Teórico Prácticas, con el objetivo de innovar en la práctica pedagógica y ofrecerle al alumno un nuevo recurso, que por la naturaleza misma del material, le brindará todo lo que la tecnología entrega: visualización, exploración y motivación.

Maple[2] es el software con el que trabajan los alumnos en las materias básicas de Matemática. Es una herramienta de cálculo, manipulación y visualización matemática, es un programa interactivo diseñado para resolver de forma simbólica, problemas en las áreas de Ciencias e Ingeniería. A diferencia de otros software matemáticos que solo pueden operar con números de punto flotante, Maple puede resolver problemas que involucren definiciones de matemática formal y retornar respuestas como objetos matemáticos.

## 1. Objetivos del material

La principal función con la que fue concebido el material digital es la de ofrecer un entorno para la exploración, la experimentación, la creatividad y favorecer la comprensión y apropiación de los conceptos a partir de la visualización gráfica.

1 http://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0302/
2 http://www.maplesoft.com/

En matemática, según Ferrer, *"la visualización constituye un aspecto importante, es algo natural si se atiende la naturaleza misma de la matemática*". Además según Zimmermann W. y Cunningham S., "*desde la perspectiva de la matemática es inusual la restricción de que las imágenes deben ser manipuladas. La visualización se toma como la habilidad para trazar con lápiz y papel un diagrama apropiado, con ayuda de una calculadora o una computadora. El diagrama sirve para representar un concepto matemático o un problema y ayuda a comprender el concepto o a resolver el problema. La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento; visualizar un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas. Esto pone de manifiesto la importancia de la visualización dentro del ámbito del proceso del aprendizaje de las matemáticas*".

El material, también pretende motivar el uso de un software matemático, en este caso el Maple, lo cual contribuirá a completar el perfil profesional de un futuro ingeniero. Este software permite una participación activa y creativa por parte del estudiante dado que con esta herramienta podrá conjeturar, experimentar, y extraer conclusiones. Con mínimos conocimientos informáticos el estudiante tiene toda una gama de posibilidades (simulación estadística, programación de algoritmos numéricos, análisis avanzado de problemas de investigación operativa y de optimización). Asimismo permite al profesor explicar conceptos que, de otra forma, quedarían en un nivel de abstracción difícil de asimilar por muchos estudiantes en un tiempo breve, como volúmenes generados por regiones planas al rotar alrededor de un eje, representaciones de superficies en tres dimensiones, conceptos y resultados teóricos susceptibles de ser comprobados empíricamente.

Otro objetivo importante es el de promover el trabajo grupal. El alumno comparte y socializa el conocimiento, y así lo enriquece. El aprendizaje colaborativo tiene como estrategia disminuir la dependencia de los estudiantes de sus profesores y aumentar la responsabilidad de ellos por su propio aprendizaje.

*Objetivos a destacar*

- Ofrecer un entorno para la exploración, la experimentación y la visualización.
- Motivar el uso de un software matemático.
- Favorecer la comprensión y la apropiación de los conceptos a partir de la visualización.
- Obtener conclusiones a partir de las gráficas obtenidas.
- Promover el trabajo grupal.
- Prescindir de cálculos tediosos utilizando el software.
- Reforzar puntos conceptuales que resulten difíciles de asimilar.
- Vincular conceptos comunes de la matemática y la física.
- Complementar las actividades de la clase.
- Servir como medio para la autoevaluación.

## 2. Elaboración del material editado

### Desarrollo del material

El proceso de elaboración de material didáctico, según Area Moreira, en general, requiere el desarrollo de cinco grandes tareas o fases que pueden representarse del siguiente modo:

- ✓ Diseño o planificación del material
- ✓ Desarrollo de los componentes y dimensiones
- ✓ Experimentación del material en contextos reales
- ✓ Revisión y reelaboración
- ✓ Producción y difusión

En nuestro caso y de acuerdo a estas fases, el material fue planificado por los autores, que son profesores de la asignatura, conocedores de los contendidos de la materia y quienes mejor conocen las necesidades y dificultades de los alumnos, alcanzada a partir de la amplia experiencia docente en el aula. El diseño y digitalización del material fue realizado por un técnico especialista en el tema que trasladó la propuesta de los profesores al lenguaje digital.

El material elaborado, se compone de texto hipermedial, imágenes y archivos de extensión mws (correspondientes a archivos ejecutables de Maple). A su estructura se accede a partir de una portada con formato de navegador. Se almacena en soporte de CD-ROM y además está disponible en la página web de la Facultad de Ingeniería[3].

El material educativo es editado desde el año 2007 por la Editorial de la Universidad Nacional de La Plata, y se distribuye a los alumnos a través del Centro de Estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la UNLP.

### Tipo de material

Los materiales multimedia educativos se pueden clasificar según su estructura, sus contenidos, sus destinatarios, según su concepción sobre el aprendizaje, u otros. Encuadramos el material editado como un “material educativo formativo y multimedial” dado que responde a un plan determinado para enseñar y está compuesto por representaciones de contenidos y situaciones de aprendizaje en múltiples formatos como ser texto, gráficas y animaciones accesibles para el usuario.

El material fue concebido para ser usado como material didáctico en cursos presenciales de matemática para alumnos del primer año de las distintas carreras de Ingeniería. Tiene el propósito de ser motivador del aprendizaje dado que incluye elementos que captan la atención de los alumnos y mantienen su interés. El uso del material en el aula, favorece los procesos de enseñanza y aprendizaje, grupales e individuales.

[3] http://www.ing.unlp.edu.ar/fismat/imapec/Soft/matb_maple/Matematica_B.html

## Estructura y contenido del CD-ROM

El CD-ROM dispone de una portada (Figura 1) a partir de la cual, a través de una barra de herramientas se accede a un Tutorial de Maple, con instrucciones básicas del software, a Talleres y Actividades (Tabla 1). Estos últimos están secuenciados por temas de acuerdo al cronograma de la materia. Los contenidos de los Talleres y Actividades fueron desarrollados según conocimientos previos de los alumnos propiciando un aprendizaje activo.

| Talleres | Actividades |
|---|---|
| • Sumas de Riemann<br>• Sólido de revolución<br>• Triedro de Frenet<br>• Campos vectoriales<br>• Rueda exploradora<br>• Campos conservativos y circulación | • Integración en una variable<br>• Ecuaciones diferenciales<br>• Integrales Múltiples<br>• Integral de Línea<br>• Superficies y curvas |

Tabla 1

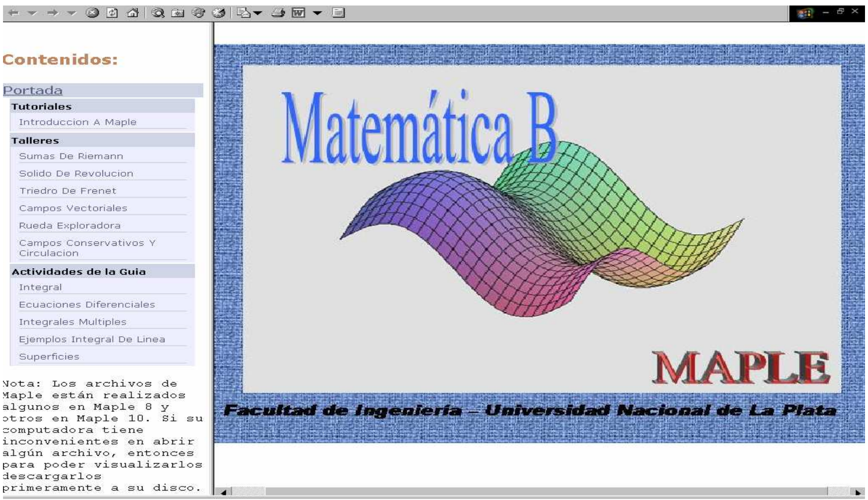



Fig. 1 Portada del CD-ROM

## 3. Talleres

La confección e incorporación de los Talleres en el material educativo, se debe a que constituyen una importante herramienta pedagógica innovadora que ha sido implementada y estudiada por diversos autores, entre ellos, Gloria Mirebant Perozo, quien define: "*Un taller pedagógico es una reunión de trabajo donde se unen los participantes en pequeños grupos o equipos para hacer aprendizajes prácticos según los objetivos que se proponen y el tipo de asignatura que los organice. Puede desarrollarse en un local, pero también al aire libre*". En el lenguaje corriente, taller es el lugar donde se hace, se construye o se repara algo. Así, se habla de taller de mecánica, taller de carpintería, taller de reparación de electrodomésticos, u otros.

Desde hace algunos años la práctica ha perfeccionado el concepto de taller extendiéndolo a la educación, y la idea de ser "un lugar donde varias personas trabajan cooperativamente para hacer o reparar algo" pasa a ser "lugar donde se aprende haciendo junto a otros", esto dio motivo a la realización de experiencias innovadoras en la búsqueda de métodos activos en la enseñanza.

Por otra parte se considera que el taller es una importante alternativa. Mediante la realización de los Talleres, los docentes y los alumnos desafían en conjunto problemas específicos buscando también que el aprender a ser, el aprender a aprender y el aprender a hacer se den de manera integrada, como corresponde a una autentica educación o formación integral. Mediante la realización de los Talleres los alumnos en un proceso gradual o por aproximaciones, van alcanzando la realidad y descubriendo los problemas que en ella se encuentran a través de la acción-reflexión inmediata o acción diferida.

Los Talleres del CD-ROM contienen definiciones, ejemplos resueltos y ejercitación, que motivan al alumno a reflexionar y afianzar conceptos. Fueron concebidos para ser realizados en forma grupal por los alumnos en el aula y guiados por los profesores. Esta forma de trabajo en el aula genera en los alumnos una forma distinta de interacción (Figura 2).

El Taller de Sumas de Riemann tiene como objetivo final la comprensión de la definición de integral definida como el límite de una sucesión de Sumas de Riemann. A través de diversas actividades se induce a los alumnos a formalizar el concepto. En el Taller de sólidos de revolución el alumno visualiza los sólidos que se generan y esto le facilita el planteo de las integrales que calculan su volumen (Figura 3). En el Taller de campos vectoriales el alumno apoyado en la visualización gráfica de campos vectoriales en dos y tres dimensiones, será capaz de intuir y comprender conceptos físicos del cálculo vectorial, como cálculo e interpretación de rotor, divergencia y líneas de flujo.

En este taller incluimos ejemplos de campos vectoriales de uso y de estudio frecuente en Física, como son el campo gravitacional, eléctrico y magnético (Figura 4). Completando el estudio del cálculo vectorial, el Taller de Campos Conservativos y Circulación permite analizar semi-cuantitativamente el valor de la circulación sobre una curva cerrada, observando cual es el ángulo formado entre el campo y el vector tangente al desplazamiento. Finalmente en el Taller de la rueda exploradora, el alumno visualiza en una gráfica animada los vectores que forman el triedro de Frenet y como éstos cambian sobre la trayectoria.

Fig. 2: Alumnos y docentes trabajando con el Taller de Sumas de Riemann

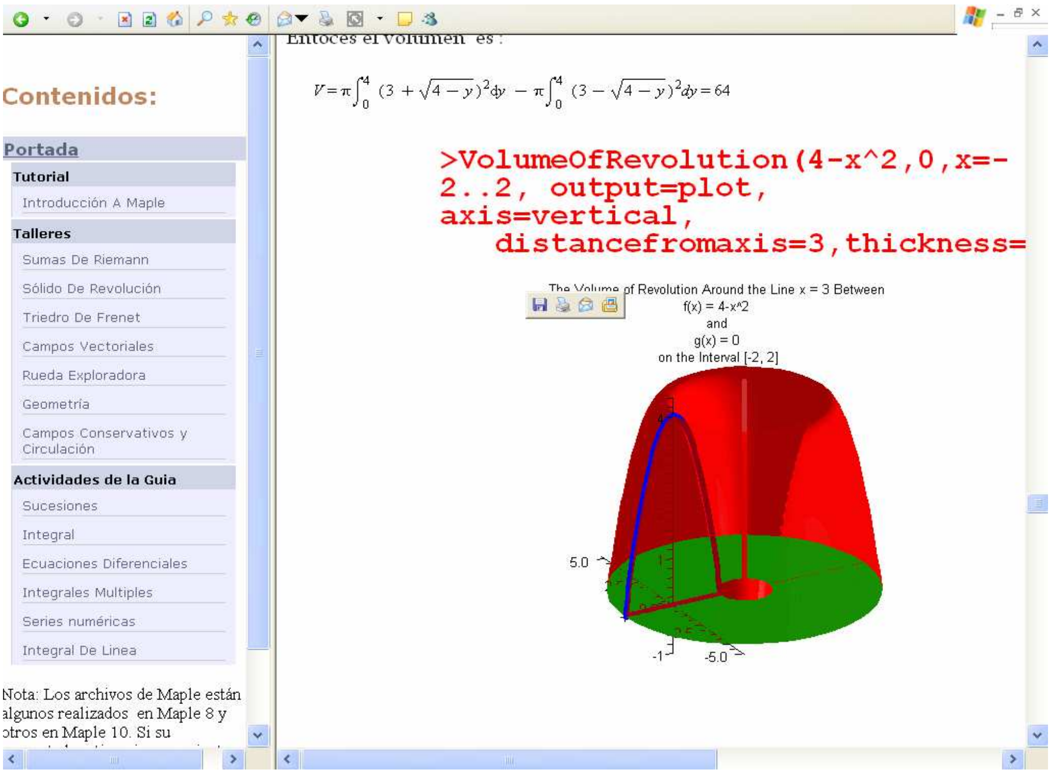



Fig. 3: Taller de Sólidos de Revolución.

