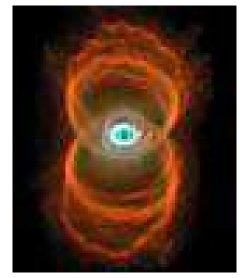
UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 17, Marzo de 2009



VI CIBEM *Miguel Díaz Flores*

Fundación Canaria
CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ

Convocatoria del cargo de
Pro-Secretario General de la FISEM

Convocatorias y eventos

Instrucciones para publicación

Descargar número completo (KB)

Volver

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 17 - Marzo de 2009

Índice

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, página 2-3
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

Evaluadores

Colabora

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 4-5
ISSN: 1815-0640

Editorial

UNIÓN, una revista que se prolonga……..

Cuando recibimos el primer número de la Revista Digital UNIÓN en el año 2005, proyecto pensado y creado para nosotros, los docentes de matemática, sentimos que éramos partícipes y destinatarios de una idea, que gracias al trabajo permanente del equipo liderado por Luis Balbuena y Antonio Martinón, logró en breve tiempo, difundirse a toda la Comunidad Iberoamericana de Educación Matemática y gozar actualmente de un merecido prestigio por la calidad del contenido y la información que trasmite.

El equipo que hemos conformado para esta etapa (2009-2011), está constituido por docentes e investigadores de distintos niveles educativos que tienen la ilusión de continuar esta excelente propuesta e intentar incorporar nuevas opciones de carácter científico y de divulgación.

Sabemos que el trabajo es arduo y continuo, lo hemos experimentado con la edición de este número, aún con la colaboración permanente de sus fundadores y de los miembros del Comité Editor: Lola de la Coba, Inés Plascencia, Alicia Bruno, Carlos Duque, Antonio Martín Adrián, Aurelia Noda, a quienes agradecemos profundamente porque han respondido de inmediato a todas nuestras inquietudes y dudas, además de apoyarnos emocionalmente cuando nuestro ánimo decaía.

También queremos agradecer a los Presidentes y Presidentas de las Sociedades que conforman la FISEM, por los mensajes de apoyo y sugerencias que siempre tendremos en consideración para optimizar nuestra función.

Continuamos agradeciendo a las prestigiosas personalidades del Consejo Asesor y del equipo de evaluadores, por su aceptación para continuar colaborando con nosotras, y dar la bienvenida a los nuevos integrantes, pues su aporte eleva y avala el perfil que se quiso dar a la revista UNIÓN, además de ayudarnos con sus opiniones y consejos.

Sin duda, el generoso apoyo económico que nos otorgó la Fundación Carlos Salvador y Beatriz nos trasmite su deseo de continuar brindando lo mejor de nosotros como docentes.

A todos ellos, Muchísimas Gracias!!!!

Hemos iniciado esta aventura con Fe y Entusiasmo, pero estamos convencidas que el éxito de nuestra función depende de la colaboración de todos los que integran la Comunidad Iberoamericana de Educación Matemática.

En este número continuamos con la misma estructura que le dieron sus fundadores, incorporando algunos cambios que deseamos cubran las expectativas de nuestros lectores a quienes les solicitamos el envío de sus reportes de investigación, relatos de experiencias en el aula, información sobre congresos y eventos y todo aquello que pueda enriquecernos, tanto en lo profesional como en lo humano. Estamos abiertas a todas las propuestas.

Un abrazo fraternal

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, página 6
ISSN: 1815-0640

Luis Balbuena Castellano

Breve reseña

Nació en Fontanales – Moya - Islas Canarias – España en 1945. Maestro de Primaria y Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela. Catedrático de Enseñanza Secundaria con destinos en Huelva y Tenerife (Tejina y La Laguna). Socio fundador de la Sociedad *Isaac Newton* de Profesores de Matemáticas de la que fue su primer Secretario General, Primer Director y miembro del Consejo Editor de la revista NÚMEROS y Codirector de la revista digital UNIÓN (2005-2008) que edita la FISEM.

Miembro del Consejo Escolar del Estado (en el grupo de personalidades de reconocido prestigio). Ganador de cuatro premios *Giner de los Ríos* que convoca el Ministerio de Educación de España y tres de *Educación e inventiva* que convoca el Gobierno de Canarias.
Condecorado por los gobiernos de España, Francia y Canarias. Socio de honor de las sociedades de profesores de Matemáticas de Argentina, Uruguay y Perú. Miembro del Comité de Programa de varios congresos internacionales de Educación Matemática.
Autor de numerosos trabajos y libros sobre Educación así como de divulgación de las matemáticas en prensa, radio y televisión.
Autor-coautor de libros como "Guía Matemática de La Laguna","Palillos, aceitunas y refrescos matemáticos", "Cuentos del cero", "Banderas y naciones", "El Quijote y las matemáticas", etc. Ha dirigido cursos de actualización científica y didáctica para profesores de Secundaria en Paraguay, Chile, México, etc.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 7 - 16
ISSN: 1815-0640

firma invitada

Reflexiones de un docente

Luis Balbuena Castellano

Agradezco a las directoras de UNIÓN que me hayan invitado a participar en esta sección en la nueva etapa que inaugura la revista

Les deseo suerte y éxitos.

Introducción

Quiero orientar mis reflexiones hacia aspectos de la labor cotidiana del profesorado en las aulas pues creo que todos debemos trabajar y aportar ideas si, de verdad, queremos mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. No debemos olvidar en ningún momento que nuestro trabajo solo se justifica si tenemos presente que es el alumnado el objetivo principal de cuanto hagamos.

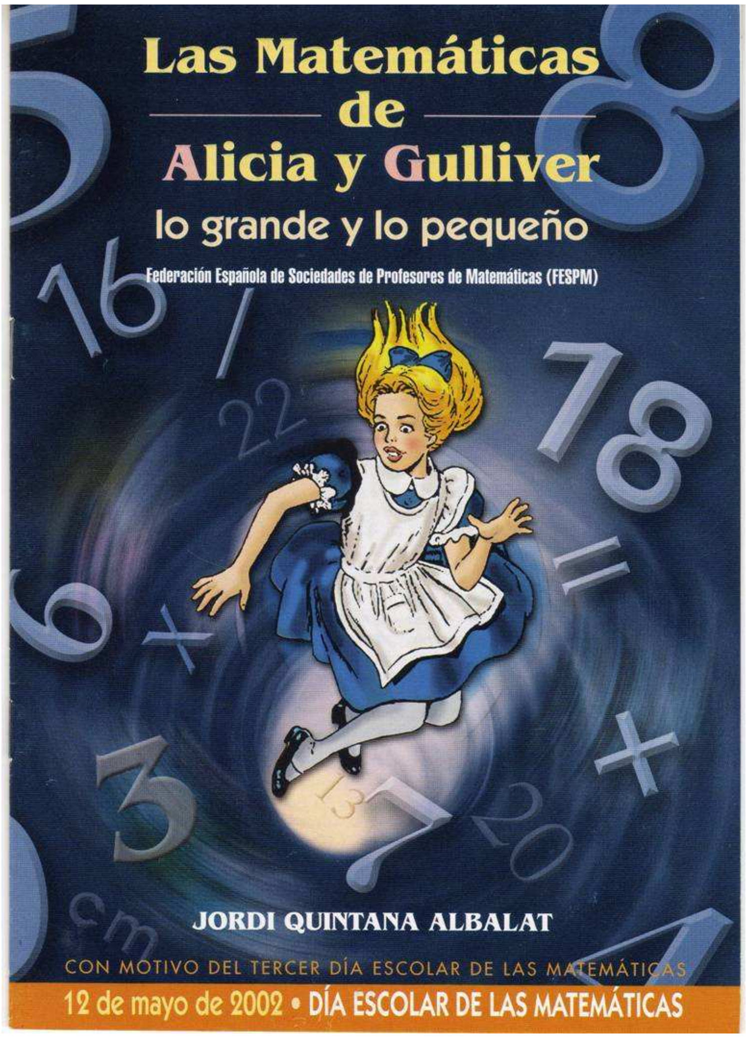
En los últimos diez años se han realizado diversos test que tratan de medir el grado de comprensión y de asimilación de las matemáticas en estudiantes del sistema educativo no universitario. Se han hecho en diversos países y ello ha permitido establecer comparaciones y análisis de sus sistemas, para tratar de explicar por qué se da tal disparidad de resultados.

Aunque cada país ha interpretado los datos según su óptica particular, existen algunas variables generales que permiten concluir en la necesidad de revisar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en este nivel educativo. Pero la revisión ha de ser global, afectando a todas las variables que intervienen en el proceso. Hacerlo parcialmente puede llevar al fracaso y, tal vez, a la frustración.

El informe PISA ha venido a sacudir nuestras conciencias profesionales individuales y colectivas. Quizá en esta ocasión la sacudida ha sido mayor que otras veces porque ha tenido una incidencia mediática mucho más extensa e intensa que la habida con otros informes. Por esta razón, entre otras, el debate no ha quedado reducido al mundo educativo sino que ha sido toda la sociedad la que ha podido acceder a él y participar. ¡Cuánto debate en los medios de comunicación! ¡Cuánta reflexión escrita por individuos o grupos en torno a los datos que aporta el informe! Todo ello es bueno y estaría mejor si se consiguiese producir un giro en la actual situación, ¡pero que éste no sea de 360 grados…!

Creo que casi todos coincidimos en el diagnóstico y en la necesidad de cambiar. El problema está en que las medidas que se deben tomar o no se proponen o se proponen y no se aplican o, lo más generalizado, "están en estudio"...

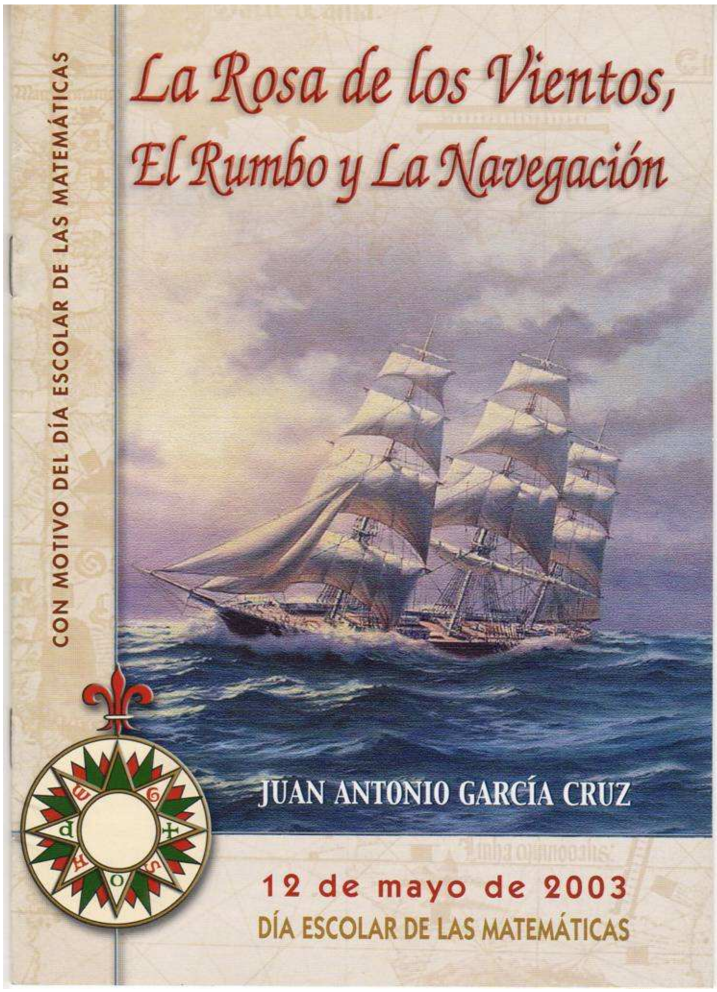
Hay cuatro aspectos sobre los que haré una breve reflexión con alguna propuesta de medidas a tomar. En mi opinión es urgente que quienes entienden de estos temas nos hagan llegar sus opiniones autorizadas porque, desde hace tiempo, se aprecia la necesidad de un cambio y quienes trabajan con profundidad y rigor en temas relacionados con la educación matemática, en general, suelen mirar para otro lado como si el asunto no fuera con ellos.



a) Los contenidos

Se trata de **qué** enseñar. A todas luces, una parte de los contenidos actuales están desfasados o superados por la presencia de medios como la calculadora de adquisición fácil o el computador, que está cada vez más al alcance del alumnado. Es necesario aportar propuestas razonables para hacer una revisión de los contenidos. Así, por ejemplo, hay algunos algoritmos a los que ya es innecesario dedicarles la atención que se les presta y casi me atrevería a decir que hasta deberían eliminarse.

Cada vez que se ha producido una reforma (y en España llevamos posiblemente el record en los últimos veinte años), se habla de los "nuevos" currículos pero cuando llegan al *profesor de a pie*, después de pasar por procesos más o menos largos y generalmente secretos, resulta que poco o nada presentan de novedoso al menos en los contenidos. En cada ocasión, las instrucciones metodológicas se describen con palabras nuevas que, en general, no se explican debidamente al profesor que está en el aula que es, obviamente, el responsable último (o primero, según se mire) de que esa reforma salga adelante. Tras la confusión inicial, la jerga que acompaña a los proyectos, poco a poco se va diluyendo y al final, todo sigue igual. Los contenidos siguen casi inamovibles desde hace muchos, tal vez demasiados años. Se que resulta peligroso arriesgarse a emitir un juicio sobre lo que debe desaparecer o no pero me voy a arriesgar a emitir juicio sobre algunos. Por ejemplo, seguimos con los radicales, dedicando horas y horas a unos algoritmos que la calculadora (que, por cierto, sigue siendo anatema para no pocos profesores y profesoras), es capaz de darnos el resultado de esa tediosa operación con ocho o diez cifras decimales. Y no digamos de aquellos que aun explican y obligan a aprenderse el algoritmo de la raíz cuadrada... No propongo que desaparezca la radicación de los contenidos sino que se consiga que el alumnado sepa cuál es su significado incluso el geométrico en los casos de las raíces cuadrada y cúbica. Someterlo a esas tediosas operaciones con radicales es agrandar el rechazo del alumnado a nuestra disciplina.



Otro ejemplo, ¿qué sentido tiene hoy dedicar tantísimo tiempo a la deducción de las fórmulas de la trigonometría? Cuando el cálculo era complicado, merecía la pena tener una fórmula que diera el seno de un ángulo en función del ángulo mitad cuyo seno ya conocemos. Y así se podría justificar ese enjambre de fórmulas. Pero si dispongo de una calculadora científica, (cuyo precio es ya asequible a casi todas las economías familiares), podemos obtener la razón trigonométrica de cualquier ángulo sin más que apretar adecuadamente las teclas correspondientes. Pero no, en cada currículo, a pesar de que en los preámbulos de las leyes se suele decir que hay que adaptar el plan a los tiempos siempre cambiantes pues resulta que no, que en matemáticas los contenidos que hay que estudiar, permanecen o se retocan muy ligeramente.

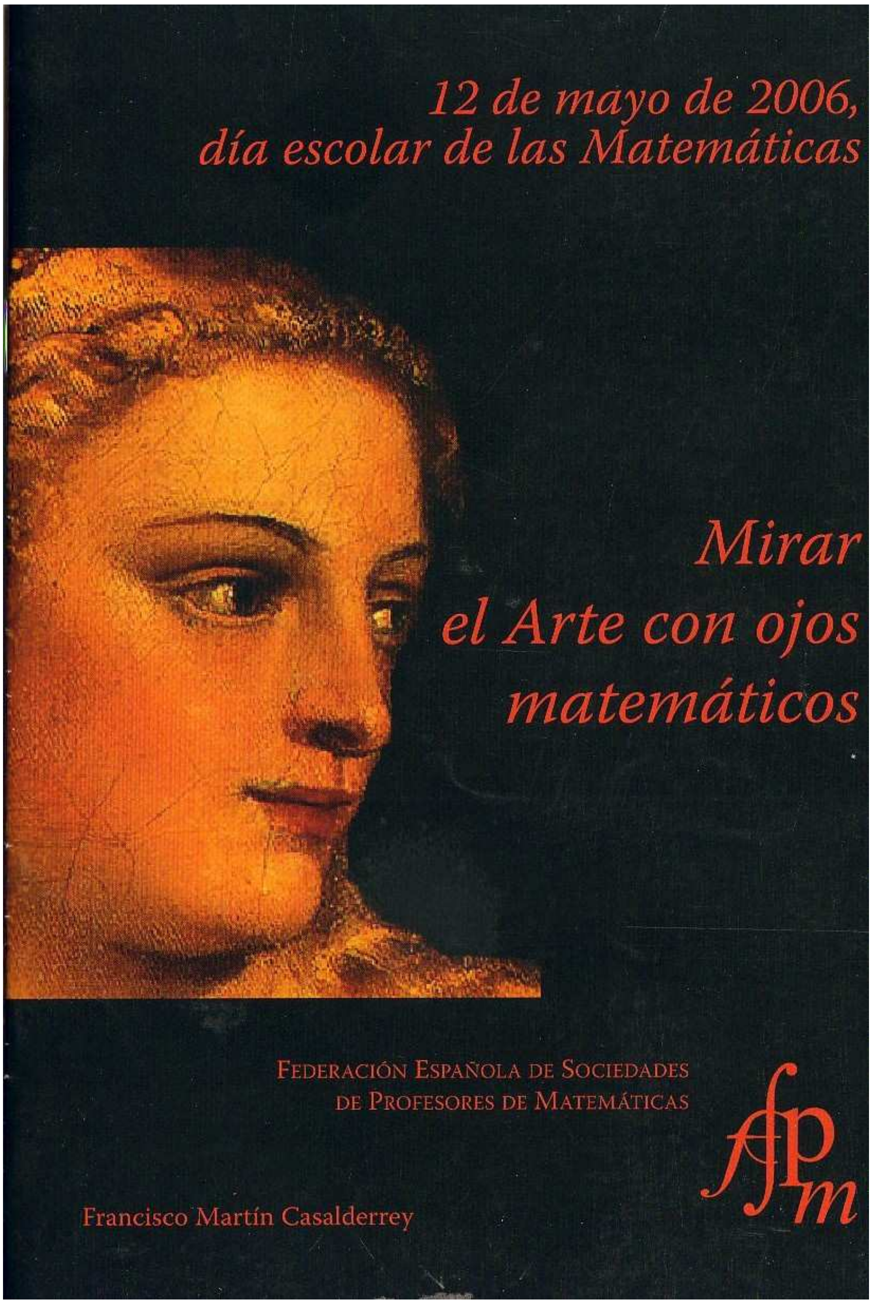
Insisto en que todo esto es opinable y discutible pero creo que estamos tardando mucho en abrir un debate sobre este asunto para transmitir después a las autoridades educativas las sugerencias sobre lo que conviene hacer para actualizar los contenidos.

b) La metodología

Hablo ahora del **cómo** debe desarrollarse el proceso. El fracaso que detectan los estudios no puede ser achacado solo a los contenidos sino que, en general, también las formas que se utilizan para enseñar inciden en no conseguir los objetivos. Por eso conviene revisarlas. Hay que plantearse la búsqueda de nuevos modelos para la gestión de la hora de clase. Si modificamos los contenidos pero mantenemos los métodos, el resultado, posiblemente, será que todo sigue igual.

La mayor parte del profesorado utilizamos una metodología que toma la *lección magistral* (quizá con alguna variante que la "dulcifica" un poco), como modelo casi único de transmisión del conocimiento. Es muy posible que, en la mayoría de los casos, se deba a que ese fue el método utilizado cuando nos la enseñaron a nosotros y hasta puede que, en su momento, nos gustase. Pero creo que es evidente que la metodología también tiene que ver con los pobres resultados en matemáticas. Habrá que pensar, por tanto, en proponer metodologías que complementen a la lección magistral. Ahora, además, que tenemos que pensar en las competencias a la hora de programar nuestro trabajo, estimo que existen formas de trabajar en el aula que, sin duda, ayudarán a mejorar el aprendizaje haciéndolo de manera que resulte más estimulante y motivador tanto para el profesorado como para el alumnado.

Realizar trabajos en equipo, siempre que la materia se preste a seguir esta metodología, es una forma de aprendizaje que quienes lo han practicado saben que, planteado convenientemente, da resultados positivos.



Hay, sin embargo, otra metodología que se abre paso aunque creo que muy tímidamente porque se suele opinar que presenta muchos inconvenientes. Me refiero a realizar talleres como método de enseñanza de los contenidos siempre que, como es obvio, éstos lo permitan. Frente a quienes piensan que con esta forma de enseñar se ralentiza el aprendizaje, que es difícil prever todas las variables que se pueden presentar en el desarrollo de un taller y otras observaciones consideradas razonables, creo que, si se prepara adecuadamente, los efectos son muy positivos. El alumnado se siente más protagonista de su aprendizaje; si los materiales necesarios se preparan previamente y se procura no improvisar, se consigue desarrollar algunas capacidades que la clase magistral impide hacerlo debido a la estructura más o menos rígida que tiene.

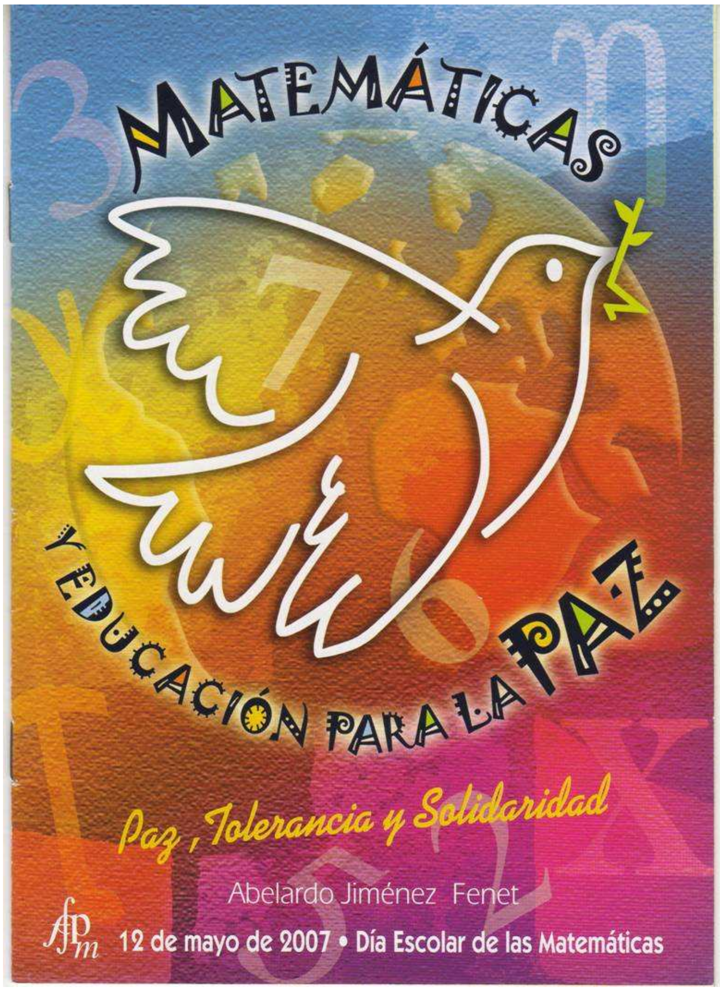
Hay un buen número de actividades que pueden adaptarse a esta metodología en los distintos niveles. Si se inicia su práctica desde los primeros, el alumnado aceptará la realización de talleres como una forma más de acceder al aprendizaje e irá creando en ellos los hábitos y las estrategias de esta forma de aprender. Tan solo requiere que presente un cierto grado de autonomía para seguir las instrucciones que se vayan dando para desarrollar el taller. Por otra parte, cada desarrollo irá permitiendo al profesorado reflexionar sobre lo realizado e introducir ajustes para conseguir cada vez más éxito. El taller de la pajarita de papel, el estudio matemático de las banderas de los estados del mundo, la construcción de los frisos como forma de conocer e interpretar elementos tan cotidianos como las celosías o ciertas labores artesanales, el estudio e interpretación de los rosetones, de las espirales, el rectángulo áureo, el estudio de diversos tipos de números (perfectos, capicúas, felices, escaleras, amigos, etc.), son ejemplos de materiales con los que se pueden desarrollar talleres de gran riqueza.

Lo que vengo denominando *dinamización matemática* es otra estrategia metodológica que permite complementar el método tradicional. Si no se hace alguna actividad de este tipo, cuando el alumnado acaba sus estudios se quedará con la falsa idea de que las matemáticas se reducen solo a las que explicamos en nuestras clases.

¿Qué entiendo entonces por dinamización matemática?

Es una forma de presentar otras caras de las matemáticas que no están, en general, ni en los contenidos oficiales ni en los libros de texto que los desarrollan. A través de actividades de este tipo se ofrece al alumnado la posibilidad de acercarse a las matemáticas de una forma más lúdica y de aprenderlas a través de proyectos, juegos, torneos, etc. Además permite desarrollar capacidades que son útiles para construir el razonamiento matemático.

¿En qué consiste la dinamización matemática? Se trata, por tanto, de introducir en las programaciones un conjunto de actividades para desarrollar a lo largo del curso que tengan, obviamente, un contenido matemático. Por ejemplo, desde el año 2000, la Federación Española de Sociedades del Profesorado de Matemáticas viene celebrando el 12 de mayo de cada año el *Día Escolar de las Matemáticas.* En cada una de las ediciones que se han celebrado hasta ahora la Federación ha propuesto un tema monográfico para que el profesorado pueda orientar ese trabajo de dinamización. Los temas han sido: *Pon un poliedro en tu centro*; *Construye un reloj de sol en tu centro*. A partir de la tercera edición, se ha solicitado a algún especialista en el tema propuesto que prepare un cuadernillo de 16 páginas que contenga actividades, orientaciones para trabajar el tema en el aula, bibliografía complementaria, etc. Ese cuadernillo se distribuye a todos los socios de la Federación, que están en torno a los ocho mil. El autor en la primera ocasión fue Jordi Quintana con *Las matemáticas de Alicia y Gulliver, lo grande y lo pequeño*; para el año siguiente, Juan Antonio García Cruz preparó el cuadernillo sobre el tema propuesto: *La rosa de los vientos, el rumbo y la navegación.* Xaro Nomdedeu hizo el correspondiente a 2004 titulado *Frutas y matemáticas.* El año 2005 se celebró el cuarto centenario de la primera edición del *Quijote* y con ese motivo la Federación propuso como tema *El Quijote y las matemáticas* siendo Luis Balbuena Castellano y Juan Emilio García Jiménez los encargados de elaborar el cuadernillo sobre el tema. *Mirar el arte con ojos matemáticos* fue el tema propuesto para 2006 siendo Francisco Martín Casalderrey el autor del cuadernillo. *Matemáticas y educación para la Paz* es la propuesta de 2007 siendo Abelardo Jiménez Fenet quien elaboró la guía de actividades y en 2008, Vicente Liern Carrión y Tomás Queralt Llopis escribieron el cuadernillo dedicado a *Música y matemáticas.*



Como puede observarse, se ha ido creando un conjunto de materiales que pueden ser utilizados en cualquier momento, más allá del año en el que fueron propuestos.

Por otra parte, existe un amplio abanico de actividades que están en esa misma línea. Desde semanas matemáticas a concursos de diverso tipo como los de fotografía y matemáticas, de cuentos o el pintamatemáticas; torneos de juegos, olimpiadas, preparación de exposiciones, etc.

c) La formación inicial

A mi juicio, si se desea realizar el cambio en el qué y en el cómo enseñar matemáticas una de las claves principales para lograrlo a medio o a largo plazo se encuentra en la formación inicial del profesorado. No podemos seguir formando a los docentes del siglo XXI con los contenidos y los métodos del siglo XX e incluso de antes. Se impone la actualización y la adaptación a las nuevas realidades si se quiere la transformación. Si, por ejemplo, se decide por fin incluir la teoría de grafos entre los contenidos que debe conocer el ciudadano, el profesorado deberá tener una información amplia para dominarla y poder adaptarla al nivel de formación de su alumnado. Creo que no debe pasar ya ni un curso más sin que en las escuelas de formación de los profesores se deje de enseñar no solo el manejo de la calculadora científica sino las grandes posibilidades que ofrece para la enseñanza y el aprendizaje de muchos de los temas de los diversos cursos. No hacerlo en el periodo de formación conlleva que se llegue a pensar que no es un instrumento adecuado por cuanto que los responsables de su formación como maestros no le prestaron atención. Ya sé que hay quien todavía sostiene que la calculadora puede tener efectos perniciosos en la formación matemática de nuestros estudiantes. Por supuesto que no estoy en nada de acuerdo con esa opinión pues lo realmente pernicioso es que no se le muestre al alumno las posibilidades de la calculadora y los beneficios que puede producir en cuanto a seguridad y exactitud en los cálculos. En alguna ocasión he tenido que corregir exámenes de los que se hacen en España a los estudiantes tras el último curso de secundaria y que les permite acceder a la Universidad (PAU). Pues bien, de un grupo de ciento cincuenta alumnos que escogen el problema de regresión lineal (que en aquel momento era un tema del cuestionario), me encontré con que solo doce utilizan la calculadora (que está permitida) para obtener los distintos parámetros. Y lo que es peor, que algunos de los que obtuvieron el coeficiente de regresión mediante las fórmulas, le daba como resultado de sus tediosos cálculos el valor de, por ejemplo, 1,34 y lo recuadraron como si estuviese bien hecho.

Es urgente, pues, plantearse una revisión de la formación inicial del profesorado si deseamos que los cambios se instalen en el sistema. No hacerlo supondría tener que luchar luego contra las inercias que crea la formación inicial de la que todos, en mayor o menor medida, hemos participado.

d) La formación permanente

Aunque ya no nos cause asombro, los cambios en las ciencias y las tecnologías son vertiginosos. Esto es algo que se escucha permanentemente en cualquier ámbito de la sociedad. Rara es ya la profesión que no siente ese vértigo del cambio continuado. Y existen profesiones a las que la sociedad trata con mucho rigor si no se actualiza. Pensemos en los profesionales de la medicina o de las ingenierías. No se concibe a un ingeniero proyectando una nave industrial con los apuntes que le explicó su profesor hace dos o tres décadas… El docente también fue formado con unas determinadas directrices, teorías pedagógicas propias de aquel momento y con los medios que existían (aunque ya he explicado que no siempre es así…). Pues bien, todo ese conjunto de instrucciones han evolucionado y tiene el deber de actualizarse. Pero eso implica una obligación para las administraciones educativas de poner los medios para conseguir una eficaz formación permanente del profesorado. Es una forma de dar adecuada respuesta al qué y al cómo.

Es evidente que aun se podría pensar en más variables para el cambio y es misión de los responsables afrontarlos. Pero hay aun que activar algo más que es imprescindible para que todo esto se pueda convertir en realidad Esos cuatro elementos de cambio que he enunciado requieren el *esfuerzo* como algo sin lo cual no habrá cambios. Esfuerzo de todos, de los estudiantes, del profesorado, de las familias y de las administraciones educativas que son las responsabilizadas por la sociedad para conseguir que la educación funcione. En muchas ocasiones se escucha que hoy el alumnado no se esfuerza y se aportan razones para justificarlo. Pero ese sentido del esfuerzo debe aplicarse a todos los actores porque tal vez, se esté produciendo el efecto de círculo vicioso y se pase el no-esfuerzo de unos a otros sin que nadie haga nada para romper el círculo. Cuando cito, por ejemplo, la dinamización matemática como un método para atraer a los estudiantes, eso requiere un esfuerzo porque hay que preparar las actividades, preparar materiales, dedicar tiempo a organizar, a publicitarlo, etc. Eso requiere, como digo, un esfuerzo que, además, da resultados positivos; es decir, que rompe el círculo. Por tanto, no basta con lamentarnos de que el alumnado “no se esfuerza” para justificar por qué todo va mal.

El informe PISA es una fuente para inspirar orientaciones. Algo que ha puesto de manifiesto es la necesidad de promover que la enseñanza se debe orientar de manera que sea lo más significativa posible. No podemos seguir consintiendo que nuestro alumnado acabe sus estudios obligatorios pensando que aquello que aprendió en la asignatura de matemáticas no le sirve para nada a la hora de interpretar su entorno o de resolver situaciones problemáticas que le surjan en su vida cotidiana. Esto se debe corregir y nosotros debemos poner los medios para hacerlo. Tampoco debemos consentir que se continúe considerando que las matemáticas y a las ciencias en general, no toman parte de la llamada *formación cultural* de las personas (aunque este es un asunto que dejo aparcado porque requiere una atención aparte). Se suele admitir que la enseñanza de las matemáticas usa y abusa de la abstracción. Una vez más la formación inicial que recibieron muchos profesores puede dar pistas sobre ese resultado. En casi todas las instrucciones que se dan para orientar la enseñanza de las matemáticas, se suele insistir en la idea de partir de elementos del entorno cotidiano para construirla. Pero cuando se pasa a la acción, la mayor parte de los textos hacen planteamientos abstractos sin tener en cuenta ese principio, salvo en contadas ocasiones. Por lo tanto, una forma de introducir cambios para mejorar la enseñanza y también el aprendizaje se centra en intensificar la forma significativa de enseñar. Sin embargo, hacer una enseñanza de ese tipo no quiere decir que tenga que convertirse a esta disciplina en algo estrictamente funcional. Es decir, que según ese criterio, solo hay que explicar aquello que "sirve" para algo. Lo demás hay que eliminarlo. Estimo que esta es una desviación peligrosa que se desprende de los análisis que algunos hacen del informe PISA cuando se dice, por ejemplo, *conocer cómo los estudiantes pueden utilizar lo aprendido en situaciones de la vida cotidiana.* Cuando digo que se abusa de la abstracción, no estoy queriendo decir que ésta tenga que desaparecer, ¡ni mucho menos! porque precisamente esa es una de las capacidades que también desarrolla la enseñanza de las matemáticas. Como casi siempre ocurre en situaciones de bipolaridad como esta, *en el término medio está la virtud.* Son muy peligrosos los cambios basados en dar bandazos de un extremo a otro. Recuérdese, por ejemplo, lo que ocurrió cuando se produjo la irrupción de la matemática moderna en los planes de estudio allí donde lo hizo.

Conclusiones

Termino haciendo un llamamiento a todos para que sigamos avanzando en la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; que aportemos ideas, estrategias, reflexiones. Que abramos de una vez el debate sobre los cambios de fondo que debemos promover para corregir los resultados tan deficientes que padecemos. Cambios en los contenidos para actualizarlos y tener presente los avances, tanto de las matemáticas como de las tecnologías; cambios en la metodología pues con la actual no se consiguen planamente los objetivos; cambios en la formación inicial porque ese es el cimiento de la transformación; intensificar la formación permanente porque todo evoluciona con el paso del tiempo y hay que responder a los nuevos retos que trae el cambio; posiblemente haya que transformar más variables pero si lo consiguiéramos en esas creo que podríamos hablar de verdad de una nueva etapa en el mundo educativo. Afortunadamente la educación matemática en nuestro entorno geográfico y cultural cuenta ya con personas muy cualificadas que, sin duda, podrán alumbrar ese camino. En la Universidad y fuera de ella existe un nutrido grupo de colegas que con sus tesis doctorales y con sus trabajos de innovación están aportando materiales e ideas que es necesario dar a conocer. Precisamente la comunicación entre nosotros es otro de los retos que debemos afrontar y, en ese sentido, la vía abierta por UNIÓN está en el buen camino. Por eso animo también a todos y a todas a colaborar y apoyar al máximo el trabajo que van a hacer las nuevas directoras. Que sepan que no están solas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 17 – 30
ISSN: 1815-0640

Los desarrollos hipermedia y el aprendizaje de la resta

Ricardo López Fernández; Ana B. Sánchez García

Resumen

Los resultados de la investigación que presentamos demuestran que la influencia de los desarrollos hipermedia sobre el conocimiento formal y procedimental en el proceso de aprendizaje algorítmico son decisivos y favorecedores del mismo. Específicamente hemos estudiado este hecho en el algoritmo de la sustracción. A través de los datos que presentamos podemos concluir que la instrucción apoyada en una metodología didáctica con apoyo hipermedial actúa sobre el dominio conceptual que sustenta el aprendizaje del algoritmo. Del mismo modo, los resultados han permitido comprobar la inestabilidad del error y su transformación en otras tipologías,

Abstract

The results of the investigation that we present demonstrate that the influence of the developments hipermedia on the formal and procedural knowledge in the process of learning algorithmic is decisive. Specifically we have studied this fact in the algorithm of the subtraction. Through the data that we present we can conclude that the instruction supported in a didactic methodology with support hipermedial would have acted on the conceptual domain that sustains the learning of the subtractions. In the same way, the results have allowed to check the uncertainty of the error and their transformation in other errors.

Resumo

Os resultados da pesquisa que apresentamos demonstram que a influência dos desenvolvimentos hipermídia sobre o conhecimento formal e procedimental no processo da aprendizagem algorítmica são decisivos e favorecedores do mesmo. Especificamente estudamos este fato no algoritmo da subtração. Através dos dados que apresentamos podemos concluir que a instrução apoiada numa metodologia didática com apoio hipermidial atua sobre o domínio conceitual que sustenta a aprendizagem do algoritmo. Do mesmo modo, os resultados permitiram comprovar a instabilidade do erro e sua transformação em outras tipologias.

1.- Introducción

La metodología didáctica que utiliza el ordenador como apoyo a la enseñanza surge de la fusión entre los postulados teóricos de la ciencia cognitiva y la tecnología de la información, de esta fusión han nacido distintos modelos de indiscutible aplicación al diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el área de las matemáticas. Durante las últimas décadas, la existencia de investigaciones relacionadas con el aprendizaje humano y los procesos de adquisición del conocimiento, han influido de manera evidente en la utilización de estos sistemas aplicados a la enseñanza (VanLehn, 1983a).

De estas investigaciones surgen teorías generales de adquisición del conocimiento (Anderson, 1983; Holland, Holyoak, Nisbett y Thagard, 1986, Newell, 1990; Ohlsson, 1993; VanLehn ,1983b; VanLehn, Ohlsson, y Nason, 1994), que inciden en el uso de estas metodologías. Posiblemente una de las mejores aportaciones, en este sentido, sea el desarrollo de simuladores que representan los procesos de aprendizaje que ha de llevar a cabo un estudiante con el fin de asegurar la consecución de un contenido determinado. La sustracción como modelo cognitivo procesal, se ha convertido en plataforma única, que ha contribuido al diseño y generación de sistemas informatizados aplicados a distintos ámbitos de la adquisición del conocimiento matemático.

Así, el papel de los desarrollos hipermedia cada día está siendo más decisivo, no sólo por su valor instrumental, sino porque emulan los mecanismos de procesamiento de la información que operan en nuestro pensamiento y han creado un “Standard” metodológico que, entre otras cosas, nos ha familiarizado con dichos mecanismos (López, 1999). Ello, ha permitido que avancemos, en un proceso que continuamente se retroalimenta, en la comprensión de nuestros propios procesos cognitivos (Rabinowitz, 1988; López, 2002, 2005; López y Sánchez 2006; Sánchez, 2005). Así pues, el entorno del ordenador, propiamente estructurado, puede proporcionar una herramienta, poderosa y motivadora, que permite dirigir la atención del estudiante directamente hacia sus propios procesos de pensamiento matemático (Collins y Brown, 1988).

La representación del pensamiento matemático que propician estos sistemas hipermediales es una componente esencial en el procesamiento cognitivo que acompaña y determina el aprendizaje algorítmico. Así mismo, los procesos de pensamiento que soportan este tipo de aprendizaje, se desarrollan a través de una interacción continua entre la representación externa – símbolos, lenguaje natural, representaciones gráficas, interfaces específicas con ordenador, objetos físicos…etc.- y los procesos mentales internos.

Es decir, la interacción entre el modelo y sistema de comunicación y los modelos y sistemas que median en el procesamiento del la información necesaria para realizar el cálculo algorítmico. En el desarrollo de la evolución del software aplicado a la educación matemática, las décadas de los años setenta y ochenta, bajo el influjo general del amplio desarrollo de las teorías cognitivas se caracterizaron por la innovación superadora de las antiguas aplicaciones de Enseñanza asistida por Ordenador.

En particular, y también en dicha década, se generaron múltiples desarrollos en ámbitos como los juegos de contenido y los simuladores .Todos ellos sentaron las bases para la producción de herramientas de cálculo simbólico avanzados como

Matemática (Wolframm, 1994), generadores del Micromundos como Cabri (Laborde, 1991), o simuladores de procesos y sistemas integrados de desarrollos de unidades didácticas en formato hipermedia.

Los simuladores de procesos matemáticos y de cálculo simbólico, se desarrollaron extraordinariamente en dichas décadas, siendo herederos de las investigaciones y desarrollos de los años precedentes y prolegómenos de las aplicaciones matemáticas más importante de los años noventa.

El desarrollo de la tecnología hipermedia a partir de los años noventa, ha supuesto la integración en una misma aplicación de los modelos precedentes (juegos, simulaciones,…etc).Por cuanto, la tecnología hipermedia, síntesis de los desarrollos multimedia con la tecnología hipertextual, permite generar desarrollos caracterizados por su capacidad de integración de múltiples formatos de representación, del conocimiento-lenguaje formal simbólico, icónico, ecónico...etc, constituye una tecnología básica y eficiente para implantar desarrollos orientados a la simulación de procesos.

Esta síntesis de funciones instrumentales opera en la medida en que los sistemas hipermedia, permiten el desarrollo integral de todas esas herramientas y usos. Por ello, los sistemas hipermedia constituyen una plataforma-soporte, como hasta ahora no habíamos tenido, esencial para desarrollar juegos instructivos en cualesquiera de las modalidades que se nos puedan ocurrir, por supuesto, para generar todo tipo de simulaciones con una potencia desconocida hasta esta década, también para implementar aplicaciones para el trabajo y la investigación en los campos de mayor especialización de la matemática, para recrear modelos y estilos cognitivos altamente eficientes y, por último, para posibilitar un trabajo de autoría sobre lenguajes y aplicaciones que, desde la perspectiva de los procesos de aprendizaje, son altamente significativas.

Desde la perspectiva de las teorías del procesamiento de la información y el aprendizaje, la capacidad multi-representacional de los soportes hipermedia, favorece la codificación, la elaboración y la organización del conocimiento. Con ello, la capacidad de almacenamiento, la eficiencia de su recuperación y la minimización de las interferencias, el decaimiento y el olvido en el proceso de aprendizaje.

Como anteriormente decíamos, varias características funcionales de los sistemas hipermedia, lo convierten en un soporte especialmente eficiente para desarrollar procesos de simulación en matemáticas.

En primer lugar una característica general, en cuanto a su capacidad para representar dinámicamente y en interacción con el usuario procesos de representación.

No obstante, esta capacidad en si misma, útil para los procesos de enseñanza de las ciencias en general, en el caso de los procesos de simulación en matemática debe venir acompañada de la capacidad para desarrollar, diversos sistemas de representación del conocimiento y específicamente, sistemas de representación formal-simbólica-notacional.

En este dominio de la representación, y a partir de la formalización modelizada establecida por Golding y Kaput, modelo citado por Kaput (1992), estamos en condiciones de abundar en las argumentaciones sobre la capacidad multi-representacional del soporte hipermedia y su influencia en el procesamiento de la información matemática en general y en los procesos de simulación en particular.

En efecto, el soporte hipermedia permite la representación integrada en los tres sistemas dimensionales establecidos en el modelo de Goldin-Kaput. En algunos de ellos, el sistema de representación soportado en formato multimedia amplía el rango de posibilidades que otros formatos presentaban. En particular, la integración de medios de representación que desarrolla cualquier aplicación multimedia, permite que los nodos de la estructura, soporten conocimiento representado en forma simbólico-notacional, diferentes formas y modelizaciones -, oral - escrita y cualquier representación figurativa del tipo que hemos llamado “imaginería”.

Esta multi-representación es, hasta el momento, la más completa que en la historia de los formatos y soportes instructivos, hayamos creado. Diferenciándose en los sistemas de representación de las posibilidades ofertadas y desarrolladas en otros medios como el libro, el diaporama, la televisión ó las aplicaciones informáticas de generaciones previas a los desarrollos multimedia.Los nodos que creamos con cualquiera de las aplicaciones multimedia, nos permiten desarrollar todas las funciones de los distintos sistemas de representación del conocimiento matemático

Otras posibilidades para el desarrollo de este tipo de funciones, por parte del sistema, se pueden establecer a partir de otras de las características del hipermedia, como es su capacidad dinámico - interactiva. Los sistemas hipermedia permiten por su disponibilidad, flexibilidad y capacidad dinámica interactiva, adoptar múltiples sistemas notacionales y representacionales enlazados y en interacción continua con el usuario. Aportan, con ello, la integración cognitiva de los conceptos matemáticos, Factor esencial en los procesos eficientes de enseñanza/aprendizaje.

Por todo ello, podemos indicar que los formatos hipermedia, superan las limitaciones representacionales y notacionales que los soportes estáticos de información matemática tienen- clase magistral, libros, manuales- . En los soportes y medios estáticos, los objetos notacionales no pueden cambiar en función del tiempo, por el contrario en los sistemas hipermedia-dinámicos pueden hacerlo.

Otra característica de los sistemas hipermedia es la dinamicidad basada en la capacidad de interacción con el usuario. Para los procesos de simulación dicha característica también resulta esencial.

Los medios interactivos son sistemas creados para dar respuestas y/o contribuciones físicas desde el sistema notacional instalado en el medio. En otras palabras, en los sistemas inertes el usuario solo puede responder a lo que directamente ha producido. Cualquier otro tipo de respuesta externa debe de aportarla un profesor, o agente externo.

Por el contrario en los sistemas interactivos, el propio sistema notacional responde a las acciones ejecutadas por el usuario, ofreciendo la posibilidad de contestación interactiva. Este mecanismo de “inputs-outputs” que retroalimentan, permanentemente al sistema representacional y notacional en un ciclo, en donde los “outputs” generan nuevos “inputs” y éstos, nuevos “outputs”, constituye la característica esencial de la interactividad.

En el campo de la sustracción, y de los simuladores de errores algorítmicos, la finalidad de estos sistemas se ha centrado en el diagnóstico, catalogación y tratamiento educativo de los errores que cometen los niños durante el aprendizaje. Podemos decir, que no sólo algunos de ellos, representan el proceso matemático sino que rastrean las acciones llevabas a cabo durante la tarea, para que el conjunto de pasos seguidos pueda volverse objeto de estudio y puedan especificarse habilidades necesarias para poder resolver el proceso.

Esta característica, en definitiva, constituiría una de las aportaciones más sobresalientes a nivel pedagógico, puesto que el entorno del ordenador, propiamente estructurado, puede proporcionar una herramienta, poderosa, motivadora, y aún sin explotar que enfoque la atención del estudiante directamente en sus propios procesos del pensamiento matemático, (Collins y Brown, 1988). Del mismo modo, estos sistemas ayudan a centrar la atención del docente, en esos procesos de aprendizaje netamente abstractos que configuran el conocimiento matemático, ayudándole a comprender los pasos seguidos por el alumno en la formulación del error algorítmico. Son pues, estos sistemas que podemos denominar modelos procesales, los que tratarían de representar el conocimiento a través de una red de procesos y subprocesos, en base a un conjunto de reglas o acciones relacionados con ellos.

El conocimiento en el que inciden de manera directa, es el conocimiento que versa sobre los procesos que dirigen y secuencian la realización de determinadas tareas. El objetivo más inmediato de los mismos es lograr un nivel de descripción, que permita asociar la actuación del aprendiz directamente con los componentes individuales de la red procesal. Autores como (Dillenbourg y Self, 1992), afirman que el elemento que conforma y representa a estos modelos, es fundamentalmente que sus componentes no son independientes; sino que están relacionados los unos con los otros. Este arquetipo, es el que se ha encargado más eficientemente de los errores en tareas matemáticas; ya que tiene capacidades de diagnóstico muy importantes. Un sistema pionero basado en este modelo es BUGGY, diseñado por Brown y Burton (1978), se configura alrededor de la red procesal del algoritmo de la resta. “Buggy”, constituye un referente esencial en la literatura científica sobre la cuestión.

El sistema, intentaba identificar y tratar los distintos "bugs[1]" o errores producidos en el algoritmo de la resta. Los errores, se basaban en un modelo mental avalado por una teoría psicológica.

A partir de este primer estudio, comienzan numerosas investigaciones que tratan de abordar los errores en distintas habilidades cognitivas. Se realiza una amplia investigación sobre los tipos de errores, y se categorizan en catálogos o librerías que se incorporan a los programas informatizados, como reglas de producción específicas del sistema, que dirigen las interacciones entre el estudiante y el tutor.

El trabajo de VanLehn (1990), extiende esta concepción de "Buggy", y analiza cómo se generan estos errores. Para este autor, los "bugs" son el resultado infructuoso de intentar extender las reglas algorítmicas existentes y aplicarlas a nuevas situaciones, y esta acción conformaría lo que el denomina "repairs", o reparaciones que constituyen cada una de ellas un "bug" diferente. Las reparaciones pueden programarse y pueden predecirse. Esta premisa se convierte en el núcleo central de su teoría llamada "Impasse-Driven Learning" o "Repair Teori" (Brown y VanLehn, 1980; Brown y VanLehn, 1982; VanLehn, 1983b; 1990) que es aplicada para pronosticar los "bugs" de los estudiantes en la solución de restas multicolumna. Entre otros logros, la teoría de la Reparación predijo la ocurrencia de ciertos modelos inestabilidades o "migraciones del bug" a corto plazo. Estas inestabilidades, fueron encontradas por VanLehn en 1982.Con el objetivo de establecer una librería de bugs, el autor, diseñó un sistema informatizado denominado SIERRA. El objetivo básico que persigue esta implementación informática en su investigación, es desarrollar rigurosamente la teoría que soporte el proceso de aprendizaje, aprovechándose del poder del modelo informatizado. En nuestro trabajo hemos utilizado la tipología de "bugs" establecida por este autor, a través del sistema informatizado SIERRA.

Otros autores importantes en cuanto al diseño de teorías psicopedagógicas, relacionadas con la adquisición del error algorítmico, que utilizan sistemas informatizados son Young y O´Shea (1981), con el sistema PS, (Sistema de Producción de Errores en la Sustracción), Ohlson y Langley con su sistema DPF (Diagnostic Path Finder, de 1988).

2.- Objetivos y metodología de la investigación

El objetivo esencial de la fase de investigación, fue comprobar si los errores disminuyen cuando el aprendizaje del algoritmo se complementa con desarrollos hipermedia.

[1] **Bugs, buggy procedures-Buggy algorithms**: Términos utilizados para denominar los errores producidos en los algoritmos, tomados del lenguaje de programación informática, donde un proceso erróneo es un proceso correcto con una o más pequeñas perturbaciones, o agujeros, instalados en él, (Brown and Burton 1978, Burton 1982, VanLehn 1982).

2.1. Participantes

Un total de 18 niños que eran la totalidad de niños escolarizados en un C.R.A. (Colegio Rural Agrupado), situado en zona de montaña con creciente despoblación en la provincia de Salamanca. Fueron testeados a principios de curso con la prueba de las 20 restas de VanLehn 1990, con el objetivo de comprobar los errores que cometían y categorizarlos según la librería de bugs establecida por VanLehn en 1990. A nueve de los18 niños , el total de escolarizados en los cursos 2º, 3º y 4º se les pasó un postest practicado a finales del mismo curso, para comprobar la tipología del error cuando el aprendizaje se produce en el aula también con el apoyo del ordenador. Durante todo el curso estos niños habían trabajado con programas hipermedia como complemento de la enseñanza tradicional. Utilizamos programas como "Adibu y Quince por Quince", ampliamente conocidos en el contexto escolar. El tiempo dedicado al trabajo con estos programas en el ámbito del cálculo algorítmico fue de una hora a la semana.

2.2. Material y procedimiento

Prueba de las 20 restas. Los niños resolvieron en el aula sin límite de tiempo, 20 sustracciones, usadas por VanLehn (1990:170), que constituyeron para el autor uno de los instrumentos básicos de identificación de una gran variedad de errores. La fiabilidad y validez de la misma viene avalada por la investigación realizada por el autor, que constituye una referencia de orden mundial en el campo de estudio de los errores en la sustracción y que fundamentó su teoría "Repair Theory". El tiempo previsto para la realización de ambas pruebas era ilimitado.

Las pruebas se pasaron durante la primera quincena del mes de diciembre para el pretest, y la última quincena del mes de junio del curso académico 2004 para el postest.

3.- Resultados

Con el objeto de establecer conclusiones relacionamos las medias del total errores del pretest con las del postest. En la tabla nº 1 informamos sobre los resultados

Variables dependientes	$\bar{X}$ Pre.	$\bar{X}$ Post.	t	p
Total errores en 20 restas	9,11	5	4,11*	0,018*

Tabla 1. Prueba t, para muestras relacionadas (pre-post errores en restas). * n.s.=0,05

Del análisis de la tabla anterior observamos la existencia de diferencia significativa (ns=0,05) entre las medias de errores totales en las 20 restas.

Evidentemente, en el postest, se han reducido significativamente los errores encontrados en el grupo.Afirmamos, por tanto, que los errores disminuyeron durante el proceso de enseñanza. Proceso que, fue complementado con una metodología didáctica que integró desarrollos informáticos e hipermedia en el aprendizaje del algoritmo. No podemos establecer conclusiones definitivas, aunque sí creemos que las investigaciones de autores como Brown y Burton (1978), VanLehn (1990), Spicer (2000), relacionadas con este tema, caminan en la dirección teórica que evidencia la influencia positiva en el aprendizaje del algoritmo y en el descenso de los errores cuando el proceso de enseñanza/aprendizaje se basa en mediadores tecnológicos como los programas informáticos para el entrenamiento algorítmico.

Para dar un paso más analizamos qué errores se mantuvieron durante el proceso y las características más destacadas de los resultados de dicho proceso. En la tabla nº 2, que presentamos a continuación, plasmamos por cada una de las restas, las categorías de errores en el pretest y las categorías de errores en el postest.[2]

Restas	*Pre Categ. Errores**	*Post. Categ. Errores**		
		Desaparecen	**Nuevos**	**Transformación**
R1 (647-45)				
R2 (885-205)				
R3 (83-44)	93	Desaparecen todos	39	
R4 (8305-3)				
R5 (50-23)	64, 36, 65, 93	64,36		65, 93 → 29 en (n=1)
R6 (562-3)	93	93		93,79 → 79 en (n=1)
R7 (742-136)	9, 93, 1	9,93,1		
R8 (106-70)	64,36,55,93	Desaparecen todos		
R9 (716-598)	32,39,93,33	32,39		93→33/33→38
R10 (1564-887)	122,93,44,99	122,93,44,99	39	
R11 (6591-2697)	5,39,27,93,33,29, 45,93	Desaparecen todos		29→5/ 45→5/ 5→45
R12 (311-214)	5, 93, 45093[3]			5→39/ 93→44/45093→5
R13 (1813-215)	5, 5093			5093→5
R14 (102-39)	64,39, 64093,20,65093			64093→79/ 20→40/
R15 (9007-6880)	64, 40, 65093, 20,4			40→28/ 65093→36/ 36→40.
R16 (4015-607)	64068, 39068, 93068	Desaparecen todos		

[2] Los diferentes errores aparecen con su nombre original en inglés. Existe un consenso general en la utilización de la nomenclatura anglosajona para la descripción de los errores o bugs. Para categorizar los errores cometidos por los alumnos, tomamos como referente el glosario de errores "(bugs)" definidos por VanLehn (1990:223). Asignamos un número del 1 al 120, para cada uno de los errores y agregamos el nº 121 (subcategoría no diagnosticable) y el nº 122 (error de cómputo). Para el estudio de las categorías, utilizamos el programa estadístico SPSS 11.5., al que recurrimos para el análisis cuantitativo de las frecuencias y tipificación de los errores. En total, analizamos 122 errores distintos.

[3] Para describir claramente las categorías de errores combinados y poderlos analizar en el programa SPSS 11.5., optamos por incluir un 0 que separar los errores. Ejemplo 45093 es un error combinado producido en la misma resta en la que el niño comete los errores 45 y el 93.

Restas	Pre Categ. Errores*	Post. Categ. Errores*		
		Desaparecen	Nuevos	Transformación
R17 (702-108)	20, 75, 93,			75 →20
R18 (2006-42)	74, 64, 101, 20, 69, 93			64074→28/64093→40 / 64093→74
R19 (10012-214)	64,5,74,93,7	Desaparecen todos		
R20 (8001-43)	29,64,39,74			29064→76/ 39074→28/ 20074→20

Tabla 2. Errores y su transformación en Pret. y Post. Categorías de errores especificados y descritos en el anexo nº 1, según nomenclatura y ejemplos tomados de VanLehn, (1990).

4.- Conclusiones

De la observación de las tablas anteriores establecemos las siguientes conclusiones:

La mayor parte de los errores que se mantienen se transforman en otras categorías. De estas categorías destacamos las siguientes: 5, 79, 40, 20, 28, 29 (ver descripción de errores en anexo I). A nivel general, apreciamos la desaparición de errores como el 93 (smaller-from-larger) en cuya naturaleza autores como Resnick y Omanson (1987), López y Sánchez (2007), señalan como decisiva la falta de comprensión del dominio conceptual que preside el algoritmo. Por tanto, este error es clasificado como un error de origen semántico. Es decir, la instrucción que se sirve de una metodología con apoyo hipermedial habría actuado sobre el dominio conceptual que sustenta el aprendizaje de las restas; aunque los alumnos-as aún no han aprehendido o capturado la estructura procesal; puesto que los errores que producen tras la transformación de estos primeros denotan que siguen teniendo problemas cuando el cero está en el minuendo y requiere pedir prestado, y manifiestan las siguientes conductas:

- No hacen decremento en un número que está encima de un espacio en blanco.
- Omiten el decremento, a menos que la columna que ha de ser decrementada sea la columna situada más a la izquierda del problema.
- Piden prestado al sustraendo en lugar de al minuendo.
- Al pedir prestado de uno o más ceros, cambian todos los ceros a nueve, pero no hacen decremento alguno en el dígito que no lleva 0.
- Al pedir prestado a un cero, salta a la columna situada a la izquierda del mismo.

Por tanto, aunque la base conceptual del algoritmo ha sido reforzada, los errores iniciales se convierten en errores cuya base está sustentada en la regla del préstamo, fundamentalmente cuando hay un cero que es indicador de valor posicional en el minuendo. En relación a la transformación de unos errores en otros, no podemos concluir este apartado sin introducir la connotación del error como "inestable", VanLehn (1990). Para este autor los errores humanos en el algoritmo de la resta, no son estables como lo son los errores en la programación de ordenador. Por el contrario, son inestables. Así, los niños evolucionan desde la adquisición a la eliminación de determinados bugs, o el cambio por otros. A este fenómeno lo denomina "emigración del bug". La explicación teórica a esta conducta inestable es que el estudiante tiene un procedimiento subyacente estable; pero el procedimiento está incompleto de tal manera que el estudiante comete errores en función de sus experiencias anteriores. En este caso, la tipología del error básicamente está influenciada por la inadecuada enseñanza de la regla del préstamo y el concepto del cero como indicador de valor posicional.

De este modo, apreciamos en nuestro estudio el fenómeno de la emigración del error (Tabla 2), comprobado con anterioridad por VanLehn (1990). Aunque nuestra observación se efectúa en un contexto situacional de enseñanza aprendizaje, obviamente distinto.

En general, de los resultados expuestos en este artículo podemos concluir que el grupo de niños que había sido instruido en el algoritmo de la resta con ayuda de software comercial hipermedia, había obtenido mejores resultados en el postest. No tratamos de generalizar, las conclusiones de este estudio; pues era un estudio reducido de casos. No obstante estos incipientes resultados, nos permiten situarnos en la línea de autores que han investigado esta temática, como Anderson (1988); Brown y Burton (1982); Carbonell (1970); Langley y Ohlsson (1984); López (1999); Martín y VanLehn (1995) y otros muchos, que refrendan la utilización del ordenador como complemento al diagnóstico y tratamiento de los errores aritméticos.

Anexo 1. Descripción de los errores[4]. Tabla 2.

Categoría	Nombre	Descripción	Ejemplo
93	Smaller-from-larger	El estudiante no roba, pero sustrae el dígito más pequeño del más grande en cada columna	81-38=57
39	Borrow-no-decrement	Al pedir prestado, el estudiante agrega diez correctamente, pero no cambia ninguna columna a la izquierda.	62-44=28
64	Diff-0-N =0	Cuando el estudiante encuentra una columna 0-N del formulario, ella no pide prestado pero en cambio escribe el cero como la respuesta de la columna.	40-21=20
36	Borrow-from-zero-is-ten	Al pedir prestado por el cero, el estudiante cambia el cero a diez y no hace el decremento en el dígito a la izquierda.	604-235=479
65	Diff-0-N=N	Cuando el estudiante encuentra una columna 0-N del formulario, él no pide prestado pero en cambio escribe a N como la respuesta.	80-27=67
29	Borrow-from-bottom	El estudiante pide prestado del sustraendo en lugar de la fila del minuendo.	87 – 28= 79
79	Forget-borrow-over-blanks	El estudiante no hace el decremento en un número que está encima de un espacio en blanco.	347-9=348
9	Add-instead-of-sub	El estudiante añade en lugar de substraer.	32-15=47

[4] Ordenados por orden de aparición en la tabla nº 2.

Categoría	Nombre	Descripción	Ejemplo
1	0-n=0-after borrow	Cuando una columna tiene un uno que se cambió a ceros por un préstamo anterior, el estudiante escribe el cero como la respuesta a esa columna.	914-486=508 906-484=422
55	Decrement-all-on-multiple-zero	Al pedir prestado a lo largo de los ceros, y el préstamo se causa por un cero, el estudiante cambia el cero correcto a nueve en lugar de diez.	600-142=457
32	Borrow-from-one-is-nine	Cuando pide prestado de un uno, el estudiante lo cambia a un nueve en lugar de un cero.	316-139=267
33	Borrow-from-one-is-ten	Al pedir prestado de un uno, el estudiante cambia el uno a diez en lugar de a cero.	414-277=237
38	Borrow-into-one=ten	Cuando un préstamo se causa en una columna del formulario 1-N, el estudiante cambia el uno a un diez en lugar de agregar diez a él.	71-38=32
122	Only-do-first & last-columns	Se hacen las primero y últimas columnas del problema correctamente, pero se omiten otras columnas.	345-111=2 4
44	Borrow-only-once	El estudiante hace los primeros robos correctamente en un problema. Después el estudiante sólo hace la adición de diez y omite el decremento	535-278=357
99	Smaller-from-larger-with-borrow	Al pedir prestado, estudiante substraen el dígito menor correctamente del más grande como si no hubiera pedido prestado en absoluto.	73-24=41
5	1-1=0-after-borrow	Si una columna tiene un 1 en el minuendo y en el sustraendo y se le pide prestado, el estudiante escribe el cero como la respuesta a esa columna.	812-518=304
27	Borrow-don´t-decrement-unless-bottm-smaller	El estudiante no hace el decremento en una columna si T≤B.	732 -484= 258
45	Borrow-skip-equal.	Cuando decremnta, el estudiante salta las columnas en que el dígito de la cima y el dedo del fondo es el mismo.	923-427=406
79	Forget-borrow-over-blanks	El estudiante no hace el decremento en un número que está encima de un espacio en blanco.	347-9=348
20	Borrow-across-zero	Al pedir prestado a un cero, el estudiante salta encima del cero para pedir prestado de la próxima columna. Si esto le exige que pida prestado dos veces, ella los decrementa el mismo número ambas veces.	904-7= 807
40	Borrow-no-decremnt-except-last	El estudiante omite el decremento a menos que la columna que ha de ser decrementada sea la columna más a la izquierda en el problema.	6262-4444=1828
4	0-N=N-except-after-borrow	El estudiante piensa que 0-N es N excepto cuando a la columna se le ha pedido prestado.	906-484=582
28	Borrow-from-all-zero	Al pedir prestado por uno o más ceros, el estudiante cambia todos los ceros a nueve, pero no hace el decremento del dígito que no lleva 0 en el minuendo apropiadamente.	3006-1807=2199
68	Dif-N-0=0	El estudiante piensa que N-0 es 0.	57-20=30
75	Don´t decrement-zero-over-zero	El estudiante no pide prestado por un cero que está encima de un ceros.	305-107=208

Categoría	Nombre	Descripción	Ejemplo
74	Don´t decrement-zero-over-blank	El estudiante no pide prestado por un cero que está encima de un espacio en blanco.	305-9=306
101	Stops-borrow-at-second-zero.	Al pedir prestado por varios ceros, el estudiante cambia los ceros situados más a la derecha por nueve, pero no cambia otras columnas a la izquierda.	4004-9=4095
7	Add-borrow-decrement	En lugar de restar, el estudiante añade uno, llevándose en la próxima columna si necesario	863-134=749 893-104=809
76	Don´t-decrement-zero-until-bottom-blank.	Al pedir prestado por un ceros, el estudiante cambia el cero a un diez en lugar de un nueve a menos que el cero está encima de un espacio en blanco en que el caso él hace la cosa correcta.	506 - 318=198

Bibliografía

- Anderson, J. (1983): *The architecture of cognition*, Harvard University Press: Cambridge, Massachusetts -EE.UU.
- Anderson, J. (1988): The Expert Module (Capítulo II). In: Martha C. Polson and J. Jeffrey Richardson. Lea (eds.) *Foundations of Intelligent Tutoring Systems*, Hove & London.
- Brown, J.; Burton, R.(1978):"Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills". *Cognitive Science*, 2, 155-192.
- Brown, J. ; VanLehn, K. (1982): "Towards a generative theory of "bugs"". In T. Carpenter, J. Moser; T. Romberg (Eds.), Addition and subtraction: *A cognitive perspective*, (pp. 117-135). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Brown, J.; VanLehn , K. (1980): "Repair Theory: A Generative Theory of bugs in Procedural Skills". *Cognitive Science*, 4, 379-426.
- Burton, R. (1982): "Diagnosing bugs in a simple procedural skill". In D. H. Sleeman, y J. S. Brown (Eds.) *Intelligent Tutoring Systems*, (227-240), New York: Academic Press.
- Carbonell, T.(1980): "Cognitive development and mathematics learning", In R. Shaumway (comp.), *Research in Mathematics Education*. Reston,Virginia, National Council of Teachers of Mathematics.
- Collins, A. y Brown, J. (1988): "The computer as a Tool for Learning Through Reflection". In H. Mandl & A. Lesgold (Eds.), *Learning Issues for intelligent tutoring system* (pp. 1-18).New York: Springer-Verlag.
- Dillenbourg P., Self J. (1992): A framework for learner modeling. Technical report AAI/AI-ED 74, Departament of Computing, Lancaster University.
- Holland, L.; Holyoak, K.; Nisbett, R. y Thagard, P. (1986): *Induccion: Processes of inference, learning and discovery*. Cambridge: MA: MIT Press.
- Laborde, J-M. (1991*): CABRI Geometry*. New York: Brooks-Cole.
- Langley, P.; Ohlsson, S. (1984). Automated cognitive modeling. *Proceedings of the Fourth national Conference of the American Association for Artificial Intelligence* (pp. 193-197). Austin, TX: Morgan Kaufmann.

- López, R. (1999): *Desarrollos curriculares de la ciencia de computadores en la enseñanza elemental*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Salamanca, Facultad de Educación, Salamanca. España.
- López, R. (2002). "La resolución de problemas y los soportes hypermedia". *Aula*, revista de enseñanza e innovación educativa, 14, 93-107.
- López, R. (2005): "Motivation, Hypermedia Systems and e-learning". In F.J. Garcia, M. López, R. López and E. Verdú (editors*), Educational Virtual Spaces in Practice*. The Odiseame Approach (pp. 91-105). Ariel, Barcelona.
- López, R., Sánchez , A.B. (2006): "Criteria and Prescriptions in the Design of Hypermedia for E-Learning Programs". En Verdú, E.; Verdú M. J., García, J., and López, R. (2006): *Best Practices in E-learning: Towards a Technology-based and Quality Education* (pp. 9-25). Ediciones Boecillo Multimedia S.A, Valladolid.
- López Fernández, R., Sánchez García, A.B. (2006):"Adquisición del error en la sustracción en Educación Primaria". *Proceedings of International Symposium on Early Mathematics*. Publisher by Department of Psychology. University of .Cadiz. Research Group HUM-634, Cadiz, 249- 261.
- López, R.; Sánchez, A.B. (2007):"Estudio de los componentes generadores de errores algorítmicos". Caso particular de la sustracción. En *Revista de Educación INCESE*, 344, pp. 377-402
- López, R.; Sánchez, A ,B. (en prensa)."Análisis de los errores sistemáticos en la sustracción ". En *Enseñanza de las Ciencias, Revista de investigación y experiencias Didácticas*. Institut de Ciències de l'Educació, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Martin, J.; VanLehn, K. (1995): "Student assessment using Bayesian nets". *Human- Computer Studies*, 42, 575-591.
- Newell, A. (1990): *Unified Theories of Cognition*. Cambridge, MA: Harvard.
- Ohlsson, S.; Langley P. (1988): "Psychological evaluation of path hypotheses in cognitive diagnosis". In H. Mandl & A. Lesgold (Eds.), *Learning sigues for intelligent tutoring system* (pp. 42-62).New York: Springer-Verlag.
- Kaput, J. J. (1992): "Technology and Mathematics Education". En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- Rabinowitz, M. (1988) (Ed.): "Computer simulations as research tools". *International Journal of Educational Research*, 12(1), 1-102.
- Resnick, L.; Omanson, S. (1987): "Learning to understand arithmetic". In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology*, 3, 41-95. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Sánchez, A. B. (2005): *Componentes Cognitivo contextuales en la generación de los errores algorítmicos "Bugs" y su tratamiento con desarrollos hipermedia*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Salamanca, Facultad de Educación, Salamanca. España.
- Sánchez, A. B (2006.): "Aportaciones educativas de los Modelos informatizados de diagnóstico cognitivo en el algoritmo de la sustracción*". Revista electrónica de Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la sociedad de la información*. En http://www3.usal.es/.
- Spicer, J. (2000): Virtual Manipulative: A New Tool for Hands-on Math. ENC Focus 7 (4) p. 14. Extraído en junio de 2004 de

Http://www.enc.org/features/focus/archive /equity/document.shtm?input=FOC-001754-index

- VanLehn, K. (1982): "Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses and repairs in procedural skills". *Journal of Mathematical Behaviour*, 3, 3-71.
- VanLehn, K. (1983a): Felicity conditions for human skill acquisition: Validating an AI-based Theory (Tech. Rep. No. CIS-21). Palo Alto, CA: Xerox PARC.
- VanLehn, K. (1983b):"On the Representation of Procedures in Repair Theory" In: Ginsburg, H. (ed.), *The Development of Mathematical Thinking*, New York: Academic Press.
- VanLehn, K. (1990): *Mind bugs: origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- VanLehn, K., Ohlsson, S.; Nason, R. (1994):" Applications of Simulated Students: An Exploration". *Journal of Artificial Intelligence in Education*, 2, 135-175.
- Wolfram, S. (1991): "Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer". Addison-Wesley.
- Young, R. y O'Shea, T. (1981):" Errors in children's subtraction". Cognitive Science, 5, 153-177.

Ricardo López Fernández, Licenciado con grado en Ciencias Físicas por la Universidad Complutense de Madrid y Doctor en Educación por la Universidad de Salamanca con premio extraordinario de doctorado. Profesor Titular de Educación Matemática de la Universidad de Salamanca. Ha sido Vicerrector de Economía en la Universidad de Salamanca. En la actualidad, es Director del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y Ciencias Experimentales. Ha participado en diversos programas europeos como FEDER; ADAPT, EUMEDIS y ha desarrollado diversos proyectos de evaluación educativa y tecnológica. Ha publicado en colaboración con otros autores 11 libros y diversas producciones multimedia en soporte CD-Rom de carácter educativo. Alguna de ellas premiadas. Tiene numerosas publicaciones e investigaciones en el campo de la aplicación de las tecnologías de la Información y la Comunicación a los procesos educativos en revistas de impacto como: RIBIE, Computer& Education, R.E (Revista de Educación), Revista de Enseñanza de las Ciencias. Universidad Autónoma .Barcelona, etc. (riclop@usal.es)

Ana B. Sánchez García, Licenciada en Ciencias de la Educación por la Universidad de Salamanca y Doctora en Educación con premio extraordinario de doctorado en la misma Universidad. Master en Servicios Sociales por la Universidad de Extremadura. Profesora Asociada en el Dpto. de Didáctica, Organización y Métodos de Investigación de la Universidad de Salamanca. Ha participado en diversos proyectos de investigación I+D+I. Ha desarrollado tareas de coordinación de cursos de Formación del Profesorado en el I.U.C.E. de la Universidad de Salamanca . En la actualidad, es Asesora de Investigación en el Centro Internacional de Tecnologías Avanzadas (CITA) y ha desarrollado diversos proyectos de evaluación educativa y tecnológica. Ha publicado distintos artículos en revistas de impacto como: R.E (Revista de Educación), Revista de Enseñanza de las Ciencias. Universidad Autónoma .Barcelona, etc. (asg@usal.es)

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 31 – 51
ISSN: 1815-0640

Cuadratura, primera noción de área y su aplicación en la expresión del área de diferentes figuras geométricas como recurso didáctico en la extensión geométrica del Teorema de Pitágoras

Julio Cesar Barreto Garcia

Resumen

En este articulo mostraremos la extensión del Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica, tomando en consideración el área de las figuras geométricas que estan sobre los lados de um triángulo rectángulo y de esta manera ver que se cumple la relación Pitagórica para cualquier tipo de figuras que cumplan cierta relación. Esta axtensión la vamos a realizar espresando el área de algunas figuras geométricas en función de otras, como por ejemplo el área de un triángulo equilátero en función del área de un cuadrado de lado igual a la del triángulo equilátero, para lo cual cuadratura es lo mismo que decir área.

Abstract

In this article we consider an extension of the classical geometric Pythagoras theorem, taking into consideration the areas of the geometric figures which by on the side of rectangular triangle. In this way we see that the Pythagoras relationship holds for every kind of figures which satisfy certain conditions. In particular, this extension is obtained by expressing the areas of some geometric figures as a function of some others, for instance the area of an equilateral triangle as a function of the area of a square whose side is the same of the side of the triangle.

Resumo

Neste artigo mostraremos a extensão do Teorema de Pitágoras na sua acepção geométrica, levando em consideração a área das figuras geométricas que estão sobre os lados de um triângulo retângulo e desta maneira ver que se cumpre a relação Pitagórica para qualquer tipo de figuras que cumpram certa relação. Esta extensão vai ser realizada expressando a área de algumas figuras geométricas em função de outras, como por exemplo, a área de um triângulo eqüilátero em função da área de um quadrado de lado igual a do triângulo eqüilátero, para o qual quadratura é o mesmo que dizer área.

Introducción

El desarrollo de los *procesos cognitivos* en el campo de la *Didáctica de la Matemática* es capaz de ayudar a nuestros estudiantes en la resolución de problemas de geometría, los cuales se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por Duval (1998) y desarrollados por Torregrosa, G. y Quesada, H (2007) en la ultima referencia, en donde el proceso cognitivo de *visualización* está íntimamente relacionado con la forma geométrica de la figura, es decir, su configuración y el *razonamiento* se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponda algebraicamente.

La coordinación de estos *procesos cognitivos* les permitirá construir una teoría para *deducir* el Teorema de Pitágoras desde una acepción geométrica, tomando en consideración los cuadrados que se coloquen sobre los lados de un triángulo rectángulo cualquiera, teniendo en cuenta la idea de área, esto es, si A y B son las áreas de los cuadrados construidos sobre las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo y C es el área del cuadrado construido sobre la longitud de la hipotenusa, entonces se debe cumplir que $A+B=C$. Además trataremos de extender este caso a figuras geométricas poligonales (triángulos equiláteros, pentágonos, hexágonos, etc.) y figuras curvilíneas (semicírculos o lúnulas), lo cual lo haremos expresando el área de estas figuras geométricas en función del área del cuadrado, la cual deduciremos previamente que se cumple la relación Pitagórica.

Relevancia del trabajo para la Educación Matemática

En la *Historia de la Matemática*, se le atribuye a Bhaskara una demostración del Teorema de Pitágoras en el siglo XII en donde asoció la formula $a^2+b^2=c^2$ con el área de los cuadrados que estaban sobre los lados de un triángulo rectángulo (a y b sobre las longitudes de los catetos y c sobre la longitud de la hipotenusa) y operando con los cuadrados que estaban sobre las longitudes de los catetos logró formar el cuadrado que esta sobre la longitud de la hipotenusa.

Esta nueva forma de *deducir* el Teorema de Pitágoras, diferente a la de Bhaskara, permitirá a nuestros estudiantes divertirse operando con figuras geométricas junto a sus compañeros fomentando la unión grupal y les servirá para ir conociendo un poco lo que en matemática significa los conceptos de deducción, extensión y expresión de las áreas de unas figuras geométricas en función de otras, lo cual crea varias formas de aprendizaje en nuestros estudiantes y les hará pensar que los teoremas pueden extenderse de una manera más amena, sin perder la esencia del mismo.

Marco teórico y calidad bibliográfica

El campo de la *Didáctica de la Matemática* ha tomado un auge en los últimos años, debido al estudio que ella ha realizado en relación a los *procesos cognitivos* que deben desarrollar nuestros estudiantes al resolver los problemas de geometría en los cuales estén envueltos.

En este articulo usaremos el modelo propuesto por Duval, en el cual se restringe un poco el concepto de *visualización* al de *aprehensión*, para el cual "Concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar" según el Diccionario de la Real Academia Española (2001). En estas aprehensiones, nos desplazaremos de una que empieza cuando el estudiante ve intuitivamente el Teorema de Pitágoras y la cual es llamada *aprehensión perceptiva* e iremos hacia una que conlleva a modificar la configuración inicial y es llamada *aprehensión operativa*, esto nos llevara a un *razonamiento configural* de un *anclaje visual* (ver los cuadrados) a un *anclaje discursivo* (Teórico: Usar los productos notables).