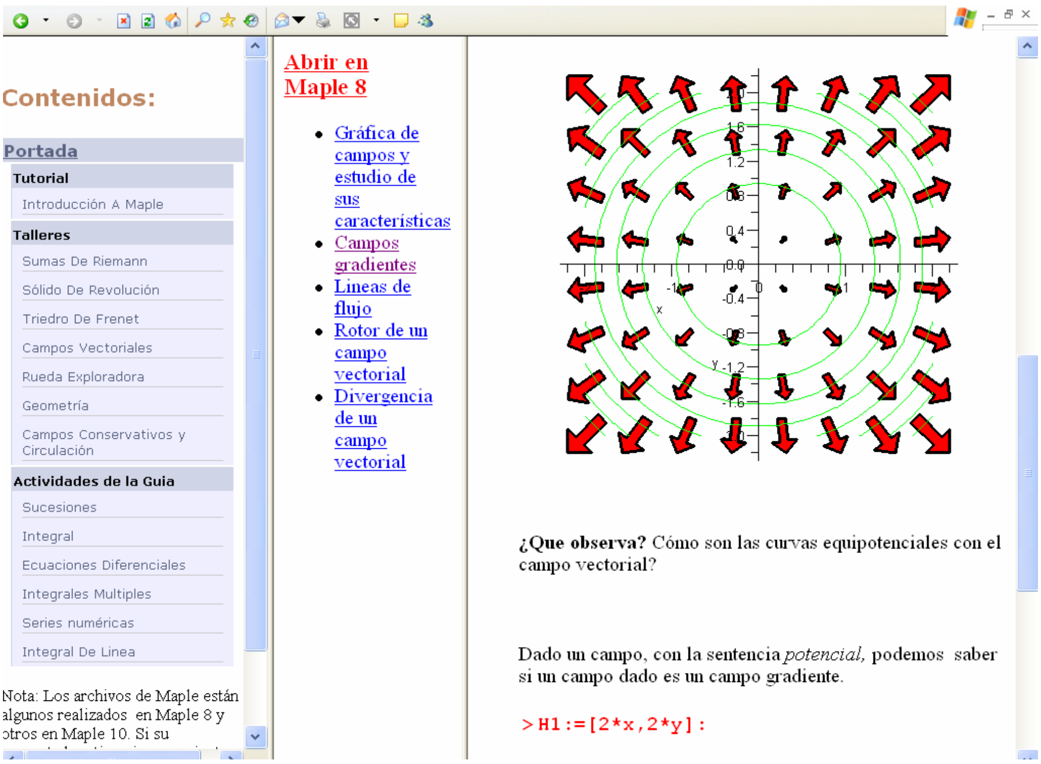



Fig. 4: Taller de Campos Vectoriales

## Ejemplo de un Taller

Detallamos uno de los Talleres, "*Cálculo aproximado del área bajo una curva: Sumas de Riemann. Acotación del error*".

Es el primer taller que realizan los alumnos en el curso de Matemática B, usando Maple, luego de haber trabajado con propuestas que muestran la importancia del cálculo del área bajo la curva en distintas áreas del conocimiento.

Tiene como objetivo final la deducción de la definición de integral definida como el límite de una sucesión de Sumas de Riemann, a través de diversas actividades que inducen a los alumnos a formalizar el concepto. Además mediante la visualización de las distintas aproximaciones del "área bajo la curva" se espera que puedan comprender el proceso e introducir la idea del cálculo exacto.

En la actividad 1 del Taller se grafica función $f(x)=x^2$ para $x$ en el intervalo [0,4], y se definen distintas sumas: a izquierda ($S_1$), a derecha ($S_2$), y la regla del punto medio ($S_3$). Se indican los comandos de Maple (Tabla 2) para calcular las sumas en forma simbólica y numérica que aproximan la integral y luego los comandos que permiten visualizar estas aproximaciones (Figura 5). Como ejercicio se les pide comparar los valores de las diferentes sumas,

$$S1 = \sum_{i=1}^{4} (i-1)^2 = 14, \quad S2 = \sum_{i=1}^{4} i^2 = 30, \quad S3 = \sum_{i=0}^{3} \left(i + \frac{1}{2}\right)^2 = 21$$

hacer el análisis de los gráficos y se les hacen preguntas, para ir construyendo las ideas de aproximación y acotación del error cometido al aproximar.

A partir de los gráficos, los alumnos pueden verificar que para esta función $S_1 \leq S_3 \leq S_2$ y que la cota del error es $E = S_2 - S_1$.

| **Código de Maple para la actividad 1** |
|---|
| **> with(student):** |
| Cálculo, evaluación y gráfico de la suma a izquierda. |
| **> S1:=leftsum(f(x), x=0..4, 4); evalf(S1);** |
| **>leftbox(f(x),x=0..4,'shading'=red,color= black);** |
| Cálculo, evaluación y gráfico de la suma a derecha. |
| **> S2:=rightsum(f(x),x=0..4,4); evalf(S2);** |
| **> rightbox(f(x), x=0..4, 'shading'=blue,color= black);** |
| Cálculo, evaluación y gráfico de la suma aplicando la regla del punto medio. |
| **> S3:=middlesum(f(x),x=0..4,4); evalf(S3);** |
| **> middlebox(f(x),x=0..4,,color= black);** |

Tabla 2

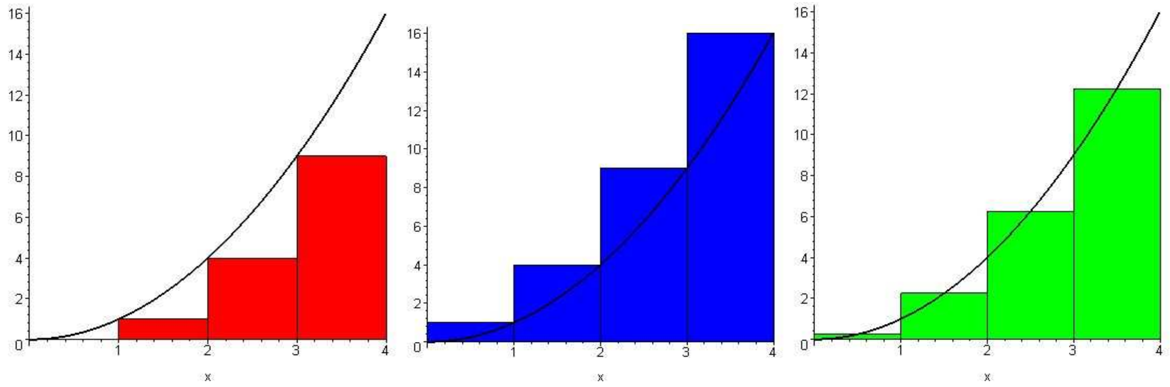


Fig. 5: Sumas a izquierda, a derecha y regla del punto medio.

En la actividad 2 se diseña un procedimiento repetitivo que permite encontrar el valor numérico de las sumas asociadas a distintas particiones del intervalo. Se construye una tabla con los datos obtenidos y se analizan, para responder la pregunta siguiente: ¿cuál es el valor que aproxima al área bajo la curva? A continuación se diseña un procedimiento para realizar una tabla que hará más simple el análisis de los datos.

**Código de Maple para la actividad 2**

```
> for i from 1 to 5 do  j:=1000*i :
  S1[i]:=evalf(leftsum(f(x), x=0..4, j)):
  S2[i]:=evalf(rightsum(f(x),x=0..4,j)):
S3[i]:=evalf(middlesum(f(x), x=0..4,j)):
  E[i]:=S2[i] -S1[i]:
  fila[i]:=[j,S1[i],S2[i],S3[i],E[i]]:end do:
>tabla:=array([fila[1],fila[2],fila[3],fila[4],fila[5]]);
```

Tabla 3

$$tabla := \begin{bmatrix} 1000 & 21.30134400 & 21.36534400 & 21.33332800 & 0.06400000 \\ 2000 & 21.31733600 & 21.34933600 & 21.33333200 & 0.03200000 \\ 3000 & 21.32266785 & 21.34400118 & 21.33333274 & 0.02133333 \\ 4000 & 21.32533400 & 21.34133400 & 21.33333300 & 0.01600000 \\ 5000 & 21.32693376 & 21.33973376 & 21.33333312 & 0.01280000 \end{bmatrix}$$

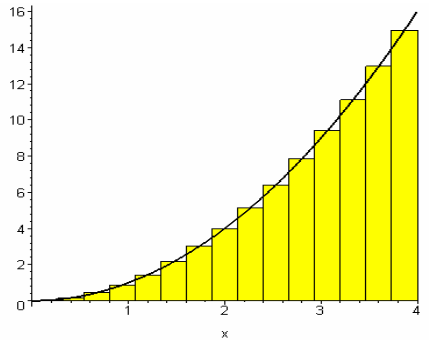
Tabla 4

Los alumnos pueden observar en la tabla 4 que a medida que va creciendo el número de subdivisiones del intervalo, la cota del error va disminuyendo y los valores de las distintas sumas se aproximan al mismo valor.

En la actividad 3 se propone usar una sentencia de Maple para animar con un número grande de subdivisiones del intervalo (Tabla 5), la visualización de la sucesión de las áreas de los rectángulos, la cual se aproxima al área bajo la curva y ayuda a los alumnos a formalizar el concepto de integral definida (Figura 6).

| **Código de Maple para la actividad 3** |
|---|
| >restart; |
| >with(Student[Calculus1]): |
| >ApproximateInt(x^2,x=0..4,method=midpoint, output=animation); |

Tabla 5



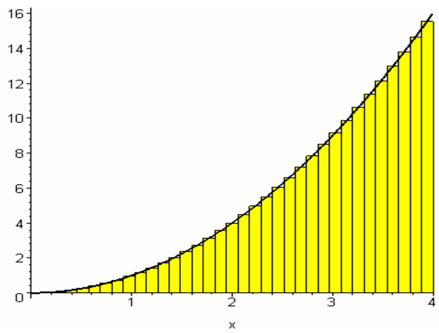




Fig. 6: Graficas obtenidas en la actividad 3

En la actividad 4 se les propone repetir las actividades 1 y 2 para otras dos funciones, una que es monótona decreciente y otra que no. El objetivo es que los alumnos relacionen y comparen estos resultados con los obtenidos previamente, haciéndoles notar que la relación de desigualdad entre las sumas $S_1$, $S_2$ y $S_3$ en este caso es otra.

La realización de este taller pretende disparar el estudio de otros métodos numéricos para el cálculo aproximado de integrales definidas usando sumas de áreas de otras figuras como por ejemplo el Método de los Trapecios y el error cometido en dicha aproximación.

## 4. Actividades

Las Actividades fueron concebidas para que el alumno disponga de las instrucciones en Maple necesarias para resolver y/o verificar ejercicios de cálculo propuestos en las Guías como son: cálculo de integrales en una y varias variables, integrales de línea, integrales de superficie, integrales impropias y resolución de ecuaciones diferenciales, como así también las sentencias para la grafica de superficies y curvas.

### Ejemplo de una de las Actividades

Una de las actividades del CD-ROM corresponde al tema: “Ecuaciones Diferenciales”. Esta actividad tiene por objetivo que el alumno visualice campos de direcciones, encuentre la solución general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, y dadas distintas condiciones iniciales encuentre y grafique las soluciones halladas.

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial del tipo *y'* = *f(x,y)*. Esta ecuación muestra que la pendiente de la tangente a la curva solución en el punto (x,y) es *f(x,y)*. Si trazamos segmentos rectilíneos cortos con pendiente *f(x,y)* en varios puntos *(x,y)*, a ese conjunto de segmentos se le llama “campo direccional” o “campo de pendientes”. Cada segmento rectilíneo tiene la misma pendiente que la curva solución en *(x,y)* y, por tanto, es tangente a la curva en ese punto. Recordemos que en un entorno de *(x,y)*, si existe la derivada, la tangente aproxima bien a la curva. Cuantos más segmentos trace, más clara se vuelven las imágenes de las curvas solución.