Además sabemos que Piaget, J (1896-1980) destaca lo siguiente: En la etapa de las operaciones formales (de los 11 años en adelante) los adolescentes pasan de las experiencias concretas reales a pensar en términos lógicos más abstractos. Son capaces de utilizar la *lógica propositiva* para la solución de problemas hipotéticos y para derivar conclusiones. Son capaces de emplear el *razonamiento inductivo* para sistematizar sus ideas y construir teorías sobre ellas; pueden usar el *razonamiento deductivo* para jugar el papel de científicos en la construcción y comprobación de teorías. Pueden usar un *lenguaje metafórico* y *símbolos algebraicos* como símbolos de símbolos. Son capaces de pasar de lo que es real a lo que es posible, pueden pensar en lo que podría ser, proyectándose en el futuro haciendo planes en Teoría cognoscitivas en la etapa de desarrollos formales (D, Bolívar, 2000). Por lo cual podemos pensar en que nuestros estudiantes son capaces de usa el *razonamiento inductivo* y el *razonamiento inductivo* en estas extensiones del Teorema de Pitágoras.

A pesar de que muchas veces partamos de situaciones netamente intuitivas, J, Molin y A, Oktaç señalan que Fischbein (1987,1989) dice lo siguiente: El término *intuición* no tiene definición única, sino que debemos entenderlo como aquellas ideas que se aceptan como ciertas al ser evidentes por si mismas, no requieren de argumentación para que sean aceptadas, es decir, así tenemos que el Teorema de Pitágoras no es evidente por si mismo, después de su demostración e instrucción escolarizada nos convencemos de su certeza. Además dice que: Las personas tenemos la necesidad de entrar en un estado de convencimiento acerca de los conceptos matemáticos con los que nos encontramos, es decir, tener certeza de ellos. Ese estado de convencimiento es mediado por la *intuición* a través de *modelos intuitivos*. La delimitación que es fundamental para dar sentido a este articulo es la referente a *modelos intuitivos* ya que ello influye en la cognición que nuestros estudiantes puedan adquirir al examinar el Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica y extenderlo expresando el área de algunas figuras geométricas como el cuadrado en función del área de otras figuras geométricas, bien sean estas triángulos equiláteros pentágonos, semicírculos, lúnulas, etc.

Para Fischbein los *modelos intuitivos* son nociones intuitivamente aceptables que se desempeñan como un sustituto de las nociones intuitivamente inaceptables:

Los modelos representan una herramienta esencial para moldear o para darle forma a las cogniciones intuitivamente inaceptables. Cada vez que una persona se tiene que enfrentar con una noción intuitivamente inaceptable tiende a producir (algunas veces deliberadamente, otras inconscientemente) sustitutos de esta noción que son intuitivamente mas accesibles. Tales sustitutos son comúnmente llamados modelos intuitivos (Fischbein, 1987, p. 21 traducción y énfasis de la referencia de J, Molina y A, Oktaç, 2007).

Metodología y resultados

Se trata de un estudio del Teorema de Pitágoras visto desde una acepción geométrica realizado en diversos eventos de *Educación Matemática* tanto nacionales como internacionales donde participaron diferentes estudiantes y profesores en esta área. Se diagnostico mediante una serie de actividades en torno a la *deducción* que se ha realizado en torno a este teorema tan importante para la matemática en general, la demostración la haremos usando los productos notables de la suma y de la diferencia del cuadrado de dos cantidades desde un punto de vista geométrico y partir de allí vamos a extender el Teorema de Pitágoras para otro tipo de figuras geométricas expresándolas en función de la deducción anterior.

“La Geometría existe en todas partes... En el disco del sol, en la forma del datilero, en el arco iris, en el diamante, en la estrella de Mar, en la tela de araña y hasta en un pequeño grano de arena”.

Platón. Filosofo griego.

Nota histórica (Demostración de Platón: el Menon)

Según nos cuenta D. Jiménez en la sexta referencia: El cuadrado, es la figura rectilínea perfecta por excelencia, y se impuso desde el principio como el principal patrón de comparación, de allí que la palabra “cuadratura” fuera utilizada como una forma de referirse a lo que hoy denominamos calculo del área.

En la Figura 1 de abajo se nota como cuadrar un rectángulo formado por los dos cuadrados rojos en un solo cuadrado como lo es el cuadrado azul que esta sobre la longitud de la hipotenusa:

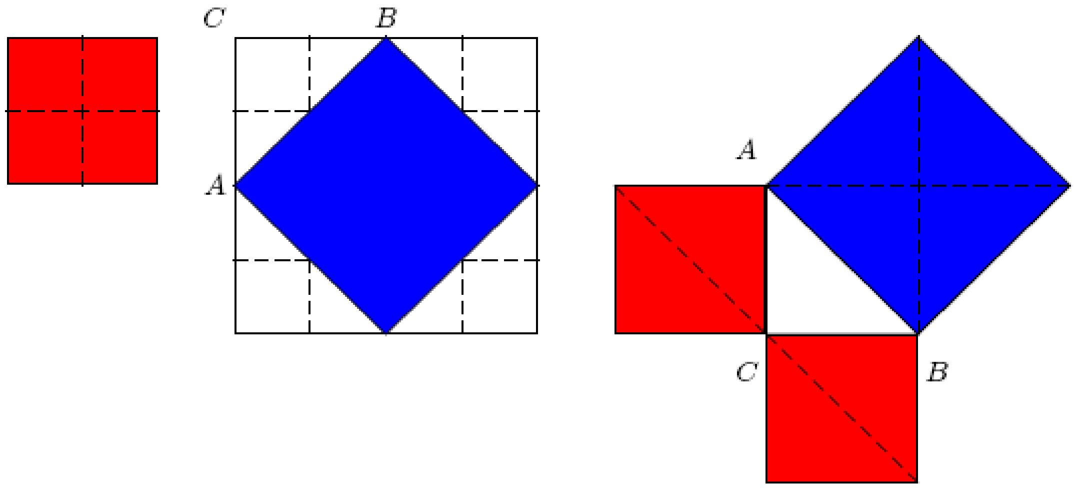


Figura 1: Platón construyó un cuadrado cuyo lado es de dos unidades (izquierda, rojo). Su área vale cuatro unidades cuadradas. Trazando un nuevo cuadrado ahora sobre su diagonal AB, se obtiene un cuadrado de ocho unidades cuadradas (centro, azul), doble superficie de la del primero. Hasta aquí la duplicación del cuadrado.

Pero esto no es una demostración, es simplemente una *inducción*[1] muy particular del Teorema de Pitágoras[2], por lo cual veamos la parte de abajo.

Deducción a través del trinomio cuadrado perfecto

Vamos a ver el siguiente *proceso de inferencia deductiva* para tratar de encontrar una forma de demostrar el Teorema de Pitágoras, apelando a los *procesos cognoscitivos*[3] que intervienen en la *resolución de un problema*[4].

Esto lo haremos a partir del producto notable del cuadrado de la suma de dos cantidades:

Sea, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Despejando tenemos que:

$$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2. \qquad (1)$$

Es decir, cambiando del *anclaje discursivo* al *visual*[5] según la Figura 2, tenemos que:

[1] Para mayor información ver http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.php o en la décimo tercera referencia.
[2] En el libro de los Elementos de Euclides, el Teorema de Pitágoras es la proposición 47 del libro I.
[3] De acuerdo con Heller (1989), son mecanismos de naturaleza intelectual que una persona utiliza para adquirir, procesar y organizar información en su estructura cognoscitiva.
[4] Permite la adquisición de enfoques generales que ayudan a enfrentar situaciones matemáticas diversas, posibilitan la realización de descubrimientos originales y ayudan a “aprender a aprender”.
[5] Es la asociación de una afirmación matemática a un dibujo.

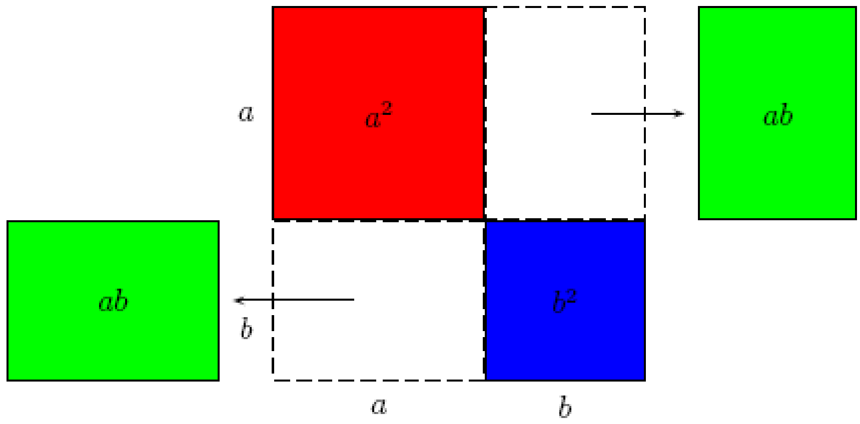


Figura 2: Producto notable del cuadrado de la suma de dos cantidades visto desde una perspectiva geométrica.

Notemos que $a^2 + b^2$ se formara con los dos rectángulos que se le han quitado al cuadrado de lado $(a + b)$ los cuales tienen de largo a y ancho b y sumándole un cuadrado de lado $(a - b)$. Es decir, aplicando una *aprehensión operativa de reconfiguración*[6], veamos la Figura 3 de abajo:

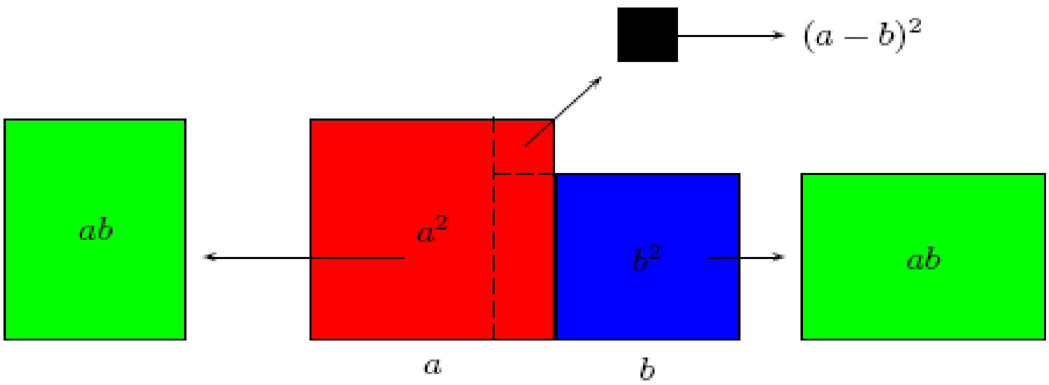


Figura 3: Producto notable del cuadrado de la diferencia de dos cantidades visto desde una perspectiva geométrica.

Los dos rectángulos se pueden convertir mediante una *aprehensión operativa de cambio figural*[7] en cuatro triángulos rectángulos de longitud en la base b y longitud de altura a, es decir veamos la Figura 4 de abajo:

[6] Es cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle.
[7] Es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos (creando nuevas subconfiguraciones).

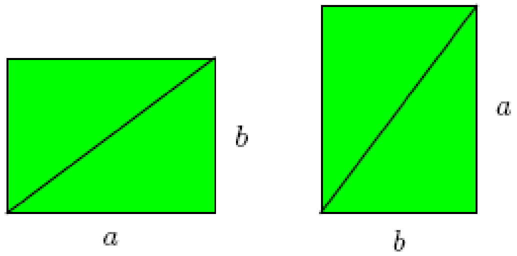


Figura 4: Rectángulos que están sobrando en el producto notable de la suma de dos cantidades (Fig. 2) los cuales son los mismos que están en el producto notable de la diferencia de dos cantidades (Fig. 3). Los dividimos mediante una aprehensión operativa de cambio figural colocándoles una línea en sus diagonales a este par de rectángulos (4 triángulos rectángulos).

Si llamamos, $c^2 = (a + b)^2 - 2ab. \quad (2)$

Veremos que efectivamente c^2 es otro cuadrado de lado c y cumple el producto notable del cuadrado de una suma, es decir, se puede formar de la suma de estas dos áreas. Veamos como se forma, desarrollando algebraicamente:

$$c^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab \quad \text{(Desarrollando).}$$
$$c^2 = (a^2) - 2ab + b^2 + 2ab \quad \text{(Asociando).}$$
$$c^2 = (a - b)^2 + 2ab \quad \text{(Producto Notable).}$$

De aquí que, tomando $2ab = 4\left(\frac{ab}{2}\right)$, es decir 4 triángulos rectángulos más un cuadrado en el *cambio dimensional*[8] de lado $(a - b)$ como en la siguiente Figura 5 de abajo y a la izquierda:

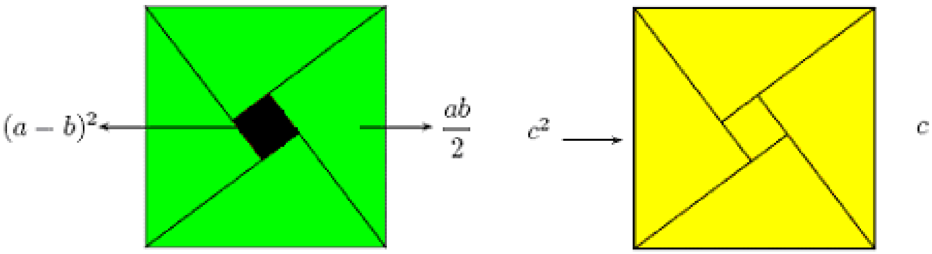


Figura 5: A la izquierda se muestra como se forma este cuadrado de lado c usando los 4 triángulos rectángulos verdes y el cuadradito negro. En la derecha vemos que efectivamente este es el cuadrado de color amarillo de lado c buscado.

Es decir, de (1) y (2) tenemos el siguiente *discurso*:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

[8] Es cuando cambio la información desde una perspectiva unidimensional o tridimensional, ya que son dados siempre bidimensionalmente sobre el papel o la pantalla de un ordenador.

Cumpliendo que: $c^2 = (a-b)^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$.

Y este también es un cuadrado de lado c, mediante la *construcción* que se realizó, como lo vemos en la Figura 5 de arriba y a la derecha.

Y además, esa es la longitud igual a c de la hipotenusa que esta sobre el triángulo rectángulo así por el *razonamiento como un proceso configural*[9], nos queda el siguiente *truncamiento*[10], como veremos en la Figura 6 que tenemos allá abajo:

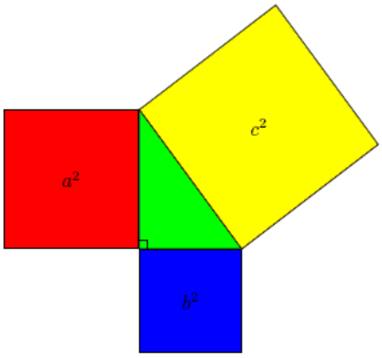


Figura 6: Conclusión hallada para el Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica para un triángulo rectángulo cualquiera.

Y lo que hemos deducido es la siguiente conclusión de la Figura 7 de abajo:

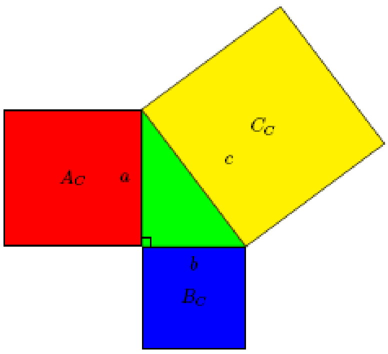


Figura 7:Conclusión geométrica del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que $C_C = A_C + B_C$.

Donde:

- A_C : Es el área del cuadrado rojo de lado a, es decir, $A_C = a^2$.
- B_C : Es el área del cuadrado azul de lado b, es decir, $B_C = b^2$.
- C_C : Es el área del cuadrado amarillo de lado c, es decir, $C_C = c^2$.

[9] Es la coordinación entre la aprehensión discursiva y la operativa
[10] Es cuando la coordinación proporciona la "idea" para resolver deductivamente el problema (conjeturando afirmaciones que se prueban). Conduce a la solución de un problema.

Y podemos enunciar lo siguiente:

Teorema 1: En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre las longitudes de los catetos.

En la proposición 31 del libro II de Euclides se demuestra que si sobre los lados de un triángulo rectángulo se construyen figuras semejantes, el área de la figura construida sobre la hipotenusa será igual a la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos, esto lo veremos en lo que sigue:

Extensión para figuras rectilíneas (con frontera poligonal)

Actividad 1: Sobre el lado de un cuadrado, se construye un triángulo equilátero. El cual nos proporciona un *modelo implícito o tácito*[11] para ver si se puede usar en la extensión del Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica.

¿Cuál es la relación que existe entre el área del cuadrado y el área de este triángulo equilátero?

La figura en cuestión, es dada con el siguiente *cambio configural* que veremos en la Figura 8 de abajo:

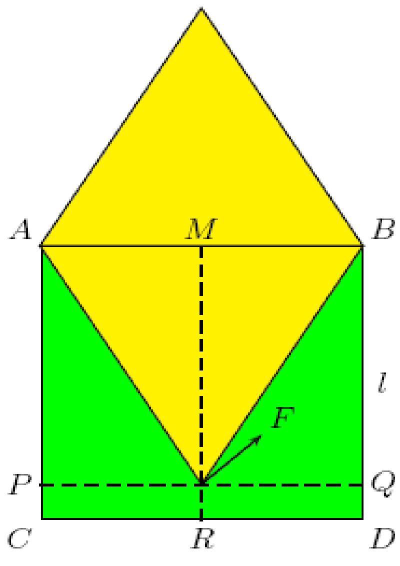


Figura 8: Representación que muestra la condición geométrica entre el cuadrado dado y el triángulo equilátero.

Notación:

- A_C : Es el área del cuadrado que tiene como dato el lado: l y donde, $l = \overline{AB} = \overline{BD} = \overline{CD} = \overline{CA}.$
- A_T : Es el área del triángulo equilátero con base: b y donde tenemos como dato que $b = \overline{AB} = l.$ Además tenemos de incógnita la altura: h, donde $h = \overline{MF}.$

Observación: El área del triángulo equilátero es menor que la del cuadrado. ¿Pero cuanto menor?

[11] Según la clasificación de Fischbein: Se da cuando el sujeto no esta consciente de su influencia o alcance.

Solución:

Ahora bien, sabemos que el cuadrado tiene área:

$$A_C = l^2. \qquad (1)$$

Observación: Indiferentemente podemos denotar A_C como $A_C(l)$ y entonces tener el *modelo explicito*[12] $A_C(l) = l^2$, pero por comodidad lo colocamos $A_C = l^2$.

Luego, como $b = l$, calculemos h:

$$h = \sqrt{(l)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}, \text{ por Teorema de Pitágoras, versión lineal.}$$

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}}, \text{ propiedades de potenciación.}$$

$$h = \sqrt{\frac{4l^2 - l^2}{4}}, \text{ por suma de fracciones.}$$

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}, \text{ reduciendo.}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{l^2}}{\sqrt{4}}, \text{ por propiedades de radicación.}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} l, \text{ pues } l \text{ es positivo.}$$

Así, en el triángulo equilátero tenemos que su área en función del cuadrado es la siguiente:

$$A_T = \frac{l\left(\frac{\sqrt{3}}{2} l\right)}{2}, \text{ sustituyendo en la formula para hallar el área de un triángulo.}$$

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2, \text{ reduciendo.}$$

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} A_C, \text{ por la parte (1).}$$

[12] Según la clasificación de Fischbein: Se construyen o escogen en forma consciente para facilitar que se llegue a una solución. Esta función nos ayudaría a encontrar las dimensiones que debería tener tal lado para que la figura contenga la mayor área posible.

Observación: Notemos que si tenemos el *modelo explicito* para el área del triángulo $A_T(l)=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$, veremos que efectivamente esta función área es menor que el área del cuadrado $A_C(l)=l^2$ en una relación $\frac{\sqrt{3}}{4}$ que es menor que la unidad.

Veamos que si en el Teorema 1 deducido e introductorio, hacemos lo siguiente:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)C_C=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(A_C+B_C).$$
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)C_C=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)A_C+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)B_C.$$

Entonces, se cumple también que: $C_T=A_T+B_T$.

Donde:

- A_T : Es el área del triángulo equilátero rojo.
- B_T : Es el área del triángulo equilátero azul.
- C_T : Es el área del triángulo equilátero amarillo.

Así, lo que hemos deducido es lo siguiente veamos la Figura 9 de abajo:

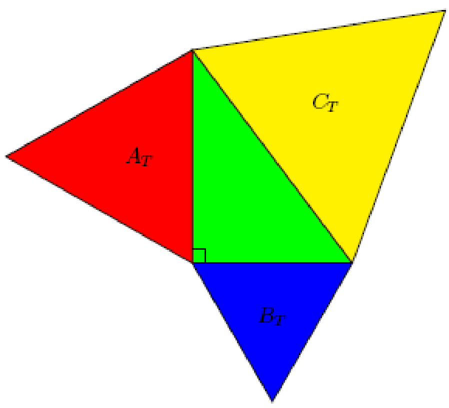


Figura 9: Vemos geométricamente el Teorema de Pitágoras, que satisface $C_T=A_T+B_T$.

Y podemos enunciar lo siguiente:

Teorema 2: En un triángulo rectángulo, el área del triángulo equilátero construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre las longitudes de los catetos.

Actividad 2: Sobre el lado de un cuadrado, se construye un pentágono. El cual nos proporciona otro *modelo implícito o tácito* para ver si se puede usar en la extensión del Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica.

¿Qué relación existe entre el área del cuadrado y el área de este pentágono?

Veamos el siguiente *cambio configural* de la Figura 10 de abajo:

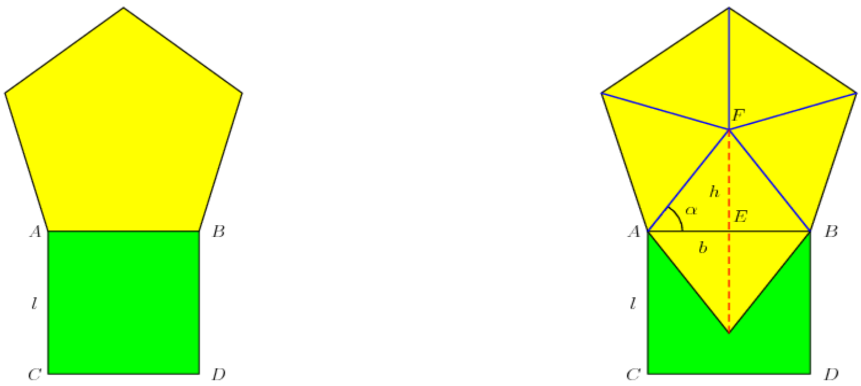


Figura 10: En la parte izquierda se muestra la representación geométrica de la Actividad 2 y en la parte derecha se le realizo una aprehensión operativa de cambio figural para dividirlo en cinco triángulos con un ángulo α conocido $(\alpha = 54^0)$ y altura h.

Solución:

En la mitad del triángulo ABF tenemos un triángulo AEF denotado T_{AEF}. Notemos que en este triángulo $b = \frac{l}{2}$ y de la relación trigonométrica $\tan\alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$, tenemos según lo mostrado en la Figura 10 que $\tan\alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\tan\alpha \Rightarrow h = \frac{l}{2}\tan\alpha$, con $b = \frac{l}{2}$. Así, tenemos que el área de este triángulo es $A_{T(AEF)} = \frac{bh}{2} = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\tan\alpha\right)}{2} = \frac{\frac{l^2}{4}\tan\alpha}{2} = \frac{l^2\tan\alpha}{8}$, con $A_{T(AEF)}$ denotando esta área.

Por tanto el área del triángulo ABF es dos veces esta área, es decir, $A_{T(ABF)} = 2A_{T(AEF)} = 2\left(\frac{l^2\tan\alpha}{8}\right) = \frac{l^2\tan\alpha}{4}$, con $A_{T(ABF)}$ denotando esta área. Luego, tenemos que el área de este polígono[13] es $A_P = 5A_{T(ABF)} = \frac{5l^2\tan\alpha}{4}$, con A_P

[13] Para mayor información ver http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.php o en la décimo segunda referencia.

denotando esta área. Notemos que en este caso esta área es mayor que la del cuadrado. Por analogía de acuerdo a la **Actividad 2** enuncie un Teorema de Pitágoras para este caso y trate de enunciarlo para otros polígonos regulares.

Extensión para figuras curvilíneas (con frontera curvilínea)

Actividad 3: Sobre el lado de un cuadrado, se construye un semicírculo[14].

¿Qué relación existe entre el área del cuadrado y el área de este semicírculo?

La figura es dada con el siguiente *cambio configural* en la Figura 11 de abajo:

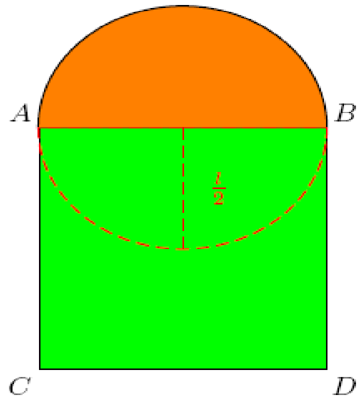


Figura 11: Representación de la condición geométrica entre el cuadrado y el semicírculo.

Notación:

- A_C : Es el área del cuadrado que tiene como dato el lado l, donde $l = \overline{AB} = \overline{BD} = \overline{CD} = \overline{CA}$.
- A_{SC} : Es el área del semicírculo, con radio: r, donde $r = \frac{\overline{AB}}{2}$.

Observación: El área de la semicírculo es menor que la del cuadrado. ¿Pero cuanto menor?

Solución:

Ahora bien, en el cuadrado sabemos que su área[15] es: $A_C = l^2 \quad (2)$.

Luego, en el semicírculo su área es:

$$A_{SC} = \frac{\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2}, \text{ sustituyendo la formula para hallar el área de un semicírculo.}$$

$$A_{SC} = \frac{\pi l^2}{8}, \text{ reduciendo.}$$

$$A_{SC} = \frac{\pi}{8} A_C, \text{ por la parte (2).}$$

[14] Es la región cuya frontera es la circunferencia.

[15] Este es el mismo *modelo explicito* $A_C(l) = l^2$.

Observación: Notemos que si tenemos el *modelo explicito* $A_C(l)=\frac{\pi}{8}l^2$, dado el *modelo implícito* anterior, veremos que efectivamente esta función es menor que la otra que modela el área del cuadrado $A_C(l)=l^2$, en una relación de $\frac{\pi}{8}$.

Notemos que si en el **Teorema 1** deducido e introductorio, hacemos lo siguiente:

$$\left(\frac{\pi}{8}\right)C_C=\left(\frac{\pi}{8}\right)(A_C+B_C).$$
$$\left(\frac{\pi}{8}\right)C_C=\left(\frac{\pi}{8}\right)A_C+\left(\frac{\pi}{8}\right)B_C.$$

Entonces, tenemos que se cumple que: $C_{SC}=A_{SC}+B_{SC}$.

Donde:

- A_{SC}: Es el área del semicírculo rojo.
- B_{SC}: es el área del semicírculo azul.
- C_{SC}: es el área del semicírculo amarillo.

Así, lo que hemos deducido es lo siguiente veamos la Figura 12 de abajo:

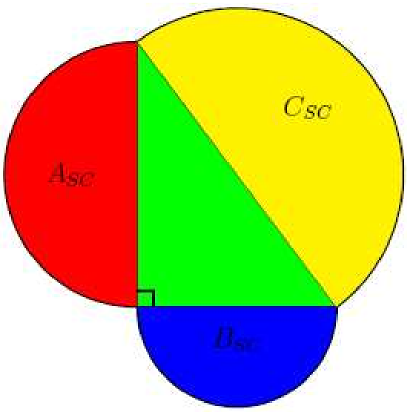
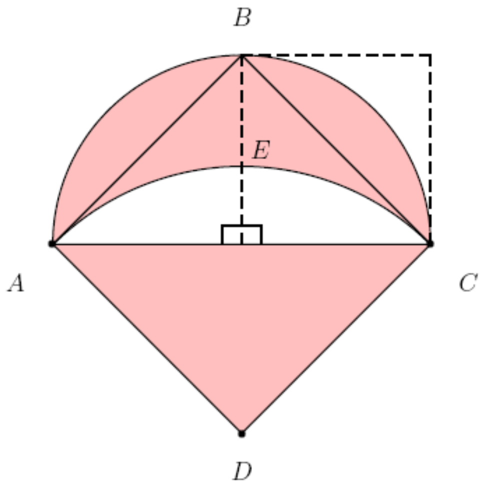


Figura 12: Vemos geométricamente el Teorema de Pitágoras, que satisface $C_{SC}=A_{SC}+B_{SC}$.

Y podemos enunciar lo siguiente:

Teorema 3: En un triángulo rectángulo, el área del semicírculo construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre las longitudes de los catetos.

Actividad 4: Demuestre que el área comprendida entre los dos arcos de círculo es igual al área del triángulo isósceles ABC o bien ACD.



Notación:

- $A_{SC(ABC)}$: Área del semicírculo ABC.
- A_T : Área del triángulo ADC o bien ABC, pues ambos forman el cuadrado $ABCD$.
- $A_{R(AECD)}$: Área de la región $AECD$.
- $A_{S(ABCE)}$: Área del sector $ABCE$, llamada lúnula.
- $A_{R(AEC)}$: Área entre la región AEC, y la cuerda AC.

Figura 13: Lúnula de Hipócrates. Representación geométrica de la Actividad 3.

En el lenguaje común, resolver la cuadratura del círculo significa buscar la solución de un problema que no tiene solución. “Darle forma cuadrada” al círculo, es construir exactamente, con una regla y un compás, un cuadrado de la misma área que un círculo dado.

Existen numerosas soluciones que se acercan, pero ninguna es exacta. Sin embargo, un matemático Griego, Hipócrates de Quios, propuso una solución en el siglo V a. C. Logró *construir* un cuadrado exactamente igual a una figura delimitada por dos círculos, una lúnula. La figura en cuestión, es dada con el siguiente cambio configural en la Figura 13 de arriba.

Solución:

Notemos además que:

- $\overline{AC}$: Diámetro del semicírculo ABC.
- $\overline{AD}$ *o* $\overline{DC}$: Radio del sector cırcular AEC.

Ahora bien, tenemos el triángulo rectángulo ABC (isósceles), el cual tiene por magnitud de medida en la hipotenusa $AC = l$.

Así, de acuerdo al **Teorema de Pitágoras** (versión lineal) tenemos que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2.$$

$$\overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2, \quad \text{pues } \overline{AD} = \overline{DC}. \qquad (3).$$

Ahora, calculemos el área del semicírculo ABC:

$$A_{SC(ABC)} = \frac{\pi\left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi\left(\frac{\overline{AC}^2}{4}\right)}{2} = \frac{\pi \overline{AC}^2}{8}.$$

Y ahora, calculemos el área de la región $AECD$:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{R(AECD)}} = \frac{\pi \overline{\mathrm{AD}}^2}{4}.$$

Luego, como los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros esto es de acuerdo a la Proposición XII del Segundo Libro de los Elementos.

Tenemos que:

$$\frac{A_{SC(ABC)}}{A_{R(AECD)}} = \frac{\frac{\pi \overline{AC}^2}{8}}{\frac{\pi \overline{AD}^2}{4}} = \frac{4\overline{AC}^2}{8\overline{AD}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{2\overline{AD}^2} = \frac{2\overline{AD}^2}{2\overline{AD}^2} = 1, \text{ por } (3).$$

Por tanto,

$$A_{SC(ABC)} = A_{R(AECD)}. \qquad (4)$$

Por otra parte,

$$A_{S(ABCE)} = A_{SC(ABC)} - A_{R(AEC)}.$$

Y además,

$$A_T = A_{R(AECD)} - A_{R(AEC)}.$$

Pero por (4) se deduce directamente que:

$$A_{S(ABCE)} = A_T.$$

Dado que el triángulo es una figura cuadrable, este resultado garantiza por transitividad que la lúnula también lo es.

Calcule el área de este triángulo isósceles en función del área del cuadrado, dado en la siguiente Figura 14 de abajo:

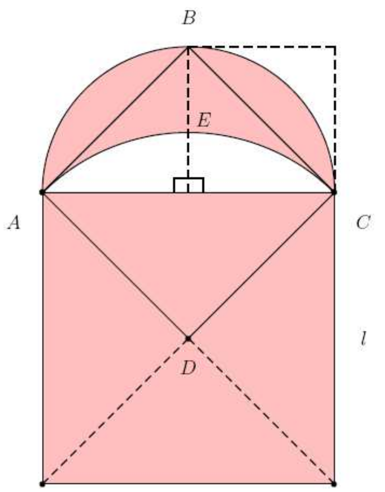


Figura 14: Representación geométrica de la lúnula y un cuadrado de longitud en la base del triángulo igual al lado del cuadrado.

Notemos que el área del triángulo isósceles es la cuarta parte del cuadrado.

Así tenemos:

$$A_{TI} = \frac{\overline{AC}}{4}.$$

Donde A_{TI} denota el área del triángulo isósceles.

Las diagonales dividen al cuadrado en cuatro triángulos iguales al triángulo ABC.

Observación: Esto lo podemos verificar notando que la altura h y la base b del triángulo isósceles son l y $\frac{l}{2}$ respectivamente. Y así, obtenemos lo siguiente:

$$A_{TI} = \frac{bh}{2} = \frac{l\left(\frac{l}{2}\right)}{2} = \frac{l^2}{4} = \frac{A_C}{4}.$$

Observación: Con $A_C = l^2$, lo colocamos nuevamente así en vez del *modelo explicito* $A_C(l) = l^2$.

Notemos que si en el **Teorema 1** deducido e introductorio, hacemos lo siguiente:

$$\left(\frac{1}{4}\right)C_C = \left(\frac{1}{4}\right)(A_C + B_C).$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)C_C = \left(\frac{1}{4}\right)A_C + \left(\frac{1}{4}\right)B_C.$$

Entonces, $C_L = A_L + B_L$.

Donde:

- A_L : Es el área de la lúnula roja.
- B_L : Es el área de la lúnula azul.
- C_L :Es el área de la lúnula amarilla.

Así, lo que hemos deducido es lo siguiente veamos la Figura 15 de abajo:

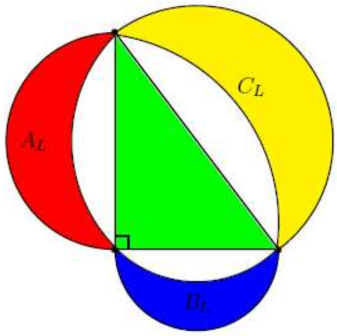


Figura 15: Vemos geométricamente el Teorema de Pitágoras, que satisface $C_L = A_L + B_L$.

Y podemos enunciar lo siguiente:

Teorema 4: En un triángulo rectángulo, el área de la lúnula construida sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las lúnulas construidas sobre las longitudes de los catetos.

Actividad 5: En la siguiente Figura 15 de abajo:

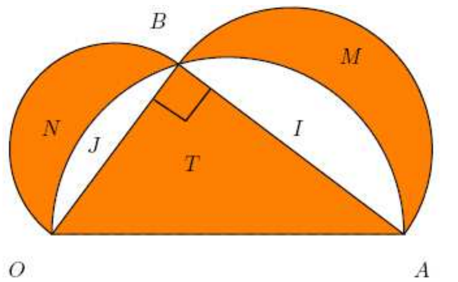


Figura 15: En la figura se muestra un triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia y las lúnulas construidas sobre sus catetos.

Demostrar que:

$$\acute{A}rea\ T = \acute{A}rea\ M + \acute{A}rea\ N.$$

Sugerencia: Use el resultado del ejemplo anterior y compare las áreas.

Respuesta:

Consideremos la siguiente configuración geométrica (*cambio figural*):

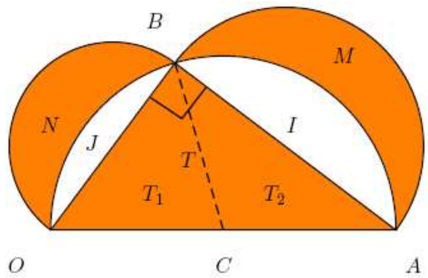


Figura 16: Configuración geométrica de la Figura 15.

Y ahora hagamos las siguientes notaciones:

- N : Es el área de la lúnula correspondiente al segmento $\overline{OB}$.
- M : Es el área de la lúnula correspondiente al segmento $\overline{BA}$.
- T : Es el área del triángulo rectángulo OAB.
- T_1 : Es el área del triángulo OBC.
- T_2 : Es el área del triángulo ABC.

Luego, sabemos que de la **Actividad 3** se cumple que:

$$N = T_1 \qquad (5).$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{T}_2 \qquad (6).$$

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2, \text{ por ser el triángulo rectángulo a la vez una Figura Elemental.} \\ &= N + M, \text{ por (5) y (6).} \end{aligned}$$

Por tanto, se cumple que:

$$\acute{A}rea\ T = \acute{A}rea\ M + \acute{A}rea\ N.$$

"Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar en forma errónea es mejor que no pensar".

Hipatia de Alejandría, Egipto, 370-415 d.C.

Interpretaciones y conclusiones

En el estudio de estas extensiones del Teorema de Pitágoras, nuestros estudiantes aprenderán a expresar las áreas de unas figuras geométricas en función de otras ya conocidas como es el caso del área del cuadrado. Y además aprenderán lo que realmente significa la palabra extensión o generalización en matemática, partiendo de la *deducción* del Teorema de Pitágoras en una acepción geométrica donde son cuadrados los que están sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Estos procesos netamente *intuitivos* les permitirá a través de la *Historia de la Matemática* conocer como surgen conceptos de situaciones reales de la vida, como es el caso del concepto de cuadratura que se convirtió después en el concepto de área de figuras geométricas, los cuales además pueden hacerse usando regla y compás, según lo hacían los griegos de acuerdo con lo estudiado en *la Historia de la Matemática*.

En otro orden de ideas, así como podemos transformar un rectángulo como vimos en la nota histórica, también podemos mantener un triángulo equilátero que tenga la misma área que la suma de otros dos triángulos equiláteros de base dada usando este teorema tan importante. Así mismo podemos hacer con dos círculos con diámetros dados formar un círculo de área igual a la suma de estas dos, con las lúnulas, etc. Por lo que puedo decir que si de Leonardo da Vinci tenemos forma de perfecta en la cuadratura humana del hombre de Vitruvio donde en el pensamiento renacentista: *el hombre medida de todas las cosas, la belleza ajustada a cánones, equilibrio, proporción…* en los Pitagóricos tenemos la belleza de las cuadraturas de las formas geométricas y en la hipotenusa la razón áurea de la perfección geométrica en donde descansa la perfección del mundo en general.

Bibliografía

- Barcenas D,. (2006). *La integral de Lebesgue un poco mas de cien años después*. Venezuela: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. 13, (1), pp. 68-69.
- Barreto J,. (2007). *Otras deducciones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia de la matemática, como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje*. F González (Presidente). Memorias del VI Congreso Venezolano de Matemática. (pp. 537-546). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.
- Barreto J. (2008). *Deducciones de las formulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos*. [Versión electrónica], Números (69). Recuperado el 17 de Marzo de 2008, disponible en: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02-php
- Barreto J. (2008). *Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.* [Versión electrónica], Números (69). Recuperado el 17 de Marzo de 2008, disponible en: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.php
- Bolívar D,. (2000). *Desarrollo psicológico.* Universidad Nacional Abierta. Caracas, Venezuela
- Duran D. (2004). *Geometría Euclideana*. V Talleres de Formación Matemática. Maracaibo, Venezuela: Asociación Matemática Venezolana
- Jiménez. D (2004). π *la letra griega que los griegos no usaron.* Venezuela: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. 9 (1), pp. 103-117.
- Jiménez D. (2005). *Geometría, el encanto de la forma*. Colección Minerva N$^{\underline{0}}$ 36. Los libros de El Nacional. Editorial CEC, SA. Caracas, Venezuela.
- Jiménez D. (2006) *¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo?* Venezuela: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. 13, (1), pp. 87-103.

- Molina J. y Oktaç A,. (2007). *Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 10 (2), pp. 241-273. México.
- Mora D. (2002). *Didáctica de las matemáticas en la educación venezolana.* (Ediciones Biblioteca-EBUC). Caracas, Venezuela.
- Oliveira C,. (2002). *Equacão do segundo grau pela volta ao quadrado perfeito. IV simpósio de educación matemática*, Universidad Luterana Do Brasil.
- Oliveira C,. (2004). *A história como recurso didáctico no processo de ensino e aprendizaje da matemática.* V congreso venezolano de educación matemática. UPEL-IPB del 26 al 20 de Noviembre. Barquisimeto, Venezuela.
- Torregrosa G. y Quesada H. (2007). *Coordinación de los proceso cognitivos en geometría*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 10, (2), pp. 275-300. México.

Julio Cesar Barreto Garcia, Nació en San Felipe Estado Yaracuy, Estudiante avanzado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas en la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado” en Barquisimeto y de Educación Mención Matemática en la Universidad Nacional Abierta Centro Local Yaracay, Venezuela.
Ha trabajado eventualmente en la educación media, diversificada y a distancia. Esto es el fruto de: Ponencias presentada en Trujillo (IV Congreso Internacional Trujillano en Educación Matemática y Física); Ponencia, Cartel y Talleres dictados en Barquisimeto (VIII Jornada Centroccidental de Educación Matemática); Ponencia, Cartel y Taller dictado en Maracaibo (XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa), Ponencia con Publicación Arbitrada en la Memorias del evento y Taller dictado en Maracay (VI Congreso Venezolano de Educación Matemática) y Comunicación Científica con Publicación no Arbitrada, Póster, Mini Curso y Relato de Experiencia efectuados en Brasil (IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática). Y últimamente aceptada para Taller en México (11th INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION); y otra Ponencia en México (22 Reunión Latinoamérica de Matemática Educativa).
Dos Publicaciones en la revista Números en la edición 69 año 2008: *Deducciones de las formulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos* y *Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática*.
Obtuvo el primer lugar en el VIII Encuentro Nacional de Estudiantes de Ciencias, en el área de matemáticas en el año 2006.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 52 – 61
ISSN: 1815-0640

La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal

Héctor Agnelli, Patricia Konic, Susana Peparelli, Nora Zón, Pablo Flores

Resumen

Los conceptos de función lineal y regresión lineal generan dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente en la escolaridad obligatoria. Con este trabajo intentamos poner de manifiesto que dichas dificultades pueden convertirse en obstáculos cuando se realizan tratamientos de situaciones escolarizables, que no ponen especial atención a la distinción entre los mencionados conceptos en el proceso de selección y análisis de situaciones y en la conducción del proceso de instrucción correspondiente

Abstract

The linear function and linear regression concepts generate difficulties in the teaching and learning processes, particularly in the compulsory school. In this work we try to show that these difficulties could become obstacles when treatments of school situations are carried out without recognizing those concepts in the selection process, in the analysis of the situations and in the ensuing teaching process.

Resumo

Os conceitos de função linear e regressão linear geram dificuldades no processo do ensino e aprendizagem das matemáticas, particularmente na escolaridade obrigatória. Com este trabalho tentamos manifestar que ditas dificuldades podem converter-se em obstáculos quando se realizam tratamentos de situações escolarizáveis, que não colocam especial atenção à distinção entre os mencionados conceitos no processo de seleção e análises de situações e na condução do processo de instrução correspondente.

1. Introducción

En los cursos de matemática se utiliza la función lineal como de uno de los ejemplos básicos del concepto de función. Dada la expresión de la función, $f(x)=mx+b$, en general se pasa a asociar esta función con su representación gráfica: la recta. Nominados ahora b y m como la ordenada al origen y la pendiente, se pone de manifiesto que las rectas y por lo tanto las funciones lineales, quedan individualizadas a partir del conocimiento de estos dos valores. Un ejercicio típico consiste en hallar la recta que determinan dos puntos, dadas sus coordenadas.

De esta manera queda establecida la ecuación de la recta al "calcular" la pendiente y la ordenada al origen. El problema es de naturaleza determinística.

El modelo de regresión lineal aparece en un contexto distinto, se utiliza para modelar fenómenos aleatorios. Con el modelo se intenta describir utilizando el lenguaje matemático el comportamiento de ese fenómeno aleatorio. Para ello se recurre a conceptos o expresiones matemáticas que adquieren significados distintos cuando se usan en el campo de la estadística. Se tiene un conjunto de puntos que expresan los valores que asumen dos características reales medibles y se quiere encontrar la relación que las vincula. Si bien el procedimiento que se utiliza para ello es de naturaleza determinística su interpretación a priori es de naturaleza aleatoria ya que distintos conjuntos de puntos, que representan a las mismas características, podrían originar distintas rectas. Cuestiones tales como parámetros, estimadores, variables aleatorias, independencia y distintas interpretaciones de la linealidad hacen su aparición en este tipo de problemas.

Consideramos que el uso de métodos determinísticos en la resolución de problemas matemáticos opera como un obstáculo para el abordaje de problemas de naturaleza aleatoria. Por lo que la noción de obstáculo se constituye en la herramienta didáctica que nos permite el estudio de esta problemática. Por ello sintetizaremos la posición que (Brosseau, 1983) sostiene al respecto.

Entre las características que Brosseau atribuye a lo que el llama un obstáculo destacamos la siguiente: un obstáculo es un conocimiento no una falta de conocimiento. Dicho conocimiento es adecuado para producir respuestas correctas en un determinado contexto; pero resulta insuficiente para abordar situaciones de otro contexto.

En sus investigaciones identifica tres tipos de obstáculos según su origen, Ontogenético, Epistemológico y Didáctico. El primero deriva de las características del desarrollo del niño, y que se ve reflejado en las concepciones que van desarrollando los alumnos durante su aprendizaje. El epistemológico está ligado a la naturaleza del conocimiento matemático y por último el obstáculo didáctico que surge de las elecciones didácticas con propósitos de enseñanza. En este trabajo nos centraremos en los obstáculos de origen didáctico, los cuales, como dijimos, proceden de "modos de enseñanza" y tienen un fuerte impacto en los aprendizajes de los alumnos. Son obstáculos que deben evitarse, lo que implica no solo identificarlos sino analizar las consecuencias que las distintas formas de enseñanza producen, Brousseau (1983).

Desde este marco consideramos que la comprensión de la modelización de un proceso estocástico en la enseñanza media, en particular el de la regresión lineal, debe ser abordado mostrando los límites de aplicación de la función lineal y de los procedimientos determinísticos, para el abordaje de los problemas de naturaleza aleatoria (Batanero y cls.1994). Si se introduce de manera precipitada la formalización de la regresión lineal para el estudio de fenómenos aleatorios bidimensionales, se puede generar un obstáculo didáctico al promover en el alumno una identificación de este modelo con el de la función lineal, que se aplica al estudio de fenómenos deterministas. Por ello, sostenemos que el primer paso para intentar evitar el obstáculo didáctico planteado es ***clarificar el uso operacional que tiene la función lineal en el marco de la estadística y poner en evidencia el rol que cumplen conceptos esencialmente determinísticos cuando son usados para la modelización de fenómenos aleatorios.***

Para desarrollar esta idea comenzaremos por analizar qué se entiende por función lineal en matemáticas y por modelo de regresión lineal en estadística, y cómo se relacionan ambos conceptos. Posteriormente mostraremos una tarea de regresión lineal que se propone en un libro de texto para la enseñanza polimodal argentina (estudiantes entre 14 y 15 años), en la cual pondremos en evidencia este obstáculo didáctico. Para salvarlo proponemos una enseñanza que tome en cuenta la naturaleza de ambos conceptos, por lo que recurrimos a las sugerencias que nos dan los estándares del NCTM (2000), para la enseñanza de la regresión lineal en las etapas 6-8 (niños de 12 a15 años) y 9-12 (16-18 años). Estas sugerencias, a nuestro juicio, proponen condiciones que permitirían evitar el obstáculo didáctico que estamos señalando. Finalmente se establecerán algunas conclusiones.

2. Marco referencial disciplinar

Buena porción de la actividad matemática puede ser descrita como proceso de modelización. Comenzaremos adoptando una concepción de modelo, siendo un punto de partida esencial para la discusión que pretendemos desarrollar. Según Henry (1997) "*Un modelo es una interpretación abstracta, simplificada e idealizada de un objeto del mundo real, de un sistema de relaciones o de un proceso evolutivo que surge de una descripción de la realidad*. Especialmente, "La modelización forma parte inseparable de la actividad estadística", Batanero (2001). Si bien en rigor no se puede pensar que un modelo sea real, en el sentido que sea una fiel representación de un fenómeno o sistema real, en estadística las inferencias están basadas en que el fenómeno se rige por un modelo determinado y la variación de datos se debe a otras causas, o a la misma naturaleza aleatoria del fenómeno.

Se emplean distintos tipos de modelos para estudiar situaciones deterministas de los que se emplean en fenómenos aleatorios. En las primeras los resultados están precisamente definidos, mientras que en los últimos los resultados muestran variabilidad debido a la presencia de factores desconocidos.

La modelización forma parte inseparable de la actividad estadística. En el proceso de modelización estadística se está interesado en descubrir patrones de comportamiento sistemático para datos obtenidos de experimentos u observaciones que contienen una componente aleatoria. Situaciones muy generales en las que se aplica dicho proceso están generadas a partir del interés que existe en explicar la variabilidad de una *característica* observada sobre unidades observacionales independientes y homogéneas para todos los aspectos de interés. Esta característica en el lenguaje de la estadística se llama *variable respuesta*. Se asume que existe algún mecanismo aleatorio desconocido que origina esa variabilidad y a partir de la información que entregan las observaciones realizadas, *los datos*, se construye un modelo simple que permita echar luz sobre esta variabilidad. En estas condiciones el modelo primario es una distribución de probabilidad. Pero en muchas situaciones, en las que no hay homogeneidad, se requiere algo más que una distribución de probabilidad para explicar la variación presente en los datos, la respuesta cambiaría además cuando cambia algunas de estas condiciones medibles, que operan sobre las unidades experimentales. Estas condiciones se llaman *variables explicativas* (explicativas de las respuestas). Así podría plantearse un modelo que tenga una parte sistemática además de una componente aleatoria. Uno de los modelos más simples es el llamado modelo de regresión lineal.

La idea central para la construcción del modelo de regresión lineal (Hamilton, 1992, Rawling, 1988), es que **la respuesta media de la variable Y** cambia con las condiciones de manera lineal, esto es de manera proporcional a la variación de X.

$$E(Y_i/x_i) = \alpha + \beta x_i \quad (1)$$

donde x_i es el valor que asume la variable explicativa *x* al medirla sobre el individuo *i.* Tanto α como β son desconocidos y se llaman los *parámetros* del modelo, ellos se conocerán o en el lenguaje estadístico se *estimarán* a partir de los datos.

El modelo (1) expresa como se espera que sea el comportamiento promedio de la variable respuesta *Y* al observarla repetidas veces bajo las mismas condiciones x_i. En rigor desde un punto de vista práctico, generalmente, se observa solo una vez y este caso se escribe

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i \quad (2)$$

Siendo ε un error de naturaleza aleatoria que origina la variación, en consecuencia también aleatoria, de los *Y* alrededor de su valor medio. Bajo estas condiciones los datos serán *n* pares de puntos $(y_i ; x_i)$ a partir de los cuales se debe determinar la recta (1).

Al observar la estructura de la expresión (2) surge que puede ser escrita como

$$Y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$$

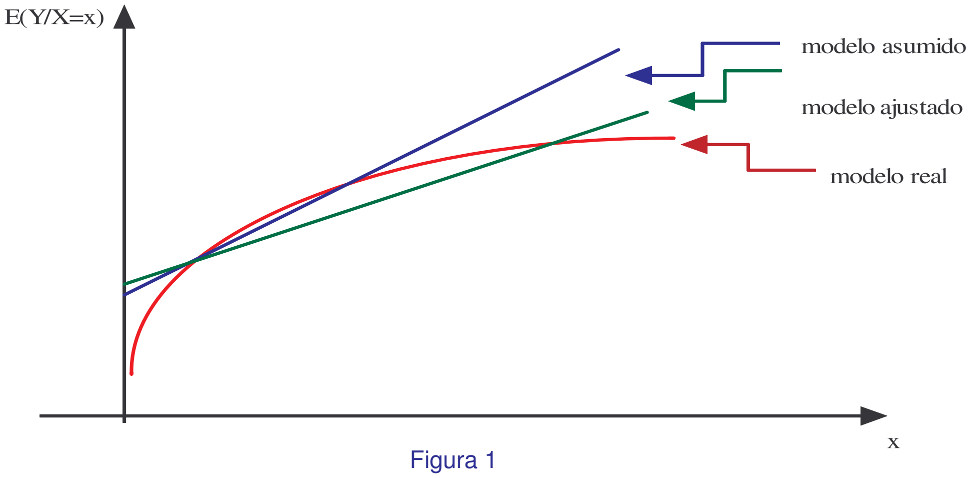


Figura 1

Donde ahora aparece la forma funcional habitual de la llamada función lineal pero como la parte sistemática del modelo

Cuando se trabaja con la modelización estadística y en particular con el modelo de regresión lineal están presentes tres modelos: el real y desconocido, el supuesto y el ajustado, como se muestra en la figura 1, de allí que en la estadística los parámetros del modelo resulten *estimados* por los valores que se *calculan* a partir de los datos que proporciona una muestra.

Por otra parte, cabe mencionar que, cuando en el contexto de la estadística se habla de un modelo lineal se hace referencia a la linealidad en los parámetros. A manera de ejemplos

$E(Y_i/x_i) = \alpha + \beta x_i^2$ y $E(log\, Y_i/x_i) = \alpha + \beta \frac{1}{x_i}$ son lineales en α y β

$E(Y_i/x_i) = \alpha + \beta^2 x_i$, no es lineal en β.

De allí que algunos modelos lineales especifiquen que la relación gráfica entre la variable respuesta y la variable explicativa sea una recta, y otros expresen vínculos gráficos diferentes.

Con lo expuesto podemos establecer las siguientes diferencias entre la función lineal y la regresión lineal.

Función lineal	Regresión lineal
La variación de x e y es determinista	La variación de una o ambas, x e y es aleatoria
Relación funcional	Vínculo estadístico que extiende la noción de dependencia funcional.
El cálculo de los parámetros es independiente de los puntos seleccionados sobre la recta.	La estimación de los parámetros depende de los puntos seleccionados.

Dada una tabla de valores de *x* e *y* se obtiene una recta y dada esta es posible reproducir la tabla.	Dada una tabla de valores de *x* e *y* se obtiene una recta pero ella no permite reproducir la tabla.
El rol de variable independiente y dependiente es indistinto. $y = a_1x + b_1$ y $x = a_2y + b_2$ representan el mismo conjunto de puntos	Los roles de las variables explicativa y respuesta no son intercambiables. $y = \alpha_1 x + \beta_1$ y $x = \alpha_2 y + \beta_2$ no representan el mismo conjunto de puntos

3. Análisis de una situación

A los fines de poner de manifiesto el obstáculo didáctico que se genera al introducir de manera precipitada la regresión lineal para estudiar fenómenos aleatorios bidimensionales, dando lugar a que los alumnos lo identifiquen con el estudio de una función lineal, vamos a presentar y analizar una tarea de enseñanza extraída de un libro de texto de circulación actual (*Matemática 1- Ciencias, Primer año Polimodal,* 1999, p. 265). La que analizaremos en términos del uso que puede hacerse de la función lineal en un estudio de regresión lineal.

La tarea seleccionada se encuentra la final del capítulo destinado a estadística, en el texto mencionado, luego del desarrollo de una serie de nociones tales como: Muestras, técnicas de muestreo, distribuciones bidimensionales, recta de regresión, correlación y ecuación de la recta de regresión.

Tarea

La tabla recoge, de varias personas, el número de horas semanales que dedican a hacer deporte y el número de pulsaciones por minuto que tienen en reposo.

Hs. deporte	0	0	0	1	1	3	3	4	5	7
Pulsaciones	66	62	73	72	65	60	66	58	57	54

a) Dibuja la nube de puntos

b) ¿Hay dependencia funcional, estadística o casual?

c) La ecuación de la recta de regresión es: $y = -1{,}5x + 68$

- Estima el número de pulsaciones que tendrá una persona que dedica 2 horas semanales a hacer deporte.
- Estima el número de pulsaciones de un ciclista profesional que entrena 4 horas diarias. ¿Te parece razonable esta estimación?

Análisis de la tarea

Los autores del texto han elegido una situación aleatoria, próxima a los alumnos (deporte, colaborando en la educación para la salud). Los datos son números enteros, fáciles de manejar, de representar y corresponden a situaciones verosímiles. Las actividades que promueven son clásicas en el ámbito escolar, pero también en el estudio de regresión: dibujar nube de puntos, estudiar el tipo de dependencia y determinar el valor de una variable en función de la otra.

Pese a que la situación es interesante para la finalidad prevista, se ha planteado un texto conciso que hace que no se especifique qué rol cumplen cada una de las características que allí intervienen (horas semanales dedicadas al deporte y número de pulsaciones por minuto). Tampoco se explicita que se ha emprendido un estudio estadístico, ni el método de muestreo que se emplea.

En primer lugar se solicita dibujar la nube de puntos, para lo cual se provee una tabla del "tipo" de las que se presentan para graficar una función. Esta situación puede favorecer el obstáculo didáctico señalado, al relacionar de manera abusiva la regresión y el estudio de funciones.

En el inciso b) donde se presenta el interrogante crucial en esta temática, los datos aportados por la tabla "evidencian" no sólo una respuesta parcial, sino claramente de un tipo: no funcional. No se aborda, por lo tanto, el hecho que la vinculación estadística entre dos características es de naturaleza aleatoria y no surge de la no existencia de relación funcional. Con ello se contribuye a confundir dos aspectos relacionados con el término función: *relación unívoca* y *dependencia causal*. En el texto se pregunta por la segunda (dependencia funcional), pero se puede responder atendiendo a la otra consideración (no es unívoca). Esta confusión está muy relacionada con el obstáculo didáctico detectado, pues se utiliza el método de trabajo de las funciones lineales para responder a cuestiones de carácter estadístico.

En el inciso c) se presenta "la forma típica" de una función lineal sin identificar cuál es la característica denotada con x y cual la denotada con y, produciéndose así las siguientes contradicciones:

- No existe una relación funcional entre los datos y se presenta por medio de una función.
- No se puede reproducir la tabla a partir de la expresión analítica, procedimiento usual en la obtención de la gráfica de una función lineal.
- Bajo el supuesto de que el alumno infiera que la variable independiente x representa las horas de deporte y la dependiente y las pulsaciones, ¿qué interpretación le asignará a los valores de y que obtiene para cada uno de los valores de x de la tabla?

Por estas cuestiones es que la respuesta al pedido de "estimar" el número de pulsaciones será claramente de naturaleza determinística. Produciéndose en esta etapa un **afianzamiento** de la superposición conceptual función lineal-regresión lineal, calcular-estimar. Constituyéndose esto en una evidencia del tipo de obstáculo didáctico que caracterizamos.

El análisis realizado nos podría llevar a una postura pesimista respecto a la posibilidad de salvar el obstáculo comentado. Sin embargo hay propuestas didácticas que nos muestran que es posible atender a la diferencia conceptual de la regresión lineal respecto a la función lineal. En los estándares curriculares del NCTM (NCTM, 2000), hace algunas recomendaciones para el estándar que llama "Análisis de datos y probabilidad" que nos parecen interesantes. En primer lugar observamos que se diferencian las actividades a desarrollar en dos etapas: 6-8 (niños de 12-14 años, tercer ciclo de la Educación General Básica en Argentina), y 9-12 (15-18 años, educación polimodal en Argentina). En la primera el trabajo se realiza sobre la nube de puntos, sobre la que se dibuja una recta ajustada sin establecer criterios para ello, mientras que en la segunda etapa se llegan a probar con varias rectas y se ejercitan en la decisión sobre cuál es la que mejor se ajusta.

En concreto, para la etapa 6-8 se comienza por detectar y examinar dos características de una población, estudiando si existe alguna relación entre ellas, proporcionándoles datos a los alumnos y pidiendo que realicen una nube de puntos (tal como en la tarea analizada). Después, el profesor puede pedir que dibujen una recta que encaje aproximadamente en los datos, pero mostrando que no los cubre a todos. La determinación de la pendiente de esta recta (fase relacionada con el modelo que se emplea en el estudio de la función lineal), permite establecer la razón aproximada entre las variables estudiadas. (Utiliza el modelo determinístico haciendo énfasis siempre en que está estudiando de manera aproximada). También se propone emplear la nube de puntos para estudiar dos características en poblaciones diferentes. Como se observa, la nube de puntos es la referencia principal del estudio.

En la etapa 9-12, se centra en analizar las relaciones entre dos conjuntos de datos, incluyendo en este análisis el encontrar funciones que se ajusten bien a los datos. En sus sugerencias muestran que el proceso para llegar a establecer la regresión es el siguiente:

- Crear una nube de puntos
- Conjeturar qué modelo de función los aproxima mejor
- Buscar distintas restas de ajuste (en caso de que sea lineal)
- Determinar/decidir cuál es la que mejor se ajusta.

Los dos conjuntos de datos son, al comienzo y tal como ocurrió en la etapa 6-8, dos variables de la misma población, y posteriormente dos poblaciones.

Como podemos observar, los estándares muestran un cuidado especial en distinguir el razonamiento estadístico que se lleva a cabo en la regresión del formal que se lleva a cabo con funciones lineales.

4. Conclusiones

En los lineamientos curriculares de la escuela media, en distintos países, se incluyen contenidos de estadística desde edades tempranas, sin embargo consideramos que si no se toman recaudos, se corre el riesgo de subordinar el abordaje de problemas referidos a fenómenos aleatorios al trabajo con los conceptos matemáticos utilizados para el modelado estadístico. De esta manera la metodología esencialmente determinística de la matemática podría constituirse en un verdadero obstáculo para la comprensión de la naturaleza aleatoria de las situaciones que la estadística permite resolver.

Bibliografía

- Alvarez C.,. Alvarez F, Arribas A., Martinez S.y Ruiz A. (1999): *Matemática Ciencias, Primer año Polimodal*. Vicens Vives. Barcelona.
- Batanero C. (2001): "*Aleatoriedad, Modelización, Simulación".* Ponencia en X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Zaragoza.
- Batanero C.; Godino J. D., Green D. R., Colmes P.y. Vallecillos A (1994): *"Errores y dificultades en la comprensión de conceptos estadísticos elementales".* International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 25(4), 527-547. Recuperable en: [http://www.ugr.es/local/jgodino]
- Brousseau G. (1983): "*Les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathématiques".* Rechearches en Didactique des mathématiques. 4(2), 164-198.
- Henry M. (1997): "*Notion de Modéle et modélization en l'enseignement". En Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 77-84). Commision Inter-IREM, Reims
- Hamilton L. (1992): *Regression with Graphics*. Duxbury Press
- NCTM (2000): *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. SAEM THALES, Sevilla.
- Rawling J. (1988): *Applied Regression Analysis*. Wadsworth & Brooks

Hector Agnelli, Licenciado en Matemáticas y Master en Estadística, profesor de Probabilidades y Estadísticas en la Universidad Nacional de Rio Cuarto. Argentina.

Patricia Konic, Profesora en Matemáticas, Master en Didáctica de la Matemática, docente de la Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina.
pkonic@exa.unrc.edu.ar

Susana Peparelli, Licenciada en Matemáticas, docente de la Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina.

Nora Zón, Profesora en Matemáticas, Master en Didáctica de la Matemática, docente de Enseñanza Media y de la Universidad Nacional de Río Cuarto. Argentina.

Pablo Flores, Licenciado en Matemáticas y en Ciencias de la Educación, Doctor en Matemáticas, profesor de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España.
pflores@ugr.es www.ugr.es/local/pflores

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 62 – 72
ISSN: 1815-0640

Trabalho de Conclusão de Curso: uma atividade que qualifica a formação de professores de Matemática

Helena Noronha Cury

Resumen

En este artículo, se defienden los trabajos de conclusión del curso (TCC) de formación de profesores de Matemática, a partir de la experiencia en la orientación de estos trabajos durante un período de 12 años, en un curso de Licenciatura en Matemática de una universidad privada del sur de Brasil. Se enfatizan dos temas para los alumnos, sus dificultades y las posibilidades de profundizar los contenidos básicos, evidenciando el papel del TCC para el desarrollo de las habilidades necesarias para la futura práctica docente de los estudiantes de cursos de formación de profesores.

Abstract

In this work we discuss and acknowledge the maintenance of the undergraduate thesis as a required task in mathematics education undergraduate course of a private university in the South of Brazil. Our discussion is brought in by our experience as advisors of these theses, for the period of 12 years. We discuss the role of the undergraduate thesis as an important tool within the students formation, as we emphasize the difficulties faced by them when choosing their subjects and also when reviewing and expanding their basic skills and concepts.

Resumo

Neste artigo, defende-se a manutenção dos Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC) na formação de professores de Matemática, a partir de experiência com orientação desses trabalhos durante um período de 12 anos, em um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade privada do Sul do Brasil. São enfatizadas as escolhas dos temas pelos alunos, suas dificuldades e as possibilidades de aprofundamento de conteúdos básicos, evidenciando-se o papel do TCC para o desenvolvimento de habilidades necessárias para a futura prática docente dos estudantes de cursos de formação de professores.

1. Introdução

O Trabalho de Conclusão de Curso é uma das atividades sugeridas para integrar o projeto pedagógico dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática no Brasil. Pelo parecer CNE/CES 1.302/2001, do Conselho Nacional de

Educação brasileiro, que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para esses cursos,

> Algumas ações devem ser desenvolvidas como atividades complementares à formação do matemático, que venham a propiciar uma complementação de sua postura de estudioso e pesquisador, integralizando o currículo, tais como a produção de monografias e a participação em programas de iniciação científica e à docência. (p. 6).

As alterações propostas pelos últimos pareceres do mesmo conselho, tais como o CNE/CP nº 9/2007, para cursos de formação de professores, apenas modificam as cargas horárias, mas não alteram as recomendações anteriores sobre atividades complementares. Dessa forma, a exigência de realização do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) depende do projeto de cada curso, em cada Instituição.

A partir de uma experiência de 12 anos com orientação de TCC em um curso de Licenciatura Plena em Matemática, apresentamos alguns elementos para discutir o papel dessa atividade na formação dos futuros professores. A escolha dos temas, a busca de fundamentação teórica, as investigações desenvolvidas, as dificuldades dos estudantes e suas aprendizagens no decorrer do processo, são alguns aspectos que nos levam a defender a manutenção do TCC nos projetos dos cursos. Mesmo reconhecendo problemas na elaboração do trabalho por parte de alguns alunos, acreditamos que uma mudança na sua concepção pode trazer benefícios para os futuros professores.

2. Algumas Considerações sobre Trabalhos de Conclusão de Curso

O Trabalho de Conclusão de Curso é uma exigência de muitos cursos de graduação, não só no Brasil, mas em vários outros países. Eco (1984), ao apresentar seus conselhos para os estudantes de ciências humanas que se propõem a escrever uma tese de graduação, tece comentários sobre possibilidades e dificuldades enfrentadas pelos estudantes. Ainda que algumas observações sejam específicas para a experiência italiana dos anos 1970, o autor aponta as questões metodológicas que afligem os alunos que fazem uma investigação e elaboram um trabalho de conclusão a ser defendido perante uma banca.

Em países de língua espanhola, encontramos TCC sob a denominação de "trabajo de pregrado" ou "tesis de licenciatura". Por exemplo, Rodríguez (2006) apresentou um trabalho de conclusão intitulado "Explorar la transformación de rotación integrando Cabri", no Instituto de Educação e Pedagogia da Universidad del Valle, na Colômbia. Ruiz (2006) elaborou o trabalho denominado "Didáctica de los sistemas de conteo mediante la utilización del ábaco en la enseñanza escolar básica", apresentado na Universidad Nacional de Colombia. Em ambos os trabalhos, os temas abordados são relacionados com a prática do futuro professor de Matemática da escola básica.

Nas Instituições de Ensino Superior do Brasil, dependendo do projeto pedagógico de cada curso, o TCC se apresenta como um trabalho que o aluno realiza fora do horário de aula, sob a orientação de algum docente do curso, ou então faz parte de uma disciplina específica, para a qual há carga horária determinada e obrigatoriedade de presença do estudante em sala de aula.

Sua concepção depende dos pressupostos teóricos que embasam o projeto pedagógico e, em princípio, o TCC deve estar relacionado às disciplinas responsáveis pela prática como componente curricular que, conforme a resolução CNE/CP nº 2/2002 do Conselho Nacional de Educação, devem completar 400 horas. Outro parecer do mesmo conselho (CNE/CP nº 9/2007) não exclui as horas de prática como componente curricular, mas as inclui, de certa forma, nas pelo menos 2.500 horas destinadas às demais atividades formativas, além das 300 horas mínimas do estágio supervisionado.

Lüdke e Cruz (2005) realizaram uma investigação com professores da educação básica, para saber se no cotidiano das escolas esses mestres realizavam pesquisas paralelamente às suas atividades docentes. Foram contatados cerca de 70 professores de quatro escolas públicas da cidade do Rio de Janeiro, de diversas disciplinas. As autoras se surpreenderam ao saber que nem todos os entrevistados realizavam investigações, apesar do fato de que "a pesquisa constitui parte da obrigação docente, com carga horária prevista e algum estímulo financeiro em pelo menos três das escolas investigadas." (p. 89).

Do trabalho de Lüdke e Cruz (2005), nos interessa a pergunta sobre a formação dos professores para realizar pesquisas. Cerca de 68% dos entrevistados declararam sua insatisfação pela ausência de formação para investigação em seus cursos de graduação. Ora, o que é o TCC senão uma preparação para pesquisa? E onde ficam os projetos de Iniciação Científica, que muitas vezes são a semente das questões de investigação de um TCC?

Preocupadas com essa ausência de pesquisas nos cursos de Licenciatura, Lüdke e Cruz (2005) foram entrevistar os formadores de professores de universidades públicas às quais estavam ligadas duas das escolas básicas envolvidas na primeira parte da investigação. Foram entrevistados cerca de 50 docentes de disciplinas específicas e pedagógicas, "particularmente envolvidos com as questões de pesquisa e da formação de professores." (p. 92).

Os docentes participantes dessa parte da investigação concordaram que é necessário que a pesquisa faça parte da proposta curricular do curso; mencionaram as maiores facilidades que têm os alunos envolvidos com bolsas de Iniciação Científica, bem como aqueles que recebem convites para participar de grupos de pesquisa liderados por seus professores. No entanto, ao comentar a monografia de conclusão de curso, nem todos concordaram com sua importância para a iniciação à investigação. Alguns julgaram que a elaboração da monografia atrasa as demais atividades do curso, outros, ainda, consideraram que nem todos os docentes orientadores têm condições de se dedicar aos licenciandos principiantes em pesquisas, deixando, no final, que esse trabalho se transforme em simples repetição de idéias recolhidas de vários autores.

Bardívia, Curi e Prado (2004) fizeram um estudo sobre a construção do projeto político-pedagógico de um curso de Licenciatura de uma faculdade privada da Grande São Paulo e apresentam a experiência, justificando a indissociabilidade entre Prática de Ensino, Estágio Curricular e Trabalho de Conclusão de Curso. Segundo os autores, o trabalho interdisciplinar realizado entre algumas disciplinas pedagógicas e as disciplinas específicas de Matemática permite que os estudantes mobilizem e articulem os conhecimentos teóricos em situações concretas de prática de sala de aula.

Na instituição citada por Bardívia et al. (2004), o TCC é um trabalho de elaboração e apresentação obrigatória por parte do aluno que já tenha obtido pelo menos 80 créditos no seu curso, ou seja, que já tenha completado cerca de 1.200 horas-aula. O tema é escolhido de comum acordo entre orientador e aluno, ligado à prática pedagógica de Matemática. Em disciplinas anteriores, como Metodologia Científica e Prática de Ensino, o futuro professor já desenvolveu estudos que lhe permitem fundamentar teoricamente o trabalho e recebeu as orientações metodológicas para realizá-lo. No TCC elaborado no curso citado por Bardívia et al. (2004), há uma parte teórica, em que o estudante revisa a bibliografia sobre o tema escolhido e uma parte prática, em que ele,

> [...] pautado no conhecimento adquirido nas diversas disciplinas, responsabiliza-se pela elaboração e apresentação de uma aula; pelos instrumentos de avaliação; pela elaboração e/ou apresentação de recursos audiovisuais e pela elaboração de materiais didáticos referentes ao conteúdo estudado. (p. 7-8)

Os mesmos autores consideram que esse formato de TCC evita a cópia de textos de vários autores, em uma tediosa apresentação monográfica, e permite que o estudante transforme o saber científico, obtido nas aulas de disciplinas específicas do curso, em um saber prático, em que desenvolve competências que lhe serão úteis na sua futura prática de sala de aula.

Wolff (2007), em sua tese de doutorado, buscou respostas para compreender a possibilidade de ser a pesquisa o eixo articulador da relação teoria-prática, no contexto da formação inicial de professores de Matemática. Por “formação inicial”, entendemos, no Brasil, os cursos de Licenciatura em Matemática, das Universidades ou dos Institutos de Educação Superior. Em sua investigação, Wolff (2007) recebeu uma bolsa de doutorado-sanduiche, tendo realizado estudos na Argentina. Assim, teve uma visão mais ampla da formação de professores de Matemática e pôde comparar duas realidades.

Em sua Universidade de origem, a Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), na Grande Porto Alegre, Estado do Rio Grande do Sul, o TCC é uma atividade curricular obrigatória para todos os cursos, sejam ou não de formação de professores. Seu levantamento sobre a situação na sua Instituição mostrou que, entre 2004 e 2007, foram desenvolvidos 151 Trabalhos de Conclusão de Curso de

Matemática, sendo que 40% não tinham vínculo com ensino ou aprendizagem de Matemática. A autora comenta que “por se tratar de um Curso de Licenciatura em Matemática, a expectativa seria de uma maior incidência de temas de Trabalho de Conclusão vinculados ao exercício da docência em escola básica.”

Também surpreende a autora o fato de que, mesmo já estando engajados em atividades de docência, muitos alunos buscam junto aos seus orientadores o tema para desenvolver o TCC. Wolff (2007) sugere duas causas para o fato: o aluno está muito acostumado com a transferência de conhecimentos e não “se sente autorizado a definir seu próprio tema de estudo.” (p. 130) ou, então, não tem o costume de refletir sobre o processo de ensino e aprendizagem da disciplina. No entanto, se os professores de um determinado curso não têm o hábito de estimular a pesquisa sobre temas relacionados com ensino e aprendizagem, é muito difícil que o aluno, sozinho, desenvolva as habilidades necessárias para a investigação.

Durante as entrevistas com docentes da UNISINOS e das duas Instituições argentinas visitadas por Wolff (2007), foi possível perceber que não há, efetivamente, uma atitude continuada de pesquisa nos cursos investigados. Uma docente comentou que a pesquisa só seria viável se os próprios professores realizassem investigações, especialmente sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática, o que acontece apenas com aqueles poucos professores que têm horário integral na Instituição. Também uma docente argentina comenta que, no curso de formação de professores, perdeu-se, de certa forma, o tempo necessário para as pesquisas, pois muitos professores trabalham em mais de uma instituição de ensino superior e não têm tempo para investigações.

Esses depoimentos vêm corroborar o fato de que a orientação de TCC demanda tempo e dedicação, bem como uma ligação estreita com pesquisas em desenvolvimento na instituição. A seguir, relatamos a experiência com a orientação de TCC na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS) e as possibilidades de aprofundamento de estudos, que se abriram para os alunos orientados.

3. Os Trabalhos de Conclusão do Curso de Matemática da PUCRS

Em 1993, na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, foi implementado um novo currículo para o curso de Licenciatura Plena em Matemática, indicado pela sigla 4/107, trazendo, como uma das diferenças em relação ao anterior, a disciplina denominada “Trabalho de Conclusão”, ministrada no último (8º) semestre do curso. O estudante, no semestre em que concluía o curso de graduação em Matemática, freqüentava as quatro aulas semanais da disciplina, recebendo orientação e discutindo seu trabalho. Um único docente atendia todos os alunos, independentemente do número de formandos (em geral, havia menos de 10 alunos em cada semestre).

Nos semestres anteriores, os alunos já deveriam ter cursado uma disciplina denominada “Projetos II”, em que aprendiam a fazer pesquisas, buscando o tema, formulando as questões, os fundamentos teóricos, aplicando um questionário ou realizando uma entrevista com seus próprios colegas ou com seus alunos da Educação Básica. Dessa forma, ao iniciar o TCC, em geral o futuro professor já tinha feito leituras relacionadas ao tema sobre o qual iria se debruçar. Durante um semestre, então, o aluno realizava o trabalho, sob orientação do professor da disciplina "Trabalho de Conclusão" e, ao final, entregava o documento impresso e defendia a monografia perante uma banca composta pelo orientador e outro docente do curso.

A partir do 1º semestre de 2004, foi criado na PUCRS um novo curso de Licenciatura em Matemática, para atender às Diretrizes Curriculares para os cursos de Graduação (parecer CNE/CES 1.302/2001), indicado pela sigla 4/108, e a disciplina "Trabalho de Conclusão" foi eliminada da grade curricular, não sendo mais exigida a elaboração da monografia pelos formandos. No entanto, até o 2º semestre de 2007, ainda havia estudantes do curso 4/107 realizando seus TCC. Nos 12 anos que se passaram entre o 2º semestre de 1996, quando as primeiras duas alunas formandas do curso 4/107 apresentaram suas monografias, até o 2º semestre de 2007, quando houve a defesa dos últimos alunos a cursarem regularmente a disciplina, 109 TCC foram elaborados. É sobre esta produção que vamos apresentar alguns dados, para discutir sua importância neste curso e estender a argumentação para outras licenciaturas em Matemática.

Durante esse período de 12 anos, quatro professoras orientaram os TCC. A professora A orientou três trabalhos, a professora B, quatro trabalhos, a docente C, 32 trabalhos e a autora deste texto orientou 70 trabalhos, o que corresponde a 64% dos TCC elaborados no período.

No quadro 1, a seguir, apresentamos a distribuição de trabalhos por ano, número que indica, também, a quantidade de licenciandos que se graduaram em cada ano, haja vista que o TCC, sendo elaborado no último semestre do curso, era o fechamento das atividades dos alunos no semestre da formatura.