Es importante notar que realizar con papel y lápiz el campo de direcciones de una ecuación diferencial es un proceso tedioso, de ahí la importancia de utilizar en este caso un software matemático. Usando Maple los alumnos pueden visualizar rápidamente el campo de direcciones para una ecuación dada y varias curvas de la familia de soluciones halladas induciendo la noción física de líneas de flujo (Figura 7).

Para resolver la ecuación, y hallar la solución general se usa el comando dsolve:

```
solp:=dsolve({D(y)(x) = x+y(x)}, y(x));
solp := {y(x) = -x-1+exp(x)*_C1}
```

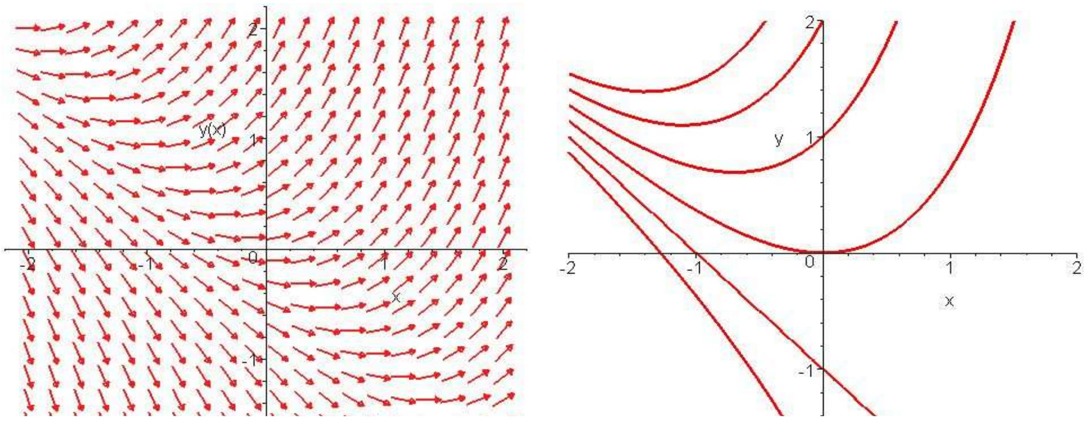



Fig. 7: Campo de direcciones y familia de soluciones de la ecuación *y'(x)=x+y*

## 5. Opinión de los alumnos sobre el material

Se consultó mediante una encuesta a los alumnos de un curso en el que se motivó el uso del material. Se les preguntó sobre la utilización previa del software, la realización de las Actividades y Talleres del CD-ROM y la experiencia de trabajo con los mismos. La encuesta constaba básicamente de las siguientes preguntas:

| Preguntas | Resultados |
|---|---|
| ¿Utilizó Maple con anterioridad a esta asignatura? | SI el 52% |
| ¿Realizó los talleres? | SI el 91% |
| Sobre el total de alumnos que respondieron SI en la pregunta anterior: | |
| ¿Le agradó realizar las actividades del CD-ROM? | SI el 77% |
| ¿Cómo calificaría el material presentado? | Muy bueno: 32 %<br>Bueno: 65 %<br>Regular: 3 %<br>Malo: 0 % |
| ¿Usó los Talleres para verificar resultados de ejercicios? | SI el 51% |
| ¿Los Talleres lo ayudaron a comprender y visualizar mejor los temas? | SI el 90% |

## 6. Conclusiones y tareas pendientes

Creemos que es necesario adecuar la enseñanza de la matemática a los nuevos tiempos a través de la utilización de materiales digitales en las propuestas educativas, siempre que el recurso didáctico tenga el fin de ser un medio para mejorar el aprendizaje. Para ello, hay que encontrar un adecuado equilibrio entre el manejo conceptual de los temas, el uso de nuevas tecnologías y la metodología de enseñanza. Según G. Kaplún, "*un material educativo no es solamente un objeto (texto, multimedia, audio visual u otro) que proporciona información sino que, en un contexto determinado, facilita o apoya el desarrollo de una experiencia de aprendizaje*".

Trabajar en el aula con materiales distintos a los tradicionales, motiva el interés de los alumnos y estimula la actividad intelectual, dado que el proceso por el cual las personas construyen representaciones mentales es beneficiado si se le presentan imágenes que puedan interpretar, manipular, experimentar y extraer conclusiones de las mismas. Además, la incorporación de tecnología en el aula, favorece la participación activa de los estudiantes, la reflexión crítica, el trabajo grupal, la interacción con los docentes, en definitiva, redunda en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Queda aún pendiente definir indicadores que permitan evaluar y validar el material presentado por parte de alumnos de otros cursos, como de otros profesores de la cátedra. También hacer una evaluación cuantitativa del mejoramiento del proceso de aprendizaje a partir del uso del medio presentado.

## Bibliografía

Acosta P., Vacchino M.C., Gómez V (2007). *Guías teórico-prácticas de Matemática, CEILP.*

Area Moreira M. (2009): *Manual electrónico. Introducción a la Tecnología Educativa*. Universidad de La Laguna.

Barbera E., Badía A. (2005)*.Hacia el Aula Virtual: actividades de enseñanza y aprendizaje en la Red*. Revista Iberoamericana de Educación. Publicaciones. OEI. 36/9.

Bou Bouzá G. (1997).*El guión multimedia*. Editorial Grupo Anaya. Madrid. España.

Cabero J. (2001).*Tecnología educativa, Diseño y utilización de medios en la enseñanza*. Ed. Paidos.

Carrión Miranda V. (1999) . *Álgebra de funciones mediante el proceso de visualización*, Depto. de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

Costa V.A. , Di Domenicantonio R.M. (2006).*Visualización de campos vectoriales usando Maple 8*. Experiencias Docentes en Ingeniería. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina. Volumen I, 357-364.

Ferrer D. (2007). *Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas*. Revista Iberoamericana de Educación, n.º 42/4.

Kaplún G. (2004). *Contenidos, itinerarios y juegos. Tres ejes para el análisis y la producción de materiales educativos*. Revista Nodos. La Plata, Universidad Nacional de la Plata. n. 3. También en Comunicação & Educação. São Paulo, USP. n. 27.

Marques Graells P. (1991) *Ficha de evaluación y clasificación de software educativo.* Novática, n 90, Vol XVII, p. 29-32.

Zimmermann W., Cunninham S. (1991*). Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, citado por CARRIÓN MIRANDA, Vicente (1999): Álgebra de funciones mediante el proceso de visualización, Dpto. de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

**Viviana A. Costa**. Licenciada en Matemática. Magíster en Simulación Numérica y Control de la Universidad de Buenos Aires. Líneas de Investigación: “Análisis y control de dinámicas no lineales con aplicaciones en algunos problemas de ingeniería” y “Nuevas tecnologías, competencias profesionales y educación científica. Estrategias didácticas para su articulación”. Coordinadora de la Unidad de Investigación y Desarrollo IMaPEC, “Investigación en metodologías alternativas para la enseñanza de las ciencias”. Facultad de Ingeniería, UNLP. Profesor Adjunto Ordinario. **vacosta@ing.unlp.edu.ar**.

**Rossana M Di Domenicantonio** Calculista Científico y alumna del Magíster en Nuevas tecnologías Aplicadas a Educación, UNLP. Líneas de investigación: “Nuevas tecnologías, competencias profesionales y educación científica. Estrategias didácticas para su articulación”. Integrante de la UID Imapec. Facultad de Ingeniería, UNLP. Jefe de Trabajos Prácticos Ordinario. **rossanadido@ing.unlp.edu.ar**

**Vacchino, María Cristina** Licenciada en Matemática. Profesora en Filosofía y Pedagogía. Especialista en Tecnología Informática Aplicada a la Educación. Líneas de investigación: “Optimización No-Lineal” y “Las innovaciones en la enseñanza de las Ciencias Básicas en las carreras de Ingeniería: impacto en la práctica educativa en los primeros años”. Integrante de la UID: Grupo de trabajo interdisciplinario para el desarrollo de innovaciones educativas

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 187-195
SSN: 1815-0640

# Las fracciones y el Ojo de Horus

Javier Fraile Martín

## Resumen

Uno de los grandes retos que tiene la enseñanza de las matemáticas es conseguir que los alumnos adquieran instrumentos y conceptos que les haga capaces de enfrentarse a la resolución de problemas. En este artículo se presenta una actividad pensada para alumnos de 7º a 9º año, 11 a 13 años, y para la formación inicial y permanente de profesorado.

## Abstract

One of the greatest challenges the mathematics education has is to achieve that the students acquire tools and concepts which will enable them to deal with the resolution of mathematical problems. The aim of this article is to offer an activity thought for 7th and 9th grade pupils, who are in the age of 11 and 13, in addition to providing initial and permanent formation to the professorship.

## Resumo

Um dos grandes reptos que tem o ensino das matemáticas é conseguir que os alunos adquiram instrumentos e conceitos que lhes faça capazes de se enfrentar à resolução de problemas. Neste artigo apresenta-se uma actividade pensada para alunos de 7º a 9º ano, 11 a 13 anos, e para a formação inicial e permanente de profesorado.

## Introducción

Si nos remitimos a los resultados de las evaluaciones internacionales y nacionales de las competencias matemáticas (Proyectos PISA y TIMMS, por ejemplo) observamos la paradoja de que muchos alumnos demuestran buenos resultados conceptuales y algorítmicos pero son incapaces de aplicarlos a la resolución de problemas.

El gráfico de la Fig. 1 pertenece a la evaluación del sistema educativo español de 2007 elaborada por el Ministerio de Educación y publicada en 2009. En ella se observa que los ítems “teóricos” y “mecánicos” obtienen resultados por encima del nivel referencial de 250 puntos mientras que la resolución de problemas presenta un resultado de 18 puntos por debajo del nivel referencial.

Es preciso subrayar que la tipología de capacidades que utiliza ésta y otras evaluaciones es confusa porque pone en el mismo apartado los procedimientos y las estrategias y ello exige una primera reflexión.

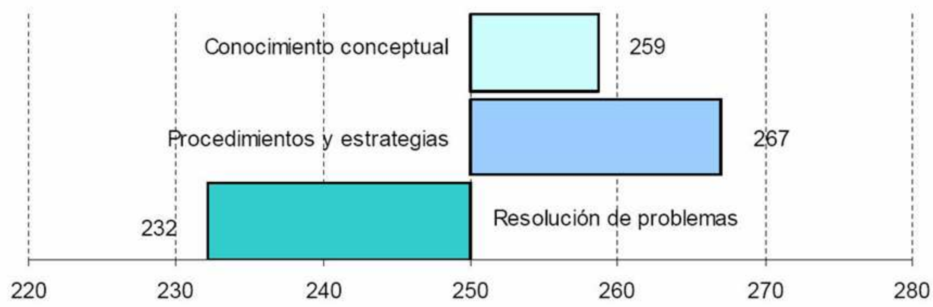



Fig.1 Resultados en Capacidades Matemáticas de los alumnos de 6º de Primaria (11-12 años) en España. (Instituto de Evaluación, 2009).

Existen rutinas matemáticas, técnicas, procedimientos, algoritmos que pueden aprenderse descontextualizados y por lo tanto utilizarse de forma mecánica. Sin embargo, las estrategias, tal como las entendemos en la resolución de problemas, son un conjunto de procedimientos que el sujeto pone en marcha para conseguir un objetivo. La estrategia va más allá de la utilización mecánica de instrumentos: involucra la selección de aquellos con un alto grado de racionalidad para conseguir el fin perseguido y exige una planificación o una “hoja de ruta” que dirija los recursos intelectuales disponibles. Además, está cargada de subjetividad porque depende de la implicación personal en el objetivo, del conocimiento del contexto, de los recursos procedimentales de que se dispone y del conocimiento que se tiene de la relación entre conceptos y procedimientos. La carencia de esta competencia es, precisamente, la que provoca el bajo rendimiento de nuestros alumnos en la resolución de problemas.

En resumen, cuando se habla conjuntamente de “procedimientos y estrategias” al margen de la resolución de problemas, se están refiriendo a las técnicas y rutinas que se activan de forma memorística o mecánica.

De una forma u otra, parece que se mantiene la creencia de que la educación matemática consiste en un proceso de instrucción y aplicación. Se enseñan rutinas, definiciones y fórmulas, los alumnos las memorizan, y de forma más o menos inmediata, con más o menos repeticiones, serán capaces de resolver problemas.