Ano	Nº	Ano	Nº
1996	2	2002	13
1997	3	2003	11
1998	6	2004	10
1999	8	2005	9
2000	11	2006	16
2001	13	2007	7

Quadro 1 – Distribuição de TCC por ano

Em relação aos temas escolhidos pelos alunos para a elaboração do TCC, o levantamento apresentado no quadro 2 mostra as preferências dos estudantes.

Tema	TCC	Tema	TCC
Ensino de Álgebra	17	Inclusão	6
Estudos Teóricos sobre Educação Matemática	13	Etnomatemática	5
Uso de Jogos	13	Laboratorio de Matemática	5
Uso de Tecnologias	12	Resolução de problemas	3
Geometria	11	Ensino de Álgebra Linear	3
Modelagem e Matemática Aplicada	9	Outros	12

Quadro 2 – Distribuição dos temas escolhidos para os TCC

Em “Ensino de Álgebra”, agrupamos trabalhos que mencionam conteúdos usualmente estudados no Ensino Fundamental (alunos de 12 a 15 anos, em geral) e Médio (estudantes de 16 a 18 anos, em geral). Nesse item, portanto, estão incluídos números inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos, com os tópicos a eles relacionados. Os estudos teóricos em Educação Matemática incluem, por exemplo, pesquisas bibliográficas sobre tendências pedagógicas no ensino de Matemática, sobre teoria das inteligências múltiplas, sobre avaliação.

Quanto aos jogos, esses recursos são tratados de uma maneira global, com investigações sobre seu uso, mas também são apresentadas experiências com Tangran e os jogos Boole. Já sobre o tema “Uso de Tecnologias”, são estudados alguns softwares e suas possibilidades de uso, bem como a educação a distância.

O tema “Geometria” inclui Geometria Plana, Espacial, Geometrias não-Euclideanas e Fractais. Trabalhos sobre Modelagem Matemática e Matemática Aplicada abordam teorias sobre modelagem no ensino assim como algumas aplicações específicas, como “Matemática e Música” ou “Matemática e Natação”. Estudos sobre inclusão trazem pesquisas com alunos cegos, surdos e com necessidades especiais, de maneira geral. Já os trabalhos sobre Laboratório de Matemática incluem experiências com materiais manipulativos, bem como considerações sobre esses materiais disponíveis no Museu de Ciência e Tecnologia da PUCRS.

Além dos temas “Etnomatemática” e “Resolução de Problemas”, ainda houve trabalhos sobre o ensino de tópicos específicos de Álgebra Linear, como as transformações lineares, e um estudo mais geral sobre as dificuldades dos alunos nessa disciplina.

Finalmente, englobamos na rubrica “Outros” aqueles temas com duas ou apenas uma ocorrência, tais como: Uso de História da Matemática, método Kumon, Matemática Financeira, livros didáticos, Matemática para o exame de ingresso às universidades, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

3. Considerações sobre os Trabalhos Realizados

Em nossa experiência de orientação de 70 dos TCC listados acima, notamos que os estudantes têm dificuldade de iniciar o trabalho, mostram-se muito dependentes da orientação do professor. Mesmo tendo escolhido um tema, o desenvolvimento da pesquisa não é simples, pois os futuros professores estão interessados em aplicar logo a atividade que vai gerar os dados para seu trabalho. Da mesma forma apontada nas respostas dos entrevistados de Wolff (2007), não havendo tradição de envolvimento em pesquisa, é difícil para o aluno entender que a teoria ilumina a prática e que esta, por sua vez, alimenta o diálogo com os autores.

Os estudantes que já haviam se envolvido em atividades de pesquisa, com bolsas de Iniciação Científica, por exemplo, tinham muito mais facilidade em encontrar bibliografia, em elaborar questões, planejar a pesquisa. Seus trabalhos, em geral, eram os primeiros a serem concluídos e suas apresentações eram bem elaboradas.

A etapa de busca de referenciais teóricos nos parece ter sido a mais produtiva, pois os alunos se acostumavam a freqüentar a biblioteca, a procurar artigos, livros e dissertações, a buscar fontes na Internet, bem como a discutir a honestidade das informações coletadas nos sites. Como escolhiam, em geral, temas que eram de seu interesse, porque queriam saber mais sobre um assunto não suficientemente explorado em aulas do curso, a busca de bibliografia efetivamente complementava a lacuna sentida por eles.

De uma maneira geral, sendo uma das primeiras ocasiões em que se envolviam com investigação, os estudantes tinham dificuldades em entender a necessidade de formular um problema de pesquisa, de levantar questionamentos sobre ele, de traçar objetivos para a pesquisa, bem como de resolver quais instrumentos seriam empregados para a coleta de dados. Muitas vezes, o aluno elaborava um questionário ou um roteiro de perguntas para uma entrevista com uma visível intenção de obter respostas que confirmassem suas próprias opiniões. Por exemplo, ao buscar dados sobre as dificuldades em Matemática de alunos de um determinado nível, surgiam perguntas como: “a que você atribui suas dificuldades em Matemática?” Ora, com essa frase, o entrevistador já está afirmando que há dificuldades na disciplina, ou seja, elimina a possibilidade de estar indagando a opinião de um aluno que não tem tais dificuldades!

Outro ponto bastante discutido, nas orientações, era a necessidade de citar a autoria das frases que eram apresentadas, às vezes com uma linguagem que dificilmente era esperada daqueles licenciandos. Ao serem questionados, em geral se esquivavam dizendo que o autor tinha dito exatamente o que eles pensavam, só que com “palavras mais bonitas”. Consideramos que a aprendizagem da escrita científica, com a decorrente honestidade e ética ao citar os autores lidos, é um dos fatores em que a elaboração do TCC pode contribuir para a formação do futuro professor.

Também na aplicação dos instrumentos de pesquisa e na transcrição de entrevistas, a ética deve nortear o trabalho dos alunos. O fato de saber que deveriam obter do entrevistado a assinatura em um "Termo de Consentimento Livre e Esclarecido" levava os estudantes a se responsabilizarem pela correta aplicação dos instrumentos e pela não-identificação dos respondentes por meio de fotos, por exemplo, a não ser que fossem devidamente autorizados a fazê-lo.

Coletadas as informações, outra etapa importante da pesquisa tinha início, quando os futuros professores aprendiam a tabular os dados, a apresentá-los sob forma de gráficos, quadros ou tabelas, bem como a analisar o conteúdo dos depoimentos. Em geral, ao chegar nessa fase do TCC, os alunos já estavam imersos na expectativa de concluí-lo e se esforçavam para que seu trabalho tivesse uma apresentação à altura do esforço despendido.

Após a apresentação e análise dos dados, os estudantes, já próximos da data de colação de grau no curso, tendiam a apressar as conclusões do trabalho, o que nos levava, novamente, a reafirmar a importância da conclusão obtida a partir dos dados e o diálogo com os autores que tinham fundamentado a monografia.

A última etapa, de elaboração da apresentação, com auxílio de equipamentos multimídia, e de sua defesa perante a banca, era, em geral, o coroamento do esforço, a ponto de muitos daqueles estudantes se emocionarem ao concluir o trabalho e receberem a aprovação. Efetivamente parecia, aos professores da banca, que eles tinham efetuado um "ritual de passagem" e que estavam, efetivamente, em condições de colar grau e de, posteriormente, ingressar em um curso de pós-graduação, pois tinham, afinal, compreendido que investigar demanda tempo, vontade, curiosidade, honestidade e dedicação. Muitos dos 70 alunos que orientamos durante a elaboração do TCC vieram, posteriormente, a ingressar em um curso de especialização ou mestrado, em Matemática, Educação ou Educação Matemática. Não temos o número exato desses ingressos porque nem todos retornaram à PUCRS para completar estudos pós-graduados, mas em conversas informais com ex-alunos, tomávamos conhecimento de que vários colegas estavam cursando ou já tinham cursado a pós-graduação.

Sobre os temas abordados pelos alunos nos TCC, chama a atenção a predominância pela Álgebra, mostrando que os futuros professores tinham consciência de sua dificuldades em tópicos específicos, como operações com frações, representações gráficas de funções, resolução de equações, etc. Os estudantes também tinham interesse em descobrir recursos que pudessem auxilia-los posteriormente em suas aulas, como os jogos e os *softwares*. Esses temas, juntamente com estudos mais teóricos, tiveram a preferência de mais de 50% dos formandos.

4. Considerações Finais

Ao relatar essa experiência de 12 anos de elaborações de Trabalhos de Conclusão de Curso, quisemos deixar claras as possibilidades que se abrem para os estudantes de Matemática que têm esse tipo de exigência no currículo de seus cursos de formação para a docência. Além dos conhecimentos sobre metodologia da pesquisa, os futuros mestres também se aprofundam em assuntos que não foram suficientemente estudados e podem, com a ajuda do orientador, dirimir as dúvidas e conscientizar-se das suas próprias dificuldades.

Também nos parece importante a possibilidade de interligar os conteúdos estudados em diferentes disciplinas, tanto específicas como pedagógicas. Ao realizar o TCC, o futuro professor vai refletir sobre a forma como um determinado conhecimento foi apresentado no curso e como ele fará a transposição para os níveis de ensino em que vai atuar. Afinal, todos os estudantes passaram pela experiência do estágio de prática docente e sabem que os conhecimentos aprendidos em disciplinas como Álgebra ou Geometria precisam ser reconstruídos para o trabalho com alunos da educação básica. Concordamos com Bardívia et al. (2004), quando afirmam que

> [...] não basta ao professor conhecer teorias, perspectivas e resultados de investigação como fins em si mesmos – ele deve ser capaz de construir, a partir da relação intrínseca existente entre prática e teoria, soluções apropriadas para os diversos aspectos da sua ação profissional. (p. 5).

Dessa forma, mesmo entendendo que há dificuldades na realização do Trabalho de Conclusão de Curso, por parte dos alunos ou por parte dos orientadores, defendemos sua manutenção nos cursos de formação de professores de Matemática. Essa atividade tem um papel de destaque nessa formação, pelas possibilidades de interligar saberes e práticas, de buscar soluções próprias para as dificuldades encontradas em suas aulas e de investigar temas que não foram suficientemente aprofundados. Mesmo que os temas abordados pelos alunos não sejam originais, a importância da elaboração do TCC está ligada ao desenvolvimento de habilidades de investigação, que podem ser aproveitadas por esses futuros professores em projetos nas escolas ou nos cursos de pós-graduação que porventura venham a freqüentar.

Bibliografía

- Bardívia J. L., Curi E., do Prado E. C. (2004): *"O tripé: prática de ensino, trabalho de conclusão e estágio supervisionado nos cursos de Licenciatura Plena em Matemática".* In: Anais do *VII Encontro Paulista de Educação Matemática*. São Paulo, Brasil. Acessado em 15 jun. 2008, de http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_Orais/co0072.doc
- Conselho Nacional de Educação do Brasil (2001): *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Acessado em 30 jun. 2008, de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf

- Conselho Nacional de Educação do Brasil (2002): *Duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior*. Acessado em 30 jun. 2008, de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CP022002.pdf
- Conselho Nacional de Educação do Brasil (2007): *Reorganização da carga horária mínima dos cursos de Formação de Professores, em nível superior, para a Educação Básica e Educação Profissional no nível da Educação Básica*. Acessado em 30 jun. 2008, de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/2007/pcp009_07.pdf
- Eco U. (1984): *Como se faz uma tese em ciências humanas*. Lisboa: Editorial Presença.
- Lüdke M., da Cruz G. B. (2005): "Aproximando universidade e escola de educação básica pela pesquisa". *Cadernos de Pesquisa*, 35 (125), 81-109.
- Rodríguez M. S. (2006): "Explorar la transformación de rotación integrando Cabri". In: Memorias del III Congreso Iberoamericano de Cabri. Bogotá, Colombia. Acessado em 22 dez. 2008, de http://www.iberocabri.org/MEMORIAS_2006/Reportes/MarisolSantacruz1_R16.pdf
- Ruiz H. J. B. (2006): "Didáctica de los sistemas de conteo mediante la utilización del ábaco en la enseñanza escolar básica". Universidad Nacional de Colombia. Acessado em 22 dez. 2008, de http://www.matematicas.unal.edu.co/academia/programas/documentos_tesis/1-2006/2.pdf
- Wolff R. (2007): *A formação inicial de professores de matemática*: a pesquisa como possibilidade de articulação entre teoria e prática. Tese de Doutoramento em Educação – Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, Brasil.

Helena Noronha Cury. É licenciada e bacharel em Matemática, mestre e doutora em Educação, pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil. Trabalha há mais de 30 anos com cursos de formação de professores de Matemática, em instituições de ensino superior. Atualmente, é professora do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática, do Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), Santa Maria, RS, Brasil. Seus interesses de pesquisa centram-se na formação de professores e na análise de erros. Organizou e publicou livros, artigos e comunicações na área de Educação Matemática.E-mail: curyhn@via-rs.net

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 73 - 84
ISSN: 1815-0640

De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. Vivencias, intuiciones y emociones matemáticas

Pedro Buendía Abril

Resumen

La matemática es parte de tu forma de pensar y de ser. Nuestro pensamiento tiene que revolotear libremente como una mariposa en el jardín de los números y en el paisaje de las formas. En “Mete el lápiz y saca el metro” se propone construir el edifico de la medida. En “El uno, el todo y la parte” pensamos el uno en la vida y hacemos operaciones con las manos utilizando objetos sobre plantilla de cartulina... Y en “El paisaje de las formas” formamos un rectángulo humano, buscamos las esencias del cálculo de superficie y del volumen, y redescubrimos las fórmulas de áreas y volúmenes con experiencias sencillas.

Abstract

Maths is a way of thinking and being. Our thought has to fly freely like a butterfly in the garden of the numbers and in the landscape of the geometric. “Hide the pencil and take out the tape measure”. It tries to build the building of the measure. “In the number one, in the everything and in the part”. We link the number one to life and we make sums with the hands using objects in cardboard template... And in the landscape of the geometric we make a human rectangle. We look for the most important thing of the surface and volume calculation. And we rediscover the formulae of areas and volumes with simple experiences.

Resumo

Os Maths são uma maneira de pensar e de ser. Nosso pensamento deve voar livremente como uma borboleta no jardim dos números e na paisagem do geométrico. “Mete el lápiz y saca el metro ” Tenta construir o edifício da medida. Sobre “El uno, el todo y la parte”, Nós ligamos o número um à vida e nós fazemos somas com as mãos usando objetos no molde do cartão… E “El paisaje de las formas” nós fazemos um retângulo humano. Nós procuramos a coisa a mais importante do cálculo da superfície e do volume. E nós redescubrimos as fórmulas das áreas e dos volumes com experiências simples.

1.- Introducción

¿Qué es Matemática? Matemática eres tú, la matemática es parte de tu forma de pensar y de ser. Todos llevamos un matemático dentro que crece y crece, cuando encuentra un ambiente propicio donde no se enjaule el pensamiento entre barrotes de fórmulas sin alma. Nuestro pensamiento tiene que revolotear libremente como una mariposa en el jardín de los números y en el paisaje de las formas.

Para practicar esta metodología de trabajo en la educación matemática tenemos que vivir intuiciones y emociones en un Taller Matemático, en el que disfrutaremos de experiencias que enlacen "las matemáticas de las manos" con "las matemáticas de la mente".

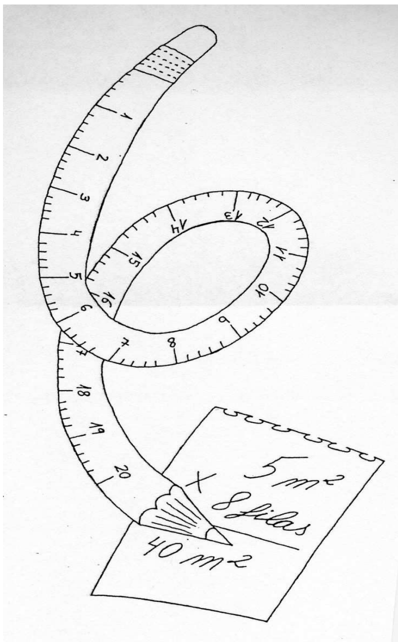
La propuesta de trabajo para el Taller viene en forma de carta matemática:

Queridos/as amigos/as:

Alrededor de mi cabeza gira una nubecilla de palabras: conciencia, natural, esencia, sencillez, intuición, emoción, pasión, alegría, fiesta, creatividad, valores, animación…
Entiendo que el triángulo Matemáticas-Creatividad-Educación en Valores es un todo integrado en torno a la Animación, capaz de estimular en los aprendices la conciencia de su ser matemático, favorecer sus procesos de inteligencia creadora y mejorar sus relaciones con el mundo y con los seres que lo habitan.
De esta manera contribuiremos a desarrollar la competencia de la alfabetización matemática enamorando cada vez a más y más aprendices de este saber.
Y quiero que sintamos juntos la emoción de la aventura por los paisajes del Universo Matemático, animando a los estudiantes, en un ambiente festivo de alegría y bullicio, al experimentar con las medidas, los números y las formas.
Un fuerte abrazo y números cordiales.

A continuación se proponen unos guiones de trabajo con algunas experiencias a modo de orientación, que se podrán adaptar a distintos niveles educativos, unas en educación primaria de seis a once años, y otras en educación secundaria de doce a dieciséis años, o bien en educación de adultos, en búsqueda permanente de nuevas vivencias matemáticas, en torno a medidas, números y formas.

Medidas: “Mete el lápiz y saca el metro”



Vamos a construir el edificio de la medida. La expresión “Mete el lápiz y saca el metro”, el lápiz, un símbolo de “aprendizaje más teórico”, y el metro, un símbolo de “aprendizaje más práctico”, quiere llamar la atención sobre lo importante que es empezar haciendo experiencias reales tomando medidas en primer lugar, para no hacer cuentas en el vacío. Las siguientes experiencias nos pueden ayudar a practicar una metodología capaz de favorecer el aprendizaje por descubrimiento.

1. **Hacemos un metro decímetro a decímetro con cañitas de refrescos.**

Metemos sobre un hilo de metro diez cañitas de refresco de un decímetro, de una en una, combinando dos colores diferentes. Tomamos medidas en el entorno y en nuestro cuerpo. Podemos crear figuras geométricas planas, y también en volumen. Y hasta nos puede servir de modelo para ver la intersección de planos…

2. **Construimos el “Edificio de la medida”:**

- **La primera piedra: el metro.** Lo situamos sobre el suelo.
- **El solar de metro cuadrado.** Desplegamos un cuadrado de papel de un metro de largo y un metro de ancho para cubrir el solar de metro. Lo ideal es que el cuadrado de papel esté cuadriculado en trozos de decímetro cuadrado. Así vemos que el solar de metro está compuesto de diez filas con diez decímetros cuadrados en cada una.
- **La casa de metro. El cajón de metro. El metro cúbico humano.** Levantamos un metro sobre el suelo, bien con varillas de plástico o madera, o bien desenrollando verticalmente cada uno de los cuatro metros que colocamos previamente sobre cada una de las esquinas del solar. Acabamos de delimitar un espacio de metro cúbico. Podría ser una casita o un cajón, por ejemplo. Para seguir conociendo el espacio también podemos formar un metro cúbico humano, entre cuatro personas, sentadas unas frente a otras sobre cuatro sillas, y extendiendo sus brazos para abrazar el metro cúbico al mismo tiempo que se abrazan entre sí, y respiran el aire de su interior.
- **La caja de litro.** Es más grande de lo que parece. Si colocamos una botella de vidrio de un litro llena de agua, junto a una caja de cartulina de un decímetro cúbico, nos da la sensación de que se van a llenar unas dos cajas. La manera de salir de dudas es comprobar si el agua entra de verdad en la caja. La impermeabilizamos con una bolsa de plástico, y nos admiramos al ver ¡cómo se produce el milagro y el litro entra increíblemente en su caja como no podía ser de otra manera! Ahora la situamos sobre uno de los cuadrados de decímetro de lado del solar de metro; y por comparación, de un simple vistazo,

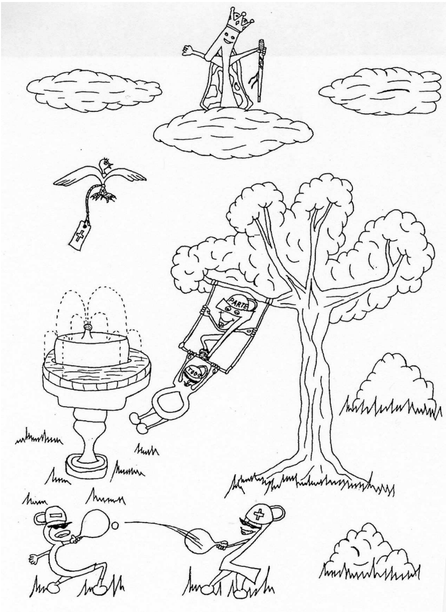
percibimos que entran mil cajas de litro en el cajón de metro. Si le ponemos nueve tabiques de cartulina conseguimos dividir la caja en 10 decilitros. El café o la manzanilla por ejemplo la tomamos en vasitos de decilitro. Si partimos cada uno de estos apartados en 10 tubos ya tenemos el centilitro, que coincide con el contenido de una cucharada sopera, por ejemplo. Cada uno de estos tubos, a su vez, lo podemos rellenar con 10 cajitas de centímetro cúbico, o mililitro.

- **La cajita de garbancito, también llamada centímetro cúbico y mililitro.** Con papel milimetrado es muy fácil montar una cajita de centímetro cúbico, llamada así por sus medidas, un centímetro de larga por un centímetro de ancha y por un centímetro de alta. Colocando esta cajita junto a la caja de litro adivinamos fácilmente que entran mil cajas, por eso se llama mililitro, porque hacen falta mil cajitas para rellenar la caja de litro. Y también podemos practicar una sencilla experiencia que consiste en introducir un garbanzo dentro de esta caja, comprobando que encaja perfectamente, y seguramente le ayudará a la mente a tener una buena referencia a la hora de recordar esta medida. Si le sacamos el garbanzo y la llenamos con agua destilada fresca a cuatro grados de temperatura, podemos hacer otra sencilla experiencia que consiste en vaciarla en la palma de la mano ¡para notar el frescor de un gramo de agua!

3. **Ahora continuamos con dos pruebas pasadas por agua:**

- **¿Flotará o se hundirá?** La experiencia consiste en sopesar un paquete de 500 hojas DIN A4, y emitir un juicio de si flotará o se hundirá, según la sensación que nos dé al tacto. Después hay que comprobar lo que ocurre realmente echando el paquete plastificado, para que no se estropeen las hojas, en un recipiente con agua. Una buena explotación didáctica de esta situación consiste en hacer cálculos con los datos que hay en el letrero del paquete de hojas buscando una explicación de lo observado en función de la comparación de las densidades del agua y el papel.
- **Números bajo la lluvia.** Esta experiencia es mejor hacerla si realmente está lloviendo. Supongamos que llueve aproximadamente con una intensidad entre fuerte y moderada. Si mostramos un bote sin tapadera de unos diez centímetros de alto y preguntamos ¿cuánto tiempo tardará más o menos en llenarse si lo ponemos bajo la lluvia?, las respuestas por tanteo suelen ser generalmente: cinco minutos, un minuto, diez minutos, media hora, dos minutos… Nos espera una gran sorpresa cuando pongamos el bote bajo la lluvia y comprobemos que no se llena tan rápido como esperábamos. Ahí es donde empieza la situación a ponerse interesante, es justo el momento adecuado para buscar explicaciones matemáticas al “extraño fenómeno del bote que no se quiere llenar tan rápido como suponíamos”, es el momento idóneo para “escurrirle números al agua”.

Números: "El uno, el todo y la parte"



El uno, la primera piedra de este edificio, el rey de los números, parece la foto del dedo índice, que ha levantado un niño para decir que tiene un añito. Los dedos de las manos son la herramienta más cercana que tenemos para calcular. Las experiencias de manipular objetos de nuestro entorno, botellas y vasos con agua, platos con almendras…, nos van a permitir juntar, separar, repetir y repartir números. Doblando una simple hoja de papel estamos tocando el todo y la parte de los números fraccionarios. Dichas experiencias están situadas en los primeros peldaños de una escalera que sigue con la representación en dibujos, esquemas y modelos, y con el paso de los años llega al rellano de la abstracción de los números.

1. **Pensando el uno en la vida**. La lección de los números podría empezar pensando el uno en la vida y diciendo o cantando: un niño, una niña, un sol, una luna, una alfombra, un caramelo, un gato, un pájaro, una paloma de la paz, una sonrisa, un recreo, un bocadillo, un vaso de agua, un lápiz, un libro, una canción, un sueño…

2. **Asociamos los números a las cosas del entorno.** El nacimiento de los números en la mente de un aprendiz está ligado a su mundo: 1 nariz, 2 ojos, 2 manos, 5 dedos en cada mano, 4 personas de familia, 4 patas de la mesa, 6 sillas, 7 flores en la maceta, 3 tazos… Pensar en "unos compactos", irrompibles, como una bicicleta o una persona, y "unos frágiles", que se pueden fraccionar como un queso o una naranja, ayuda a reforzar el cimiento del edificio de los números.

3. **Practicar "el sano deporte del cálculo mental".** El tanteo es una herramienta muy poderosa que tiene la mente para decir "este resultado no puede ser, es un verdadero disparate", o bien "estoy de acuerdo, pues más o menos debe dar eso". Pienso que es muy conveniente utilizar la calculadora en combinación con el cálculo mental.

4. **Expresión plástica del número 111**. El "1" verdadero y el "1" más mentiroso cuanto más a la izquierda está situado. Podemos utilizar diversos materiales: cromos, canutillos de refrescos, almendras... Si hacemos la experiencia con almendras, debemos preparar once platos pequeños con diez almendras en cada uno y dejaremos una almendra suelta. Colocaremos esta almendra que se corresponde con el 1 verdadero, a su izquierda un plato con diez almendras, que se corresponde con un 1 que ya nos engaña porque no es una almendra sino un plato con diez almendras, y más a la izquierda un cubo lleno con diez platos de diez almendras en cada uno, que se corresponde con otro 1

que nos miente 100 veces… Esta experiencia ayuda a ver muy claro desde el principio el valor posicional de los números en base diez.

5. **Hacemos “sumas” y “restas”, con las manos, tocando almendras sueltas (unidades) y platos con almendras (decenas), sobre plantilla de cartulina.** *“...Ninguna instrucción sobre las reglas de aritmética puede ser realmente valiosa a menos que se haya revelado el proceso a los estudiantes a través de numerosos ejemplos concretos”* (pág. 222 de Didáctica de Matemáticas de A. Orton). Si juntamos por ejemplo 28 almendras (2 platos a la izquierda y 3 almendras sueltas a la derecha), con 15 almendras (1 plato y 5 almendras sueltas), todo esto colocado sobre dos filas en la plantilla de cartulina, vemos claramente que al juntar las almendras sueltas de la derecha, 8 y 5 llenan 1 plato y sobran 3 almendras, y que ese plato lo juntamos con los otros 3 y tenemos 4 platos llenos. Así podemos entender el verdadero significado del algoritmo: “8 y 5 son 13, anoto 3 y me llevo 1 (un plato lleno con una decena)”, que lo junto con los otros 3 platos. Ahora vamos a usar este modelo para la resta. Para quitar por ejemplo 4 almendras sobre un total de 23 almendras, lo podemos hacer mentalmente para empezar y ya sabemos que son 19. Si lo queremos calcular con el modelo, tenemos que replegar la cartulina a una sola fila y así tomamos conciencia del significado de una resta, que es la existencia de una sola cantidad, de la que tenemos que quitar algo. Al intentar quitar 4 almendras sufrimos la sensación de que no podemos hacerlo, como mucho podemos quitar 3 almendras. Y vemos claro que una posibilidad es vaciar un plato, así ya tenemos 13 almendras en la parte derecha de la plantilla, de donde podemos coger tranquilamente 4 y nos quedan 9. A la izquierda de la plantilla nos queda un plato, por tanto nos quedan 19 almendras. Acabamos de conectar con el significado del algoritmo.

6. **Rellenamos con almendras las tablas de multiplicar. La esencia de las veces de las cosas.** Un modelo de tabla de cartulina de 10 por 10 cuadrículas (de 2,5 cm por 2,5 cm cada cuadrícula), nos sirve para construir todas las tablas de multiplicar rellenándolas por ejemplo con almendras o bien con piedrecitas, y así entrar en el significado de una multiplicación, descubriendo que la esencia está en ir completando filas.

7. **Hacemos divisiones con las manos, repartiendo platos de almendras.** Si repartimos por ejemplo 57 almendras (5 platos de 10 almendras y 7 almendras sueltas) entre dos personas podemos ver claramente que le tocan en principio 2 platos a cada una. Pero es ahora cuando surge el problema puesto que queda un solo plato. Se resuelve vaciando el plato, y así conseguimos tener 17 almendras, que repartimos entre las dos personas tocando a 8 almendras para cada una, y hasta se ve que queda 1 almendra de resto.

8. **Fracciones pasadas por agua. La suma de un medio y un cuarto de litro.** La experiencia consiste en llenar un vaso grande de “medio litro”, y un vaso pequeño de “cuarto litro”. Si planteamos sumar ambas cantidades, lo primero que podemos hacer es utilizar un mismo tamaño de vaso, lo más cómodo es vaciar el vaso grande en dos pequeños, así conseguimos tener una sencilla suma de 2 vasos y 1 vaso, que son 3 vasos pequeños. Una vez que hemos

sumado la fracción pasada por agua, la podemos hacer doblando papel, la hoja representa el litro, la media hoja el vaso de medio litro y la cuarta parte de la hoja es el vaso pequeño de cuarto de litro. El aprendiz ya se encuentra preparado para hacer esta suma con papel y lápiz, reduciendo a común denominador, y controlando en cada paso el algoritmo, "aprendiendo matemáticas de las manos a la cabeza" pasando por el papel y el lápiz.

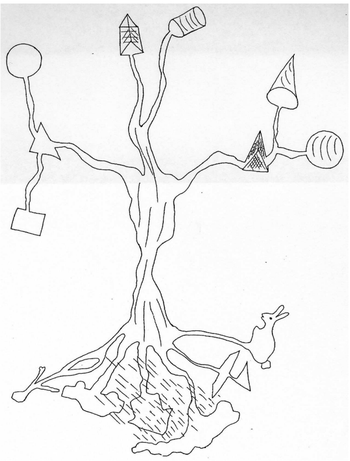
9. **La potencia de un saco de trigo o "cómo entender intuitivamente que cualquier número elevado a cero es uno".** Imaginemos un agricultor que tiene un saco de trigo cuyo rendimiento es de 3 sacos. Si lo siembra cuando haya pasado 1 año recoge 3 sacos (3^1 año = 3 sacos), si vuelve a sembrar cada uno de esos 3 sacos consigue 9 sacos al cabo del segundo año (3^2 años = 9 sacos), y así sucesivamente en el tiempo adelante. ¿Y ahora mismo, en el "año cero", ahora que todavía no ha sembrado el saco porque no ha pasado el tiempo, cuántos sacos tiene? Evidentemente la intuición nos dice que tiene el saco (3^0 años = 1 saco). Y para verlo más claro en el transcurso del tiempo, nos podemos preguntar cuánto trigo sembraría el año anterior, y llegamos a la conclusión fácil de saber que tuvo que sembrar la tercera parte del saco (3^-1 año = 1/3 sacos). Y dos años atrás en el tiempo se ve muy claro que tuvo que sembrar la tercera parte de la tercera parte del saco (3^-2 años = 1/9 sacos) Y así sucesivamente en el tiempo atrás. El modelo del saco sirve para ver claro eso de que cualquier número elevado a cero es uno, por lo menos cuando la base de la potencia es positiva.

10. **Resolver problemas tomados de la vida real, sacados de su casa, de su escuela, de su entorno y de la vida.** Los números están en todas partes, en los bosques, en el campo, en la huerta y en la ciudad, en lo natural y en lo inventado, en las plantas y en los animales, en las nubes, en los torrentes, en los ríos, en los lagos y en el mar, en el sol y en la sombra, en los alimentos y en los excrementos, en los jardines y en los basureros, en la lluvia y en el viento, en la tierra, en el fuego, en el agua y en el aire... Los números corren al ritmo de las cosas que se mueven, con las bicicletas, los coches, los trenes y los camiones, nadan con los peces, navegan con los barcos, vuelan con los aviones, los cohetes y los pájaros... Los números están en el cuerpo, nos salen del corazón a un ritmo medio de 60 a 80 pulsaciones por minuto, los notamos en la presión arterial del torrente sanguíneo, y están en el aire que respiramos... Con la cantidad de números que nos ofrece la vida no tiene mucho sentido abusar de las cuentas con números sin acompañante, solitarios, con números huérfanos sin apellidos de cosas, con números carentes de significado. Hacer números en el vacío, hacer operaciones amasando números mecánicamente no tiene mucha gracia por no decir ninguna, a no ser que estemos haciendo un entrenamiento para aprender la mecánica de las operaciones, pero de ninguna manera antes de haber digerido muy bien el significado de cada una de ellas: la suma, la resta, la multiplicación, la división... Sumar, restar, multiplicar y dividir caramelos para endulzar el aprendizaje, calcular nuestros espacios tanteando y midiendo la clase y el patio de recreo para saber dónde nos movemos, hacer números a nuestros movimientos para tomar el pulso a nuestro ritmo de vida, escurrirle números al agua para saber los litros que caen por metro cuadrado en cada

lluvia, medirnos la sombra cuando salimos a tomar el sol para descubrir la proporcionalidad geométrica… es escurrirle números a la vida.

11. **Saboreamos un "postre de frutos secos".** Llegar un día a clase con un montón de 6 nueces, 9 cacahuetes y 12 pistachos, por ejemplo, e invitar a los estudiantes a repartirlos en el mayor número de postres posible, sin que quede nada sin repartir, que los postres sean iguales entre sí, y sin poder partir ningún fruto, es una experiencia bastante interesante. No siempre sale bien a la primera, y eso es lo bueno porque estimula el pensamiento. Cuando conseguimos por fin el reparto equilibrado, en este caso concreto con 3 postres de 2 nueces, 3 cacahuetes y 4 pistachos en cada uno de ellos, es el momento de hacer la descomposición factorial de cada una de las tres cantidades de frutos que había en el montón inicial, y descubrir el máximo común divisor, en esta situación. Después nos comemos los frutos para terminar con buen sabor de boca. Y también nos podemos beber unos decilitros de zumo para seguir aprendiendo de forma agradable las medidas en una situación real. ¡Buen provecho!

Formas: "El paisaje de las formas" y "Lo redondo y el pi"



La observación de las formas en el entorno cercano, en el mundo y en la vida nos abre las puertas de la Geometría. Recortar triángulos, rectángulos y círculos, trocearlos y recomponerlos de diferentes maneras a modo de rompecabezas, ayuda a entender la esencia de las formas en dos dimensiones. Construir, rellenar y comparar cuerpos geométricos de tres dimensiones son experiencias básicas para aprender Geometría de una forma natural y atractiva.

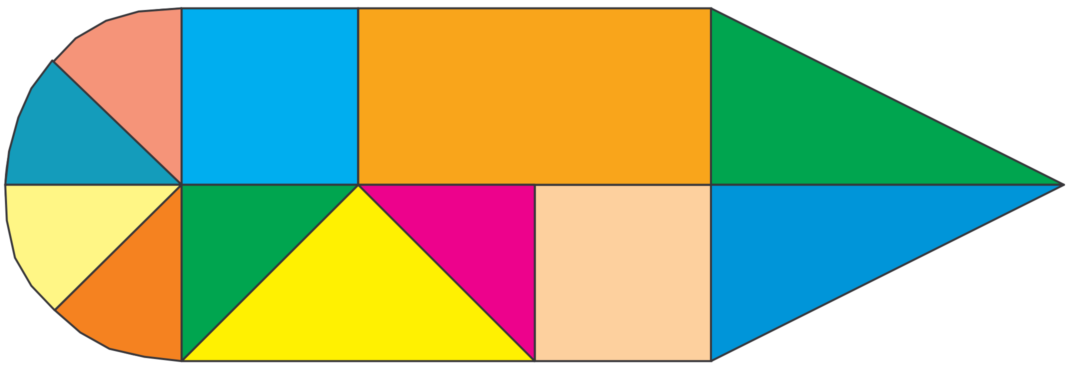
1. **El árbol de la esencia de las formas: rama plana y rama voluminosa.** El árbol de la esencia de las formas hunde sus raíces en lo natural y en lo inventado, transformando la savia bruta de las formas en savia elaborada de formas geométricas. Podemos dibujar nuestro árbol para decorar la clase.

2. **El "rectángulo humano" de 6 personas.** Análisis de posibles expresiones:

   - 3 filas por 2 personas.
   - 2 filas por 3 personas.
   - 3 personas por 2 personas.

La experiencia consiste en observar un rectángulo humano desde tres puntos de vista estratégicos. Hay dos puntos de vista que no ofrecen ninguna dificultad, los que están frente a un lado o frente al otro; estos puntos de vista ven filas. Pero el punto de vista que observa el rectángulo desde una esquina es más difícil, pues ve dos personas si la vista se le va por un lado y tres personas si se le va por el otro. Esta experiencia nos permite descubrir intuitivamente que la esencia del cálculo de superficie está en las filas.

3. **Jugando con las formas.** Combinamos las piezas para hacer una figura global prevista, y después la deshacemos para crear nosotros otras diferentes. Con unas piezas de cartulina, madera o cualquier otro material, como por ejemplo, las que se muestran en la siguiente figura, podemos combinarlas de diferentes maneras sobre una plantilla base hasta conseguir encajarlas en ese contorno, a modo de puzzle con varias soluciones. Y también podemos quitar la plantilla para construir otras composiciones, más por libre. En cualquier caso se puede establecer algún tipo de criterio como que se toquen las piezas al menos en un punto, o que se toquen en un lado… o bien intentar conseguir un perímetro mínimo o máximo… Jugando con las formas se fomenta la creatividad, aprendemos geometría y disfrutamos de la belleza geométrica.



4. **La esencia del cálculo de la superficie: el átomo de la superficie y la fila de la orilla.** Construimos un modelo de cartulina: la calculadora de superficie. Un sencillo modelo de cartulina ayuda al aprendiz a descubrir la fórmula del cálculo de la superficie del rectángulo. Recortar y tocar un cuadrado, por ejemplo de un centímetro de lado, te hace tomar conciencia del "uno" de la superficie, en ese caso particular. Al desplazarlo a lo largo de una fila descubres la superficie de la orilla, a lo largo del rectángulo. Y al desplazar la fila de la orilla a lo ancho de ese rectángulo, estás descubriendo toda la superficie del rectángulo, según el número de veces que se repite la fila. Acabas de entrar en el auténtico significado de la fórmula del área del rectángulo.

5. **La esencia del cálculo del volumen: el átomo del volumen, la fila voluminosa de la orilla y la capa de abajo.** La experiencia consiste en modelar dados de plastilina de un centímetro cúbico, entre las yemas de

nuestros dedos para construir en grupo un cuerpo geométrico estratificado en capas. Como en la experiencia anterior, se trata de poner a los aprendices en situación para que descubran la esencia del cálculo del volumen al construir su "pequeño edificio del volumen", poniendo una primera piedra que es el "átomo del volumen", y continuando su construcción a lo largo de la fila voluminosa de la orilla, la capa o piso de abajo y el resto de las capas.

6. **Formamos un redondel humano con triángulos de colores.** Esta experiencia tiene una connotación intercultural. Primero preparamos unas piezas de cartulina, que podemos considerar triángulos curvos, con dos lados rectos más largos, y un lado curvo más corto. Una manera sencilla de prepararlo es juntando un cuadro con cuatro cartulinas de diferentes colores, y trazando un gran redondel desde donde se unen los cuatro vértices de las cartulinas. Si dividimos la circunferencia en veinte partes, conseguiremos veinte piezas de cuatro colores diferentes. Una propuesta interesante es que cada miembro del grupo lleve una pieza en la mano, y todos se vayan acercando cada vez más hasta formar un círculo de colores. Y ahora es el momento preciso en el que podría sonar una música ambiental agradable que invitara a darse un gran abrazo colectivo alrededor del círculo. Es una muy buena ocasión para conectar las Matemáticas con la Educación en Valores. Y podemos seguir jugando con las formas transformando este círculo en dos filas iguales de triángulos, una frente a otra, que parecen "la dentadura abierta de un cocodrilo". Y si le cerramos la dentadura al cocodrilo estamos descubriendo la fórmula de la superficie del círculo a partir de la del rectángulo.

7. **Si no te acuerdas de la superficie del círculo “no te preocupes, sé feliz”.** De entrada no parece nada pedagógico este consejo. La siguiente experiencia quiere demostrar su valor didáctico. En realidad, si un alumno ha aprendido la superficie del círculo solamente de memoria sí debería estar preocupado y muy preocupado. Pero la siguiente experiencia es una alternativa para descubrir la superficie del círculo, y así poder recordarla con memoria inteligente. Se propone empezar la experiencia con un cuento: *“Había una vez un carpintero, hace mucho tiempo, que hacía mesas de tablero rectangular. Para calcular lo que tenía que cobrar por el tablero multiplicaba el largo por el ancho. Hasta que un día llegó un caprichoso y le encargó una mesa redonda. A la hora de cobrar multiplicó el largo (diámetro) por el ancho (diámetro) y… ¡se había pasado por las cuatro esquinas! Tuvo que ingeniarse otra manera de hacer los cálculos, estaba harto de pasarse y acabó multiplicando el radio por el radio, obteniendo la tabla cuadrada del radio. Y, por tanteo, a ojo de buen carpintero, pensó que era justo cobrar tres tablas cuadradas del radio”.* Pero para afinar el tanteo del carpintero, nosotros podemos utilizar una sencilla balanza, poner en un platillo un redondel de cartulina que representa el tablero redondo, y en el otro platillo vamos echando las “tablas del radio”, del mismo gramaje de cartulina. Como no se equilibra con las tres tablas, cortamos la cuarta tabla de cartulina en diez trozos, y probamos a echar uno de los trozos, y casi se equilibra; ya vamos por 3,1 tablas. Volvemos a cortar uno de los diez trozos en otras diez partes, echamos cuatro de éstas en el platillo, y se produce el equilibrio. ¡Acabamos de sacar dos decimales al número pi! Si un aprendiz ha participado en el cuento del carpintero y ha pesado el número pi, jamás de los jamases se deberá preocupar si no se acuerda de la superficie del círculo porque siempre la podrá recordar con memoria inteligente. Una buena música para ambientar esta reflexión pedagógia es “Don’t worry, by happy”.

8. **Hacemos prismas, pirámides, cilindros y conos de cartulina.** Los forramos con papel milimetrado para descubrir las fórmulas de sus áreas, observando su descomposición plana. En el prisma vemos las dos bases y tantos rectángulos laterales como lados tiene cada una de sus bases. En la pirámide vemos su base y los triángulos de sus caras laterales. En el cilindro vemos dos círculos iguales y un rectángulo cuyas dos medidas para el cálculo del área son la longitud de la circunferencia de la base y la altura del cilindro. En el cono vemos el círculo de su base y otra pieza que podemos considerar un triángulo de lado curvo de longitud la de la circunferencia de la base, y altura la generatriz del cono. Y los rellenamos de arroz o de garbanzos por ejemplo, para experimentar con sus volúmenes. Si comparamos un prisma y una pirámide, o bien un cilindro y un cono, que tengan la misma base y la misma altura, podemos comprobar experimentalmente que necesitamos el volumen de tres pirámides para rellenar un prisma, o bien tres conos para rellenar un cilindro. Lo bueno de esta experiencia es que suele sorprender al aprendiz puesto que al ver la pirámide junto al prisma, o bien el cono junto al cilindro, piensa por tanteo “a ojo de buen cubero” que hacen falta sólo dos pirámides para llenar el prisma, o bien dos conos para llenar el cilindro. Esta experiencia le sirve de base para recordar en el futuro con memoria inteligente que todas

las fórmulas de los volúmenes de los cuerpos geométricos "que empiezan en algo" y "terminan en punta, en un punto, en nada", se dividen entre tres.

9. **Construimos un enjambre de conos y experimentamos con una naranja.** La unión de muchos conos pequeños de cartulina, mejor si es de color naranja (de una altura de unos 4 o 5 centímetros), desde la base al vértice, por la generatriz, utilizando clips para enlazar, tiende a formar una esfera del tamaño de una naranja aproximadamente. Con la imaginación podemos intuir que la esfera está formada por muchísimos conos. Si ahora le damos un corte a una naranja de verdad, del mismo calibre que el modelo de cartulina, y con un círculo de papel a la medida del corte intentamos envolverla, podemos calcular por tanteo "a ojo de buen cubero" que necesitamos unos cuatro papeles del corte para conseguirlo. El recuerdo de esta experiencia intuitiva nos va a ayudar a recordar visualmente la superficie de la esfera, como cuatro veces la superficie del "círculo del corte de la naranja". Para saber el volumen de nuestra esfera podemos imaginar la desintegración de los conos de cartulina colocados verticalmente sobre un círculo del tamaño de la corteza, equivalente a cuatro círculos del corte; y puestos a imaginar cambiamos todos esos conos por un gran cono como "un sombrero de chino". A través de esta imagen visual vemos claramente que para calcular el volumen basta con multiplicar el "círculo de la corteza de naranja" por el radio y dividirlo entre tres para obtener el volumen del gran cono equivalente a la esfera. Con estas experiencias podemos recordar fácilmente la fórmula del volumen de la esfera como $4\pi r^2 r/3$, que es como "una radiografía" de $4\pi r^3/3$.

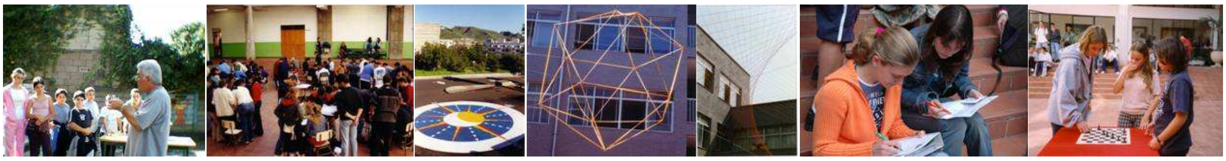
Bibliografía

- Buendía Abril P. (2000): "*Diario de matemática desnuda o Aventuras por los paisajes del universo matemático".* 1. ed. Consejería de Educación y Cultura, Murcia. España.
- Orton A. (1998): *"Didáctica de Matemáticas*". 3.ed. Ministerio de Educación y Cultura y Ediciones Morata. Madrid.

Pedro Buendía Abril, nació en Mula (Murcia) España en 1958. Cursó los estudios de Profesor de Educación General Básica por la especialidad de Ciencias Físico Matemáticas. Actualmente desempeña el cargo de Director del Centro Comarcal de Educación de Adultos "Río Mula", en Mula (Murcia). En sus veintiséis años de docencia ha atendido grupos de alumnos de diversos niveles educativos en la Región de Murcia (España). Desde hace unos diez años participa como "animador matemático" en cursos y actividades de formación del profesorado, relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas: "El Taller de las Fiesta de los Números, "Aventuras por los Paisajes del Universo Matemático""Animación a las Matemáticas desde la Creatividad y la Educación en Valores", "Aprendiendo Matemáticas con las manos"... También ha publicado diversos artículos relacionados con la didáctica de las Matemáticas, y ha escrito el libro "*Diario de matemática desnuda o aventuras por los paisajes del universo matemático"*, que recoge experiencias, intuiciones y aventuras acerca del saber matemático básico. Se puede descargar de www.educarm.es, en Información – Publicaciones. Edita Consejería de Educación y Cultura de la Región de Murcia, (2000) 232 páginas.Email: pedro.buendia@educarm.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 85-95
ISSN: 1815-0640



Dinamización matemática

Colegio Bilingüe Neuquén
Neuquén Capital. (Argentina)

La Geometría nos rodea

***Patricia Caro** (Dpto. de Matemática. Universidad Nacional del Comahue)*

***María Celeste Breccia** (C.P.E.M. N° 27 Plottier. Pcia. de Neuquén)*

INTRODUCCION

La geometría es el lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de las habilidades para la justificación, ha sido considerada durante mucho tiempo como el lugar del currículo escolar donde los estudiantes aprenden a razonar y a conocer la estructura axiomática de la matemática. Además, las ideas geométricas son útiles para representar y resolver problemas en otras áreas de la matemática y también en situaciones del mundo real.

Esta ciencia puede proveer de importantes herramientas sobre cómo se construyen los conocimientos en matemática, más precisamente cómo se van efectuando los pasos lógicos para desarrollar una demostración. Sin embargo, a pesar de todo esto, se puede observarse que la enseñanza de la geometría, en general, presenta serias dificultades. Incluso, se puede señalar, que en muchas ocasiones ni siquiera se les da geometría a los alumnos.

El proyecto que llevamos a cabo consistió en describir el colegio mediante distintos conceptos geométricos que habían sido abordados durante el año, por ejemplo, entes geométricos, figuras, superficie de distintos polígonos, iniciativa que surgió a partir de la idea de presentar un trabajo en la feria de ciencias que se realiza cada año en el colegio. Con el fin de lograr un aprendizaje significativo y ayudar, por ende, en el proceso de enseñanza-aprendizaje es que propusimos a los alumnos que:

- Identifiquen conceptos de la geometría en el ambiente escolar.
- Fotografíen distintas partes del colegio plasmando tales identificaciones.
- Profundicen sobre dichos conceptos analizando distintas propiedades calculando áreas de diferentes figuras y tomando algunas mediciones.

Es importante señalar que la recopilación de este material derivó en la confección de un cuadernillo que muestra a la institución a la que concurren desde una óptica diferente.

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

El objetivo que nos propusimos al llevar a cabo esta experiencia de enseñanza no tradicional fue que los alumnos:

- Se sientan motivados y realicen un aprendizaje significativo.
- Vinculen distintos conceptos matemáticos con la realidad.
- Realicen mediciones y calculen superficies.
- Apliquen lo aprendido en clase.
- Manejen el vocabulario específico del área.
- Presenten y expongan el trabajo realizado en la feria anual de ciencias que se realiza en el colegio.

Metodología

La experiencia se realizó en un colegio bilingüe de jornada completa, ubicado en la ciudad de Neuquén y se llevó a cabo en el segundo trimestre del año 2007. Se trabajo con niños de 12 y 13 años de edad, en el primer año del Tercer Ciclo de la Educación General Básica, el curso contaba con 23 alumnos.

El proyecto comenzó con tres clases semanales de 40 minutos, una por semana, en estas clases se abordaron referencias históricas de la geometría y también distintos conceptos, axiomas y postulados. Los alumnos buscaron información, definiciones, axiomas, teoremas, etc., los que luego expusieron en el aula. A partir de este material, trabajamos en forma continua en geometría, básicamente: entes geométricos, figuras, polígonos, construcciones y distintas propiedades. Algunas de estas clases fueron afectadas para la toma de fotografías y mediciones, siempre con el acompañamiento del docente. La asistencia del grupo generalmente era completa, cumplían con el material que debían traer, participaban, consultaban y buscaban información adicional para ampliar lo que se les había dado; características esenciales que aportaron a la continuidad y concreción del trabajo. Además, es importante destacar que los alumnos contaban con cámaras fotográficas, computadoras, pendrive, CD y tenían acceso a internet, todo esto facilitó el envío del material para su posterior corrección.

Cabe mencionar que durante el desarrollo de la experiencia se presentaron ciertos obstáculos, entre ellos: lograr que el trabajo en equipo sea productivo, no un inconveniente y coordinar los recursos utilizados para editar y captar las fotografías. Afortunadamente, los mismos pudieron ser subsanados gracias a la motivación, compromiso y dedicación de cada uno de nuestros alumnos.

Los contenidos a desarrollar durante este trabajo fueron los siguientes:

- Geometría: importancia, historia y significado.
- Punto, rectas, plano, segmento, semirrecta y ángulos.
- Posiciones relativas entre rectas. Mediatriz. Bisectriz.
- Ángulos: congruentes, consecutivos, opuestos por el vértice, complementarios, suplementarios, adyacentes. Ángulos entre paralelas. Propiedades.
- Triángulos: clasificación, propiedades, altura, superficie y perímetro. Teorema de Pitágoras.
- Polígonos: definición, elementos, clasificación, construcción, propiedades, superficie y perímetro.
- Círculo y circunferencia: definición, superficie del círculo y longitud de la circunferencia

La idea original del proyecto fue describir cierto sector del colegio reconociendo distintas figuras geométricas planas, fotografiando las mismas y realizando diferentes análisis de ellas. Se trabajo en grupos, asignando distintos temas a cada uno, esto con el fin de trabajar más conceptos. Los alumnos entregaron sus producciones y nosotras hicimos la devolución con las correcciones correspondientes.

A continuación presentamos 7 de las 21 fotografías que forman parte del cuadernillo confeccionado, junto a un sucinto análisis de las mismas, esto lo hacemos con el fin de mostrar lo provechoso que resulta utilizar este tipo de metodología, en la cuál los alumnos construyen y afirman el conocimiento por medio de elementos concretos, en el marco de una clase no tradicional.

Fotografía N° 1:

En esta foto un alumno escribió:

…" *En la escalera encontramos cuadriláteros como: paralelogramos y rectángulos que son polígono convexos*"…

Esta descripción la realizó al comenzar el trabajo, momento en el cuál él contaba solamente con los conocimientos de geometría adquiridos en los años anteriores. A medida que fuimos avanzando en la experiencia, paralelamente al desarrollo de los contenidos, surgieron producciones cada vez más completas y elaboradas, como la siguiente:

…"*En la escalera encontramos cuadriláteros que se clasifican según el paralelismo de los lados opuestos, es decir de los lados no consecutivos,.como por ejemplo: paralelogramos y rectángulos que son polígono convexos. Además se pueden apreciar pares de rectas paralelas y oblicuas*"

Se observaron ciertas repeticiones en los textos y también algunas malas interpretaciones. Por ejemplo, en esta fotografía, un alumno en su descripción menciona perpendicularidad entre rectas cuando no es así, escribiendo textualmente lo siguiente:

…"Aquí observamos 5 rectas paralelas de las cuales <u>4 están cortadas por 3 perpendiculares</u>, formando 24 ángulos…"

Esto también fue analizado en el grupo, ya que consideramos que el análisis de los errores es una herramienta de aprendizaje. Se trabajó sobre todas las descripciones, haciendo que los alumnos analicen tanto las correctas como las incorrectas.

<u>Fotografía N° 2</u>:

En este caso se transcribe la descripción lograda en forma conjunta por el grupo a partir de lo que había identificado y escrito cada uno de los integrantes del mismo, en este caso hubo una puesta en común y entre todos elaboraron un texto, parte del mismo se presenta a continuación:

…"El pasamano, es otro juego que podemos encontrar en el patio, en su estructura encontramos un triángulo rectángulo y escaleno, ya que tiene un ángulo interior recto y las medidas de sus lados son diferentes. También, los palos que los sostienen son rectas paralelas."…

A partir de esta descripción podemos afirmar que los alumnos identificaron las distintas figuras de manera correcta y además lograron expresarse de manera clara.

Fotografía N° 3:

En este caso uno de los grupos hizo una descripción de la parte geométrica y también de la función que cumplía esta estructura edilicia, la misma se presenta a continuación:

"…Atrás de los juegos se encuentra un patio de cemento, en términos matemáticos se asemejaría a un plano, donde los alumnos de E.G.B I y E.G.B II juegan a la mancha, rayuela, soga, básquet…"

"…Rodeando el plano se disponen las aulas de Kinder (Jardín de infantes), de la biblioteca, de la sala de computación y de los grados inferiores; en ellas se observan que las puertas y ventanas son rectángulos y cumplen propiedades tales como: Sus cuatro ángulos son rectos, dos pares de sus lados son paralelos, sus diagonales son iguales y se cortan en su punto medio, son figuras convexas y además podemos

calcular su superficie, solamente debemos multiplicar su base (largo) por su altura (ancho)…"

El entusiasmo del descubrimiento a partir de la toma de fotografías hizo que nuestros alumnos comenzaran a buscar otras figuras cuyo reconocimiento es poco común y dejaran de lado aquellas figuras más conocidas por ellos como pueden ser triángulos, cuadrados y rectángulos.

A continuación se muestran algunas fotografías en las cuales ellos reconocen hexágonos, rombos, circunferencias, círculos, trapecios.

Fotografía N° 4:

En la entrada del establecimiento se encuentra un cartel cuya forma es la de un polígono regular de 6 lados (hexágono regular); el cuál nos indica que la institución se encuentra protegida por una alarma central de monitoreo las 24 horas. Los alumnos midieron todos los lados del mismo para corroborar si tenían las mismas medidas.

En el aula, durante el análisis y puesta en común de cada foto, se aprovecho esta para recordar cuáles polígonos son regulares y también para indicar el nombre que se les da a los mismos de acuerdo a la cantidad de lados que tienen, se presenta a continuación la tabla que se realizó junto con ellos y que también forma parte del cuadernillo mencionado con anterioridad.

Números de lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Eneágono
10	Decágono
12	Dodecágono

En el cuadernillo cada figura que fue identificada posee una descripción, la ubicación de la misma en el colegio y además consta una caracterización propia de cada una, como la definición, propiedades, etc.

Fotografía N° 5:

"…Acá podemos observar una reja con rombos que separan al colegio con el terreno vacío al que llamamos "canchita". Este es un cuadrilátero, que se ubica en el medio de la escuela aunque no pertenezca a esta. Pero igualmente, es utilizado por nosotros para hacer Educación Física y en el recreo del mediodía…"

"…El rombo es un polígono, cuyos cuatro lados son iguales, sus diagonales son perpendiculares y se cortan ambas en su punto medio, también sus ángulos opuestos son iguales…"

Fotografía N° 6:

"…Desde la entrada hasta la secretaria de secundaria debemos cruzar un playón, que es utilizado por los chicos para practicar diversos deportes. En él predominan los rectángulos, salvo los aros de básquet que son circunferencias…"

Fotografía N° 7:

"…vemos: dos triángulos rectángulos, dos trapecios rectangulares y un rombo. Por aquí se ingresa a secretaria y hall central, si observamos la estructura del techo podemos visualizar varias figuras geométricas, la más impactante y notable es la

figura de un triangulo isósceles, que divide al techo en dos aguas. Dentro de este triángulo…"

A partir de las descripciones realizadas por los alumnos, cada vez más ricas en contenido, nuestro objetivo fue más amplio, ya que además de identificar figuras geométricas en las fotografías, nos propusimos realizar un cuadernillo que contenga las fotografías junto a las definiciones y las propiedades trabajadas e identificadas. El objetivo del mismo es que se utilice como bibliografía de estudio para años inferiores, sin dejar de lado nuestra meta original, que como dijimos era exponerlo en la feria de ciencias anual a realizarse en el colegio.

Como estaba previsto, los alumnos presentaron su trabajo en la feria de ciencias, a fines de octubre del año 2007. En la exposición se presentaron afiches realizados por los alumnos con distintas fotografías, en las cuales ellos indicaban y comentaban cada una. Se organizaron grupos de alumnos que se fueron turnando, algunos daban una breve introducción al tema y otros comentaban lo que habían realizado.

Además, se encontraba a disposición del público el cuadernillo impreso. Cabe aclarar, que los alumnos buscaron información adicional, no propuesta por los docentes, por lo que la explicación del trabajo reflejó la gran dedicación y el firme compromiso de cada uno de ellos.

Pudimos observar el gran entusiasmo de nuestros alumnos al comentar el trabajo realizado en esta experiencia, también pudieron comunicar la importancia de estos conceptos y hacer notar que estos no se encuentran aislados de la vida diaria. Es decir *"…están allí, convivimos con ellos y recién ahora los vemos…".*

La feria fue visitada por muchos adultos que querían ver los trabajos y nos parecieron muy interesantes los comentarios vertidos por ellos, algunos de los cuales comentamos a continuación:

- Que las explicaciones de los alumnos eran entendibles, pese a que algunos oyentes no recordaban algunos de los temas.
- Les resultó muy interesante la manera en que los alumnos habían relacionado su ambiente natural con lo aprendido en clase.
- Antes las preguntas que les hicieron a los alumnos, las respuestas fueron claras y concisas.
- Mencionaron el entusiasmo que los alumnos habían tenido durante todo el desarrollo de la experiencia.

También, se presentó el trabajo a la coordinadora del nivel, que es docente del área y tiene conocimiento del tema. Ella quedó muy conforme por la forma en que los alumnos exponían y defendían sus argumentos. También nos expresó que se sintió impactada por las presentaciones y el nivel del trabajo realizado por los niños.

CONCLUSIONES

El conocimiento que han adquirido nuestros alumnos al realizar este trabajo fue realmente enriquecedor, ya que lograron:

- Describir con precisión, clasificar y comprender las relaciones entre distintos objetos, utilizando las propiedades que los definen.
- Manipular en su ambiente natural los conceptos y propiedades aprendidas.
- Exponer lo que sabían sin dificultad, ayudando de esta manera a mejorar la oralidad,
- Articular con contenidos dados en otras asignaturas, con lengua específicamente. Se trabajó con texto expositivo, entre otros temas, que permitió realizar las descripciones que acompañaron las fotos.
- Reconocer la importancia de la geometría al momento de una construcción; mirando su entorno apreciaron que ella siempre se encuentra presente.
- Trabajar en grupos muy motivados y de manera ordenada y eficiente.

Podemos afirmar que el aprendizaje que han adquirido los protagonistas de este proyecto, fue realmente significativo pues surge de explorar, investigar, observar, conocer y de animarse a redactar conceptos matemáticos, pese a los errores, que como es de esperar se manifestaron.

La confección del cuadernillo tenía por finalidad exponerlo en la feria de ciencias para que pudiera ser apreciado por padres, alumnos y toda persona que muestre interés por el trabajo llevado a cabo en clase. A pesar de esto, nuestro compromiso como docentes de esta área, nos llevó a proyectar nuevas ideas para ser trabajadas a futuro.

PROYECCIÓN A FUTURO

Teniendo en cuenta las conclusiones a las cuáles se arribó, a continuación se presenta la proyección del trabajo a futuro.

Como docentes, nos interesaría:

- Que los alumnos realicen a escala una maqueta del colegio haciendo las mediciones correspondientes.
- Trabajar con algún software de geometría sencillo, cabri por ejemplo, para que ellos construyan las figuras observadas en el trabajo. Este trabajo podría realizarse de manera conjunta con el área de informática.
- Utilizar al cuadernillo, por un lado como herramienta de motivación para alumnos de cursos superiores, incentivando a ellos a participar en su

ampliación. Por otro lado, para que los alumnos de años inferiores puedan consultar y trabajar con él.

- Que los alumnos ingresantes y también sus padres, puedan conocer las instalaciones del colegio a través del cuadernillo.

Bibliografía

- Andrés, M. E.; La Montagna, M. L.; Piñero, G. E. y Serrano, G. B. (2005). *Matemática 7. Libro del docente*. (Ed. Santillana, Buenos Aires)
- Andrés. M. E.; Latorre, M. C.; Machiunas, M.V. (2000). *Matemática 7*. (Ed. Santillana, Buenos Aires).
- Aragón, M. Laurito, L. Net, G. y Trama, E. (2003). *Matemática 7*. (Ed. Estrada, Buenos Aires).
- Aragón, M. Laurito, L. Net, G. y Trama, E. (2003). *Matemática 8*. (Ed. Estrada, Buenos Aires).
- Ferrero A. M.; Piñeiro, G. E.; Reynam. I. y Serrano, G. B. (2005). *Matemática 8. Libro del docente*. (Ed. Santillana, Buenos Aires)
- Kaczor, P. J.: Piñeiro, G. E. y Serrano, G.B. (2000). *Matemática 8*. (Ed. Santillana, Buenos Aires)
- Machiunas, M. V.; Serrano, G. B.; Spivak, L.; Latorre, M. L. Pavicich, M. y Mazzolomo, L. (2003). *Haciendo números 7*. (Ed. Santillana, Buenos Aires).
- Machiunas, M. V.; Serrano, G. B.; Spivak, L.; Latorre, M. L. Pavicich, M. y Mazzolomo, L. (2003). *Haciendo números 8.* (Ed. Santillana, Buenos Aires).
- Rodríguez, M. y Martínez, M. (1998). *Matemática 7. EGB y primaria*. (Mc Graw-Hill).
- Puig Adam , P.; (1969). *Geometría Metrica*. Novena edición. Madrid.
- *Principio y Estándares para la Educación Matemática*. (2000). The nacional council of Theachers of Mathematics. Association Drive, Reston.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Marzo de 2009, Número 17, páginas 96-101
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Tríos para investigar

Problema

*Llamamos **trío** a un conjunto de tres números naturales consecutivos.
Descubre regularidades de los tríos.*

Este problema, tal como está enunciado, lo conocí cuando fue dado como ejemplo de problema para estimular la investigación en un taller en el ICME 11, (México, 2008), desarrollado por Castelló, M., Codina, R. y López, P., del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidad de Barcelona.

Vi posibilidades interesantes para trabajar con alumnos y profesores y pensé en presentar una situación y secuencias de actividades individuales y grupales a desarrollar en talleres con profesores de primaria y de secundaria. En los talleres, entregué a cada participante una hoja con la situación y las actividades individuales a desarrollar y luego que concluyeron las actividades individuales, les repartí otra hoja con la misma situación y las actividades grupales a desarrollar:

Situación

Llamaremos TRÍO a cualquier conjunto cuyos únicos elementos son tres números naturales consecutivos.

Por ejemplo, un TRÍO es el conjunto

{7; 8; 9}

Los TRÍOS tienen varias propiedades. Por ejemplo, una de ellas es:

"El producto de los tres números de un trío es un número par"

Actividades individuales

a) Examina cuáles de los siguientes conjuntos son TRÍOS:

{46; 47; 48}, {30; 40; 50}, {4; 5; 6; 7}, {3; 4; 5}.

b) Verifica la propiedad dada, con varios ejemplos de TRÍOS.

c) Considerando ejemplos de TRÍOS, examina qué otras propiedades tienen los TRÍOS y haz una lista de las propiedades que descubras.

La intención de la actividad (a) es que el participante se familiarice con la definición de TRIO. Ciertamente, ante una definición dada, es muy importante saber reconocer qué elementos la cumplen y qué elementos no.

La actividad (b) está pensada para ayudar a entender mejor la actividad (c), que es la que invita a la indagación y a la investigación

A continuación copio algunas de las propiedades encontradas, desarrollando la actividad (c).

Participante A *(Profesora de primaria)*

El promedio de los tres términos, es el término medio.
La media de los términos extremos, es el término medio.
La suma del primer y tercer término es el doble del segundo
La suma de los tres términos es un múltiplo de tres
La diferencia del doble del mayor con la suma de los otros dos, es 3

Participante B *(Profesor de secundaria)*

$2 + 3 + 4 = 9$

$3 + 4 + 5 = 12$

$4 + 5 + 6 = 15$

$5 + 6 + 7 = 18$

$6 + 7 + 8 = 21$

$7 + 8 + 9 = 24$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$20 + 21 + 22 = 63$

1) $a + a+1 + a+2 = 3a+3 = \dot{3}(a+1) = \dot{3}$

2) * Podemos observar que la suma es un múltiplo de 3

3) * Además la suma de los extremos es el doble del número central

4) El término central es el promedio de los extremos.

5) la suma es siempre el triple del número central.

6) la suma de los tres números es el triple del primero mas tres.

Cabe destacar el entusiasmo que suscita pasar de "no encuentro ninguna propiedad" a ir descubriendo algunas, por ensayo y error, intuyendo y formalizando, con pequeñas intervenciones del o los encargados del taller. Se presentan interesantes ocasiones de usar contraejemplos para descartar posibles propiedades observadas en algunos casos particulares. Así, aunque en los tríos {7; 8; 9}, {1; 2; 3} y {21; 22; 23} se cumple que la suma de sus elementos es un número par, ésta no es una propiedad o regularidad de los tríos, pues basta ver que no se cumple en el trío {6; 7; 8}, en donde la suma de sus elementos es 21, que es un número impar.

Actividades grupales

1. Comparar y examinar las respuestas dadas a las actividades individuales.
2. Dar una explicación de por qué se cumple la propiedad enunciada de los **TRÍOS**.*("El producto de los tres números de un* **TRÍO** *es un número par")*
3. Hacer una lista con el mayor número posible de propiedades de los **TRÍOS**. Ilustrar con un ejemplo cada propiedad que se enuncie.
4. Encontrar un **TRÍO** cuya suma de sus elementos sea el número 2007.

5. ¿Es posible encontrar un **TRÍO** cuya suma de sus elementos sea 2009? ¿Por qué?
6. Inventar un problema usando **TRÍOS**.

Las tres primeras actividades buscan reforzar, complementar y enriquecer las actividades individuales; la actividad 2 hace reflexionar sobre la importancia de la demostración, considerando situaciones generales y no sólo verificando el cumplimiento de una regularidad en muchos casos particulares. Las otras tres actividades proponen nuevos desafíos para afrontarlos en grupo. Las actividades 4 y 5 pueden hacerse aplicando una propiedad de los tríos encontrada anteriormente, o pueden brindar la ocasión para descubrir tal propiedad.

A continuación copio algunas de las propiedades encontradas grupalmente, desarrollando la actividad 3.

Grupo 4 *(Profesores de secundaria*

Denotemos al trío de la siguiente forma: $t_K = \{K-1; K; K+1\}$,

* La suma es múltiplo de tres

$S = K-\cancel{1}+K+K+\cancel{1} = 3K$

* La suma es el triple del número intermedio

$S = 3K$, donde K es el término intermedio.

* El término intermedio es el promedio de los términos extremos.

$\frac{K-\cancel{1}+K+\cancel{1}}{2} = \frac{2K}{2} = K$

* El doble del término mayor menos la suma de los otros dos, es 3.

$2(K+1) - (K-1+K) = 2K+2-2K+1 = 3$

* El doble del término medio es igual a la suma de los terminos extremos

$2K = (K-1)+(K+1)$

* El cuadrado del término mayor menos el cuadrado del término menor es igual a cuatro veces el término medio.

$(K+1)^2 - (K-1)^2 = (K^2+2K+1) - (K^2-\cancel{2K}+1) = 4K$

* La suma de los cuadrados de los términos extremos es el doble del cuadrado del término intermedio, aumentado en 2.

$(K+1)^2 + (K-1)^2 = K^2+2K+1 + K^2-2K+1 = 2K^2+2$

(**) La suma de los cuadrados de los tres términos es igual al triple del cuadrado del término intermedio, aumentado en 2.

$(K-1)^2 + K^2 + (K+1)^2 = K^2-\cancel{2K}+1 + K^2 + K^2 + \cancel{2K}+1$

$= 3K^2+2$

Los participantes perciben la importancia de complementar la intuición con la formalización y la relación entre lo particular y lo general (dualidad ejemplar – tipo, en el lenguaje del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.)

El siguiente es un problema, con su solución, propuesto por el mismo grupo 4, desarrollando la actividad 6:

La suma de los cuadrados de las edades de tres hermanos es 365, sabiendo que dichas edades son números enteros consecutivos, ¿Cuál es la edad del menor?

Solución:

edades $\Rightarrow$ menor $= k-1$
medio $= k$
mayor $= k+1$

Utilizando la propiedad (**) tenemos que $3k^2+2 = 365$

$3k^2 = 363$.

$k^2 = 121$

$k = 11$

Por lo tanto, la edad del menor es 10 años.

Otras posibilidades para trabajar e investigar con TRÍOS:

Definir tríos más específicos:

- *Tríos ordenados.* El orden no se exige en la definición de trío, pero puede ser útil considerarlo explícitamente, de la manera natural.
- *Tríos pares / impares.* La paridad de un trío podría determinarse por la paridad del "número del medio" en un trío ordenado, o por la del "número que no es ni el mayor ni el menor de los tres elementos del trío"
- *Tríos de pares / impares.* Estos tríos tendrían que ser de números pares / impares consecutivos.

Definir operaciones con tríos ordenados. Se puede definir la adición de dos tríos ordenados, sumando los elementos respectivos "el primero con el primero, el segundo con el segundo y el tercero con el tercero". Así, surgen preguntas relacionadas con esta operación ¿es binaria interna? (¿la suma de dos tríos ordenados es un trío ordenado?), ¿es conmutativa?, ¿es asociativa?, ¿existe un elemento neutro?, ¿qué resulta al sumar tríos pares?, ¿y al sumar tríos impares?, ¿y al sumar un trío par con otro impar?, etc.

Una generalización. Considerar tríos en el conjunto de números enteros y examinar las consecuencias en las propiedades encontradas con los tríos con números naturales. ¿Se mantienen todas las propiedades?, ¿qué pasa con los tríos ordenados y con la paridad / imparidad definida?, ¿qué pasa con la adición de tríos y las propiedades encontradas?

Se puede preparar y proponer actividades teniendo en cuenta estas ideas y otras que se les ocurra a docentes e investigadores, que estimulen más el espíritu de investigación de alumnos, maestros y futuros maestros y brinden oportunidades para revisar conceptos importantes vinculados con las estructuras algebraicas.

Los lectores quedan invitados a ejercitar su vocación investigadora y docente, usando estas ideas. Si se animan a experimentar, considerando también grupos de alumnos de secundaria o de últimos años de primaria, les agradeceré mucho que me envíen sus observaciones, comentarios, resultados, etc. Ciertamente, también quedan invitados a crear o adecuar situaciones, con sus respectivas actividades individuales y grupales, para estimular el espíritu investigador, tan importante en la formación de alumnos y profesores

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas102-116
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Animándonos a la enseñanza de la geometría con Cabri

Nilda Etcheverry - *Marisa Reid* - *Rosana Botta Gioda*.

Resumen

En este artículo se presenta el diseño de una propuesta y su implementación para la mejora del proceso Enseñanza-Aprendizaje de "Triángulos. Propiedades de sus lados. Puntos notables del triángulo" usando el software Cabri II Plus.
Se incluyen reflexiones vinculadas con el desarrollo e implementación de algunas experiencias que permitan a los estudiantes usar y aplicar la matemática de manera significativa, de tal manera que esta ciencia les permita entender el desarrollo tecnológico y además comprender nuestra realidad.

Abstract

In this article a project design is presented and also its implementation with the purpose of improving on teaching-apprenticeship in "triangles. Angles properties. Noticeable points of triangle" by the use of Cabri II plus software.
Reflections linked with the development are also included as well as implementation of some experiences that allow the students to use and applied to math in a significant way, furthermore this science allowed a technological development and what is more to understand the reality we are in.

Resumo

Neste artigo apresenta-se o desenho de uma proposta e sua implementação para a melhora do processo Ensino-Aprendizagem de "Triângulos. Propriedades de seus lados. Pontos notáveis do triângulo" usando o software Cabri II Plus.
Incluem-se reflexões vinculadas com o desenvolvimento e implementação de algumas experiências que permitam aos estudantes usar e aplicar a matemática de maneira significativa, de tal forma que esta ciência lhes permita entender o desenvolvimento tecnológico e ademais compreender nossa realidade.

1.- Introducción

Enseñar contenidos geométricos no es tarea sencilla, se detectan dificultades y limitaciones para abordar la enseñanza de los saberes mencionados en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios para el Tercer Ciclo de la Educación General Básica (EGB3) de Matemática, puntualmente en relación con la Geometría y la Medida.

En este trabajo se presenta el diseño de una propuesta y su puesta en práctica para la mejora del proceso Enseñanza-Aprendizaje de “Triángulos. Propiedades de sus lados. Puntos notables del triángulo” en EGB3, atendiendo a tres ejes principales: Enseñanza-aprendizaje, Aspectos de la Educación Básica y Tecnología.

Para la elaboración de esta propuesta se consideraron tanto aquellos aspectos que permiten el buen aprendizaje del estudiante, como los que ayuden al profesor a actualizarse y a conocer nuevos métodos de enseñanza que, no solamente lo motiven en su trabajo, sino, a la vez, le den mejores resultados. Por ello se tuvo en cuenta las siguientes fases:

- Diagnosticar la situación de la enseñanza de la Geometría en EGB3.
- Integrar un software dinámico en el desarrollo de actividades para la enseñanza de la Geometría.
- Presentar una propuesta de mejora, dirigida hacia la enseñanza de la Geometría con uso de recursos tecnológicos como refuerzo y motivación de la enseñanza en el aula.

2.- Descripción de la experiencia

En este trabajo “***Animándonos a la enseñanza de la Geometría con Cabri***” se relata una experiencia llevada a cabo con docentes y alumnos (13-15 años) de la EGB3 de la Unidad Educativa Nº 6 “Prof. Julio Alejandro Colombato” de la ciudad de Santa Rosa provincia de La Pampa, y docentes formadores de profesores de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam.

Para situarnos en el contexto podemos mencionar que la Unidad Educativa Nº6, está ubicada en el ámbito urbano de la ciudad de Santa Rosa, en una zona periférica.

Los alumnos provienen, en su mayoría, de distintos barrios que pertenecen a estratos sociales bajos. En muchos casos estos chicos están inmersos en una situación familiar en riesgo (monoparentales, mujeres jefas de familias, maltrato, alcoholismo y drogadicción, etc.), como así también situaciones económicas de pobreza convirtiéndose la escuela, en el único ámbito en cual son contenidos.

Implementación del plan de trabajo

Se realizó en tres etapas:

1. Primera etapa

Para diagnosticar la situación se realizó una encuesta (Ver Anexo 1) a docentes de matemática en actividad de las Unidades Educativas de la ciudad de Santa Rosa (La Pampa).

De acuerdo con Itzcovich (2005) y corroborado a través de las respuestas a la encuesta, el trabajo geométrico ha ido perdiendo espacio y sentido, tanto en los colegios de enseñanza media como en la formación docente. Los motivos que aparecen con mayor frecuencia son:

- Dificultad, por parte de los docentes, de encontrar suficientes situaciones o problemas que representen verdaderos desafíos.
- Mayor reconocimiento del trabajo realizado en otras ramas de la matemática en detrimento de la geometría.
- La elección de los docentes es, por falta de tiempo, "sacrificar" del programa los temas de geometría.
- Los alumnos no se involucran en la producción de conocimientos geométricos por considerarlos poco significativo.

2. Segunda etapa

Se eligió el software el Cabri Géomètre II Plus para preparar materiales para los temas "Triángulos. Propiedades de sus lados. Puntos notables del triángulo". Todas las actividades fueron diseñadas y producidas respetando, el contexto y las necesidades propias del grupo de alumnos y profesores. Estos materiales fueron elaborados teniendo en cuenta las falencias manifiestas en la encuesta y los problemas detectados por los docentes autores de este trabajo.