Podríamos pensar que la enseñanza actual no es así, pero bajo eufemismos como “problemas de la vida real” todavía encontramos en los libros de texto enunciados como éste: “*Si* 2 *obreros emplean* 4 *horas en hacer un foso, ¿cuánto tiempo emplearían* 60 *obreros*?”. El alumno sabe que para resolver el problema ha de emplear y repetir el algoritmo que se ha explicado unos renglones antes del enunciado. Los números son evidentes, sólo hay que decidir si es un caso de proporcionalidad directa o inversa… pero ¿y el sentido del problema? La sintaxis del enunciado es intachable, pero ¿y la semántica? ¿Alguien sospecha que recurrir a 60 obreros para cavar un foso, que 2 obreros han cavado en 4 horas, supone un acto racional? Si un alumno realmente imaginara la situación debería contestar que los 60 obreros no caben en el lugar de los hechos y además supone un peligro para su integridad física trabajar con picos y palas en tan poco espacio.

Se ha denunciado hasta la saciedad que los problemas de enunciado verbal, aunque traten de emular contextos reales, son estereotipos escolares en los que el alumno sólo ha de practicar el procedimiento que se acaba de enseñar (Nesher, 1980). En muy pocos casos se exige que el alumno matematice la realidad y elabore modelos matemáticos para poder aplicar los conocimientos e instrumentos propios de las matemáticas.

Actualmente, muchos sistema educativos están adoptando el enfoque de orientar la educación a la adquisición de competencias básicas (OCDE, 2006). Como todos los procesos de cambio, está suscitando controversias en el mundo educativo, pero ciertamente supone un cambio sustancial en la forma de entender la enseñanza.

Según este enfoque, y a diferencia de anteriores concepciones educativas, el objetivo no es conseguir la adquisición de contenidos sino utilizar los contenidos para conseguir el desarrollo de las competencias básicas. Lo fundamental es que, ante una situación contextualizada o no, el alumno ha de saber enfrentarse a ella con las herramientas matemáticas que posee. No se trata de evaluar si sabe resolver ecuaciones, se trata de evaluar si sabe usar las ecuaciones para resolver problemas (Sol, Jiménez y Rosich. 2007)

Desde esta perspectiva, las competencias que deben desarrollarse están en una línea muy similar a los planteamientos del NCTM (2000): Pensamiento y razonamiento, argumentación, comunicación, conexiones, construcción de modelos, representación….

## Propuesta de una tarea ligada a la historia de las matemáticas

La actividad que se describe a continuación está destinada a trabajar aspectos de competencia relacionados con las matemáticas:

a) Descubrir regularidades en series numéricas y geométricas.
b) Establecer conexiones entre diferentes contenidos matemáticos y entre contenidos de diversas áreas del conocimiento.
c) Analizar resultados y proponer soluciones teóricas.
d) Utilizar instrumentos tecnológicos de apoyo para evitar tareas rutinarias.
e) Elaborar leyes generales para modelos obtenidos por inducción.

El objeto de estudio son las fracciones unitarias utilizas en el antiguo Egipto y que en su forma más básica están contenidas en el Ojo de Horus o Udyat, uno de los amuletos más populares de Egipto porque ofrece protección y representa la consecución de la "totalidad" (Fig.2)

Fig.2: Amuleto del Udyat

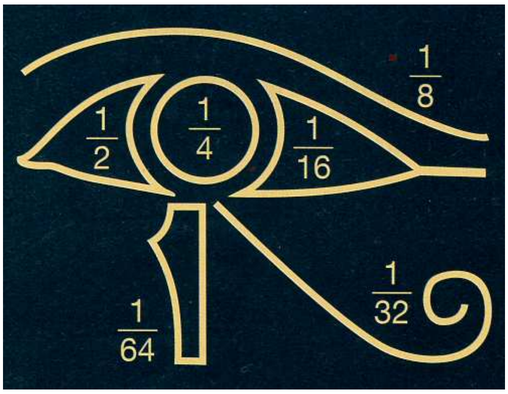



Fig.3: Fracciones unitarias del Ojo de Horus

Las fracciones que utilizaban los egipcios eran siempre unitarias, es decir, el numerador de todas ellas era 1. Las diversas partes que forman el Ojo de Horus (Fig.3) se utilizaban como sistema de numeración fraccionario en particiones agrarias y de capacidad de cereales. La unidad de capacidad para medir el trigo y la cebado era el Herat que equivalía a unos 4.8 litros.

La sucesión de fracciones del Ojo de Horus tiene una ventaja práctica a la hora de hacer particiones ya que cada fracción es la mitad de la anterior.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64}$$

***Actividad 1a:***

Recorta un cuadrado a partir de una hoja de DIN A-4 (Fig. 4)

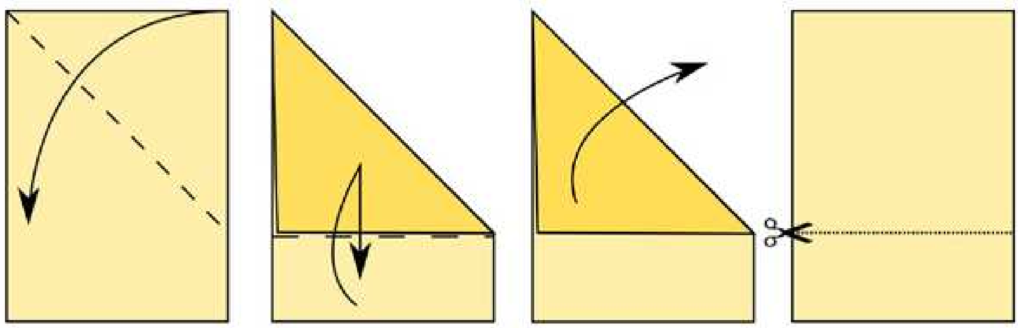


Fig. 4

Pliega el cuadrado por la mitad como indica la figura 5 y repite los pliegues en mitades hasta lograr la fracción 1/64

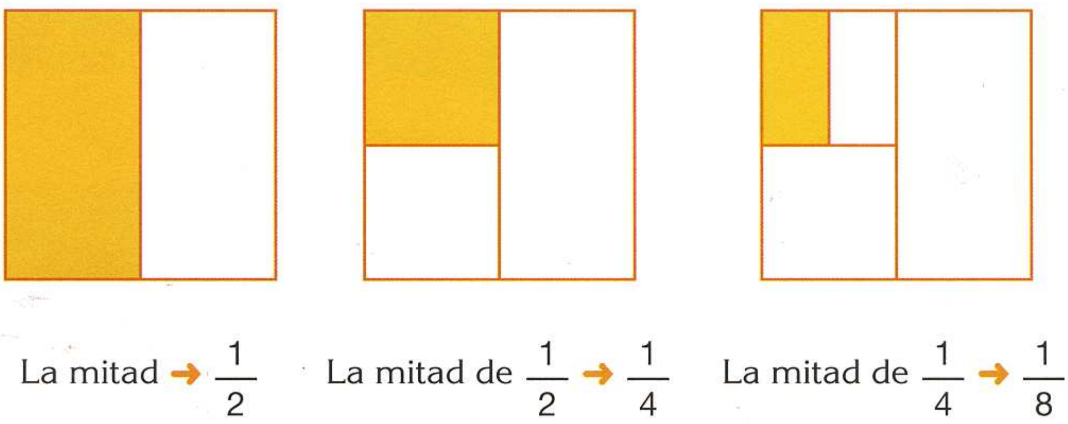



Fig. 5

***Actividad 1b:***

¿Qué relación encuentras entre las fracciones que has obtenido y la multiplicación de esas fracciones por 1/2.

***Actividad 1c:***

¿Por qué crees que es práctico hacer mitades de la unidad? ¿Cómo harías para cortar con la mayor precisión posible 1/8 de una barra de pan?

***Actividad 1d:***

Has conseguido dividir un cuadrado en 64/64, pero esta sucesión de fracciones podría continuar… ¿crees factible conseguir 3 divisiones más en el cuadrado que recortaste? Justifícalo.

## Modelos y realidad

Habrás podido comprobar que si bien la serie numérica puede continuar indefinidamente, el número de pliegues que se pueden hacer en un cuadrado de papel es finito. Llega un momento en el que no es posible seguir manipulando el papel… y llega el momento de seguir trabajando con los modelos mentales: la mitad de 1/64 es 1/128, la mitad de 1/128 es 1/256. Y de ello estamos seguros porque el razonamiento matemático nos permite afirmarlos aunque los modelos físicos no permitan realizar estas particiones. Las manos no pueden, pero la cabeza, sí.

***Actividad 2a:***

¿Cuál sería el término décimo de la sucesión de fracciones en el Ojo de Horus?

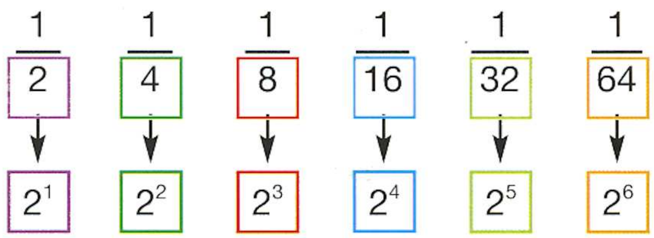
Ya has visto que el numerador siempre es 1. ¿Y el denominador? ¿Cuáles serían los cuatro siguientes denominadores de la serie?

2 – 4 – 8 – 16 – 32 – 64 – ….. – ….. – ….. – …..

Justifica tu respuesta y explica qué tendrías que hace para hallar el vigésimo término de la serie.

***Actividad 2b:***

Es probable que hayas resuelto la actividad anterior multiplicando por 2 el número precedente de la serie. Es muy correcto, pero para calcular el vigésimo o trigésimo término de la serie no parece un procedimiento muy práctico porque te obliga a calcular todos los términos de la misma… ¡un trabajo penoso para una simple curiosidad! Piensa de otra manera[1]. Observa la interesante regularidad de los denominadores de las fracciones del Ojo de Horus:




Ahora, ¿podrías decir rápidamente cuál sería la fracción vigésima de la serie?

***Actividad 2c:***

Bien, una cosa es escribir una potencia con un exponente elevado ($2^{20}$) y otra cosa muy distinta es hacer el cálculo… ¿por qué no usas la calculadora? No hace falta una calculadora con teclas extrañas ($x^y$), es suficiente con una de cuatro operaciones:

[1] Bruner utiliza la acertada metáfora del "andamiaje" para referirse a estas ayudas que el experto proporciona al aprendiz para que pueda construir otras formas de pensar más elaboradas.

Pulsa las teclas:

$\boxed{2}$ $\boxed{x}$ $\boxed{x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ……

Mira el número que aparece en la pantalla cada vez que pulsas la tecla =. Ahora, si has descubierto lo que es capaz de hacer la calculadora, ya puedes hallar fácilmente el término vigésimo y trigésimo de la serie de fracciones… Pero ¡alerta, no te precipites! ¿Cuántas veces has pulsado el signo = para obtener $2^6$? ¿Cuántas veces has de pulsar = para obtener $2^{20}$? Explícalo de forma que se pueda aplicar también para $2^{30}$, $2^{57}$ y para $2^n$, donde n sea un número cualquiera.

***Actividad 2d*:**

Investiga**:**
El 6º denominador de la serie es igual al 3º multiplicado por sí mismo (8 x 8 = 64).
El 10º denominador es igual al 5º multiplicado por sí mismo (32 x 32 = 1024) Comprueba que el 8º es igual al 4º multiplicado por sí mismo ¿Volvemos a tener una regularidad que nos permitiría saber con rapidez cuál es el término 40º de la serie ahora que ya sabes cuál es el 20º?

Sugerencia[2]: Cuando estudies el producto de potencias con la misma base, vuelve a pensar en el Ojo de Horus y encontrarás muchas explicaciones a las regularidades que has descubierto… y de paso, entenderás por qué se estudia una cosa tan extraña como el producto de potencias. ¡Simplificar los cálculos siempre es un objetivo inteligente!

## Un poco de mitología egipcia

Sin entrar en detalles escabrosos, el mito de Horus es la historia de una venganza. Osiris, dios mítico de la resurrección, fue el fundador de la nación egipcia. Su hermano Seth le tendió una trampa para asesinarlo y cortó su cuerpo en catorce pedazos que espació por todo Egipto. Isis, la esposa de Osiris, buscó por todo Egipto los trozos de su marido hasta tener trece de ellos y así poder embalsamar su cuerpo, momificarlo y devolverle la vida con su magia.

Horus, hijo de Osiris e Isis fue educado clandestinamente por Thot, el dios de la sabiduría y con el objetivo de vengar la muerte de su padre a manos de su tío Seth. Llegado el momento, Horus se enfrentó a Seth en una encarnizada lucha. En plena batalla, Horus fue herido en el ojo izquierdo que quedó destrozado. Con magia y sabiduría, Thot logró recomponer el ojo de Horus y dotarlo de poderes mágicos: el nuevo ojo de Horus era el Udyat, símbolo de la protección y el orden. Con su visión perfecta, Horus consiguió vencer a Seth y se convirtió en el dios de todo Egipto desterrando a Seth al desierto. El Ojo de Horus se utiliza todavía como amuleto con el nombre de Udyat que significa “el que está completo”

### ¿Pero realmente está completo?

Las partes del Udyat se utilizaron en la escritura jeroglífica como notación de las fracciones básicas:

[2] $2^a x 2^a = 2^{a+a}$, es decir $2^3 x 2^3 = 2^{3+3} = 6^6$. Si los alumnos con los que trabajamos esta actividad ya conocen las operaciones con potencias se puede trabajar con más profundidad esta regularidad.