Para planificar las actividades a realizar con los alumnos, después de un primer acercamiento al conocimiento básico de los comandos o funcionalidades del software, se tuvo en cuenta que:

- Las tareas propuestas deben presentar cierto grado de desafío, pues atraen más respecto a las que son rutinarias o de fácil solución.
- La construcción del conocimiento paso a paso, resulta más beneficioso que saltar a soluciones sofisticadas sin que los estudiantes hubiesen comprendido el concepto en estudio.
- Las diferentes herramientas tecnológicas pueden ser usadas para resolver un problema y diferentes métodos, usando la misma herramienta, dan la oportunidad de juzgar y discutir cuál sería la mejor solución. Esto representa una forma para que los estudiantes aprendan la conveniencia del uso de diferentes herramientas y reconsideren la posibilidad de usar sólo "papel y lápiz".

3. Tercer etapa

Se lleva a cabo la puesta en práctica del proceso enseñanza aprendizaje, en dos cursos de 9º año de la Unidad Educativa Nº6, a cargo de la Profesora Rosana, con 15 y 17 alumnos respectivamente. Se trabajó en la sala de computación que cuenta con 15 computadoras equipadas con el software Cabri Géomètre II Plus, conexión a Internet y dos impresoras.

Primera sección: Manejo del Software.

Se entrega a cada alumno un instructivo de Manejo del software Cabri Géomètre II Plus en donde se detallan cuidadosamente los comandos más utilizados y se proponen una serie de actividades "preliminares" que permiten la familiarización con el software.

Esta actividad estaba prevista para realizar en un módulo de 80 minutos, pero se debió dedicar dos módulos respetando los tiempos de trabajo de los distintos alumnos y el intercambio que se producía en el desarrollo de las actividades.

Segunda sección: Construcción de Triángulos.

El objetivo de estas primeras actividades es rastrear conceptos previos y tenerlos disponibles para cuando actividades posteriores lo requieran.

Se entrega a cada alumno la siguiente guía de actividades para ser resuelta individualmente.

Triángulos con Cabri

Construcción de triángulos. Conociendo los tres lados

En las siguientes actividades encontrarás preguntas y cuestiones que debes contestar en esta hoja y otras actividades, a través del uso del software, en la computadora.

1) Construye un triángulo cuyos lados midan 4cm, 5cm y 6 cm, a partir de segmentos. Utiliza las opciones: **Compás** del menú **Construir** y **Triángulo** del menú **Rectas**

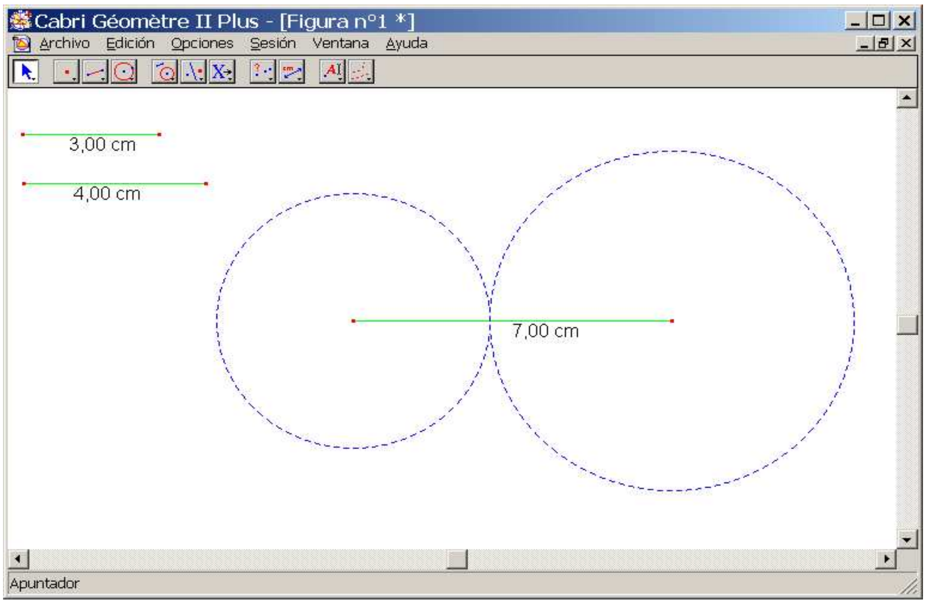
2) Repite las construcciones para las siguientes ternas de medidas de los lados de un triángulo: (3, 4 , 5), (10, 5, 12), (3, 4, 7) y (10, 5 , 3). ¿Qué sucede en la construcción con cada terna? ¿Qué deberían cambiar para que hubiera triángulo?

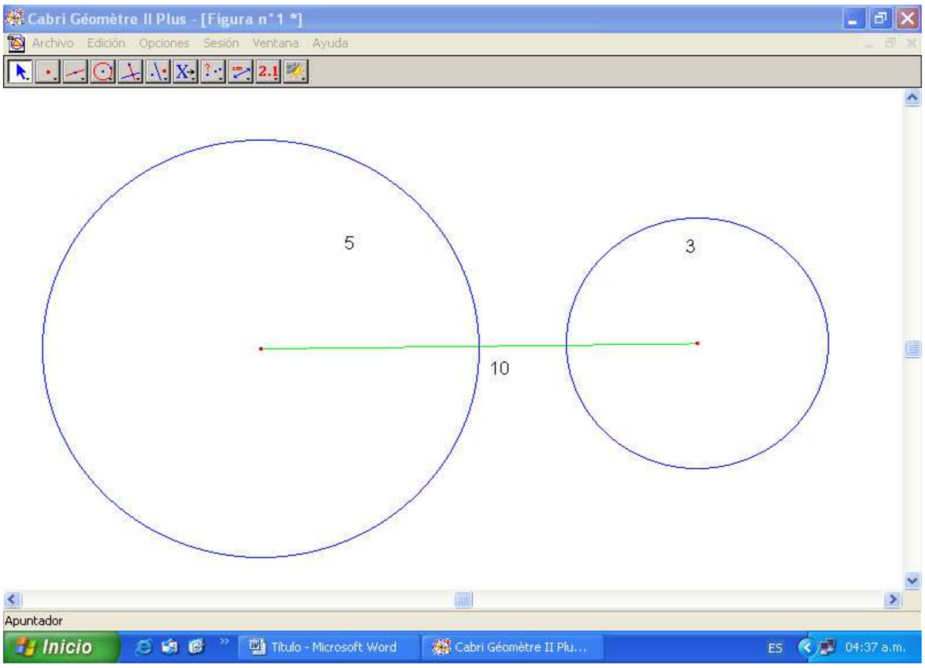
3) Observa cómo al modificar, únicamente la medida del segmento mayor, permite la construcción del triángulo. ¿Qué hubiera ocurrido, si en lugar de disminuir la medida del segmento mayor, la hubiéramos aumentado?, ¿cómo sería la figura anterior, para este caso? Descríbelo.

4) Guarda las figuras.

5) Escribe una conjetura que garantice la construcción del triángulo.

Se observa claramente que los alumnos comienzan la construcción, y no tienen problemas con las dos primeras ternas de datos (del ítem 2). Pero los datos de la tercera y la última terna, los conduce a conclusiones diferentes o los paraliza. Por ejemplo:





Efectivamente, donde no hay dudas es porque las relaciones espaciales con el dibujo les proveen suficiente información para que puedan concluir sin ambigüedad. Con los datos de la tercera y última hay comentarios del tipo "el triángulo es muy aplastado", "no se ve bien qué pasa con el tercer vértice, porque queda una línea gruesa", "no se porqué ahora no se me cruzan las circunferencias".

Estas ambigüedades pueden surgir de un problema que no parece importante para los alumnos, puesto que ellos creen que todo triángulo del cual se pide la construcción existe porque es así como habitualmente se dan las consignas en la clase.

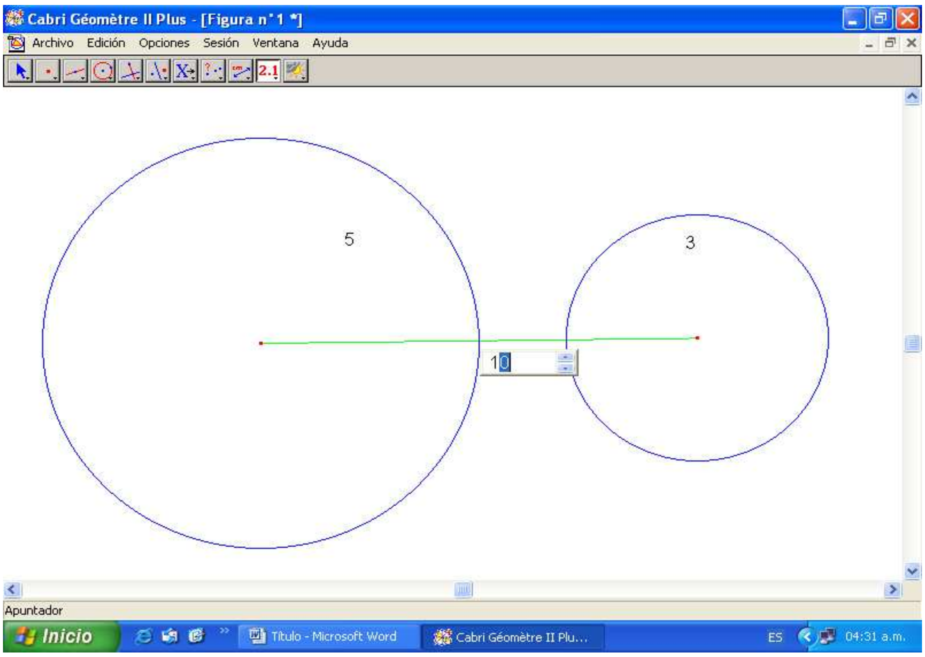
El docente debe propiciar una utilización reflexiva del software tratando que los alumnos construyan el sentido de las acciones realizadas, pues en general a respuestas inesperadas del software los alumnos habitualmente reinician la actividad atribuyendo el error al programa sin detenerse a reflexionar sobre lo qué ocurre.

En Geometría, la exigencia de razonar supone el reconocimiento de una constatación insuficiente dada por el dibujo. Si se quiere llevar al alumno al dominio de los conocimientos geométricos, es necesario poner de relieve el obstáculo que representa la evidencia del dibujo.

El profesor debe ayudar a sus estudiantes para desarrollar habilidades sobre el empleo del software y diseñar tareas que requieran el uso de herramientas tecnológicas,

Para realizar las siguientes construcciones hubo necesidad de intervención del docente indicándoles los pasos a seguir:

Copia la construcción anterior y usa el comando “Edición numérica”, colócalo sobre la medida del segmento mayor; con el deslizador de abajo, es decir, el que disminuye la medida del segmento, haz clic sostenido y describe lo que sucede al triángulo, a continuación:



¿Qué tan pequeño puede ser este lado, de manera que siga habiendo triángulo?

¿Qué ocurre con las medidas de los lados cuando desaparece el triángulo?

Lo que se pretende es encontrar los puntos en los cuales deja de existir el triángulo al modificar la longitud de uno de sus lados y determinar entre que valores sigue habiendo triángulo.

Indica para qué valores de la medida del lado mayor, en el problema inicial, deja de haber triángulo. Entre qué valores de la medida del lado mayor, hay triángulo.

¿Cómo podrías encontrar esos valores?

¿Puedes ahora elaborar la conjetura?

Los alumnos arriban ahora a las siguientes conclusiones

María: *"Utilizando el software para construir los triángulos se observar claramente que hay ternas de longitudes para las que no es posible obtener un triángulo"*.

Lucía: *"Deben sumar 2 de los 3 nº y tiene que ser más grande que el que sobra, ser el 1º con el 2º, 1º con el 3º, etc"*

Nerea: *"Para que exista un triángulo de esas medidas, la suma de 2 de sus lados tiene que ser mayor que el que queda"*

En este momento es importante la intervención del docente, para terminar con una institucionalización es decir a partir de lo que aparece en el transcurso de la gestión de la clase, el docente institucionaliza lo que debe ser conservado como saber.

Tercer sección: Puntos notables del triángulo y sus propiedades.

Se implementaron, al final del ciclo lectivo 2008, actividades sobre puntos notables del triángulo y algunas de sus propiedades basadas en la resolución de problemas (Anexo 2), con la misma intencionalidad didáctica que las actividades anteriores, pero esta parte de la experiencia no ha sido aún analizada ni evaluada.

En las actividades dedicadas al estudio de puntos notables del triángulo se pretende que los alumnos vayan "descubriendo" las distintas propiedades y logren verbalizarlas. Es interesante aprovechar el dinamismo de *Cabri* y que, una vez realizada la construcción, se muevan los distintos elementos de la misma para comprobar que estas propiedades se mantienen con los cambios.

El modo de arrastre que es una de las características de este software permite que los estudiantes vean tantos ejemplos como sea posible en unos pocos segundos y les proporciona un inmediato feedback que resulta difícil conseguir en la enseñanza tradicional con lápiz y papel.

Según nuestra experiencia, entendemos que para "enseñar" contenidos geométricos a un adolescente, hace falta algo más que un simple concepto. Donde la motivación y la posibilidad de manipulación y visualización son opciones, nada despreciables, para cumplir esta tarea a nivel de la EGB3.

Después de resolver estas actividades el alumno estará capacitado para hacer visualizaciones, descripciones, análisis y resolver problemas sencillos sobre lo que ha aprendido a través de su experiencia, tendrá una nueva visión del tema, con un nuevo lenguaje, nuevos objetos, propiedades y relaciones. Así estaremos desarrollando su pensamiento geométrico.

En la etapa final, a modo de evaluación, los alumnos realizarán una presentación de alguna de sus producciones

COMENTARIOS FINALES

Estamos convencidos que implementar una nueva visión de la enseñanza – aprendizaje de la matemática logrará que los estudiantes se apropien y se identifiquen más con ella.

A partir de este trabajo y producto de la reflexión y acción sobre la práctica misma de la enseñanza de la Geometría en la EGB3, consideramos conveniente la utilización de un sistema de geometría dinámica destinado a apoyar el acto didáctico, que es una práctica que no está instalada en nuestras clases.

Aunque la experiencia no finalizó merece destacarse la diferencias notables observadas con respecto al desempeño de los alumnos, comparando registros del docente actuales con los del año anterior, donde el trabajo se realizó solamente en el aula utilizando guías de ejercicios y explicaciones del docente sobre cada concepto trabajado.

Reflexionando, en forma general, sobre la puesta en marcha parcial de la experiencia podemos mencionar como logros:

- El uso de las computadoras fue motivador en el trabajo de los alumnos.
- El uso del software Cabri Géomètre II Plus, da dinamismo y permite una buena exploración de los estudiantes.
- El material elaborado y entregado permite a los estudiantes trabajar a su propio ritmo, elaborando sus propias conjeturas.

- El intercambio de ideas en el desarrollo de la clase fortalece la posibilidad de argumentación.

De la misma forma podemos mencionar algunas dificultades observadas hasta el momento:

- El software Cabri al permitir una exploración libre, potencia las distracciones de los alumnos, ya que ellos tienden a explorar las demás herramientas.
- Las actividades demandan más tiempo del que estaba planificado, lo que lleva a una modificación continua del cronograma de clase.
- Falta de organización institucional en el uso de la sala de computación.

El cambio de visión de una geometría estática a una dinámica motiva a los estudiantes, facilitándoles la búsqueda de regularidades y sus dominios de validez.

Realizar experiencias, aunque los resultados no sean los esperados, nos permite reflexionar sobre nuestros aciertos y errores, para continuar en la búsqueda de nuevas alternativas.

BIBLIOGRAFÍA

- Itzcovich H. (2005). "*Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*". 1.ed. Libros del Zorzal. Buenos Aires, Argentina.
- Garaventa, Legorburu, Rodas, Turano (2000*). "Carpeta de Matemática 8º".* Editorial Aique.
- Rodríguez, Martinez (1998*). "Matemática de 8º EGB".* Editorial Mc.Graw Hill.
- Zubieta Badillo, Rivera Alvarez, Molina Pérez. "Más sobre geometría dinámica". http://www.efit-emat.dgme.sep.gob.mx/downloads/preliminarlibrocabri2.pdf
- Scaglia S., Götte M.. "*Una propuesta de capacitación docente basada en el uso de un software de geometría dinámica".* Revista electrónica de investigación en educación en ciencias , REIEC Año 3 Nro. 1, pag. 35-50.

Anexo 1: ENCUESTA A PROFESORES DE MATEMÁTICA

Estimado Profesor, la siguiente encuesta tiene como objetivo buscar información relacionada con las clases de Geometría, sólo queremos que la información que nos proporciones sea verídica. Para cada pregunta debes responder con una de las siguientes opciones:

1. Nunca, 2. Casi nunca, 3. Algunas veces, 4. Muchas veces, 5. Casi siempre, 6. Siempre

En la columna derecha de la siguiente tabla debes poner el número de la opción que selecciones según la respuesta que consideres.

PREGUNTA	RESP.
1. ¿Utiliza medios didácticos como apoyo en sus clases?	
2. ¿Le es posible aplicar los conocimientos del aula a situaciones prácticas?	
3. ¿Considera necesario vincular los conocimientos en el aula con la vida social de los estudiantes para lograr un aprendizaje significativo?	
5. ¿Utiliza ejemplos de situaciones reales?	
6. ¿Propone problemas que no estén en el libro de texto?	
7. ¿En las clases sólo utiliza el pizarrón y la tiza?	
8. ¿Trabaja en la sala de computación?	
9. ¿Utiliza algún software como recurso?	
10. ¿Tus alumnos demuestran dominio del contenido que le enseña?	
11. ¿Ha realizado cursos de perfeccionamiento en temas de geometría y su didáctica?	
12. ¿Insiste con tus alumnos en la idea de que no basta memorizar el contenido, sino que resulta fundamental aplicarlo a nuevas situaciones?	

Realiza un comentario breve acerca de la enseñanza-aprendizaje de los temas de Geometría de su planificación.

Anexo 2: (GUÍA ENTRAGADA A LOS ALUMNOS)

Nombre:…………………………………………………………………………………………

Curso:………………………………………………………………………….Fecha:………

Puntos notables del triángulos

En las siguientes actividades encontrarás preguntas y cuestiones que debes contestar en esta hoja y otras actividades que realizarás en la computadora.

1. Mediatrices de un triángulo. Circuncentro

Dos amigos, Juan y Francisco viven en un bosque. Un tercer amigo, Roberto, quiere ubicar su casa de manera que se encuentre a la misma distancia de Juan que de Francisco. Representa esta situación en la hoja de trabajo y marca dónde podría construir Roberto su casa.

Verifica que la casa de Roberto se encuentra equidistante de la de sus amigos.

¿Habrá otras ubicaciones para que Roberto construya su casa? Justifica

¿Podrá ser que Roberto construya su casa de manera que ahora los tres se encuentren a la misma distancia uno del otro? Si te parece que sí, marcá en la hoja de trabajo el punto donde debería ubicar Roberto su casa.

¿Qué es la mediatriz de un segmento? (puedes buscar la definición en un libro o utilizar Internet)

Abre una hoja nueva. Dibuja un triángulo. Dibuja en él dos mediatrices. Las dos mediatrices se cortan en un punto, ¿crees que la tercera mediatriz pasará por ese punto?

Dibuja la tercera mediatriz y marca el punto de intersección. Mueve ahora los vértices del triángulo y observa que ocurre.
Es momento de intentar una definición para ***circuncentro.***

Mide la distancia entre los vértices del triángulo y el circuncentro marcado. ¿Existe alguna relación entre estas medidas?

Modifica el triángulo observando cómo varían los resultados anteriores. Escribe con sus palabras la propiedad observada.

Guarda el archivo con el nombre ejercicio1.fig.

2. Alturas de un triángulo. Ortocentro

¿Qué es la altura de un triángulo? (consulta en un libro de texto o en Internet si no lo recuerdas y discute la definición con tus compañeros).

Abre una hoja nueva. Dibuja un triángulo. Dibuja en él una altura. Mueve los vértices y comprueba la validez de la construcción. Responde:

- ¿La altura es vertical? ¿De qué depende que así ocurra?
- ¿La altura divide a la base por la mitad? ¿De qué depende que así ocurra?

Dibuja una segunda altura. Estas líneas se cortan en un punto, ¿crees que la tercera altura pasará por ese punto?

Dibuja la tercera altura y marca el punto de intersección. Mueve ahora los vértices del triángulo y observa qué ocurre.
Es momento de definir ***ortocentro.***

Al mover los vértices comprueba que el ortocentro no siempre se encuentra en el interior del triángulo. ¿De qué depende que así ocurra? Explica las tres posibilidades.

Guarda el archivo con el nombre ejercicio2.fig.

3. Medianas de un triángulo. Baricentro

¿Qué es la mediana de un triángulo? (consulta en un libro de texto o en Internet si no lo recuerdas y discute la definición con tus compañeros).

Abre una hoja nueva. Dibuja un triángulo. Dibuja en él dos medianas. Las dos medianas se cortan en un punto, ¿crees que la tercera mediana pasará por ese punto?

Dibujen la tercera mediana y marquen el punto de intersección. Muevan ahora los vértices del triángulo y observen que ocurre.

Es momento de definir ***baricentro.***

Mide los dos segmentos en que el baricentro divide a una de las medianas. ¿Existe alguna relación entre ambas medidas?

Realiza lo anterior con las otras dos medianas. Modifica el triángulo observando cómo varían los resultados anteriores. Escribe la propiedad observada.

Guarda el archivo con el nombre ejercicio3.fig.

4. Bisectrices de un triángulo. Incentro

¿Qué es la bisectriz de un triángulo? (consulta en un libro de texto o en Internet si no lo recuerdas y discute la definición con tus compañeros).

Abre una hoja nueva. Dibuja un triángulo. Dibuja en él dos bisectrices. Las dos bisectrices se cortan en un punto, ¿crees que la tercera bisectriz pasará por ese punto?

Dibuja la tercera bisectriz y marca el punto de intersección. Mueve ahora los vértices del triángulo y observa que ocurre.

Es momento de definir ***Incentro.***

Mide los segmentos determinados entre los puntos de intersección de la bisectriz con uno de los lados del triángulo y el incentro. ¿Existe alguna relación entre ambas medidas?

Mide los segmentos (perpendiculares al lado del triángulo) determinados entre los puntos de intersección con uno de los lados del triángulo y el incentro. ¿Existe alguna relación entre ambas medidas?

Modifica el triángulo observando cómo varían los resultados anteriores. Escribe la propiedad encontrada.

Construye en el mismo triángulo su circuncentro. Mueve ahora los vértices del triángulo. ¿Coincide en algún momento el incentro y el circuncentro?. Explica.

Guarda el archivo con el nombre ejercicio4.fig.

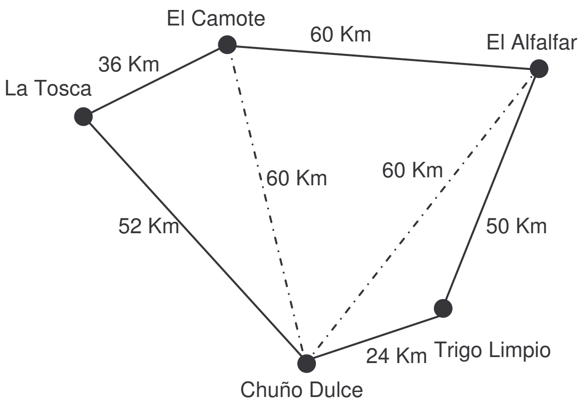
Resuelve las siguientes actividades utilizando Cabri:

1. Una empresa quiere construir una fábrica de productos que se venden principalmente en tres ciudades. La idea es construirla en un lugar que este a igual distancia de las tres ciudades. ¿Cómo se puede encontrar el punto donde se debe construir la fábrica? Muestra un ejemplo usando el software.

2. Un señor tiene un corral triangular sin alambrar y una oveja; para que la oveja no se escape decidió atarla con una cuerda, a una estaca. Dependiendo del lugar del corral donde se coloque la estaca se puede regular la longitud de la cuerda, de forma tal que la oveja pueda ir lo más lejos posible sin comer pasto fuera de la marca del corral.

   Construye un corral triangular, y trata de encontrar en que lugar debe colocarse la estaca de tal manera que la oveja pueda comer en la mayor superficie posible del corral. ¿Cómo encontraste el punto?

3. Los vecinos de Chuño Dulce están seriamente preocupados. Los desechos que eliminan sus pobladores hasta ahora eran quemados en basurales, pero esta acción está contaminando cada vez más el aire y, además, los ácidos que penetran en la tierra han empezado a contaminar las napas del agua que ellos mismos consumen.



La idea es asociarse con las poblaciones cercanas para organizar la recolección de residuos, su clasificación y su reciclado. Este proceso implicaría una inversión que se recobraría con la venta del compost (fertilizante obtenido a partir de los desechos orgánicos).
La intención es reunirse de a tres poblados. Los habitantes de Chuño Dulce van a discutir está semana con que vecinos les conviene asociarse. Para eso estudiarán el costo del trazado y aplanado del camino hasta el lugar donde se instale la procesadora de desechos. Si realizan estos cálculos, averiguarán cuál es el proyecto más económico.

a. Confeccionen el mapa de la zona.
b. Hallen el lugar equidistante (que está a igual distancia) de cada uno de estos tríos de poblaciones que podrían participar en el proyecto: El Camalote, La Tosaca, Chuño Dulce; El Camalote, El Alfalfar, Chuño Dulce; El Alfalfar, Chuño Dulce, Trigo Limpio.
c. Tracen, en cada caso, los caminos de acceso que se deberán construir para llevar los residuos al centro de recolección.
d. Encuentren la distancia que se deberá recorrer desde Chuño Dulce para llegar a cada una de las plantas e indiquen cuál asociación implica menos traslado.

4. Construye un triángulo equilátero ABC. Si M es un punto interior del triángulo y P, Q y R son los pies de las perpendiculares desde M hacia cada uno de los lados del triángulo, calcular PM + QM + RM. ¿ Qué sucede al mover el punto M?

Etcheverry, Nilda. Nació en Santa Rosa (Provincia de La Pampa, 1954). Es Magíster en Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional de Río Cuarto. Es docente en Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa (Argentina).
Dirección Postal: Avda Argentino Valle 623 Santa Rosa, (6300), La Pampa, Argentina.
nildae@exactas.unlpam.edu.ar

Reid, Marisa. Nació en Sansinena (Provincia de Buenos. Aires, 1966). Es Licenciada en Matemática, Universidad Nacional de La Pampa. Es docente en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa (Argentina).
Dirección Postal: José Luro 1359 Santa Rosa, (6300), La Pampa, Argentina.
mareid@exactas.unlpam.edu.ar

Botta Gioda, Rosana G. Nació en Rafaela (Provincia de Santa Fe, Argentina, 1975). Es Profesora en Matemática y Computación, Universidad Nacional de La Pampa. (Argentina). Es docente en EGB3, Polimodal y en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales . Universidad Nacional de La Pampa (Argentina).
Dirección Postal: Pio XII 1504 Santa Rosa, (6300), La Pampa, Argentina.
rbotta@cpenet.com.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas117-126
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar
El Tangram en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría

Martha Iglesias Inojosa

Resumen

Ante la necesidad que tienen los docentes de profundizar en la comprensión del conocimiento geométrico y sus implicaciones didácticas, se ha considerado relevante llevar a cabo un taller orientado a caracterizar y analizar las bases matemáticas del Tangram Chino, así como a ponderar su potencial didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría a nivel de educación básica (7° a 9° año, 11 – 14 años).

Abstract

Attending the educator´s necessity to go deeper in the understanding of the geometric knowledge and its didactic implications, it has been considered relevant to offer a course oriented to characterize and analyze the mathematical bases of the Chinese Tangram, as well as to know its didactic potential in the education process and learning of Geometry at basic level of education (7° to 9° year, 11 - 14 years).

1. Introducción

Este taller está dirigido a docentes en formación y docentes en servicio en el ámbito de la Educación Básica (7° a 9° año, 11 – 14 años) y el mismo tiene como objetivos:

1. Establecer las bases matemáticas involucradas en la construcción del Tangram Chino.
2. Evaluar el potencial didáctico del Tangram Chino en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

Cabe señalar que, en este artículo, no se pretende dar respuesta detallada a las preguntas planteadas, sino configurar una secuencia didáctica factible de ser puesta en práctica en escenarios para la formación inicial y permanente de los docentes de Matemática y, más adelante, por éstos en sus clases con estudiantes de Educación Básica.

El trabajo previsto en este taller comprenderá, en atención al *modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele,* las siguientes fases: Información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración. Cada una de estas fases tiene una intencionalidad didáctica determinada que contribuirá al logro de los objetivos previstos. Es oportuno indicar que el modelo de Van Hiele ayuda a entender la forma cómo aprenden Geometría los alumnos en los distintos niveles educativos y, además, cómo propiciar un aprendizaje significativo de los contenidos geométricos (Gutiérrez y Jaime, 1990; Corberán, 1994, Gutiérrez, 2000).

El taller se llevará a cabo en dos sesiones de trabajo, cada una de ellas con una duración de cuatro horas. Las actividades previstas se describen en los siguientes apartados.

Sesión de trabajo n° 1

Información: Esta fase está dirigida a revisar una presentación (en PowerPoint) relacionada con *origen, caracterización y construcción del Tangram Chino.*

¿Qué es un Tangram?	¿A qué se denomina Tangram Chino?
¿Qué rasgos caracterizan un Tangram?	¿A qué se denomina tangrama?

A continuación, se presentan algunas diapositivas que conforman dicha presentación, con el propósito de dar respuesta a las interrogantes planteadas:

¿Qué es un Tangram?

El Tangram es un *puzzle* o rompecabezas formado por un conjunto de piezas de formas poligonales que se obtienen al fraccionar una figura plana y que pueden acoplarse de diferentes maneras para construir distintas figuras geométricas.

Las figuras que se obtienen con este puzzle llamado Tangram estarán formadas siempre por todas las piezas en las que se disecciona la figura plana que lo origina, por tanto las formas geométricas que se obtienen podrán ser distintas pero siempre tendrán la misma área.

El Tangram es de origen chino y su gran popularidad en Europa y en los Estados Unidos surgió a principios del siglo XIX; ésta fue creciendo con el tiempo debido a su carácter lúdico y educativo, de forma que en la actualidad existen numerosos juegos y juguetes infantiles basados en el tangram.

El TANGRAM CHINO

El Tangram es un juego chino muy antiguo llamado "*Chi Chiao Pan*" que significa "juego de los siete elementos" o "tabla de la sabiduría".

Existen varias versiones sobre el origen de la palabra Tangram, una de las más aceptadas cuenta que la palabra la inventó un inglés uniendo el vocablo cantones "*tang*" que significa chino con el vocablo latino "*gram*" que significa escrito o gráfico.

Otra versión narra que el origen del juego se remonta a los años 618 a 907 de nuestra era, época en la que reinó en China la dinastía Tang de donde se derivaría su nombre.

El TANGRAM CHINO

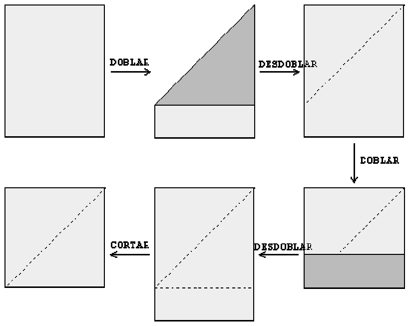
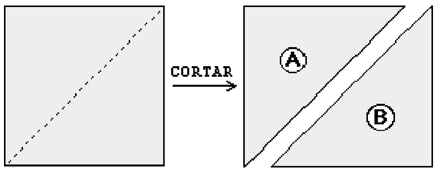
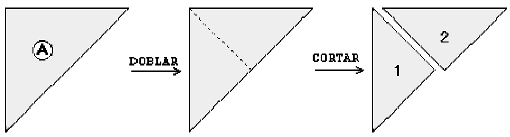
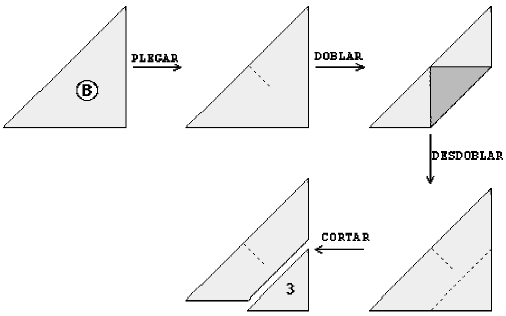
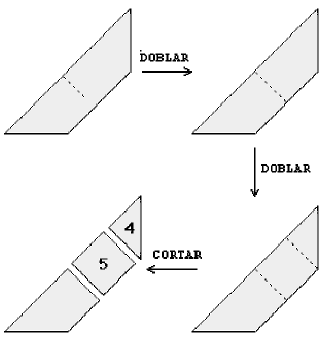
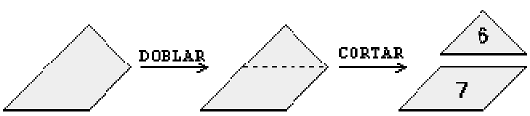
El Tangram es un juego chino muy antiguo llamado "*Chi Chiao Pan*" que significa "juego de los siete elementos" o "tabla de la sabiduría".

Existen varias versiones sobre el origen de la palabra Tangram, una de las más aceptadas cuenta que la palabra la inventó un inglés uniendo el vocablo cantones "*tang*" que significa chino con el vocablo latino "*gram*" que significa escrito o gráfico.

Otra versión narra que el origen del juego se remonta a los años 618 a 907 de nuestra era, época en la que reinó en China la dinastía Tang de donde se derivaría su nombre.

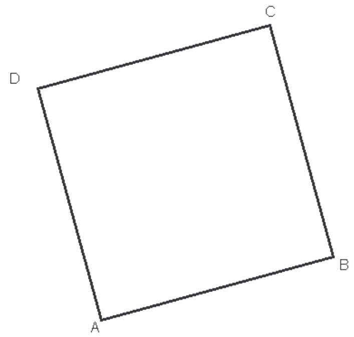
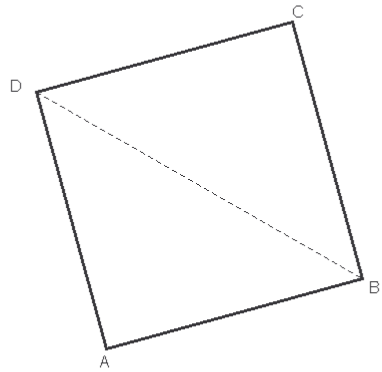
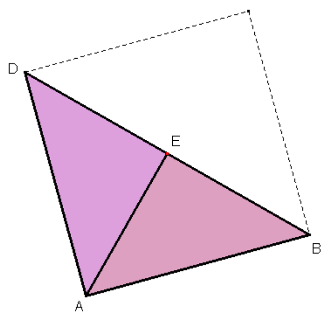
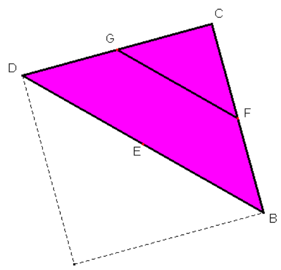
Orientación dirigida: En esta fase se pretende que los participantes *construyan el Tangram Chino*; primero, haciendo uso del doblado de papel y, luego, con regla o escuadras.

Actividad n° 1: Analice la construcción del Tangram Chino con doblado de papel y describa cada uno de los pasos realizados.

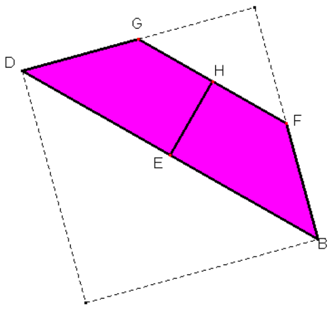
Construcción del Tangram Chino con doblado de papel	
	**Paso 1**
	**Paso 2**
	**Paso 3**
	**Paso 4**
	**Paso 5**
	**Paso 6**

Actividad n° 2: Menciona las diferentes figuras geométricas obtenidas en el proceso de construcción del Tangram con doblado de papel.

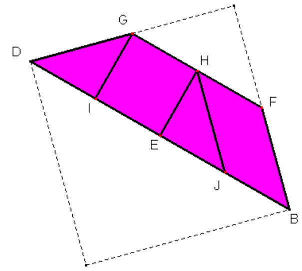
Actividad n° 3: Analice – en la presentación en PowerPoint – la construcción del Tangram Chino con regla o escuadras y, luego, representa gráficamente la secuencia de pasos realizados. ¿Cuáles definiciones o propiedades geométricas están involucradas en esta construcción? Justifique su respuesta.

<table>
<tr>
<td>Sea ABCD un cuadrado

</td>
<td>Se traza una diagonal del cuadrado ABCD (en este caso, la diagonal BD) y, de esta manera, éste se descompone en dos triángulos iso-rectángulos: ABD y CBD.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Se traza el segmento AE, siendo E el punto medio de la diagonal BD. El triángulo ABD se descompone en dos triángulos isorectángulos: ABE y ADE.

</td>
<td>Se traza el segmento FG, siendo F y G los puntos medios de los lados BC y CD respectivamente en el triángulo isorectángulo CBD, el cual se descompone en un triángulo isorectángulo CFG y un trapecio isósceles BFGD.

</td>
</tr>
</table>

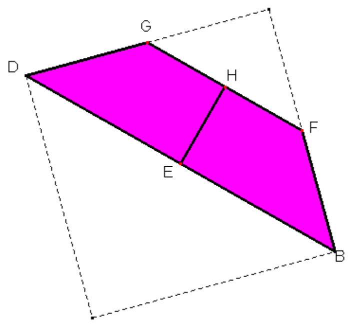
<table>
<tr>
<td>
Se traza el segmento EH, siendo H el punto medio del segmento FG en el trapecio isósceles BFGD, el cual se descompone en dos trapecios rectángulos BFHE y DGHE.



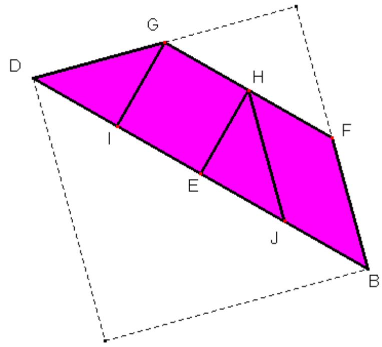
</td>
<td>
Se trazan los segmentos GI y HJ, siendo I y J los puntos medios de los segmentos DE y BE respectivamente en el trapecio isósceles BFGD.
El trapecio isósceles BFGD se descompone en dos triángulos isorectángulos, un cuadrado y un paralelogramo.



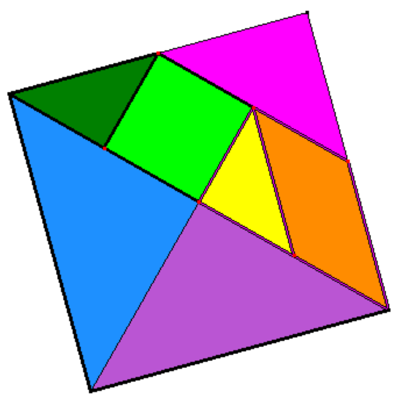
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Se traza el segmento EH, siendo H el punto medio del segmento FG en el trapecio isósceles BFGD, el cual se descompone en dos trapecios rectángulos BFHE y DGHE.