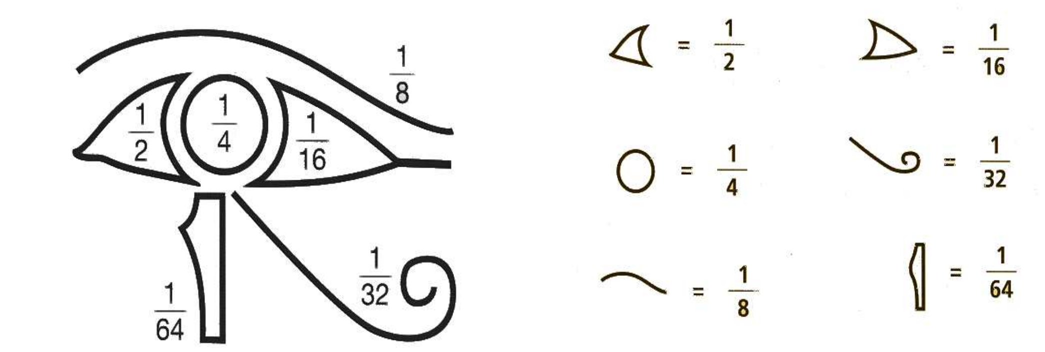



Fig. 6

***Actividad 3a:***

Si quieres saber si las fracciones del Ojo de Horus equivalen a la unidad, has de sumar las seis fracciones. Aprovecha la circunstancia de que los denominadores son potencias de 2. ¿Cuál es el denominador común?

Efectivamente, el m.c.m de los números 2, 4, 8, 16, 34 y 64, es justamente 64. Por lo tanto las fracciones equivalentes más sencillas son:

$$\frac{1}{2} = \frac{32}{64} \qquad \frac{1}{4} = \frac{16}{64} \qquad \frac{1}{8} = \frac{8}{64}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{4}{64} \qquad \frac{1}{32} = \frac{2}{64} \qquad \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$$

Y si sumamos las seis fracciones:

$$\frac{32}{64} + \frac{16}{64} + \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

¡¡No obtenemos la unidad!! Falta 1/64.

No es mucho, pero no podríamos jugar al ajedrez porque es justamente el tamaño de una casilla del tablero. ¿Cómo es posible que el símbolo mitológico de la “totalidad” tenga un error matemático? El sabio Thot es el que añade esa pequeña parte con su magia, igual que la magia y el amor de Isis completó el cuerpo descuartizado de Osiris, padre de Horus, al que también la faltaba una parte.

Pero el error podría ser menor. Si recuperas el cuadrado de la *actividad 1*, está claro que falta 1/64, pero sólo porque interrumpimos el proceso en la sexta división. ¿Por qué no continuar completando la unidad haciendo mitades del trozo que falta? Seguramente Thot conocía la respuesta: porque nunca terminaríamos. Siempre habrá una minúscula partícula que le falta a la unidad. En matemáticas podemos construir una expresión del tipo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$$

Donde la suma tiende a 1 cuando n tiende a infinito. Y aquí hemos llegado a una “revelación” que sólo podían tener los dioses, el **vértigo del infinito** que se produce al asomarse a la magia del Ojo de Horus.

“**Completo**” en matemáticas tiene un significado muy estricto. En mitología, como en tantos ámbitos de la vida, puede ser “**completo**” algo que tiende a serlo.

## Conclusiones

El uso de actividades como la que se ha descrito no es la panacea para resolver todos los obstáculos que se presentan en la educación matemática, pero permiten investirla como un saber cultural ligado a muchos acontecimientos históricos y actuales. No es una receta de uso sencillo, es un intento de provocar en el alumnado inquietudes y retos intelectuales que de forma simplificada expongo a continuación:

- Establece conexiones entre diversos contenidos matemáticos y entre las matemáticas y contenidos culturales.
- Es de aplicación flexible si ofrecemos las ayudas pertinentes en función de los conocimientos previos de los alumnos. Algunos de los apartados pueden aplicarse sin inducirlos a “pensar de otra forma” o ayudarlos en los momentos de bloqueo.
- Los objetivos que se plantean no son los contenidos matemáticos en sí mismos, sino la forma de abordarlos. Los alumnos han de utilizar la inducción, han de elaborar modelos que funcionen en casos generales, han de justificar y argumentar con lenguaje natural los razonamientos y hacerse entender por sus iguales, han de reconocer patrones de diversos tipos y han de utilizar sus conocimientos algorítmicos para comprobar la veracidad de afirmaciones aceptadas culturalmente.

Estas tareas de investigación dirigida son un entrenamiento para que, en un futuro, los alumnos sean capaces de realizar su propio análisis crítico de la realidad que les envuelve y tener una visión de la matemática no cerrada a los problemas escolares. La esperanza es que no nos pregunten ¿y esto, para qué sirve? El simple hecho de razonar ya es un objetivo.

## Bibliografía

Wood, D., Bruner, J., Ross, G. (1976). *The role of tutoring in problem solving*. Journal of child psychology and psychiatry, 17, 89-100.

Instituto de Evaluación Español (2009). *Educación Primaria 2007. Evaluación del sistema educativo Español*. [en línea] Recuperado el 26 de febrero de 2010, de http://www.institutodeevaluacion.mec.es/contenidos/nacional/EDUCACION_PRIMARIA_2007.pdf

NCTM. (2000) *Principios y estándares para la educación matemática*. Servicio de Publicaciones de la S.A.E.M. Sevilla. España.

Nesher, P. (1980). *The stereotyped nature of school word problems.* For the learning of mathematics,1, 41-48

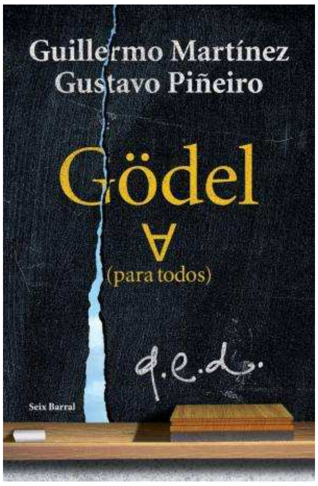
OCDE (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación.* [en línea] Recuperado el 24 de febrero de 2010, de http://www.ince.mec.es/marcosteoricospisa2006.pdf

Sol, M.; Jiménez, J. y Rosich, N. (2007). *Competencias y proyectos matemáticos realistas en la ESO*. UNO, 46, 43-59

**Javier Fraile Martín**, Licenciado en Ciencias de la Educación y Diplomado en Profesorado de Educación General Básica. Profesor de Matemáticas y Ciencias con alumnado de 11 a 14 años. Desde 1994 hasta 2008, Coordinador del Programa de Formación Permanente del Profesorado en el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Barcelona. Desde 1991 hasta la actualidad es autor de los libros de texto de Matemáticas de la Editorial Vicens Vives para alumnos desde 3 a 12 años **jfraile@telefonica.net**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 197-198
ISSN: 1815-0640


**Gödel (para todos)**
GuillermoMartínez y Gustavo Piñeiro.
Editorial: Seix Barral.
Año: 2009.
ISBN: 9789507316050

El teorema de incompletitud de Gödel es uno de los resultados más paradójicos de la lógica matemática y posiblemente sea el que más ha fascinado más allá de las ciencias exactas, ya que autores como Lacan, Kristeva, Deleuze, Lyotard, Debray, y muchos otros han invocado a Gödel y sus teoremas en diversas analogías. Este teorema surge a la par de la Teoría de la Relatividad de Einstein y es una referencia ineludible del pensamiento contemporáneo.

Con la finalidad que este libro sea accesible a un público que quizás no tenga formación matemática, Guillermo Martínez y Gustavo Piñeiro han realizado una exposición clara y entendible, a pesar de ser muy rigurosa, es notable que personas de otras disciplinas puedan aventurarse a la experiencia de conocer en profundidad este tema, pues empieza “*de cero*” pero va “*mucho más allá*” de lo que se puede encontrar en otras divulgaciones de lengua castellana.

Dicen sus autores: *Una palabra sobre el título: cada vez que se agrega “para todos” al título de libros de divulgación (y mucho más cuando el libro se refiere a cuestiones o autores considerados “difíciles”) se sobreentiende que el “para todos” es en realidad un eufemismo entre condescendiente y piadoso, que oculta al verdadero “para los que no saben nada de nada”. No es el caso de este libro. Cuando decimos “para todos” nos referimos más bien al verdadero significado que tiene la expresión, en todo su alcance. Nuestro libro está dirigido no sólo a los que “no saben nada de nada”, sino también a los lectores que hayan leído sobre el teorema de Gödel en exposiciones parciales, y aún a los que hayan estudiado los teoremas de Gödel y sus demostraciones en profundidad. Porque si bien nuestro libro empieza de cero, llega mucho más allá de lo que se han propuesto las divulgaciones más conocidas en lengua castellana. En particular damos una demostración rigurosa y con todos los detalles de los teoremas, aunque en una aproximación diferente de la más habitual, novedosa por su sencillez, en la que utilizamos la mínima cantidad posible de tecnicismos matemáticos. Hemos incluido* *también un último capítulo con una investigación propia del fenómeno de incompletitud en un contexto general y problemas abiertos, para mostrar la prolongación que tienen estas ideas y las preguntas que los teoremas de Gödel, todavía hoy, siguen suscitando*."

El libro tiene la siguiente organización:

- La primera parte está compuesta por cuatro capítulos, en el primero se da un panorama general y una aproximación informal de los teoremas de Gödel, en el segundo se presenta el contexto histórico y el estado de la discusión en los fundamentos de la matemática en el momento en que estos irrumpen, en el tercero se introduce un lenguaje formal necesario para enunciar los teoremas con la exactitud necesaria y en el último capítulo de esta parte se exponen algunas analogías del teorema de Gödel en otras disciplinas.
- En la segunda parte se encuentran las demostraciones de los teoremas, con la mínima cantidad posible de tecnicismos matemáticos.
- La tercera parte está dedicada a una exploración propia sobre el fenómeno de incompletitud en un contexto más general y abstracto, se preguntan cuál es el hecho matemático que puede rastrearse en otros objetos y que "divide aguas" entre teorías completas e incompletas.
- Por último, hay dos apéndices, uno para consulta durante la lectura y el otro es una selección de textos de los propios protagonistas, Cantor, Russell, Hilbert, etc. sobre el fenómeno de incompletitud.

Los autores han abierto un blog, http://www.godelparatodos.blogspot.com/, que incluye demostraciones en detalle de los teoremas, para atender consultas sobre las preguntas abiertas que se presentan en el libro y también para recibir sugerencias o críticas.

Patricia Caro
Dpto. de Matemática.
Universidad Nacional del Comahue.
Argentina.

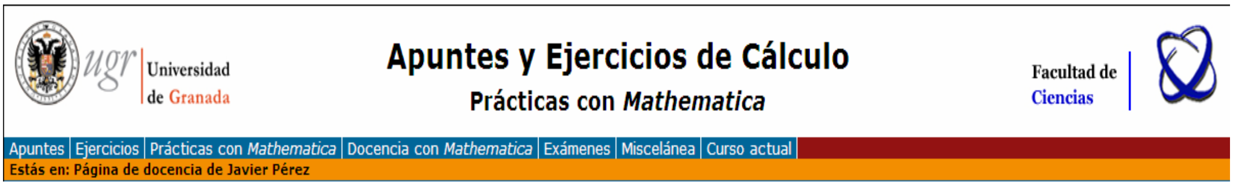
UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Marzo de 2010, Número 21, páginas 199-205
ISSN: 1815-0640
Matemátic@s en l@ red

# Apuntes y Ejercicios de Cálculo.

# Prácticas con Mathematica

**Autor de la Aplicación: Francisco Javier Pérez González**

**Dirección**: http://www.ugr.es/~fjperez/



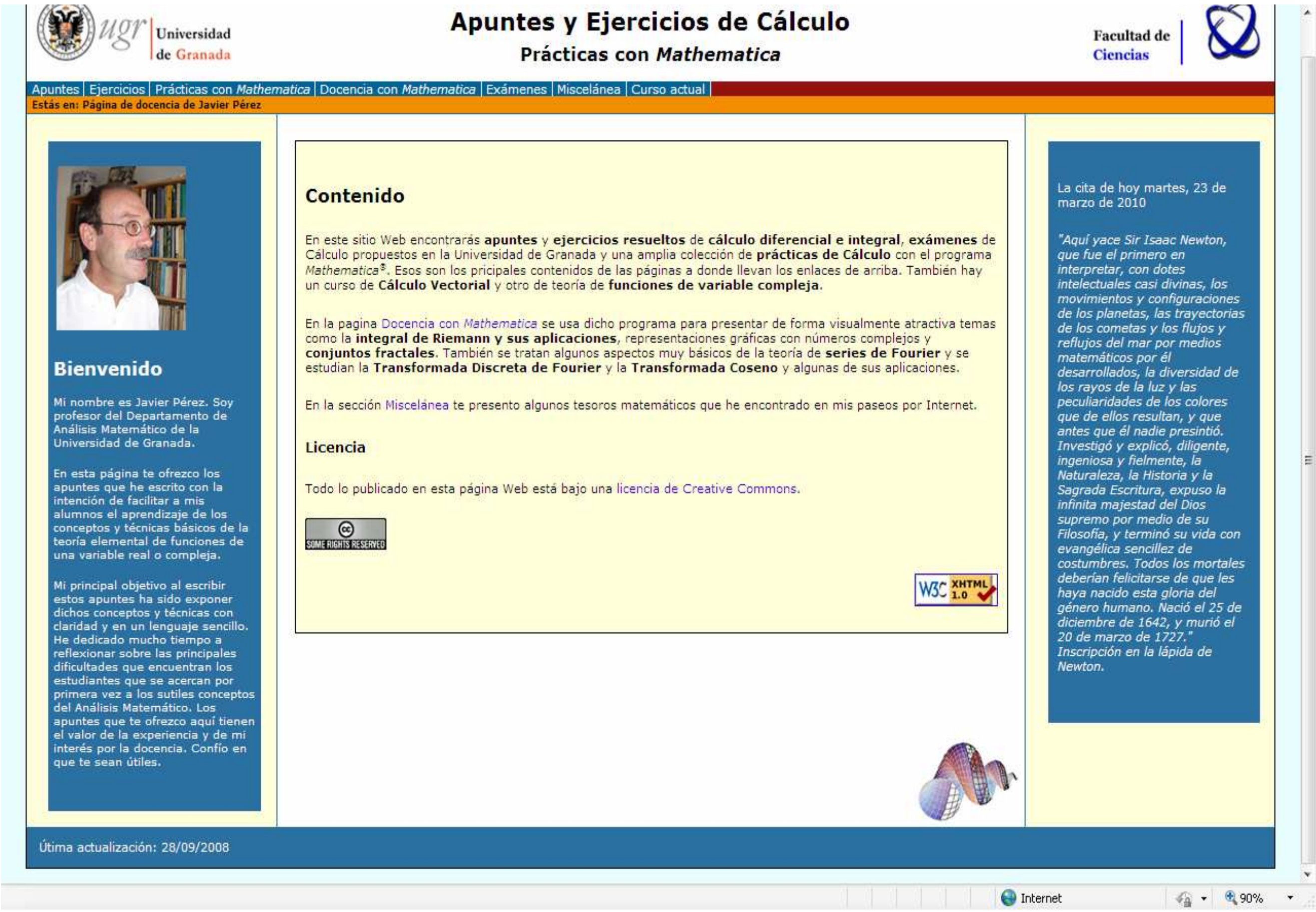

El profesor Francisco Javier Pérez González es profesor titular en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada desde el año 1973 y siempre se ha interesado en la docencia.

Él creó la página, que se presenta en este volumen, en el curso 1999 - 2000 coincidiendo con un cambio en el plan de estudios de la Licenciatura de Matemáticas y la ha mantenido desde entonces. Su propósito principal ha sido y es facilitar textos bien escritos y claramente expuestos, sin olvidar el imprescindible rigor matemático, tanto para estudiantes de las Licenciaturas de Matemáticas y de Física, como para estudiantes de las diversas especializaciones de las carreras de Ingeniería.

Ha escrito dos textos principales: uno de funciones de una variable real y otro de funciones de variable compleja. Ambos contienen amplias colecciones de ejercicios y el primero de ellos extensas notas históricas. Al dedicarse a la docencia durante muchos años en los primeros cursos de licenciaturas e ingenierías ha podido escribir en un lenguaje simple, intentando anticiparse a las dudas, preguntas y confusiones de un estudiante medio.

Al elaborar la página, lo hace *"pensando en un estudiante real que también es, en algunos aspectos, un estudiante ideal. … real porque llega a la universidad con importantes carencias de las que él puede no ser consciente y de las que no es del todo responsable… es un estudiante ideal porque valora el estudio, quiere prepararse para ejercer eficazmente una profesión y ser útil a los demás y tiene ganas de aprender"* (Prólogo de su libro "*Cálculo Diferencial e Integral de funciones de una variable*").

Respecto de la docencia considera que no es una tarea "simple" sino que hace falta un profesor con amplios conocimientos de la materia, con ganas y capacidad para transmitirlos, con entusiasmo y confianza en sus alumnos; y a su vez, alumnos con interés y motivación propia para aprender.




La página se encuentra dividida en cuatro bloques:

- Encabezado.
- Mensaje de bienvenida.
- Breve descripción del contenido de la página.
- Cita del día.

Dentro del encabezado, bloque del cuál nos ocuparemos en esta reseña, se presentan siete pestañas, las mismas nos llevan a:

1. Apuntes.
2. Ejercicios.
3. Prácticas con Mathemática.
4. Docencia con Mathemática.
5. Exámenes.
6. Misceláneas.
7. Curso Actual.

Describiremos brevemente y en particular, el contenido de cada una de estas siete pestañas:

## 1. Apuntes

- **Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. Con 270 ejercicios resueltos y notas históricas.**

Con un estilo claro, informal pero sin perder la rigurosidad que el lenguaje matemático requiere, el autor desarrolla los temas básicos del Cálculo diferencial e integral, incorporando extensas notas históricas y una amplia colección de ejercicios propuestos y resueltos.

Al proponer dos guías de lectura, una para estudiantes de ingeniería y otra para estudiantes de matemática y física permite que el libro sea de utilidad para ambos.

Sintéticamente, los contenidos son los siguientes:

- Números reales y complejos.
- Funciones elementales.
- Continuidad y límite funcional.
- Derivadas. Aplicaciones de las derivadas.
- Sucesiones numéricas.
- Integral de Riemann. Aplicaciones de la integral.
- Series numéricas.
- Sucesiones y series de funciones.

- **Apuntes de Cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables**

Son apuntes escritos para los estudiantes de primer curso de las Ingenierías de Informática y de Telecomunicación de la Universidad de Granada. Se trata de un resumen de los resultados básicos del cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables.

Desarrolla los siguientes temas:

- Derivadas parciales.
- Vector gradiente. Campos escalares diferenciables.
- Extremos relativos.
- Funciones vectoriales diferenciables. Matriz jacobiana.
- Extremos condicionados.
- Derivación de funciones implícitas.
- Integrales múltiples.

- **Cálculo vectorial. Series de Fourier. Teorema de los residuos.**

En estos apuntes expone con claridad los conceptos y resultados principales del cálculo vectorial clásico y de la integración compleja, sin eludir las dificultades inherentes a los mismos y proponiendo soluciones matemáticamente correctas y elementales.

Su contenido es el siguiente:

- El espacio euclídeo $\Re^n$. Curvas en $\Re^n$. Velocidad, rapidez, aceleración.
- Integrales de línea de campos escalares y vectoriales.
- Campos conservativos. Teorema de Green.
- Rotacional y divergencia.
- Coordenadas curvilíneas ortogonales. Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.
- Superficies. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales.
- Teorema de Stokes y teorema de Gauss o de la divergencia.
- Aplicaciones. Ecuación de continuidad de la hidrodinámica. La ley de Gauss y la ecuación de Poisson en electrostática.
- Polinomios trigonométricos y coeficientes de Fourier.
- Geometría de las series de Fourier.
- Introducción a la Transformada de Fourier Discreta.
- Transformada de Fourier.
- Convolución y sistemas LTI.
- Integración de funciones complejas. El teorema de los residuos y sus aplicaciones.

En la página Docencia con *Mathematica* se puede encontrar el curso de Cálculo Vectorial en formato de cuadernos de *Mathematica* lo que permite visualizar muchos conceptos de contenido geométrico y hacer con comodidad cálculos que a veces son un poco largos para hacerlos manualmente.

- **Complementos de Cálculo**

En estos apuntes escribe sobre nociones básicas de ecuaciones diferenciales, la exponencial compleja, series de Fourier y transformadas de Laplace.

Además, en la página Prácticas con *Mathematica* se pueden encontrar aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, como el oscilador armónico y algo de dinámica de poblaciones.

Contempla los siguientes temas:

- Repaso de la exponencial compleja.
- Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Ecuación diferencial lineal y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
- Funciones analíticas de una matriz cuadrada.
- Aplicaciones. Oscilaciones libres y forzadas. Circuitos eléctricos RLC. Sistemas LTI.
- Transformada de Laplace.
- Conceptos básicos de la teoría de series y transformada de Fourier.

- **Funciones de variable compleja**

Este apunte es un curso tradicional de introducción a la teoría de funciones de una variable compleja. Dedica especial atención al estudio de las funciones elementales complejas y a los logaritmos complejos. Presenta una gran cantidad de ejercicios, algunos de ellos resueltos.

Incluye los siguientes contenidos:

- Números complejos y funciones complejas elementales
- Series de potencias y funciones analíticas
- Integración en el campo complejo. Teoría de Cauchy elemental
- Propiedades locales de las funciones holomorfas
- El problema de Dirichlet para discos
- Forma general del teorema de Cauchy
- Series de Laurent. Singularidades. Cálculo de residuos
- El teorema de los residuos y sus aplicaciones
- Representación conforme
- El teorema de Riemann de la representación conforme
- Diversas caracterizaciones de los dominios simplemente conexos del plano

## 2. Ejercicios

La mayoría de los ejercicios que aquí presenta han sido extraídos del libro Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable (Primer apunte). Todos los ejercicios se encuentran detalladamente resueltos.

Presenta además, sugerencias para aprender a resolver problemas, la visualización de algunos de los temas como página web para trabajar con Mathematica o como presentación para, por ejemplo, desarrollar una clase.

En detalle, los contenidos abarcados son los siguientes:

- Consejos para resolver problemas
- Números reales, desigualdades y funciones elementales
- Números complejos
- Continuidad y límite funcional
- Derivadas, límites, aplicaciones de las derivadas
- Sucesiones numéricas, sucesiones recurrentes, cálculo de límites
- Integrales, sumas de Riemann, cálculo de primitivas, aplicaciones de las integrales
- Aplicaciones de la integral al cálculo de áreas, longitudes de curvas, volúmenes de revolución
- El cuaderno anterior como página Web
- Series numéricas

- Algunas series cuya suma puede calcularse de forma exacta
- Sucesiones y series de funciones
- Sucesiones y series de funciones (para imprimir)
- Sucesiones y series de funciones (para ver en pantalla)
- Ejercicios propuestos y resueltos de funciones de una y varias variables
- Integrales de funciones de varias variables: resumen de teoría y ejercicios resueltos

## 3. Prácticas con *Mathematica*

En esta página se presentan prácticas con el programa *Mathematica* y se sugieren algunas direcciones para visitar.

Además de los cuadernos de *Mathematica* incluye un tutorial del programa escrito por el profesor Jerónimos Alaminos del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada.

Los cuadernos desarrollan los siguientes temas:

- Curso introductorio al programa con diez cuadernos
- Cálculo vectorial
- Series y transformadas de Fourier
- Ecuaciones diferenciales
- Caos y conjuntos fractales
- Números complejos y sucesiones de números complejos
- Misceláneas

## 4. Docencia con *Mathematica*

En esta página el profesor Javier Pérez comparte cuadernos de *Mathematica* que ha elaborado y utilizado en el desarrollo de sus clases.

Los cuadernos son los siguientes:

- Funciones elementales con *Mathematica*
- Integral de Riemann. Este cuaderno es interactivo y permite introducir funciones para visualizar las sumas de Riemann y su aproximación a la integral.
- Se puede visualizar la integral de Riemann como página Web
- Aplicaciones de las integrales para *Mathematica* 3, 4, 5 y 6
- Integración de funciones de varias variables
- Introducción elemental a las series de Fourier
- Se puede visualizar el cuaderno anterior como página Web
- Curso de Análisis Vectorial, que consta de siete lecciones

- Se puede descargar en un archivo comprimido el curso completo de Cálculo Vectorial con los cuadernos de Mathematica ya ejecutados

## 5. Exámenes

En esta página se presentan exámenes parciales y finales, la mayoría de ellos detalladamente resueltos.

### 6. Misceláneas

Aquí se pueden encontrar temas relacionados con el Cálculo, el Análisis Matemático y la actividad matemática en general.