</td>
<td>
Se trazan los segmentos GI y HJ, siendo I y J los puntos medios de los segmentos DE y BE respectivamente en el trapecio isósceles BFGD.
El trapecio isósceles BFGD se descompone en dos triángulos isorectángulos, un cuadrado y un paralelogramo.



</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
Obteniéndose así el Tangram Chino


</td>
</tr>
</table>

Explicitación: En esta fase se aspira que los participantes *analicen las definiciones y propiedades geométricas involucradas en la construcción del Tangram Chino* y, además, *reconozcan relaciones entre algunas de sus piezas*. Observa la figura 1, ¿es posible construir alguna pieza del Tangram Chino haciendo uso de algunas de las piezas restantes?

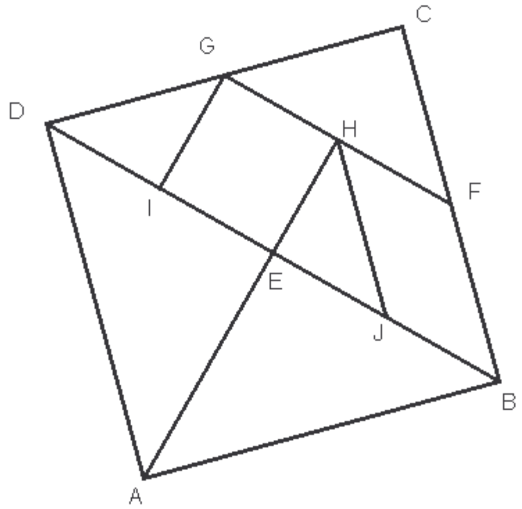


Figura 1

En la figura 2, se observa cómo ciertas piezas del Tangram Chino pueden formarse haciendo uso de algunas de sus piezas.

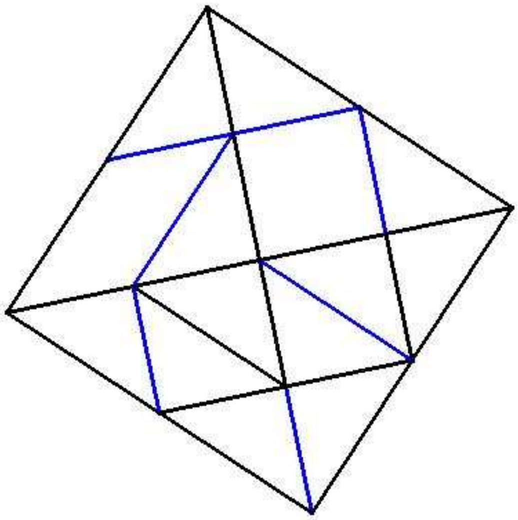


Figura 2

¿Cuál es el área de un cuadrado cuyos lados miden 8 cm? ¿Cuál es el área de cada una de las piezas que componen el Tangram Chino construido a partir de dicho cuadrado? ¿Qué relación existe entre el área de cada una de las piezas del Tangram Chino con respecto al área del cuadrado original? Observa la figura 3.

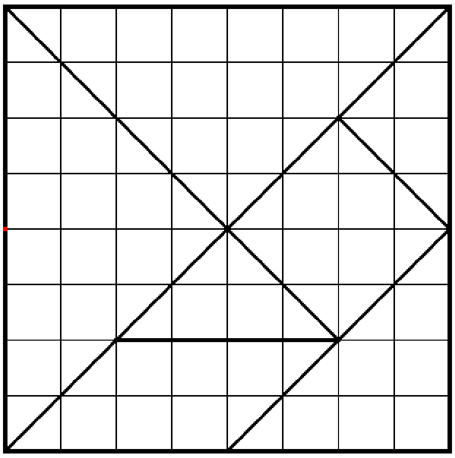


Figura 3

Orientación Libre: Esta fase se pretende que los participantes *construyan figuras geométricas con las siete piezas que conforman el Tangram Chino*. Por ejemplo, con tales piezas, se pueden construir trece (13) polígonos convexos, los cuales se muestran en la figura 4.

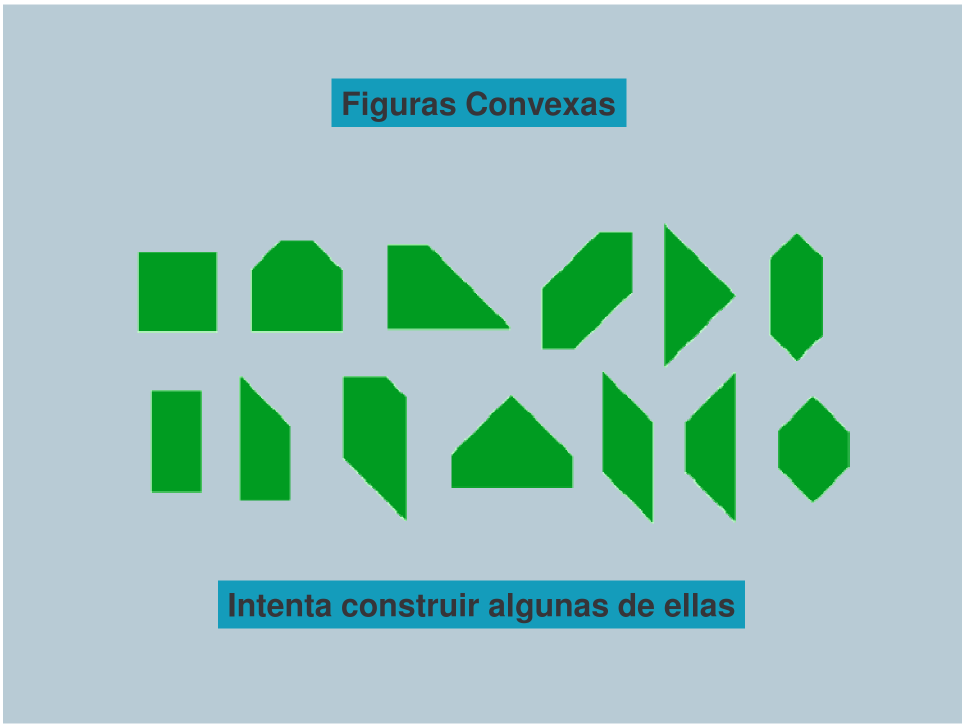


Figura 4

Integración: En esta fase se aspira que los participantes presenten, por escrito, los aspectos relevantes del trabajo realizado en las fases previas.

Sesión de trabajo n° 2.

Se conoce que dadas dos figuras geométricas cualesquiera, éstas pueden: (1°) tener la misma forma y el mismo tamaño (figuras congruentes), (2°) tener la misma forma y diferentes tamaños (figuras semejantes), (3°) tener el mismo tamaño y diferentes formas (figuras equivalentes) y (4°) tener diferentes formas y diferentes tamaños.

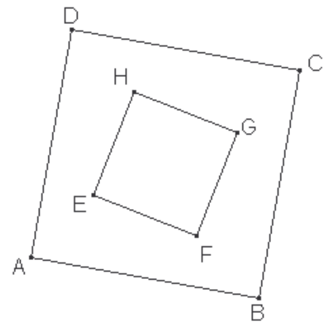
En el Tangram Chino pueden identificarse: (1°) figuras congruentes, (2°) figuras semejantes y (3°) figuras equivalentes. Trata de identificarlas y completa el siguiente cuadro:

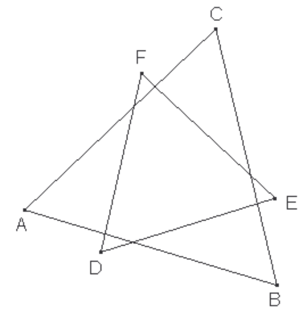
Figuras Congruentes		
Figuras Semejantes		
Figuras Equivalentes		

En cada caso, justifica tu respuesta.

Hasta aquí pareciera que es posible establecer que dos figuras son semejantes si cada par de ángulos correspondientes son congruentes; sin embargo, teniendo en cuenta que, por lo general, los lados correspondientes de figuras semejantes no son congruentes, *¿qué puede decirse con respecto a las longitudes de los lados correspondientes de figuras semejantes*?

Por ejemplo, si se consideran un cuadrado y un rectángulo, ambas figuras son paralelogramos que tienen cuatro ángulos rectos; es decir que los ángulos correspondientes son congruentes, pero – por lo general – estas figuras no son semejantes, ya que los *lados correspondientes* no son *proporcionales*. En cambio, si se hubiesen considerado dos triángulos equiláteros cualesquiera, o dos cuadrados cualesquiera, o dos segmentos cualesquiera, o dos triángulos iso-rectángulos cualesquiera, si se pudiera afirmar que son semejantes. Nótese que dos figuras son semejantes, si una de ellas es un modelo a escala de la otra.





Los cuadrados ABCD y EFGH son semejantes.	Los triángulos equiláteros ABC y DEF son semejantes.

Figura 5

Se recomienda, en la figura 5 y en cada caso, medir los lados de tales figuras geométricas y, luego, calcular la razón entre las longitudes de los lados correspondientes. ¿Qué observas? Realiza un trabajo análogo con las piezas semejantes del Tangram Chino y, en cada caso, determina la razón de semejanza.

Bibliografía

Corberán, R. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele*. Madrid: C.I.D.E., M.E.C.

Durán C., D. (2003). *La Geometría Euclidiana*. Maracaibo: Ediciones Astro Data, S.A.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En Llinares, S. y Sánchez, M.V. *Teoría y práctica en educación matemática*. Sevilla: Alfar, 295 – 384.

Gutiérrez, A. (2000). Aportaciones de la investigación psicológica al aprendizaje de las matemáticas en secundaria. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 24, 23 – 33.

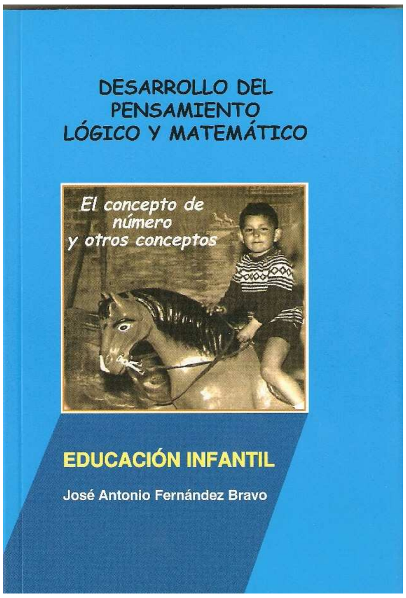
Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Wilmington: Addison – Wesley Iberoamericana, S.A.

Martha Iglesias Inojosa, Profesora de Matemática. Magíster em Educación, mención Enseñanza de la Matemática. Profesora en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL Maracay). Coordinadora del Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando Nuevas Tecnologías (CEINEM – NT) y de la Línea de Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría. Presidenta de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Libros

Marzo de 2009, Número 17, páginas 127-128
ISSN: 1815-0640



Desarrollo del pensamiento lógico y matemático. El concepto de número y otros conceptos

Autor: José Antonio Fernández Bravo

Editorial: Grupo Mayéutica (Madrid)

Primera edición, 2008

ISBN: 9788493495428

276 páginas

www.grupomayeutica.com

Dice el autor que tiene un sueño que se repite una y otra vez; el sueño de mejorar el rendimiento en el aprendizaje de la Matemática. Pone por empeño, la emoción positiva y la comprensión de los conceptos; que a esto sólo se llega cuando la enseñanza se dedica a ESCUCHAR cómo se aprende.

Este libro, es un manual imprescindible de actualización y ejercicio del conocimiento en la Didáctica de la Matemática, para cualquier profesor – fundamentalmente - de Educación Infantil, y primeros cursos de Educación Primaria. Destaca que la "capacidad de aprendizaje debe estar íntimamente unida a una gran capacidad de enseñanza. Incorporar a la mente del niño un conjunto de términos y representaciones incomprensibles perjudica su acción formativa, pero la disminución de contenido que pueda comprenderse perjudica al desarrollo; tanto error se comete cuando intentamos que un niño aprenda algo que supera su comprensión, como cuando disminuimos la cantidad de conocimiento y facilitamos el esfuerzo intelectual al que un niño hubiera podido llegar."

Huye de los disfraces y aporta una cantidad de ejercicios y aclaraciones de extensa validez para la práctica de la intervención educativa. "Y los niños se contagian rápidamente de rituales para identificar mecanismos e imitar procedimientos, o se disfrazan con unas cuantas palabras que suenan a matemáticas y sueltan voces al azar y entremezcladas sobre formas geométricas, números y relaciones con el fin de adivinar la respuesta esperada. El caos está servido y ausente la coordinación mental que dirige el diálogo para establecer relaciones.”

Desarrolla el concepto de número de forma independiente al conteo, apoyándose en científicas bases psicopedagógicas y actuales descubrimientos neurocientíficos. Sobre el concepto de número cardinal llega a la conclusión de que el niño no lo adquiere mediante la técnica de conteo. “Creer que sumar es juntar y restar es quitar, cierra la mente del niño a la comprensión del concepto de número cardinal.”

Incorpora un listado de conceptos con la interpretación matemática correcta a estas edades de casi todos los conceptos que intervienen en el currículum de Educación Infantil, y lo hace a través de aclaraciones científicas, actividades, juegos o cuentos.

“Este libro se divide en dos partes claramente diferenciadas: una, primera, que trata el concepto de número; y, otra, segunda, sobre el tratamiento, significado y sentido matemático de conceptos y relaciones más relevantes.”

Esta publicación pone de manifiesto el reconocido prestigio del autor en la pedagogía de la matemática. Su elegante expresión didáctica para la práctica de la intervención educativa y el rigor con el que ajusta el soporte científico, convierten a este libro en un principal referente para el desarrollo del pensamiento matemático en la Educación Infantil y primeros cursos de la Educación Primaria.

Antonio Ramón Martín Adrián
Profesor del CEIP Aguamansa
Tenerife. España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 129-134
ISSN: 1815-0640

M@tem@tic@s en l@ red

El portal educativo del Estado argentino.

"educ.ar para una nueva sociedad del conocimiento"

Dirección: http://www.educ.ar

educ.ar es el portal educativo de la Nación, destinado a ejecutar las políticas definidas por el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología en materia de integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en el sistema educativo.

El proyecto fue relanzado en julio de 2003, y después de una profunda reorganización interna de la sociedad se ha definido su nuevo perfil. La labor de Educ.ar S.E. está enfocada fundamentalmente a auxiliar a docentes y directivos de instituciones educativas en la incorporación de las TIC´s en la práctica docente, a través de varias líneas de trabajo:

- Desarrollo de un portal dinámico, con boletines y weblogs, y su inclusión en la Red Latinoamericana de Portales Educativos.
- Producción de contenidos multimediales, a los que se puede acceder a través del portal educ.ar y también a través de los CD de la Colección educ.ar.
- Reciclado de equipamiento informático donado por diversas instituciones para su entrega a escuelas de todo el país.
- Capacitación a través de instancias presenciales y también de instancias a distancia.
- Estudios para la provisión de conectividad a las escuelas.

Misión del portal educativo educ.ar

- Generar oportunidades para que todos los habitantes de la república tengan posibilidades de aprender, independientemente de su lugar de residencia o condición social.
- Facilitar a los docentes herramientas para enseñar en la sociedad del conocimiento.

- Colaborar en la reducción de la brecha digital.
- Crear redes entre gobierno, sector privado y tercer sector.

Oferta de capacitación:

- Cursos moderados

  Están basados en el aprendizaje colaborativo y presentan un seguimiento personalizado del tutor, quién responde a sus consultas, promueve la interacción entre pares y también facilita el proceso de aprendizaje en el entorno virtual.

- Cursos autoasistidos:

  Son cursos basados en el autoaprendizaje. El seguimiento de las actividades es autónomo, según las necesidades del cursante. La tutoría estará presente para responder a las consultas.

En la plataforma existen actividades para los distintos niveles educativos, para educación inicial, educación primaria, educación secundaria y también para educación superior.

Como todo material que está en Internet puede ser utilizado de forma libre; sólo se debe realizar un registro en línea y será habilitado para bajar material desde el sitio web.

En la sección de Recursos educativos se presentan:

Distintas *sugerencias metodológicas*, a saber:

- Investigación
- Juego
- Generador de actividades
- Entorno digital colaborativo
- Conferencia exposición
- Proyecto
- Guías de estudio
- Planificación de unidades didácticas
- Representación gráfica
- Entrevista
- Actividad de ejercitación
- Publicaciones seriadas
- Webquest

Con respecto al *Tipo de propuesta didáctica*, podemos mencionar:

- Discusión moderada
- Enfoque multidisciplinar
- Construcción
- Aprendizaje
- Observación
- Presentación expositiva
- Proyecto
- Resolución

Los temas que se presentan y trabajan en la disciplina matemática son los siguientes:

- Estadística
- Operaciones
- Probabilidad
- Números
- Lenguaje gráfico y algebraico
- Geometría
- Mediciones

Hasta aquí se ha hecho una presentación, en términos generales de la página educ.ar. A continuación se particulariza en la capacitación de docentes de nivel medio, ya que en este portal se encuentra el espacio Par@ educ.ar, que los docentes pueden consultar desde su hogar, su escuela, locutorios, bibliotecas para su desarrollo profesional en comunidades temáticas. Para trabajar este material sólo se necesita una computadora conectada a Internet, se pueden leer los textos en pantalla, imprimirlos, bajarlos en un disco y también consultarlos off line.

Cada disciplina es un entorno de aprendizaje, un espacio para adquirir y poner en juego nuevos saberes, en este espacio se encuentra material para lengua, literatura, matemática, química, física, biología, historia y geografía.

La página de inicio de este espacio es la siguiente:

En lo que sigue nos ocuparemos de la disciplina matemática.

En la era de la información, la incorporación de las nuevas tecnologías en la enseñanza requiere propuestas pedagógicas y formativas originales. Para ello, es necesario reconocer los modos en que los conocimientos se construyen en el área o campo de referencia, así como las formas en que las tecnologías influyen en esos procesos de producción. A partir de ese análisis, se propone un área de especialización docente que apunta a convertirse en comunidad académica virtual, donde se realizan trabajos en colaboración, se participa de discusiones temáticas y se desarrollan proyectos pedagógicos.

Como síntesis, se puede decir que la finalidad de este espacio es elaborar, recrear y compartir propuestas innovadoras para el aula integrando las tecnologías de la información y la comunicación.

A continuación se muestra, sucintamente, el modo en el que se presenta el material de la asignatura matemática disponible en la página

En el Núcleo Teórico se presenta el estado de la ciencia, los avances en el área, se dan interrogantes y propuestas innovadoras y un informe sobre las distintas tradiciones de enseñanza de la materia.

Se puede citar, a modo de ejemplo:

- Los principales hitos de la matemática del siglo XX, algunos de los avances más importantes y también los descubrimientos y acontecimientos destacables.
- Los movimientos y sociedades para la investigación matemática, tanto nacionales como internacionales.
- Distintos paradigmas de la resolución de problemas en matemática.
- Las nuevas tecnologías en la enseñanza matemática y las investigaciones sobre su aplicación en el campo educativo.
- Síntesis del desarrollo de algunas teorías sobre la enseñanza y didáctica de la Matemática.
- Los temas tratados en los congresos de matemática, tanto nacionales como internacionales.

En el Núcleo de Herramientas se presentan materiales de consulta y recursos para la enseñanza, documentos, contenidos y propuestas interactivas on line.

Se puede citar, a modo de ejemplo:

- Recursos de matemática en Internet.
- Sociedad Canaria "Isaac Newton".
- Diccionario inglés-español de matemática.
- Sobre los elementos de Euclides.
- Calculus, de Tom Apóstol.
- Libros de matemática y apuntes en formato pdf.
- Distintos proyectos de investigación.

Elda Beatriz Micheli
Dpto. de Estadística. Universidad Nacional del Comahue
Neuquén, Argentina
elda_micheli@yahoo.com.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 135-136
ISSN: 1815-0640

Información

VI CIBEM

Miguel Díaz Flores

La sexta versión del Congreso Iberoamericano de Educación Matemática fue organizada por la Universidad De Los Lagos y contó con la colaboración de la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM), la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) y la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura OEI.

El Congreso abordó los grandes desafíos que enfrenta Iberoamérica respecto a los procesos educativos, haciendo dialogar a académicos e investigadores en torno a sus materias y experiencias, haciendo posible además, encontrar un camino de lucidez hacia fórmulas que permitan hacer más efectivos y eficientes los procesos educativos, convocando el esfuerzo y apoyo de autoridades políticas, académicas y docentes.

El Congreso, realizado en la Ciudad de Puerto Montt-Chile entre el 4 y 9 de Enero 2009, contó con un vasto programa académico constituido por las Conferencias Centrales, a cargo de Alan Kuzniak (Francia), Angel Ruiz (Costa Rica) Carlos Caamaño (Chile), João Pedro de Ponte (Portugal), Juan D. Godino (España), Joaquín Gimenez (España), Ricardo Cantoral (México) y Ubiratán D'Ambrosio (Brasil). Además, el programa contempló, diez conferencias paralelas, cuatro paneles de discusión, más de veinte cursillos y alrededor de 300 comunicaciones, cuyos autores provenían de Argentina, Bolivia, Brasil, Canadá, Colombia, Costa Rica, Cuba, Chile, Ecuador, El Salvador, Estados Unidos, España, Francia, Guatemala, Panamá, Perú, Portugal, Uruguay y Venezuela. Por la envergadura académica y los más de quinientos participantes, el congreso se constituyó en uno de los más grandes eventos en Educación Matemática realizados en Chile.

El VI CIBEM no sólo mostró avances sólidos en la producción de conocimiento en el ámbito de la Educación Matemática de los países de Iberoamérica, sino que también dio origen a un nuevo soporte organizacional para la realización de los futuros congresos, constituyéndose la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática en la institución que tendrá la responsabilidad de convocar y designar los países sedes de los próximos encuentros. Ciclos de dos países sedes en América y uno en España-Portugal, definen la formula para los futuros países anfitriones, siendo Uruguay el encargado de organizar el VII CIBEM el año 2013 y, España en el 2017, tendrá a su cargo la octava versión.

El congreso además permitió la realización de una Junta de Gobierno de FISEM en la cual se tomaron importantes acuerdos en temas organizacionales y financieros, junta que contó con la siguiente relación de participantes: Miguel Díaz Flores, Presidente de FISEM, Chile; Luis Balbuena, Secretario General, España; Antonieta Valenzuela y Begoña Grigoriú, Bolivia; Norma Cotic y Teresa Braicovich (Codirectoras de Revista UNIÓN), Argentina; Etda Rodríguez, Uruguay; Agustín Carrillo de Albornoz, España; Marcelo Borba y Ana Teresa Oliveira, Brasil; Joao Pedro da Ponte y Henrique Manuel Guimaraes, Portugal; María del Carmen Bonilla, Perú; Ángel Ruiz, Costa Rica; Juan Cadena Villota, Ecuador; Luis Roberto Moreno, Panamá; César García, Fredy González, Mario Arrieche y , José Ortiz, Venezuela; Álvaro Poblete y Verónica Díaz, Chile.

A nivel local, la Sociedad Chilena de Educación Matemática como entidad patrocinante apoyó la organización del encuentro y dispuso de un importante número de socios que coordinaron las presentaciones de los expositores en las distintas actividades paralelas del Congreso, así también implementó un stand de revistas y libros de las Sociedades de Educación Matemática adheridas a FISEM.

Finalmente, la Federación Iberoamericana de Educación Matemática y la Sociedad Chilena de Educación Matemática reconocen el gran esfuerzo que demandó a los responsables de la organización e implementación del evento, esto es a los profesores integrantes de la Comisión Organizadora Local, al Secretario General Mg. Hernán Muñoz, al Coordinador Internacional Dr. Álvaro Poblete y a la Coordinadora Nacional Dra. Verónica Díaz. Nuestros reconocimientos al trabajo realizado en Chile 2009.

Bienvenido Uruguay 2013.

Miguel Díaz Flores
Presidente FISEM
Presidente Nacional SOCHIEN

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 137-138
ISSN: 1815-0640

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ
Fundación Canaria

Esta Fundación no debería existir pero el azar, esa pelota que cae o no en la red de la vida a un lado u otro, la desgracia, la mala suerte, los muchos interrogantes de esta existencia entre tantas sombras y algunas luces hace que lo que no debería existir exista. Es, está, será. Una Fundación con el nombre de dos seres humanos que no están pero son carne de recuerdo, camino abierto de añoranzas, sangre caliente de hijos nunca olvidados, pues **CARLOS SALVADOR** y **BEATRIZ** se encuentran bien presentes a cada hora y a cada minuto en unos padres que no se han encerrado en la concha de su clara soledad, en el caparazón de un casi justificado egoísmo sino que sacando fuerzas de flaqueza – y nunca la frase ha sido más auténtica- han salido, cara a cara, contra la vida porque creen que “es posible luchar con la vida en contra” y han puesto su cuerpo y su alma a trabajar, codo con codo, por los demás, para hacer mejores a los otros y crear, con energía y entusiasmo, un mundo más justo, más solidario, más de todos. Y es que el nombre de la Fundación se corresponde con el de los dos únicos hijos que tuvieron Salvador Pérez y Aurora Estévez, profesores canarios con una dilatada vida profesional. Quienes les conocen saben qué significado tiene y a aquellos que no, les diremos que Carlos Salvador y Beatriz, con 27 y 25 años, se fueron en 2001 en un terrible accidente de tráfico.

La Fundación nace con la idea de trabajar en pro de la Educación y la Cultura para lo que trata de apoyar y promover acciones que se orienten a esos fines. Así mismo desarrolla un plan de actuación que contempla la promoción de jóvenes escritores, a investigadores en el campo de la Psicología y ayudas a escuelas necesitadas en el ámbito iberoamericano. Viene trabajando en el envío de material escolar nuevo a Perú, Bolivia y Paraguay gracias a los recursos obtenidos con la venta de los tres libros de Carlos Salvador, escritor póstumo. La edición fue financiada por sus padres y Ediciones Idea. El importe íntegro de la venta se destina a desarrollar los objetivos y proyectos al ser una “entidad sin fines lucrativos”. El futuro de estos padres en esta vida “sin ellos” se centra en dedicar sus esfuerzos, junto a un grupo numeroso de personas amigas (nunca estuvieron solos en este tiempo de tinieblas), a hacer mejores a tantos que lo necesitan en este ancho mundo por la vía incuestionable de la educación.

En esta página que nos cede la dirección de UNIÓN se anunciarán sus acciones: Premio Literario para escritores noveles; Premio para trabajos de Psicología; Construcción y dotación de Escuelas, Bibliotecas y Centros de Recursos Educativos en América, etc.

Para más información visitar: www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

CARLOS SALVADOR E BEATRIZ

Fundação Canária

Esta fundação não deveria existir, mas o azar, essa bola que cai ou não na rede da vida de um lado ou outro, a desgraça, a má sorte, os muitos interrogantes desta existência entre tantas sombras e algumas luzes que fazem que o que não deveria existir exista. É, está, será. Uma Fundação com o nome de dois seres humanos que não estão, mas são carne de recordação, caminho aberto de saudades, sangue quente de filhos nunca esquecidos, porque **CARLOS SALVADOR e BEATRIZ** encontram-se bem presentes a cada hora e a cada minuto em alguns pais que não se fecharam na concha da sua clara solidão, na carapaça de um quase justificado egoísmo senão que tirando forças da fraqueza – e nunca a frase foi mais autêntica – saíram, cara a cara, contra a vida porque crêem que "é possível lutar com a vida em contra", e puseram seu corpo e sua alma para trabalhar, ombro a ombro, pelos demais, para fazer melhores aos outros e criar, com energia e entusiasmo, um mundo mais justo, mais solidário, mais de todos. E é que o nome da Fundação se corresponde com o nome dos dois únicos filhos que tiveram Salvador Pérez e Aurora Estévez, professores canarinos com uma dilatada vida profissional. Quem lhes conhece sabe que significado tem, e àqueles que não, lhes diremos que Carlos Salvador e Beatriz, com 27 e 25 anos, se foram em 2001 num terrível acidente de trânsito.

A Fundação nasce com a idéia de trabalhar em pró da Educação e da Cultura para o que trata de apoiar e promover ações que se orientem a esses fins. Assim mesmo desenvolve um plano de atuação que contempla a promoção de jovens escritores, a pesquisadores no campo da Psicologia e ajudas a escolas necessitadas no âmbito ibero-americano. Vem trabalhando no envio de material escolar novo a Peru, Bolívia e Paraguai graças aos recursos obtidos com a venda dos três livros de Carlos Salvador, escritor póstumo. A edição foi financiada por seus pais e Edições Idea. O importe íntegro da venda se destina a desenvolver os objetivos e pesquisas ao ser uma "entidade sem fins lucrativos". O futuro destes pais nesta vida "sem eles" se centra em dedicar seus esforços, junto a um grupo numeroso de pessoas amigas (nunca estiveram sozinhos neste tempo de trevas), a fazer melhores a tantos que o necessitam neste imenso mundo pela via inquestionável da educação.

Nesta página que nos cede a direção de **UNION** se anunciarão suas ações: Prêmio Literário para escritores novatos; Prêmio para trabalhos de Psicologia; Construção e dotação de Escolas, Bibliotecas e Centros de Recursos Educativos na América, etc.

Para mais informação visitar: www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 139-140
ISSN: 1815-0640

Convocatoria del cargo de pro-Secretario General de la FISEM

La Secretaría General de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), ha de convocarse cada cuatro años.

En la reunión de la Junta de Gobierno celebrada en Puerto Montt (Chile) en el seno del VI CIBEM, el ocho de enero de dos mil nueve, se acordó por unanimidad lo siguiente:

> 3.- El Secretario General anuncia que en el mes de marzo, en el número 17 de UNIÓN, aparecerá la convocatoria del puesto de Secretario General de la FISEM cerrándose el plazo de admisión de candidatos el 30 de septiembre. Álvaro Poblete propone y se acuerda, que la convocatoria sea para la elección de un Pro-Secretario General que será informado por el actual Secretario a lo largo de un año desde su elección para pasar después a ocupar la Secretaría General por el período que marca el estatuto.

En consecuencia, se CONVOCA el cargo de Pro-Secretario General de acuerdo con lo previsto en el Estatuto de la FISEM y en su reglamento de orden interno que establecen lo siguiente:

ESTATUTO:

Artículo 20.-
El Secretario General será elegido por la Junta de Gobierno entre los candidatos presentados a la convocatoria realizada al efecto, en la forma que reglamentariamente se fije, para un mandato de cuatro años. El aspirante a Secretario General ha de estar respaldado por un acuerdo de la Junta de Gobierno (u órgano asimilado) de su Sociedad.
En el caso de no concluir su mandato, la Junta de Gobierno designará un Secretario General interino y hará una convocatoria para ser resuelta en un plazo máximo de seis meses.

Artículo 21.-
Son funciones de la Secretaría General:

a) La coordinación general de todas las actividades de la FISEM.
b) Proponer a los órganos de gobierno aquellas iniciativas que redunden en beneficio de la Educación Matemática así como organizar la elaboración de estudios y trabajos que hayan sido aprobados por los mismos.
c) Elaborar la programación de actividades de la FISEM para su aprobación por la Junta de Gobierno, de acuerdo con la Comisión Ejecutiva.
d) Rendir cuenta de su gestión ante la Junta de Gobierno.
e) Informar a las Sociedades Federadas de las actividades de la FISEM.
f) Actuar como Secretario de la Junta de Gobierno y de la Comisión Ejecutiva custodiando sus actas.

g) Librar los certificados que proceda, con el visto bueno de la Presidencia, sentándolos en el correspondiente libro de certificados.
h) Ordenar los gastos.
i) Llevar la correspondencia de la FISEM con sus registros de entrada y salida.
j) Aquellas otras que le encomienden los órganos de gobierno de la FISEM.

Artículo 22.-
El Tesorero será designado por la Junta de Gobierno entre las personas que le proponga el Secretario General. Su mandato será de cuatro años.

REGLAMENTO:

Artículo 8.-
Podrá ser candidato a la Secretaría General de la FISEM cualquier socio/a de una Sociedad Federada, siempre que tenga en la misma una antigüedad mínima de dos años. La solicitud deberá dirigirse al Presidente de la FISEM y tendrá que ir acompañada de los siguientes documentos:

- *Certificado en el que conste su condición de socio activo así como su antigüedad. • Una memoria de un máximo de tres folios en la que exponga su posible programa de actuación al frente de la Secretaría General.*
- *Certificado de haber recibido el aval de la Junta de Gobierno de su Sociedad.*
- *Currículum vitae.*

Artículo 9.-
La Junta de Gobierno convocará la provisión de la Secretaría General comunicándolo a las Sociedades Federadas, con un mínimo de cuatro meses antes de que expire el mandato del Secretario General. Si la vacante se produjera por dimisión del Secretario General, entonces se comunicará la convocatoria a las Sociedades Federadas, dando un plazo mínimo de cuatro meses para la presentación de candidaturas.

Artículo 10.-
La Presidencia convocará una reunión extraordinaria de la Junta de Gobierno para proceder a la elección del Secretario General entre las candidaturas presentadas. Una vez decidida la elección, lo comunicará oficialmente a las Sociedades Federadas.

Aquellos profesores o profesoras que deseen presentar su candidatura, deberán enviar la solicitud a la Presidencia de la FISEM antes del 30 de septiembre de 2009:

Miguel A. Díaz Flores
Director Escuela de Educación y Humanidades
Universidad de Viña del Mar
Agua Santa 7255, Sector Rodelillo
Viña del Mar – Chile

El artículo 8 del Reglamento indica la documentación que ha de presentar.

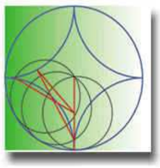
UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 141-145
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2009

2° REUNIÓN AMAZÓNICA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA - REAME 2
Lugar: Puyó (Ecuador)
Convoca: Universidad Estatal Amazónica
Fecha: 16 al 18 de abril de 2009.
Información: reame@uea.edu.ec
www.uea.edu.ec



XXIII JORNADA DE MATEMÁTICA DE LA ZONA SUR

Lugar: Punta Arenas (Chile)
Convoca: Fac. de Ciencias de la Universidad de Magallanes
Sede: Universidad de Magallanes.
Fecha: 28 al 30 de abril de 2009
Información: www.jzonasur.umag.cl/

10º Simposio de Educación Matemática
Chivilcoy, Argentina
Universidad Nacional de Luján
Fecha: 4 al 7 de Mayo de 2009
Información: www.edumat.org.ar

I EVENTO INTERNACIONAL LA MATEMÁTICA, LA INFORMÁTICA Y LA FÍSICA EN EL SIGLO XXI – FIMAT XXI
Lugar: Holguín (Cuba)
Convoca: Sociedad Cubana de Matemática y Computación
Sede: Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero"
Fecha:26 al 30 de mayo de 2009
Información: ence2009@hlg.rimed.cu - scmc@hlg.rimed.cu

III Congreso de Matemática en España

Convoca: Universidad de Salamanca.
Lugar: Salamanca. Facultad de Ciencias de la Universidad de Salamanca.
Fecha: 1 al 3 de julio de 2009.
Información: http://www.usal.es/~3cm/

23 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 23)
Santo Domingo (República Dominicana)
Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Fecha: 13 al 17 julio de 2009
Información: www.clame.org.mx
clame@clame.org.mx

PME33
Fecha**: 19 al 24 de Julio de 2009**
Lugar: Thessaloniki - Greece
Información: http://igpme.org/default.asp

XVII Congreso Colombiano de Matemáticas

Convoca: Sociedad Colombiana de Matemática
Lugar: Cali.
Fecha: 3 al 6 agosto de 2009
Información: www.scm.org.co

Escuela de Invierno en Didáctica de la Matemática 2009

Lugar: Buenos Aires.
Fecha: 27 al 29 de agosto de 2009

Unión Matemática de América Latina y el Caribe

III CLAM 2009 - CONGRESO LATINO AMERICANO DE MATEMÁTICOS
Lugar: Santiago – Chile
Convoca: Sociedad de Matemática de Chile
Sede: Universidad de Santiago de Chile
Fecha: 31 de Agosto al 4 de Septiembre del 2009.
Información: umalca@fermat.usach.cl

XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Convoca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Lugar: Santander. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria.
Fecha: del 10 al 12 de septiembre de 2009
Información: www.seiem.es

VIII REUNIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DEL CONO SUR
Lugar**:** Asunción del Paraguay.
Convoca**:** Comité de Educación Matemática del Paraguay (C.E.M.P.A)
Fecha: 10 al 12 de septiembre de 2009
Información: jdemestri@hotmail.com

10ª International Conference Models in Developing Mathematics Education
Lugar: Dresden - Alemania
Convoca: "The Mathematics Education into the 21st Century Project" y University of Applied Sciences. Dresden.
Fecha: 11 al 17 de Septiembre de 2009

REUNION ANUAL DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Lugar**:** Mar del Plata (Argentina)
Convoca**:** Unión Matemática Argentina (UMA)
Fecha: 21 al 26 de septiembre de 2009
Información: www.union-matematica.org.ar

IX Seminario Internacional CIMPA

Convoca: IMPA-UNESCO
Lugar: Lima. Perú.
Sede: Universidad Nacional de Ingeniería.
Fecha: 05 -09 de Octubre de 2009
Información: www.imca.edu.pe

Coloquio de la Sociedad Argentina de Estadística.
Convoca : Sociedad Argentina de Estadística
Sede: Ciudad de Catamarca.
Fecha: 7; 8 y 9 de Octubre de 2009.
Información: www.s-a-e.org.ar

VIII CONFERENCIA ARGENTINA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (VIII CAREM)

Lugar**:** Buenos Aires (Argentina)
Convoca**:** Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)
Fecha: 8 al 10 de octubre de 2009
Información: www.soarem.org.ar
soarem1@gmail.com
viiicarem@gmail.com

IV Seminario Internacional de Investigación en Educación Matemática.

Lugar: Universidad Católica de Brasilia – UCB.
Taguatinga – DF- Brasil
Fecha: 25 al 28 de octubre del 2009. Universidad católica de Brasilia – UCB.
Información: www.sbem.com.br

AÑO 2010

8º International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)
Ljubljan, Eslovenia
Universidad Nacional de Luján
Fecha: 11 al 16 de Julio, 2010
Información: http://icots8.org/

AÑO 2011

XIII CIAEM: XIII Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática
Lugar**:** Recife. Brasil
Fecha: 26 al 29 de junio de 2011
Información: http://www.ce.ufpe.br/ciaem2011

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, página 146-147
ISSN: 1815-0640

Normas para publicación en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org con copia a revistaunion@gmail.com. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 15 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen o abstract**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas. Preferiblemente se redactará también en inglés, además de la lengua original utilizada (español o portugués).
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos identificativos en** esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

   Para un libro:

   Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). "La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria". *Educación Matemática* 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). "Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma". *Revista de didáctica de las matemáticas* 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991). "Research on mathematical proof". En: Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Hernández, G., Juárez, I. y Lorenzo, K. (1998). "Recopilación de datos estadísticos y su tratamiento en la enseñanza secundaria". En: Nuez, M. y Pérez, O. (eds.), *Segundo Congreso Americano de Educación Matemática,* 223-234. Editorial JJ, Caracas.

Documentos en línea

Autor, A. A. (año). *Título del trabajo*. Extraído el día del mes de año

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com