## 7. Curso actual

En esta pestaña el profesor presenta:

- Programa de la asignatura Análisis Matemático (Curso 2009 – 2010)
- Las actividades que los estudiantes deben presentar como parte de la acreditación de la materia
- Prácticas con el programa Máxima
- Las diapositivas que utiliza en el desarrollo de sus clases

**Claudia Reyes y Valeria Cerda.**

**Dpto. de Matemática.**

**Facultad de Economía y Administración.**

**Universidad Nacional del Comahue.**

**Argentina.**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 207-213
ISSN: 1815-0640

# Información

## Fundación Carlos Salvador y Beatriz: resumen de actividades

En este nuevo número nos hemos propuesto realizar un apretado resumen de las actividades de la Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz* siempre con el objetivo de hacer cosas por los demás relacionadas con la Educación y la Cultura…Ese capítulo –para algunos tan difícil - de realizar el bien sin nada a cambio. La noticia de que también las buenas noticias son noticia en una fundación con sólo cuatro años de vida pues fue inscrita el 24 de febrero de 2006.

1. **Ayudas de material escolar** a cuatro países (Paraguay, Bolivia, Perú y Argentina). En enero de 2010 el Vicepresidente, Luis Balbuena, ha estado en Perú para asistir a un Congreso organizado por la SOPEMAT (Sociedad Peruana de Educación Matemática) y hemos aprovechado para llevar 500 euros en metálico para la adquisición de material que será entregado a una escuela. Asimismo se hizo entrega de material de dinamización matemática. En el mes de febrero, en Asunción, Paraguay, hizo entrega de material escolar para una escuela del país. Con esta acción, la Fundación llega a las **cuatro decenas** de entregas en diferentes países.

2. **Mobiliario**. Se ha proporcionado una dotación de mobiliario a dos escuelas en Paraguay.

3. **Construcción de una escuela con sus servicios higiénicos.** En Paraguay nuestra Fundación cuenta con la **colaboración** de la oficina de la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI) para la Educación, la Ciencia y la Cultura, una entidad que trabaja en pro de la cooperación entre los países iberoamericanos. Gracias a esta colaboración, en estos momentos se hacen las gestiones y trámites para construir una Escuela en la afueras de Asunción con sus correspondientes servicios sanitarios.

4. **Colaboración económica**. La Fundación colabora con la revista **"Unión"** que, con periodicidad trimestral se cuelga en la red y puede ser descargada de forma gratuita en www.fisem.org por cualquier profesor o profesora que esté interesada. Es la **revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática,** una organización creada el 3 de julio de 2003, y a la que pertenecen trece países: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Ecuador, España, México, Paraguay, Perú, Portugal, Uruguay y Venezuela. Está en nuestro abierto camino de educación y cultura…
5. **Donación de un "cañón de diapositivas"** en enero de 2010, para la Sociedad Boliviana de Educación Matemática SOBOEDMA:

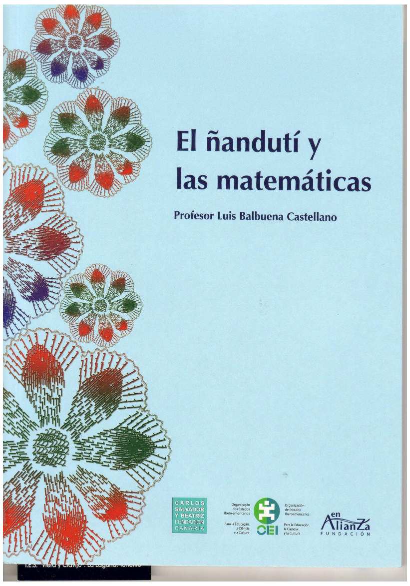
6. **Premio Literario.** La Fundación ha convocado su **II Premio Literario**, en esta ocasión dedicado a la poesía**.** Está dotado con **2000 euros y la publicación de la obra**. Abierto al mundo entero. Sus bases pueden ser consultadas en la web de la Fundación.

7. **I Premio de Psicología en convenio con la Universidad de La Laguna**. Dotado de 2000 euros y la publicación de la obra. Sus bases están en la Web de la Fundación.

8. **Ayudas al estudio**. La Fundación tiene la intención de abrir una vía de ayudas al estudio de las que se informará oportunamente.

9. **Mención Honorífica**. El Jurado encargado de fallar el premio a la **Creatividad Social** de la Universidad de La Laguna, Tenerife, Canarias, concedió a nuestra Fundación una mención honorífica especial en el mes de diciembre de 2009. El premio fue otorgado a la saharaui Aminetu Haidar.

10. **El ñandutí y las matemáticas** es el título de un libro cuyo autor es el profesor y escritor, Luis Balbuena Castellano**.** Fue editado en marzo de 2009 por la editorial paraguaya "Fundación en Alianza" habiendo colaborado en la misma la Oficina de la OEI en Asunción y nuestra Fundación. En la obra, el autor, además de poner de manifiesto la estrecha relación que existe entre la *roseta* de Vilaflor (un pueblo de la isla de Tenerife) y la famosa artesanía paraguaya conocida como *ñandutí*, hace un estudio de las matemáticas presentes en los distintos modelos y ofrece ideas para la explotación didáctica de este material. Son 90 páginas con texto, numerosas fotografías de ambas artesanías, muchos dibujos, declaraciones de artesanos, referencias históricas, etc. El libro se vende al precio de 10 euros y los derechos de autor, en este caso de Luis Balbuena, han sido donados, de forma altruista a la Fundación, con el fin de crear un fondo que permita financiar la construcción de una escuela en Paraguay.




11. **Edición de los tres libros de Carlos Salvador**. Se trata de *Dioses para cinco minutos*, prólogo del escritor y periodista, Eduardo Haro Tecglen, *Retrato de un viejo prematuro*, prólogo del periodista y escritor, Alfonso González Jerez y *Duelos del extranjero ilimitable*, prólogo del periodista y escritor, Juan Cruz Ruiz. Las portadas son cuadros de Munch. Los libros están en su segunda edición y con seis presentaciones: Cabildo de Tenerife, Guía de Isora, Icod de los Vinos, Ateneo de La Laguna, La Guancha y Las Palmas de Gran Canaria. Se venden al precio (los tres) de 30 euros.

Es una Fundación canaria que parte de la desgracia a la esperanza y está dispuesta a "hacer cosas por los demás". Si no eres socio y deseas serlo es fácil: con 5 o 10 euros al año podemos hacer mucho por la educación, la cultura y la solidaridad.
Estamos orgullosos pero no satisfechos: podemos hacer más.
Para tener más información, les invitamos a que visiten nuestra página web
www.carlossalvadorybeatrizfundación.com
Hay muchas fotos pues, en ocasiones, una imagen vale más que mil palabras…
¡¡Les esperamos!!

## Fundação Carlos Salvador e Beatriz: resumem de actividades

Neste novo número propusemos-nos realizar um apertado resumem das actividades da Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz sempre com o objectivo de fazer coisas pelos demais relacionadas com a Educação e a Cultura…Esse capítulo –para alguns tão difícil - de realizar o bem sem nada a mudança. A notícia de que também as boas notícias são notícia numa fundação com só quatro anos de vida pois foi inscrita o 24 de fevereiro de 2006.

1. **Ajudas de material escolar** a quatro países (Paraguai, Bolívia, Peru e Argentina). Em janeiro de 2010 o Vice-presidente, Luis Balbuena, tem estado em Peru para assistir a um Congresso organizado pela SOPEMAT (Sociedade Peruana de Educação Matemática) e aproveitámos para levar 500 euros em metálico para a aquisição de material para a aquisição de material que será entregado a uma escola. Assim mesmo fez-se entrega de material de dinamización matemática. No mês de fevereiro, em Assunção, Paraguai, fez entrega de material escolar para uma escola do país. Com esta acção, a Fundação chega às quatro dezenas de entregas em diferentes países.

2. **Mobiliario**. Proporcionou-se uma dotação de mobiliario a duas escolas em Paraguai.

3. **Construção de uma escola com seus serviços higiénicos**. Em Paraguai nossa Fundação conta com a colaboração do escritório da Organização de Estados Iberoamericanos (OEI) para a Educação, a Ciência e a Cultura, uma entidade que trabalha em pró da cooperação entre os países iberoamericanos. Graças a esta colaboração, nestes momentos fazem-se as gestões e trámites para construir uma Escola na afueras de Assunção com seus correspondentes serviços sanitários.

4. **Colaboração económica**. A Fundação colabora com a revista “União” que, com periodicidad trimestral se pendura na rede e pode ser descargada de forma gratuita em www.fisem.org por qualquer professor ou professora que esteja interessada. É a revista da Federação Iberoamericana de Sociedades de Educação Matemática, uma organização criada o 3 de julho de 2003, e à que pertencem treze países: Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Equador, Espanha, México, Paraguai, Peru, Portugal, Uruguai e Venezuela. Está em nosso aberto caminho de educação e cultura.

5. **Doação de um "canhão de diapositivas"** em janeiro de 2010, para a Sociedade Boliviana de Educação Matemática SOBOEDMA.

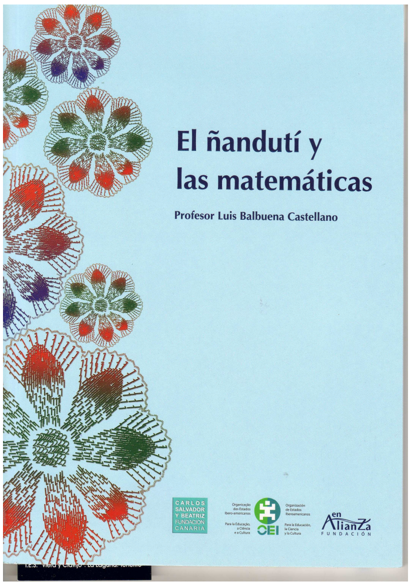
6. **Prêmio Literário**. A Fundação convocou seu II Prêmio Literário, nesta ocasião dedicado à poesia. Está dotado com 2000 euros e a publicação da obra. Aberto ao mundo inteiro. Suas bases podem ser consultadas no site da Fundação.

7. **I Prêmio de Psicologia em convênio com a Universidade da Laguna**. Dotado de 2000 euros e a publicação da obra. Suas bases estão no Site da Fundação.

8. **Ajudas ao estudo**. A Fundação tem a intenção de abrir uma via de ajudas ao estudo das que informar-se-á oportunamente.

9. **Menção Honorífica**. O Júri encarregado de falhar o prêmio à Criatividade Social da Universidade da Laguna, Tenerife, Canárias, concedeu a nossa Fundação uma menção honorífica especial no mês de dezembro de 2009. O prêmio foi outorgado à saharaui Aminetu Haidar.

10. **O ñandutí e as matemáticas** é o título de um livro cujo autor é o professor e escritor, Luis Balbuena Castelhano. Foi editado em março de 2009 pela editorial paraguaia "Fundação em Aliança" tendo colaborado na mesma o Escritório da OEI em Assunção e nossa Fundação. Na obra, o autor, além de pôr de manifesto a estreita relação que existe entre a roseta de Vilaflor (um povo da ilha de Tenerife) e o famoso artesanato paraguaio conhecida como ñandutí, faz um estudo das matemáticas presentes nos diferentes modelos e oferece ideias para a exploração didáctica deste material. São 90 páginas com texto, numerosas fotografias de ambas artesanatos, muitos desenhos, declarações de artesãos, referências históricas, etc. O livro vende-se ao preço de 10 euros e os direitos de autor, neste caso de Luis Balbuena, foram doados, de forma altruísta à Fundação, com o fim de criar um fundo que permita financiar a construção de uma escola em Paraguai.




11. **Edição dos três livros de Carlos Salvador**. Trata-se de Deuses para cinco minutos, prólogo do escritor e jornalista, Eduardo Haro Tecglen, Retrato de um velho prematuro, prólogo do jornalista e escritor, Alfonso González Jerez e Duelos do estrangeiro ilimitable, prólogo do jornalista e escritor, Juan Cruz Ruiz. As portadas são quadros de Munch. Os livros estão em sua segunda edição e com seis apresentações: Cabildo de Tenerife, Guia de Isora, Icod dos Vinhos, Ateneo da Laguna, A Guancha e As Palmas de Grande Canaria. Vendem-se ao preço (os três) de 30 euros.

# Información

É uma Fundação canaria que parte da desgraça à esperança e está disposta a "fazer coisas pelos demais". Se não és sócio e desejas o ser é fácil: com 5 ou 10 euros ao ano podemos fazer muito pela educação, a cultura e a solidariedade.
Estamos orgulhosos mas não satisfeitos: podemos fazer mais.
Para ter mais informação, convidamos-lhes a que visitem nossa página site:
www.carlossalvadorybeatrizfundación.com
Hay muchas fotos pues, en ocasiones, una imagen vale más que mil palabras…
¡¡Esperamos-lhes!!

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 215-219
ISSN: 1815-0640

# La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES

El pasado 28 de febrero, con motivo de la festividad del Día de Andalucía, el gobierno de la comunidad entregó distintas medallas para reconocer el trabajo de distintas personalidades e instituciones en distintos ámbitos de la sociedad.

La Junta de Andalucía concedió una de estas medallas a la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, que fue recibida por Manuel Torralbo Rodríguez, presidente de la sociedad, en un acto celebrado en Sevilla.

**Manuel Torralbo. Presidente de la SAEM THALES con la Medalla de Andalucía**

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES inicia su andadura en Sevilla en el año 1981 como consecuencia del movimiento de renovación en la enseñanza de las Matemáticas, que venía siendo impulsado por los profesores desde la década de los setenta.

Entre los fines que se marcan en sus estatutos fundacionales, cabe destacar:

- Actualización y perfeccionamiento de los profesores que imparten matemáticas.
- Impulso y desarrollo de las innovaciones relativas a la Didáctica de las Matemáticas y su implantación en las aulas.
- Investigación en Educación Matemática.
- Divulgación y popularización de las Matemáticas.
- Fomento y apoyo a la introducción en el aula de materiales y recursos y de las Nuevas Tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La Sociedad THALES tiene una estructura provincial de funcionamiento, con Juntas Directivas en cada una de las ocho provincias andaluzas y una Junta Directiva Regional en la que están representadas las distintas Juntas Provinciales. Los cargos son elegidos en Asambleas generales de asociados. La Asociación cuenta en la actualidad con más de 1800 socias y socios de todos los niveles educativos.

La S.A.E.M. THALES, decana de las asociaciones del profesorado de Matemáticas en España junto a la Sociedad Canaria, promovió en su día el asociacionismo del profesorado de nuestra área en otras comunidades autónomas y la creación de la Federación Española de Sociedades de Profesorado de Matemáticas (FESPM).

**Ejecutiva de la SAEM THALES**
**Encarni Amaro (secretaria de Administración y Tesorería), Manuel Torralbo (presidente), Rafael Bracho (Vicepresidente) y Agustín Carrillo de Albornoz (secretario General)**

La S.A.E.M. THALES, decana de las asociaciones del profesorado de Matemáticas en España junto a la Sociedad Canaria, promovió en su día el asociacionismo del profesorado de nuestra área en otras comunidades autónomas y la creación de la Federación Española de Sociedades de Profesorado de Matemáticas (FESPM).

La S.A.E.M. THALES ha realizado gran cantidad de actividades en las ocho provincias andaluzas, entre las que destacan más de un centenar de actividades de formación y las “Jornadas Regionales de Enseñanza de las Matemáticas”, que han contribuido a enlazar el movimiento andaluz de profesores y profesoras con las organizaciones de otros países y con las tendencias modernas de la enseñanza de las matemáticas.

La S.A.E.M. THALES desarrolla desde hace veinticinco años una intensa labor en las distintas provincias andaluzas, organizando cursos de actualización científica y perfeccionamiento en colaboración con los centros de profesorado, seminarios, jornadas locales, provinciales y, cada dos años, las Jornadas Andaluzas de Educación Matemática THALES, que han tenido ya lugar en las ocho provincias andaluzas, habiéndose celebrado la última edición (11ª Jornadas) en abril de 2.004 en Huelva.

**Olivia Sánchez (hija de Gonzalo Sánchez Vázquez, primer presidente de la SAEM THALES) junto a Antonio Pérez Jiménez (presidente que sustituyó a nuestro querido Gonzalo)**

El carácter autonómico de la asociación no ha impedido el desarrollo de una intensa actividad nacional e internacional desde su fundación. Ya en 1982, organizó las II Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (II JAEM), de ámbito nacional. En 1985, se organizaron las I Jornadas de Astronomía y en 1986 un Simposium Internacional sobre Renovación en la enseñanza de las Matemáticas. La Sociedad Thales impulsó a finales de los años 80 un movimiento iberoamericano que se concretaría en una Comisión que, cada cuatro años organiza el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), cuya primera edición se celebró en Sevilla en el año 1990. Como consecuencia de su proyección internacional, la S.A.E.M. THALES fue encargada por la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) de organizar el 8º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8) que tuvo lugar en Sevilla en 1996 con una asistencia de cerca de 4000 profesores de más de cien países.

En julio de 2007 nuestra sociedad volvió a organizar un nuevo congreso nacional, convocando a cerca de mil profesores en las XIII Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.

En el curso 1997-98 se inició el proyecto “Thales-Internet” de formación a distancia que en cada edición ofrece una variada oferta formativa con la realización de una serie de prácticas, que ordenadas y catalogadas como Recursos Didácticos (en Matemáticas y en otras áreas) quedan a disposición del profesorado de

Matemáticas y de cualquier otro/a interesado/a en la página de la Sociedad **thales.cica.es**. Prueba del interés de esta propuesta formativa y de su capacidad de convocatoria es que en la actualidad se han superado los 8000 participantes y se ha convocado la XI edición.

La Sociedad THALES publica la revista EPSILON de renovación e investigación en educación matemática, con una periodicidad de tres números al año. Dicha revista, de la que se han publicado hasta el momento 72 números ordinarios y 3 extraordinarios, está catalogada en las principales bases de datos del mundo. Se editan un total de 1800 ejemplares por cada número.

En la segunda mitad de los años 80 se publicaron 10 números del boletín de divulgación matemática "O'Thales". Hace seis año se retomó esta publicación de carácter divulgativo.

En el año 2000 la SAEM THALES se convirtió en un pilar importante para la celebración Año Mundial de las Matemáticas en nuestra Comunidad Autónoma organizando gran cantidad de actividades en todas las provincias andaluzas y asumiendo un papel protagonista en los comités locales, provinciales y nacional.

La SAEM THALES ha publicado distintos libros entre los que ha destacado la edición en castellano de los Principios y Estándares para la Educación Matemática, traducido del original de la National Council of Teachers of Mathematics (Granada 2003), sin olvidar la edición de distintos facsímiles y distintas colecciones de publicaciones correspondientes a problemas de la Olimpiada en CDs interactivos o las unidades didácticas "Matemáticas con calculadora" premiadas en los concursos convocados en los últimos años con la colaboración de la División Didáctica CASIO.

Desde nuestra creación, buscamos el acercamiento de las matemáticas a la sociedad, organizando actividades de divulgación y popularización como exposiciones, ciclos de conferencias, programas de radio y TV, secciones en prensa escrita, la revista O'Thales, concursos de problemas de ingenio, gymkhanas, aventuras matemáticas, jornadas de matemáticas en la calle…

Aunque de entre todas las actividades que desarrollamos quizás la que tratamos con más cariño sea la actividad denominada "Olimpiada Matemática THALES". Esta actividad va dirigida a estudiantes de 2º de ESO y con ella pretendemos fundamentalmente fomentar el gusto por las matemáticas mostrando una visión de las mismas complementaria (y más agradable y divertida) a la que se suele dar en las aulas, favorecer las relaciones de amistad entre los chicos y chicas que participan y propiciar la innovación en la forma de enseñar Matemáticas entre el profesorado. Entendemos la Matemática como una parte más de la formación integral de nuestras chicas y chicos y la utilizamos como excusa para inculcarles valores tan importantes como la solidaridad, el compañerismo, el trabajo en equipo, la tolerancia, el espíritu crítico.

En el año 2009 se han cumplido 25 años de la Olimpiada Matemática Thales, que en marzo se celebrará la fase provincial y en el mes de mayo, en Huelva tendrá lugar la fase regional y por tanto, la celebración del XXV aniversario de esta emblemática actividad.

La Sociedad THALES promovió en su momento la realización de actividades de las mismas características que la Olimpiada Matemática THALES en las demás sociedades del profesorado de Matemáticas que componen la FESPM, organizándose a raíz de ello la Olimpiada Nacional que ya ha celebrado su decimoquinta edición.

En la mayoría de las provincias se realizan actividades similares a la olimpiada pero dirigidas al alumnado de 6º curso de Educación Primaria, por ejemplo en Jaén este año alcanza la edición número IX.

En el año 2005 la SAEM Thales se incorporó al proyecto ESTALMAT para la detección y estímulo del talento precoz en Matemáticas siguiendo las líneas del proyecto iniciado en su día por Miguel de Guzmán.

En el año 2007 la SAEM THALES organizó en Granada, durante los días 1 al 4 de julio el XIII Congreso sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (XIII JAEM) con participación de más de 1000 profesores de España, Portugal e Iberoamérica.

En octubre de 2008 ha tenido lugar el XII Congreso Regional sobre enseñanza de las Matemáticas con participación de más de 300 profesores de nuestra comunidad. Ya está convocada una nueva edición que tendrá lugar en Córdoba en septiembre de este año.

**Foto de familia de los galardonados junto al Presidente de la Junta de Andalucía.**

En la actualidad la SAEM THALES es un referente para el profesorado de Matemáticas de nuestra Comunidad Autónoma, y sigue trabajando por los fines que se establecen en sus estatutos adaptándose a las necesidades que surgen en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como consecuencia de los cambios que se están produciendo en la sociedad de la información.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 221-224
ISSN: 1815-0640

# Convocatorias y eventos

## AÑO 2010


Lugar: Pucón, Chile.
Convoca: Universidad de la Frontera.
Fecha: 21 al 23 de abril de 2010
Información: **www.jornadamatematicazonasur.cl/**


Organiza: Instituto de Ciências Exatas e Geociências. Laboratório de Matemática. Universidade de Passo Fundo.
Lugar: Rio Grande do Sur. Brasil.
Fecha: 4 al 7 de mayo de 2010.
Información: **www.upf.br/jem/2009/**

RELME Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

24 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 24)
Ciudad de Guatemala- Guatemala
Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Fecha: 5 al 9 de Julio de 2010
Información: **www.clame.org.mx**
**clame@clame.org.mx**

**X Encuentro Nacional de Educación Matemática.**
**Educación Matemática, Cultura y Diversidad.**

Organiza: SBEM (Sociedad Brasileña de Educación Matemática).
Fecha: 7 al 9 de julio de 2010.
Lugar: Salvador, Brasil.
Información: **www.sbem.com.br/xenem/xenem.html**

---

8º International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)
Lugar: Ljubljan, Eslovenia
Fecha: 11 al 16 de Julio, 2010
Información: **http://icots8.org/**

---

III Reunión Pampeana de Educación Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa.
Lugar: Santa Rosa, La Pampa. Argentina.
Fecha: 18 al 20 de agosto de 2010.
Información: **http://online2.exactas.unlpam.edu.ar/repem/index.htm**

---

XXI Seminario de Investigación en
Educación Matemática

Convoca: Asociación de Profesores de Matemática, Portugal.
Lugar: Universidade de Aveiro. Portugal.
Fecha: 4 y 5 de septiembre de 2010
Información: **www.apm.pt**

SEIEM

XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Convoca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Lugar: Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Lleida, España.
Fecha: 7 al 10 de septiembre de 2010
Información: **www.seiem.es**

---


11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa.

Convoca: Asociación Colombiana de Matemática Educativa -ASOCOLME
Lugar: Colegio Champagnat, Bogotá. Colombia.
Fecha: 7 al 9 de octubre.
Información: **www.asocolme.com**

---

**VII Congreso Venezolano de Educación Matemática**
Organiza: Asovemat, Asociación Venezolana
Lugar: Caracas. Venezuela.
Fecha: 5 al 8 de octubre 2010
Información: **asovematrc@cantv.net**

---


Lugar**:** Villa María. Córdoba. Argentina.
Convoca**:** Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)
Fecha: 6 al 8 de octubre de 2010.
Información: **www.soarem.org.ar**

---

## AÑO 2011


**XIII CIAEM: XIII Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática**
Lugar**:** Recife. Brasil
Convoca: Comité Interamericano de Educación Matemática.
Fecha: 26 al 29 de junio de 2011
Información: http://www.ce.ufpe.br/ciaem2011

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, página 225-226
ISSN: 1815-0640

# Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org con copia a revistaunion@gmail.com. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 20 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “Arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen( español) o resumo(portugués) y abstract (inglés)**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos personales** en esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
    - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
    - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas
    - Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

**Para un libro:**

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Editorial Alianza, Madrid. España.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires. Argentina.

**Para un artículo:**

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). *La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria*. Educación Matemática 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). *Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma*. Revista de didáctica de las matemáticas 19, 77-87.

**Para un capítulo de libro:**

Albert, D. y Thomas, M. (1991).Research on mathematical proof. En: Tall, D. (ed.), Advanced Mathematical Thinking, 215-230. Kluwer, Dordrecht.

**Para artículo de revista electrónica o información en Internet:**

García Cruz, J. (2008*). Génesis histórica y enseñanza de las matemáticas*. UNIÓN Nº14 [en línea]. Recuperado el 20 de marzo de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=320

**NOTA:** Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 6 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com